К. ФЕЙС

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

2

GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN 191

A series of comprehensive studies in mathematics

CARL FAITH

ALGEBRA II
RING THEORY

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1976

К. ФЕЙС

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

2

Перевод с английского
Л. А. КОЙФМАНА
А. В. МИХАЛЕВА
Т. С. ТОЛЬСКОЙ
Г. М. ЦУКЕРМАН

Под редакцией
Л. А. СКОРНЯКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1979

УДК 519.4

Второй том монографии известного американского алгебраиста (том I вышел в 1977 г.) отражает многие важнейшие идеи, возникшие в теории колец и модулей за последние 15 лет. В нем излагается ряд широко применяемых математиками результатов, которые до сих пор были известны лишь по журнальным публикациям. В книгу включены достижения самых последних лет. С современных позиций рассматриваются и некоторые классические вопросы.

В целом книга весьма полезна всем математикам, работающим в теории колец и модулей или использующим эту теорию. Она может служить учебным пособием для аспирантов и студентов, изучающих современную алгебру.

Редакция литературы по математическим наукам

1702030000

Ф $\frac{20203-012}{041(01)-79}$ 12—79

Предисловие редактора перевода

Как уже отмечалось в предисловии к переводу первого тома этой монографии, современный период развития теории колец характеризуется тесной связью с теорией модулей. Эта тенденция и находит свое проявление в настоящем втором томе. Книга весьма содержательна и отражает многие важные идеи, возникшие в теории колец и модулей за последние пятнадцать лет. В ней излагается ряд результатов, ранее известных лишь по журнальным публикациям, которые в настоящее время широко применяются или полезны идеями, лежащими в основе их доказательств. В тексте можно встретить теоремы, впервые опубликованные в 1975 г. К сожалению, почти полностью игнорируются исследования советских алгебраистов [1]).

Книга вряд ли подходит для первоначального ознакомления с предметом. Однако, владея основами теории колец и модулей, читатель сможет извлечь из нее необходимую полезную информацию, а значение книги для тех, кто ведет исследования в этой области, вообще трудно переоценить.

В процессе перевода был устранен ряд погрешностей английского оригинала, но, к сожалению, нельзя быть уверенным, что удалось исправить все (см. предисловие автора к русскому изданию в т. 1).

Распределение работы между переводчиками было следующим: Л. А. Койфман — гл. 20, 21, 22, 23 и 25, А. В. Михалев — 17, 18, Т. С. Тольская — 24, 26, Г. М. Цукерман — 19.

Всех их мне хочется поблагодарить за самоотверженный труд.

Л. А. Скорняков

---

[1]) Информацию об этих (как, впрочем, и об иностранных) исследованиях, можно извлечь из обзоров, выходящих в сериях «Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия» ВИНИТИ, 1964, 1967, 1970, 1976, 1978, и «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики», ВИНИТИ, 1973 (т. 2), 1975 (т. 5). Подробное изложение общей теории радикалов колец можно найти в недавно вышедшей книге В. А. Андрунакиевича и Ю. М. Рябухина «Радикалы алгебр и структурная теория», «Наука», М., 1979.

Моей семье:
Микки, Хайди и Синди,
Элдриджу, Луизе и Фредерику,
Вирджинии Нелл Кодилл Комптон,
Гарольду Комптону (1895—1964),

и памяти моих родителей
Герберта Спенсера Фейса (1895—1952),
Вилы Белл Фостер Фейс (1897—1962).

Предисловие к т. 2

I. Теория колец

Термин «теория колец», по-видимому, впервые в качестве названия книги был использован Джекобсоном в 1943 г.[1]), и в своем введении Джекобсон отмечает, что теория, являющаяся предметом книги, ведет свое начало с обобщения Артином в 1927 г. структурной теории Веддербёрна, построенной для алгебр, на случай колец, удовлетворяющих условиям обрыва цепей идеалов [2]).

В качестве предшественника своей книги Джекобсон называет «Алгебру» Дейринга (Дейринг [35], [68]), а Дейринг —«Алгебру и теорию чисел» Диксона (1927 г.). Как и в своей более ранней книге «Алгебра и ее арифметика» [23], Диксон расширяет арифметику в полях алгебраических чисел, т. е. арифметику колец целых величин в конечном расширении k поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, на порядки в рациональных алгебрах, т. е. на порядки в алгебрах над полем k.

Джекобсон также приводит в библиографии девять статей своего учителя Веддербёрна; термин «алгебра» появляется в шести заглавиях, а «гиперкомплексные числа»— в остальных. (Другой книгой, оказавшей влияние на становление теории колец, была появившаяся несколько раньше книги Джекобсона книга Алберта 1939 г., предметом которой также были «алгебры», т. е. конечномерные алгебры над полем.) Изучение так называемых «гиперкомплексных числовых систем» первоначально основывалось на желании построить и классифицировать алгебры над полем вещественных или комплексных чисел (отсюда и терминология: гиперкомплексные числа).

---

[1]) См. Джекобсон [47].— *Прим. ред.*

[2]) Мы придерживаемся соглашения, принятого в гл. 1. Например, Джекобсон [47] означает работу Джекобсона, опубликованную в 1947 г. (или ее русский перевод, опубликованный в этом году. — *Ред.*) Если этим автором опубликована в данном году более чем одна работа, то используются малые буквы, например, Джекобсон [45a], [45b] или [45c].

Гамильтону потребовалось 15 лет, чтобы в связи с одной задачей из физики, открыть алгебру $\mathbb{H}$ кватернионов, первое некоммутативное тело. Легенда гласит, что этот результат он получил, проходя по мосту, см. Белл [37, стр. 360].

Другое открытие, также играющее важную роль в физике,— это числа Кэли, образующие неассоциативное тело (содержащее $\mathbb{H}$) размерности восемь над $\mathbb{R}$. (В отличие от Гамильтона с его кватернионами, Кэли не написал на этот предмет трактата, имеющего целью объяснить физический мир. См. Дайсон [72, стр. 301, замечание 5].)

Теоремы Веддербёрна применяются к изучению строения произвольной алгебры A конечной размерности над некоторым полем k: если $W(A)$ — максимальный нильпотентный идеал в A, то фактор-кольцо $A/W(A)$ является произведением конечного числа алгебр, каждая из которых изоморфна полной матричной алгебре над (некоммутативным или коммутативным) телом. Если A — сепарабельная алгебра (случай, когда центр кольца $A/W(A)$ является конечным произведением полей и каждое из этих полей — сепарабельное расширение поля k), то существует ее подалгебра S, такая, что $S \approx A/W(A)$ и

$$A = S \oplus W(A)$$

(прямая сумма векторных пространств над полем k). Это теорема Веддербёрна о факторах (**1**, 13.18, стр. 576) [1]). Она сводит вопрос о строении алгебры A к соответствующему вопросу для алгебр S и $W(A)$, а также к описанию умножения элементов алгебры S на элементы идеала $W(A)$. (Однако это сведение эффективно лишь при определении строения алгебр малых размерностей.)

В 1929 году Брауэр показал, что «классы» простых центральных алгебр над полем k образуют группу $\mathrm{Br}(k)$. Для каждой такой алгебры A рассматривается класс $[A]$, состоящий из всех алгебр B, для которых существуют целые числа m и n, такие, что алгебры матриц A_n и B_m размера $n \times n$ и $m \times m$ над A и B соответственно изоморфны. (В силу теоремы Веддербёрна класс $[A]$ содержит (не обязательно коммутативное) тело D над полем k, т. е. $[A] = [D]$.) В группе $\mathrm{Br}(k)$ имеем $[A]^{-1} = [A^{\mathrm{op}}]$, где A^{op} — алгебра, антиизоморфная A, и, кроме того, $\mathrm{Br}(k)$ — периодическая абелева группа. (В упражнениях к гл. 13 рассматривалась группа Брауэра произвольного коммутативного кольца k.)

В 1921 году Э. Нётер распространила дедекиндову теорию идеалов (и теорию представлений) областей целостности (и колец алгебраических чисел) на случай произвольных коммутативных колец, удовлеторяющих условию обрыва возрастающих цепей идеалов. Такие кольца в настоящее время называются нётеровыми. Эти кольца характеризуются тем свойством, что каждый их идеал конечно порожден. Помимо дедекиндовых, этот класс включает в себя кольца многочленов от любого конечного числа переменных над произвольным полем (теорема Гильберта о базисе **1**, 7.13, стр. 421) и другие кольца, возникающие в классической математике. Кроме того, изучение модулей над этими кольцами составляет важную часть арифметической теории идеалов (см. Нётер [21, стр. 55 и далее]).

В 1927 г. Нётер доказала для групп с операторами «теоремы Нётер о гомоморфизмах», обобщающие на случай модулей многие из теоретико-групповых теорем Крулля и О. Ю. Шмидта (см. Нётер [27, стр. 643 и 645]).

В 1927 г. Э. Артин обобщил некоторые из теорем Веддербёрна для алгебр на случай некоммутативных (т. е. не обязательно коммутативных) колец, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей правых идеалов [1]). (Эти кольца были названы в его честь артиновыми.) Тем самым была устранена зависимость от основного поля скаляров k и конечного базиса над k. Требование обрыва возрастающих цепей правых идеалов в артиновых кольцах оказалось излишним [2]), что было показано, но значительно позднее, Гопкинсом [39] и Левицким [39]. (Обзор этого этапа появится в гл. 18.)

Судя по всему, написание «Теории колец» стимулировало исследования Джекобсона в теории колец, результатом которых явились его наиболее важные с исторической точки зрения статьи (Джекобсон [45a], [45b], [45c]). По-существу, впервые рассматривалась вся категория колец с целью наиболее полного анализа фундаментальных понятий, а не только ее важные подкатегории, возникающие в классической математике: так, в частности, не предполагалось выполнение каких-либо условий обрыва цепей идеалов (хотя приложения для колец с различными условиями обрыва и были приведены), не требовалось существование единицы (и уж, конечно, не предполагалась коммутативность кольца).

Вне всякого сомнения, наиболее важной из этих идей явилась идея введения радикала Джекобсона $\mathrm{rad}\, R$ кольца R, определенного как пересечение всех ядер (нетривиальных) неприводимых правых представлений кольца R и охарактеризованного Джекобсо-

---

[1]) Сссылка вида (**1**, 13.18, стр. 576) означает, что теорема, предложение, упражнение или следствие находится на странице 576 т. 1. Возможен также и такой вид ссылки: 13.18 (**1**, стр. 576).

[1]) Бурбаки [62, 65, 66, гл. 8] приводят интересную историю понятий минимального идеала алгебры (Пуанкаре, 1903 г.), одностороннего идеала (Нётер и Шмайдлер, 1920г.), условия обрыва возрастающих цепей (Дедекинд, 1894 г.) и условия обрыва убывающих цепей (Веддербёрн, 1907 г.).

[2]) Бурбаки (*там же*) отмечают, что Нётер [29] освободилась от условия обрыва возрастающих цепей, предполагая отсутствие нильпотентных идеалов.

ном как наибольший идеал J, удовлетворяющий условию

(q. r) для любого $x \in J$ существует $x' \in R$, такой, что $x + x' + x x' = x + x' + x'x = 0$,

и содержащий любой односторонний идеал, для которого выполняется условие (q. r). Таким образом, для характеризации радикала Джекобсон взял характеризацию Перлиса [42] радикала конечномерной алгебры над полем и распространил ее на случай произвольного кольца. (Термин «квазирегулярный элемент» (т. е. удовлетворяющий условию (q. r)) был предложен Перлисом; квазирегулярным идеалом называется идеал, каждый элемент которого квазирегулярен.)

Другими словами, Джекобсон определил функтор

$$\mathrm{rad}\colon \mathrm{RINGS} \rightsquigarrow \mathrm{RINGS},$$

свойства которого мы сейчас перечислим.

1. Поскольку радикал rad R кольца R был определен с помощью простых (= неприводимых) правых модулей (или представлений), его следовало бы называть «правым» радикалом кольца R. Но Джекобсон показал, что rad R совпадает с «левым» радикалом, определяемым симметрично. Кроме того,

$$\mathrm{rad}(R/\mathrm{rad}R) = 0.$$

2. Радикал rad R можно описать как пересечение всех правых идеалов I, таких, что правый модуль $V_I = R/I$ прост и нетривиален (т. е. $V_I R \neq 0$). Если кольцо R содержит единицу, то любой такой правый идеал является максимальным правым идеалом и обратно. (А тогда rad R является и пересечением максимальных левых идеалов). Существование максимальных правых идеалов в кольце с единицей следует из возможности применения леммы Цорна. Конечно, нильпотентное кольцо не обладает нетривиальными простыми модулями. (Кстати, если $1 \in R$, то элемент $x \in R$ квазирегулярен тогда и только тогда, когда $1 + x$ — обратимый элемент).

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение. Идеал I назовем примитивным справа, если кольцо R/I обладает точным простым правым модулем. Кольцо R называется примитивным справа, если 0 — примитивный справа идеал.

В силу определения rad R является пересечением примитивных справа идеалов. Согласно п. 1, rad R также является пересечением примитивных слева идеалов. Таким образом, простое кольцо примитивно и справа, и слева.

3. Кольцо R примитивно справа тогда и только тогда, когда оно изоморфно плотному кольцу линейных преобразований левого векторного пространства над телом D (теорема плотности Шевалле — Джекобсона, см. Джекобсон [45]).

Если кольцо R примитивно справа и V — точный неприводимый правый модуль, то $D = \mathrm{End}\ V_R$ — тело и (если записывать действие эндоморфизмов слева) V превращается в левое векторное пространство над телом D. Кроме того, кольцо R вкладывается в кольцо $L = \mathrm{End}_D\ V$ каноническим образом и является плотным подкольцом в кольце L, наделенном конечной топологией.

Любое кольцо с единицей обладает примитивным справа идеалом. Любой максимальный идеал примитивен (так как любое простое кольцо с единицей примитивно справа и слева, Джекобсон [45b]). Таким образом, любое «хорошее» кольцо (т. е. такое, что $R \neq \mathrm{rad}\ R$) «интересно» тем, что оно имеет «хороший» гомоморфный образ, являющийся примитивным кольцом [1]). (Вне сомнения, именно эта теорема подчеркивает важность категории всех колец.)

4. Факторкольцо $R/\mathrm{rad}\ R$ либо равно нулю, либо изоморфно подпрямому произведению примитивных справа колец. (Верен также симметричный результат, с заменой примитивных справа идеалов на примитивные слева, хотя, как показал Бергман [64], не каждый примитивный справа идеал примитивен слева.) Обратно, радикал любого подпрямого произведения примитивных справа колец равен нулю.

5. Радикал rad R «функториален» в том смысле, что любая эквивалентность категорий

$$T\colon \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}S$$

для колец R и S индуцирует эквивалентность категорий

$$\text{mod-}(R/\mathrm{rad}\ R) \rightsquigarrow \text{mod-}(S/\mathrm{rad}\ S)$$

(Джекобсон доказал этот факт на другом языке.)

6. Радикал rad R содержит любой односторонний ниль-идеал (односторонний идеал называется ниль-идеалом, если каждый его элемент x нильпотентен, т. е. $x^n = 0$ для некоторого числа n, зависящего от x), и, следовательно, rad R содержит любой нильпотентный односторонний идеал (т. е. односторонний идеал, для которого существует такое число N, что всякое произведение $x_1 x_2 \ldots x_N$ его N элементов $x_1, x_2, \ldots, x_N$ равно нулю).

Радикал Веддербёрна $W(R)$ кольца R определяется как наибольший нильпотентный идеал (если он существует). В коммутативном кольце R под «радикалом» идеала I понимают идеал

$$\sqrt{I} = \{x \mid \exists n = n(x) \quad x^n \in I\}.$$

Идеал $\sqrt{0}$ называется ниль-радикалом кольца R. (Если кольцо R нётерово, то $\sqrt{I}$ является нильпотентным идеалом по модулю идеа-

[1]) «Плохие» кольца представляют интерес с противоположной точки зрения: существуют ли простые кольца, совпадающие со своим радикалом? (Ответ: да, Кон и Сонсяда [67]). Будет ли радикал конечно порожденного кольца ниль-идеалом? (См. п. 6.) Когда ниль-идеал нильпотентен? (См. гл. 17.)

ла I, и, следовательно, в этом случае $W(R/I) = \sqrt{I}/I$. При этом $W(R)$ является ниль-радикалом кольца R; отсюда и происходит термин радикал.) В некоммутативном кольце радикал Веддербёрна $W(R)$ существует, если, например, кольцо R нётерово справа или слева. Если же кольцо R артиново справа, то $\operatorname{rad} R = W(R)$.

Крулль [50] обратил внимание на взаимосвязь между теоремой Гильберта о нулях и радикалом Джекобсона. Это оказалось связанным с вопросом о том, когда радикал Джекобсона конечно порожденной алгебры над полем является ниль-идеалом. Он будет ниль-идеалом, например, для коммутативных алгебр (Крулль [51], Голдман [51]), для алгебр над несчетным полем (Амицур [56]) и для алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству (Амицур [57]). Последняя теорема тесно связана с некоммутативным вариантом теоремы Гильберта о нулях, причем многие из результатов о кольцах Джекобсона и Гильберта обобщены Амицуром и Прочези [66], а также Прочези [67].

Можно было бы расширить описание вклада Джекобсона в теорию колец, но, конечно, это гораздо лучше отражено в его «Строении колец» (а также в других его монографиях). Значительная часть нашего второго тома существенным образом использует теоретико-кольцевые идеи Джекобсона. В дополнение к сказанному среди многих математиков, использовавших и существенно развивших теоретико-кольцевые идеи Джекобсона, мне хотелось бы отметить Капланского и Херстейна, в особенности в связи с их работами, касающимися проблемы Куроша, колец с полиномиальными тождествами, топологических колец, лиевой или йордановой простоты простых ассоциативных колец и так называемых «теорем о коммутативности» (по образцу знаменитой теоремы Веддербёрна о коммутативности конечных тел). Их книги доставили мне огромное удовольствие и я так много почерпнул из них [1]).

II. Теория модулей

Можно было бы определить теорию модулей как структурную теорию модулей, удовлетворяющих тем или иным условиям (например, нётеровых, артиновых, полусовершенных или неразложимых модулей), без ограничений на кольцо. Один из примеров результатов такого типа: над любым кольцом любой нётеров или артинов модуль может быть разложен в прямую сумму неразложимых модулей. Такая теория включала бы, конечно, результаты

[1]) Статья Капланского «Проблемы теории колец» отражает его влияние на этот круг вопросов (Капланский [70a]), и, кроме того, второе издание его «Бесконечных абелевых групп» содержит обширный обзор литературы, прямо или косвенно связанной с первым изданием (Капланский [69]). В этом же духе написаны и «Заметки с конференции по теории колец» Херстейна (Херстейн [71]).

о строении модулей над различными классами колец, над нётеровыми, артиновыми, полусовершенными или неразложимыми кольцами. Другой аспект теории модулей — выяснение связей между произвольным модулем и некоторыми каноническими модулями (например, правыми идеалами $\{I_a\}_{a\in A}$ кольца R или циклическими модулями $\{R/I_a\}_{a\in A}$). Модули в этих примерах, можно сказать, «даны» нам и образуют множество (в противоположность классу). Любопытно, что «правые идеалы» и «циклические правые модули» дуальны в том смысле, что один класс является классом подобъектов, а другой — классом факторобъектов модуля R_R. В классических результатах многое о классе mod-R можно было бы сказать в терминах этого множества модулей. (Эту задачу можно сравнить с проблемой исследования Вселенной при наличии в руках одного лишь телескопа.)

Тем не менее, даже для $R = \mathbb{Z}$ (кольцо целых чисел) эти модули описывают все конечно порожденные абелевы группы. Аналогичная теорема справедлива для конечно порожденных модулей над наследственным нётеровым первичным кольцом R (над HNP-кольцом): каждый конечно порожденный модуль является прямой суммой цепных модулей (даже модулей с единственным композиционным рядом) и правых идеалов. Это доказывается следующим образом. Из теоремы Капланского (1, стр. 474) о модулях над наследственными кольцами следует, что периодический подмодуль $t(M)$ выделяется в M прямым слагаемым, а модуль $M/t(M)$ изоморфен прямой сумме правых идеалов. Далее, применяя теорему Айзенбуда, Гриффитса и Робсона 25.25.1, получаем, что по модулю любого ненулевого идеала кольцо R является артиновым полуцепным кольцом. Поэтому в силу теоремы Накаямы 25.4.2 модуль $M \approx t(M) \oplus M/t(M)$ изоморфен прямой сумме цепных модулей и правых идеалов.

Кольцо не обязано быть нётеровым справа для того, чтобы конечно порожденные модули имели такое разложение. В действительности, теорема Капланского [52] утверждает, что над любым почти максимальным кольцом нормирования любой конечно порожденный модуль является прямой суммой циклических модулей. В действительности это свойство характеризует почти максимальные кольца нормирования среди коммутативных локальных колец (теорема 20.49).

Однако лишь из более сильных условий следует нётеровость кольца справа. Допустим, что имеется множество S правых R-модулей, такое, что каждый правый R-модуль может быть вложен в прямую сумму модулей из этого множества. Тогда кольцо R нётерово справа (теорема Фейса — Уокера 20.7). Верно и обратное утверждение.

Кроме того, если каждый правый R-модуль изоморфен прямой сумме модулей из множества S, то кольцо R должно быть артиновым справа (теорема 20.23). Уорфилд [72a] показал, что коммутативное кольцо обладает этим свойством тогда и только тогда, когда оно является артиновым кольцом главных идеалов. В этой же статье Уорфилд доказывает, что над коммутативным кольцом каждый модуль является прямой суммой неразложимых модулей тогда и только тогда, когда R — артиново кольцо главных идеалов.

Теорема Матлиса — Паппа 20.5 утверждает, что каждый инъективный модуль над кольцом R разлагается в прямую сумму неразложимых модулей тогда и только тогда, когда кольцо R нётерово справа. (Мы обсудим далее ситуацию, когда каждый модуль является прямой суммой неразложимых модулей).

Другая теорема (24.20), которая также иллюстрирует принцип «хорошие свойства модулей отражают хорошие свойства кольца (и отражаются в них)», показывает, что каждый проективный правый R-модуль инъективен тогда и только тогда, когда кольцо R квазифробениусово (QF-кольцо), что равносильно также проективности каждого инъективного R-модуля. Отсюда, например, можно вывести, что если каждый правый модуль изоморфен прямой сумме правых идеалов, то R есть QF-кольцо (поскольку в этом случае каждый инъективный модуль проективен). QF-кольца являются артиновыми кольцами с двойственностью между конечно порожденными правыми и левыми модулями, индуцированной функтором $\mathrm{Hom}_R(\ ,R)$ для кольца R, и могут быть охарактеризованы как самоинъективные справа кольца с условием обрыва убывающих цепей левых (правых) аннуляторных идеалов. (См. гл. 24).

Выяснение вопроса о том, когда в категории mod-R *правых* R-модулей каждый модуль имеет проективное накрытие (свойство, дуальное свойству, что каждый модуль обладает инъективной оболочкой, Басс [60]; см. гл. 22), интересно тем, что это равносильно условию обрыва убывающих цепей главных *левых* идеалов. Этот класс колец строго содержит класс всех артиновых слева колец.

После основной теоремы о строении абелевых групп наиболее известной среди интересующих нас сейчас теорем является теорема Веддербёрна — Артина (**1**, 8.9, стр. 454), определяющая мультипликативное строение кольца, над которым каждый модуль полупрост (т. е. является прямой суммой простых правых модулей): кольцо подобно (т. е. эквивалентно в смысле Мориты) произведению конечного числа тел. (Это утверждение остается верным, если полупростоту заменить на инъективность или проективность.)

Накаяма [39, 41], [40] аналогичным образом охарактеризовал артиновы кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой цепных модулей (это кольцо является рядным кольцом в том смысле, что каждый правый или левый главный неразложимый модуль является артиновым цепным модулем). Накаяма охарактеризовал артиновы полуцепные кольца как артиновы кольца, над которыми каждый конечно порожденный неразложимый модуль является эпиморфным образом главного неразложимого модуля. (Эти кольца и даже более широкий класс колец, над которыми каждый конечно порожденный правый модуль является прямой суммой циклических модулей (σ-циклические справа кольца) рассматриваются в главе 25.) Над полуцепным QF-кольцом каждый правый модуль является прямой суммой главных правых идеалов (предложение 25.4.17).

Значительная часть теории модулей нацелена на описание неразложимых конечно порожденных модулей (по крайней мере над нётеровыми справа кольцами, над которыми каждый конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму неразложимых модулей!). Пусть M — неразложимый модуль над нётеровым справа кольцом R, и допустим, что M — конечно порожденный модуль, а $g(M)$ — наименьшая возможная мощность множества его образующих. В общем случае существуют неразложимые модули M со сколь угодно большими значениями $g(M)$. Действительно, в силу теоремы Хигмана [54] это так, если R — групповая алгебра над полем характеристики p, а группа обладает нециклической силовской p-подгруппой G конечного порядка n; в частности, конечные кольца могут обладать этим свойством! (Однако в случае циклической силовской p-подгруппы число n ограничено «числом» неразложимых модулей (Каш — Кнезер — Куппиш [57]).

Далее допустим, что множество чисел $\{g(M)\}$ ограничено. Это вполне разумное условие конечности, которое часто встречается в классической алгебре. (Например, как мы видели, оно выполнено для полуцепных колец.) Такое кольцо называется правым FBG-кольцом или кольцом ограниченного модульного типа. В коммутативном локальном FBG-кольце R идеалы линейно упорядочены (Уорфилд [70]); это показывает, насколько сильным ограничением является условие быть FBG-кольцом.

Другое условие конечности часто возникает в теории конечномерных алгебр и артиновых колец в связи с вопросом, будет ли каждое правое FBG-кольцо обладать лишь конечным числом классов изоморфных неразложимых конечно порожденных правых модулей. Кольцо, удовлетворяющее последнему условию, называется правым FFM-кольцом или кольцом конечного модульного типа. (Полуцепные кольца являются правыми и левыми FFM-кольцами.) В этих терминах вопрос сводится к справедливости импликации FBG $\Rightarrow$ FFM. Для конечномерных алгебр над полем этот вопрос известен как гипотеза Брауэра — Тролла, которая была доказана А. В. Ройтером [68]. Для артиновых колец Ауслендер [74] доказал эту гипотезу, используя несколько иные методы.

Хотя эти теоремы не включены в текст, по характеру они близки к многим теоремам из текста книги, и, на самом деле, их обобщают.

Ввиду их важности, мы воспользовались возможностью познакомить с ними читателя.

Ауслендер [74, следствие 4.8], Рингель и Тахикава (Тахикава [73, стр. 129, следствие 9.5]) доказывают, что если R — артиново справа FFM-кольцо, то каждый неразложимый правый R-модуль конечно порожден и каждый правый R-модуль является прямой суммой неразложимых модулей.

Кроме того, Тахикава [73] также показывает, что все модули имеют разложения с дополняемыми прямыми слагаемыми (т. е. $M = \sum_{i \in I} \oplus M_i$ и для любого прямого слагаемого P существует подмножество J множества I, такое, что [1]) $M = (\sum_{j \in J} \oplus M_j) \oplus P$. Фуллер и Райтен доказывают обратное утверждение для колец, над которыми правые и левые модули имеют разложения с дополняемыми прямыми слагаемыми. Ауслендер [74] показал, что артиновы алгебры оказываются FFM-кольцами, если каждый неразложимый левый модуль конечно порожден. Кроме того, теорема Фейса и Э. Уокера [67] наносит последний штрих: если каждый инъективный левый модуль является прямой суммой конечно порожденных модулей, то кольцо R артиново слева (теорема 20.17). (Это свойство характеризует коммутативные артиновы кольца (следствие 20.18): как было сформулировано ранее, если каждый левый R-модуль разлагается в прямую сумму модулей ограниченной мощности, то кольцо R артиново слева (теорема 20.23).)

Возвращаясь к циклическим модулям, естественно задать вопрос: почему они так важны для многих структурных теорий? Возможный ответ: каждое правое FBG-кольцо R подобно кольцу A, над которым каждый конечно порожденный модуль является прямой суммой циклических модулей. (Это легко доказывается, см. теорему 20.39.) Кроме того, в этом случае кольцо R является правым FFM-кольцом тогда и только тогда, когда A обладает лишь конечным числом неизоморфных неразложимых циклических модулей. Так как изоморфные модули имеют одинаковые аннулирующие идеалы, то в некоторых случаях, например, если кольцо артиново справа, структура идеалов такого FFM-кольца оказывается конечной (20.4.4). В то же время строение структуры правых идеалов правого FFM-кольца пока не выяснено достаточно полно (эти результаты трудно еще сравнивать с соответствующей теорией для полуцепных колец). Но для решения этой задачи имеются разумные подтверждения в джунглях частных случаев, разобранных к настоящему времени.

[1]) Это понятие принадлежит Андерсону и Фуллеру [72], его связи с идеями Кроули и Йонссона [64], а также Уорфилда [72] обсуждаются в замечаниях к гл. 21.

III. Алгебра

Я закончу предисловие как несколькими общими высказываниями, так и рядом более конкретных. Алгебра, как и другие ветви математики, систематически использует весьма общие геометрические свойства — я имею в виду такие простые понятия, как вверх — вниз, слева — справа, координатные последовательности симметрия — асимметрия, подразделения, разбиения, принцип «голубиного гнезда [1])», эквивалентность, двойственность и другие. (Продолжение этого списка могло бы привести к бóльшему числу пропусков, чем я хотел бы!)

Ввиду общности, которой обладают математические утверждения, термин «абстрактный» часто применяется к тому, что на самом деле является весьма конкретным. Например, обычно публикуются теоремы, а «теории»— редко (если вообще они публикуются). (Использование в немецком языке слова Satz, т. е. предложение, для теоремы, мне кажется, прекрасно иллюстрирует эту мысль.)

Путаница с тем, что абстрактно, а что конкретно, возникает, как мне кажется, из желания математика превратить конкретный материал в насколько возможно общее высказывание, отбрасывая ненужные (т. е. неиспользованные) предположения. Но что прежде и сильнее всего привлекает математика, так это конкретное, реальное и действительно полезное. (Я не собираюсь отрицать роль красоты — красота математических утверждений является полезным организующим принципом.)

Позвольте мне привести в качестве иллюстрации следующий пример: Кёте доказал, что артиново коммутативное кольцо R, для которого каждый правый модуль является прямой суммой циклических (т. е. $\sum$-циклическое справа кольцо), является цепным кольцом. И. Коэн и Капланский [51] заметили, что предположение об артиновости кольца R излишне. Чейз [60], в то время студент Капланского, доказал, что предположение о коммутативности не является необходимым для утверждения об артиновости справа кольца и, более того, циклические модули в этом утверждении можно заменить на конечно порожденные (но кольцо тогда уже, конечно, не обязано быть полуцепным). Наконец, было замечено, что конечность числа модулей, выступающих в качестве прямых слагаемых, не играет никакой роли: если существует множество модулей, такое, что каждый правый модуль разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных модулям из этого множества, то кольцо артиново справа. Доказательство этого факта, приводимое в гл. 20, существенно использует другую теорему Чейза [60] о разложении модулей в прямую сумму: если существует кардинальное число c, такое, что $c \geqslant |R|$ и произведение R^c является

[1]) «pigeon-hole» principle: если имеем $n+1$ шаров, размещенных в n ящиках, то хотя бы один ящик содержит $\geqslant 2$ шара.— *Прим. перев.*

чистым подмодулем (например, прямым слагаемым) прямой суммы правых R-модулей мощности, не превосходящей c, то кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных левых идеалов. Последние кольца являются, на самом деле, кольцами, которые Басс [60] (тогда также студент Капланского!) изучал в связи с требованием существования у каждого правого модуля проективного накрытия. Басс назвал такие кольца совершенными справа. Многое из структурной теории артиновых не классически полупростых колец было перенесено Бассом на совершенные кольца. (Обзор этих результатов дан в гл. 22.)

Проблема Кёте [35] о строении $\sum$-циклических колец все еще открыта. Работы Накаямы [39, 41], [40] об артиновых полуцепных кольцах показали, что класс $\sum$-циклических колец шире, чем класс артиновых полуцепных. Кавада провел обширное исследование и дал полное решение в одном частном случае, но даже в нем было 19 (или около этого) страшных условий, полагаю, необходимых и достаточных.

В свою очередь, Капланский [69] поставил вопрос о строении σ-циклических справа колец или колец, над которыми каждый конечно порожденный модуль является прямой суммой циклических модулей. Как отмечалось, теорема Кёте выясняет строение коммутативных $\sum$-циклических колец, в то время как Капланский в [49], [52] и в других статьях решает эту задачу для коммутативных локальных колец. Для произвольных коммутативных колец этот вопрос все еще открыт. (Кое-что из этого материала приведено в гл. 20 и 25.)

Тем временем исследования по проблемам, затронутым здесь, продолжаются, а примыкающие проблемы о строении правых идеалов колец конечного модульного типа (FFM-колец) обсуждаются во введении к т. 2.

Справившись, в некотором смысле, с задачей, как связать первые две части предисловия, и описав ряд идей Накаямы, позвольте напомнить его заключительное замечание на Международном конгрессе математиков в 1950 г. в Амстердаме (оно перепечатано в работе Накаямы [50b]) по весьма схожему поводу:

Пишущему эти строки кажется, что наши вопросы связаны друг с другом гораздо глубже, чем об этом было сказано в начале.

IV. Внесшие основной вклад

Основной вклад в излагаемые вопросы внесли: Г. Адзумая, Д. Айзенбуд, Ш. Амицур, Э. Артин, К. Асано, М. Ауслендер, Х. Басс, Г. Бернсайд, Дж. Бичи, Р. Брауэр, Я.-Э. Бьерк, Р. Бэр, П. Вамош, Д. Веббер, Дж. Веддербёрн, К. Гаусс, О. Гёльдер, Д. Гилл, Д. Гильберт, А. Голди, К. Гопкинс, Ф. Гриффитс, К. Гудёрл, Р. Дедекинд, Н. Джекобсон, Р. Джонсон, Ж. Дьёдонне, М. Икеда, И. Капланский, Г. Кёте, Дж. Коззенс, Э. Колчин, П. Кон, И. Коннел, И. Коэн, Л. Кронекер, Р. Круазо, В. Крулль, И. Ламбек, Ч. Ланский, Ж. Лафон, Л. Леви, Дж. Левицкий, Л. Лезье, Н. Маккой, Э. Матлис, Э. Машке, Ю. Миясита, К. Морита, Т. Накаяма, Дж. фон Нейман, Э. Нётер, О. Оре, Б.Ософская, З. Папп, С. Перлис, Р. Ремак, Дж. Робсон, Ф. Сандомирский, Э. Своковский, Л. Смолл, Р. Суон, Х. Тахикава, Э. Уоркер, Э. Уонг, Р. Уорфилд, Ю. Утуми, Э. Феллер, Дж. Финдлей, Г. Фиттинг, Г. Фробениус, К. Фуллер, М. Харада, И. Херстейн, А. Чаттерс, С. Чейз, К. Шевалле, О. Ю. Шмидт, Р. Шок, А. Шопф, О. Шрейер, Э. Штейниц, И. Шур, С. Эйленберг, Б. Экман.

Читатели, знакомые с моими научными интересами, не удивятся доминирующей роли инъективных и проективных модулей в упрощении, прояснении, расширении и углублении многих результатов классической алгебры. Было бы бессмысленно приводить здесь примеры, поскольку этому посвящена значительная часть текста, но нельзя не отметить, что даже теорема плотности Шевалле — Джекобсона умещается в эти рамки.

Нет нужды говорить, что другой автор произвел бы другой отбор материала. Но некоторые статьи, особенно такие «прорывы», как работа А. В. Ройтера [68], затрагивают ряд важных теорем классической математики и, следовательно, вынуждают переписывать математику заново. Если бы я отнес статью такой силы в группу «включенных» в текст статей, я не только исказил бы ее потенциальные возможности в свете пересмотра математики, но и нарушил бы свои планы. Конечно, математика еще не остановилась в своем развитии!

V. Благодарности

Альберт Эйнштейн, как говорят, утверждал, что учителя, если они не способны на большее, должны хотя бы подавать своим студентам пример того, чего следует избегать. В этой связи я должен признаться: я начал книгу летом 1965 г. в Институте высших исследований, продолжил работу над ней в Беркли в 1965—1966 гг. (где я завершил летом 1966 г. первый вариант второго тома), внес изменения и дополнения, особенно касающиеся теории категорий (это описано во введении к первому тому) в Принстоне в 1969 г. (оба года я получал стипендию факультета, присужденную Ратгерским научным советом), и теперь пишу эти строки в период моего годичного отпуска в Институте высших исследований — там, где я начинал. Sic semper scriptor [1]).

Одного лишь упоминания о прекрасном коллективе и великолепных условиях для работы в Институте высших исследований явно

[1]) Так всегда случается с писателями! (*лат*).

недостаточно для того, чтобы отразить их важность для меня. Преданность математике и разумное мышление сотрудников института служило неограниченным источником вдохновения и невыразимой радости, поддерживавших меня во время моей работы.

Более того, возможность свободно и широко обсуждать вопросы и идеи, которую я имел в этом Институте, уникальна даже в сравнении с другими действительно прекрасными учреждениями. Этими словами мне хочется воздать дань восхищения тем, кто постоянно борется за сохранение такой научной атмосферы, и подчеркнуть мое стремление быть среди них.

Без заинтересованности и понимания издателей из Springer-Verlag эта книга никогда бы не появилась на свет. Расходы на издание прекрасных шпрингеровских книг очень велики и обязательство опубликовать их не является таким уж безобидным. За публикацию этой книги я больше всего обязан одному из двух главных редакторов серии «Grundlehren des mathematischen Wissenschaften» профессору Экману. Я весьма благодарен также профессору Дольду за его участие в принятии этого решения.

Я благодарен сотрудникам Института высших исследований за большую помощь в подготовке рукописи (в бесконечном числе вариантов). Если бы не безграничная помощь секретаря отдела мисс Кэролин Ундервуд, а также мисс Эвелин Лорент из Вычислительного центра, я бы потерял всякую надежду закончить книгу. Я не нахожу слов для выражения моей благодарности им.

Мисс Юдифь Фрайди Лайдж решила многие технические проблемы своими дружескими советами и своим влиянием в отделении математики Ратгерского университета, а мисс Анн-Мэри Макгарри перевела ровно столько из написанного мною на понятный английский язык, сколько я мог ей позволить. Глубокая моя им признательность. Я рад поблагодарить также миссис Мэри Анн Яблонски, Аннет Розелли, Элис Вайсс (из Ратгерса), миссис Ирэн Абаньяли и Иоханну Радкин (из Института), затративших много времени и сил, помогая мне.

Я благодарен за ряд ответов на различные вопросы, возникшие в связи с текстом книги, Х. Бассу, Р. Бауэру, Дж. Бичи, А. Бойл, Р. Бэру, Р. Виганду, В. Васконселосу, К. Гудёрлу, Дж. Иванову, И. Капланскому, Дж. Коззенсу, Э. Колчину, Р. Уорфилду, Э. Форманеку, Л. Фуксу, К. Фуллеру, Т. Шоресу, А. Ятегаонкару. Я весьма обязан также Д. Горенштейну и К. Найдеру.

Сомневаюсь, что кто-нибудь когда-нибудь нашел способ достойно поблагодарить каждого, кто помогал ему или ей поддержкой, дружбой или личным примером. Поэтому разрешите мне просто сказать спасибо всем тем, чьи имена должны были бы быть здесь, имена тех, кто так помог мне тем или иным образом.

Сентябрь 1975 *Карл Фейс*

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ И ТЕРМИНАХ

Они приведены в первом томе на стр. 675. Если не оговорено противное, то будет предполагаться, что кольцо R содержит единицу, а mod-R — категория унитарных правых модулей (т. е. $x1 = x$ для всех $x \in M$, где M — произвольный правый модуль). Как уже отмечалось в первом томе на стр. 160—161, гомоморфизмы пишутся с противоположной стороны от скаляров.

Повсеместно используется выражение «кольца A и B подобны», означающее существование эквивалентности между категориями mod-$A \approx$ mod-B (в литературе также используется выражение «кольца A и B эквивалентны в смысле Мориты»). Подобие в первом томе появляется на стр. 275 в теореме Мориты 4.29 [1]). Обозначение $A \sim B$ используется для отношения подобия, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Мы используем новый символ $A \hookrightarrow B$ для обозначения вложения группы или модуля A в B.

Кольцо, в котором не предполагается существования единицы, называется предкольцом (таким образом, любой собственный идеал является предкольцом).

Как и в первом томе, я привожу примыкающие результаты в виде «упражнений». Хотелось бы подчеркнуть, что это действительно удобно и в то же время дает пищу для размышлений интересующемуся читателю. Ни в коей мере это не следует рассматривать как «разжалование в упражнения» некоторых важных теорем (ряд моих результатов и результатов моих соавторов можно увидеть именно в таком виде!). Мало вероятно, по-видимому, что доказательства многих из этих результатов будут восстановлены новичками, однако мне кажется, что это и есть как раз правильный путь овладения математикой: *совершить или умереть*! (Некоторой компенсацией является тот факт, что бóльшая часть статей с этими результатами опубликована!!)

---

[1]) Обычно в тексте для ссылок такого типа используется сокращение: **1**, 4.29, стр. 275

ВВЕДЕНИЕ К Т. 2

В этой книге главным образом разбираются вопросы теории колец, рассматривавшиеся уже после выхода монографии Джекобсона «Строение колец» [56, 64], а весь второй том целиком посвящен теории колец. Возможно, будет полезно сделать ряд замечаний о пересечении с книгой Джекобсона. Второе ее издание [64] содержит три приложения, пересекающиеся с нашей книгой, в основном, по теореме Голди — Лезьё — Круазо (гл. 9), по теореме Фейса — Утуми (гл. 10), по теореме Веддербёрна об отщеплении радикала и по теоремам Амицура о радикале Джекобсона колец многочленов и групповых колец (гл. 26). Однако некоторые обобщения и применения теорем Голди и теоремы Фейса — Утуми в гл. 9, 10, 18 и 19 являются новыми.

С другой стороны, мы включили в свою монографию ряд теорем, не вошедших во второе издание книги Джекобсона. Воспользуемся представившейся возможностью и кратко представим часть V книги, перечислив некоторые из них:

1. Теоремы Мориты [58] об эквивалентностях категорий модулей mod-$A \approx$ mod-B (гл. 4 и 12, а применения — повсеместно в т. 2).

2 (гл. 18). Теоремы Крулля — Шмидта для аддитивных категорий с расщепляющимися идемпотентами, строение и характеризация полулокальных колец, в которых идемпотенты можно поднимать по модулю радикала, как колец эндоморфизмов модулей с конечной «диаграммой» Адзумаи или Крулля — Шмидта, структурная теория Гопкинса — Левицкого — Кёте — Эйленберга — Нагао — Накаямы — Асано — Чейза полупримарных колец и колец с полулокальными правыми кольцами частных.

3 (гл. 19). Квазиинъективные модули и самоинъективные кольца, понятие рационального расширения Ламбека — Финдлея и максимальное правое кольцо частных Джонсона [51]— Утуми [56], а также регулярные кольца Неймана, появляющиеся как кольца частных, и спектр первичных идеалов регулярных самоинъективных колец (Гудёрл [73]).

4 (гл. 20 и 21). Теоремы о прямых разложениях для колец и модулей (Адзумая, К. Асано, Басс, Бэр, Гилл, Голди, Кайо, Капланский, Картан, Кёлер, Куршан, Лафон, Леви, Матлис, Папп, Рено, Робсон, Суон, Уорфилд, Фейс, Чаттерс, Чейз, Эйленберг), а также теорема Адзумаи о единственности разложения

(вариант теоремы Крулля — Шмидта для бесконечного числа слагаемых).

5 (гл. 22). (Полу)совершенные кольца (т. е. кольца, над которыми все (конечно порожденные) модули обладают проективными накрытиями (понятие проективного накрытия дуально понятию инъективной оболочки). Трансфинитная (T-)нильпотентность радикала Джекобсона (Басс [60]) и теория Брауэра блоков, обобщенная на совершенные кольца.

6 (гл. 23). Двойственность Мориты [58], Адзумаи [59] и Тахикавы [58].

7 (гл. 24). Строение квазифробениусовых колец (Накаяма [39, 41], Икеда [51], [52], Эйленберг и Накаяма [55], [57], Дьёдонне [58], Морита [58], Фейс и Э. Уокер [67] и другие).

8 (гл. 25). Результаты Кёте [35], К. Асано [39] и Накаямы [39, 41] о строении полуцепных колец в обобщенной форме, принадлежащей Уорфилду [75], выясняющие, когда каждый конечно представимый модуль является прямой суммой цепных модулей.

Наиболее тесно примыкают к вопросам о радикале и полупростоте в смысле Джекобсона [45], [56, 64] гл. 18 и 26. (Другие главы носят заметно более гомологический характер.)

Обрисуем в общих чертах содержание второго тома. Более детальные комментарии можно найти во введениях к главам. (См. также заключительные замечания к главам.)

Глава 17: Модули, длина Жордана — Гёльдера которых конечна, теорема Куроша — Оре о модулярных структурах, теорема Шрейера об уплотнении, лемма Фиттинга, теоремы Кёте — Левицкого и Колчина об одновременном приведении матриц к верхней треугольной форме и теоремы Левицкого, Херстейна, Ланского, Шока и Смолла о нильпотентности в ряде случаев ниль-идеалов (ниль-подколец).

Глава 18: Радикал Джекобсона кольца и его характеризация Перлиса — Джекобсона, лемма Накаямы, косущественные подмодули, кольца степенных рядов, p-адические числа, китайская теорема об остатках и ряд других, уже упомянутых выше, вопросов.

Глава 19: Характеризация Джонсона — Уонга квазиинъективных модулей (QI-модулей) как вполне инвариантных подмодулей своей инъективной оболочки, квазиинъективная оболочка модуля, теорема плотности Шевалле — Джекобсона для простых модулей, которая получается в качестве следствия аннуляторного условия для QI-модулей (см. Джекобсон [64] и Джонсон — Уонг [61]).

Доказывается следующая теорема Утуми: Если E — квазиинъективный модуль и $A = \text{End } E_R$, то кольцо $A/\text{rad } A$ регулярно в смысле Неймана, a rad A совпадает с множеством эндоморфизмов, ядра которых существенны. Кроме того, в силу теорем Уонга — Джонсона, Утуми и Ософской, кольцо $A/\text{rad } A$ самоинъективно справа. В гл. 19 также содержится теорема Ламбека о том, что максимальное правое кольцо частных Джонсона — Утуми $\overline{\overline{R}}$ кольца R является кольцом биэндоморфизмов инъективной оболочки модуля R. Если кольцо R антисингулярно справа, то кольцо $\overline{\overline{R}}$ самоинъективно справа и регулярно (см. 19.35).

Доказывается ряд теорем о модулях, конечно порожденных над своим кольцом эндоморфизмов (такие модули мы называем эндоконечными), включая утверждение о том, что из квазиинъективности этих модулей следует их инъективность по модулю аннулятора. (Необходимое и достаточное условие для инъективности по модулю аннулятора квазиинъективного модуля дает теорема Фуллера: любое произведение экземпляров этого модуля является квазиинъективным). Первичное правое кольцо Голди R, т. е. кольцо R с классически полупростым классическим правым кольцом частных, можно охарактеризовать как кольцо, которое обладает точным эндоконечным неразложимым инъективным правым R-модулем E без нетривиальных вполне инвариантных подмодулей.

Глава 20: Кольцо является нётеровым справа тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(a) существует кардинальное число c, такое, что каждый инъективный правый модуль является прямой суммой модулей, порожденных не более чем c элементами (или содержится в ней) (Фейс и Уокер Э. [67]).

(b) Каждый инъективный правый модуль является прямой суммой неразложимых модулей (Матлис [58] и Папп [59]).

Если каждый R-модуль допускает разложение, рассмотренное в пункте (a), то R — артиново справа кольцо (Гриффитс [70], Вамош [71] и Фейс [71c]). Это можно вывести из сказанного выше и теоремы Чейза о том, что модуль удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных левых идеалов, если каждое произведение R^b экземпляров R является чистым подмодулем прямой суммы модулей, порожденных c элементами (для некоторого кардинального числа c, зависящего от кольца R).

$\sum$-циклическим справа кольцам, т. е. кольцам, над которыми каждый модуль является прямой суммой циклических модулей посвящена глава 25. Некоторые теоремы на эту тему появляются уже в главе 20, например, теоремы Капланского [52] и Матлиса [66] (для областей целостности), а также Лафона [71a], Гилла [71] и Уорфилда [71], утверждающие, что коммутативное локальное кольцо является σ-циклическим тогда и только тогда, когда оно — почти максимальное кольцо нормирования (в смысле Капланского [52]). Некоторые некоммутативные обобщения этой теоремы Ру [72] и Уорфилдом [75] появляются в гл. 25. Кроме того, в главе 25 доказывается, что над коммутативным кольцом R каждый инъективный модуль является прямой суммой циклических модулей тогда и только тогда, когда кольцо R квазифробениусово.

В гл. 20 также включена теорема Чаттерса [72] о разложении наследственного нётерова кольца R в произведение первичных или артиновых колец. Это же разложение имеет место для колец главных идеалов по теореме Крулля — Асано — Голди, однако ни та, ни другая теорема не следуют друг из друга. В то же время мы приводим критерий Робсона для такого разложения в нётеровых кольцах, из которого (правда, несколько усиленного) уже вытекают обе теоремы.

Глава 21. Определение диаграммы Адзумаи для объекта абелевой категории, т. е. разложение его в прямую сумму объектов с локальными кольцами эндоморфизмов. Теорема Адзумаи: диаграмма Адзумаи единственна с точностью до автоморфизма. Если прямая сумма содержит лишь конечное число слагаемых, то получаем диаграмму и теорему Крулля — Шмидта.

Над полным в J-адической топологии кольцом R (здесь $J = \operatorname{rad} R$) каждый конечно порожденный модуль обладает диаграммой Крулля — Шмидта (Суон [68]).

В главу 21 также включены теоремы о прямых слагаемых диаграмм Адзумаи модуля M, выясняющие вопрос, являются ли они диаграммами Адзумаи? Это так для конечных диаграмм Адзумаи или в случае, когда неразложимые слагаемые инъективны (Матлис [58], Фейс и Уокер Э. [67]), а также в счетном случае (Фейс и Уокер Э. [67] и Уорфилд [69b]; что касается последней статьи, то здесь мы ограничиваемся лишь счетно порожденными модулями M.)

Глава 22. Правый идеал I называется исчезающим справа, если каждая последовательность $\{a_1a_2 \ldots a_n\}_{n=1}^{\infty}$ произведений элементов правого идеала I с некоторого места становится нулевой (Басс [60] называет такой правый идеал T-нильпотентным слева.) Если кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, то каждый радикальный правый идеал I исчезает справа (как показывает лемма Накаямы). Обратно, если $R/\operatorname{rad} R$ и $\operatorname{rad} R$ удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, то это условие выполняется и в R. Такие кольца, как доказал Басс [60],— это в точности совершенные слева кольца, т. е. кольца, над которыми каждый левый модуль обладает проективным накрытием. Их другие характеризации: слабая и проективная размерности любого левого модуля совпадают; каждый плоский левый модуль проективен; прямой предел проективных левых модулей проективен.

Понятие проективного накрытия дуально понятию инъективной оболочки. Но в отличии от инъективой оболочки проективное накрытие во всех случаях является накрытием вершины M/JM модуля M, где $J = \operatorname{rad} R$. (Над совершенным слева кольцом $JM = \operatorname{rad} M$.) Таким образом, $M/JM = \sum \oplus V$, где модуль V

прост и $V \approx \bar{R}\bar{e}$, где $\bar{R} = R/J$, а $\bar{e}$ — образ в $\bar{R}$ неразложимого идемпотента в кольце $\bar{R}$. Тогда проективное накрытие модуля V равно Re, т. е. является главным циклическим модулем, а тогда проективное накрытие модуля M — прямая сумма главных циклических модулей. В частности, каждый проективный модуль является прямой суммой главных неразложимых модулей (Басс [60]). См. также замечания к гл. 22 о некоторых обобщениях.

Доказывается также теорема Бьёрка, утверждающая, что из условия обрыва убывающих цепей циклических подмодулей модуля вытекает условие обрыва убывающих цепей его конечно порожденных подмодулей.

Глава 22 завершается теорией блоков совершенных колец.

Глава 23 посвящена двойственностям между подкатегориями $\mathscr{S}_B$ и $\mathscr{S}_A$ категорий B-mod и mod-A, содержащими B и A соответственно и замкнутыми относительно факторобъектов, подмодулей и конечных произведений. Морита [58] показал, что каждая такая двойственность T: $\mathscr{S}_A \rightsquigarrow \mathscr{S}_B$ индуцируется каноническим (B, A)-бимодулем $U = TA$. Таким образом, $TX \approx \mathrm{Hom}_A(X, U)$ в B-mod и $TY \approx \mathrm{Hom}_B(Y, U)$ в mod-A для всех $X \in \mathscr{S}_A$ и $Y \in \mathscr{S}_B$. В этом случае T называют U-двойственностью, а бимодуль ${}_BU_A$ — контекстом двойственности. Например, двойственность Понтрягина на категории Ab $(A = B = \mathbb{Z})$ индуцируется бимодулем $U = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, где $\mathscr{S}_A = \mathrm{Ab}$ — дискретные абелевы группы, а $\mathscr{S}_B$ — компактные группы (см. замечания к гл. 24 [sic!]).

Далее, Морита показал, что контекст двойственности ${}_BU_A$ существует тогда и только тогда, когда ${}_BU$ и U_A — инъективные кообразующие. Необходимое условие: A и B — полусовершенные кольца, а если A — совершенное справа или слева кольцо, то оно артиново справа, а B — артиново слева (Ософская [66]).

Глава 24: Многие из результатов этой главы являются применениями результатов гл. 23 к случаю контекста двойственности ${}_RR_R$, т. е. к случаю, когда R — инъективный кообразующий с двух сторон. Кольца, являющиеся правыми инъективными кообразующими, были охарактеризованы Адзумаей [66], Ософской [66] и Утуми [67] как самоинъективные справа кольца с конечно порожденным существенным правым цоколем. Этот класс колец совпадает с классом колец, над которыми каждый точный правый модуль является образующим в категории всех правых модулей (эти кольца называются псевдофробениусовыми справа кольцами (PF-кольцами) и являются обобщением квазифробениусовых колец (QF-колец), которые оказываются как раз артиновыми слева или справа псевдофробениусовыми справа кольцами [1])). Однако QF-

[1]) Приставки псевдо и квази здесь явно неудачны, поскольку эти классы колец являются одними из наиболее интересных классов колец.

кольца являются PF-кольцами справа и слева. Классические примеры QF-колец — групповые алгебры kG конечных групп G над произвольными полями k и факторкольца областей главных идеалов по ненулевым идеалам. QF-кольца допускают следующую характеризацию в терминах идеалов: каждый односторонний идеал является аннулятором некоторого конечного подмножества элементов кольца R. Таким образом, имеет место двойственность между левыми и правыми идеалами, и, кроме того, бимодуль ${}_RR_R$ определяет контекст двойственности

$$\begin{cases} \text{fin. gen. mod-}R \rightsquigarrow \text{fin. gen. } R\text{-mod}, \\ \qquad X \mapsto X^* = \mathrm{Hom}_R(X, R), \end{cases}$$

задаваемый переходом к дуальным модулям.

Другой аспект двойственности в QF-кольцах проявляется в том, что эти кольца могут быть охарактеризованы как кольца, над которыми каждый проективный модуль инъективен (а также, двойственным образом, каждый инъективный модуль проективен). Другие вопросы, связанные с двойственностью для QF-колец, освещены в замечаниях к гл. 24.

Глава 25: доказывается теорема Уорфилда о том, что каждый конечно представимый левый модуль над кольцом R является прямой суммой цепных модулей тогда и только тогда, когда R имеет такое строение как в категории mod-R, так и в категории R-mod (Уорфилд [75]). В этом случае кольцо R называют полуцепным. Любое нётерово полуцепное кольцо является прямой суммой первичных и артиновых колец (в нашем доказательстве используется критерий Робсона, который, как мы уже отмечали, применим и для доказательств теорем Чаттерса и Крулля — Асано — Голди). Выясняется также строение артиновых полуцепных колец, изучавшихся Накаямой: над ними каждый модуль является прямой суммой цепных главных циклических модулей. Кроме того, каждый доминантный главный неразложимый модуль eR инъективен по модулю аннулятора. Если предполагать, что выполняется также и левый вариант этого условия, то мы получаем характеризацию Фуллера артиновых полуцепных колец. Это подсказывает, как получить разложение модуля M в прямую сумму цепных модулей: доминантные главные циклические подмодули выделяются прямыми слагаемыми.

Для нётеровых полуцепных колец далее остается лишь определить их строение в классе первичных колец. Это было сделано Михлером [69b] в случае, когда $\mathrm{rad}\, R \neq 0$, а Уорфилд в упомянутой выше работе нашел короткое доказательство этого результата, однако мы не будем останавливаться на этом. Вместо этого мы приводим теорему Айзенбуда — Гриффитса — Робсона о том, что любое наследственное нётерово первичное кольцо R является артиновым полуцепным кольцом по модулю любого ненулевого идеала I. Доказательство состоит из двух частей. В первой устанавливается теорема Веббера [70]— Чаттерса [70] о том, что A/I — артинов модуль для любого существенного правого идеала I любого наследственного нётерова кольца A. Во второй части проводится совсем короткое (но замечательное) доказательство Айзенбуда и Гриффитса того факта, что доминантные главные неразложимые модули инъективны по модулю своего аннулятора.

Примарно разложимые артиновы полуцепные кольца, а именно конечные произведения колец матриц над локальными артиновыми кольцами главных идеалов, охарактеризованы в духе Накаямы [39, 41], [40a] как кольца, все факторкольца которых являются PF-кольцами.

В гл. 26 изложение сконцентрировано вокруг первичных и примитивных идеалов и их пересечений. Пересечение первых является первичным радикалом, который содержит каждый нильпотентный идеал и может быть охарактеризован (по Левицкому) как множество всех «строго» нильпотентных элементов кольца R. Пересечение же вторых является радикалом Джекобсона. (Первичный радикал совпадает с нижним ниль-радикалом Бэра, см. 26.11.)

Основным результатом гл. 26 служит теорема Амицура о полупримитивности (т. е. о равенстве нулю радикала Джекобсона) произвольной групповой алгебры над трансцендентным полем характеристики нуль, в частности, над несчетным полем нулевой характеристики. (См. 26.20—26.21.)

Часть V

ТЕОРИЯ КОЛЕЦ

Глава 17

МОДУЛИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ И ИХ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ

В этой главе затронуты следующие вопросы: (1) теорема Куроша — Оре для модулярных структур 17.4; (2) теорема Шрейера об уплотнении 17.6; (3) теорема Жордана — Гёльдера 17.7; (4) лемма Фиттинга 17.16; (5) теоремы Кёте — Левицкого и Колчина об одновременном приведении матриц к треугольному виду 17.19 и 17.30; (6) нильпотентность ниль-подполугруппы полугруппы, удовлетворяющей различным условиям на цепи (17.19—17.25).

В виде предложения 17.22 мы приводим теорему Шока [71b], имеющую два примечательных следствия: (1) теорему Левицкого [63] и Херстейна — Смолла [62], [64] (если R — моноид с нулем, который удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых и левых аннуляторных идеалов, то каждая ниль-подполугруппа в R нильпотентна (17.23)) и (2) теорему Ланского, утверждающую, что в правом кольце Голди каждая мультипликативная ниль-подполугруппа является нильпотентной полугруппой (17.24).

Другие теоремы о том, когда нильпотентность полугруппы следует из нильпотентности всех ее элементов, обсуждаются в замечаниях к этой главе.

Модулярные структуры

Структура L называется **модулярной**, если для любых ее трех элементов A, B и C справедлива следующая эквивалентность:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow A \geqslant C.$$

Импликация $\Rightarrow$ очевидна (она верна в любой структуре), в то время как импликация $\Leftarrow$ называется **тождеством модулярности.**

17.1. Упражнение. Структура L модулярна тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $y' \geqslant y$ справедлива импликация

$$(\exists x) y' \cap x = y \cap x \,\&\, y' \cup x = y \cup x \Rightarrow y' = y.$$

17.2. Предложение. *Структура (нормальных) подобъектов любого объекта M категории C модулярна, если C — абелева категория (C = GROUPS).*

Доказательство. Пусть $Y' \supseteq Y$ и X — подобъекты объекта M, такие, что

$$Y \cap X = Y' \cap X \,\&\, Y \cup X = Y' \cup X.$$

Если категория C абелева, то применение 5-леммы 5.34 к коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & X/X\cap Y & \to & M/Y & \to & M/X+Y & \to 0 \\ & \downarrow{=} & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{=} & \\ 0 \to & X/X\cap Y' & \to & M/Y' & \to & M/X+Y' & \to 0 \end{array}$$

показывает, что канонический морфизм $g\colon M/Y \to M/Y'$ является эквивалентностью. Таким образом, $\ker g = Y'/Y = 0$ и $Y' = Y$. (Случай, когда C = GROUPS, оставляем в виде упражнения.) □

Проективные интервалы

Пусть L — структура. **Фактором** $[x, y]$ двух элементов x и y назовем замкнутый интервал $[x, y] = \{t \in L \mid x \leqslant t \leqslant y\}$. Фактор называется **простым**, если он содержит ровно два элемента x и y. В этом случае будем также говорить, что y **накрывает** элемент x. Факторы вида $[x \cap y, x]$ и $[y, x \cup y]$ называются **взаимно транспонированными**. Факторы $[x, y]$ и $[x', y']$ называются **взаимно проективными**, если существует конечная последовательность факторов

$$[x, y], [x_1, y_1], \ldots, [x_t, y_t], [x', y'],$$

такая, что соседние факторы являются взаимно транспонированными.

17.3A. Предложение (Дедекинд [1900, XI, стр. 259]). *Если L — модулярная структура и $u, v \in L$, то отображение*

$$\begin{cases} [u\cap v, v] \to [u, u\cup v] \\ \quad x \mapsto x \cup u \\ y\cap v \leftarrow y \end{cases}$$

является структурным изоморфизмом, переводящим любой фактор в этом интервале в транспонированный к нему фактор.

Доказательство (см. Биркгоф [52, стр. 113]). Если $u \cap v \leqslant x \leqslant v$, то

$$u = u \cup (u \cap v) \leqslant u \cup x \leqslant u \cup v.$$

(Если же $x \leqslant x'$, то $u \cup x \leqslant u \cup x'$. Это показывает, что наше отображение инъективно и сохраняет порядок. Кроме того,

$$u \cap v \leqslant x \leqslant v \Rightarrow v \cap (u \cup x) = (v \cap u) \cup x = x,$$

поэтому оно биективно, а следовательно, является структурным изоморфизмом. Если $u \cap v \leqslant x \leqslant x' \leqslant v$, то факторы $[x, x']$ и $[u \cup x, u \cup x']$ являются взаимно транспонированными. Верно и дуальное утверждение. Это вытекает из того, что

$$x' \cup (x \cup u) = (x' \cup x) \cup u = x' \cup u$$

и

$$x' \cap (u \cup x) = (x' \cap u) \cup x = [(x' \cap v) \cap u] \cup x =$$
$$= [x' \cap (v \cap u)] \cup x = (v \cap u) \cup x = x. \quad □$$

17.3B. Следствие. *Взаимно проективные факторы в модулярной структуре изоморфны как частично упорядоченные множества.* □

Теорема Куроша — Оре

Пересечение $\bigcap_{i\in I} x_i$ называется **сократимым**, если существует подмножество $J \neq I$, такое, что $\bigcap_{i\in I} x_i = \bigcap_{j\in J} x_j$. В противном случае пересечение называется **несократимым**. Элемент x называется $\bigcap$**-неприводимым** (неприводимым относительно пересечений), если

$$x = y \wedge z \Rightarrow x = y \text{ или } x = z \quad \forall y, z \in L.$$

Следующая теорема была доказана Э. Нётер [21] для идеалов коммутативного кольца.

17.4. Предложение (Курош [35], Оре [36]). *Если L — модулярная структура, то любые два несократимых конечных представления элемента $a \in L$ в виде пересечения $\bigcap$-неприводимых элементов*

$$a = x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_n = y_1 \cap y_2 \ldots \cap y_m$$

содержат одно и то же число элементов $n = m$. Кроме того, для любого подмножества I множества $\{1, \ldots, n\}$ существует перестановка p множества $\{1, \ldots, n\}$, такая, что

$$a = \bigcap_{i\notin I} x_i \cap \bigcap_{j\in I} y_{p(j)}$$

является несократимым пересечением (лемма о замене).

Доказательство (см. Биркгоф [52, стр. 138—139]). Пусть $m \geqslant n$ Доказательство проводится индукцией по числу элементов множества I. Достаточно рассмотреть случай, когда I содержит один элемент, $I = \{1\}$. Пусть $y = \bigcap_{i>1} x_i$. В силу несократимости записи $y > a$ и $x_1 \cap y = a$. Положим $z_j = y \cap y_j$. Тогда $y \geqslant z_j \geqslant a$. Далее, так как $z_j \leqslant y_j$, то

$$a \leqslant z_1 \cap \ldots \cap z_m \leqslant y_1 \cap \ldots \cap y_m = a.$$

По теореме Дедекинда 17.3А существует структурный изоморфизм

$$[a, y] = [x_1 \cap y, y] \to [x_1, x_1 \cup y].$$

Поскольку элемент x_1 неприводим в факторе $[x_1, x_1 \cup y]$, элемент a неприводим в $[a, y]$, и потому найдется индекс j, для которого $a = z_j$, а тогда, как и утверждалось,

$$a = z_j = y_j \cap y = y_j \cap \bigcap_{i>1} x_i.$$

Так как каждый элемент x_i можно заменить на некоторый элемент y_j, то, в силу несократимости представлений, $m = n$. $\square$

Объединение $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ называется **прямым**, если элементы $\{a_i\}_{i=1}^n$ независимы в том смысле, что

$$0 = a_i \cap (\bigcup_{j \neq i} a_j), \qquad i = 1, \ldots, n;$$

в этом случае будем использовать обозначение $a = a_1 \times \ldots \times a_n$.

17.5. Упражнение. Если L — модулярная структура и элемент a имеет два представления

$$a = a_1 \times \ldots \times a_n = b_1 \times \ldots \times b_m$$

в виде прямого объединения неразложимых элементов, то $m = n$ и существует перестановка α множества $\{1, \ldots, n\}$, такая, что элементы a_i и $b_{p(i)}$ взаимно проективны, $i = 1, \ldots, n$. (Биркгоф [52, стр. 140] связывает следующие имена с этой теоремой: Веддербёрн (в случае конечных групп), Кронекер (для абелевых групп), Ремак (Ремак исправил Веддербёрна), Крулль, О. Ю. Шмидт, Фиттинг, Коржинек, Оре и А. Г. Курош. Оре впервые дал чисто структурное доказательство (см. 18.18).)

Композиционные ряды

Частично упорядоченное множество L **нётерово**, если оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, или, что эквивалентно, условию максимальности (т. 1, теоретико-множественное введение, предложение 12). Дуальным к нему является понятие **артиновости.** Объект x частично упорядоченного множества L называется нётеровым (артиновым), если частично упорядоченное подмножество $\{t \in L \mid t \leqslant x\}$ нётерово (артиново). Нётерова структура L обладает наибольшим элементом P и $P = \max \{x \in L\}$. Наименьший элемент структуры обозначается через 0. Итак, структура, являющаяся одновременно артиновой и нётеровой, обладает наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом P. В этом случае цепь

$$(A) \qquad P = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = 0$$

называется **композиционным рядом** структуры L, если каждый интервал $[M_i, M_{i+1}]$ прост, $i = 0, \ldots, n-1$. Число n называется длиной $d[A]$ цепи (A). Пусть (A) — цепь подобъектов объекта M категории C, которая является абелевой или совпадает с категорией GROUPS. В последнем случае будем предполагать, что (A) — субнормальная цепь, т. е. что M_{i+1} — нормальная подгруппа группы M_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда в каждом из этих случаев определены факторобъекты M_i/M_{i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$. Кроме того, интервал $[M_i, M_{i+1}]$ прост тогда и только тогда, когда прост факторобъект M_i/M_{i+1}.

Пусть (A) — произвольная конечная цепь в L. Тогда множество $\{M_i/M_{i+1}\}_{i=0}^{n-1}$ называется ее **системой факторов.** Если (A) — композиционный ряд, то эта система называется **системой простых факторов.**

Определим

$$\operatorname{gr}(C) = \sum_{i=0}^{n-1} \oplus M_i/M_{i+1}$$

как копроизведение, если L — структура подобъектов объекта некоторой абелевой категории, или как прямую сумму в категории GROUPS, если (A) — субнормальная цепь групп. Две цепи (A) и

$$(B) \qquad N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_{n-1} \supseteq N_n$$

называются **эквивалентными**, если соответствующие им системы факторов определяют один и тот же класс эквивалентности факторобъектов, т. е. если существует перестановка p множества $\{1, \ldots, n\}$, такая, что $M_i/M_{i+1} \approx N_{p(i)}/N_{p(i+1)}$ для любого i. В этом случае будем использовать обозначение $(A) \approx (B)$. Отношение $(A) \approx (B)$ является отношением эквивалентности, но — что более важно — имеет место теорема Жордана — Гёльдера об эквивалентности любых двух композиционных рядов.

Цепь (B) называется **уплотнением** цепи (A), если любой член цепи (A) является членом цепи (B). В этом случае говорят также, что цепь (A) **можно уплотнить** до цепи (B).

17.6. Теорема об уплотнении (Шрейер). *Если M — объект абелевой категории C (или если M — группа), то любые две конечные (субнормальные) цепи (A) и (B) подобъектов объекта M могут быть уплотнены до эквивалентных конечных (субнормальных) цепей (A') и (B').*

Доказательство. Доказательство опирается на лемму Цассенхауза 1, 1.12 (лемма о бабочке), а та в свою очередь опирается на первую и вторую теоремы Нётер об изоморфизме, которые верны в группах и в силу 5.34 и 5.36 (1, стр. 230, 232) — в любой абелевой категории. Мы приведем доказательство в том случае, когда M — объект абелевой категории, а (A) и (B) — конечные цепи подобъектов:

$$(A) \qquad M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = 0,$$

$$(B) \qquad N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_{m-1} \supseteq N_m = 0.$$

Без потери общности можно предполагать, что $M = M_0 = N_0$. Для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ и каждого $j = 0, \ldots, m$ определим

$$M_{ij} = M_{i+1} + (N_j \cap M_i).$$

Тогда $M_{im} = M_{i+1}$, и поэтому цепь

$$(A') \qquad M_0 = M_{00} \supseteq M_{01} \supseteq \ldots \supseteq M_{0,\,m-1} \supseteq M_1 = M_{10} \supseteq$$
$$\supseteq M_{11} \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1,\,0} \supseteq \ldots \supseteq M_{n-1,\,m-1} \supseteq M_n = 0$$

является уплотнением цепи (A). Аналогично определим

$$N_{ji} = N_{j+1} + (M_i \cap N_j)$$

для $j = 0, \ldots, m-1$, $i = 0, \ldots, n$. Это дает нам уплотнение (B') цепи (B). В силу леммы о бабочке (1, 1.12)

$$M_{ij}/M_{i,\,j+1} \approx N_{ij}/N_{j,\,i+1}$$

для всех i, j. Так как в цепи (A') и в цепи (B') содержится по $(n-1)(m-1)+1$ подобъектов, то из существования этих изоморфизмов следует, что цепи (A') и (B') эквивалентны. □

17.7. Теорема (Жордан — Гёльдер). *Пусть M — объект категории C, которая является абелевой (или совпадает с GROUPS). Допустим, что M обладает конечным композиционным рядом. Тогда любые два его композиционных ряда эквивалентны, а любая конечная (субнормальная) цепь его подобъектов может быть уплотнена до композиционного ряда.*

Доказательство. Если (A) — композиционный ряд, а (B) — любая другая конечная цепь, то по теореме Шрейера (A) и (B) могут быть уплотнены до эквивалентных цепей (A') и (B'). Так как (A) — композиционный ряд, то $(A') = (A)$ и, следовательно, (B') — композиционный ряд, уплотняющий цепь (B). Если (B) — композиционный ряд, то цепь $(B) = (B')$ эквивалентна цепи (A). □

Высота $d[x]$ элемента x частично упорядоченного множества L определяется как максимальное среди таких чисел d, что существует цепь

$$(C) \qquad x = x_0 > x_1 > \ldots > x_{d-1} > x_d.$$

В этом случае цепь (C) обязана быть композиционным рядом сегмента $\{t \in L \mid t \leqslant x\}$, ограниченного элементом x, поскольку в противном случае она может быть уплотнена до цепи (C') с бо́льшим числом элементов. Если такого числа d не существует, то будем говорить, что x — элемент **бесконечной** высоты. Говорят, что частично упорядоченное множество L удовлетворяет условию **Жордана — Дедекинда для цепей**, если любые два композиционных ряда в L, соединяющие одни и те же элементы, имеют одинаковые длины.

17.8. Упражнения.

17.8.1. Пусть L — частично упорядоченное множество, в котором все цепи конечны. Тогда оно удовлетворяет условию Жордана — Гёльдера для цепей в том и только том случае, когда существует функция $d: L \to \omega$, такая, что выполняется следующее условие:

элемент x накрывает элемент $y \Leftrightarrow x > y$ и $d[x] = d[y] + 1$.

17.8.2. В структуре (нормальных) подобъектов любого объекта M конечной длины категории C, которая является абелевой (или совпадает с GROUPS), выполняется условие Жордана — Дедекинда для цепей.

17.8.3. Частично упорядоченное множество L, одновременно являющееся артиновым и нётеровым, обладает композиционным рядом. Если в нем выполняется условие Жордана — Дедекинда для цепей, то верно и обратное утверждение.

17.8.4. Пусть L — произвольная структура, в которой все (ограниченные) цепи конечны. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) L — модулярная структура;

(b) выполняется условие Жордана — Дедекинда для цепей и существует функция $d: L \to \omega$, такая, что

$$d[x] + d[y] = d[x \cup y] + d[x \cap y] \quad \text{для всех } x, y \in L;$$

(c) (ξ') если x и y накрывают элемент a и $x \neq y$, то $x \cup y$ накрывает элементы x и y;

(ξ'') если a накрывает элементы x и y, $x \neq y$, то x и y накрывают элемент $x \cap y$.

[Указание: из условия (ξ') следует неравенство $d[x] + d[y] \geqslant \geqslant d[x \cup y] + d[x \cap y]$, в то время как обратное включение следует из (ξ''); детали можно найти в книге Биркгофа [52, стр. 115—116].]

17.8.5. Показать, что существует частично упорядоченное множество из пяти элементов, удовлетворяющее условию Жордана — Дедекинда для цепей, но не обладающее функцией $d[x]$, такой, что $d[x] = d[y] + 1$, если x накрывает элемент y.

17.8.6. Будет ли удовлетворять условию Жордана — Дедекинда для цепей множество $L \times P$, если этому условию удовлетворяют множества L и P?

17.8.7. Показать, что существует единственная немодулярная структура из пяти элементов.

17.8.8. Модулярный закон автодуален. Сформулировать теорему, дуальную теореме Куроша — Оре 17.4.

17.9. Упражнения.

17.9.1. Как мы уже говорили в гл. 15, подкласс S абелевой категории C называется классом Серра, если для любой точной последовательности $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ в категории C включение $Y \in S$ равносильно тому, что $X, Z \in S$. В любой абелевой категории класс артиновых (соответственно нётеровых) объектов является классом Серра.

17.9.2. Модулярная структура L нётерова (артинова) тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in L$ множества $\{y \mid y \leqslant x\}$ и $\{y \mid y \geqslant x\}$ одновременно нётеровы (артиновы).

17.9.3. Объект M категории mod-R нётеров тогда и только тогда, когда каждый подмодуль модуля M конечно порожден.

17.9.4. Если R — артиново (нётерово) справа кольцо, то каждый конечно порожденный объект M категории mod-R артинов (нётеров).

17.9.5. Если M, N — объекты конечной длины в категории mod-R, то из $\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$ следует существование общего для M и N простого фактора.

Многочлены над модулями конечной длины[1])

17.10. Теорема. *Если M есть R-модуль конечной длины n, то каждый $R[x]$-подмодуль модуля $M[x]$ порождается n элементами.*

Доказательство. Пусть S есть $R[x]$-подмодуль модуля $M[x]$. Определим подмодуль $L_i(S)$ так же, как и в лемме, использовавшейся в доказательстве теоремы Гильберта о базисе (1, 7.12, стр. 420). Так как M — нётеров модуль, то найдется индекс k,

[1]) Под модулем конечной длины понимается модуль с конечным композиционным рядом, причем длина этого ряда называется длиной модуля. — *Прим. перев.*

такой, что $L_k(S) = L_{k+1}(S) = \ldots$. Следовательно, существует композиционный ряд $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ модуля M, такой что $L_k(S) = M_p$ для некоторого p и каждый подмодуль $L_i(S)$ совпадает с одним из M_q, где $q \leqslant p$. Так как M_i/M_{i-1} — простой модуль, то найдется элемент $a_i \in M_i$, для которого $M_i = a_iR + M_{i-1}$, а тогда $M_i = \sum_{j=1}^{i} a_jR$, $i = 1, \ldots, n$.

Если $i \leqslant p$, то $a_i \in L_k(S)$, и поэтому найдется многочлен $g_i(x)$ наименьшей степени t, $t \leqslant k$, для которого a_i — коэффициент при x^t. Покажем, что S порождается как $R[x]$-модуль многочленами $g_1(x), \ldots, g_p(x)$, т. е. $S = \sum_{i=1}^{p} g_i(x)\, R[x]$.

Пусть f — ненулевой элемент модуля S степени d, a — коэффициент при x^d, число t таково, что $a \in M_t$, $a \notin M_{t-1}$. Степень любого многочлена из S со старшим коэффициентом, не лежащим в M_{t-1}, больше или равна наименьшему индексу c, для которого включение $M_{t-1} \subset L_c(S)$ строгое. Степень многочлена g_t равна c, поскольку $a_t \in M_t \leqslant L_c(S)$ и g_t — многочлен наименьшей степени среди многочленов со старшим коэффициентом a_t. Таким образом, $d_1 = \deg g_t \leqslant \deg f = d$.

Но $M_t = a_tR + M_{t-1}$. Так как $a \in M_t$, то найдется элемент $r_t \in R$, для которого $b = a - a_tr_t \in M_{t-1}$. Следовательно, многочлен $f_1 = f - g_tr_tx^{d-d_1}$ лежит в S, и либо его степень меньше, чем d (в предположении, что $d_1 < d$), либо его старший коэффициент b лежит в M_{t-1}. Применяя эту процедуру конечное число раз, мы достигнем 0, показав тем самым, что $f \in \sum_{i=1}^{p} g_i(x)R[x]$. $\square$

17.11. Следствие. *Пусть R — кольцо, которое как правый R-модуль имеет конечную длину n. Тогда каждый правый идеал в кольце многочленов $R[x]$ порождается n элементами.* $\square$

Как мы отмечали ранее, теорема Гопкинса и Левицкого 18.13 утверждает, что артиново справа кольцо является нётеровым справа и, следовательно, имеет конечную длину. Поэтому следствие может быть сформулировано и для артиновых колец.

Если R — тело, то длина модуля R_R равна 1, и мы получаем следующий результат:

17.12. Следствие. *Если R — тело, то кольцо многочленов $R[x]$ является кольцом главных правых и главных левых идеалов.* $\square$

17.13. Упражнения.

17.13.1. Если I — правый идеал кольца R, то через $n(I)$ обозначим минимальное число элементов в системах образующих правого идеала I (полагая $n(I) = \infty$, если $n(I)$ не является конечным числом). (a) Если $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то для каждого натурального числа t обозначим через I_t идеал кольца $\mathbb{Z}[x]$, порожденный элементами $\{2^t, 2^{t-1}x, \ldots 2^{t-i}x^i, \ldots, x^t\}$. Тогда $n(I_t) = t+1$. (b) Если R — произвольное кольцо, для которого существует натуральное число N, такое, что $n(I) \leqslant N$ для всех правых идеалов I кольца многочленов $R[x]$, то $n(J) \leqslant N$ для всех правых идеалов J кольца R.

17.13.2. Пусть R — кольцо, а M — нётеров R-модуль. Показать, что модуль степенных рядов $M\langle x\rangle$ является нётеровым $R\langle x\rangle$-модулем. [Указание: определить степень ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in M\langle x\rangle$ как наименьшее k, для которого $a_k \neq 0$. Если S есть $R[x]$-подмодуль модуля $R\langle x\rangle$, то пусть $L_n(S)$ — множество элементов модуля M, состоящее из 0 и тех элементов $a \in M$, которые появляются в виде коэффициента ряда степени n из S.]

17.13.3. Показать, что если N — подмодуль модуля M, то $(M/N)[x] \approx M[x]/N[x]$.

17.13.4. Если M — простой модуль, а Q — некоторый $R[x]$-подмодуль в $M[x]$, то Q порождается многочленом наименьшей степени по x.

17.13.5. Исследовать, какие из рассмотренных в тексте свойств колец сохраняются при переходе к кольцу многочленов. Рассмотреть также некоторые свойства коммутативных колец (такие, как быть областью главных идеалов, областью однозначного разложения, дедекиндовой областью, прюферовой областью и т. д.). Рассмотреть аналогичный вопрос для колец степенных рядов: если R — кольцо, обладающее одним из приведенных выше свойств, то будет ли этим свойством обладать кольцо $R\langle x\rangle$?

Кольцо эндоморфизмов

Мы исследуем влияние на эндоморфизм A модуля M различных условий обрыва цепей в M.

17.14. Упражнения. Пусть A — эндоморфизм модуля M.

17.14.1. Если k — натуральное число, такое, что $\ker A^k = \ker A^{k+1}$, то $A^kM \cap \ker A^k = 0$ и эндоморфизм A индуцирует мономорфизм на A^kM и нильпотентный эндоморфизм на модуле $\ker A^k$.

17.14.2. Если t — натуральное число, такое, что $A^tM = A^{t+1}M$, то A индуцирует эпиморфизм на A^tM и нильпотентный эндоморфизм на $\ker A^t$, при этом $M = A^tM + \ker A^t$. □

Если M есть R-модуль, то элемент $f \in S = \operatorname{End} M_R$ обладает (двусторонним) обратным в S тогда и только тогда, когда f — автоморфизм модуля M (т. е. изоморфизм модуля M).

17.15. Упражнения. Пусть M есть R-модуль и $S = \operatorname{End} M_R$, $A \in S$.

17.15.1. Если M — артинов модуль, то A является автоморфизмом тогда и только тогда, когда это мономорфизм.

17.15.2. Если M — нётеров модуль, то A является автоморфизмом тогда и только тогда, когда это эпиморфизм. □

Лемма Фиттинга

Применяя упражнение 17.15 в ситуации упражнения 17.14, убеждаемся в том, что если M — артинов модуль, то A^kM в 17.14.1 — также артинов модуль и A индуцирует автоморфизм a модуля A^kM. Если же M — нётеров модуль, то A^tM в 17.14.2 — нётеров модуль и A индуцирует автоморфизм b модуля A^tM. Если же M — артинов и нётеров модуль и A не является автоморфизмом, то найдутся числа k и t, такие, что

$$M \supset AM \supset \ldots \supset A^tM = A^{t+1}M = \ldots,$$

$$0 \subset \ker A \subset \ldots \subset \ker A^k = \ker A^{k+1} = \ldots.$$

Так как эндоморфизм A индуцирует автоморфизм модуля A^kM то $A^{k+1}M = A^kM$ и, следовательно, $k \geqslant t$. С другой стороны, эндоморфизм A индуцирует автоморфизм b модуля A^tM, и, следовательно, $0 = A^{t+1}x = bA^tx$ для $x \in \ker A^{t+1}$. Но тогда $A^tx = 0$, и потому $x \in \ker A^t$. Таким образом, $\ker A^{t+1} = \ker A^t$, и, значит, $t \geqslant k$, т. е. $t = k$. Если длина модуля M равна s, то $t = k \leqslant s$. В силу 17.14.1 и 17.14.2 $M = A^sM \oplus \ker A^s$, что доказывает следующее утверждение.

17.16. Теорема (лемма Фиттинга). *Если M — модуль конечной длины s, то любой эндоморфизм A индуцирует автоморфизм подмодуля A^sM и нильпотентный эндоморфизм подмодуля $\ker A^s$, при этом $M = A^sM \oplus \ker A^s$.* □

17.17. Следствие. *Пусть M — неразложимый R-модуль конечной длины s и $S = \operatorname{End} M_R$.*

17.17.1. *Каждый элемент кольца S либо обратим, либо нильпотентен.*

17.17.2. *Множество N нильпотентных эндоморфизмов модуля M образует в кольце S нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant s$* (см. 17.20).

Доказательство утверждения 17.17.1. Если $A \in S$, то в силу леммы Фиттинга $M = A^sM \oplus \ker A^s$. Так как модуль M неразложим, то либо $M = A^sM$, либо $M = \ker A^s$. Согласно лемме Фиттинга, в первом случае A — автоморфизм, а во втором — нильпотентный эндоморфизм.

Доказательство утверждения 17.17.2. Пусть $A, B \in S$ и AB — автоморфизм, т. е. AB обладает обратным элементом $C \in S$. Тогда $A(BC) = (CA)B = 1$. Следовательно, ни A, ни B не являются нильпотентными эндоморфизмами, т. е. A и B — автоморфизмы. Таким образом, если $B \in N$, то $AB \in N$ и $BA \in N$. Осталось показать лишь, что N — аддитивная подгруппа в S. Пусть $A, B \in N$ и допустим, что $A - B = C \notin N$. Тогда C — автоморфизм. Поэтому $A_1 - B_1 = 1$, где $A_1 = AC^{-1}$, $B_1 = BC^{-1}$. Мы уже знаем, что $A_1, B_1 \in N$. Таким образом, $A_1^s = 0$ и в силу биномиального разложения

$$0 = A_1^s = 1 + sB_1 + \ldots + B_1^s = 0.$$

Так как $B_1 \neq 0$, то найдется натуральное число k, такое, что $B_1^{k-1} \neq 0$ и $B_1^k = 0$. Тогда

$$0 = 0 \cdot B_1^{k-1} = B_1^{k-1} + sB_1^k + \ldots + B_1^{s+k-1} = B_1^{k-1},$$

что приводит нас к противоречию. Это показывает, что $A - B = C \in N$ для всех $A, B \in N$. Следовательно, N — идеал кольца S, а следующее далее предложение 17.20 доказывает, что N — нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant s$. □

В т. 1, стр. 222, мы ввели (хотя и редко использовали) понятие **локального кольца** R как кольца, в котором необратимые элементы образуют идеал, или, что равносильно, $R/\mathrm{rad}\, R$ — тело (см. 18.10А). В этой терминологии можно переформулировать следствие 17.17:

17.17′. Следствие (Фиттинг [33, теоремы 3 и 8]). *Кольцо эндоморфизмов неразложимого модуля конечной длины s является локальным кольцом с нильпотентным радикалом индекса нильпотентности $\leqslant s$.* □

Пусть K — кольцо, а S — мультипликативная подполугруппа кольца $(n \times n)$-матриц K_n. Тогда будем говорить, что S имеет **верхнюю (строго) треугольную форму**, если для некоторого множества $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ матричных единиц кольца K_n и обратимого элемента $x \in K_n$ каждый элемент $s \in x^{-1}Sx$ имеет канонический вид

$$s = (s_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}e_{ij}$$

где $s_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$ (соответственно при $i > j$). В этом случае будем говорить, что элементы полугруппы S можно **одновременно привести к верхней (строго) треугольной форме**.

17.18. Упражнения.

17.18.1. Если K — тело, а $T_n(M)$ — множество верхних (строго) треугольных матриц кольца K_n относительно некоторого множества M $(n \times n)$-матричных единиц, то полугруппу S можно привести к верхней (строго) треугольной форме тогда и только тогда, когда существуют обратимый элемент $x \in K_n$ и множество M, такие, что $xSx^{-1} \subseteq T_n(M)$.

17.18.2. Показать, что S можно привести к верхней (строго) треугольной форме тогда и только тогда, когда S можно привести к нижней (строго) треугольной форме.

17.18.3. Пусть F — тело, R — кольцо всех (нижних) треугольных $(n \times n)$-матриц над F_n, $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матричные единицы из F_n и $x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij} \in F_n$, где $a_{ij} \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда $x \in R$ в том и только том случае, когда $a_{ij} = 0$ при $j > i$. Показать, что $N = \{x \in R \mid a_{ij} = 0 \text{ при } j \geqslant i\}$ — нильпотентный идеал кольца R, его индекс нильпотентности равен n и $N = \mathrm{rad}\, R$. [*Указание*: R/N — прямое произведение тел, изоморфных телу F.]

17.18.4. Пусть R — кольцо, Q — идеал в R и R/Q — тело. Показать, что для любого числа n кольцо R/Q^n локально (например, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, где p — простое число).

17.18.5. Каждое коммутативное артиново кольцо является прямым произведением конечного числа локальных колец. [*Указание*: представить кольцо A в виде прямого произведения конечного числа неразложимых правых идеалов. Если B — один из них, то B — кольцо и $B \approx \mathrm{End}\, B_R$.]

17.19. Предложение (Кёте [30 b], Левицкий [31]). *Если K — тело, то элементы любой мультипликативной ниль-подполугруппы S кольца $K_n \approx \mathrm{End}_K K^n$ можно одновременно привести к строго треугольной форме, при этом $S^n = 0$.*

Доказательство. При $n = 1$ или $S = 0$ доказывать нечего. Допустим, что $S \neq 0$ и что предложение верно для векторных пространств K^m размерности $m < n$. Пусть $V = K^n$. Тогда в V существует ненулевое подпространство U размерности $< n$, такое, что $US \subseteq U$. В противном случае $VS = V$ [1]. Значит, найдутся элементы $s_1, \ldots, s_k \in S$, для которых

$$V = \sum_{i=1}^{k} Vs_i.$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}^+$

$$V = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_j \leqslant k} Vs_{i_1} \ldots s_{i_j}.$$

Отсюда вытекает существование последовательности $\{s_{i_t}\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$, такой, что $s_{i_t} \in \{s_1, \ldots, s_k\}$ и

$$s_{i_1} \ldots s_{i_t} \neq 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{Z}^+$$

[1] Заметим, что $(VS)S \subseteq VS$.— *Прим. перев.*

Но какой-то из элементов $s_1, \ldots, s_t$, скажем $a = s_1$, должен встречаться в последовательности $\{s_{i_t}\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ бесконечное число раз. Тогда существует последовательность $\{s'_{i_t}\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ элементов из S, таких, что

$$s'_1 a s'_2 a \ldots s'_t a \neq 0 \text{ для всех } t \in \mathbb{Z}^+.$$

Положим $W = Va$. Так как элемент a нильпотентен, то $\dim W < \dim V$. Кроме того,

$$WSa \subseteq Va = W,$$

и поэтому Sa индуцирует ниль-подполугруппу в $\operatorname{End}_K W$. В силу предположения индукции

$$s'_1 a s'_2 a \ldots s'_{n-1} a s'_n a = 0,$$

и мы пришли к противоречию.

Таким образом, существует элемент $t \in \mathbb{Z}^+$, для которого последовательность

$$V \supset VS \supset VS^2 \supset \ldots \supset VS^{t-1} \supset VS^t = 0$$

строго убывает, а тогда существует базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства $V = K^n$, такой, что $x_1, \ldots, x_{n_i}$ составляют базис подпространства VS^{t-i}, $i = 1, \ldots, t$. Матричное представление всех эндоморфизмов полугруппы S в этом базисе имеет нижнюю строго треугльную форму. $\square$

17.20. Теорема (Левицкий [31], Фиттинг [33]). *Если M есть R-модуль длины n, то любая ниль-подполугруппа кольца $A = \operatorname{End} M_R$ является нильпотентной полугруппой индекса нильпотентности $\leqslant n$.*

Доказательство. Докажем это утверждение сначала в случае, когда модуль M полупрост. Если модуль M однороден, т. е. является прямой суммой изоморфных простых модулей, то $A \approx K_n$, где $K = \operatorname{End} V_R$ — кольцо эндоморфизмов простого модуля V. В этом случае доказываемая теорема вытекает из предложения 17.19. В противном случае $M = H \oplus G$, где H и G — вполне инвариантные подмодули длины h и $n - h$ соответственно. Если S — ниль-подполугруппа кольца A, то S индуцирует ниль-подполугруппу $\overline{S}$ в кольце $\operatorname{End} H_R$ и ниль-подполугруппу S' в кольце $\operatorname{End} G_R$. Тогда $\overline{S}^h = 0$, $(S')^{n-h} = 0$ и $S^n = 0$.

В общем случае можно считать, что цоколь H модуля M имеет длину $m < n$. Так как модуль H вполне инвариантен, то элемент $\in S$ индуцирует эндоморфизм $\overline{s} \in \operatorname{End} (M/H)_R$ и эндоморфизм $s' \in \operatorname{End} H_R$, при этом как $\overline{s}$, так и s' нильпотентны. В силу предположения индукции $\overline{S} = \{\overline{s} \mid s \in S\}$ и $S' = \{s' \mid s \in S\}$ — нильпотентные полугруппы индексов нильпотентности $n - m$ и m соответственно. Таким образом, для произвольной последовательности $\{s_i\}_{i=1}^n$ элементов из S

$$s_n s_{n-1} \ldots s_{n-m+1} \ldots s_2 s_1 M \subseteq s_n s_{n-1} \ldots s_{n-m+1} H = 0.$$

Итак, $S^n = 0$, что завершает шаг индукции и все доказательство. $\square$

17.21. Лемма. *Пусть R — полугруппа с нулем и $x, y \in R$. Тогда*

(a) $(yx)^k = 0 \ \& \ xyx \neq 0 \Rightarrow x^\perp \subset (xyx)^\perp$.

Доказательство. Если $xyx \neq 0$, $(yx)^k = 0$ и $(yx)^{k-1} \neq 0$, то

(b) $x(yx)^{k-1} \neq 0 \Rightarrow (xyx)(yx)^{k-1} = 0$,

и поэтому выполнено условие (a);

(c) $x(yx)^{k-1} = 0 \Rightarrow (xyx)(yx)^{k-2} = 0$, а $x(yx)^{k-2} \neq 0$,

и поэтому выполнено условие (a). $\square$

17.22. Предложение (Шок [71b]). *Пусть R — моноид с нулем, в котором выполняется условие обрыва возрастающих цепей правых аннуляторных идеалов. Если R содержит ниль-подполугруппу, не являющуюся нильпотентной, то найдется множество $\{a_i\}_{i \in \omega}$ элементов моноида R, таких, что*

$$^\perp A_1 \subset {}^\perp A_2 \subset \quad \subset {}^\perp A_n \subset \ldots,$$

где $A_n = \{a_i\}_{i \geqslant n}$. Если, кроме того, R — кольцо, то множество $\{a_i\}_{i \in \omega}$ можно выбрать так, что сумма правых идеалов $\sum_{i \in \omega} a_i R$ будет прямой, т. е. так, что множество $\{a_i R\}_{i \in \omega}$ правых идеалов независимо.

Доказательство Для некоторого числа t

$$K = (N^t)^\perp = (N^{t+j})^\perp \quad \forall j \geqslant 0.$$

Выберем $n_0 \in N$ так, чтобы $n_0^\perp$ был максимальным элементом в множестве

$$\{x^\perp \mid x \in N \ \& \ xR \nsubseteq K\}.$$

Если $Nn_0R \subseteq K$, то $N^t N n_0 R \subseteq N^t K = 0$, откуда следует, что $n_0 R \subseteq K$, что противоречит выбору элемента n_0. Следовательно, можно выбрать элемент n_1 таким образом, чтобы правый идеал $n_1^\perp$ был максимальным среди идеалов вида $\{x^\perp \mid x \in N \text{ и } xn_0R \nsubseteq K\}$, и далее по индукции выберем числа n_k так, чтобы правый идеал $n_k^\perp$ был максимальным среди идеалов вида

$$\{x^\perp \mid x \in N \ \& \ xn_{k-1} \ldots n_1 n_0 R \nsubseteq K\}.$$

Тогда

(1) $$(n_{j+m} \ldots n_{j+1})^{\perp} \cap n_j R = 0 \quad \forall m \geqslant 1,\ j \geqslant 0,$$

поскольку в противном случае $(n_{j+m} \ldots n_j)^{\perp} \supset n_j^{\perp}$. Определим $a_i = n_i n_{i-1} \ldots n_1 n_0$ для $i \geqslant 0$. Предположим, что $n_k a_{k+j} R \neq 0$ для некоторого $j \geqslant 0$. Тогда из 17.21 (а) следует, что $n_k^{\perp} \subset (n_k n_{k+j} \ldots \ldots n_{k+1} n_k)^{\perp}$. Так как $n_k a_{k+j} R \nsubseteq K$, то это противоречит максимальности $n_k^{\perp}$. При $j = 0$ к противоречию приводит включение $n_k^{\perp} \subset (n_k^2)^{\perp}$. Таким образом, $n_k a_{k+j} = 0$ для всех $j \geqslant 0$. Поскольку $n_k a_{k-1} \neq 0$, то ${}^{\perp}A_{k-1} \subset {}^{\perp}A_k$ для каждого k, где $A_k = \{a_i\}_{i \geqslant k}$.

Далее, если R — кольцо и $a_{s+1}x_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$, где $x_i \in R$ и $1 \leqslant i \leqslant s$, то умножим слева на n_2 и получим, что $n_2 a_1 x_1 = 0$. Но $n_2 a_1^{\perp} = a_1^{\perp}$, и поэтому $a_1 x_1 = 0$. Умножая на n_3, получаем, что $a_2 x_2 = 0$. По индукции $a_{s+1} x_{s+1} = 0$, и потому $a_{s+1} R \cap \sum_{i=1}^{s} a_i R = 0$. Это доказывает последнее утверждение. □

17.23. Следствие (Левицкий [63], Херстейн — Смол [62], [64]). *Если R — моноид с нулем, удовлетворяющий условиям обрыва возрастающих цепей правых и левых аннуляторных идеалов, то каждая его мультипликативная ниль-подполугруппа нильпотентна.* □

17.24. Следствие (Ланский [69]). *Если R — правое кольцо Голди, то каждая его мультипликативная ниль-подполугруппа нильпотентна.*

Доказательство. Как было определено в гл. 9 (1, стр. 485), R называется правым кольцом Голди, если оно удовлетворяет условиям максимальности для правых аннуляторных идеалов и для прямых сумм правых идеалов. В этом случае применимо предложение 17.22. □

*17.25. Упражнение (Смол). Если R — кольцо эндоморфизмов нётерова модуля M над кольцом A, то каждое ниль-предподкольцо в R нильпотентно.

17.26 (Фишер Дж. В. [72]). То же утверждение, что и в 17.25, но для артинова модуля M. Доказательство дуальное.

17.27 (Фишер и Смол, в статье Фишера Дж. В. [72, стр. 77, теорема 2.1]). Индексы нильпотентности ниль-предподколец в 19.25 ограничены.

Теорема Колчина

Матрица A называется **унипотентной**, если $A = 1 + B$, где B — нильпотентная, а 1 — единичная матрицы. (Эквивалентное определение: все характеристические корни матрицы A равны 1.) Теорема Колчина утверждает, что матрицы любого мультипликативного моноида S унипотентных матриц над произвольным полем можно одновременно привести к треугольному виду. Велико искушение вывести теорему Колчина из предложения 17.19. Однако матрицы B не образуют в общем случае мультипликативного подмоноида. (Конечно, они образуют подмоноид, если S состоит из перестановочных матриц, хотя это и не является необходимым ограничением. Кроме того, имеется теорема о возможности диагонализации перестановочных матриц над алгебраически замкнутым полем, см. Джекобсон [53, стр. 134].)

Доказательство Колчина, которое мы приводим, использует две теоремы Бернсайда и разбивается на два этапа. Сначала поле k предполагается алгебраически замкнутым, а затем рассматривается случай, когда поле k произвольно. При этом доказательство несколько напоминает доказательство утверждения 17.19 о приведении к треугольному виду нильпотентных матриц. Напротив, это последнее утверждение из теоремы Колчина не следует, поскольку если N — мультипликативная полугруппа матриц, то нет оснований предполагать, что соответствующий класс унипотентных матриц является моноидом.

17.28. Теорема Бернсайда. *Любой неприводимый*[1]) *моноид S линейных преобразований векторного пространства V размерности n над алгебраически замкнутым полем k содержит n^2 линейно независимых векторов.*

Доказательство. Пусть R — подалгебра алгебры $L = \mathrm{End}_k V$, порожденная множеством S. Тогда V — простой R-модуль, и потому (1, 13.10А, стр. 568) $R = L$, т. е. S содержит $n^2 = \dim_k L$ линейно независимых векторов. □

17.29. Следствие. *Если t — число различных следов элементов моноида S из теоремы 17.28, то S содержит не более чем t^{n^2} элементов.*

Доказательство. На алгебре всех линейных преобразований пространства V введем скалярное произведение $(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$. (Легко видеть, что оно невырожденно.) Пусть $c_1, \ldots, c_t$ — все различные следы элементов из S и A_i ($i = 1, \ldots,$

[1]) Неприводимость моноида S означает, что в V нет нетривиальных S-инвариантных подпространств.— *Прим. перев.*

$\ldots, n^2$) — это n^2 линейно независимых элементов из S (теорема 17.28). Каждая матрица X из S удовлетворяет уравнениям $\mathrm{Tr}(A_iX) = b_i$, где $b_1, \ldots, b_{n^2}$ — какие-то из элементов c_i.

Эти уравнения однозначно определяют матрицу X, и, значит, для X имеется не более чем t^{n^2} возможностей. □

17.30. Теорема (Колчин [48]). *Пусть S — мультипликативный моноид унипотентных матриц. Тогда его элементы можно одновременно привести к треугольному виду.*

Доказательство. Пусть n — порядок рассматриваемых матриц. Проведем индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден.

Случай I. Поле скаляров k алгебраически замкнуто. Если моноид S неприводим, то в силу следствия 17.29 [1]) он содержит только один элемент, а поскольку $n > 1$, то он приводим. Тогда выбирая базис в инвариантном пространстве относительно S и дополняя его до базиса всего пространства, получим, что все матрицы из S приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Пусть S_L и S_R — множества блоков B и D соответственно. Они являются мультипликативными моноидами унипотентных матриц порядка меньше чем n. Далее можно применить предположение индукции и одновременно привести эти, а следовательно, и все матрицы из S, к треугольному виду.

Случай II. Поле скаляров k произвольно. Рассмотрим алгебраическое замыкание поля k и над ним приведем одновременно матрицы из S к треугольному виду. Тогда любое произведение n матриц вида $T - 1$, где $T \in S$ и 1 — единичная матрица, должно равняться нулю. Пусть r — наименьшее число, для которого произведение любых r элементов вида $T - 1$ равно нулю. Тогда существуют элементы $T_1, \ldots, T_{r-1} \in S$, для которых

$$(T_1 - 1)(T_2 - 1)\ldots(T_{r-1} - 1) \neq 0.$$

Найдем вектор x, такой, что

$$x(T_1 - 1)\ldots(T_{r-1} - 1) = y \neq 0.$$

Тогда $y(T - 1) = 0$ для любого $T \in S$, т. е. $yT = y$. Это показывает, что моноид S приводим. Далее рассуждение проводим так же, как в случае I. □

17.31. Упражнение. (а) Группа T невырожденных верхних треугольных матриц размера $n \times n$ над полем k является

[1]) Поскольку S состоит из унипотентных матриц, то $t = 1$.— *Прим. перев.*

разрешимой (точнее, расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы) [*Указание*: пусть $U = 1 + N$ — множество, состоящее из унипотентных матриц, где 1 — единичная матрица, а N — идеал верхних строго треугольных матриц. Тогда $1 + N^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— нормальная подгруппа группы U, а формула для коммутаторов $(1 + N^i, 1 + N^j) \subseteq 1 + N^{i+j}$ для $i = 1$ и переменного индекса j показывает, что U — нильпотентная группа. Более того, U — нормальная подгруппа группы T, а T/U — абелева группа.]

* (b) (Шода, Кёте [30], Левицкий [31]). В артиновом кольце R любое ниль-предподкольцо нильпотентно и содержится в некотором максимальном ниль-предподкольце. Кроме того, любые два максимальных ниль-предподкольца сопряжены.

* (с) (Шода, Кёте [30], Барнес, Михлер [66]). Если кольцо R нётерово справа, то пересечение всех максимальных нильпотентных предподколец является максимальным нильпотентным идеалом кольца R.

Упражнения

1. **Единственность числа элементов в базисе.** Пусть R — нётерово справа или артиново справа кольцо, а M — свободный модуль с конечным базисом $x_1, \ldots, x_n$. (а) Если $y_1, \ldots, y_m$ — другой базис модуля M, то $m = n$ и существует автоморфизм f модуля M, такой, что $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. (b) Если элементы $y_1, \ldots, y_m$ порождают модуль M, то $m \geqslant n$. Кроме того, $y_1, \ldots, y_m$ образуют базис тогда и только тогда, когда $m = n$.

2. Правый R-модуль M называется **делимым**, если $Mr = M$ для каждого регулярного элемента $r \in R$, и **модулем без кручения**, если из $xr = 0$, где $x \in M$, $r \in R$, следует, что либо $x = 0$, либо r — делитель нуля в кольце R. Пусть теперь R — коммутативное кольцо. (а) В каком смысле делимость и свойство быть модулем без кручения являются дуальными? (b) Если M — делимый нётеров модуль, а R — (коммутативное) кольцо без делителей нуля, то M — модуль без кручения, являющийся векторным пространством над полем частных K кольца R. (с) Сформулировать и доказать утверждение, дуальное к (b).

3. Пусть S — кольцо, N — множество нильпотентных элементов из S, а S^* — группа обратимых элементов кольца S. Доказать эквивалентность следующих двух утверждений: (а) $S = N \sqcup S^*$ (объединение множеств); (b) N — (ниль-)идеал и S/N — тело.

4. Пусть S — ненулевое кольцо. Элемент $x \in S$ называется **регулярным справа** (соответственно **слева**), если он не является

левым (соответственно правым) делителем нуля в S, т. е. если из $xy = 0$ (соответственно $yx = 0$) следует, что $y = 0$. Элемент x называется **регулярным**, если он регулярен справа и слева. Через S' обозначим множество всех регулярных справа элементов кольца S. Доказать эквивалентность следующих двух утверждений (здесь N — множество нильпотентных элементов кольца S): (a) $S = N \cup S'$ (объединение множеств), (b) N — ниль-идеал кольца S и S/N — область целостности.

5. (a) Если I_i — нильпотентный правый (или левый) идеал индекса k_i, $i=1, 2$, кольца S, то I_1+I_2 — нильпотентный правый (или левый) идеал индекса $\leqslant k_1 + k_2$. (b) Если I — нильпотентный правый идеал, то $I+SI$ — нильпотентный идеал кольца S, содержащий I. (c) Сумма всех нильпотентных правых идеалов кольца S является ниль-идеалом, содержащим каждый нильпотентный левый идеал кольца S.

6 (Васконселос). Если M — конечно порожденный модуль над коммутативным кольцом R, то любой R-эпиморфизм модуля M является автоморфизмом.

7 (Камилло [75b]). Модуль M называется **дистрибутивным**, если для любых его подмодулей A, B, C справедливо равенство $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$. Показать, что модуль дистрибутивен тогда и только тогда, когда каждый его фактормодуль содержит в своем цоколе не более одного экземпляра каждого простого модуля.

8 (Йенсен [66c]). Коммутативное кольцо R дистрибутивно (как R-модуль) тогда и только тогда, когда

$$(a : b) + (b : a) = R$$

для любых элементов a, $b \in R$, где $(a : b) = \{r \in R \mid ar \in bR\}$. В этом случае кольцо R называется **арифметическим**.

Локальное коммутативное кольцо является арифметическим тогда и только тогда, когда его идеалы линейно упорядочены.

9 (Камилло [73]). Если кольцо R коммутативно и идеал, порожденный элементами a и b, проективен, то $(a : b) + (b : a) = R$.

10 (Камилло [73]). Для коммутативного кольца R следующие условия эквивалентны: (a) R — полунаследственное кольцо, (b) R — арифметическое кольцо и для любого элемента $a \in R$ идеал $aR + \mathrm{ann}_R d$ содержит регулярный элемент; (c) каждый идеал, порожденный двумя элементами, проективен.

11 (Йенсен — Камилло). Пусть R — коммутативное кольцо, Q — его (классическое) кольцо частных. Тогда все кольца, лежащие между R и Q, полунаследственны в том и только том случае, когда R — полунаследственное кольцо (см. Камилло [73]).

12 (Смол [67]). Назовем R **правым PP-кольцом**, если R — кольцо, в котором каждый главный правый идеал проективен. Кольцо R полунаследственно справа тогда и только тогда, когда кольцо матриц R_n является правым PP-кольцом для каждого целого числа $n \geqslant 1$.

13 (Смол [67]). В правом PP-кольце R, не содержащем бесконечного множества ортогональных идемпотентов, каждый правый или левый аннуляторный идеал порождается идемпотентом, и, следовательно, R удовлетворяет условиям обрыва возрастающих и убывающих цепей правых и левых аннуляторных идеалов. Кроме того, максимальный ниль-идеал является ниль-идеалом, содержащим каждый правый или левый ниль-идеал. Более того, R является также левым PP-кольцом.

14 (Смол [67]). Если кольцо R полунаследственно справа и ни одно из колец матриц R_n не содержит бесконечного числа ортогональных идемпотентов (например, если R — нётерово справа или слева), то кольцо R полунаследственно слева. Итак, нётерово справа полунаследственное справа кольцо полунаследственно слева, а нётерово слева полунаследственное справа кольцо наследственно слева.

*15 (Чаттерс [72]). Нётерово наследственное (справа и слева) кольцо является конечным прямым произведением колец, каждое из которых либо первично, либо артиново.

16 (Леви [63a]). Нётерово справа наследственное полупервичное кольцо является конечным прямым произведением первичных колец (см. упражнение 15).

17 (Фуллер [70]). Будем говорить, что модуль U **порождает** модуль V, если V является следом модуля V в U (1, стр. 188) или, что эквивалентно, если V — эпиморфный образ некоторой прямой суммы экземпляров модуля U. Двойственным образом, будем говорить, что модуль U **копорождает** модуль V, если $\bigcap \ker f = 0$, где $f\colon V \to U$, т. е. если V можно вложить в некоторое прямое произведение экземпляров модуля U. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathrm{Biend}_R\, U \oplus V \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathrm{Biend}_R\, U \end{tikzcd}$$

где α, β — канонические отображения, а γ — отображения ограничения. Тогда γ — изоморфизм в том и только том случае, когда модуль U порождает и копорождает модуль V. Как следствие показать, что любой образующий U категории mod-R является сбалансированным модулем (теорема Мориты; см. **1**, 7.1, стр. 404, а также **1**, 4.1.3, стр. 243).

18 (Чейз [61]). Пусть S — коммутативное регулярное в смысле Неймана кольцо, не являющееся классически полупростым кольцом (например, пусть S — бесконечное произведение полей). Тогда найдется идеал I, не являющийся прямым слагаемым в S, и идеализация $A = \begin{pmatrix} S' & S' \\ 0 & S \end{pmatrix}$ (S', S)-бимодуля S', где $S' = S/I$, является полунаследственным слева кольцом, которое не является полунаследственным справа. (Об идеализации модуля см. **1**, стр. 413—414.)

Замечания к гл. 17

Чисто алгебраической теореме Колчина [48b], приведенной в качестве теоремы 17.30, предшествовала теорема Ли — Колчина, утверждающая, что любая связная разрешимая алгебраическая матричная группа над произвольным алгебраически замкнутым полем может быть одновременно приведена к треугольному виду (Колчин [48a]). Доказательство этого факта, данное Борелем [72, стр. 164], дает также в качестве следствия и теорему Мальцева [49], [51], утверждающую, что если M — произвольная разрешимая подгруппа группы $GL(n, k)$ (т. е. полной линейной группы невырожденных матриц над полем k) над алгебраически замкнутым полем k, то она является расширением с помощью конечной группы группы, одновременно приводимой к треугольному виду. Кроме того, теорема Цассенхауза [38] утверждает, что длина производного ряда любой разрешимой подгруппы группы $GL(n, F)$ над любым полем F ограничена числом $z(n)$, не зависящим от поля F.

Теорема Титса [72] в связи с гипотезой Басса и Серра утверждает, что любая конечно порожденная подгруппа G группы $GL(n, F)$ над любым полем F при $n > 1$ содержит либо свободную группу ранга >1, либо является расширением разрешимой группы с помощью конечной. (Если характеристика поля равна нулю, то конечной порождаемости не требуется.) Ряд теорем о строении разрешимых подгрупп группы $GL(n, F)$ Цассенхауза (например, о том, что максимальная неприводимая подгруппа содержит единственную максимальную абелеву нормальную подгруппу, если поле F бесконечно), Мальцева и других представлен в книгах Д. А. Супруненко [58], [72].

Теорему 17.19 об одновременном приведении ниль-подмоноида в K_n к треугольному виду Джекобсон [47] приписывает Левицкому, однако эта теорема может быть выведена из теоремы Кёте [30a], обсуждение которой откладывается до конца главы 18. (Однако следует взглянуть на упр. 17.31(b).)

Капланский [69a, стр. 137] доказал теорему, которая обобщает как теорему Колчина, так и предложение 17.19 в случае поля.

В настоящее время имеется весьма длинный список теорем, в которых при некоторых условиях устанавливается нильпотентность ниль-объектов. Кроме уже упомянутых и содержащихся в этой главе теорем (Кёте — Левицкого 17.19, Левицкого — Фиттинга 17.20, Шока 17.22, Левицкого — Херстейна — Смолла 17.23, Ланского 17.24, Смолла 17.25, Фишера 17.26) имеются теоремы Капланского [46] (и Левицкого [46]), решающие проблему Куроша для алгебраических алгебр ограниченной степени (для ниль-алгебр ограниченного индекса нильпотентности): каждое конечное подмножество порождает конечномерную (соотв. нильпотентную) подалгебру. В частности, если конечно порожденное кольцо удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для фиксированного целого числа $n \geqslant 1$, то оно нильпотентно. Примыкающая сюда теорема Нагаты — Хигмана утверждает, что в любой ассоциативной алгебре A над полем k характеристики p любая подалгебра B, удовлетворяющая тождеству $x^n = 0$ для некоторого числа $n < p$, если $p \neq 0$, является нильпотентной индекса нильпотентности $\leqslant 2^n - 1$. Короткое доказательство этого факта, принадлежащее Хиггинсу, появилось в книге Джекобсона [56, 64, стр. 274]. (Теорема Нагаты [52] утверждает нильпотентность подалгебры B в случае характеристики 0.) Джекобсон [56, 64, стр. 260] также приводит пример Е. С. Голода конечно порожденной ненильпотентной ниль-алгебры B над полем Г. Таким образом, алгебра B не является конечномерной (основной момент в примере). В силу теоремы Голдмана и Крулля, приводимой Джекобсоном на стр. 23, любой пример такого рода должен быть некоммутативным, т. е. конечно порожденная коммутативная ниль-алгебра нильпотентна. (Теорема Голода — Шафаревича позволяет найти над любым счетным полем бесконечномерную ниль-алгебру, порожденную тремя элементами. Изложение этого можно найти, например, в книге Херстейна [72, стр. 180].)

Ленаган [73] доказал, что ниль-кольца с размерностью Крулля нильпотентны. Это дает ответ на вопрос, который поставили и независимо решили Робсон и Гордон.

В упражнениях к этой главе мы привели ряд теорем Камилло [73], [75], Чаттерса [70], Леви [66a], Йенсена [66c] и Смолла [67] о полунаследственных и наследственных кольцах.

Теорему Фуллера [70] о вторых централизаторах (т. е. о кольцах биэндоморфизмов) модулей, которую мы также поместили в упражения (17), следовало бы включить в т. 1 не позднее, чем 7.1. (стр. 404).

Замечания о локальных кольцах и о других вопросах, связанных с леммой Фиттинга, можно найти в замечаниях к гл. 18.

Ссылки

Биркгоф [52], Борель [72], Веддербёрн [09], Гёльдер [1889], Голди — Смолл [73], Голдман [51], Дедекинд [1897, 1900], [1900], Джекобсон [47], [56, 64], Жордан [1872], Йенсен [66c], Камилло [73], [75], Капланский [46], [69a], Кёте [30a], [30b], Колчин [48], Кронекер [1870], Крулль [25], [51], Курош [35], [43], Ланский [69], Леви [63a], Левицкий [31], [46], [63], Ленаган [73], Мальцев [49], [51], Михлер [66], Нагата [52], Нётер [21], Оре [35, 36], [36], Прочези — Смолл [68], Ремак [11], Смолл [67], Супруненко [58], [72], Титс [72], Фиттинг [33], [35a], Фишер Дж. В. [72], Фуллер [70], Херстейн — Смолл [62], [64], Хигман Г. [56], Цассенхауз [38], Чаттерс [72], Чейз [61], Шмидт [28], Шок [71b], Шрейер [28].

Глава 18

ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА И РАДИКАЛ ДЖЕКОБСОНА

Основные темы этой главы: (1) радикал Джекобсона кольца и модуля (18.0); (2) характеризация радикала кольца по Перлису и Джекобсону (18.6); (3) локальные кольца (18.10); (4) полупримарные кольца (18.12); (5) теорема Гопкинса и Левицкого (18.13); (6) теорема Крулля — Шмидта или теорема о единственности разложения (18.18); (7) базисные модуль и кольцо (18.21—18.23); (8) китайская теорема об остатках (18.30—18.32) и примарно разложимые кольца (18.36—18.37); (9) характеризация колец с полулокальными правыми кольцами частных (18.47). (В т. 1; стр. 502, кольцо R было названо полулокальным, если $R/\mathrm{rad}\ R$ — классически полупростое кольцо. См. также 18.10А).

Радикал Джекобсона модуля

Одним из основных способов изучения строения модуля M является исследование его отдельных частей. Например, цоколь модуля M, определенный в гл. 8, является суммой его простых подмодулей. Строение цоколя модуля M весьма прозрачно, поскольку он является полупростым модулем. Дуальным вариантом понятия простого подмодуля является эпиморфизм $M \to V$, где V — простой модуль, разумеется, в предположении, что такой модуль V существует. Это дуальное понятие, связанное с рассмотрением простых гомоморфных образов модуля M, оказывается весьма полезным в структурной теории колец и модулей. После этой краткой мотивировки мы начнем систематическое изучение простых гомоморфных образов модуля M и дадим следующее определение.

18.0. Определение и предложение.

18.0.1. ***Радикалом*** *модуля M (обозначаемым через* rad M*) назовем подмодуль, описываемый следующими эквивалентными условиями:*

(a) *пересечение ядер всех эпиморфизмов $f: M \to V$, таких, что $V = \mathrm{im}\, f$ — простой модуль;*

(b) *пересечение всех максимальных подмодулей модуля M.*

Если в модуле M нет максимальных подмодулей, то положим rad $M = M$. *Для любого модуля M справедливо равенство*

$$\mathrm{rad}\ (M/\mathrm{rad}\ M) = 0.$$

18.0.2. *Следующие свойства ненулевого модуля M равносильны:*

(a) $\operatorname{rad} M = 0$;

(b) *для всякого ненулевого элемента $x \in M$ существуют простой модуль V и гомоморфизм f: $M \to V$, для которых $f(x) \neq 0$;*

(c) *если $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — множество всех максимальных подмодулей модуля M, то естественное отображение*

$$M \to \prod_{\alpha \in I} (M/M_\alpha)$$

является мономорфизмом;

(d) *модуль M можно вложить в произведение простых модулей.*

Доказательство. Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) следует из теоремы о соответствии для модулей (1; стр. 102), поскольку подмодуль M' максимален тогда и только тогда, когда M' — ядро эпиморфизма $M \to M/M'$ модуля M на простой модуль.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть h: $M \to \prod M/M_\alpha$ — естественное отображение. Если $0 \neq x \in M$, то из (b) вытекает, что $x \notin M_\alpha$ для некоторого индекса α. Следовательно, $h(x)(\alpha) = x + M_\alpha \neq 0$, т. е. $h(x) \neq 0$. Итак, h — мономорфизм.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (d) очевидна.

(d) $\Rightarrow$ (b). Если, скажем, $M \subseteq \prod_{\beta \in J} W_\beta$, где W_β — простой модуль для любого $\beta \in J$, и $0 \neq x \in M$, то найдется индекс $\beta \in J$, для которого $p_\beta(x) \neq 0$, где p_β: $\prod_{\beta \in J} W_\beta \to W_\beta$ — проекция. Если $f = p_\beta \mid M$, то f: $M \to W_\beta$ и $f(x) \neq 0$. $\square$

Радикалом кольца R назовем $\operatorname{rad}(R_R)$ и обозначим его через $\operatorname{rad} R$. Так как кольцо R всегда содержит максимальные правые идеалы (в силу леммы Цорна), то $\operatorname{rad} R \neq R$. **Левый радикал** кольца R определяется как $\operatorname{rad}({}_R R)$. Один из основных результатов этого параграфа: $\operatorname{rad} R$ совпадает с левым радикалом. Так как (левый) радикал является правым (левым) идеалом как пересечение правых (левых) идеалов, то из этого результата будет следовать, что $\operatorname{rad} R$ — идеал кольца R. На самом деле сначала в 18.1 будет доказано последнее утверждение.

Другим важным понятием в структурной теории колец является понятие примитивного идеала. Идеал I называется **примитивным справа**, если I — аннулятор некоторого простого правого R-модуля. Теорема Джекобсона 18.2 утверждает, что $\operatorname{rad} R$ совпадает с пересечением примитивных справа идеалов. Вместе с теоремой Джекобсона (18.5) о совпадении радикала с левым радикалом это показывает, что радикал совпадает также с пересечением примитивных слева идеалов.

Замечание о терминологии: кольцо R называется примитивным (справа), если 0 — примитивный (справа) идеал, что равносильно существованию точного простого правого R-модуля. Таким образом, имеется двойственность между примитивными кольцами и примитивными идеалами: идеал I примитивен (справа) тогда и только тогда, когда R/I — примитивное (справа) кольцо. Это приводит к некоторой путанице, особенно в тех случаях, когда в рассмотрении вводятся предкольца, поскольку идеал I, рассматриваемый как предкольцо, может быть примитивным. (В частности, любой ненулевой идеал примитивного кольца R является примитивным предкольцом.)

Примеры.

Каждое простое кольцо является примитивным, поскольку над ним любой ненулевой модуль точен. Итак, каждый максимальный идеал является примитивным. Кроме того, любое кольцо всех линейных преобразований $L = \operatorname{End} V_D$ примитивно слева (и справа), поскольку, как показано в 19.23B, векторное пространство V над D является каноническим простым левым L-модулем и a fortiori точно. Можно показать, что пространство V вкладывается в L (вообще говоря, многими способами) и что в L существует идемпотент e, для которого $V \approx Le$ и $S = LeL$ — наименьший ненулевой идеал. (Фактически S совпадает с множеством всех линейных преобразований конечного ранга.) Так как V — простой точный левый S-модуль, то S — примитивное предкольцо. Если $\dim V_D = \aleph_0$, то S — единственный нетривиальный идеал кольца L и, следовательно, максимальный идеал, а потому S — примитивный идеал. (В действительности S — всегда примитивный идеал независимо от размерности пространства V, так же, как и любой идеал кольца L.)

Можно проверить, что $W = eL$ — точный простой правый L-модуль, и, значит, L — также примитивное справа кольцо.

Как только будут доказаны соответствующие теоремы, приведенные выше соображения станут более прозрачными: (1) L — регулярное в смысле Неймана кольцо (см. 1, стр. 529, и 19.24), т. е. каждый конечно порожденный односторонний идеал порождается идемпотентом (это доказано в теореме 19.28); (2) радикал не содержит ненулевых идемпотентов (18.9.3), поэтому $\operatorname{rad}(L/I) = 0$ для любого идеала I кольца L; (3) идеалы кольца L вполне упорядочены по включению (19.64).

Таким образом, используя (3) и тот факт, что идеал I совпадает с пересечением примитивных идеалов, его содержащих, можно показать, что каждый идеал кольца L примитивен справа и слева.

Такой анализ этой ситуации — не пустая трата времени, поскольку это же доказательство показывает, что любой идеал I в любом регулярном кольце с вполне упорядоченным множеством идеалов является примитивным слева и справа. Мы снова вернемся к этим идеям в гл. 19, особенно в теоремах Гудёрла (19.62—19.65) о линейной упорядоченности множества идеалов, содержащих данный первичный идеал, в самоинъективном справа регулярном кольце.

18.1. Предложение. *Если R — кольцо и M — модуль, то* rad M *— вполне инвариантный подмодуль в M, а* rad R *— идеал кольца R.*

Доказательство. Пусть $T = \mathrm{End}_R M$. Но $\mathrm{rad}\, M = \bigcap \ker f$, где f пробегает все гомоформизмы $f\colon M \to C$, C — простой модуль. Если $g \in T$, то $f \circ g\colon M \to C$, где модуль C прост. Поэтому $fg\,(\mathrm{rad}\, M) = 0$, т. е. $g\,(\mathrm{rad}\, M) \subseteq \bigcap \ker f = \mathrm{rad}\, M$, а это показывает, что rad M — вполне инвариантный подмодуль. Если $M = R$, $a \in R$ и a_s — умножение слева на элемент a, то

$$\mathrm{rad} \supseteq R \quad a_s\,(\mathrm{rad}\, R) = a \cdot \mathrm{rad}\, R,$$

и, значит, $\mathrm{rad}\, R \supseteq R \cdot \mathrm{rad}\, R$. Следовательно, rad R — идеал. □

Сейчас мы подходим к математически и исторически важной задаче: дать критерий принадлежности элемента x кольца R радикалу этого кольца. В частности, будет приведен такой критерий: $Vx = 0$ для каждого простого R-модуля V. Теорема Перлиса и Джекобсона (18.6) дает другой критерий.

18.2. Теорема (Джекобсон). *Пусть R — кольцо. Тогда* rad R *совпадает с пересечением примитивных (справа) идеалов, т. е.*

$$\mathrm{rad}\, R = \bigcap \mathrm{ann}_R V, \tag{1}$$

где V пробегает простые правые R-модули.

Доказательство. Пусть Q — пересечение, стоящее в правой части равенства (1). Так как $\mathrm{ann}_R V$ — идеал кольца R для любого модуля V, то Q — идеал этого кольца и $Q = RQ$. Если M — максимальный правый идеал, то $W = R/M$ — простой R-модуль. Итак, $WQ = 0$. Следовательно, $Q = R \cdot Q \subseteq M$. Это показывает, что $Q \subseteq \mathrm{rad}\, R$.

Обратно, если $x \in R$ и $x \notin Q$, т. е. $Vx \neq 0$ для некоторого простого R-модуля V, то $VxR = V$ ввиду простоты модуля V. Поэтому $VxRx = Vx \neq 0$. Выберем $v \in V$ и $a \in R$ так, чтобы $vxax \neq 0$. Поскольку $vxa \neq 0$, из простоты модуля V следует, что $vxaR = V$. Таким образом, получаем эпиморфизм

$$f\begin{cases} R \to V \\ r \mapsto vxar \ \forall r \in R. \end{cases}$$

Так как $f(x) = vxax \neq 0$, это доказывает, что $x \notin \mathrm{rad}\, R$. Итак, $\mathrm{rad}\, R \subseteq Q$, а значит, как и утверждалось, $\mathrm{rad}\, R = Q$. □

Эта теорема дает лишь одну из характеризаций радикала rad R Нам же хотелось бы охарактеризовать элементы радикала rad R в чисто теоретико-кольцевых терминах, т. е. в терминах кольцевых операций. Это будет сделано в 18.4.

Косущественные подмодули

Подмодуль S модуля M_R называется **косущественным**, если из $M = S + K$, где K — некоторый подмодуль, следует, что $K = M$. Символ $M \circ\!- S$ будет обозначать, что S — косущественный подмодуль в M. Элемент $x \in M$ называется **необразующим** модуля M, если он порождает косущественным подмодуль. Очевидно, что (1) любой подмодуль косущественного подмодуля модуля M является косущественным подмодулем в M, (2) сумма конечного числа косущественных подмодулей является косущественным подмодулем.

Сумма всех косущественных подмодулей модуля M будет обозначаться через superfl M. В силу (2) superfl M состоит из элементов модуля M, являющихся необразующими. В общем случае superfl M не является косущественным подмодулем. Например, каждый элемент $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$ является необразующим (доказательство?) и потому superfl $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Примеры 1. Если P — подмодуль (идеал) в $\mathbb{Z}$, то $P = x\mathbb{Z}$, где $x \in \mathbb{Z}$. Если $P \neq 0$ и $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 1$ и н. о. д. $(x, y) = 1$, то $\mathbb{Z} = x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}$ и $y\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. Итак, superfl $\mathbb{Z} = 0$.

2. Если $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то каждая его собственная подгруппа является конечной (см. 1, стр. 85). Следовательно, сумма двух собственных подгрупп является собственной подгруппой, и, значит,

$$\mathrm{superfl}\, \mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Аналогично superfl $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ и superfl $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

3. Если M — полупростой правый R-модуль, то каждый его подмодуль выделяется прямым слагаемым; поэтому superfl $M = 0$.

4. Произведение простых модулей не обязано быть полупростым модулем. Например, если F — произвольное поле, то произведение F^I бесконечного множества экземпляров поля F не является классически полупростым кольцом, но будет произведением (неизоморфных) простых правых идеалов $\{F_i\}_{i \in I}$, где F_i — образ канонического вложения $u_i\colon F \to F^I$ для любого $i \in I$. [*Указание*: изоморфные модули имеют одинаковые аннулирующие идеалы.]

18.3. Предложение. *Пусть M — правый R-модуль. Тогда*

(a) $\operatorname{rad} M = \operatorname{superfl} M \supseteq M(\operatorname{rad} R)$.

(b) *Объект M категории* mod-R *называется* ***В-объектом*** (по Бассу [60]), *если выполняется одно из следующих эквивалентных условий*:

(1) *каждый собственный подмодуль N модуля M содержится в его максимальном подмодуле*;

(2) $\operatorname{rad}(M/N) \neq M/N$, *если N — собственный подмодуль в M. Если эти условия выполняются, то* $\operatorname{rad} M$ *является косущественным подмодулем в M и $M(\operatorname{rad} R) = M$ лишь в случае, когда $M = 0$. Если каждый объект категории* mod-R *является B-объектом, то R называется* ***В-кольцом.*** *Полулокальное кольцо с нильпотентным радикалом является B-кольцом* (см. 22.8 и 18.12).

(c) *Любой конечно порожденный модуль над любым кольцом является B-объектом.*

(d) *Если $R/\operatorname{rad} R$ — правое V-кольцо* (см. 1, 7.32, *например, если R — полулокальное кольцо*) *или если $M/M(\operatorname{rad} R)$ — полупростой модуль, то $\operatorname{rad} M = M(\operatorname{rad} R)$.*

(e) *$R/\operatorname{rad} R$ является правым V-кольцом тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} M = M(\operatorname{rad} R)$ для каждого объекта M категории* mod-R. *В этом случае, если M является B-объектом категории* mod-R, *то $\operatorname{rad} M = M(\operatorname{rad} R)$ — косущественный подмодуль.*

Это верно, в частности, для любого конечно порожденного модуля M над кольцом R, для которого $R/\operatorname{rad} R$ — правое V-кольцо (например, над любым полулокальным кольцом R).

Доказательство. Сначала покажем, что $\operatorname{superfl} M \supseteq \operatorname{rad} M$. Действительно, если $y \in M$ и $y \notin \operatorname{superfl} M$, то $M = B + yR$ для некоторого подмодуля $B \neq M$. Тогда $yR/(yR \cap B) \approx M/B$ — циклический модуль с образующим $[y + yR \cap B]$. Но радикал любого ненулевого циклического модуля C отличен от него самого и потому имеется эпиморфизм $f\colon M \to V$, где V — простой модуль и $f(y) \neq 0$. Итак, $y \notin \operatorname{rad} M$. Обратное включение очевидно. Действительно, если $M \circ\!- S$ и M' — максимальный подмодуль в M, то $S + M' \neq M$. Следовательно, $S \subseteq M'$ и $S \subseteq \operatorname{rad} M$.

Пусть $J = \operatorname{rad} R$. Так как J — идеал кольца R, то $RJ = J$. Для завершения доказательства п. (a) мы должны убедиться в том, что $\operatorname{rad} M \supseteq MJ$. Это очевидно, если $\operatorname{rad} M = M$. Если M' — максимальный подмодуль, то фактормодуль $N = M/M'$ прост и, следовательно, является циклическим. Поэтому существует эпиморфизм $\varphi\colon R \to N$. Так как $Q = \ker \varphi$ — максимальный правый идеал кольца R, то $J = \operatorname{rad} R = R \cdot J \subseteq Q$, и, следовательно, $(R/Q)J = 0$. Применяя отображение φ, видим, что $NJ = 0$, т. е. $M' \supseteq MJ$. Это доказывает включение $\operatorname{rad} M \supseteq MJ$.

(b) Если K — собственный подмодуль модуля M, то из (1) следует, что K содержится в максимальном подмодуле M' модуля M. Но $M' \supseteq \operatorname{rad} M$, и, следовательно, $M' \supseteq K + \operatorname{rad} M$. Это доказывает, что $\operatorname{rad} M$ — косущественный подмодуль модуля M. Эквивалентность условий (1) и (2) очевидна. Кроме того, из (2) следует, что $\operatorname{rad} M = M$ тогда и только тогда, когда $M = 0$. Итак, $M = M(\operatorname{rad} R)$ лишь тогда, когда $M = 0$.

(c) Множество собственных подмодулей ненулевого конечно порожденного модуля M индуктивно, и, следовательно, каждый фактормодуль M/N содержит максимальный подмодуль.

(d) В обоих случаях $M(\operatorname{rad} R)$ является пересечением максимальных подмодулей [1] и, следовательно, содержит $\operatorname{rad} M$, что обращает включение в п. (a).

(e) В силу 7.32A R является V-кольцом тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} M = 0$ для каждого объекта $M \in$ mod-R. Итак, R/J — правое V-кольцо в том и только том случае, когда $(\operatorname{rad} M)/MJ = 0$, т. е. $\operatorname{rad} M \subseteq MJ$ для каждого модуля M. Ясно, что это эквивалентно утверждению о том, что $\operatorname{rad} M = MJ$ для каждого модуля M. Если M есть B-объект, то подмодуль $\operatorname{rad} M = MJ$ косуществен, и поэтому выполнено утверждение (e).

Завершим доказательство п. (b): если R — полулокальное кольцо с нильпотентным радикалом J, то $\operatorname{rad} M = MJ = M$ лишь тогда, когда $M = MJ^n$ для всех n и, следовательно, когда $M = 0$. Итак, R является B-кольцом. □

Мультипликативная полугруппа M называется **исчезающей слева** [2], если каждая последовательность произведений элементов полугруппы M вида

$$(S) \qquad \{a_n a_{n-1} \ldots a_1\}_{n \in \omega}$$

оканчивается нулями, т. е. $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 = 0$, начиная с некоторого числа $n = n(S)$, зависящего от последовательности S. Например, каждый нильпотентный идеал кольца является исчезающей слева и справа полугруппой, а число $n(S)$ ограничено индексом нильпотентности [3]. Радикал любого правого B-кольца является исчезающим слева (22.7).

Каждое правое V-кольцо является B-кольцом, поскольку $\operatorname{rad} M = 0$ для каждого правого R-модуля. Кольцо $R = k[x, D]$ дифференциальных многочленов над универсальным полем k дает пример области главных правых и главных левых идеалов, являющейся V-кольцом (см. 7.42).

18.4. Теорема. *Пусть R — кольцо и $J = \operatorname{rad} R$. Для любого правого идеала I кольца R следующие условия равносильны*:

[1] Для V-колец см. 7.32A.— *Прим. перев.*

[2] Ряд авторов употребляет термин «T-нильпотентная справа».— *Прим. перев.*

[3] Ср. с существенной нильпотентностью справа в 19. 13. С.

(a) $I \subseteq \operatorname{rad} R = J$;

(b) *множество* $1 + I = \{1 + x \mid x \in I\}$ *состоит из обратимых элементов кольца* R;

(c) [1]) *если* M — *ненулевой конечно порожденный модуль, то* $MI \neq M$;

(d) *Если* M — *конечно порожденный модуль, то* MI — *косущественный подмодуль в* M.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). В силу 18.3 superfl $R = \operatorname{rad} R$. Итак, если $x \in I \subseteq J = \operatorname{rad} R$, то x лежит в некотором косущественном правом идеале и потому xR — косущественный подмодуль. Так как $R = xR + (1 + x) R$, то $R = (1 + x) R$, т. е. $1 = (1 + x) y$ для некоторого $y \in R$. Следовательно, если $x \in I$, то элемент $1 + x$ обратим справа в R. Так как $-xy \in I$, то элемент $1 - xy = y$ обладает правым обратным w в R. Поскольку $1 + x$ имеет левый обратный y, то y — обратимый элемент и $y^{-1} = 1 + x = w$. Итак, $1 + x$ — обратимый элемент.

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $x \in I$. Допустим, что $R = xR + K$, где K — некоторый правый идеал. Тогда $1 = xa + k$, где $a \in R$, $k \in K$. Следовательно, $k = 1 - xa \in 1 + I$, т. е. k — обратимый элемент в R, откуда $K = R$. Это показывает, что x является необразующим в модуле R_R и в силу 18.3(c) $x \in$ superfl $R = \operatorname{rad} R$. Итак, $I \subseteq \operatorname{rad} R$.

(a) $\Rightarrow$ (c). Если M — конечно порожденный модуль и $MI = M$, то $MJ = M$ и потому $M = 0$ (в силу 18.3 (c)).

(c) $\Rightarrow$ (d). Если K — некоторый подмодуль и $M = K + MI$, то $N = M/K$ — конечно порожденный модуль и $NI = N$. Поэтому из (c) следует, что $N = 0$, т. е. что $M = K$. Таким образом, MI — косущественный подмодуль.

(d) $\Rightarrow$ (a). Пусть $M = R$. Тогда $RI \supseteq I$ и RI — косущественный правый идеал кольца R. Поэтому $I \subseteq \operatorname{rad} R$ (в силу 18.3 (c)). □

Левый радикал кольца R определим как пересечение максимальных левых идеалов.

18.5. Предложение (Джекобсон [45]). *Левый радикал любого кольца* R *совпадает с его радикалом. Кроме того, для любого кольца* R

$$\operatorname{rad} (R/\operatorname{rad} R) = 0.$$

Доказательство. В силу 18.4 $1 + \operatorname{rad} R \subseteq \mathcal{U}(R)$. Так как $\operatorname{rad} R$ — идеал, а следовательно, и левый идеал, то в силу

[1]) Утверждение (c) иногда называют леммой Накаямы. В монографии Нагаты [62, стр. 213] отмечено, что это неправильно. Ошибки такого рода встречаются весьма часто! Накаяма не мог вспомнить, кто, Адзумая или он сам, нашел эту характеризацию и, как ни парадоксально, предложил связать с ней имена Адзумаи и Крулля в случае коммутативного кольца R и Адзумаи и Джекобсона в случае некоммутативного.

симметричного варианта теоремы 18.4 $\operatorname{rad} R$ содержится в левом радикале кольца R и содержит его. Из предложения 18.1 следует, что $\operatorname{rad} (R/\operatorname{rad} R) = 0$. □

18.6. Предложение и определение (Перлис [42], Джекобсон [45a]). *Элемент* x *кольца* R *называется* ***квазирегулярным***, *если выполнены следующие эквивалентные условия:*

(a) $1 + x$ — *обратимый элемент;*

(b) *существует элемент* $x' \in R$, *такой, что* $x + x' + xx' = 0$ *и* $x + x' + x'x = 0$.

Каждый нильпотентный элемент x *индекса нильпотентности* n *квазирегулярен и* $(1 + x)^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i$. *Односторонний идеал называется* ***квазирегулярным***, *если он состоит из квазирегулярных элементов. Радикал кольца* R *является квазирегулярным идеалом, содержащим каждый квазирегулярный правый или левый идеал (и, в частности, каждый односторонний ниль-идеал). Итак,* $R/\operatorname{rad} R$ — *полупервичное кольцо, не содержащее ненулевых квазирегулярных односторонних идеалов (а также односторонних ниль-идеалов).*

Доказательство. Чтобы установить эквивалентность условий (a) и (b), надо использовать элемент $x' = (1 + x)^{-1} - 1$ (называемый **квазиобратным** к элементу x). Если $x^n = 0$, то условию (b) удовлетворяет элемент $x' = -x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$. Остальные утверждения вытекают из теоремы 18.4. Последняя часть следует из равенства $\operatorname{rad} (R/\operatorname{rad} R) = 0$. □

18.7. Следствие. *Пусть* R — *кольцо с радикалом* J *и* $\bar{x}$ — *образ элемента* $x \in R$ *при каноническом отображении* $R \to \bar{R} = R/J$. *Тогда* x — *обратимый элемент в* R *в том и только том случае, когда* $\bar{x}$ — *обратимый элемент в* $\bar{R}$.

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно. Обратно, предположим, что $\bar{x}$ — обратимый элемент в кольце $\bar{R}$. Тогда $\overline{xy} = \overline{yx} = 1$ для некоторого элемента $y \in R$. Следовательно, $xy = 1 + t_1$ и $yx = 1 + t_2$, где $t_1, t_2 \in J$. Значит, $u_i = 1 + t_i$, $i = 1, 2$ — обратимый элемент в R. Поэтому $xyu_1^{-1} = u_2^{-1}yx = 1$. Итак, x обладает правым и левым обратным, но они обязаны совпадать (в силу ассоциативности умножения), т. е. x — обратимый элемент кольца R.

18.8. Следствие. *Если* R — *артиново справа кольцо, то* $\operatorname{rad} R$ — *нильпотентный идеал, содержащий каждый правый или левый ниль-идеал кольца* R.

Доказательство. В силу предыдущего следствия $J = \operatorname{rad} R$ содержит любой правый и любой левый ниль-идеал. Так как кольцо R артиново справа, то $J^{n+1} = J^n$ для некоторого числа n. Если $J^n \neq 0$, то множество P таких ненулевых правых идеалов K, что $KJ = K$, непусто. Следовательно, в P существует минимальный элемент Q. Так как $QJ^n = Q \neq 0$, то $qJ^n \neq 0$ для некоторого $q \in Q$. В силу минимальности правого идеала Q из $(qJ^n)J = qJ^n$ следует, что $qJ^n = Q$. Тогда $-q = qu$ для некоторого $u \in J^n$. Так как $u \in \operatorname{rad} R$, то $1 + u$ — обратимый элемент. Поэтому из $q(1+q) = 0$ следует, что $q = 0$. Это противоречит предположению о том, что $J^n \neq 0$. Итак, $J^n = 0$, т. е., как и утверждалось, J — нильпотентный идеал. $\square$

18.9. Упражнения и примеры.

18.9.1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортогональное представление единицы в кольце R. Положим $J(A) = \operatorname{rad} A$ для любого кольца A и

$$H(e_iRe_j) = \{a \in e_iRe_j \mid ae_jRe_i \subseteq J(e_iRe_i)\}.$$

Тогда

$$\operatorname{rad} R = J(R) = \sum_{i,j=1}^{n} H(e_iRe_j)$$

и

$$\operatorname{rad}(e_iRe_i) = J(e_iRe_i) = H(e_iRe_i) = $$
$$= J(R) \cap e_iRe_i = e_iJ(R)e_i, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

18.9.2. В обозначениях упражнения 18.9.1 (a) $\operatorname{rad} R$ — исчезающая слева полугруппа (соответственно нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant k$) тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}(e_iRe_i)$ — исчезающая слева полугруппа (соответственно нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant k$) для $i = 1, \ldots, n$; (b) кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} R = 0$ и существуют $\{e_i\}_{i=1}^n$, такие, что e_iRe_i — тело, $i = 1, \ldots, n$.

Вывести из этого, что если $e_iRe_i/e_iJ(R)e_i$ — тело, $i = 1, \ldots, n$, то R — полулокальное кольцо (в смысле 18.10A).

18.9.3. Радикал кольца не содержит ненулевых идемпотентных элементов. Таким образом, кольцо линейных преобразований, булево кольцо, алгебраическая алгебра без нильпотентных элементов над произвольным полем имеют нулевые радикалы Джекобсона.

18.9.4. Пусть F — тело, а $R = F\langle x\rangle$ — кольцо всех формальных степенных рядов над F от переменной x. Если $a = xb \in xR$, $b \in R$, то $u = a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$ — элемент кольца R (доказать это!) и $(1-a)(1+u) = (1+u)(1-a) = 1$. Так как $1 + xR$ состоит из обратимых элементов, то по доказанной теореме (правый) идеал $I = xR$ содержится в $\operatorname{rad} R$. Но I — максимальный правый идеал, поскольку факторкольцо R/I — тело, изоморфное телу F. Итак, $I = \operatorname{rad} R$.

18.9.5. Можно определить кольцо $F\langle x, y\rangle$ формальных степенных рядов как $A\langle y\rangle$, где $A = F\langle x\rangle$. Элементы кольца $F\langle x, y\rangle$ — степенные ряды

$$t = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}x^iy^j,$$

при этом t — обратимый элемент в $F\langle x, y\rangle$ тогда и только тогда, когда $a_{00} \neq 0$. Итак, радикал кольца $R = F\langle x, y\rangle$ содержит идеал $J = xR + yR$. Так как R/J — тело, изоморфное телу F, то $\operatorname{rad} R = xR + yR$.

18.9.6. Если M — неразложимый квазиинъективный модуль, то

$$\operatorname{rad}(\operatorname{End} M_R) = \{f \in \operatorname{End} M_R \mid \ker f \neq 0\}$$

(см. приведенное далее доказательство следствия 18.11).

18.9.7. Кольцо **p-адических чисел** p-adic $(\mathbb{Z})$ можно определить как множество S всех последовательностей

$$a = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots + a_np^n + \ldots,$$

где целые числа a_n удовлетворяют условию

$$0 \leqslant a_n < p \qquad \forall n \in \omega.$$

Если, кроме того,

$$b = b_0 + b_1p + \ldots b_mp^m + \ldots,$$

то определим сложение и умножение с помощью формул

$$a + b = \sum_{i \in \omega} q_ip^i \quad \text{и} \quad ab = \sum_{i \in \omega} r_ip^i,$$

где коэффициенты q_i и r_i для всех $i \in \omega$ определяются с помощью индукции: по алгоритму деления в кольце $\mathbb{Z}$ найдутся однозначно определенные числа $q_0 < p$ и $k_0 < p$, такие, что $a_0 + b_0 = q_0 + k_0p$, а также однозначно определенные числа q_1, k_1, такие, что $a_1 + b_1 + k_0 = q_1 + k_1p$, и далее по индукции находим числа q_i и k_i, $i \in \omega$, такие, что $q_n = a_n + b_n + k_{n-1} - k_np$ — искомый коэффициент при p^n.

Аналогично найдутся числа r_i и m_i, $i \in \omega$, каждое из которых $< p$, такие, что $a_0b_0 = r_0 + m_0p$, и по индукции находим число

$$r_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 + m_{n-1} - m_np \quad \forall n \in \omega,$$

являющееся искомым коэффициентом при p^n в определении произведения ab.

Покажем теперь, что

$$J = \operatorname{rad}(p\text{-adic}(\mathbb{Z})) = \{a \mid a_0 = 0\}.$$

Таким образом, $a \in J \Longleftrightarrow a = a_1p + a_2p^2 + \ldots$. Доказательство может быть проведено вычислениями (как в доказательстве упражнения 18.9.4) или с использованием характеризации радикала, сформулированной в примере 18.9.6. Мы выберем второй путь.

Имеется канонический изоморфизм

$$\begin{cases} p\text{-adic}(\mathbb{Z}) \to \operatorname{End} \mathbb{Z}_{p^\infty} \\ \qquad a \mapsto \bar{a}, \end{cases}$$

где $\bar{a}x = \sum_{i\in\omega} a_ip^ix$ определено для всех $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, поскольку существует $n = n(x)$, для которого $p^nx = 0$, а тогда $\bar{a}x = \sum_{i=1}^{n} a_ip^ix$. Если $a_n \neq 0$, то $\bar{a}y \neq 0$, поскольку существует элемент y порядка $>p^n$. Это показывает, что указанное отображение является мономорфизмом. Наконец, группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ порождается элементами $\{y_n\}_{n\in\omega}$, такими, что $py_1 = 0, \ldots, py_n = y_{n-1}$ и y_n порождает циклическую группу порядка n. Далее, любой эндоморфизм f отображает каждый элемент y_n в циклическую подгруппу (y_n). Итак, $f = \bar{a}$, где $a = a_0 + a_1p + \ldots$ определяется по индукции как сумма $a = \sum_{n\in\omega} b_n$, где b_n — однозначно определенное p-адическое число, такое, что $f(y_n) = b_ny_n$. Наконец, в силу упражнения 18.9.6 $a \in J$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$. □

Все примеры колец, рассмотренные в 18.9.4—18.9.7, оказываются локальными кольцами в смысле следующего определения.

18.10А. Определение и предложение. *Кольцо R называется* ***полулокальным***, *если кольцо $R/\mathrm{rad}\,R$ классически полупросто* (**1**, стр. 502).

Кольцо R называется ***локальным*** (*иногда его называют скалярно локальным*), *если оно удовлетворяет эквивалентным условиям* (a) — (d):

(a) *множество необратимых элементов кольца R является идеалом этого кольца;*

(b) *кольцо R содержит единственный максимальный правый идеал;*

(c) $R/\mathrm{rad}\,R$ — *тело;*

(d) *сумма двух необратимых элементов кольца R является необратимым элементом.*

Доказательство. (a) ⇒ (b). Пусть I — идеал, состоящий из необратимых элементов. Тогда он содержит любой (максимальный) правый идеал. Так как I содержится в некотором максимальном правом идеале, то это единственный максимальный правый идеал кольца R.

(b) ⇒ (c). Если R содержит единственный максимальный правый идеал I, то $I = \mathrm{rad}\,R$. Так как факторкольцо $Q = R/\mathrm{rad}\,R$ имеет лишь два правых идеала (именно, 0 и Q), Q—тело.

(c) ⇒ (d). Напомним, что $J = \mathrm{rad}\,R$ обладает свойством, приведенным в следствии 18.7, т. е. x — обратимый элемент кольца R тогда и только тогда, когда $\bar{x}$ — обратимый элемент кольца $\bar{R} = R/J$, где $x \mapsto \bar{x}$ — естественное отображение $R \to R/J$. Так как R/J — тело, то из этого следует, что любой ненулевой элемент из $R - J$ обратим в R. Итак, множество необратимых элементов кольца R совпадает с J. Так как $J \neq R$ и J не содержит обратимых элементов, то сумма необратимых элементов лежит в J и, следовательно,— необратимый элемент.

(d) ⇒ (a). Надо показать, что множество I необратимых элементов кольца R является идеалом. Так как мы знаем уже, что $a - b \in I$ для всех $a, b \in I$, то надо показать лишь, что $ar \in I$ и $ra \in I$ для всех $a \in I, r \in R$. Допустим, что $a \in I, r \in R$ и $ar \notin I$. Тогда ar — обратимый элемент, т. е. $arv = var = 1$ для некоторого $v \in R$. Пусть $u = rv$. Тогда $au = 1$. Если $uc = 1$ для некоторого $c \in R$, то $a = auc = 1\cdot c = c$ и $au = ua = 1$, что противоречит необратимости элемента a. Следовательно, $uR \neq R$, и потому $uR \subseteq I$. В частности, $ua \in I$. Но $a(1 - ua) = 0$, и, следовательно, $1 - ua \in I$. Тогда $1 = ua + (1 - ua) \in I$, что приводит нас к противоречию. Таким образом, $IR \subseteq I$. Симметрично, $RI \subseteq I$. Итак, I — идеал. □

18.10В. Упражнение. Пусть R — локальное кольцо.

(a) Правый R-модуль G является образующим в категории mod-R тогда и только тогда, когда модуль R_R изоморфен прямому слагаемому модуля G.

(b) Если $R \to S$ — сюръективный кольцевой гомоморфизм, то S — локальное кольцо.

18.11. Следствие. *Если M — неразложимый объект категории* mod-R, *являющийся квазиинъективным или имеющий конечную длину (Жордана — Гёльдера), то* $\operatorname{End} M_R$ — *локальное кольцо.*

Доказательство. Во втором случае результат следует из 17.16 и 18.10. Теперь допустим, что M — инъективный модуль и S — его кольцо эндоморфизмов. Пусть J — множество элементов кольца S, ядра которых отличны от нуля. Если $f \in S$ и $\ker f = 0$, то в силу инъективности модуля M найдется $g \in S$, переводящий fx в x для всех $x \in M$. Тогда $gf = 1$ и $e = fg$ — идемпотент, который в силу неразложимости модуля M должен быть равен 1. Так как каждый ненулевой подмодуль N модуля M имеет ненулевую инъективную оболочку $\hat{N}$, выделяющуюся в M прямым слагаемым, то из неразложимости модуля M следует, что

$M = \hat{N}$. Итак, каждый ненулевой подмодуль в M является существенным. Так как $\ker(f+g) \supseteq \ker f \cap \ker g$ для любых гомоморфизмов f и g, то сумма $f+g$ двух необратимых элементов кольца S является необратимым элементом. В силу 18.10A J — радикал кольца S.

Случай, когда M — квазиинъективный модуль, оставляем в качестве упражнения. □

Артиновы кольца являются нётеровыми

Сформулированная в заглавии теорема была доказана Гопкинсом [39] и независимо Левицким [39]. Основная компонента этого доказательства — теорема Веддербёрна — Артина, которая, как кажется на первый взгляд, ничего не говорит о неполупростых кольцах. Однако мы не раз увидим, что внешность обманчива. Эта теорема является мощным средством при изучении артиновых колец с ненулевым радикалом. Почему? Ответ можно извлечь из анализа доказательства следующего предложения.

18.12. Предложение и определение. *Кольцо R называется* ***полупримарным,*** *если оно — полулокальное кольцо с нильпотентным радикалом. Любое артиново справа кольцо полупримарно. Кроме того, полупримарное кольцо артиново справа тогда и только тогда, когда оно нётерово справа.*

Доказательство. Если кольцо R артиново справа, то артиново справа и кольцо $R/\mathrm{rad}\,R$. В силу предложения 18.6 кольцо $R/\mathrm{rad}\,R$ полупервично, а по теореме Веддербёрна — Артина (**1**, 8.8) оно классически полупросто. В силу следствия 18.8 $\mathrm{rad}\,R$ — нильпотентный идеал. Поэтому кольцо R полупримарно.

Чтобы показать эквивалентность нётеровости и артиновости для полупримарных колец, отметим сначала, что любой полупростой модуль M (над произвольным кольцом) артинов тогда и только тогда, когда он нётеров. Это следует из того, что M является прямой суммой простых модулей (которые одновременно артиновы и нётеровы), а число этих простых прямых слагаемых конечно тогда и только тогда, когда M либо артинов, либо нётеров. Пусть теперь t — индекс нильпотентности идеала $N = \mathrm{rad}\,R$. Положим $N^0 = R$. Идеал N аннулирует правый R-модуль $M_i = N^i/N^{i+1}$ для любого целого числа i между 0 и $t-1$. Следовательно, M — правый (R/N)-модуль. Так как R/N — классически полупростое кольцо, то в силу 8.9 M — полупростой модуль. Поскольку R-подмодули модуля M совпадают с его (R/N)-подмодулями, то M — полупростой R-модуль. Рассмотрим последовательность

$$R \supset N \supset N^2 \supset \ldots \supset N^t = 0$$

правых R-модулей. Если кольцо R нётерово (соответственно артиново) справа, то каждый фактормодуль M_i, $i = 0, \ldots, t-1$, будучи полупростым, имеет конечную длину. Таким образом, кольцо R обладает композиционным рядом. Поэтому R артиново (соответственно нётерово) справа. □

18.13. Теорема (Гопкинс [39], Левицкий [39]). *Артиново справа кольцо является (полупримарным) нётеровым справа кольцом.* □

Следующее утверждение также можно использовать для доказательства артиновости нётерова полупримарного кольца.

18.14. Упражнение. (a) (Чейз). Если кольцо R полупримарно, то каждый левый R-модуль и каждый правый R-модуль удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей конечно порожденных подмодулей (ср. с 22.9).

(b) Если M — объект конечной длины в категории mod-R, то $A = \mathrm{End}\, M_R$ — полупримарное кольцо, удовлетворяющее условию обрыва возрастающих цепей правых и левых ануляторных идеалов (ср. с упражнением 17.25).

Теоремы Крулля — Шмидта и диаграммы Адзумаи

Как уже отмечалось во введении ко второму тому, имеется тесная связь между категориями RINGS и mod-R для произвольного объекта R категории RINGS. Пуристы склонны пренебрегать одним аспектом ради другого. Некоторые специалисты в теории групп по непонятным причинам избегают использования аппарата теории колец, применяющегося к групповому кольцу RG конечной группы над кольцом R (обычно над полем $\mathbb{C}$), но, увы, некоторые теоремы получают прозрачные доказательства лишь на этом пути. Аналогично теория колец время от времени вынуждена занимать задние сидения и давать возможность вести машину теории групп (ранее — абелевым группам, но сейчас все чаще — абелевым категориям).

Приведем две проблемы теории модулей:

(1) Когда модуль M разлагается в прямую сумму неразложимых модулей? В этом случае модуль M называется **вполне разложимым.** (2) Когда такое разложение единственно (в том смысле, что от любого разложения к другому можно перейти, применив автоморфизм модуля M)? (Это будет подробно рассмотрено в 18.18 и 21.6.) **Теорема Крулля — Шмидта** является одним из утверждений о единственности прямого разложения модуля (объекта). (Крулль [25], Шмидт [28], см. Э. Нётер [29, стр. 645 и стр. 651]: каждая группа G с условием минимальности для подгрупп является прямым произведением неразложимых групп; если

выполняется и условие максимальности, то разложение единственно с точностью до автоморфизма группы G.) Теорема Крулля — Шмидта относится в основном к конечным прямым суммам (произведениям) неразложимых объектов. Однако Адзумая [50] получил теорему о единственности разложения для бесконечных прямых сумм модулей с локальными кольцами эндоморфизмов (часть того, что было установлено в теоремах Крулля — Шмидта). (См. 21.6.) Говорят, что такой модуль обладает **диаграммой Адзумаи**. Нам показалось удобным использовать этот термин даже в том случае, когда прямая сумма конечна (т. е. применима теорема Крулля — Шмидта). Следующая далее часть параграфа содержит теорему Крулля — Шмидта 18.18 для категорий с расщепляющимися идемпотентами (определенных в 18.15) и приложения, касающиеся строения колец с диаграммами Адзумаи (см. 18.23—18.28). Вышеупомянутый симбиоз колец и модулей можно проиллюстрировать при рассмотрении вопроса о том, когда правый A-модуль обладает конечной диаграммой Адзумаи. Предложение 18.23.2 (см. 18.26) утверждает, что это бывает тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов R модуля M обладает конечной диаграммой Адзумаи, и, кроме того, в том и только в том случае, когда R — полулокальное кольцо, в котором можно поднимать идемпотенты по модулю радикала. (Любопытно, что последний класс колец совпадает с классом колец, над которыми каждый конечно порожденный модуль имеет проективное накрытие, см. 22.23.)

18.15. Предложение и определение [1]). *Категорией с* ***расщепляющимися идемпотентами*** *называется аддитивная категория C, в которой для любого объекта A каждый идемпотент $e \in \operatorname{End}_C A$ расщепляется, т. е. существуют морфизмы $B \xrightarrow{p} A \xrightarrow{q} B$, такие, что $pq=1$ и $e=qp$. (Любая абелева категория такова.)*

Если $A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{p'} A$ — такие морфизмы в категории с расщепляющимися идемпотентами, что $u = p'q$ — автоморфизм объекта A, то существует мономорфизм $q_1\colon A_1 \to B$, такой, что 1_B является копроизведением морфизмов q и q_1, т. е. $B \approx A \oplus A_1$.

Доказательство. Если $p = (p'q)^{-1}p'$, то $pq = 1_A$ и $e = qp$ — идемпотент. Поэтому по предположению существует диаграмма $A_1 \xrightarrow{q_1} B \xrightarrow{p_1} A$, такая, что $p_1q_1 = 1$ и $q_1p_1 = 1 - e$. В силу предложения 3.34.2 q — ядро морфизма $1_A - e$ и q_1 — ядро морфизма e. Тогда в силу предложения 3.34.3

$$B = \ker e \oplus \ker (1 - e) \approx A \oplus A_1.$$

[1]) Здесь, а также в 18.16—18.17 и в первой части теоремы 18.18 я следую изложению Басса [68]. В 18.18(c) я следую Суону [68].

Таким же образом показывается, что любая абелева категория является категорией с расщепляющимися идемпотентами. □

18.16. Лемма. *Рассмотрим морфизм*

$$A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha} C \oplus D$$

в аддитивной категории X. Если α и a являются эквивалентностями, то $B \approx D$.

Доказательство. Если $c = 0$, то коэффициент в матрице α^{-1}, стоящий в правом нижнем углу, является обратным элементом для d. В общем случае заменим α на

$$\begin{pmatrix} 1_C & 0 \\ -ca^{-1} & 1_D \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

и сведем рассмотрение к первому случаю. □

Объект A называется **неразложимым**, если

$$A \approx B \oplus C \Rightarrow B = 0 \text{ или } C = 0.$$

В аддитивной категории X это свойство эквивалентно отсутствию в кольце $R = \operatorname{End}_X A$ идемпотентов, отличных от 0 и 1_A, т. е. тому, что R — неразложимый объект в mod-R.

Диаграммой Адзумаи называется копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i$, такое, что $\operatorname{End}_X A_i$ — локальное кольцо для всех $i \in I$. Таким образом, в диаграмме Адзумаи каждый модуль A_i неразложим.

18.17. Лемма о замене. *Пусть C — категория с расщепляющимися идемпотентами. Если*

$$A \oplus B = \coprod_{i=1}^{n} C_i$$

и $R = \operatorname{End}_C A$ — локальное кольцо, то существует число $i \leqslant n$, такое, что $C_i \approx A \oplus C_i'$ и $B \approx C_i' \oplus \coprod_{j \neq i}^{n} C_j$. В частности, если каждый модуль C_i неразложим, например если $\coprod_{i=1}^{n} C_i$ — диаграмма Адзумаи, то $C_i \approx A$ и $B \approx \coprod_{j \neq i} C_j$.

Доказательство. Пусть q_A и q_B (p_A и p_B) — инъекции (проекции) первого копроизведения $A \oplus B$ и $\{q_i\colon C_i \to X\}_{i=1}^{n}$ ($\{p_i\colon X \to C_i\}_{i=1}^{n}$) — инъекции (проекции) второго копроизведения. Тогда

$$1_A = p_A q_A = p_A \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i p_i\Big) q_A = \sum_{i=1}^{n} p_A q_i p_i q_A.$$

Так как R — локальное кольцо, то один из элементов $p_A q_i p_i q_A$ должен быть обратимым. Изменив, если надо, нумерацию, можно считать, что $(p_A q_1)(p_1 q_A)$ — автоморфизм объекта A. В силу 18.15 найдется морфизм q_1': $C_1' \to C_1$, такой, что C_1 — копроизведение морфизмов $p_1 q_A$ и q_1', $C_1 = A \oplus C_1'$. Используя это для измельчения разложения $C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$ до $A \oplus C_1' \oplus \ldots \oplus C_n$, получим изоморфизм последнего объекта с $A \oplus B$, такой, что сквозное отображение

$$A \xrightarrow{q_A} A \oplus B = A \oplus C_1' \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n \xrightarrow{\alpha} A,$$

где α — каноническое отображение, является эквивалентностью. Таким образом, из 18.15 следует, что $B \approx C_1' \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_n$. □

Пусть C — абелева категория. Будем говорить, что объект A категории C удовлетворяет ***бицепному условию****, если для любой пары последовательностей морфизмов*

$$A \underset{f_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} A_2 \underset{f_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} A_3 \rightleftarrows \ldots A_n \underset{f_n}{\overset{p_n}{\rightleftarrows}} A_{n+1} \rightleftarrows,$$

где каждый морфизм p_n — эпиморфизм, а каждый морфизм f_n — мономорфизм, существует число n_0, такое, что p_n и f_n являются эквивалентностями для всех $n \geqslant n_0$.

Нётеров и артинов объект A абелевой категории не обязан удовлетворять бицепному условию (см. Суон [68, стр. 76]).

Теорема о единственности разложения

С приводимой далее теоремой связываются следующие имена: Кронекер, Веддербёрн, Ремак, Крулль, О. Ю. Шмидт, Фиттинг, Коржинек, Оре и А. Г. Курош (для структур; ср. 17.5).

18.18. Теорема о единственности разложения в конечном случае [1]). *Пусть C — категория с расщепляющимися идемпотентами.*

(a) *если $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$ — конечная диаграмма Адзумаи, то любое представление объекта A в виде копроизведения можно продолжить до диаграммы Адзумаи.*

(b) *Если $A = \coprod_{j=1}^{m} B_j$ — другая диаграмма Адзумаи для объекта A, то $m = n$ и существуют перестановка p индексов $\{1, \ldots, n\}$*

[1]) Чаще всего ее называют теоремой Крулля — Шмидта.

и семейство эквивалентностей $\{u(i)\colon B_i \to A_{p(i)}\}_{i=1}^{n}$. Другими словами, существует автоморфизм и объекта A, который индуцирует изоморфизмы u_i: $B_i \approx A_{p(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

(c) *Если C — абелева категория, то любой объект A, удовлетворяющий бицепному условию, обладает диаграммой Адзумаи.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Случай $n = 1$ ясен.

(a) Предположим, что $n > 1$. Если $A \approx C_1 \oplus \ldots \oplus C_r$, по лемме 18.17 для некоторого i, скажем $i = 1$, можно записать $C_1 \approx A_1 \oplus C_1'$ и потому $A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \approx C_1' \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_r$. По предположению индукции последнее разложение можно продолжить до диаграммы Адзумаи.

(b) Если объекты C_i из доказательства п. (a) неразложимы, то $C_1' = 0$ и единственность также доказывается по индукции. При этом искомым автоморфизмом является копроизведение $u = \coprod_{i=1}^{n} u_i$.

(c) Ясно, что A является конечным копроизведением неразложимых объектов категории C. Поэтому остается показать, что кольцо эндоморфизмов любого объекта A с бицепным условием локально. Достаточно показать, что если сумма эндоморфизмов $f + g$ равна 1_A, то либо f, либо g — эквивалентность. Пусть $A_n = \operatorname{im} f^n$. Тогда

$$A_n \underset{\alpha}{\overset{f \mid A_n}{\rightleftarrows}} A_{n+1},$$

где α — включение, определяют бицепь. Следовательно, существует число n_0, такое, что $f \mid A_n$: $A_n \to A_{n+1}$ — эквивалентность для всех $n \geqslant n_0$. Положим $\rho = [(f \mid A_n)^n]^{-1} f^n$: $A \to A$. Тогда $\rho \mid A_n = 1_{A_n}$ и $\operatorname{im} \rho = A_n$. Следовательно, $A = A_n \oplus \ker \rho$. Либо $A_n = A$ и f — эквивалентность, либо $A_n = 0$ и $f^n = 0$. Но тогда $g = 1 - f$ имеет обратный $1 + f + f^2 + \ldots + f^{n-1}$ и g — эквивалентности.

18.19. Упражнение.

18.19.1. (лемма о сокращении). Пусть C — категория с расщепляющимися идемпотентами, A, A', B, B' — ее объекты, причем A и A' — объекты с диаграммами Адзумаи. Тогда

$$(A \approx A' \,\&\, A \oplus B \approx A' \oplus B') \Rightarrow B \approx B'$$

(см. Суон [68, стр. 78, теорема 2.6 и лемма 2.9]).

18.19.2. Если R — кольцо с диаграммой Адзумаи, то

$$R \oplus A \approx R \oplus B \Rightarrow A \approx B$$

для любых модулей A и B.

18.19.3. **Теорема Крулля — Шмидта для групп.** Любая группа G, удовлетворяющая условию обрыва убывающих цепей нормальных подгрупп, является прямым произведением конечного числа неразложимых групп. Если группа G к тому же удовлетворяет и условию обрыва возрастающих цепей нормальных подгрупп, то любое такое разложение единственно с точностью до автоморфизма группы G (как это и утверждалось в (с) теоремы 18.18).

18.19.4. Если R и S — локальные кольца, то кольца матриц R_n и S_m изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$ и кольца R и S изоморфны. Обобщить это утверждение на случай колец R и S с диаграммами Адзумаи (см. 18.23). Построить пример, показывающий, что в общем случае оно не имеет места.

18.19.5. Если M и M' — полные множества матричных $(n \times n)$-единиц в кольце R_n, где R — локальное кольцо, то существует обратимый элемент $x \in R_n$, такой, что $M' = xMx^{-1}$.

18.20. Следствие. *Если R — локальное кольцо, то каждый конечно порожденный проективный модуль свободен.* □

В действительности каждый проективный модуль над локальным кольцом свободен (Капланский [58a]).

Поднятие идемпотентов

Если I — подмножество кольца R, то элемент $x \in R$, для которого $x^2 - x \in I$, назовем *идемпотентом по модулю* I. Будем использовать запись $x = x^2 \pmod{I}$. Говорят, что идемпотент по модулю I можно поднять, если существует идемпотент $y \in R$, для которого $y - x \in I$, и в этом случае говорят, что x поднят до y. Если I — идеал, то мы часто будем говорить, что идемпотент $e \in R/I$ поднимается по модулю I, понимая под этим, что для этого идемпотента e найдется его прообраз в R, также являющийся идемпотентом. Если можно поднимать идемпотенты по модулю любого правого идеала, то R назовем **lift-кольцом**. Если можно поднимать идемпотенты кольца $R/\mathrm{rad}\, R$, то будем говорить, что в R можно поднимать идемпотенты по модулю радикала, а также называть R **SBI-кольцом**[1]). Аналогично скажем, что разложение R-модуля $R/I = A \oplus B$ *можно поднять*, если $R = X \oplus Y$ для некоторых правых идеалов X и Y кольца R, содержащих I и отображающихся при каноническом отображении $R \to R/I$ соответственно на A и B. Далее мы докажем теорему Джекобсона о SBI-кольцах.

[1]) См. Джекобсон [61, стр. 84].— *Прим. перев.*

18.21. Предложение. *Если I — правый (левый) ниль-идеал кольца R, то идемпотенты по модулю I могут быть подняты до идемпотентов кольца R.*

Доказательство. Пусть $u^2 - u \in I$. Найдем элемент $x \in R$, для которого $e = u + x(1 - 2u)$ — идемпотент в R, перестановочный с u. Уравнение $e^2 = e$ равносильно уравнению

$$(x^2 - x)(1 + 4y) + y = 0,$$

где $y = u^2 - u \in I$. Это квадратное уравнение относительно x, и обычная формула дает (формальное) решение $x = {}^1/_2\,(1 + (1 + 4y)^{-1/2})$ или, после разложения в ряд,

$$x = {}^1/_2 \left(2y - \binom{4}{2} y^2 + \binom{6}{3} y^3 - \ldots \right).$$

Так как $y \in I$, то это нильпотентный элемент и потому приведенная формула определяет x как многочлен от y с целыми коэффициентами. Таким образом, это значение для x перестановочно с u, принадлежит одностороннему идеалу I и $e = u + x(1 - 2u)$ — идемпотент, такой, что $e - u \in I$. Итак, u поднимается до e. □

18.22. Упражнения.

18.22.1. Если I — такой идеал, что разложение R/I в прямую сумму поднимается до R, то идемпотенты из R/I также можно поднимать. [*Указание*: если $R/I = \overline{A} \oplus \overline{B}$, $R = A \oplus B$, e — любой идемпотент, порождающий A, и $\overline{e}$ — любой идемпотент, порождающий $\overline{A}$, то $\overline{e} = e + I$.]

18.22.2. Если I — идеал кольца R, лежащий в $\mathrm{rad}\, R$, и можно поднимать идемпотенты из R/I, то любое конечное или счетное множество ортогональных идемпотентов из R/I можно поднять до ортогонального множества идемпотентов кольца R.

18.22.3 (Фейс — Утуми [64a]). Если R — регулярное кольцо, можно поднимать идемпотенты по модулю любого одностороннего идеала, а в любом самоинъективном справа кольце можно поднимать идемпотенты по модулю радикала.

Кольца с диаграммами Адзумаи

Ранее перед 18.15 мы отметили, что модуль M обладает конечной диаграммой Адзумаи тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов R обладает конечной диаграммой Адзумаи. Это в свою очередь оказывается равносильным тому, что R — полулокальное SBI-кольцо (часть этой теоремы доказывается в предложении 18.23.2). Кроме того, мы приведем некоторые важные свойства полулокальных SBI-колец, которые будут использованы в дальнейшем.

Модуль M называется **локальным модулем**, если он удовлетворяет следующим эквивалентным уловиям:

LM1. M содержит наибольший подмодуль;

LM2. $M/\mathrm{rad}\, M$ — простой модуль.

Над полулокальным SBI-кольцом можно описать все локальные модули (см. 18.23.4).

18.23. Предложение и определение.

18.23.1. *Будем говорить, что кольцо R с радикалом J обладает* ***диаграммой Адзумаи,*** *если оно содержит конечное число попарно ортогональных и дающих в сумме единицу идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$, таких, что e_iRe_i — локальное кольцо для $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$R = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, e_iR \text{ обладает диаграммой Адзумаи в категории mod-}R$$

и $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, Re_i$ *обладает диаграммой Адзумаи в R-*mod.

18.23.2. *Кольцо R обладает диаграммой Адзумаи тогда и только тогда, когда R — полулокальное* SBI-*кольцо.*

18.23.3. *При этих условиях следующие свойства идемпотента $e \in R$ эквивалентны:* (i) *идемпотент e неразложим;* (ii) $eR \approx e_iR$ *для некоторого i;* (iii) eR/eJ — *простой модуль;* (iv) eJ — *наибольший подмодуль в eR. В этой ситуации eR называют правым, а Re — левым* ***главным неразложимым модулем (идеалом).***

18.23.4. *Правый R-модуль M называется* ***главным циклическим,*** *если выполнены равносильные условия*

(a) M — *локальный модуль;*

(b) M — *гомоморфный образ некоторого правого главного неразложимого модуля. В этом случае точная последовательность $e_iR \to M \to 0$ существует тогда и только тогда, когда $Me_i \neq 0$, а потому M — простой модуль тогда и только тогда, когда $M \approx e_iR/e_iJ$.*

18.23.5. *Если*

$$\{e_i\}_{i\in n} \quad \text{и} \quad \{f_j\}_{j\in m}$$

— *ортогональные представления единицы неразложимыми идемпотентами, то $n = m$ и существуют обратимый элемент $x \in R$ и перестановка p чисел $\{1, \ldots, n\}$, такие, что*

$$xe_ix^{-1} = f_{p(i)} \quad \text{и} \quad x(e_iR)\,x^{-1} = f_{p(i)}R = xe_iR,$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство утверждения 18.23.1 ясно, поскольку для любого идемпотента $e \in R$ имеются канонические изоморфизмы

$$\mathrm{End}\, eR_R \approx eRe \approx \mathrm{End}_R Re.$$

Доказательство утверждения 18.23.2. Пусть $\overline{R} = R/J = \overline{A} \oplus \overline{B}$ — разложение модуля R/J, т. е. $A + B = R$ и $A \cap B = J$ для некоторых правых идеалов A и B кольца R. В силу леммы 18.17 можно так перенумеровать $\{e_i\}_{i=1}^n$, что $\overline{R} = \overline{A} \oplus \overline{Y}$, где $\overline{Y} = \sum_{i=t}^{n} \oplus\, \bar{e}_i\overline{R}$, $Y = \sum_{i=t}^{n} \oplus\, e_iR$ и $1 \leqslant t \leqslant n$. Изоморфизм $\overline{Y} \approx \overline{B}$ можно продолжить до автоморфизма f модуля $\overline{R}$ таким образом, что $f(\overline{A}) = \overline{A}$. Тогда $f(\overline{1})$ — обратимый элемент в R/J, который в силу 18.7 можно поднять до обратимого элемента a кольца R. Так как $\overline{aY} = \overline{B}$, то $aY + J = B$. Но

$$R = X \oplus Y = aX \oplus aY = aR,$$

и это показывает, что слагаемое aY модуля R отображается на $\overline{B}$ при каноническом отображении $h\colon R \to \overline{R}$. Кроме того, так как $f(\overline{A}) = \overline{A}$, то $\overline{a}\overline{A} = \overline{A}$, и поэтому $aA + J = A$. Так как a — обратимый элемент, то $aJ = J$, и потому $aA \supseteq J$, а тогда $A = aA$. Это показывает, что слагаемое aX из R отображается при отображении h на $\overline{A}$. Итак, $R = aX \oplus aY$ — искомое поднятие разложения $\overline{R} = \overline{A} \oplus \overline{B}$. В силу упражнения 18.22.1 (или леммы 22.21) идемпотенты из $\overline{R}$ поднимаются. Это доказывает, что R — полулокальное SBI-кольцо.

Доказательство утверждения 18.23.3. Заметим, что

$$eR/eJ = eR/(eR \cap J) \approx (eR + J)/J$$

и в силу упражнения 5 в конце главы

$$\mathrm{End}_R\,(eR/eJ) \approx eRe/eJe.$$

Допустим, что кольцо R обладает диаграммой Адзумаи. Тогда в силу теоремы 18.18 о единственности разложения условия (i) и (ii) равносильны. Так как тогда eRe — локальное кольцо и $\mathrm{End}_R(eR/eJ)$ — тело, изоморфное телу eRe/eJe, то из (ii) следует (iii). Это показывает, что $R/J \approx \sum_{i=1}^{n} \oplus\, (e_iR/e_iJ)$ — классически полупростое кольцо. В силу 18.3.4 $\mathrm{rad}\, eR = eJ$, а из простоты модуля eR/eJ следует, что eJ — наибольший подмодуль модуля eR. Итак, (iii) $\Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Если $e = g + h$ и g, h — ортогональные идемпотенты, то, поскольку eR есть B-объект (см. 18.3), из $gR \neq eR$ и $hR \neq eR$ следует, что $gR \subseteq eJ$ и $hR \subseteq eJ$, а тогда $eR \subseteq eJ$. Но в этом случае $e \in J$. Так как 0 — единственный идемпотент в $\operatorname{rad} R$, то $e = 0$, что противоречит предположениям о $\{e_i\}_{i \in n}$, и, таким образом, из (iv) следует (i).

Доказательство утверждения 18.23.4. (a) $\Rightarrow$ (b). Если M — ненулевой главный циклический модуль, то, поскольку $M = \sum_{i=1}^{n} Me_i$ строго содержит $\operatorname{rad} M = MJ = \sum_{i=1}^{n} Me_iJ$, найдется индекс i, для которого $Me_i \not\subseteq MJ$. Положим $e = e_i$. Пусть $m \in M$ и $meR \not\subseteq MJ$. Из простоты модуля M/MJ следует, что $M = meR + MJ$. Так как $MJ = \operatorname{rad} M$ — косущественный подмодуль (см. 18.3), то $meR = M$ и потому найдется эпиморфизм $eR \twoheadrightarrow M$, при котором ea переходит в mea. Это показывает, что из (a) следует (b). Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) тривиальна, поскольку любой главный неразложимый модуль обладает свойством (a). Утверждение о том, что $M/MJ \approx e_iR/e_iJ$ тогда и только тогда, когда $Me_i \neq 0$, остается в качестве упражнения.

Доказательство утверждения 18.23.5. Если $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ и $\{f_j \mid j = 1, \ldots, m\}$ — такие же семейства, как в 18.23.1, то в силу теоремы 18.18 о единственности разложения $n = m$ и существуют перестановка p чисел $\{1, \ldots, n\}$ и изоморфизмы $g_i\colon e_iR \to f_{p(i)}R$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, прямая сумма отображений $g = \sum_{i=1}^{n} \oplus g_i$ является автоморфизмом модуля R_R, таким, что $g(e_iR) = f_{p(i)}R$, $i = 1, \ldots, n$. Если $x = g(1)$, то $g(r) = g(1)r = xr$ для всех $r \in R$. Так как g — автоморфизм, то $1 = g(a) = xa$ для некоторого элемента $a \in R$. Тогда $\bar{1} = \bar{x}\bar{a}$ в $\bar{R}$. Несложное упражнение: из равенства $\bar{1} = \bar{x}\bar{a}$ в классически полупростом и даже в любом артиновом кольце следует, что $\bar{1} = \bar{a}\bar{x}$. Так как ax — идемпотент в R, то обязательно $ax = 1$ и потому x — обратимый элемент в R. Поскольку $Rx^{-1} = R$, получаем, что

$$xe_iRx^{-1} = xe_iR = g(e_iR) = f_{p(i)}R \quad (i = 1, \ldots, n),$$

как и утверждалось. Так как

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = x^{-1}1x = \sum_{i=1}^{n} x^{-1}e_ix = \sum_{j=1}^{n} f_j$$

и $xe_ix^{-1} \in f_{p(i)}R$, то из единственности представления единицы в виде суммы элементов из f_jR следует, что $x^{-1}e_ix = f_{p(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Базисные кольцо и модуль

18.24. Предложение. *Пусть $R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$ — диаграмма Адзумаи кольца R с радикалом J. Кольцо R называется базисным, если выполнены эквивалентные условия* (a) *и* (b):

(a) *если $e_iR \approx e_jR$ в* mod-R, *то $i = j$*;

(b) *если $e_iR/e_iJ \approx e_jR/e_jJ$, то $i = j$.*

Изменяя, если это необходимо, нумерацию, можно считать, что $\{e_iR\}_{i=1}^{t}$, $t \leqslant n$, — совокупность всех попарно неизоморфных R-модулей множества $\{e_iR\}_{i=1}^{n}$. Тогда $e_0 = e_1 + \ldots + e_t$ называется базисным идемпотентом, e_0R — базисным модулем, а e_0Re_0 — базисным кольцом кольца R. Кольцо R подобно своему базисному кольцу. Кроме того, базисный модуль изоморфен прямому слагаемому каждого из образующих категории mod-R. *Базисное кольцо кольца R является базисным кольцом, любые два базисных кольца кольца R изоморфны, причем существует изоморфизм, который может быть продолжен до внутреннего автоморфизма кольца R. Таким образом, если e_0 и e_0' — базисные идемпотенты кольца R, то существует обратимый элемент $x \in R$, для которого $e_0' = xe_0x^{-1}$; поэтому $e_0'Re_0' = xe_0Re_0x^{-1}$, $e_0'R = xe_0R$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (a) и (b) содержится в упражнении 4 в конце главы. Далее, в силу предложения 18.23 простой модуль V изоморфен e_iR/e_iJ тогда и только тогда, когда $Ve_i \neq 0$. Это доказывает (см. 3.31), что базисный модуль $B = e_0R$ является образующим категории mod-R. По теореме Мориты 4.29 кольцо R подобно кольцу $e_0Re_0 \approx \operatorname{End} B_R$. Если G — образующий в mod-R, то R, а следовательно, и B являются прямыми слагаемыми модуля G^n для некоторого натурального числа n. Тогда каждое прямое слагаемое e_iR модуля B является прямым слагаемым в G^n, а из леммы 18.17 о замене следует, что каждый модуль e_iR является прямым слагаемым в G, $i = 1, \ldots, t$. Пусть $G = e_1R \oplus X = e_2R \oplus Y$. Так как e_1R не может быть изоморфным прямому слагаемому модуля e_2R, то из леммы о замене вытекает, что модуль e_1R изоморфен прямому слагаемому модуля Y. Итак, $G = e_1R \oplus e_2R \oplus Z$. Применяя индукцию, получаем, что B — прямое слагаемое модуля G.

В силу доказанного каждый из двух базисных модулей $B = e_0R$ и $B' = e_0'R$ изоморфен прямому слагаемому другого. В силу теоремы 18.18 о единственности разложения они должны быть изоморфны. Используя теорему 18.18, получаем, что изоморфизм индуцируется обратимым элементом $x \in R \approx \operatorname{End} R_R$. Тогда $e_0'Re_0' = xe_0Re_0x^{-1}$, и поэтому $e_0' = xe_0x^{-1}$. Базисное кольцо кольца R является базисным кольцом (упражнение). $\square$

18.25. Упражнения. Пусть R — полулокальное SBI-кольцо и $J = \operatorname{rad} R$.

18.25.1. Каждый главный циклический модуль неразложим.

18.25.2. Каждый модуль порождается главными циклическими модулями (т. е. является их суммой).

18.25.3. Правый R-модуль M является главным циклическим (локальным) тогда и только тогда, когда M/MJ — простой модуль.

18.25.4. Если M — локальный модуль, то $\mathrm{End}\ M_R$ — локальное кольцо.

18.26. Предложение. *Пусть M — объект категории C с расщепляющимися идемпотентами (например, абелевой категории) и $R = \mathrm{End}_C M$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(a) M обладает конечной диаграммой Адзумаи;

(b) R обладает конечной диаграммой Адзумаи;

(c) R является полулокальным SBI-кольцом.

Таким образом, условия (b) и (c) равносильны для любого кольца R. В этом случае любое ортогональное представление единицы неразложимыми идемпотентами в R/J поднимается до ортогонального представления единицы неразложимыми идемпотентами кольца R.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть J — радикал кольца $R = \mathrm{End}_C M$. В силу утверждений 18.15—18.18 идемпотенты $\{e_i\}_{i\in n}$ кольца R ортогональны и в сумме дают 1_M тогда и только тогда, когда M является прямой суммой их образов, т. е. канонический морфизм $\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i \to M$, где M_i — образ эндоморфизма e_i, $i = 1, \ldots, n$, является эквивалентностью (см. также 1, 3.34—3.35, стр. 199—200). В этом случае существует индуцированный изоморфизм $e_i R e_i \approx \mathrm{End}_C M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $e_i R e_i \approx \mathrm{End}\ e_i R_R$, то это показывает, что $M = \sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$ является диаграммой Адзумаи для модуля M тогда и только тогда, когда $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus Re_i$ (соответственно $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus e_i R$) является диаграммой Адзумаи для R. Итак, (a) $\Longleftrightarrow$ (b), а эквивалентность (b) $\Longleftrightarrow$ (c) содержится в предложении 18.23. $\square$

Под **проективным накрытием** модуля M понимается точная последовательность

$$0 \to K(M) \to P(M) \to M \to 0,$$

где $P(M)$ — проективный модуль, а $K(M)$ — косущественный подмодуль модуля $P(M)$ (см. гл. 22). Кольцо R называется **(полу)совершенным** справа, если каждый (конечно порожденный) правый R-модуль обладает проективным накрытием.

18.27. Упражнения (см. Басс [60]).

18.27.1. Кольцо R полусовершенно справа тогда и только тогда, когда оно является полулокальным SBI-кольцом, и это условие равносильно полусовершенности слева.

18.27.2*. Кольцо R совершенно справа тогда и только тогда, когда дуальная категория $(\text{mod-}R)^{\mathrm{op}}$ является категорией с инъективными оболочками.

18.27.3*. Кольцо R является совершенным справа тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из следующих условий: (a) кольцо R полусовершенно и его радикал исчезает слева; (b) кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных левых идеалов; (c) кольцо R полусовершенно и каждый ненулевой левый модуль имеет ненулевой цоколь; (d) каждый плоский правый R-модуль проективен; (e) прямой предел проективных правых R-модулей проективен.

18.27.4* (Бьёрк [69]). Левый R-модуль M удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей циклических подмодулей тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей конечно порожденных подмодулей.

18.27.5* (Бьёрк [69]). Совершенное справа кольцо удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей конечно порожденных левых идеалов.

18.28. Предложение и определение. *Полулокальное SBI-кольцо R называется* **самобазисным**, *если выполнены следующие эквивалентные условия:*

(a) R является своим собственным базисным кольцом;

(b) $R/\mathrm{rad}\ R$ — произведение тел.

Доказательство. Пусть $J = \mathrm{rad}\ R$ и $\overline{R} = R/J$. Так как кольцо R полулокально, то $\overline{R} = \prod_{i=1}^{n} \overline{S}_i$ является произведением полных колец $(n_i \times n_i)$-матриц $\overline{S}_i$ над телами D_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\overline{S}_i$ — прямая сумма n_i минимальных правых идеалов. Кроме того, $\overline{S}_i$ — сумма всех минимальных правых идеалов кольца $\overline{R}$, изоморфных некоторому минимальному правому идеалу кольца $\overline{R}$, лежащему в $\overline{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как главные неразложимые модули e_1R и e_2R изоморфны тогда и только тогда, когда e_1R/e_1J и e_2R/e_2J изоморфны, то кольцо R совпадает со своим собственным базисным кольцом тогда и только тогда, когда $n_i = 1$, т. е. тогда и только тогда, когда $\overline{S}_i = D_i$ — тело, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Таким образом, самобазисное кольцо является базисным (как и утверждалось в предложении 18.24).

18.29. Упражнение.

18.29.1. Свойство кольца быть кольцом с диаграммой Адзумаи является инвариантным в смысле Мориты.

18.29.2. Базисное кольцо полного кольца матриц R_n над локальным кольцом R канонически изоморфно кольцу R.

18.29.3. Кольцо $T_n(R)$ нижних треугольных матриц над локальным кольцом R является базисным кольцом.

18.29.4 (Айзенбуд и Гриффитс). Если eR — правый главный неразложимый модуль полупримарного кольца R и X — его подмодуль конечной длины, то $\operatorname{End}_R(eR/X)$ — локальное кольцо.

18.30. Китайская теорема об остатках. *Если $\{A_i\}_{i=1}^n$ — конечное семейство идеалов кольца R, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *канонический гомоморфизм*

$$h\begin{cases} R/\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \to \prod\limits_{i=1}^{n} R/A_i \\ a+\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \mapsto (a+A_1, \ldots, a+A_n) \end{cases}$$

является изоморфизмом;

(2) *для любого множества $\{x_i\}_{i=1}^n$ элементов кольца R система сравнений $X = x_i \pmod{A_i}$ имеет решение $x \in R$;*

(3) *идеалы $\{A_i\}_{i=1}^n$ попарно комаксимальны, т. е. $R = A_i + A_j$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Очевидно, что h — гомоморфное вложение колец. Кроме того, отображение h сюръективно тогда и только тогда, когда система сравнений (2), как и утверждалось, имеет общее решение. Тогда, если $y_j \equiv 1 \pmod{A_j}$ и $y_j \equiv 0 \pmod{A_i}$, $i \neq j$, то $a_j = 1 - y_j \in A_j$ и $1 = a_j + y_j \in A_i + A_j$, что доказывает комаксимальность. Обратно, если найдутся элементы $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие приведенным сравнениям, то элемент $X = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ удовлетворяет условию (2). □

18.31. Следствие. *Если $\{A_i\}_{i=1}^n$ — конечное семейство попарно комаксимальных идеалов кольца R, то для любого модуля M любая система $\{y = y_i \pmod{MA_i}\}_{i=1}^n$ сравнений имеет решение $y \in M$ и каноническое отображение $M/\bigcap\limits_{i=1}^{n} MA_i \to \prod\limits_{i=1}^{n} M/MA_i$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Следует применить китайскую теорему об остатках.

18.32. Следствие. *Пусть $\{A_i\}$ — множество идеалов кольца R, P — перестановка чисел от 1 до n, $\mathbf{P} = A_{P(1)}A_{P(2)} \ldots A_{P(n)}$, $\Lambda = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$,*

$$(1) \qquad 0 \to \Lambda/\mathbf{P} \to R/\mathbf{P} \xrightarrow{q(P)} R/\Lambda \xrightarrow{h} \prod_{i=1}^{n} R/A_i$$

— каноническая точная последовательность, и пусть $h(P) = hq(P)$. Тогда отображение $h(P)$: $R/\mathbf{P} \to \prod\limits_{i=1}^{n} R/A_i$ является изоморфизмом в том и только том случае, когда $\mathbf{P} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ и каждая система $\{x \equiv x_i \pmod{A_i}\}_{i=1}^n$ сравнений имеет общее решение в R. Кроме того, $h(P)$ — изоморфизм для каждой перестановки P тогда и только тогда, когда идеалы $\{A_i\}_{i=1}^n$ перестановочны и попарно комаксимальны.

Доказательство. В силу точности канонической последовательности (1) отображение $h(P)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда h и $q(P)$ являются изоморфизмами. В силу теоремы 18.30 это равносильно тому, что $\mathbf{P} = \Lambda$, и система сравнений имеет общее решение.

Последнее утверждение докажем индукцией по n. Для $n = 2$ из той же теоремы следует, что h является изоморфизмом тогда и только тогда, когда идеалы A_1 и A_2 комаксимальны. Кроме того, если $\mathbf{P} = A_1 \cap A_2$ для каждой перестановки P, то $A_1A_2 = A_2A_1$. Обратно, если идеалы A_1 и A_2 комаксимальны и перестановочны, то $1 = a_1 + a_2$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. Если $x_1, x_2 \in R$, то $x = x_2a_1 + x_1a_2$ является таким элементом, что $x \equiv x_2a_1 \equiv x_2 \pmod{A_2}$ и $x \equiv x_1 \pmod{A_1}$. Это доказывает, что h — изоморфизм. Кроме того, если $y \in A_1 \cap A_2$, то $y = ya_1 + ya_2 \in A_2A_1 + A_1A_2 = A_1A_2$ и потому $A_1 \cap A_2 = A_1A_2$. Это показывает, что $R/A_1A_2 \approx R/A_1 \times R/A_2$, т. е. установлен искомый изоморфизм.

В общем случае пусть $B_2 = A_2 \ldots A_n$. Допустим, что идеалы $\{A_i\}_{i=1}^n$ перестановочны и комаксимальны. Тогда (как и в случае $n = 2$) $R/A_1B_2 \approx R/A_1 \times R/B_2$. В силу предположения индукции $R/B_2 \approx \prod\limits_{i=2}^{n} R/A_i$, т. е. показана достаточность условий следствия.

Обратно, если $h(P)$ — изоморфизм при любой перестановке P, то h — изоморфизм и потому (в силу китайской теоремы об остатках) идеалы A_i попарно комаксимальны. Кроме того, имеют место канонические изоморфизмы

$$(2) \qquad R/\Lambda = R/A_{P(1)}B \approx R/A_{P(1)} \times \prod_{j>1} R/A_{P(j)} \approx R/BA_{P(1)},$$

где $B = A_{P(2)} \ldots A_{P(n)}$. Так как $\mathbf{P} = \Lambda$ для каждого P, то

$$A_{P(1)}B = A_1 \cap \ldots \cap A_n = BA_{P(1)}.$$

Поскольку $A_{P(1)}$ и B перестановочны и комаксимальны, то, используя разобранный случай $n = 2$, получаем канонический изоморфизм

(3) $$R/A_{P(1)} \approx R/A_{P(1)} \times R/B.$$

Далее в силу 2 получаем, что $R/B = \prod_{j=2}^{n} R/A_{P(j)}$. В силу предположения индукции идеалы A_j перестановочны для $j \neq P$ (1). Но для $n > 2$ и для любой пары $i \neq j$ найдется перестановка P, для которой $i = P$ (2) и $j = P$ (3), что доказывает перестановочность идеалов $\{A_i\}_{i=1}^{n}$. □

18.33. Лемма (Эйленберг — Нагао — Накаяма [56]). *Пусть R — полупримарное кольцо с нильпотентным радикалом J индекса нильпотентности $\leqslant m$. Если A — любой идеал кольца R, то $A^n = A^{n+1}$ для некоторого $n \leqslant m$. Тогда $Q = A^n$ — идемпотентный идеал и $Q^k = Q + (Q \cap \operatorname{rad} R)^k$ для каждого k.*

Доказательство. Так как R — полулокальное SBI-кольцо, то существует идемпотент $e \in R$, такой, что

$$A = Re + B \text{ и } B = A \cap J.$$

Тогда для каждого числа k имеем

(1) $$A^k = ReA + B^k.$$

Действительно, если $k = 1$, то

$$ReA + B = ReRe + ReB + B = Re + B = A.$$

Проводя индукцию, получаем, что

$$A^{k+1} = AA^k = ReReA + ReB^k + BReA + B^{k+1} = ReA + B^{k+1}.$$

Это доказывает равенство (1), из которого следует, что $A^{k+1} = A^k$ тогда и только тогда, когда $B^k = 0$. Так как $B \subseteq J$, то $B^m = 0$. □

18.34A. Лемма (Нётер [21]). *Пусть кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов и A — идеал кольца R. Тогда либо A первичен, либо он содержит произведение некоторых первичных идеалов. В частности, либо R — первичное кольцо, либо произведение некоторых его первичных идеалов равно нулю.*

Доказательство. Если существует идеал, не содержащий произведения первичных идеалов, то найдется идеал A, максимальный среди идеалов с этим свойством. Этот идеал не является первичным, поэтому $A \supseteq BC$, где идеалы B и C строго содержат идеал A. В силу выбора идеала A идеалы B и C содержат произведения первичных идеалов, и, таким образом, идеал A содержит произведение первичных идеалов. □

18.34B. Лемма (Коэн И. [50], Орнстейн [68]). *Если R — нётерово справа кольцо, такое, что R/P — артиново кольцо для любого ненулевого первичного идеала P, то либо R — первичное кольцо, либо кольцо R артиново справа.*

Доказательство. Если кольцо R не является первичным, то найдется конечное число первичных идеалов $P_1, \ldots, P_n$, таких, что их произведение равно нулю. Рассмотрим последовательность

(1) $$P_0 = R \supseteq P_1 \supseteq P_1P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_1P_2 \ldots P_n = 0.$$

Мы утверждаем, что эту цепь можно уплотнить до композиционного ряда модуля R_R. Действительно, R/P_i — классически полупростое (артиново) кольцо для каждого индекса i, и, следовательно, модуль R/P_i обладает композиционным рядом. Допустим, что $R/P_1P_2 \ldots P_k$ имеет композиционный ряд, и пусть $B = P_1P_2 \ldots P_k$ и $C = BP_{k+1}$. Возможно, что $B = C$, однако в любом случае B/C является (канонически) (R/P_{k+1})-модулем. Но всякий такой модуль полупрост. Из нётеровости следует, что длина модуля B/C конечна. Таким образом, каждый фактор последовательности (1) является полупростым модулем конечной длины, т. е. последовательность (1) может быть уплотнена до композиционного ряда. Следовательно, R — артиново справа кольцо. □

Кольцо R называется **кольцом Коэна**, если R/P — артиново справа кольцо для каждого ненулевого первичного идеала P (это равносильно тому, что кольцо R/P классически полупросто). Будем говорить, что R — кольцо **с ограниченным правым условием минимальности** (или **RRM-кольцо**), если R/I — артинов правый модуль для любого существенного правого идеала I. Кольцо R называется **RRA-кольцом (RRN-кольцом)**, если для любого ненулевого идеала A кольцо R/A артиново (нётерово) справа.

18.35. Упражнения [1]).

18.35.1. Кольцо R является RRA-кольцом тогда и только тогда, когда оно является RRN-кольцом и R/P — артиново кольцо для любого ненулевого первичного идеала P. (В этом случае каждый ненулевой первичный идеал максимален.)

18.35.2. Любое RRN-кольцо удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов. Любое кольцо, в кото-

[1]) Упражнения 18.35.1—18.35.7 взяты из статей И. Коэна [50] и Орнстейна [68]. Другие результаты о RRM-кольцах, принадлежащие Вебберу и Чаттерсу, приведены в гл. 20 (см. 20.29).

ром все двусторонние идеалы являются конечно порожденными как правые идеалы, удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов (но обратное утверждение может не иметь места). Показать, что последним условием можно заменить условие нётеровости в лемме 18.34В, и ее утверждение останется верным

18.35.3. Если каждый циклический правый модуль R/I, где $I \neq 0$, является артиновым, а кольцо R не является артиновым справа, то R — правая область Оре.

18.35.4. Любое RRA-кольцо либо первично, либо содержит лишь конечное число первичных идеалов $P_1, \ldots, P_n$. Тогда идеал $P_1P_2 \ldots P_n$ нильпотентен. Вывести из этого, что радикал непервичного RRA-кольца нильпотентен и, в частности, что каждый ниль-идеал такого кольца нильпотентен.

18.35.5. Непервичное полупервичное RRA-кольцо классически полупросто.

18.35.6. Коммутативное RRA-кольцо с ненулевыми делителями нуля содержит лишь конечное число первичных (т. е. простых) идеалов. В этом случае если R не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то оно является произведением конечного числа полей.

18.35.7 (Коэн). Коммутативное кольцо является нётеровым тогда и только тогда, когда каждый его первичный идеал конечно порожден. Из этого следует условие обрыва возрастающих цепей первичных идеалов. Показать, что обратное утверждение не имеет места.

18.35.8. Правый идеал I кольца R называется **конеприводимым**, если R/I — однородный правый модуль. Показать, что нётерово справа кольцо наследственно тогда и только тогда, когда каждый неприводимый правый идеал проективен.

18.35.9 (Закс [71], Фейс [75b]). (a) Кольцо R называется **ограниченным справа**, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой двусторонний идеал. Если R — ограниченное справа кольцо Коэна с условием обрыва возрастающих цепей идеалов и каждый его идеал является проективным правым идеалом, то оно наследственно справа.

(b) Если R — ограниченное справа кольцо Коэна, то каждый его идеал является конечно порожденным проективным правым идеалом тогда и только тогда, когда R — нётерово справа наследственное справа кольцо.

(c) Если B — идеал кольца R и R/B — артиново справа кольцо, то каждый правый идеал, содержащий B, проективен тогда и только тогда, когда каждый двусторонний идеал, содержащий B, является проективным правым R-модулем. Вывести из этого, что артиново справа кольцо наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый его идеал является проективным правым R-модулем.

(d) Любое ограниченное справа первичное кольцо, являющееся правым кольцом Голди и кольцом Коэна, в котором каждый идеал является главным правым идеалом, оказывается нётеровым справа и наследственным справа.

18.35.10 (Асано К. [49]). Нётерово ограниченное первичное кольцо Коэна, в котором каждый идеал обратим, является наследственным. [*Указание*: применить 18.35.9 (a).] См. Михлер [69d] и Ленаган [71]. (Михлер избавился от предположения коэновости.)

18.36. Предложение и определение. *Кольцо R называется* ***локально разложимым,*** *если R — произведение конечного числа локальных колец.*

Следующие условия на кольцо R оказываются эквивалентными:

(a) *кольцо R подобно произведению конечного числа локальных колец;*

(b) *R — полулокальное* SBI-*кольцо, а базисное кольцо кольца R является произведением локальных колец;*

(c) *R — произведение конечного числа полных колец матриц над локальными кольцами.*

Локальное кольцо с нильпотентным радикалом называется ***вполне примарным*** *кольцом.* ***Примарное*** *кольцо — это полное кольцо матриц R_n над вполне примарным кольцом R. Примарное кольцо является полупримарным* (1, стр. 538). *Любое полупримарное кольцо R оказывается* SBI-*кольцом и называется* ***примарно разложимым,*** *если оно подобно локально разложимому кольцу.*

Доказательство. Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) вытекает из предложения 18.21, утверждающего, что любое кольцо с диаграммой Адзумаи подобно своему базисному кольцу, и из упражнения 18.27, утверждающего, что свойство кольца иметь диаграмму Адзумаи инвариантно в смысле Мориты. Так как базисное кольцо кольца матриц A_n над локальным кольцом A совпадает с A, то из (c) следует (b). В силу 8.23 и теоремы Мориты 4.29, если выполнено условие (a), то $R = \operatorname{End}_B P$, где B — произведение конечного числа локальных колец, а P — конечно порожденный проективный модуль над кольцом B, т. е. $B^n = P \oplus X$ для некоторого $n > 0$ и $X \subseteq B^n$. Если $B = \prod_{i=1}^{t} B_i$, где B_i — локальное кольцо, $i = 1, \ldots, t$, то B — кольцо с диаграммой Адзумаи и поэтому в силу теоремы 18.18 о единственности разложения $P = \prod_{j=1}^{t} P_j$, где модуль P_j является произведением n_j экземпляров модуля B_j, причем $0 \leqslant n_j < n$. Кроме того, P_j — вполне инвариантный подмодуль модуля P, поскольку $B_iB_j = 0$ при $i \neq j$, а значит, $\operatorname{Hom}_B(P_i, P_j) = 0$ при $i \neq j$. Таким образом,

$$R = \operatorname{End}_B P = \operatorname{Hom}_B\left(\prod_{i=1}^{s} P_i, \prod_{j=1}^{s} P_j\right) = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{End}_B P_j.$$

Так как $\operatorname{End}_B P_j = \operatorname{End}_{B_j} P_j$ и $P_j \approx B_j^{n_j}$, то R является произведением конечного числа полных колец $(n_j \times n_j)$-матриц над кольцами B_j, $j = 1, \ldots, s$ (1, 3.33.3, стр. 199). Итак, из (b) следует (c).

Наконец, любое полупримарное кольцо является полулокальным SBI-кольцом и, следовательно, в силу предложения 18.26 кольцом с диаграммой Адзумаи. □

Подчеркнем, что локальное кольцо вполне примарно тогда и только тогда, когда оно примарно, что равносильно нильпотентности его радикала.

18.37. Предложение (Асано К. [49]). *Для полупримарного кольца R с радикалом J следующие условия эквивалентны:*

(a) *R — примарно разложимое кольцо;*

(b) *R/J^2 — примарно разложимое кольцо;*

(c) *первичные идеалы кольца R перестановочны.*

Доказательство. Любое полупримарное полупервичное кольцо классически полупросто, и в этом случае из структурной теоремы Веддербёрна — Артина следует утверждение настоящего предложения. Так как идеал J нильпотентен и кольцо R/J классически полупросто, то из 8.8 следует, что J совпадает с пересечением первичных идеалов кольца R, каждый первичный идеал кольца R является максимальным, а множество первичных идеалов конечно, скажем это $\{M_1, \ldots, M_r\}$. В силу леммы 18.33 найдется число n_i, для которого идеал $Q_i = M_i^{n_i}$ является идемпотентным. Если $Q_i = 0$ для некоторого индекса i, то идеал M_i нильпотентен и потому $M_i \subseteq J$, а тогда $M_i = J$. Из этого вытекает, что R/J — простое, а следовательно, и примарное кольцо, т. е. доказываемое предложение имеет место. В противном случае ни один из идеалов Q_i не равен нулю. Более того, тогда идеалы Q_i попарно комаксимальны, поскольку M_i — единственный первичный идеал, содержащий $M_i^{n_i}$. Таким образом, если $i \neq j$, то сумма $Q_i + Q_j$ не лежит ни в каком максимальном идеале и, следовательно, совпадает с R. Далее, поскольку можно предполагать, что кольцо R не является первичным, то нулевой идеал есть произведение первичных идеалов, скажем

$$M_{P(1)}^{k_1} \ldots M_{P(r)}^{k_r} = 0, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant n_i.$$

Следовательно, если выполняется условие (c) о перестановочности первичных идеалов кольца R, то

$$Q = M_1^{n_1} \ldots M_r^{n_r} \subseteq M_{P(1)}^{k_1} \ldots M_{P(r)}^{k_r} = 0.$$

В силу китайской теоремы 18.30 об остатках существует канонический изоморфизм

$$R = R/Q \approx \prod_{i=1}^{r} R/Q_i$$

кольца R в произведение конечного числа (вполне) примарных колец R/Q_i, $i = 1, \ldots, r$. Итак, из (c) следует (a), в то же время импликация (a) $\Rightarrow$ (b) тривиальна.

(b) $\Rightarrow$ (c). Из условия (b) следует, что идеалы M_i и M_j перестановочны по модулю идеала J^2. Однако поскольку $M_i \supseteq J$ для каждого индекса i, то $M_iM_j \supseteq J^2$ и

$$M_iM_j = M_iM_j + J^2 = M_jM_i + J^2 = M_jM_i.$$

Таким образом, из (b) следует (c). □

18.38. Упражнение.

18.38.1 (Накаяма [40], Асано К. [49]). Если кольцо R полулокально, I — его идеал, $I = Ra = bR$ для $a, b \in R$, то $I = aR = Rb$. Кроме того, комаксимальные циклические правые идеалы перестановочны.

18.38.2. Вполне примарное кольцо R с радикалом J является кольцом главных левых идеалов тогда и только тогда, когда левый R-модуль R обладает единственным композиционным рядом

$$R \supset J \supset J^2 \supset \ldots \supset J^{n-1} \supset 0.$$

Это равносильно простоте левого R-модуля J/J^2. (См. цепные модули, гл. 25.)

18.38.3 (Асано К. [49]). Полупримарное кольцо R является кольцом главных левых идеалов тогда и только тогда, когда оно является произведением конечного числа примарных колец главных левых идеалов.

18.38.4 (Камилло). Если R — локальное кольцо, то прямая сумма простых модулей не имеет собственных существенных расширений в их прямом произведении.

Вершины и цоколи

Если M — правый R-модуль, то под **вершиной** top M модуля M будем понимать фактормодуль $M/\operatorname{rad} M$ модуля M по пересечению его максимальных подмодулей. Напомним, что, двойственным образом, цоколь soc M модуля M определяется как сумма его простых подмодулей.

18.39. Предложение. *Если кольцо R полулокально и J = rad R, то*

$$\text{top } M = M/MJ,$$
$$\text{soc } M = \text{ann}_M J.$$

Доказательство. Следует применить пункт (d) предложения 18.3. □

В случае когда кольцо R обладает диаграммой Адзумаи, мы в 18.23 ввели в рассмотрение термины

правый главный неразложимый идеал (модуль) eR;

главный циклический модуль (т. е. фактормодуль eR/K главного неразложимого модуля).

Если R — артиново справа кольцо, то главный неразложимый модуль максимальной длины назовем **доминантным.** Определим **цепной модуль** как модуль с линейно упорядоченной структурой подмодулей.

18.40. Предложение. *Пусть R — полулокальное кольцо и J =* = rad R.

18.40.1. *Следующие условия на правый R-модуль M эквивалентны:*

(a) *M — цепной модуль конечной длины n;*

(b) *M — модуль конечной длины n и MJ^k/MJ^{k+1} — простой модуль для любого $0 \leqslant k < n-1$;*

(c) *модуль M обладает единственным композиционным рядом*

$$M \supset MJ \supset MJ^2 \supset \ldots \supset MJ^{n-1} \supset 0.$$

18.40.2. *Каждый конечно порожденный цепной модуль является циклическим и локальным.*

Доказательство оставляем в качестве упражнения. □

18.41. Упражнение. Пусть R — артиново слева и справа кольцо.

18.41.1* (Фуллер [69а]). Кольцо R самоинъективно справа тогда и только тогда, когда существует разбиение правых (левых) главных неразложимых модулей на пары, при котором вершина одного модуля пары совпадает с цоколем другого (см. QF-кольца, гл. 24).

18.41.2* (Бойл [73]). В этом случае кольцо R примарно разложимо и каждый правый или левый главный неразложимый модуль однороден тогда и только тогда, когда top M = soc M для каждого циклического модуля M. Это равносильно утверждению о том, что R — кольцо главных левых и главных правых идеалов (см. упражнения 18.38.3, 19.45, а также гл. 25).

18.41.3. Пусть R — артиново справа кольцо с радикалом J и каждый главный неразложимый модуль eR является цепным. Если n — наибольшее из чисел k, для которых $eJ^k \neq 0$, то $M = (eR + J^n)/J^n$ — доминантный модуль в R/J^n (см. 25.4.1A). [*Указание*: R/J^n-модуль $M = (eR + J^n)/J^n$ точен и R/J^n вкладывается в прямую сумму конечного числа m экземпляров модуля M. Ср. 19.13А и 25.4.2.]

Порядки в полулокальных кольцах

Теорема Феллера и Своковского дает достаточные условия для того, чтобы кольцо R имело правое кольцо частных в предположении, что кольцо R содержит идеал I, для которого кольцо R/I обладает правым кольцом частных. Одно из условий: идеал I рефлективен (в смысле следующего далее определения). В этом последнем разделе гл. 18 мы применим эту теорему для описания колец с полулокальными правыми кольцами частных. Эти результаты связаны с гл. 10 (порядки в полулокальных кольцах матриц) и являются ее продолжением.

18.42. Определение и предложение.

18.42.1. *Идеал I предкольца R называется* ***замкнутым,*** *если выполнены эквивалентные условия:*

C1. *I — замкнутый*[1]) *правый и замкнутый левый идеал предкольца R;*

C2. *если c — регулярный элемент в R, то $[c + I]$ — регулярный элемент в R/I.*

18.42.2. *Идеал I называется* ***рефлективным,*** *если выполнено следующее условие:*

элемент c регулярен в R тогда и только тогда, когда элемент $[c + I]$ регулярен в R/I.

*В этом случае кольцо R называется I-**рефлективным.** Каждый рефлективный идеал замкнут.*

18.42.3. *Правый идеал I в R называется* ***q-регулярным,*** *если*

$$(x \in I \text{ и } c \in R \text{ регулярен}) \Rightarrow c + x \text{ регулярен в } R.$$

Каждый рефлективный идеал q-регулярен.

18.42.4. *Если кольцо R обладает правым кольцом частных S, то правый идеал I в R q-регулярен тогда и только тогда, когда $IS \subseteq$ rad S.*

Доказательство. Эквивалентность условий C1 и C2 тривиальна, а потому имеет место утверждение 18.42.2. Если идеал I рефлективен, c — регулярный элемент в R и $x \in I$, то

[1]) См. т. 1, стр. 497.— *Прим. перев.*

$[c+I] = [c+x+I]$ — регулярный элемент в R/I и потому $c+x$ — регулярный элемент в R. Таким образом, рефлективный идеал q-регулярен.

18.42.4. Заметим сначала, что в силу 10.11 $IS = \{xc^{-1} \mid x \in I$, c — регулярный элемент в $S\}$. Пусть $u = 1 + xc^{-1}$. Тогда эквивалентность

$$u \in \mathcal{U}(S) \Longleftrightarrow uc = c + x \text{ — регулярный элемент в } R$$

показывает, что каждый элемент вида xc^{-1} из IS квазирегулярен (т. е. $IS \subseteq \operatorname{rad} S$) тогда и только тогда, когда I есть q-регулярный правый идеал в R. □

18.43. Предложение. *Пусть S — правое кольцо частных кольца R. Тогда произвольный идеал I кольца R рефлективен в том и только том случае, когда S/IS каноническим образом* (см. 10.16) *превращается в правое кольцо частных кольца R/I и идеал I q-регулярен в R (это эквивалентно тому, что $IS \subseteq \operatorname{rad} S$).*

Доказательство. Пусть I — рефлективный идеал. В силу предложения 18.42.3 он q-регулярен. В силу определения 18.42.2 рефлективный идеал замкнут. Тогда $I = IS \cap R$, и потому

$$\begin{cases} \bar{R} = R/I \to S/IS = \bar{S} \\ [r+I] \mapsto [r+IS] \end{cases}$$

является каноническим мономорфизмом колец. Так как R — правый порядок в S, то $\bar{R}$ — правый порядок в $\bar{S}$. Далее, если $x \in R$ — такой элемент, что $[x+I]$ — регулярный элемент в R/I, то в силу рефлективности идеала I x — регулярный элемент в R и, следовательно, обратим в S.

Таким образом, $[x+IS]$ — обратимый элемент в S/IS. Это доказывает, что S/IS — правое кольцо частных кольца R/I, и в силу п. 18.42.4 $IS \subseteq \operatorname{rad} S$. Обратно, пусть $IS \subseteq \operatorname{rad} S$ и S/IS является правым кольцом частных кольца R/I. Тогда если $[c+IS]$ — обратимый элемент в S/IS, где $c \in R$, то в силу доказательства следствия 18.7 c — обратимый элемент кольца S, и обратно. Это показывает, что I — рефлективный идеал. □

18.44. Упражнения.

18.44.1. Пусть S — кольцо частных и I — такой идеал, что S/I — кольцо частных. (Например, S — любое кольцо с условием обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, а I — любой идеал, поскольку кольцо S/I наследует условие обрыва убывающих цепей. Ср. совершенные кольца, гл. 22.) Показать, что идеал I рефлективен тогда и только тогда, когда $I \subseteq \operatorname{rad} S$. (Если кольцо S артиново справа, то это условие равносильно нильпотентности идеала I, см. предложение 18.6.) Вывести из этого, что если S/I совпадает со своим правым кольцом частных, то идеал I может не быть рефлективным (ср. предложение 18.46).

18.44.2 (Феллер — Своковский [64]). Пусть M — конечно порожденный левый модуль без кручения над левой и правой областью Оре B с телом частных D. Тогда $\operatorname{End}_D(D \otimes_B M)$ — классически полупростое правое и левое кольцо частных первичного кольца $R = \operatorname{End}_B M$. Таким образом, кольцо R удовлетворяет условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и правых аннуляторных идеалов. [*Указание*: модуль M содержится в конечно порожденном свободном левом B-модуле, порожденном элементами $r^{-1}a_1, \ldots, r^{-1}a_n$, где элементы $a_1, \ldots, a_n$ порождают модуль M. См. также упр. 19.37.]

18.44.3 (Зельманович [67]). Показать, что утверждение 18.44.2 не может быть обобщено на односторонние области Оре.

18.45. Определение и предложение. *Идеал I кольца R называется **идеалом Оре справа**, если для любых элемента $x \in I$ и регулярного элемента $c \in R$ найдутся элемент $x_1 \in I$ и регулярный элемент $c_1 \in R$, для которых $cx_1 = xc_1$.*

18.45.1. *Если кольцо R имеет правое кольцо частных S, то любой замкнутый идеал в R оказывается идеалом Оре справа.*

18.45.2. *Если кольцо R имеет правое кольцо частных S и I — рефлективный идеал в R, то I — идеал Оре справа и кольцо S/IS каноническим образом превращается в правое кольцо частных кольца R/I.*

Доказательство. Доказательство утверждения 18.45.1 содержится в доказательстве утверждения из 10.11 о том, что IS — идеал кольца S, если I — замкнутый идеал. Кроме того, утверждение 18.45.2 следует из первого утверждения в 18.42.3, а в силу 18.42.2 рефлективный идеал замкнут. □

18.46. Предложение (Феллер — Своковский [61a], [61b]). *Если I — рефлективный идеал кольца R, который является идеалом Оре справа, и R/I имеет правое кольцо частных Q, то кольцо R обладает правым кольцом частных S и S/IS канонически изоморфно кольцу Q. Итак, $IS = \{ac^{-1} \mid a \in I$, c — регулярный элемент в $R\}$ и $IS \cap R = I$* (ср. 1, 10.16, стр. 502).

Доказательство. Через R' обозначим множество регулярных элементов кольца R. Тогда критерий существования правого кольца частных S кольца R дает условие регулярности Оре (1, 9.1):

$$\forall a \in R,\ c \in R' \quad \exists a_1 \in R,\ c_1 \in R' \text{ и } ac_1 = ca_1,$$

или, что равносильно, $aR' \cap cR \neq 0$

Допустим, что выполнены условия предложения. Можно считать, что $a \notin I$. Так как кольцо R/I удовлетворяет условиям регулярности и так как из рефлективности идеала I следует, что при каноническом отображении $R \to \overline{R} = R/I$ множество R' отображается на $\overline{R}'$, то $\bar{a}\overline{R}' \cap \bar{c}\overline{R} \neq \bar{0}$. Значит, $ac_1 = ca_1 + x$, где $c_1 \in R'$, $a_1 \in R$, $x \in I$. Поскольку I — идеал Оре справа, то найдутся $d_1 \in R'$, $x_1 \in I$, для которых $cx_1 = xd_1$. Тогда $a(c_1d_1) = c(a_1d_1 + x_1)$ — нужный нам элемент из $aR' \cap cR$. Таким образом, кольцо S существует, и мы можем применить 18.45. □

18.47. Предложение (Фейс [71b]). *Кольцо R обладает полулокальным правым кольцом частных S тогда и только тогда, когда оно содержит рефлективный идеал T, являющийся идеалом Оре справа, такой, что R/T — полупервичное правое кольцо Голди, а T является суммой q-регулярных правых идеалов кольца R. В этом случае $TS = \operatorname{rad} S$, $T = R \cap \operatorname{rad} S$ и $S/\operatorname{rad} S$ каноническим образом превращается в правое кольцо частных кольца R/T.*

Доказательство. Допустим, что S — полулокальное правое кольцо частных кольца R с радикалом J. В силу 10.17 кольцо $\overline{S} = S/J$ каноническим образом можно рассматривать как правое кольцо частных кольца $\overline{R} = R/T$, где $T = J \cap R$ и $TS = J$. В силу предложения 18.42.4 идеал T q-регулярен. Если I — произвольный q-регулярный правый идеал кольца R, то с помощью того же результата можно показать, что $J \supset IS$, и потому $T = J \cap R \supseteq IS \cap R \supseteq I$. Следовательно, T является суммой q-регулярных правых идеалов. Так как $T = J \cap R$ — замкнутый идеал кольца R, то T — идеал Оре справа (в силу 18.45). В силу предложения 18.43 T — рефлективный идеал.

Достаточность. В наших предположениях идеал T рефлективен, является идеалом Оре справа и R/T — полупервичное правое кольцо Голди (с классически полупростым правым кольцом частных Q). Тогда в силу предложения 18.46 кольцо R имеет правое кольцо частных S, такое, что S/TS каноническим образом превращается в правое кольцо частных кольца R/T. Так как S/TS изоморфно Q и является классически полупростым кольцом, то $TS \supseteq \operatorname{rad} S$. В силу предложения 18.42.4 из предположения о q-регулярности идеала T следует, что $TS = \operatorname{rad} S$. Это влечет за собой изоморфизм $S/\operatorname{rad} S \approx Q$ и полулокальность кольца S. □

18.48. Следствие. *Кольцо R обладает полулокальным правым кольцом частных S, которое является соответственно*

(a) *нётеровым справа;*
(b) *артиновым справа;*
(c) *кольцом с исчезающим справа радикалом;*
(d) *полупримарным*

тогда и только тогда, когда R содержит идеал T, обладающий

указанными в предложении 18.47 свойствами, а также удовлетворяет соответствующему из условий

(a′) *кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей замкнутых правых идеалов;*
(b′) *идеал T нильпотентен и кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей замкнутых правых идеалов (тогда кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей замкнутых правых идеалов, и обратно);*
(c′) *идеал T исчезает справа;*
(d′) *идеал T нильпотентен.*

Доказательство. (a) Так как кольцо R имеет полулокальное правое кольцо частных S, то наличие структурного изоморфизма 10.11 между правыми идеалами кольца S и замкнутыми правыми идеалами кольца R доказывает эквивалентность (a) $\Longleftrightarrow$ (a′).

(d) Так как кольцо S полулокально, то оно полупримарно тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} S$ — нильпотентный идеал. Поскольку в силу предложения 18.47 $TS = \operatorname{rad} S \supseteq T$, то идеал T нильпотентен. Обратно, так как $ST \subseteq TS = \operatorname{rad} S$, то $(TS)^n \subseteq T^nS$. Итак, если индекс нильпотентности идеала T не превосходит n, то $\operatorname{rad} S = TS$ — нильпотентный идеал индекса $\leqslant n$.

(b) В силу предложения 18.12 полупримарное кольцо является артиновым тогда и только тогда, когда оно нётерово. Каждое артиново кольцо полупримарно. Итак, в силу (d) и (a) кольцо S артиново тогда и только тогда, когда идеал T нильпотентен и кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей замкнутых правых идеалов.

(c) Если $\operatorname{rad} S$ исчезает справа, то T исчезает справа. Обратно, если

$$p_n = a_1c_1^{-1} \ldots a_nc_n^{-1}, \quad a_n \in T, \quad c_n \in R,$$

— последовательность произведений элементов радикала $\operatorname{rad} S$, то, поскольку T — идеал Оре справа, существуют элементы $a_2' \in T$, $c_2' \in R$, такие, что

$$c_1^{-1}a_2 = a_2'c_1'^{-1}.$$

По индукции $p_n = a_1a_2' \ldots a_n'c_n'^{-1}$, где $a_i' \in T$, $i \geqslant 2$. Это доказывает, что $\operatorname{rad} S$ исчезает справа, если T исчезает справа. □

Заметим, что условие (c′) равносильно требованию о совершенности слева кольца S (см. гл. 22).

Упражнения к гл. 18

1. Если $f\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, то $f(\operatorname{rad} R) \subseteq \operatorname{rad}(f(R))$, при этом включение может быть строгим.

2. Если P — проективный правый R-модуль, то
$$\operatorname{rad}(\operatorname{End} P_R) = \{f \in \operatorname{End} P_R \mid P \circ\!\!- \operatorname{im} f\}.$$

3. Если P — ненулевой проективный модуль, то
$$\operatorname{rad} P = PJ \neq P,$$
где $J = \operatorname{rad} R$.

4. Если P_i — проективный B-объект категории mod-R и $K_i \subseteq \operatorname{rad} P_i = P_i J$, $i = 1, 2$, то
$$(P_1/K_1 \approx P_2/K_2) \Rightarrow (P_1 \approx P_2).$$

5. Если R — правое B-кольцо, то
$$\operatorname{rad}(\operatorname{End} P_R) = \operatorname{Hom}_R(P, P(\operatorname{rad} R)) =$$
$$= \{f \in \operatorname{End} P_R \mid f(P) \subseteq P(\operatorname{rad} R)\}.$$
Кроме того,
$$\operatorname{End} P_R / \operatorname{rad}(\operatorname{End} P_R) = \operatorname{End}(P/\operatorname{rad} P)_R.$$

6. (A) Если R — правое B-кольцо, то rad R исчезает слева. (B) Если кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных левых идеалов, то оно — полулокальное кольцо с исчезающим слева радикалом, который содержит каждый односторонний ниль-идеал.

7. Если кольцо R имеет артиново справа правое кольцо частных, то кольцо многочленов $R[x]$ имеет артиново справа правое кольцо частных.

8. Кольцо $R = \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 - xy)$ имеет кольцо частных S (поскольку R — коммутативное кольцо), но кольцо S не является полулокальным.

*9 (ср. Робсон [67, стр. 605, теорема 2.11]). Коммутативное нётерово кольцо R имеет артиново кольцо частных Q тогда и только тогда, когда максимальный нильпотентный идеал W рефлективен, а это, в свою очередь, равносильно тому, что простые идеалы, принадлежащие 0, минимальны.

10. Если e — идемпотент кольца R, то $e \in \operatorname{rad} R$ тогда и только тогда, когда $e = 0$.

*11 (Капланский [58a]). Если R — локальное кольцо, то каждый проективный R-модуль свободен.

*12 (Амицур [56b]). Если R — кольцо и $R[x]$ — кольцо многочленов, то $\operatorname{rad}(R[x]) = N[x]$, где N — некоторый ниль-идеал кольца R.

*13 (Снэппер). Если кольцо R коммутативно, то $\operatorname{rad}(R[x]) = N[x]$, где N — максимальный ниль-идеал кольца R.

*14 (Голдман [51], Крулль). Если кольцо R коммутативно и A — коммутативная конечно порожденная R-алгебра, то rad A — ниль-идеал.

15. Если кольцо R полупримарно, то $\operatorname{rad} M \neq M$ и $\operatorname{soc} M \neq 0$ для каждого ненулевого R-модуля M.

16. Следующие условия на идеал I кольца R эквивалентны: (A) I/I^2 — нётеров R-модуль; (B) I^k/I^{k+1} — нётеров R-модуль для каждого $k \geqslant 1$.

17 (Янус). Пусть R — кольцо, $J = \operatorname{rad} R$, R/J — классически полупростое кольцо и $J \neq J^2$. Тогда любой простой неинъективный правый R-модуль M вложим в J/J^2.

18. Если M инъективен как R-модуль, то M инъективен как (R/I)-модуль для каждого идеала I, лежащего в $\operatorname{ann}_R M$. Кроме того, $\operatorname{ann}_M A$ является инъективным (R/A)-модулем для каждого идеала A.

19. (Обратное утверждение к упр. 17.) В условиях упр. 17 показать, что если M — ненулевой подмодуль модуля J/J^2, то он не является инъективным R-модулем.

20. Если $R/\operatorname{rad} R$ — простое кольцо, то любой правый идеал A, не лежащий в rad R, является образующим. Если $A = eR$, где $0 \neq e = e^2 \in R$, то R канонически изоморфно $\operatorname{End}_{eRe} eR$ (ср. 22.25).

21. Пусть R — коммутативная область целостности с полем частных K и $K \neq R$. Показать, что superfl $K_R = K$.

22 (Нагата [51a], [51b]). Полулокальное коммутативное кольцо R с конечным числом максимальных идеалов является прямой суммой локальных колец тогда и только тогда, когда R — подпрямая сумма локальных колец.

Замечания к гл. 18

Истоки понятия радикала Джекобсона кольца, определенного Джекобсоном в [45a], и его характеризация Перлиса и Джекобсона уже обсуждались в предисловии к этому тому. Кроме того, в гл. 26 радикал Джекобсона будет сравниваться с различными другими радикалами.

Понятие радикала модуля намного старше. Действительно, в теории групп пересечение $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп группы G было введено Фратини в 1885 г.! (Таким образом,

$\Phi(G) = \operatorname{rad} G$ для абелевой группы.) Он доказал, что если G — конечная группа, то $\Phi(G)$ — нильпотентная группа. Кроме того, теорема Виландта утверждает, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда ее коммутант $[G, G]$ лежит в $\Phi(G)$ (см., например, книгу Хупперта [67, стр. 268—271, особенно теоремы 3.6 и 3.11]).

Как уже говорилось в предисловии, Артин [27] в своей структурной теории колец с условием обрыва убывающих цепей предполагал выполнение условия обрыва возрастающих цепей. Это ограничение было снято независимо Гопкинсом [39] и Левицким [39].

Значение полулокальных колец определяется большим числом приложений в таких различных областях, как алгебраическая геометрия, коммутативная и некоммутативная алгебра, теория групп, теория модулей и теория категорий. В алгебраической геометрии или в коммутативной алгебре, например, можно рассматривать локальное кольцо в точке алгебраического многообразия или в простом идеале кольца.

Согласно Бурбаки (71, *исторические замечания*, стр. 674), общее понятие локального кольца формировалось очень медленно: Грелль (в 1926 г.) и Крулль (в 1938 г.) — для областей целостности, Шевалле (в 1944 г.) — для нётеровых колец, а в общем случае — А. И. Узков (в 1948 г.).

Начиная с 1940 г. локальное кольцо R_P области целостности R по простому идеалу P систематически использовалось Круллем (и его школой), а в алгебраической геометрии — Шевалле и Зариским. Термин Крулля *stellenring* был вытеснен термином Шевалле *local ring* (*локальное кольцо*), т. е. кольцо, ассоциированное с точкой многообразия и отражающее «локальные свойства» многообразия, например кольцо всех функций, регулярных в этой точке (см. также Нагата [62], стр. xi). Здесь мы не упомянули важную работу Гензеля на рубеже столетий о p-адических числах, однако Гензель рассматривал не само кольцо R_P, а его пополнение, т. е. p-адическое пополнение (см. Бурбаки, *там же*, а также 21.7A).

Кёте [30a] изучал некоммутативные полулокальные кольца **с радикалом Кёте**, т. е. с ниль-идеалом K, содержащим каждый односторонний ниль-идеал. (Открытый вопрос: каждое ли кольцо имеет радикал Кёте?) Кёте (*там же*) доказал, что полулокальное кольцо R с радикалом Кёте K изоморфно кольцу матриц A_n над локальным кольцом A тогда и только тогда, когда факторкольцо R/K просто. Кроме того, $R \approx \operatorname{End}_A E$, где E есть A-модуль, состоящий из всех матриц из A_n с нулями во всех строчках, кроме одной фиксированной. Эта теорема обобщает теорему Веддербёрна — Артина, теорему Нётер [29] (для случая простого классически полупростого кольца R) и по существу совпадает с утверждением следствия 22.24. Далее, Кёте [30a, стр. 182, теорема 13] доказал,

что в полулокальном SBI-кольце с радикалом J и правыми главными неразложимыми модулями eR и fR эквивалентны условия $eR \approx fR$ и $eR/eJ \approx fR/fJ$. (Доказательство Кёте предназначено для случая $J = K$, где K — радикал Кёте.)

Кёте [30b] обобщил на полулокальное кольцо R с ниль-радикалом K две теоремы Шоды:

(1) *пересечение всех ниль-подколец кольца R совпадает с K;*

(2) *если R — артиново кольцо, то любые два максимальных нильпотентных подкольца кольца R сопряжены и каждое нильпотентное подкольцо содержится в некотором максимальном нильпотентном подкольце.*

(Шода доказал (1) для артиновых колец, а (2) для конечных колец.) Утверждение (1) также было обобщено Михлером [66] на нётерово справа кольцо R. (См. 17.31 (b) и (c)).

Из (2) следует, что *все матрицы любого нильпотентного подкольца S кольца $(n \times n)$-матриц k_n над телом k* можно одновременно привести к треугольному виду, а также что кольцо $T_n(k)$ верхних треугольных матриц является максимальным нильпотентным подкольцом. В связи с гипотезой Кёте Левицкий [31] (см. также [45a]) показал, что каждое ниль-подкольцо артинова (а также и нётерова) кольца нильпотентно, и тем самым усилил теорему Кёте, доказав, что все матрицы ниль-подкольца k_n можно одновременно привести к треугольному виду (17.19). Некоторое обобщение этих результатов на мультипликативные системы (M-системы), лежащие в нётеровых слева или справа кольцах, предложил Левицкий [50].

Фиттинг [33] установил связи между прямым разложением модуля M конечной длины и его кольцом эндоморфизмов A (*там же*, стр. 528, теорема 4). В частности, M неразложим тогда и только тогда, когда A — локальное кольцо (*там же*, стр. 533, теорема 8). Это утверждение носит название «леммы Фиттинга» (см. 17.17′ и 17.30).

Некоммутативные полулокальные кольца естественно возникают даже в коммутативной алгебре, поскольку, как это было отмечено в предложении 18.26, модуль (или объект абелевой категории) M удовлетворяет условию конечности Крулля — Шмидта (т. е. обладает конечной диаграммой Адзумаи) тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов модуля M — полулокальное SBI-кольцо. Эти кольца в свою очередь являются полусовершенными кольцами Басса [60] (см. теорему 22.23), т. е. кольцами, над которыми каждый конечно порожденный модуль обладает проективным накрытием. В этой статье при характеризации колец, над которыми каждый правый модуль имеет проективное накрытие, Басс получил естественное обобщение полупримарных колец (как это и утверждает заглавие статьи). Вместо нильпотентности радикала требуется его трансфинитная нильпотентность, которую Басс называл T-нильпотентностью, а мы использовали термин «радикал исчезает слева».

Капланский [68, стр. 4] выразил сомнение в том, что артиновы кольца — естественное обобщение конечномерных алгебр, поскольку «естественные примеры не являются общими», и предложил в качестве альтернативы кольца, являющиеся конечно порожденными модулями над нётеровыми подкольцами своих центров (т. е. PI-алгебры). Как бы то ни было, полупримарные кольца определенно возникают, и при том естественным образом, как кольца эндоморфизмов модулей конечной длины. (Упражнение 18.14 (b), вытекающее из 17.20 и 18.26.) Левицкий [44] охарактеризовал полупримарные кольца как кольца, полулокальные по модулю идеала N, порожденного всеми нильпотентными односторонними идеалами, и удовлетворяющие условию обрыва убывающих цепей произведений идеалов из N. Бьёрк [70] характеризует полупримарные кольца следующим требованием: существует число n, такое, что R не содержит строго убывающей последовательности, состоящей из n главных левых идеалов.

Многие из других статей, упомянутых в этой главе, также содержат утверждения о строении полупримарных колец, см., например Гопкинс [39], Левицкий [39] (см. 18.2), Эйленберг — Нагао — Накаяма [56] (см. 18.33) и Асано К. [49] (см. 18.37 и 18.38). Кроме того, Чейз [60] предвосхитил теорему Бьёрка (22.30), утверждающую, что если R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, то правые R-модули удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей конечно порожденных подмодулей. А именно Чейз доказал, что это верно для полупримарного кольца (18.14). (Некоторые другие теоремы Чейза [60] приводятся в гл. 20.)

Эйленберг, Нагао и Накаяма (см. ссылку выше) доказали, что глобальная размерность каждого факторкольца наследственного полупримарного кольца конечна. Джанс и Накаяма [57] и Чейз [61] охарактеризовали полупримарные кольца, у которых глобальная размерность каждого факторкольца конечна (эти кольца оказываются треугольными в следующем смысле: существует ортогональное представление единицы неразложимыми идемпотентами $e_1, \ldots, e_n$, такое, что $e_i (\mathrm{rad}\, R)\, e_j = 0$ для $i \geqslant j$). Это бывает в том и только том случае, когда глобальная размерность кольца $R/(\mathrm{rad}\, R)^2$ конечна, и тогда gl dim R строго меньше, чем число r простых колец в разложении Веддербёрна — Артина кольца $R/\mathrm{rad}\, R$. (В действительности $\mathrm{gl.\,dim}\, R \leqslant \mathrm{gl.\,dim}\, R/(\mathrm{rad}\, R)^2 < r$. См. Чейз [61, стр. 22].) Кроме того, если кольцо $R/\mathrm{rad}\, R$ «сепарабельно», то любое полупримарное кольцо, для которого глобальная размерность кольца $R/(\mathrm{rad}\, R)^2$ конечна, является факторкольцом однозначно определенного наследственного полупримарного кольца (Джанс и Накаяма, *там же*, цитируется Чейзом (та же ссылка)). Эта теория обобщается далее Харадой [66b], который полностью выясняет строение наследственного полупримарного кольца R как обобщенного кольца треугольных матриц над классически полупростым кольцом. Кроме того, для любого идеала I

$$\mathrm{gl.\,dim}\,(R/I) < r - s + 1,$$

где s — число простых идеалов в разложении идеала I в прямую сумму по модулю rad R. Аналогично, если n — индекс нильпотентности радикала rad R, то

$$\mathrm{gl.\,dim}\,(R/I) \leqslant n - 1.$$

Харада применяет эти результаты для получения другого доказательства основной теоремы о строении наследственного порядка R над дискретным кольцом нормирования ранга 1 (Харада [63]). (В связи с этим см. Райнер [75, стр. 358]; там же имеются и другие результаты о строении наследственных порядков, включая теорему Якобинского [71], утверждающую, что наследственные порядки «экстремальны».)

Закс [68] развил аналогичную теорию для T-колец, т. е. для полупримарных колец, в которых каждое неразложимое прямое слагаемое имеет наименьший ненулевой идеал и каждый минимальный идеал является проективным модулем. Глобальная размерность факторколец таких колец конечна, и потому они являются кольцами обобщенных треугольных матриц (в смысле Харады) над классически полупростыми кольцами — это установил Леви (*там же*, стр. 76, но без ссылок на Хараду).

Возвращаясь временно к полулокальным кольцам, отметим, что о порядках в полулокальных кольцах было написано много статей, начиная со статей Голди и Лезьё — Круазо (об этом было сказано в гл. 9 первого тома). Теорема 18.47 содержит характеризацию этих колец в терминах максимальных q-регулярных идеалов (рефлективных идеалов, идеалов Оре), напоминающую характеризацию Перлиса — Джекобсона радикала кольца. Обзор литературы по порядкам в полулокальных кольцах можно найти у В. П. Елизарова [69] и Фейса [71b], о порядках в QF-кольцах см. замечания к гл. 24.

В заключение этой главы о полулокальных кольцах сделаем одно предостережение: в коммутативной алгебре термину «полулокальный» придается более узкий смысл, а именно коммутативное кольцо R называется квазиполулокальным, если оно содержит лишь конечное число максимальных идеалов, и полулокальным, если оно к тому же нётерово (Нагата [62, стр. 13]). Предмет теории коммутативных полулокальных и локальных колец неисчерпаем, в чем легко убедиться, читая работу Крулля [48] или Нагаты [62].

(Сошлемся также на статьи Нагаты [50], [51a], [60].) Детальное исследование локальных колец глобальной размерности 2 и, на самом деле, их характеризация имеются у Васконселоса [72] и Гринберга [74].

Следует добавить несколько слов об истоках предложения 18.24. Та его часть, в которой утверждается, что полулокальное SBI-кольцо R подобно своему базисному кольцу, в несколько иной форме получена Веддербёрном, который, разумеется, никогда не формулировал ее на категорном языке: если $R = D_n$ — кольцо $(n \times n)$-матриц над кольцом D, то соответствие $X \mapsto Xe_{11}$ естественным образом определяет эквивалентность категорий $\text{mod-}R \approx \approx \text{mod-}D$; если e_{11} — матричная единица, то очевиден изоморфизм $D \approx e_{11}Re_{11}$. Указанное подобие неявно использовалось в ряде других работ, а в форме предложения 18.24 оно является очевидным следствием теоремы Мориты [58].

Ссылки

Адзумая [50], Амицур [56], Артин Э. [27], Асано К. [49], Басс [60], [68], Бойл [73], Бурбаки [71], Бёрк [69], [70], Бэр [43], Васконселос [72], Гопкинс [39], Гринберг [74], Джанс — Накаяма [57], Джекобсон [47], [45a], [45b], [64], Джин — Мосс [75], Елизаров [69], Закс [68], Зельманович [67], Капланский [46], [68], Кёте [30a], [30b], Коэн И. [50], Крулль [25], [38], [48], Левицкий [31], [39], [44], [45a], Михлер [66], Морита [58], Нагата [50], [51a], [51b], [60], [62], Накаяма [40], Нётер [29], Орнстейн [68], Перлис [42], Познер [60a], [60b], Райнер [75], Робсон [67], Суон [68], Фейс [71b], Фейс — Утуми [64], Феллер — Своковский [61a], [61b], Фиттинг [33], Фуллер [69a], Харада [63], [66b], Хупперт [67], Чейз [60], [61], Шмидт [28], Эйленберг — Нагао — Накаяма [56], Якобинский [71].

Глава 19

КВАЗИИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И САМОИНЪЕКТИВНЫЕ КОЛЬЦА

Модуль M, такой, что каждый гомоморфизм $f\colon S \to M$ его подмодуля S индуцируется некоторым эндоморфизмом модуля M, называется **квазиинъективным** или, для краткости, QI-модулем. Каждый модуль, инъективный по модулю своего аннулятора, и любой полупростой модуль являются QI-модулями (см. 19.1.1, 19.1.2). Класс QI-модулей совпадает с классом всех вполне инвариантных подмодулей инъективных модулей (19.3). Модули, конечно порожденные над своими кольцами эндоморфизмов, называются **эндоконечными.** Эндоконечный QI-модуль инъективен по модулю своего аннулятора (19.14A). Над артиновым справа кольцом каждый квазиинъективный правый модуль эндоконечен и, обратно, если каждый квазиинъективный правый модуль эндоконечен, то кольцо артиново справа (19.16A). Таким образом, каждый точный квазиинъективный правый модуль над артиновым справа кольцом инъективен (19.15) (результат, справедливый и для конечно порожденных квазиинъективных точных модулей над коммутативными кольцами (19.17)).

Идеи доказательства этих фактов наиболее полно выражаются в теореме Бичи 19.13A, утверждающей, что существенно артиново справа кольцо R можно охарактеризовать свойством, что каждый точный правый R-модуль M конечно точен в том смысле, что R вкладывается в произведение конечного числа экземпляров модуля M. (Это также дает «существенный» вариант теоремы Гопкинса — Левицкого: существенно артиново справа кольцо является существенно нётеровым справа.)

Примером кольца, обладающего простыми модулями, не инъективными по модулю своих аннуляторов, служит кольцо всех линейных преобразований $\text{End}\,_D M = L$ бесконечномерного левого векторного пространства M над D. Канонический правый L-модуль M не инъективен (19.46). (На самом деле если каждый квазиинъективный правый R-модуль инъективен, то (20.5) кольцо R обязательно нётерово справа.)

Правую самоинъективность кольца R можно описать с помощью эндоконечных модулей: каждый эндоконечный точный правый R-модуль порождает категорию R-mod (ср. 19.20).

Другие важные темы этой главы: (1) квазиинъективная оболочка модуля (19.7); (2) аннуляторное условие 19.10 для конечно порожденных $\text{End}_R M$-подмодулей QI-модуля M; отсюда получается (3) теорема плотности 19.22 для примитивных колец; (4) регулярные кольца в смысле Неймана; (5) радикал и строение кольца эндоморфизмов QI-модуля (19.27); (6) характеризация Утуми радикала самоинъективного справа кольца (19.28); (7) рациональные расширения Финдлея — Ламбека (19.32, 19.33); (8) максимальное правое кольцо частных Джонсона — Утуми (19.34); (9) кольца, конечные по Дедекинду (19.39—19.43).

Включена в эту главу и характеризация первичных и полупервичных правых колец Голди: кольцо R является первичным правым кольцом Голди тогда и только тогда, когда оно обладает неразложимым эндоконечным точным инъективным правым модулем E, удовлетворяющим двум следующим условиям: (1) E не имеет нетривиальных вполне инвариантных подмодулей; (2) $\mathrm{End}_R E$ есть тело (19.54). (Полупервичные кольца Голди характеризуются аналогично (19.55B).) Если R — первичное правое кольцо Голди, то $Q = \mathrm{Biend}\ E_R$ является его правым кольцом частных.

Последние два раздела этой главы посвящены теоремам Гудёрла о свойствах первичных идеалов регулярного самоинъективного справа кольца R: идеалы такого кольца R, содержащие первичный идеал P, линейно упорядочены по включению и первичны. Более того, если R не является инъективной оболочкой идеала P, то P примитивен, а содержащие его идеалы вполне упорядочены по включению (19.64). Аналогичная теорема имеет место в любом самоинъективном справа кольце для произвольного первичного идеала, содержащего радикал Джекобсона кольца; в частности, идеалы, содержащие данный примитивный идеал, линейно упорядочены (19.69).

19.1. Примеры.

19.1.1. Правый R-модуль M инъективен, если из точности последовательности

(a) $$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

в категории mod-R следует, что точна последовательность

(b) $$0 \to \mathrm{Hom}_R(Z, M) \to \mathrm{Hom}_R(Y, M) \to \mathrm{Hom}_R(X, M) \to 0.$$

Кроме того, M является квазиинъективным модулем, или QI-модулем, если при $Y = M$ из (a) вытекает (b). Если модуль M инъективен по модулю своего аннулятора, т. е. инъективен как $(R/\mathrm{ann}_R M)$-модуль, то он квазиинъективен как правый R-модуль.

Согласно критерию инъективности Бэра (1, стр. 205), QI-модуль M инъективен, если существует вложение $R \hookrightarrow M^n$ R-модуля R в некоторую конечную степень модуля M, а последнее имеет место тогда и только тогда, когда M эндоконечен и точен (19.15).

19.1.2. Любой полупростой модуль M квазиинъективен, так как каждый подмодуль N выделяется в нем прямым слагаемым (1, 8.2, стр. 450).

19.1.3. Любая циклическая p-группа $\mathbb{Z}_{p^n}$ квазиинъективна в категории mod-$\mathbb{Z}$ (доказательство?).

19.1.4. Кольцо R называется **самоинъективным справа**, если оно инъективно в категории mod-R. Как установлено в 19.1.1, из критерия Бэра вытекает, что R самоинъективно справа тогда и только тогда, когда оно квазиинъективно в категории mod-R.

19.1.5. Модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным подмодулем своей инъективной оболочки (19.3). (Из достаточности этого условия, которая устанавливается тривиально, вытекает утверждение 19.1.3.) Если E инъективен, I — идеал кольца $B = \mathrm{End}\ E_R$, а A — идеал кольца R, то IE, EA, $\mathrm{ann}_E I$ и $\mathrm{ann}_E A$ — квазиинъективные модули и, более того, $\mathrm{ann}_E A$ инъективен в категории mod-(R/A).

19.1.6. Квазипроективность определяется как понятие, дуальное к квазиинъективности, и для него справедливо утверждение, дуальное к 19.1.5. Таким образом, если K — вполне инвариантный подмодуль проективного модуля P, то P/K квазипроективен, а если I — идеал кольца $\mathrm{End}\ P_R$ или A — идеал кольца R, то P/K, где $K = IP$ или $K = PA$ соответственно, квазипроективен.

19.1.7. Прямая сумма двух квазиинъективных модулей не обязательно будет квазиинъективным модулем, но модуль M^n при любом целом n будет квазиинъективным, если квазиинъективен модуль M (см. 19.5). Кроме того, M^c будет QI-модулем для любого кардинального числа c тогда и только тогда, когда M инъективен над $R/\mathrm{ann}_R M$ (упр. 19.21 (р)). В частности, в силу 19.14A так обстоит дело, если M — эндоконечный квазиинъективный модуль.

19.1.8. Если M — правый R-модуль, а $\hat{R}$ — его инъективная оболочка, то $\hat{R} \oplus M$ квазиинъективен в том и только том случае, когда M инъективен в категории mod-R (Ср. 20.4A.)

19.1.9. Если прямая сумма любых двух QI-модулей над R является QI-модулем, то R — нётерово справа V-кольцо, над которым каждый квазиинъективный модуль инъективен (ср. 20.4B).

19.1.10. Единственный простой модуль над кольцом $R = K[y, D]$ дифференциальных многочленов с одним дифференцированием D над универсальным полем (Колчина) K инъективен, точен, но, разумеется, не конечномерен (1, 7.41), а значит, не эндоконечен.

Свойства квазиинъективных модулей

Пусть $\hat{M} = E(M)$ — инъективная оболочка произвольного модуля M. Напомним, что запись $M \rhd N$ означает, что N — существенный подмодуль модуля M.

19.2. Предложение (Джонсон — Уонг [61]). *Если M — правый R-модуль, $\hat{M} = E(M)$ и $\Lambda = \operatorname{End} \hat{M}_R$, то*

(a) *ΛM является пересечением всех квазиинъективных подмодулей модуля $\hat{M}$, содержащих M;*

(b) *ΛM — квазиинъективный модуль;*

(c) *M квазиинъективен тогда и только тогда, когда $M = \Lambda M$.*

Доказательство. (b) Любой гомоморфизм $f\colon N \to \Lambda M$ подмодуля N модуля ΛM в ΛM индуцируется некоторым элементом $\lambda \in \Lambda$. Так как $\lambda(\Lambda M) \subseteq \Lambda M$, то λ индуцирует гомоморфизм $\bar{\lambda} \in \operatorname{Hom}_R(\Lambda M, \Lambda M)$, который также индуцирует f. Это показывает, что ΛM квазиинъективен.

(a) Пусть P — квазиинъективный подмодуль модуля $\hat{M}$, содержащий M. Мы хотим показать, что $P \supseteq \Lambda M$, так что нам достаточно установить включение $\alpha P \subseteq P$ для любого $\alpha \in \Lambda$. Заметим, что $Q(\alpha) = \{x \in P \mid \alpha x \in P\}$ является подмодулем модуля P, и, значит, нам достаточно показать, что $Q(\alpha) = P$ для любого $\alpha \in \Lambda$. Так как $q \mapsto \alpha q$, где $q \in Q = Q(\alpha)$,— гомоморфизм из Q в P и так как P — квазиинъективный модуль, то существует $\alpha_1 \in \operatorname{Hom}_R(P, P)$, такой, что $\alpha_1 q = \alpha q$ для любого $q \in Q$. Поскольку $\hat{M}$ инъективен, то существует $\alpha' \in \Lambda$, такой, что $\alpha' x = \alpha_1 x$ для любого $x \in P$. В силу того что $\alpha' P \subseteq P$, предположив, что $(\alpha' - \alpha)P = 0$, мы получили бы $\alpha P \subseteq P$. Таким образом, если $Q(\alpha) \neq P$, то $(\alpha' - \alpha)P \neq 0$. Так как $\hat{M} \triangleright M$, то непременно $\hat{M} \triangleright P$ и, следовательно, $(\alpha' - \alpha)P \cap P \neq 0$. Но если $x, y \in P$ таковы, что $0 \neq y = (\alpha' - \alpha)x \in (\alpha' - \alpha)P \cap P$, то $\alpha x = \alpha_1 x - y \in P$, поскольку $\alpha' x = \alpha_1 x \in P$. Но тогда $x \in Q(\alpha)$, а значит, $\alpha x = \alpha' x$ и $y = 0$. Мы пришли к противоречию и тем самым доказали (a).

(c) является непосредственным следствием утверждений (a) и (b). □

19.3. Следствие. *Модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным подмодулем своей инъективной оболочки.*

Подмодуль N модуля M **замкнут**, если каждый подмодуль модуля M, который содержит N и является его существенным расширением, совпадает с N.

19.4. Предложение (Фейс — Утуми [64a]). *Пусть модуль M квазиинъективен в* mod-R, *и пусть N — его замкнутый подмодуль. Тогда любой гомоморфизм w подмодуля K модуля M в N может быть продолжен до гомоморфизма u модуля M в N.*

Доказательство. В силу леммы Цорна мы можем считать, что подмодуль K обладает таким свойством: ни для какого подмодуля T модуля M, строго содержащего K, не существует гомоморфизма $T \to N$, продолжающего w. Так как M_R квазиинъективен, то w индуцируется некоторым гомоморфизмом $u\colon M \to M$. Предположим, что $u(M) \nsubseteq N$, и пусть L — дополнительный подмодуль подмодуля N в M. Поскольку N замкнут, он оказывается дополнительным подмодулем подмодуля L. Значит, в силу включения $u(M) + N \supset N$ получаем $(u(M) + N) \cap L \neq 0$. Пусть $0 \neq x = a + b \in (u(M) + N) \cap L$, $a \in u(M)$, $b \in N$. Если $a \in N$, то $x \in N \cap L = 0$ — противоречие. Поэтому $a \notin N$ и $a = x - b \in L \oplus N$. Множество $T = \{y \in M \mid u(y) \in L \oplus N\}$ является подмодулем модуля M, содержащим K. Пусть y — такой элемент из M, что $u(y) = a$. Тогда $y \in T$, но $y \notin K$, поскольку $a \notin N$. Обозначим через π проекцию модуля $L \oplus N$ на N. Тогда πu — гомоморфизм модуля T в N и $\pi u(z) = u(z) = w(z)$ для любого $z \in K$. Таким образом, πu — собственное продолжение гомоморфизма w. Мы пришли к противоречию. Значит, $u(M) \subseteq N$ и u — искомое продолжение гомоморфизма w. □

Аналогично тому, как доказывается соответствующий результат для инъективных модулей, можно доказать, что если произведение $\prod_{i \in I} M_i$ R-модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ квазиинъективно, то квазиинъективны все M_i, $i \in I$. Однако в противоположность ситуации в случае инъективных модулей обратное неверно.

19.5. Пример. Пусть $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$, где p — простое число. Тогда каноническое наложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ является гомоморфизмом подгруппы $\mathbb{Z}$ из $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Z}_p$, который нельзя продолжить до гомоморфизма, лежащего в $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p)$, и, значит, нельзя продолжить до гомоморфизма из $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$. Таким образом, сумма квазиинъективных модулей может не быть квазиинъективной. Ср. 19.9 (c).

Квазиинъективная оболочка

Тройку (P, M, f), обозначающую гомоморфное вложение $f\colon M \to P$, мы будем называть **расширением** модуля M.

Расширение (P, M, f) модуля M называется **минимальным квазиинъективным расширением**, если P квазиинъективен и обладает следующим свойством.

Если (A, M, g) — произвольное квазиинъективное расширение модуля M, то существует мономорфизм $\varphi\colon P \to A$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varphi"] & & A \\ & M \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

19.6. Следствие. *Пусть M — квазиинъективный модуль.* (a) *Если N — замкнутый подмодуль модуля M, то он выделяется в M прямым слагаемым и квазиинъективен.* (b) *Если P — подмодуль модуля M, то некоторое его существенное квазиинъективное расширение содержится в M.* (c) *Каждое минимальное квазиинъективное расширение произвольного модуля K является его существенным расширением.*

Доказательство. (a) Если $e\colon M \to N$ — продолжение тождественного отображения $N \to N$, существующее в силу предложения 19.4, то $M = N \oplus \ker(e)$, так что N выделяется в M прямым слагаемым; N квазиинъективен, согласно замечанию перед примером 19.5.

(b) По лемме Цорна P содержится в замкнутом подмодуле N, являющемся его существенным расширением. Согласно п. (a), N квазиинъективен.

(c) Этот пункт является непосредственным следствием п. (b). □

19.7. Предложение. *В обозначениях предложения 19.2 модуль ΛM является минимальным квазиинъективным расширением модуля M. Любые два минимальных квазиинъективных расширения эквивалентны.*

Доказательство. Пусть (A, M, g) — произвольное квазиинъективное расширение модуля M, $\hat{A} = E(A)$ и $\Omega = \mathrm{Hom}_R(\hat{A}, \hat{A})$. Тогда по предложению 19.2 $\Omega A \subseteq A$. Так как $M_0 = \Lambda M$ — существенное расширение модуля M, то мономорфизм $g\colon M \to \hat{A}$ может быть продолжен до мономорфизма модуля M_0 в $\hat{A}$ (который мы обозначаем той же буквой g). Из квазиинъективности модуля $g(M_0)$ следует, что $\Omega(g(M_0)) \subseteq g(M_0)$, и, значит, $\Omega B \subseteq B$, где $B = A \cap g(M_0)$. Тогда по 19.2 модуль B квазиинъективен. Отсюда вытекает, что $g^{-1}B$ есть квазиинъективное расширение модуля M, содержащееся в $M_0 = \Lambda M$. Так как ΛM — наименьшее квазиинъективное расширение модуля M, содержащееся в $\hat{M}$, то $g^{-1}B = M_0$, а значит, $B = g(M_0) \subseteq A$. Таким образом, установлено, что $M_0 = \Lambda M$ — минимальное квазиинъективное расширение модуля M. Легко видеть, что если (A, M, g) — также

минимальное квазиинъективное расширение модуля M, то оно эквивалентно ΛM. □

В дальнейшем $Q(M)$ будет обозначать любое из минимальных квазиинъективных расширений. В силу 19.6 и 19.7 имеет место

19.8. Следствие. *Пусть M — квазиинъективный модуль, а N — его подмодуль. Тогда $M = Q(N)$ в том и только том случае, когда $M \rhd N$.* □

19.9. Упражнение. (a) Пусть M — некоторый модуль, $\{M_i \mid i \in I\}$ — семейство независимых подмодулей, а Q_i — существенное расширение модуля M_i в M для любого $i \in I$. Тогда $\{Q_i \mid i \in I\}$ — независимое семейство подмодулей и $\sum_{i \in I} Q_i$ — существенное расширение модуля $\sum_{i \in I} M_i$.

(b) QI-модуль M неразложим тогда и только тогда, когда $\hat{M}$ неразложим.

(c) Для любых кольца R и R-модуля M прямая сумма $R \oplus M$ квазиинъективна тогда и только тогда, когда R самоинъективно, а M инъективен. Кроме того, модуль $\hat{R} \oplus M$ квазиинъективен в том и только том случае, когда M инъективен.

Аннуляторное условие

Если M — правый R-модуль и S — его кольцо эндоморфизмов, то аддитивная подгруппа X модуля M, такая, что $sx \in X$ для любого $s \in S$, является S-модулем и подмодулем естественно определяемого левого S-модуля M. Таким образом, можно говорить об S-подмодулях модуля M, не являющихся R-подмодулями. R-подмодуль, который одновременно является S-подмодулем, называется **вполне инвариантным** подмодулем (1, стр. 222).

Для любого непустого подмножества X из M множество

$$\mathrm{ann}_R X = \{r \in R \mid Xr = 0\} = X^{\perp}$$

является правым идеалом кольца R, называемым **аннулятором** множества X. Если $M = R$, то $X^{\perp}$ — правый аннуляторный идеал. Для любого непустого подмножества A из R множество

$$\mathrm{ann}_M A = \{m \in M \mid mA = 0\} = {}^{\perp}A$$

является S-подмодулем модуля M и называется **аннулятором** множества A в M. Тогда $\mathrm{ann}_M \, \mathrm{ann}_R X$ называется **вторым аннулятором** множества X, а $\mathrm{ann}_R \, \mathrm{ann}_M A$ — **вторым аннулятором** множества A. Правый идеал A служит аннулятором некоторого подмножества из M в том и только том случае, когда $A =$

$= \mathrm{ann}_R\, \mathrm{ann}_M\, A$, и тогда говорят, что A удовлетворяет **аннуляторному условию** относительно M. Мы будем использовать для этого условия сокращение M-а.у. или просто а.у., когда в рассуждении фигурирует фиксированный модуль M. Аналогично обстоит дело с аннуляторами в M подмножеств из R. Говорят, что совокупность подмножеств (из M или из R) удовлетворяет аннуляторному условию, если каждое из множеств этой совокупности удовлетворяет ему, т. е. является аннулятором. Например, левые и правые аннуляторные идеалы кольца R удовлетворяют R-а. у..

Приводимые ниже предложения взяты из работ Веддербёрна (см. Артин [50]), Тэйта (для случая (полу)простых модулей), Джекобсона [61] (см. лемму на стр. 47) и Джонсона — Уонга [61].

19.10. Предложение. *Пусть M — квазиинъективный R-модуль и S — его кольцо эндоморфизмов.*

(a) *Каждый конечно порожденный S-подмодуль модуля M удовлетворяет аннуляторному условию.*

(b) *Если F — конечно порожденный S-подмодуль и N — некоторый S-подмодуль, удовлетворяющий аннуляторному условию, то $N + F$ удовлетворяет аннуляторному условию.*

Доказательство. (a) Это частный случай (b) при $N = 0$. (b) доказывается индукцией по числу образующих модуля F. Достаточно доказать (b) для случая $F = Sx$. Для любого подмножества X имеем ${}^{\perp}(X^{\perp}) \supseteq X$. Значит, мы должны доказать, что ${}^{\perp}((N + Sx)^{\perp}) \subseteq N + Sx$. Далее,

$$(N + Sx)^{\perp} = N^{\perp} \cap (Sx)^{\perp} = N^{\perp} \cap x^{\perp}.$$

Пусть $y \in {}^{\perp}((N + Sx)^{\perp}) = {}^{\perp}(N^{\perp} \cap x^{\perp})$, значит, $y(N^{\perp} \cap x^{\perp}) = 0$.

Рассмотрим соответствие

$$\theta\colon xa \mapsto ya, \quad a \in N^{\perp}.$$

Если a, $b \in N^{\perp}$ таковы, что $xa = xb$, то $a - b \in x^{\perp} = (Sx)^{\perp}$. Следовательно, $(a - b) \in N^{\perp} \cap x^{\perp}$ и, значит, $y(a - b) = 0$, т. е. $ya = yb$. Это показывает, что θ есть отображение $xN^{\perp} \to yN^{\perp}$. Поскольку $\theta(xar) = \theta(xa)r$ для любого $r \in R$, это гомоморфизм R-подмодулей. В силу квазиинъективности M отображение θ индуцируется некоторым элементом из S, который мы также будем обозначать через θ. Так как $(\theta x - y)N^{\perp} = 0$, то $z = \theta x - y$ — элемент из $N = {}^{\perp}N^{\perp}$ и, следовательно, $y = -z + \theta x \in N + Sx$, что доказывает равенство

$${}^{\perp}((N + Sx)^{\perp}) = N + Sx. \ \square$$

Кольцо R **самоинъективно справа**, если оно инъективно как модуль в категории mod-R.

19.11. Следствие. *Любой конечно порожденный левый идеал самоинъективного справа кольца является левым аннуляторным идеалом.* $\square$

19.12. Предложение. *Если E — произвольный инъективный правый A-модуль, то $\mathrm{ann}_E B$ является инъективным (A/B)-модулем для любого идеала B кольца A.*

Доказательство. Пусть F — инъективная оболочка модуля $X = \mathrm{ann}_E B$ в категории mod-(A/B). Тогда на F каноническим образом определяется структура A-модуля, и как A-модуль он является существенным расширением модуля X. Таким образом, F можно вложить в инъективную оболочку $\hat{X}$ модуля X, и, следовательно, $X \subseteq F \subseteq E$. Но $FB = 0$, значит, $F \subseteq X = \mathrm{ann}_E B$, и $F = X$, как и утверждалось. $\square$

Эндоконечные и конечно точные модули

В этом разделе в дополнение к упомянутым во вводной части этой главы результатам об эндоконечных модулях мы введем понятие конечно точных модулей и охарактеризуем кольца, над которыми каждый точный модуль является конечно точным.

Объект M категории mod-R называется **конечно точным модулем** (или **CF-модулем**), если существует вложение $0 \to R \to M^n$ для некоторого конечного числа $n > 0$. Таким образом, любой CF-модуль точен. (Ср. точные и коточные модули, определенные в т. 1, стр. 189, а также 3.28 (**1**, стр. 192).)[1])

19.13A. Теорема (Бичи [71b]). *Следующие условия на кольцо R эквивалентны (если кольцо R удовлетворяет им, оно называется* ***существенно артиновым справа****):*

(a) *R содержит существенный артинов правый идеал A.*

(b) *Правый цоколь S кольца R является конечно порожденным существенным правым идеалом.*

(c) *Каждый точный правый R-модуль M конечно точен.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Из предложения 8.3 (**1**, стр. 451) следует, что $A \supseteq S$. Поэтому S равен цоколю модуля A. Однако цоколь любого артинова модуля обязательно конечно порожден и существен, значит, (b) выполняется.

(b) $\Rightarrow$ (c). Вложим R в M^a для некоторого кардинального числа a. (Как установлено в **1**, стр. 189, это можно сделать.)

[1]) В работах Бичи [71a], [71b], [71c] и Бичи — Блера [75] CF-модули называются коточными.

Тогда по (b) существует конечное подмножество множества проекций $\{f_i\colon M^a \to M\}_{i\in a}$, такое, что пересечение ядер проекций, входящих в него, имеет с S нулевое пересечение [1]). Пусть, например, $\{f_i\}_{i\in b}$, где b — конечное кардинальное число $\leqslant a$, обладает этим свойством. Тогда $R\cap(\bigcap_{i\in b} \ker f_i) = 0$ в силу существенности цоколя, т. е. R вкладывается в M^b.

(c) $\Rightarrow$ (b). Если E — наименьший кообразующий категории mod-R (1, 3.55, стр. 217), то по утверждению, двойственному к предложению 3.26 (1, стр. 190), он точен. Значит, R вкладывается в E^n для некоторого целого числа $n>0$. Но E^n — прямая сумма инъективных оболочек E_i простых модулей V_i для некоторого множества $\{V_i\}_{i\in I}$.

Поскольку R конечно порожден (одним элементом 1), отсюда следует, что он содержится в конечной прямой сумме таких оболочек. Изменим обозначения так, чтобы $R\subseteq \sum_{i=1}^{m}\oplus E_i$. Поскольку $\sum_{i=1}^{m}\oplus E_i$ имеет конечно порожденный существенный цоколь, то и R обладает этим свойством.

Это завершает доказательство всей теоремы, так как импликация (b) $\Rightarrow$ (a) очевидна. □

Отметим, что если определить **существенно нётерово справа** кольцо аналогично п. (a) предыдущей теоремы, то будет справедлив аналог теоремы Хопкинса — Левицкого 18.13:

19.13B. Следствие. *Любое существенно артиново справа кольцо является существенно нётеровым справа.*

Доказательство. По 19.13A (b) R содержит существенный нётеров правый идеал S. □

19.13C. Упражнение и определение. Идеал N произвольного кольца называется **существенно нильпотентным справа**, если он содержит нильпотентный правый идеал, являющийся существенным подмодулем.

1 (Шок [71c]). Показать, что ниль-идеал N является существенно нильпотентным справа тогда и только тогда, когда N содержит исчезающий справа правый идеал, существенный в нем. Установить также, что любой ниль-идеал существенно артинова справа кольца является существенно нильпотентным справа.

2. Кольцо R артиново справа тогда и только тогда, когда каждое его факторкольцо существенно артиново справа. □

19.14A. Теорема и определение. ***Эндоконечным*** *называется правый A-модуль M, конечно порожденный над* $\operatorname{End} M_A$. *Эндоконечный правый A-модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он инъективен как естественно определенный* $(A/\operatorname{ann}_A M)$*-модуль.*

Доказательство будет приведено после предложения 19.15.

19.14B. Предложение. *Для любого правого R-модуля M положим* $B = \operatorname{End} M_R$ *и*

$$A = \operatorname{End}_B M = \operatorname{Biend} M_R.$$

(a) (*M конечно порожден в* mod-R) $\Rightarrow$ (*M конечно точен в* B-mod), *т. е.*

$(R^n \to M \to 0$ *точна в* mod-R) $\Rightarrow$ $(0 \to B \to M^n$ *точна в* B-mod).

(b) (*M эндоконечен*) $\Rightarrow$ (*M конечно точен в* mod-$\operatorname{Biend} M_R$), *т. е.*

$(B^n \to M \to 0$ *точна в* B-mod) $\Rightarrow$ $(0 \to A \to M^n$ *точна в* mod-A)

и, кроме того,

$(0 \to A \to M^n$ *точна в* mod-A) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (0 \to R/\operatorname{ann}_R M \to M^n$ *точна в* mod-R).

(c) *Эндоконечный точный модуль конечно точен.*

Доказательство. (a) Применим точный слева функтор $(\ ,M) = \operatorname{Hom}_R(\ ,M)$ к первой точной последовательности и используем естественные изоморфизмы

$$(R^n, M) \approx (R, M)^n \approx M^n.$$

(По поводу первого из них см. 1, 3.38, стр. 203, а по поводу второго 1, 3.63, стр. 163.) Тогда (a) становится очевидным, а первая импликация из (b) — это то же самое, что (a). Вторая импликация из (b) вытекает из того факта, что $R/\operatorname{ann}_R M$ канонически вкладывается в A. Утверждение (c) теперь очевидно.

19.15. Предложение. *Пусть M — квазиинъективный точный правый R-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *M эндоконечен;*

(b) *M конечно точен.*

Если эти условия выполняются, то M инъективен в категории mod-R.

[1]) Рассмотрим множество всех проекций $f_\alpha\colon M^a \to M$, $\alpha\in a$, и пусть $S_\alpha = S\cap \ker f_\alpha$. Среди всех подмодулей модуля S, представимых в виде конечных пересечений подмодулей S_α, существует минимальный, скажем A (поскольку S есть конечная прямая сумма простых модулей и, значит, артинов; см. 1, 7.10). Если он равен нулю, то соответствующий конечный набор f_α и будет искомым, так как $S\cap(\bigcap \ker f_\alpha) = \bigcap (S\cap \ker f_\alpha)$. Предположим, что A отличен от нуля; тогда $A\cap S_\alpha = A$ для любого $\alpha\in a$ в силу минимальности A и $A\subseteq \ker f_\alpha$ для любого такого α. Но $\bigcap_{\alpha\in a} \ker f_\alpha = 0$ — противоречие.— *Прим. перев.*

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) следует из п. (c) предыдущего предложения. Далее, применяя (, M) к точной последовательности $0 \to R \xrightarrow{i} M^n$ и используя тот факт, что M квазиинъективен, получаем, что $B^n \to M \to 0$ точна в B-mod.[1]) Таким образом, (b) $\Rightarrow$ (a).

Ввиду критерия инъективности Бэра 3.41 (1, стр. 205) остается проверить, что каждый гомоморфизм $I \to M$ правого идеала I кольца R можно продолжить до гомоморфизма $R \to M$. Но такое продолжение существует для любого QI-модуля, содержащего R. Таким образом, из (b) следует, что M^n, а значит, и M инъективны. □

Доказательство теоремы 19.14A. Если M — квазиинъективный правый R-модуль, то он квазиинъективен как правый $(R/\mathrm{ann}_R\, M)$-модуль и $\mathrm{End}_R\, M$ совпадает с кольцом эндоморфизмов $(R/\mathrm{ann}_R\, M)$-модуля M. Таким образом, 19.15 влечет за собой инъективность $(R/\mathrm{ann}_R\, M)$-модуля M. □

Отметим, что артиновы кольца и только они обладают тем свойством, что над ними все квазиинъективные модули эндоконечны, как показывает следующая теорема.

19.16A. Теорема (Вамош [68], Бичи [71b], Фейс [72b]). *Следующие условия на кольцо A эквивалентны:*

(a) *Кольцо A артиново справа.*

(b) *Каждый квазиинъективный правый A-модуль эндоконечен.*

(c) *Каждое факторкольцо кольца A существенно артиново справа.*

Если эти условия выполнены, то правый модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он инъективен по модулю $\mathrm{ann}_A\, M$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Для произвольного правого модуля M факторкольцо $\overline{A} = A/\mathrm{ann}_A\, M$ будет артиновым справа, значит, по 19.13A модуль M конечно точен над $\overline{A}$. Таким образом, если M квазиинъективен, то он эндоконечен по 19.15 [2]).

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть M — прямая сумма полного множества представителей простых правых A-модулей. Тогда этот модуль точен и квазиинъективен над $\overline{A} = A/\mathrm{rad}\, A$. Поэтому из 19.15 следует, что для некоторого целого n существует вложение $\overline{A} \hookrightarrow M^n$ как $\overline{A}$-модулей. Таким образом, $\overline{A}$-модуль $\overline{A}$ полупрост и, следовательно, M — конечная прямая сумма. Обозначим через E инъективную оболочку A-модуля M. Так как E — точный модуль (это установлено в доказательстве импликации (c) $\Rightarrow$ (b) из 19.13A), то A вкладывается в E^m для некоторого $m > 0$. Тогда A имеет конечно порожденный существенный цоколь (как и E^m), т. е. кольцо A существенно артиново справа по 19.13A.

Прежде чем привести доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (a), дадим одно определение. Модуль M называется **существенно артиновым** или **конечно вложимым,** если его цоколь является существенным подмодулем конечной длины. Легко убедиться, что это условие выполняется в том и только том случае, когда подмодули модуля M обладают **свойством конечности пересечений,** а именно если для любого семейства $\{M_i\}_{i \in I}$ подмодулей из M равенство $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ влечет за собой $\bigcap_{j \in J} M_j = 0$ для некоторого конечного подмножества $J \subset I$ [1]). (Ср. доказательство теоремы 19.13A.)

(c) $\Rightarrow$ (a) вытекает из приведенного далее следствия 19.16B. □

19.16B. Следствие (Вамош [68]). *Модуль M артинов тогда и только тогда, когда каждый его фактормодуль существенно артинов.*

Доказательство. Действительно, если $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ — произвольная убывающая последовательность, пересечение членов которой равно Q, то из того, что M/Q обладает свойством конечности пересечений, следует существование целого числа $n > 0$ такого, что $M_{n+i} = Q$ для всех $i \geqslant 0$. Значит, M артинов. Обратное очевидно. □

19.17 Теорема. *Над коммутативным кольцом A любой конечно порожденный модуль M является конечно точным $(A/\mathrm{ann}_A\, M)$-модулем.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что M точен и порождается элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда отображение $A \to M^n$, переводящее a в $(x_1 a, \ldots, x_n a)$, есть вложение. □

19.18. Предложение. (a) *Для любого n правый R-модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда M^n квазиинъективен.*

(b) *Любой эндоконечный квазиинъективный правый R-модуль M инъективен над* Biend M_R.

Доказательство. Упражнение. □

[1]) Действительно, если $\varphi\colon R \to M$, $j\colon M \to M^n$ — естественное вложение, а $\pi\colon M^n \to M$ — соответствующая проекция, то, учитывая 19.1.7, имеем $j\varphi = \psi i$ для некоторого $\psi\colon M^n \to M^n$. Отсюда $\varphi = \pi j \varphi = (\pi\psi) i$. Таким образом, последовательность $\mathrm{Hom}(M^n, M) \to \mathrm{Hom}(R, M) \to 0$, совпадающая с $B^n \to M \to 0$, точна.— *Прим. ред.*

[2]) Точнее, M, будучи квазиинъективным A-модулем, является квазиинъективным $\overline{A}$-модулем и по 19.15 эндоконечен как $\overline{A}$-модуль. Однако $\mathrm{End}_A M = \mathrm{End}_{\overline{A}}\, M$.— *Прим. перев.*

[1]) См., например, 26.1B.— *Прим. перев.*

19.19. Лемма. *Если R — произвольное кольцо, то $\hat{R}$ — точный инъективный правый R-модуль, конечно порожденный, на самом деле даже циклический, над своим кольцом эндоморфизмов.*

Доказательство. Упражнение. □

Правый R-модуль E **эндопроективен,** если он проективен над $\operatorname{End} E_R$. Тогда по теореме Мориты 4.1.3 (**1**, стр. 243)

объект E является образующим категории mod-R, *если он эндоконечен, эндопроективен и сбалансирован.*

Доказательства приведенных выше результатов содержат одну идею, которая позволяет следующим образом охарактеризовать самоинъективные кольца.

19.20. Предложение. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R самоинъективно справа.*

(b) *Каждый точный эндоконечный модуль E является образующим категории* mod-R.

(c) *Каждый точный эндоконечный инъективный модуль E является образующим категории* mod-R.

Если эти условия выполняются, то E эндопроективен.

Доказательство. Кольцо R самоинъективно справа тогда и только тогда, когда категория mod-R обладает инъективным образующим. Инъективная оболочка произвольного кольца R, взятая в категории mod-R, является циклическим модулем над своим кольцом эндоморфизмов (19.19), и, следовательно, из (b) [или (c)] вытекает, что R — инъективный образующий.

Обратно, пусть R — инъективный объект категории mod-R, и пусть $M \in$ mod-R — точный модуль, конечно порожденный над $S = \operatorname{End} M_R$. Поэтому, скажем, последовательность

$$S^n \to M \to 0$$

точна в категории S-mod. Тогда из 19.14B вытекает, что последовательность $0 \to R \to M^n$ точна в категории mod-R [1]), и инъективность R-модуля R дает изоморфизм $M^n \approx R \oplus X$. Значит, M — образующий. В этом случае из теоремы Мориты 4.1 получаем, что M проективен над своим кольцом эндоморфизмов. □

Подмодуль N левого R-модуля M **чист (в смысле Кона)**, если для любого правого R-модуля U гомоморфизм $U \otimes_R N \to U \otimes_R M$, индуцированный включением $N \to M$, является мономорфизмом.

[1]) Точнее, из 19.14B получается точность последовательности $0 \to A \to M^n$ в mod-A, а значит, в mod-R, а R вкладывается в A в mod-R в силу точности модуля M.— *Прим. перев.*

Это эквивалентно следующему условию: если

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = a_i \in N \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

— конечное множество уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, где $r_{ij} \in R$, и если эта система имеет в M решение, то она имеет решение и в N. Любое прямое слагаемое модуля M чисто.

R-модуль A называется **алгебраически компактным**, если он выделяется прямым слагаемым в любом R-модуле, в котором он является чистым подмодулем, или, что эквивалентно, если он удовлетворяет такому условию: пусть

$$(2) \qquad \sum_{j} r_{ij}x_j = a_i \in A, \quad i \in I,$$

— произвольное множество уравнений с неизвестными x_j, $j \in J$, где I и J — произвольные множества индексов и каждое из уравнений содержит лишь конечное число ненулевых $r_{ij} \in R$, и пусть каждое конечное множество уравнений из (2) имеет в A решение. Тогда вся система (2) разрешима в A. Ср. чистую инъективность в 20.40.3.

Модуль M называется **ограниченным**, если существует элемент $x \in M$, такой, что $\operatorname{ann}_R x = \operatorname{ann}_R M$. Любой модуль, циклический над своим кольцом эндоморфизмов S, оказывается ограниченным.

R-модуль M обладает **свойством замены**, если для любого R-модуля A, содержащего M, и подмодулей N и A_i $(i \in I)$ модуля A прямые разложения

$$(3) \qquad A = M \oplus N = \sum_{i \in I} \oplus A_i \quad (I \text{ — произвольное множество индексов})$$

влекут за собой существование R-подмодулей B_i модулей A_i, таких, что

$$(4) \qquad A = M \oplus \Big(\sum_{i \in I} \oplus B_i\Big)$$

(ср. лемму о замене 18.17).

19.21. Упражнение. (a) Прямой предел любого направленного семейства чистых подобъектов модуля M будет чистым подмодулем.

(b)* (Фукс [69a], Уорфилд [69a] и Кроули — Йонссон [64b].) Квазиинъективный модуль обладает свойством замены.

(c) (Ср. Фукс [69b].) Предположим, что

$$A = M_1 \oplus \ldots \oplus M_m = \sum_{i \in I} \oplus N_i$$

где M_j и N_i — квазиинъективные R-модули, а I — произвольное множество индексов. Тогда существуют изоморфные продолжения этих разбиений, т. е. существуют R-модули A_{ji}, $j = 1, \ldots, m$, $i \in I$, такие, что

$$M_j \approx \sum_{i \in I} \oplus A_{ji} \quad \text{и} \quad N_i \approx A_{1i} \oplus \ldots \oplus A_{mi}$$

для каждого i и j соответственно.

(d) Если $x \in M$ и $\operatorname{ann}_R x = \operatorname{ann}_R M$, то для каждого $y \in M$ существует гомоморфизм f: $xR \to yR$, такой, что $f(x) = y$. Вывести отсюда, что квазиинъективный модуль M ограничен тогда и только тогда, когда он циклический над своим кольцом эндоморфизмов.

(e) (Фукс [69a].) Ограниченный R-модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он инъективен как каноническим образом определенный $(R/\operatorname{ann}_R M)$-модуль.

(f)* (Фукс [69a].) Любой ограниченный квазиинъективный модуль алгебраически компактен. Более того, любое прямое слагаемое прямого произведения ограниченных квазиинъективных модулей алгебраически компактно.

(g)* (Капланский, Фукс, Хуляницкий и Харрисон. Ср. Капланский [69b, стр. 84—86].) Любая алгебраически компактная абелева группа является прямым произведением ограниченных квазиинъективных модулей.

(h) (Фукс [69a].) Сравнить определение N как чистого подмодуля модуля M с таким определением: $IN = N \cap IM$ для любого правого идеала I кольца R. Назовем так определенный подмодуль N $\cap$**-чистым.** Показать, используя это новое понятие чистоты, что любой ограниченный квазиинъективный модуль алгебраически компактен. Доказать, что если M — плоский модуль, то N будет $\cap$-чистым подмодулем тогда и только тогда, когда M/N — плоский модуль (ср. 1, 11.21, стр. 528).

(i) (Фукс — Рангасвами [70].) Абелева группа M квазипроективна тогда и только тогда, когда она либо свободна, либо является периодической группой, каждая p-подгруппа которой равна прямой сумме групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}_{p^n}$ для фиксированного $n = n(p)$.

(k)* (Адзумая [66], Утуми [67].) Кольцо R является инъективным кообразующим в mod-R тогда и только тогда, когда каждый точный R-модуль служит образующим (ср. 19.20).

(l)* (Ософская [66b].) Если R — инъективный кообразующий, то это полулокальное кольцо с конечно порожденным существенным правым цоколем.

(m)* (Фейс — Уокер [67].) Если полулокальное кольцо R служит кообразующим категории mod-R, то оно самоинъективно справа.

(n)* (Уорфилд [72b].) (1) Правый R-модуль M обладает свойством замены тогда и только тогда, когда этим свойством обладает $\operatorname{End} M_R$. (2) Если A есть SBI-кольцо и если $A/\operatorname{rad} A$ — регулярное кольцо (см. 19.25), то A обладает свойством замены. (Ср. 18.22.)

(o)* Кольцо R служит инъективным кообразующим в mod-R тогда и только тогда, когда оно самоинъективно справа и каждый точный правый R-модуль конечно точен.

(p) (Фуллер [69b].) Любой инъективный R-модуль E $\prod$-инъективен в том смысле, что любое прямое произведение E^c инъективно для любого кардинального числа c. Доказать, что QI-модуль M является $\prod$-квазиинъективным тогда и только тогда, когда он — инъективный $R/\operatorname{ann}_R M$-модуль. [*Указание*: по 19.15 квазиинъективный модуль E инъективен, если R вкладывается в E, и R вкладывается в некоторую степень M^c любого точного модуля M (1, перед 3.24, стр. 189).]

(q) Если первичный идеал P не является существенным правым идеалом, то он есть правый аннуляторный идеал. Кроме того, если $({}^{\perp}P)^2 \neq 0$, то P — минимальный первичный идеал.

Плотные кольца линейных преобразований и примитивные кольца

Если M — левое векторное пространство над телом D, то в силу нашего соглашения писать гомоморфизмы с противоположной стороны от скаляров (1, стр. 160—161) для произвольного элемента a из $L = \operatorname{End}_D M$ и $x \in M$ мы положим $xa = (x)a$. Подкольцо A кольца L называется **плотным,** если для каждого конечного подмножества $y_1, \ldots, y_n$ элементов из M, где $n \leqslant \dim_D M$, и любого множества $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимых векторов существует элемент a из A, такой, что $x_i a = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Интуитивно это означает, что A содержит «достаточно много линейных преобразований» (ср. упр. 1 из 19.23B).) Мы будем также говорить, что A **плотно** в L или что A — **плотное кольцо линейных преобразований пространства** M.

Как было определено в гл. 18 (после 18.0), кольцо R **примитивно справа,** если оно обладает точным простым правым R-модулем. Любое плотное кольцо A линейных преобразований ненулевого левого векторного пространства M примитивно справа, так как модуль M точен над A и прост, поскольку если он имеет ненулевой A-подмодуль M', то в силу плотности A должно быть $M' = M$. (Действительно, если $y \in M$ и $x \neq 0$ — элемент из M', то $y = xa \in M'A = M'$ для некоторого $a \in A$.) Обратно,

19.22. Теорема плотности Шевалле — Джекобсона. *Пусть M — простой R-модуль и S — его кольцо эндоморфизмов. Если*

$x_1, \ldots, x_n$ — конечное множество линейно независимых над S элементов из M и если $y_1, \ldots, y_n$ — произвольные элементы из M, то существует $a \in R$, такой, что $x_i a = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть A есть S-подмодуль в M [1]), порожденный элементами $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $N_i = \sum_{k \neq i} Sx_k$ для каждого i между 1 и n. Согласно 19.10 (a), $^{\perp}(N_i^{\perp}) = N_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $x_i \notin N_i$, то $x_i N_i^{\perp} \neq 0$, а в силу простоты модуля M_R имеем $x_i N_i^{\perp} = M$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $y_i = x_i a_i$ для некоторого $a_i \in N_i^{\perp}$, $i = 1, \ldots, n$ и $a = a_1 + \ldots + a_n$ обладает нужным свойством. □

19.23A. Следствие. *Кольцо R примитивно в том и только том случае, когда оно изоморфно плотному кольцу линейных преобразований векторного пространства.* □

19.23B. Упражнения. 1. Пусть M — левое векторное пространство над D и A — подкольцо кольца L. Тогда A плотно в том и только том случае, когда каждое линейное преобразование произвольного конечно порожденного векторного подпространства V пространства M индуцируется элементом из A. Таким образом, если $\dim_D V = t$, то существуют подкольцо $A_V = \{a \in A \mid Va \subseteq V\}$ и идеал $K_V = \{a \in A \mid Va = 0\}$ этого подкольца, такие, что A_V/K_V изоморфно полному кольцу матриц $D_t \approx \mathrm{End}_D V$ (ср. Джекобсон [61, стр. 56, теорема 3]).

2. Если A — плотное подкольцо кольца L, то плотным будет любое подкольцо $B \supseteq A$. Пусть $\dim_D V = a$ бесконечна, тогда линейное преобразование t имеет **ранг** b, если $\dim_D Vt = b$. Собственные идеалы кольца L исчерпываются идеалами вида

$$L_b = \{t \in L \mid \text{ранг } t < b\},$$

где b — бесконечный кардинал, не превосходящий a.

Таким образом, идеал $L_{\aleph_0}$, состоящий из всех линейных преобразований конечного ранга, оказывается наименьшим идеалом, и он плотен в L. Вывести отсюда, что любое подкольцо кольца L, содержащее $L_{\aleph_0}$, плотно. Найти вид матриц, соответствующих преобразованиям из $L_{\aleph_0}$, в некотором вполне упорядоченном базисе пространства M (ср. 1, 3.19.9, стр. 181). (См. также упр. 6 в конце главы.)

3. Каждое факторкольцо кольца L или примитивно, или равно нулю. Если J — правый (левый) идеал, то он индуцирует плотное множество линейных преобразований пространства $M/\mathrm{ann}_M J$ (соотв. MJ).

[1]) Напомним, что по известной лемме Шура S — тело (3.10.1(b)).— *Прим. перев.*

4. Показать, что каждый главный левый идеал кольца L порождается идемпотентом. (Значит, L регулярно в смысле 19.24).

5. Если D — произвольное тело, трансцендентное над своим центром, то кольцо многочленов $D[x]$ примитивно (см. 1, упр. 13.11.9—13.11.11, стр. 571—572). Вывести отсюда, что область целостности может быть примитивной. (См. также примеры простых областей целостности (1, 7.28). Напомним, что любое простое кольцо примитивно.)

6. Рассмотрим, далее, M как *правое* векторное пространство над D размерности d и напомним (1, 3.19.9, стр. 181), что в некотором вполне упорядоченном базисе $\{x_i\}_{i \in d}$ пространства M L изоморфно кольцу D_d всех конечнострочных матриц над D. Если B — подкольцо в D, а A — подкольцо в L, содержащее все матрицы вида

$$\begin{pmatrix} N & & & 0 \\ & b & & \\ & & b & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где N — произвольная $(n \times n)$-матрица в D_n, n — любое целое число и $b \in B$, то A плотно в L. (Сюда входит и случай $B = 0$). Если B содержится в центре тела D, то центр кольца A состоит из всех диагональных матриц

$$\mathrm{diag}\,\{d, d, d, \ldots\}$$

и изоморфен B. Вывести отсюда, что произвольная коммутативная область целостности может быть изоморфна центру примитивного кольца и что центр примитивного кольца не обязательно примитивен и может иметь ненулевой радикал (Капланский). (См. также упр. 19 в конце главы.)

7. Если в п. 6 мы возьмем в качестве B подкольцо кольца матриц D_n для фиксированного целого n, а в качестве N будем брать любые $(kn \times kn)$-матрицы над D при $k = 1, 2, \ldots$, то A остается примитивным и, более того, B — гомоморфный образ A. Таким образом, любое подкольцо простого артинова кольца является гомоморфным образом примитивного кольца.

Регулярные кольца

Для удобства ссылок повторим предложение и определение, ранее введенные в гл. 11 т. 1.

19.24. Предложение и определение. *Кольцо R называется **регулярным**, если выполняются следующие эквивалентные условия:*

(a) *Каждый циклический правый R-модуль плоский.*

(b) *Каждый правый R-модуль плоский.*

(c) *Если $x \in R$, то существует $a \in R$, такой, что $xax = x$. (Тогда xa — идемпотент, который порождает xR.)*

(d) *Каждый главный правый идеал порождается идемпотентом.*

(e) *Каждый конечно порожденный правый идеал порождается идемпотентом.*

(i′) *Левые аналоги свойств* (i), i = a, b, c, d, e.

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 11.24 (1, стр. 529) и ее доказательства; см. также предложение 19.25. □

19.25. Предложение (фон Нейман [36]). *Пусть R — такое кольцо, что каждый главный (соотв. минимальный) правый идеал порождается идемпотентом. Тогда каждый конечно порожденный правый идеал (соотв. каждая сумма конечного числа минимальных правых идеалов) порождается идемпотентом.*

Доказательство. Пусть $I = x_1R + \ldots + x_nR$ — конечно порожденный правый идеал, и пусть $A = x_1R + \ldots + x_{n-1}R$, $B = x_nR$. Предположение индукции обеспечивает существование идемпотентов e и f, таких, что $A = eR$ и $B = fR$. Пусть $B_1 = (1 - e)B = (1 - e)fR$. Теперь $A + B = \{eu + fv \mid u, v \in R\}$ и

$$A + B_1 = \{eu' + (1 - e)fv' \mid u', v' \in R\} = \{e(u' - fv') + fv' \mid u', v' \in R\},$$

т. е. мы убеждаемся, что $A + B_1 = A + B$.

Запишем $B_1 = f_1R$, где $f_1^2 = f_1 \in R$. Так как $f_1 \in B_1$, то $ef_1 = 0$. Далее, положим $f' = f_1(1 - e)$. Тогда

$$f'f_1 = f_1(1 - e)f_1 = f_1(f_1 - ef_1) = f_1f_1 = f_1,$$

значит, $(f')^2 = f'f_1(1 - e) = f_1(1 - e) = f'$. Поскольку $f' = f_1(1 - e) \in f_1R$ и $f_1 = f'f_1 \in f'R$, то $f'R = f_1R = B_1$. Следовательно, $A + B = eR + f'R$. Так как

$$ef' = ef_1(1 - e) = 0, \quad f'e = f_1(1 - e)e = 0,$$

то e и f' ортогональны, и идемпотент $e + f'$ порождает I:

$$I = A + B = eR + f'R = (e + f')R.$$

Это доказательство годится и в случае, когда x_iR — минимальный правый идеал, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $B = x_nR$ и $B_1 = (1 - e)B$ суть минимальные правые идеалы или нули, и, значит, существует идемпотент f_1, такой, что $B_1 = f_1R$, а остальная часть доказательства проходит без изменения. □

19.26A. Теорема. *Любое классически полупростое кольцо R регулярно. Объединение любой цепи регулярных колец регулярно, и прямое произведение любого семейства регулярных колец регулярно. Более того, для любого регулярного кольца R эквивалентны следующие свойства:*

(a) *R классически полупросто;*

(b) *R артиново справа;*

(c) *R нётерово справа;*

(d) *R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов;*

(e) *R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов;*

(f) *R не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов.*

Доказательство. Классически полупростое кольцо R обладает тем свойством, что любой правый идеал выделяется в нем прямым слагаемым, а значит, порождается идемпотентом и применимо 19.24(e).

Критерий 19.24(c) устанавливает утверждение нашей теоремы для прямых произведений и объединений цепей регулярных колец.

Эквивалентность условий (a) — (f) остается читателю в качестве упражнения. □

19.26B. Примеры. (a) Объединение цепи тел есть тело, но объединение цепи классически полупростых колец не всегда оказывается классически полупростым. Например, мы можем построить цепь полных матричных алгебр $\{k_n\}$, $n = 2^t$, $t = 1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$k_2 \subset k_4 \subset k_8 \subset \ldots$$

и объединение A этой цепи — регулярное кольцо, не удовлетворяющее 19.26(e) и, следовательно, не классически полупростое. (Алгебра A бесконечномерна, но локально конечномерна и проста. Ср. Кёте [31] по поводу характеризации счетных простых алгебраических алгебр, которые локально конечномерны и центральны над k. Как подсказывает заглавие работы Кёте, аналогично строятся некоммутативные бесконечномерные алгебраические алгебры с делением.)

(b) Как можно показать, кольцо всех линейных преобразований регулярно, и, следовательно, регулярно любое прямое произведение таких колец. (Любое бесконечное прямое произведение тел (или регулярных колец) оказывается не классически полупростым регулярным кольцом.)

(c) Некоторые из примеров примитивных колец в упр. 19.23B — регулярные кольца, например кольцо $S + D$, порожденное скалярными линейными преобразованиями $d \in D$ и идеалом $S =$

$= L_{\aleph_0}$, состоящим из всех линейных преобразований конечного ранга в кольце L всех линейных преобразований векторного пространства V несчетной размерности над телом D. Это вытекает из регулярности тела D и кольца L и того факта, что S — идеал. (Аналогично $I + D$ регулярно для любого идеала I из L.) Кроме того, кольцо A в упр. 6 из 19.23B можно выбрать регулярным, подобрав разумным образом B. (Взять $B = 0$ и т. п.)

19.26C. Теорема (Фейс [72b]). *Пусть R — регулярное кольцо. Тогда модуль M, удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепей аннуляторов правых идеалов кольца R, полупрост и инъективен и $R/\mathrm{ann}_R\, M$ — классически полупростое кольцо.* (*Кроме того, M также $\sum$-инъективен в том смысле, что любая прямая сумма экземпляров модуля M инъективна.* Ср. 20.3A.)

Доказательство. Множество $M(1 - e)$ для произвольного идемпотента e из R является аннулятором правого идеала eR. Так как модуль M точен над $\bar{R} = R/\mathrm{ann}_R\, M$, условие обрыва убывающих цепей аннуляторов в M влечет за собой условие обрыва возрастающих цепей правых идеалов кольца $\bar{R}$, порожденных идемпотентами. (Очевидно, любой идемпотент из $\bar{R}$ поднимается до идемпотента из R.) Тогда по 19.26A кольцо $\bar{R}$ классически полупросто и, следовательно, любой $\bar{R}$-модуль M' инъективен над $\bar{R}$ по 8.12 (1, стр. 455). Но так как $\bar{R}$ (как и любой R-модуль) — плоский R-модуль, то M' — инъективный R-модуль по 11.35.3 (1, стр. 537). В частности, любая прямая сумма экземпляров модуля M инъективна над R, т. е. M $\sum$-инъективен. □

19.26D. Упражнение. 1. Если $R = \mathrm{End}_D\, V$, где V — левое векторное пространство над D, то R — регулярное кольцо (и самоинъективно слева).

2. Любое регулярное кольцо антисингулярно слева и справа (1, стр. 485). Если регулярное кольцо R содержит подкольцо A и если R_A — существенное расширение A-модуля A, то кольцо A антисингулярно справа. Таким образом, любой правый порядок в классически полупростом (или регулярном) кольце антисингулярен справа (1, 9.13, стр. 486).

Кольца эндоморфизмов квазиинъективных модулей

Как в т. 1, стр. 218, $M \rhd N$ означает, что N — существенный подмодуль модуля M. Напомним также (1, стр. 481), что **сингулярный подмодуль** правого R-модуля определяется так:

$$\mathrm{sing}\, M = \{x \in M \mid R \rhd \mathrm{ann}_R\, x\}.$$

Приведем два важных свойства сингулярных подмодулей: (i) $\mathrm{sing}\, M$ — вполне инвариантный подмодуль; (ii) если $M \supseteq S \supseteq N$ и $S \rhd N$, то $\mathrm{sing}\,(M/N) \supseteq S/N$, причем если $N = \mathrm{sing}\, M$, то верно и обратное утверждение. [Как и раньше, мы оставляем это в качестве упражнения.] Итак, правый сингулярный подмодуль в R — это идеал, который мы называем **правым сингулярным идеалом** и обозначаем через $\mathrm{sing}\, R$ (ср. 1, 9.6). Он может не совпадать с левым сингулярным идеалом кольца R, но оба они встречаются столь редко, что нет необходимости использовать для них различные обозначения. На самом деле чаще всего мы будем сталкиваться с отсутствием сингулярного идеала: модуль M **антисингулярен,** если $\mathrm{sing}\, M = 0$. Если $\mathrm{sing}\, R = 0$, то мы будем говорить, что кольцо R **антисингулярно справа,** и тогда $\mathrm{sing}\,(M/\mathrm{sing}\, M) = 0$ для любого $M \in \text{mod-}R$ (см. 19.46A). В этой терминологии следствие 19.29 устанавливает, что кольцо эндоморфизмов квазиинъективного антисингулярного модуля самоинъективно и регулярно в смысле Неймана. В частности, в теореме 19.27 доказывается, что любое самоинъективное кольцо R по модулю радикала регулярно в смысле Неймана и самоинъективно (и $\mathrm{rad}\, R = \mathrm{sing}\, R$).

Пункт (a) следующей теоремы установлен Утуми [56], (b) — Уонгом и Джонсоном [59], Утуми [67] иОсофской [68a], а (c) — Фейсом и Утуми [64a].

19.27. Теорема. *Пусть $S = \mathrm{End}\, M_R$, где M — квазиинъективный правый R-модуль. Тогда*

(a) $\mathrm{rad}\, S = \{s \in S \mid M \rhd \ker s\} = \mathrm{sing}\, S$.

Кроме того, $S/\mathrm{rad}\, S$ регулярно в смысле Неймана и

(b) *$S/\mathrm{rad}\, S$ самоинъективно справа.*

(c) *S есть SBI-кольцо; на самом деле поднимаются идемпотенты по модулю любого подмножества I, содержащего $\mathrm{rad}\, R$.*

Доказательство. (a) Пусть $I = \{s \in S \mid M \rhd \ker s\}$. Если $s \in S$ и $u, v \in I$, то

$$\ker\,(u + v) \supseteq \ker u \cap \ker v, \quad \ker\,(su) \supseteq \ker u.$$

Так как $\ker u \cap \ker v$ — существенный подмодуль, то I — левый идеал кольца S; однако если $s \in I$, то $\ker\,(1 + s) = 0$, поскольку тогда $\ker s \cap \ker(1 + s) = 0$. Таким образом, $1 + s$ имеет левый обратный для любого $s \in I$ [1]), и, значит, каждый $s \in I$ квазирегулярен слева. Тем самым установлено, что $I \subseteq \mathrm{rad}\, S = J$.

Далее, пусть s — произвольный элемент из S и L — некоторый дополнительный подмодуль модуля $K = \ker s$ в M, и рассмотрим отображение $sx \mapsto x$ для любого $x \in L$. (Это действительно корректное отображение, так как если $sx = sy$, где $x, y \in L$, то $s(x - y) =$

[1]) Достаточно рассмотреть естественное отображение $\mathrm{im}\, s \to M$ и воспользоваться квазиинъективностью модуля M.— *Прим. ред.*

$= 0$ и тогда $x - y \in K \cap L = 0$.) Поскольку модуль M квазиинъективен, отображение $sx \mapsto x$ из sL в L индуцируется некоторым элементом $t \in S$. Если $u = x + y \in L + K$, $x \in L$, $y \in K$, то

$$(s - sts)(u) = s(x) - sts(x) = s(x) - s(x) = 0.$$

Так как $M \rhd (L + K)$ и так как $\ker(s - sts) \supseteq L + K$, то $s - sts \in I$. Хотя мы не показали даже, что I — идеал (это не слишком трудно показать), мы, грубо говоря, установили, что S регулярно по модулю I.

Покажем теперь, что $J = I$. Если $s \in J$ и если $t \in S$ выбран так, чтобы $u = s - sts \in I$, то $-st \in J$ (так как J — идеал) и $(1 - st)^{-1}$ существует (поскольку J квазирегулярен (18.6)). Следовательно, $(1 - st)^{-1}u = s$ и $s \in I$ (так как I — левый идеал). Таким образом, $J = I$, как и утверждалось. Кроме того, кольцо S/J регулярно, и мы доказали (a).

Чтобы установить (b), мы сначала докажем (c) и, более общим образом, докажем, что можно поднимать идемпотенты по модулю любого *подмножества* I, содержащего J. Пусть $s^2 - s \in I$. Тогда $\ker s \cap \ker(1 - s) = 0$, так что

$$y \in \ker(s^2 - s) \Rightarrow [(1 - s)y \in \ker s \text{ и } sy \in \ker(1 - s)],$$

а это доказывает, что

$$M \rhd [\ker s \oplus \ker(1 - s)].$$

Пусть N_1 — максимальное существенное расширение подмодуля $\ker s$ и N_2 — дополнительный подмодуль модуля N_1 в M, содержащий $\ker(1 - s)$. Тогда $N_1 \oplus N_2 = M$ [1]. Пусть e и $1 - e$ — соответствующие идемпотентные проекции, т. е. $eM = N_2$ и $eN_1 = 0$. Тогда

$$(e - s)[\ker s \oplus \ker(1 - s)] = 0,$$

так что в силу (a) $e - s \in J \subseteq I$, т. е. идемпотенты по модулю I поднимаются.

(b) Прежде чем доказывать, что $\bar{S} = S/J$ самоинъективно справа, мы установим сформулированные ниже утверждения (b_1) и (b_2).

(b_1) Если e и f — идемпотенты в кольце S, причем $eM \cap fM = 0$, то поскольку eM и fM не имеют в M собственных существен-

[1]) Пусть N — замкнутый подмодуль квазиинъективного модуля M и K — дополнительный подмодуль подмодуля N в M. Тогда $M = N \oplus K$. Действительно, в силу квазиинъективности модуля M отображение $1_N \oplus 0_K\colon N \oplus K \to M$ можно продолжить до гомоморфизма $\pi\colon M \to M$. Если $0 \neq \pi m \in \pi M$, то $m \notin K$, и в силу выбора K $0 \neq n = k + mr$ для некоторых $n \in N$, $k \in K$, $r \in R$. Отсюда $0 \neq n = \pi n = (\pi m) r$. Следовательно, $\operatorname{im} \pi$ — существенное расширение подмодуля N. Значит, $\operatorname{im} \pi = N$, т. е. $\pi^2 = \pi$. Поскольку $N \cap \ker \pi = 0$ и $K \in \ker \pi$, то $K = \ker \pi$. Отсюда $M = \operatorname{im} \pi \oplus \ker \pi = N \oplus K$.— *Прим. ред.*

ных расширений [1]), $eM \oplus fM$ выделяется в M прямым слагаемым [2]). Поэтому $eM \oplus fM = gM$, где $g = g^2 \in S$.

(b_2) С другой стороны, если $eM \cap fM \neq 0$, то $\bar{e}\bar{S} \cap \bar{f}\bar{S} \neq 0$. Действительно, пусть K будет дополнительным подмодулем к $eM \cap fM$ в M, т. е. максимальным среди подмодулей K', для которых $eM \cap fM \cap K' = 0$. Тогда $(eM \cap fM) \oplus K$ — существенный подмодуль модуля M и ввиду упр. 9.14.1(c) из т. 1 и 19.6(a) K выделяется в M прямым слагаемым.

Пусть N (соотв. P) — максимальное существенное расширение подмодуля $eM \cap fM$ в eM (соотв. в fM). В силу квазиинъективности модуля eM по 19.6(a) N (соотв. P) выделяется в eM (соотв. в fM), а следовательно, в M, прямым слагаемым. Ясно, что $N \cap K = 0$ (соотв. $P \cap K = 0$), N — замкнутый подмодуль [3]) и K — дополнительный подмодуль для N. Тогда [4]) $M = N \oplus K$ и $g\colon M \to N$ — соответствующая проекция. Аналогично $M = P \oplus K$ и $h\colon M \to P$ — соответствующая проекция. Если теперь $x \in eM \cap fM$, то $x \in N \cap P$, откуда $(g - h)x = x - x = 0$. Следовательно, $K + eM \cap fM \subseteq \ker(g - h)$, откуда по (a) $g - h \in I = J$. Имеем $\bar{g} \neq 0$ и $\bar{g} = \bar{h}$. Но $g = eg$ и $h = fh$, откуда $\bar{g} = \bar{h} \in \bar{e}\bar{S} \cap \bar{f}\bar{S}$.

Теперь пусть I — произвольный правый идеал кольца $\bar{S}$, и пусть $\{\bar{e}_i\}_{i \in A}$ — максимальное независимое множество идемпотентов из I, т. е. множество, максимальное относительно свойства, что сумма $T = \sum_{i \in A} \bar{e}_i \bar{S}$ прямая. В силу регулярности кольца $\bar{S}$ правый идеал T существен в I, а значит, любой гомоморфизм h из I в $\bar{S}$ определяется своим поведением на T. Действительно, пусть $g\colon I \to \bar{S}$ — гомоморфизм, совпадающий с h на T. Пусть $x \in I$ и Q — правый идеал, состоящий из всех $q \in \bar{S}$, таких, что $xq \subseteq T$. Тогда Q — существенный правый идеал и аннулирует $h(x) - g(x)$, а значит, как и утверждалось, $h(x) = g(x)$ [5]).

Пусть $\bar{e}_i$ подымается до $e_i = e_i^2 \in S$, и пусть $\bar{x}_i = h(\bar{e}_i)$ для любого $i \in A$. Тогда по (b_1) и (b_2) сумма $W = \sum_{i \in I} e_i M$ прямая и прямая сумма отображений $x_i e_i\colon e_i M \to M$ есть гомоморфизм $g\colon W \to M$, который в силу квазиинъективности модуля M

[1]) Пусть $P \rhd eM$. Тогда $P \cap (1-e)M = 0$, а значит, $P = P \cap (eM \oplus (1-e)M) = eM \oplus (P \cap (1-e)M) = eM$.— *Прим. перев.*

[2]) Пусть K — дополнительный подмодуль модуля eM в M, содержащий fM. Тогда по примечанию к стр. 124 $M = eM \oplus K = eM \oplus fM \oplus (K \cap (1-f)M)$.— *Прим. перев.*

[3]) По примечанию 1.— *Прим. перев.*

[4]) По примечанию к стр. 124.— *Прим. перев.*

[5]) В силу регулярности кольца S.— *Прим. перев.*

продолжается до гомоморфизма m: $M \to M$. Тогда $\overline{me_i} = \overline{x_i e_i} = h(\overline{e_i})$, т. е. $h(x) = \overline{mx}$ для любого $x \in I$, а это по критерию Бэра (1, 3.41, стр. 205) показывает, что $\overline{S}$ самоинъективно справа. □

При доказательстве (b) мы следовалиОсофской [71a, стр. 44], где можно найти и другие интересные результаты, а именно теорему Осoфской, устанавливающую, что *кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда каждый циклический правый R-модуль инъективен*. Следствие из доказательства этой теоремы составляет другую теорему Осoфской, которая показывает, что *наследственное кольцо не может содержать бесконечного произведения своих подколец*.

Из этой теоремы вытекает, что *самоинъективное справа кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда оно классически полупросто*. (Действительно, для такого кольца каждый фактормодуль R/I должен быть инъективным в силу результата, имеющегося в книге Картана и Эйленберга [60], а значит, каждый циклический модуль инъективен.)

19.28. Следствие (Утуми [56], [67]). *Пусть R — самоинъективное справа кольцо. Тогда*

(a) $$\mathrm{rad}\, R = \mathrm{sing}\, R$$

и R / rad R — самоинъективное справа регулярное кольцо.

(b) *Если каждый ненулевой правый идеал содержит минимальный правый идеал, то*

$$\mathrm{rad}\, R = {}^{\perp}(\mathrm{soc}\, R),$$

т. е. rad R *является левым аннулятором цоколя кольца R.*

Доказательство. (a) справедливо по п. (a) теоремы 19.27, так как существует канонический изоморфизм $R \approx \mathrm{End}\, R_R$. (b) Цоколь R в силу 8.3 есть пересечение существенных подмодулей, т. е. из (a) следует (b). □

19.29. Следствие. *Пусть M — антисингулярный квазиинъективный правый R-модуль. Тогда* End M_R *— самоинъективное справа и регулярное в смысле Неймана кольцо.*

Доказательство. Если $f \in \mathrm{rad}\, S$, где $S = \mathrm{End}\, M_R$, то по 19.27 модуль M — существенное расширение модуля $\ker f$. Так как $\mathrm{sing}\, M = 0$, по 19.32(d) M — рациональное расширение модуля $\ker f$. Отсюда следует, что $fM = 0$, т. е. $f = 0$. Поэтому rad $S = 0$, а значит, мы можем применить 19.27. □

Отдельные части следующей теоремы взяты из работ Фейса — Утуми [64a], Харады [65a] и Сандомирского [67].

19.30. Теорема. *Пусть M — произвольный квазиинъективный модуль.*

(a) *Если $S_2 \supseteq S_1 = \mathrm{sing}\, M$ и $S_2/S_1 = \mathrm{sing}\,(M/S_1)$, то S_2 выделяется в M прямым слагаемым.*

(b) *Любое отображение f: $M \to N$, где N — антисингулярный модуль, расщепляется.*

Доказательство. (b) Пусть $K = \ker f$. Тогда $\mathrm{sing}\,(M/K) = 0$, следовательно, по 9.5.1 (1, стр. 481) K — замкнутый подмодуль модуля M, а значит, (b) вытекает из 19.6(a).

(a) Легко показать, что S_2 — существенное расширение подмодуля S_1, а вновь используя 9.5.1, мы видим, что S_2— максимальное существенное расширение $P = Q(S_1)$ подмодуля S_1 в M, т. е. оно замкнуто и выделяется прямым слагаемым по 19.6(a). □

19.31. Упражнение.

19.31.1. Доказать любую из теорем Осoфской, сформулированных прямо перед следствием 19.28.

19.31.2. Кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного правого векторного пространства самоинъективно справа, но не слева.

19.31.3 (Утуми). Примитивное кольцо с ненулевым цоколем является кольцом всех линейных преобразований правого векторного пространства тогда и только тогда, когда оно самоинъективно справа.

19.31.4. Антисингулярное справа кольцо R является кольцом всех линейных преобразований правого векторного пространства тогда и только тогда, когда оно — самоинъективное справа первичное кольцо, содержащее однородные правые идеалы.

19.31.5. Инъективная оболочка произвольной области целостности D — простое, а следовательно, примитивное кольцо, которое является кольцом всех линейных преобразований векторного пространства тогда и только тогда, когда D — правая область Оре. Вывести отсюда, что примитивность (а значит, плотность) и самоинъективность кольца не влекут за собой совпадения его с кольцом всех линейных преобразований векторного пространства, приведя пример области целостности, не являющейся областью Оре.

Максимальное рациональное расширение модуля и кольца

Мы, наконец, приходим к важному понятию рационального расширения M модуля N, введенному Финдлеем и Ламбеком [58], которое мы привели в 4.5 (1, стр. 246). Это одно из основных понятий, неявно используемых при изучении колец частных в т. 1. В действительности, кольцо частных Q полупервичного правого кольца Голди R является максимальным рациональным расширением правого R-модуля R. (Это можно проверить прямо из определений или получить из предложения 19.32, которое показывает, что существенное расширение антисингулярного модуля есть рациональное расширение.) Кроме того, максимальное кольцо частных произвольного кольца можно охарактеризовать, используя рациональное расширение (см. 19.34 и далее). (Оно уже обсуждалось в т. 1 (16.12—16.14, стр. 650—652) для антисингулярных колец.) Мы напомним здесь определение рационального расширения для удобства ссылок, а эквивалентность двух приведенных определений оставим в качестве упражнения.

19.32. Предложение и определение (Финдлей — Ламбек [58]). *Модуль P является* ***рациональным расширением*** *своего подмодуля M, если*

(1) $\mathrm{Hom}_R(K/M, P) = 0$ *для каждого модуля K, такого, что* $P \supseteq K \supseteq M$,

и, эквивалентно, если

(2) *любой паре a, $b \in P$, где $b \neq 0$, соответствует элемент $r \in R$, такой, что $ar \in M$ и $br \neq 0$.*

Пусть $\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M в mod-R, *и пусть* $S = \mathrm{End}\, \hat{M}_R$.

(a) *Для любого подмодуля N модуля M второй аннулятор*

$$\overline{N} = \mathrm{ann}_{\hat{M}}\, \mathrm{ann}_S\, N$$

подмодуля N (сначала берется аннулятор в S, а затем в $\hat{M}$) есть его максимальное рациональное расширение, и $\overline{N}$ содержит каждое рациональное расширение подмодуля N в $\hat{M}$. (Таким образом, $\overline{N}$ — единственное максимальное рациональное расширение подмодуля N в $\hat{M}$.)

(b) *Каждое рациональное расширение модуля M можно вложить в $\overline{M}$ с помощью гомоморфизма, индуцирующего на M тождественное отображение.*

(c) *Любые два максимальных рациональных расширения модуля M изоморфны, причем этот изоморфизм можно осуществить с помощью отображения, тождественного на M.*

(d) *Каждое рациональное расширение модуля M является существенным. Если* $\mathrm{sing}\, M = 0$, *то верно и обратное утверждение. (Таким образом, если* $\mathrm{sing}\, M = 0$, *то* $\overline{M} = \hat{M}$.)

Доказательство. Если $\overline{N} \supseteq K \supseteq N$ — некоторый подмодуль и если $f\colon K/N \to \overline{N}$, то положим $f' = f\pi$, где $\pi\colon K \to K/N$ — естественный гомоморфизм. Конечно, $\ker f' \supseteq N$. Так как $\hat{M}$ инъективен, то можно считать, что f' — элемент кольца $S = \mathrm{End}\, \hat{M}_R$. По определению модуля $\overline{N}$ имеет место включение $\ker f' \supseteq \overline{N}$, а значит, $f' = 0$, откуда $f = 0$. Тем самым доказано, что $\mathrm{Hom}_R(K/N, \overline{N}) = 0$, значит, $\overline{N}$ — рациональное расширение подмодуля N.

Если $x \in \hat{M}$ таков, что $t(x) \neq 0$ для некоторого $t \in \mathrm{ann}_S N$, т. е. $x \notin \overline{N}$, то в R не существует такого элемента a, чтобы $xa \in N$ и $t(x)a \neq 0$. Это показывает, что любое рациональное расширение подмодуля N, содержащееся в $\hat{M}$, содержится в $\overline{N}$. Это доказывает (a), а (c) является его следствием, так как по определению любое рациональное расширение является существенным, и, значит, любое рациональное расширение модуля M вкладывается в $\hat{M}$ (1,3.58A, стр. 219). (d) оставляем доказать читателю. □

Рационально замкнутые модули

Подмодуль N модуля M **рационально замкнут**, если он — единственное свое рациональное расширение, содержащееся в M. Любой замкнутый подмодуль N (замкнутость понимается в смысле, указанном перед 19.4) рационально замкнут, поскольку каждое рациональное расширение существенно.

19.33. Следствие. (a) *Любое максимальное рациональное расширение P модуля M содержит в точности одно максимальное рациональное расширение каждого из подмодулей N модуля M.*

(b) *Если P — произвольное рациональное расширение модуля M, то гомоморфизм сокращения $I \mapsto I \cap M$ индуцирует изоморфизм структур рационально замкнутых подмодулей модулей P и M соответственно.*

(c) *Если* $\mathrm{sing}\, M = 0$, *то любое максимальное рациональное расширение P модуля M содержит в точности одну инъективную оболочку каждого из подмодулей N модуля M.*

(d) *Если $P \supseteq K \supseteq M$ — некоторые модули, то P рационален над M* [1]) *тогда и только тогда, когда он рационален над K и K рационален над M.*

(e) *Если P рационален над M, то он оказывается максимальным рациональным расширением в том и только том случае, когда он рационально замкнут в каждом содержащем его модуле.*

Доказательство. Благодаря 19.32 мы можем предполагать, что $\hat{M} \supseteq P = \overline{M}$, и тогда для любого подмодуля N модуля M имеет место включение $P \supseteq \overline{N}$. Таким образом, (a) следует из 19.32(a), а (c) — из 19.32(d).

[1]) То есть P является рациональным расширением модуля M.— *Прим. перев.*

(b) Мы можем предположить, что $\overline{M} \supseteq P$. Тогда $\overline{M} \supseteq \overline{P}$. Из второго определения рационального расширения (2) следует, что модуль $\overline{M}$ рационален над $\overline{P}$. Значит, $\overline{M} = \overline{P}$. Поэтому достаточно доказать (b) для случая $P = \overline{M}$. Если Q рационально замкнут в M, то по определению подмодуль $\overline{Q}$ рационально замкнут в $\overline{M}$, а поскольку $\overline{Q} \cap M$ рационален над Q, то $\overline{Q} \cap M = Q$. Наконец, если подмодуль I рационально замкнут в $\overline{M}$ и $I \cap M = Q$, то, поскольку очевидно, что I рационален над Q, имеет место включение $I \subseteq \overline{Q}$ согласно (a). Так как I рационально замкнут, то $I = \overline{Q}$. Это завершает доказательство (b) [1]).

Необходимость в утверждении (d) получается непосредственно, достаточность мы оставляем читателю в качестве упражнения, а (e) является следствием (d). □

19.34. Предложение (Джонсон [51a], Утуми [56]). *Максимальное рациональное расширение $\overline{R}$ R-модуля R является кольцом, а включение $R \hookrightarrow \overline{R}$ в категории* mod-R *оказывается мономорфизмом в категории колец. При этом имеет место канонический изоморфизм колец (где $\hat{R}$ — инъективная оболочка кольца R в категории* mod-R)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \operatorname{Biend} \hat{R}_R &\to \overline{R} \\ f &\mapsto (1) f, \end{aligned}$$

а если $\overline{R} = \hat{R}$, изоморфизм колец

$$(2)\qquad \begin{aligned} \overline{R} &\to \operatorname{End} \hat{R}_R \\ x &\mapsto t_x, \end{aligned}$$

такой, что $x = t_x(1)$. Кольцо $\overline{R}$ называется ***максимальным правым кольцом частных (Джонсона—Утуми)*** *кольца R.*

Доказательство. Прежде всего, если $t \in S = \operatorname{End} \hat{R}_R$, то

$$(3)\qquad t((1) f) = (t(1)) f \quad \text{для любого } f \in \operatorname{Biend} \hat{R}_R.$$

---

[1]) Докажем еще, что $I \cap M$ рационально замкнут в M, если I рационально замкнут в $\overline{M}$. Действительно, пусть N — рациональное замыкание подмодуля $I \cap M$ в M (которое существует по лемме Цорна). По доказанному $N = \overline{N} \cap M$. Пусть $x, y \in \overline{N}$ и $y \neq 0$. Тогда для некоторого $a \in R$ имеем $xa \in N$, $ya \neq 0$. Поскольку $\overline{N}$ — существенное расширение подмодуля N, можно считать, что $ya \in N$. Отсюда $xab \in I \cap M$ и $yab \neq 0$ для некоторого $b \in R$. Таким образом, $\overline{N}$ — рациональное расширение подмодуля $I \cap M$ в $\overline{M}$. В силу (a) $\overline{N} \subseteq I$. Поэтому $N = \overline{N} \cap M \subseteq I \cap M \subseteq N$, т. е. $N = I \cap M$.— *Прим. ред.*

Далее, $\operatorname{ann}_S R = \operatorname{ann}_S 1$ и, значит,

$$(4)\qquad \overline{R} = \{x \in \hat{R} \mid t(x) = 0, \quad \text{если} \quad t(1) = 0\}.$$

Таким образом, из (3) следует, что образ отображения (1) содержится в $\overline{R}$. Далее, поскольку R вкладывается в $\hat{R}$, то $\hat{R}$ — циклический S-модуль, причем $\hat{R} = S1$, т. е. $\hat{R}$ порождается как S-модуль единичным элементом 1 кольца R. Проверим, что отображение (1) инъективно. Пусть f_1 и $f_2 \in \operatorname{Biend} \hat{R}_R$ таковы, что $(1)f_1 = (1)f_2$ и y — произвольный элемент из $\hat{R}$. Тогда $y = t_y(1)$ для некоторого $t_y \in S$, откуда $(y)f_1 = (t_y(1))f_1 = t_y((1)f_2) = (t_y(1))f_2 = (y)f_2$. Таким образом, $f_1 = f_2$. Убедимся теперь, что (1) — наложение. Пусть $x \in \overline{R}$. Тогда в силу (4) его аннулятор в кольце S содержит аннулятор единицы. Следовательно, соответствие $s(1) \mapsto s(x)$ является корректно определенным S-гомоморфизмом $f\colon \hat{R} \to \hat{R}$, т. е. $f \in \operatorname{Biend} \hat{R}_R$. Поскольку $(1)f = x$, это показывает, что отображение (1) сюръективно. Тогда кольцевая операция в $\operatorname{Biend} \hat{R}_R$ определяет с помощью (1) кольцевую операцию в $\overline{R}$.

Пусть теперь $\overline{R} = \hat{R}$. Если $x \in \overline{R}$, то $x = t_x(1)$ для однозначно определенного элемента $t_x \in S$. Тот факт, что t_x определен однозначно, можно доказать так: если $t(1) = t'(1)$, то $(t - t')(1) = 0$, откуда в силу (4) $(t - t')(x) = 0$ для любого $x \in \overline{R} = \hat{R}$. Таким образом, (2) — корректное отображение. Очевидно, что оно инъективно и сюръективно. Остается проверить, что оно согласовано с кольцевыми операциями. Пусть $x, y \in \overline{R}$. Тогда $x = (1)f_1$, $y = (1)f_2$ и $x \cdot y = (1)(f_1 f_2) = (x)f_2$. Но

$$(x)f_2 = (t_x(1))f_2 = t_x((1)f_2) = t_x(y).$$

Таким образом $t_{x \cdot y}(1) = t_x(y)$ и $(t_x t_y)(1) = t_x(t_y(1)) = t_x(y)$, т. е. $t_{x \cdot y} = t_x t_y$. Сложение проверяется тривиально. □

Изоморфизмы (1) и (2) составляют теорему Ламбека [63].

19.35. Следствие (Джонсон [51], Уонг—Джонсон [59]). *Если R — кольцо, то $\overline{R}$ будет регулярным кольцом тогда и только тогда, когда R антисингулярно справа. В этом случае $\overline{R}$ совпадает с инъективной оболочкой кольца R в категории* mod-R, *обозначается через $\hat{R}$ и является самоинъективным справа регулярным кольцом. Кроме того, имеет место изоморфизм структур*

$$\begin{matrix} \textit{главные правые} & & \textit{рационально замкнутые} \\ \textit{идеалы кольца } \hat{R} & \rightleftarrows & \textit{правые идеалы кольца } R \\ & I \mapsto I \cap R & \\ & \hat{J} \leftarrow J, & \end{matrix}$$

где $\hat{J}$ обозначает инъективную оболочку в $\hat{R}$ произвольного правого идеала J кольца R.

Доказательство. В силу (d) из 19.32 если $\operatorname{sing} R = 0$, то $\overline{R} = \hat{R}$, и тогда $S = \operatorname{End} \overline{R}_R$ антисингулярно и, значит, самоинъективно справа и регулярно по 19.27. Далее, по последнему предложению каноническое вложение кольца $\overline{R}$ в $\operatorname{End} \hat{R}_R$ есть изоморфизм, так как $\overline{R} = \hat{R}$. Таким образом, $\overline{R}$ обладает нужными свойствами. Остается лишь описать структурный изоморфизм между соответствующими структурами рационально замкнутых подмодулей, индуцированный отображением сокращения $I \to I \cap R$.

Ввиду 19.33(b) для этого достаточно убедиться, что рационально замкнутыми правыми идеалами кольца $\overline{R}$ являются главные правые идеалы и только они. Это в свою очередь сразу следует из 19.32(d), если принять во внимание, что в регулярном самоинъективном справа кольце главными правыми идеалами являются инъективные правые идеалы и только они.

Наконец, если $\overline{R}$ регулярно, то $\operatorname{sing} \overline{R} = 0$ в mod-$\overline{R}$, поскольку правый аннулятор произвольного элемента x порождается идемпотентом $1 - e$, где $Re = Rx$. Тогда из того, что $\overline{R}$ — существенное расширение модуля R в категории mod-R, следует, что $\operatorname{sing} R = 0$. □

19.36. Следствие. *Если максимальное правое кольцо частных $\overline{R}$ кольца R инъективно в* mod-R, *то оно самоинъективно справа.*

Доказательство. Поскольку $\overline{R}$ рационально над R, можно доказать, что инъективная оболочка E $\overline{R}$-модуля $\overline{R}$ является существенным расширением R-модуля R, а следовательно, $E = \overline{R}$, как и утверждалось. Проделаем это. Возьмем $y \in E$, $y \neq 0$; тогда $0 \neq ya \in \overline{R}$ для некоторого $a \in \overline{R}$. В силу рациональности модуля $\overline{R}$ над R_R существует элемент $r \in R$, такой, что $ar \in R$ и $yar \neq 0$. Тогда найдется элемент $t \in R$, такой, что $0 \neq yart \in R$. Поскольку $art \in R$, то мы доказали, что E существенно над R. □

19.37. Упражнение. (a) (Чейз — Фейс [65].) Пусть R — полупервичное кольцо, обладающее тем свойством, что каждый его рационально замкнутый левый идеал содержит минимальный рационально замкнутый левый идеал. Тогда R антисингулярно слева и равно произведению $\prod_{i \in I} S_i$ колец $\{S_i\}_{i \in I}$ всех линейных преобразований некоторых левых векторных пространств. Кроме того, если e_i — единичный элемент кольца S_i, то $R_i = e_i R$ — первичное кольцо для любого $i \in I$ и канонический гомоморфизм $R \to \prod_{i \in I} R_i$ задает представление кольца R в виде существенного несократимого подпрямого произведения. (Под этим мы понимаем, что если $J_i = \ker(R \to R_i)$ для любого $i \in I$, то $\bigcap_{i \in I} J_i = 0$ и $\sum_{i \in I} J_i$ — существенный левый идеал. Ср. подпрямые произведения, гл. 26. Это подпрямое произведение также несократимо в смысле Леви [63a].)

(b) Обратное к (a). Если R — антисингулярное слева кольцо, являющееся существенным несократимым подпрямым произведением семейства $\{R_i\}$ колец, таких, что каждое R_i имеет максимальное левое кольцо частных, являющееся кольцом S_i всех линейных преобразований левого векторного пространства, то канонический гомоморфизм $R \to \prod_{i \in I} S_i$ вкладывает R в его максимальное левое кольцо частных. Кроме того, R — полупервичное кольцо, в котором каждый рационально замкнутый левый идеал содержит минимальный рационально замкнутый левый идеал.

(c) Кольцо R изоморфно произведению колец всех линейных преобразований левых векторных пространств тогда и только тогда, когда оно — полупервичное самоинъективное слева кольцо, в котором каждый ненулевой левый идеал (соотв. левый аннуляторный идеал) содержит минимальный ненулевой левый идеал (соотв. левый аннуляторный идеал). (Ср. упр. 23 в конце главы.)

(d) Пусть R — область целостности, но не область Оре, которую можно вложить в тело D (см., например, Кон [71]). Показать, что $\hat{R}$ не вкладывается в $D = \hat{D}$. [*Указание*: $\hat{R}$ содержит ненулевой нильпотентный элемент!] Однако для любого правого кольца Оре A, вкладывающегося в полное кольцо матриц D_n над D, кольцо частных $Q(A)$ также вкладывается в D_n (Смолл).

19.38. Упражнение. (a) Показать, что максимальное правое кольцо частных максимального правого кольца частных S кольца R совпадает с S.

(b) (Чейз — Фейс [65].) Пусть M — квазиинъективный левый R-модуль, причем $S = \operatorname{End}_R M$ — регулярное кольцо. (Например, M может быть любым QI-модулем с нулевым сингулярным подмодулем.) Тогда S будет произведением колец всех линейных преобразований левых векторных пространств в том и только том случае, когда каждое прямое слагаемое модуля M содержит минимальное прямое слагаемое.

(c) Следующие условия эквивалентны: (1) $\overline{R}$ — классически полупростое кольцо; (2) $\overline{R}$ артиново (нётерово) справа и $\operatorname{sing} R = 0$; (3) R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм и $\operatorname{sing} R = 0$. (4) R удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых и $\operatorname{sing} R = 0$.

(d) Следующие условия эквивалентны: (1) R обладает классически полупростым классическим правым кольцом частных; (2) R — полупервичное кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для прямых сумм и условию максимальности для правых аннуляторных идеалов; (3) R — полупервичное кольцо с нулевым сингулярным идеалом, удовлетворяющее условию максимальности для прямых сумм. Если эти условия выполняются, то $\overline{R}$ — классическое правое кольцо частных кольца R, а тогда R первично в том и только том случае, когда $\overline{R}$ просто.

(e) Кольцо матриц R_n служит максимальным правым кольцом частных кольца $T_n(R)$ нижних треугольных матриц над R. Вывести отсюда, что даже в случае, когда R — тело, $A = T_n(R)$ может иметь ненулевые нильпотентные идеалы, хотя A — антисингулярное справа кольцо с максимальным правым кольцом частных $\hat{A} = R_n$, которое является простым артиновым кольцом (а также как инъективно, так и проективно над A). (Любое подкольцо S кольца R_n, содержащее все матрицы вида $Ke_{11} + \ldots + Ke_{1n}$, где K — правый порядок в R, обладает максимальным правым кольцом частных $S = R_n$. Ср. Фейс [67а, стр. 129, проблема 13].)

(f) Пусть Q — кольцо, а R — такое его подкольцо, что $Q = R_S$ служит его правым кольцом частных относительно мультипликативного подмножества S. Тогда Q является плоским левым S-модулем (**1**, стр. 647—648).

(g) (Катефорис [69].) Показать, что если R — антисингулярное справа кольцо, то $\hat{R}$ является плоским левым R-модулем тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный правый идеал I кольца R существенно конечно связан в том смысле, что существует представление $0 \to K \to F \to I \to 0$ идеала I, где F — конечно порожденный свободный модуль, а K содержит существенный конечно порожденный подмодуль. В этом случае каждое регулярное в смысле Неймана кольцо, содержащееся в $\hat{R}$ и содержащее R, будет плоским левым R-модулем.

(h) (Сандомирский [67].) Если $\hat{R}$ — классически полупростое кольцо, то каждый левый $\hat{R}$-модуль является плоским левым R-модулем.

(i) Пусть A — произвольное кольцо, а R — его подкольцо. Тогда A будет плоским слева над R в том и только том случае, когда каждый инъективный правый A-модуль является инъективным R-модулем (**1**, 11.35.3, стр. 537).

(j) (Катефорис [69].) Для любого кольца R и максимального правого кольца частных $Q = \overline{R}$ эквивалентны следующие множества условий (A) и (B) : (A) R антисингулярно справа и каждый конечно порожденный антисингулярный правый модуль проективен; (B) R полунаследственно справа, Q — плоский правый (sic!) модуль, а $Q \otimes_R Q$ — антисингулярный правый модуль.

(k) (Силвер [67].) Включение $R \hookrightarrow A$ в категории RINGS есть эпиморфизм этой категории тогда и только тогда, когда канонический гомоморфизм $A \otimes_R A \to A$ является изоморфизмом.

(l) Пусть M — существенное расширение модуля N и $x \neq 0$ из M. Тогда $\mathrm{ann}_R (x/N)$ — существенный правый идеал. Использовать это для доказательства того, что для любого кольца A, являющегося существенным расширением модуля R_R, ядро канонического отображения $A \otimes_R A \to A$ содержится в сингулярном R-подмодуле модуля $A \otimes_R A$. Вывести отсюда, что если $A \otimes_R A$ — антисингулярный правый R-модуль, то $R \hookrightarrow A$ — кольцевой эпиморфизм (см. (j) и (k)). Кроме того, если A — антисингулярный правый R-модуль, то это условие необходимо и достаточно (ср. (i)).

(m) Если $R \subseteq A$ — кольца и $R \hookrightarrow A$ — плоский эпиморфизм (т. е. $R \hookrightarrow A$ — эпиморфизм категории RINGS и A — плоский левый R-модуль), то правый A-модуль E инъективен как правый R-модуль тогда и только тогда, когда он инъективен как правый A-модуль. Вывести отсюда, что r.gl.dim $A \leqslant$ r.gl.dim R.

(n) (Гудёрл [71].) Если R антисингулярно справа и $Q = \hat{R}$, то каждый конечно порожденный антисингулярный правый R-модуль вкладывается в свободный правый R-модуль в том и только том случае, когда Q — плоский правый R-модуль, а $R \hookrightarrow Q$ — кольцевой эпиморфизм (см. (k)). Когда это так, Q является также левым кольцом частных кольца R. (А если R обладает конечной правой размерностью Голди, то требуется лишь, чтобы Q был плоским правым R-модулем.)

(o) Если модуль E инъективен, а M антисингулярен, то любой гомоморфизм $f: E \to M$ расщепляется.

(p) Пусть R — антисингулярное справа кольцо, а M — правый R-модуль. Тогда sing $(M/\text{sing } M) = 0$. Вывести отсюда, что сингулярный подмодуль выделяется прямым слагаемым в любом гомоморфном образе инъективного R-модуля (ср. Сандомирский [67, стр. 120]). Таким образом, неразложимый инъективный модуль E или антисингулярен, или совпадает со своим сингулярным подмодулем.

(q) Пусть R антисингулярно справа. Любой антисингулярный правый R-модуль M вкладывается в произведение некоторого множества экземпляров R-модуля $\hat{R}$, а если M конечно порожден, то он вкладывается в произведение конечного числа экземпляров модуля $\hat{R}$ (см., например, Гудёрл [72, стр. 19]). Любой конечно порожденный однородный антисингулярный модуль вкладывается в $\hat{R}$. Вывести отсюда, что любой неразложимый антисингулярный инъективный правый R-модуль вкладывается в $\hat{R}$.

(r) Если R антисингулярно справа, а M — антисингулярный правый R-модуль, то ядро канонического гомоморфизма $M \otimes_R \hat{R} \to \hat{M}$ содержится в сингулярном подмодуле модуля $M \otimes_R \hat{R}$.

(s) (Зельманович [71].) Каждый конечно порожденный правый R-подмодуль прямого произведения $\overline{R}^a$ экземпляров правого кольца частных $\overline{R}$ кольца R полурефлексивен над R тогда и только тогда, когда $\overline{R}$ является также левым кольцом частных кольца R. Если $\overline{R}$ артиново справа, то каждый конечно порожденный полурефлексивный правый R-модуль вкладывается в свободный R-модуль.

(t) (Зельманович [71].) Любой антисингулярный правый модуль M над произвольным кольцом R является существенным расширением прямой суммы замкнутых правых идеалов кольца R и, следовательно, вкладывается в прямое произведение некоторой совокупности экземпляров инъективной оболочки $\hat{R}$ модуля R. Если M счетно порожден, то он вкладывается в прямую сумму экземпляров модуля $\hat{R}$. Если кольцо R самоинъективно справа, то любой конечно порожденный антисингулярный правый модуль изоморфен конечной прямой сумме инъективных оболочек правых идеалов кольца R (и, следовательно, инъективен и проективен (Сандомирский [68])). Наконец, если R полулокально и самоинъективно справа (а значит, R — полулокальное SBI-кольцо), то каждый антисингулярный модуль изоморфен прямой сумме правых идеалов (ср. u).

(u) Если R нётерово справа, то любой антисингулярный правый модуль M вкладывается в прямую сумму экземпляров модуля $\hat{R}$.

(v) Над полупервичным правым кольцом Голди R любой неразложимый инъективный модуль E является либо периодическим модулем, либо модулем без кручения (см. (q)).

(x) (Фейс [66a].) Если R — антисингулярное справа кольцо конечной размерности Голди (или, что эквивалентно, если $\hat{R}$ — классически полупростое кольцо, см. (c)), то $\hat{R}$ $\sum$-инъективно.

(y) (Сандомирский [67].) Над кольцом R из упр. (x) любая прямая сумма семейства $\{E_i\}$ антисингулярных инъективных правых R-модулей инъективна. [*Указание*: любой из E_i выделяется прямым слагаемым в $Q = \hat{R}$ и является каноническим инъективным Q-модулем. См. (m) и (p).] Кроме того, любой гомоморфный образ инъективного правого R-модуля имеет выделяющийся прямым слагаемым сингулярный подмодуль.

(z) (Зельманович [67].) Предположим, что R имеет классически полупростое (классическое) левое кольцо частных Q. Если M — любой полурефлексивный левый R-модуль конечной размерности Голди, то $\mathrm{End}_R\, M = E$ обладает классически полупростым (классическим) левым кольцом частных $\mathrm{End}_R\,(Q \otimes_R M) = S$. Кроме того, если Q — двустороннее кольцо частных кольца R, то S — двустороннее кольцо частных для E. (В частности, в этом случае M может быть любым конечно порожденным антисингулярным Q-модулем.)

Кольца, конечные по Дедекинду

19.39. Предложение и определение. *Кольцо R называется* ***конечным по Дедекинду***, *если для любых $x, y \in R$ из равенства $xy = 1$ следует $yx = 1$. Кольцо R конечно по Дедекинду тогда и только тогда, когда $R/\mathrm{rad}\, R$ конечно по Дедекинду. Достаточное условие конечности по Дедекинду: $y^{\perp} = 0$ влечет за собой ${}^{\perp}y = 0$ для любого $y \in R$; другая формулировка этого условия: каждый регулярный справа элемент кольца R регулярен.*

Доказательство. Если $xy = 1$, то $g = 1 - yx$ — идемпотент кольца R, такой, что $xg = gy = 0$. Далее, $yx = 1$ в том и только том случае, когда $g = 0$. Поскольку $y^{\perp} = 0$, то ${}^{\perp}y = 0$, и, значит, $g = 0$.

Обозначим через $\bar{x}$ образ произвольного элемента $x \in R$ при каноническом гомоморфизме $R \to R/J$ (здесь $J = \mathrm{rad}\, R$). Если R/J конечно по Дедекинду, то из равенства $xy = 1$ следует, что $\overline{yx} = \bar{1}$, т. е. что $g = yx - 1 \in J$. Но нуль — единственный идемпотент, содержащийся в $\mathrm{rad}\, R$. Таким образом, $yx = 1$ и R конечно по Дедекинду. Обратно, если $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$, то $u = xy - 1 \in J$, а значит, $xy = 1 + u = v$ обратим в R. Если R конечно по Дедекинду, то $xyv^{-1} = 1$ влечет за собой обратимость элемента x в кольце R, а следовательно, обратимость элемента $\bar{x}$ в R/J. Значит, $\bar{y} = \bar{x}^{-1}$, $\bar{y}\bar{x} = \bar{1}$ и R/J конечно по Дедекинду.

19.40. Предложение (Джекобсон [50]). (a) *Если кольцо A не является конечным по Дедекинду, то существует бесконечное множество $\{e_{ij}\}_{i, j \in \omega}$ матричных единиц кольца A, такое, что*

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, \quad i, j, k, l \in \omega,$$

где δ есть дельта Кронекера.

(b) *Кольцо R конечно по Дедекинду, если или R, или $R/\mathrm{rad}\, R$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*: (1) *условие максимальности для правых аннуляторных идеалов*, (2) *условие минимальности для правых аннуляторных идеалов*, (3) *условие максимальности для прямых сумм*, (4) *условие минимальности для прямых слагаемых*, (5) *условие максимальности либо минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами.*

Доказательство. (a) Если $xy = 1$, то $g = yx$ — идемпотент, для которого

$$x(1 - g) = (1 - g)y = 0$$

и

$$e_{ij} = y^i(1 - g)x^j, \quad i, j \in \omega,$$

— матричные единицы. Кроме того, $e_{ii} = 0$ для какого-либо i влечет за собой $g = 1$. Этим доказано (a).

(b) Если дано бесконечное множество матричных единиц e_{ij}, то $\{e_{ii}R\}_{i\in\omega}$ — бесконечное множество независимых правых аннуляторных идеалов кольца R, и если $f_n = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$, то $\{f_iR\}_{i\in\omega}$ — строго возрастающая последовательность правых идеалов, порожденных идемпотентами. Этого достаточно для доказательства (b). □

19.41. Предложение и определение (Утуми [65]). *Правый идеал I кольца S называется* ***существенно порожденным идемпотентом*** *$e \in S$, если eS — существенное расширение идеала I. Любое кольцо S, в котором каждый правый и каждый левый идеалы существенно порождены идемпотентом, в частности, кольцо, самоинъективное справа и слева, конечно по Дедекинду.*

Доказательство. Если S не является конечным по Дедекинду, то по теореме Джекобсона 19.40 оно содержит бесконечное множество матричных единиц. Пусть Se, $e = e^2$, — существенное расширение идеала $\sum Se_{ii}$. Мы можем предполагать, что $ee_{ij} = e_{ij}$ для любых i, j, взяв, если нужно, ee_{ij} вместо e_{ij}. Пусть fS — существенное расширение идеала $\sum_{j>1} (e_{1j} + e_{jj})S$, где f — идемпотент.

Сначала предположим, что $e \neq fe$. Тогда $0 \neq (1 - f)e \in Se$ и, следовательно, существует x, такой, что $0 \neq x(1 - f)e \in \sum_{i=1}^{n} Se_{ii}$ для некоторого конечного n. Тогда $x(1 - f)ee_{n+1,\, n+1} = 0$ в силу ортогональности идемпотентов e_{ii}. С другой стороны, $(1 - f)(e_{1j} + e_{jj}) = 0$ для любого $j > 1$ по определению f. Следовательно,

$$x(1-f)\, e_{1,\, n+1} = x(1-f)(e_{1,\, n+1} + e_{n+1,\, n+1}) - x(1-f)\, ee_{n+1,\, n+1} = 0.$$

Таким образом, $x(1 - f)e_{1,n+1} = 0$, значит, $x(1 - f)e_{1i} = 0$ для любого i. Для любого $i > 1$

$$x(1 - f)e_{ii} = x(1 - f)(e_{1i} + e_{ii}) - x(1 - f)e_{1i} = 0.$$

Значит, $x(1 - f)e_{ii} = 0$ для любого i. Обозначим через A множество элементов y из Se, таких, что $ye_{ii} = 0$ для любого i. Тогда $x(1 - f)e \in A$ и A есть левый идеал, содержащийся в Se и не пересекающийся с $\sum Se_{ii}$. Поскольку Se — существенное расширение идеала $\sum Se_{ii}$, то $A = 0$ и $x(1 - f)e = 0$ — противоречие.

Далее, предположим, что $e = fe$. Тогда $e_{11} = ee_{11} = fee_{11} \in fS$. Следовательно,

$$0 \neq e_{11}z \in \sum_{j>1} (e_{1j} + e_{jj})\, S$$

для некоторого z. Пусть $e_{11}z \in \sum_{j=2}^{m} (e_{1j} + e_{jj})\, z_j$. Так как сумма $\sum e_{ii}S$ прямая, то $e_{11}z - \sum_{j=2}^{m} e_{1j}z_j = 0$ и $e_{jj}z_j = 0$ для любого $j = 2, \ldots, m$, и, значит, $e_{11}z = 0$ — противоречие. □

19.42. Упражнение. (a) (Утуми [65].) В предположениях предыдущего предложения, если $eS \approx fS$, где e и f — идемпотенты из S, и если $eS \subseteq fS$ (т. е. $fe = e$), то $eS = fS$.

(b) Если S самоинъективно слева и конечно по Дедекинду и если $f\colon I \to J$ — изоморфизм левых идеалов, то существует обратимый элемент $u \in S$, такой, что $(x)f = xu$ для любого $x \in I$.

(c) Любое полулокальное кольцо конечно по Дедекинду.

(d) (Утуми [63b].) Пусть R антисингулярно справа. Каждый замкнутый правый идеал есть правый аннуляторный идеал в том и только том случае, когда левый аннулятор любого ненулевого правого идеала, не являющегося существенным, отличен от нуля. Кроме того, в этом случае R антисингулярно слева. Тогда каждый замкнутый правый или замкнутый левый идеал есть правый (соответственно левый) аннуляторный идеал тогда и только тогда, когда максимальное правое кольцо частных кольца R является также его максимальным левым кольцом частных.

Кольцо R **вполне конечно по Дедекинду**, если каждое его факторкольцо конечно по Дедекинду (19.39). Любое полулокальное кольцо конечно по Дедекинду и, следовательно, вполне конечно по Дедекинду.

Два правых идеала A и B кольца R **комаксимальны** (или **взаимно просты**), если $R = A + B$. Два правых идеала X, Y **перестановочны**, или **коммутируют**, если $XY = YX$.

19.43. Предложение (Накаяма [40], Асано [49]).

(a) *Пусть R вполне конечно по Дедекинду. Тогда любые два комаксимальных идеала $A = aR$ и $B = bR$, являющиеся главными правыми идеалами, перестановочны.*

(b) *Пусть R полулокально и J — его радикал. Тогда если C — произвольный идеал, являющийся главным и как правый, и как левый идеал, скажем $C = Rc = aR$, то $C = Ra$.*

Доказательство. (a) Запишем $1 = ax + by$, где $x, y \in R$. Тогда образ элемента 1 в $\overline{R} = R/B$ есть $\overline{1} = \overline{a}\overline{x}$. Поскольку R/B конечно по Дедекинду, то $\overline{1} = \overline{x}\overline{a}$. Так как $ba \in A$, то $ba = ab'$ для некоторого $b' \in R$. Тогда $\overline{b'} = \overline{x}\overline{a}\overline{b'} = \overline{x}\overline{b}\overline{a} = 0$, т. е. $b' \in B$. Таким образом,

$$BA = bRaR \subseteq baR = ab'R \subseteq AB$$

и по симметрии $AB \subseteq BA$, а значит, $AB = BA$.

(b) Пусть $C = Rc = aR$. Рассмотрим факторкольцо $\bar{R} = R/JC$. Образ множества S элементов кольца R при естественном эпиморфизме $\pi\colon R \to \bar{R}$ обозначим через $\bar{S}$. Поскольку $\bar{R}$ полулокальное кольцо, а $J\bar{C} = 0$, то $\bar{C}$ — полупростой левый R/J-модуль, а значит, полупростой левый $\bar{R}$-модуль. Учитывая, что $\bar{C} = \bar{R}\bar{c}$ — циклический модуль, получаем, что $\bar{C}$ — левый $\bar{R}$-модуль конечной длины. Ясно, что $\bar{R}\bar{a} \subseteq \bar{C}$ и, в частности, $\bar{R}\bar{a}$ — также модуль конечной длины. Покажем, что $\bar{R}\bar{a} = \bar{C}$. Заметим, что поскольку ${}^{\perp}\bar{a} = {}^{\perp}\bar{C} \subseteq {}^{\perp}\bar{c}$, соответствие $\bar{r}\bar{a} \mapsto \bar{r}\bar{c}$ является корректно определенным гомоморфизмом $f\colon \bar{R}\bar{a} \to \bar{C}$. Более того, f — эпиморфизм, так как $f(\bar{R}\bar{a}) = \bar{R}\bar{c} = \bar{C}$. Но тогда (длина $(\bar{R}\bar{a})$)$\geqslant$(длина $(\bar{C})$). Поскольку, очевидно, (длина $(\bar{R}\bar{a})$)$\leqslant$(длина $(\bar{C})$), то (длина $(\bar{R}\bar{a})$)$=$(длина $(\bar{C})$). Итак, $\bar{R}\bar{a}$ — подмодуль модуля $\bar{C}$, имеющей с ним одинаковую длину. Следовательно, $\bar{R}\bar{a} = \bar{C}$, т. е. $Ra + JC = C$. Так как $C = Rc$, то последнее равенство можно переписать так: $Ra + JC = Rc$, откуда в силу леммы Накаямы 18.4 следует, что $Ra = Rc = C$, что и требуется.

19.44. Следствие. *Если R — полупримарное кольцо и его первичные идеалы являются главными правыми идеалами, то R примарно разложимо.*

Доказательство. 19.43 и 18.37. □

19.45. Предложение (Асано [49]). *Следующие условия на артиново справа кольцо R эквивалентны*:

(1) *R — кольцо главных правых идеалов.*

(2) *R примарно разложимо и любой правый главный неразложимый модуль является цепным.*

(3) *R — конечное произведение примарных колец главных правых идеалов.*

(4) *R — конечное произведение колец матриц над вполне примарными кольцами главных правых идеалов.*

(4 + n) *Условие* (n) *на* $R/(\operatorname{rad} R)^2$, n = 1, 2, 3, 4.

Доказательство. В силу 18.38.2 если R локально и артиново, то эквивалентны такие условия: (a) R — кольцо главных правых идеалов; (b) R — цепной модуль в категории mod-R; (c) J/J^2 просто. Значит, (2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)$\Rightarrow$(1). Пусть выполняется (1). Тогда R примарно разложимо по 19.44. Таким образом, (1)$\Rightarrow$(3). Этим устанавливается также эквивалентность условий (5) — (8). Так как R примарно разложимо тогда и только тогда, когда R/J^2 примарно разложимо (18.37), доказательство завершено. □

Инъективные модули над регулярными кольцами

Мы начинаем этот раздел с довольно общей теоремы об инъективных модулях над антисингулярными (и, в частности, над регулярными) кольцами, а затем изучаем некоторые инъективные модули над регулярными кольцами специального вида.

19.46A. Теорема (Сандомирский [67]). *Если кольцо R антисингулярно справа, то* $\operatorname{sing}(M/\operatorname{sing} M) = 0$ *для каждого* $M \in$ mod-R. *Кроме того, в этом случае* $\operatorname{sing} M$ *выделяется прямым слагаемым в любом модуле M, являющемся гомоморфным образом инъективного модуля E.*

Доказательство. Пусть $S_1 = \operatorname{sing} M$ и S_2 — полный прообраз $\operatorname{sing}(M/S_1)$ в R. Если $x \in S_2 - S_1$, то по определению S_2 существует существенный правый идеал J, такой, что $0 \neq xJ \subseteq S_1$. Тогда J содержит аннулятор K элемента x. Кроме того, если $0 \neq j \in J$, то, поскольку $xj \in S_1$, существует существенный правый идеал Q, такой, что $xjQ = 0$, а значит, $jQ \subseteq K$. Далее, из $\operatorname{sing} R = 0$ следует $jQ \neq 0$, что доказывает существенность K в J, а следовательно, и в R. Но тогда $x \in S_1$ в противоречие с выбором элемента x. Значит, $\operatorname{sing}(M/S_1) = 0$.

Далее, пусть $M = E/K$ — гомоморфный образ инъективного модуля E, и пусть $\operatorname{sing} M = S/K$. Поскольку $\operatorname{sing}(M/\operatorname{sing} M) = 0$, имеем $\operatorname{sing}((E/K)/(S/K)) = 0$, а следовательно, S/K выделяется в $M = E/K$ прямым слагаемым по 19.30. □

Кольцо всех линейных преобразований $L = \operatorname{End}_D V$, где V — левое векторное пространство над D, самоинъективно слева по 19.46B, и, значит, каждый главный левый идеал K кольца L инъективен (поскольку в силу 19.24 K выделяется в L прямым слагаемым). В общем случае это не дает оснований предполагать, что каждый ненулевой главный правый идеал кольца L инъективен. На самом деле это случается тогда и только тогда, когда V конечномерно (19.48A).

19.46B. Предложение. *Пусть R — кольцо, удовлетворяющее двум следующим эквивалентным условиям*:

(a) $R \approx \operatorname{End}_D V$, *где V — левое векторное пространство над телом D.*

(b) *R — первичное самоинъективное слева кольцо с минимальным правым идеалом, изоморфным V, и $D = \operatorname{End} V_R$.*

Тогда V инъективно в категории mod-R *в том и только том случае, когда оно конечномерно над телом $D = \operatorname{End} V_R$.*

Доказательство. Пусть выполняется условие (a). Тогда V прост над R в силу рассуждений перед 19.22 и вкладывается в R, так как D — тело [1]). Кольцо R самоинъективно слева по левостороннему варианту теоремы 19.27 (следует учесть, что по 19.23A кольцо R примитивно). Далее, $D = \operatorname{End} V_R$ в силу рефлексивности модулей над телом [2]).

Обратно, если выполняется (b), то R канонически вкладывается в $L = \operatorname{Biend} V_R$ [3]). Если $a \in L$ и $a \neq 0$, то $Va \neq 0$, а потому $Ra \cap R \neq 0$. Отсюда следует, что ${}_RL$ — существенное расширение ${}_RR$, и они совпадают в силу самоинъективности кольца R. Этим доказано, что $L = R = \operatorname{End}_D V$, т. е. утверждение (a) справедливо.

Если V конечномерно, то R — классически-полупростое кольцо и каждый R-модуль инъективен. Обратно, пусть выполняется (a) и R-модуль V инъективен. Тогда по 19.35 $\overline{R} = \hat{R}$ — максимальное правое кольцо частных кольца R. Правый идеал $V\hat{R}$ кольца $\hat{R}$, порожденный множеством V, является существенным расширением R-модуля V. Тогда из инъективности V следует, что $V = V\hat{R}$, а это показывает, что $\hat{R}$ канонически вкладывается в $R = \operatorname{End}_D V$, а значит, $R = \hat{R}$ самоинъективно справа. Поскольку R самоинъективно и слева, то по теореме Утуми 19.41 кольцо R конечно по Дедекинду, а это возможно тогда и только тогда, когда V конечномерно. □

Эквивалентность свойств (a) и (b) — это теорема Утуми [56].

19.47. Пример. Регулярное правое V-кольцо может иметь бесконечномерные простые модули.

Как ни удивительно, этот пример автор уже приводил в своих лекциях [67] в качестве примера регулярного кольца, которое не является левым V-кольцом! Пусть $L = \operatorname{End} V_F$ — кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного правого векторного пространства V над телом F, пусть S — идеал, состоящий из линейных преобразований конечного ранга, и пусть $R = S + F$ — подкольцо, порожденное идеалом S и подкольцом F, состоящим из скалярных преобразований (переводящих каждый элемент v в va для некоторого $a \in F$). Ясно, что R — регулярное кольцо. Кроме того, по 19.46B V канонически изоморфно минимальному левому идеалу кольца L, скажем $V = Le$, где $e = e^2 \in L$ (см.

---

[1]) Можно рассмотреть, например, отображение $\sum a_i e_i \to \varphi$, $\varphi(e_1) = \sum a_i e_i$, $\varphi(e_i) = 0$, $i = 2, \ldots, n$, где $\{e_i\}$ — базис V над D.— *Прим. перев.*

[2]) Первичность кольца R следует из его примитивности.— *Прим. перев.*

[3]) V точен над R в силу первичности кольца R ($\operatorname{ann} V = I$ — идеал и из $VI = 0$ следует, что $I = 0$).— *Прим. перев.*

упр. 11 гл. 3). Кольцо L инъективно в категории mod-L, следовательно, $W = eL$ (идеал, L-дуальный к V) — простой инъективный объект категории mod-L, но по 19.46B V не инъективен в L-mod, а значит, в этой категории не инъективно и L. (Таким образом, L не является левым V-кольцом.)

Покажем сначала, что R — правое V-кольцо. Пусть W — минимальный правый (или левый) идеал кольца R, и пусть $f\colon I \to W$ — отображение правого (левого) идеала I кольца R в W. Для того чтобы выяснить, будет ли W инъективным R-модулем, достаточно рассмотреть лишь правые (левые) существенные идеалы I [1]), т. е. те идеалы I, которые содержат цоколь S [2]) кольца R. Так как R/S прост, то $I = S$ или $I = R$. Если $I = S$ и f — морфизм категории mod-R, то он будет морфизмом категории mod-L, так как

$$[f(xa) - f(x)a]s = 0 \text{ для любых } s, x \in S, \ a \in L.$$

Поскольку W выделяется в L прямым слагаемым в категории mod-L, то он инъективен, поскольку инъективен L-модуль L, и, значит, f можно продолжить до отображения $L \to W$, которое индуцирует отображение $R \to W$, продолжающее f. Это доказывает, что W инъективен как правый R-модуль. Если W — простой правый R-модуль, не изоморфный простому модулю из S, то $WS = 0$ [3]) и, следовательно, $W \approx R/S$. Тогда W инъективен над R/S, откуда следует, что W инъективен над R (ср. 19.52 и далее). Это доказывает, что R — правое V-кольцо.

Для того чтобы доказать, что R не является левым V-кольцом, предположим, что V инъективен в категории R-mod и что $f\colon I \to V$ — морфизм категории L-mod, где I — левый идеал кольца L. Чтобы продолжить f, мы можем предположить, что I — существенный левый идеал, т. е. что $I \supseteq S$. Тогда f продолжается до морфизма f' категории R-mod и f' — морфизм в L-mod, так как

$$s[(ax)f' - a(x)f'] = 0 \text{ для любых } s \in S, \ x \in I, \ a \in L.$$

Но из этого вытекает, что V инъективен в категории L-mod, чего не может быть. Таким образом, R не является левым V-кольцом. (Этот факт вытекает также из теоремы автора [67a, стр. 103, теорема 3.1], из которой следует, что максимальное левое кольцо

---

[1]) Действительно, $f\colon I \to W$ всегда можно продолжать до отображения $f = f \oplus 0\colon I \oplus K \to W$, где K — дополнительный подмодуль модуля I в R, а $I \oplus K$ — существенный подмодуль в R.— *Прим. перев.*

[2]) S есть цоколь, так как он — единственный двусторонний идеал кольца R, а цоколь этого кольца не равен нулю.— *Прим. перев.*

[3]) Если $WS \neq 0$, то $wT \neq 0$ для некоторого $w \in W$ и какого-то простого правого модуля $T \subseteq S$. Но тогда $t \longmapsto wt$ задает ненулевой R-гоморфизм $f\colon T \to W$ простых R-модулей. Ясно, что t — изоморфизм. Противоречие.— *Прим. перев.*

частных кольца R является также правым кольцом частных. Это приводит к противоречию.)

19.48A. Следствие. *Если $L = \mathrm{End}_D V$ — кольцо всех линейных преобразований левого векторного пространства V, то оно содержит ненулевой инъективный правый идеал тогда и только тогда, когда V конечномерно.*

Доказательство. Если V конечномерно, то каждый L-модуль инъективен. Обратно, пусть $\dim_D V \geqslant \aleph_0$. Любой правый идеал $I \neq 0$ содержит минимальный правый идеал W. Так как $W \approx V$ в mod-L, то по 19.46B W не инъективен. Но W — прямое слагаемое в L, а следовательно, в I, значит, I не может быть инъективным. □

19.48B. Следствие. *Антисингулярное справа кольцо R канонически изоморфно кольцу биэндоморфизмов своего инъективного правого идеала $V \neq 0$ тогда и только тогда, когда оно самоинъективно справа и регулярно.*

Доказательство. Любое регулярное кольцо R антисингулярно (Джонсон [51]) и $R \approx \mathrm{End}_R R = \mathrm{Biend}\, R_R$. Обратное утверждение вытекает из последней части доказательства предложения 19.46B, где показано, что $R = \hat{R}$ самоинъективно справа. □

QI-кольца

Кольцо R называется **правым QI-кольцом**, если любой квазиинъективный правый R-модуль инъективен. Над этими кольцами все простые и полупростые правые модули инъективны, а значит, такое кольцо всегда будет правым V-кольцом (ср. 1, 7.32). [Кроме того, любое правое QI-кольцо нётерово справа (доказательство?).]

19.49. Пример. (a) Пусть $R = k[y, D]$ — кольцо дифференциальных многочленов над универсальным дифференциальным полем k, и пусть V — единственный простой правый R-модуль. Тогда по теореме Коззенса 7.40 модуль V инъективен в mod-R. Однако по теореме 19.46B V не инъективен в $L = \mathrm{Biend}\, V_R$, так как он бесконечномерен над $D = \mathrm{End}\, V_R$.

(b) R — *правое* QI-*кольцо*. Пусть Q — произвольный правый QI-модуль над R, и пусть E — его инъективная оболочка. В следующей главе мы докажем теорему 20.6, согласно которой можно записать $E = \sum_{i \in I} \oplus E_i$, где E_i для каждого $i \in I$ — неразложимый подмодуль. Поскольку $Q \cap E_i \neq 0$ для любого $i \in I$, можно ограничиться случаем, когда модуль E неразложим. В силу результатов Коззенса или $E = Q$ — простой модуль, или E — правое тело частных кольца R. Так как по 19.3 R-подмодуль Q вполне инвариантен в E, то Q — левый идеал в E. Поскольку E — тело, то и во втором случае $Q = E$.

(c) *Каждый квазиинъективный модуль над* $\boldsymbol{R}$ *является* $\prod$-*квазиинъективным.* Таким образом, R дает пример неартинова нётерова кольца, обладающего только что сформулированным свойством.

В QI-кольце A для каждого идеала B выполняется следующее условие:

(I) *Каждый инъективный правый (A/B)-модуль M инъективен как естественным образом определенный правый A-модуль.*

Это эквивалентно такому условию на идеал B:

(II) *Функтор включения* mod-$(A/B) \rightsquigarrow$ mod-A *сохраняет инъективные объекты.*

(III) Последнее условие обсуждалось в теоретико-категорной постановке, а именно:

19.50. Предложение *Если $T: C \rightsquigarrow D$ — функтор абелевых категорий, обладающий левым сопряженным $S: D \rightsquigarrow C$, и если C инъективно богата, то T сохраняет инъективные объекты тогда и только тогда, когда S точен.*

Доказательство. Это утверждение 6.28.

19.51A. Следствие. *Каждое из условий* (I) *и* (II) *эквивалентно требованию, чтобы A/B был плоским левым A-модулем. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функтор включения* mod-$(A/B) \rightsquigarrow$ mod-A *сохранял инъективные оболочки простых правых (A/B)-модулей.*

Доказательство. Первое утверждение следует из 19.50 и 5.59.4 т. 1. Оттуда же вытекает и необходимость во втором утверждении. Предположим теперь, что функтор включения mod-$(A/B) \rightsquigarrow$ mod-A сохраняет инъективные оболочки простых правых (A/B)-модулей. Если M — инъективный правый (A/B)-модуль, то он вкладывается в некоторое произведение E^I какого-то множества экземпляров произвольного инъективного кообразующего E категории mod-(A/B). В силу инъективности модуля M имеем $E^I = M \oplus X$ для некоторого правого (A/B)-модуля X. Выберем в качестве E произведение $\prod_{j \in J} \hat{V}_j$, где $\{V_j\}_{j \in J}$ — полный набор представителей простых правых (A/B)-модулей, а $\hat{V}_j$ — инъективная оболочка модуля V_j. Тогда E является произведением инъективных правых A-модулей в категории mod-A, а значит, E инъективен в этой категории. Но тогда в категории mod-A

инъективен модуль E^I и M инъективен как его прямое слагаемое, т. е. функтор включения сохраняет инъективные объекты. □

19.51B. Следствие. *Если A — правое V-кольцо, то A/B — плоский левый A-модуль для любого идеала B.* □

19.52. Предложение. *Если R — регулярное кольцо и A — его произвольный идеал, то каждый инъективный правый (R/A)-модуль инъективен как канонически определенный правый R-модуль. Если R — коммутативное кольцо, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Если R регулярно, то, согласно 11.24. любой R-модуль является плоским. Поэтому достаточно применить следствие 19.51A. Обратно, если R коммутативно, то по тому же следствию R/A — плоский R-модуль для любого идеала A, т. е. плоским оказывается каждый циклический модуль, а значит, R — регулярное кольцо (19.24). □

19.53. Следствие (Капланский). *Коммутативное кольцо A регулярно тогда и только тогда, когда оно есть V-кольцо.*

Доказательство. Предположим, что A регулярно, и пусть $V = A/M$ — простой A-модуль. Тогда V инъективен над A/M и, следовательно, по 19.52 над A. Таким образом, A есть V-кольцо. Обратно, предположим, что A является V-кольцом, и пусть B — его произвольный идеал. Если V — произвольный простой (A/B)-модуль, то он инъективен над A и, следовательно, над A/B. Это доказывает, что функтор включения mod-$(A/B) \rightsquigarrow$ mod-A сохраняет инъективные оболочки простых (A/B)-модулей, а значит, A/B — плоский A-модуль по 19.51A и, следовательно, A регулярно согласно 19.52. □

Характеризация первичных колец Голди

Напомним (см. гл. 9), что R называется правым кольцом Голди, если оно удовлетворяет условию максимальности для дополнительных правых идеалов (т. е. условию максимальности для прямых сумм правых идеалов) и условию максимальности для правых аннуляторных идеалов. По теореме Голди и Лезье — Круазо кольца, обладающие простыми артиновыми правыми кольцами частных,— это в точности первичные правые кольца Голди (теорема 9.9). В гл. 16 мы привели для этой теоремы доказательство Габриеля. Здесь мы дадим другое доказательство этого факта и укажем еще одну характеризацию таких колец.

19.54. Теорема (Фейс [72b]). *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R — первичное правое кольцо Голди;*

(b) *R обладает простым артиновым (классическим) правым кольцом частных $Q(R)$;*

(c) *R обладает точным эндоконечным неразложимым инъективным правым R-модулем E, не имеющим нетривиальных вполне инвариантных подмодулей, и $D = \operatorname{End} E_R$ — тело.*

Когда это так, то $Q(R) \approx \operatorname{End}_D E$, а E изоморфен в категории mod-$Q(R)$ минимальному правому идеалу кольца $Q(R)$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему, не ссылаясь на теорему Голди и Лезье — Круазо.

(c)⇒(b). Пусть $n = \dim_D E$. Тогда $A = \operatorname{End}_D E$ — полное кольцо матриц D_n над телом D. Кроме того, существует каноническое вложение правого A-модуля E в A. Поскольку E — простой правый A-модуль, это минимальный правый идеал кольца A. Так как E точен в категории mod-R, то R канонически вкладывается в A. Поскольку mod-A содержит единственный (с точностью до изоморфизма) простой правый A-модуль, а каждый правый A-модуль полупрост, то $A \approx E^n$ в mod-A. Запишем E^n в виде прямой суммы $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ изоморфных A-подмодулей A-модуля A. Если, например, $R \cap E_1 = 0$, то проекция $E^n \to E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$ изоморфно (в категории mod-R) отображает R в E^{n-1}, а это в силу доказательства предложения 19.15 показывает, что последовательность $D^{n-1} \to E \to 0$ точна в категории D-mod в противоречии с предположением, что $\dim_D E = n$. Таким образом, если $U_i = R \cap E_i$, $i = 1, \ldots, n$, то R содержит существенный [1]) R-подмодуль $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ модуля $A = E^n$. Это доказывает, что правый R-модуль A — инъективная оболочка модуля R в mod-R. По теореме Крулля — Шмидта, примененной к E^n, это показывает, что R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов, содержащихся в R. Кроме того, любое подкольцо нётерова справа кольца удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, а значит, мы доказали, что R — правое кольцо Голди. (Заметим, что вместе с первичностью, доказываемой ниже, это дает (a).)

Запишем $E = eA$ для некоторого идемпотента $e \in A$. Тогда $D \approx eAe$. Пусть I — произвольный правый идеал кольца R. Как уже доказано, можно считать, что I лежит в $E^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$. Следовательно, существует ненулевой морфизм R-модулей $\pi\colon E^n \to E$, такой, что $\pi(I) \neq 0$. Ясно, что $D\pi(I)$ — ненулевой

[1]) Нетрудно показать, что если $A = \sum_{i \in I} \oplus A_i$ и $A_i \rhd B_i$, то $A \rhd B = \sum_{i \in I} B_i$.— *Прим. перев.*

левой вполне инвариантный подмодуль R-модуля E, т. е. $D\pi(I) = E$. Выберем $x_1, \ldots, x_n \in I$ так, что $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$ — базис D-пространства E. Если $r \in I^{\perp}$, то $\pi(x_k)r = \pi(x_k r) = 0$ для всех k, а значит, $r \in E^{\perp}$. Ввиду точности R-модуля E $r = 0$. Следовательно, $I^{\perp} = 0$. *Таким образом*, (R первично и) *вкладывается как правый R-модуль* [с помощью гомоморфизма $r \mapsto (x_1 r, \ldots, x_n r)$] *в прямую сумму I^n n экземпляров произвольного ненулевого правого идеала I*. Далее, если H — существенный правый идеал кольца R, то $V_i = E_i \cap H \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, а значит, H содержит прямую сумму $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ однородных правых идеалов. Кроме того, поскольку R первично, $V_i V_1 \neq 0$ для любого i. Выберем $y_i \in V_i$ так, что $y_i V_1 \neq 0$. Тогда идеал V_1 вкладывается в V_i с помощью гомоморфизма $v \mapsto y_i v$, поскольку из равенства $y_i v = 0$ для некоторого ненулевого $v \in V_1$ следует, что $y_i E_1 = 0$. Действительно, если $y_i v = 0$, где $0 \neq v \in V_1 \subseteq E_1$, то, как уже показано, можно считать, что y_1, $v \in A$. Теперь, вспоминая, что E_1 — минимальный правый идеал кольца A, для любого $x \in E_1$ при некотором $a \in A$ имеем $y_i x = y_i(va) = (y_i v)a = 0$, т. е. $y_i E_1 = 0$. В частности, $y_i V_1 = 0$. Тем самым доказано, что H содержит прямую сумму V правых идеалов, изоморфных идеалу $V = V_1$, а значит, что R вкладывается в H как правый R-модуль. Поэтому любой существенный правый идеал H кольца R содержит элемент x, правый аннулятор которого в кольце R равен нулю. Но в силу того, что R существен в A, правый аннулятор элемента x в A тоже равен нулю. Однако в артиновом кольце A из этого вытекает обратимость элемента x (а следовательно, регулярность элемента x в R). Аналогичным образом, любой регулярный элемент из R обратим в A.

Из этого непосредственно следует, что A — правое кольцо частных кольца R. Если q — произвольный элемент из A, то поскольку R — существенный R-подмодуль в A, правый идеал $(q : R)$ существен в R и, значит, содержит регулярный элемент x. Таким образом, $q = ax^{-1}$, где $a = qx \in R$, и это доказывает, что A совпадает с правым кольцом частных $Q(R)$ кольца R.

(a) $\Rightarrow$ (c). В силу условия обрыва возрастающих цепей дополнительных правых идеалов (или, что эквивалентно, условию максимальности для прямых сумм правых идеалов, содержащихся в R) R содержит однородный правый идеал, причем его можно выбрать так, чтобы он был правым дополнительным идеалом U для некоторого максимального дополнительного правого идеала. (Тогда U — минимальный дополнительный правый идеал. Ср. 1, 7.17.)

Утверждение. *Инъективная оболочка $E = \hat{U}$ произвольного однородного правого идеала U кольца R является таким модулем, существование которого утверждается в п.* (c).

Доказательство утверждения. Покажем сначала, что правый сингулярный идеал Z кольца R является ниль-идеалом. Если $x \in Z$, то существует целое число n, такое, что элементы $y = x^n$, $x^{n+1}, \ldots, x^{2n}$ имеют один и тот же правый аннулятор. Отсюда следует, что $y^{\perp} \cap yR = 0$, откуда $y = x^n = 0$. Далее, если N — левый ниль-идеал, содержащийся в Z, то по доказательству 9.7 ненулевой элемент $a \in N$, такой, что $a^{\perp}$ — максимальный элемент множества $\{x^{\perp} \mid 0 \neq x \in N\}$, порождает нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant 3$. Тогда из (полу)первичности кольца R следует, что $N = 0$ и $Z = 0$.

Далее, существует такое целое n, что R содержит существенный [1]) правый идеал $W = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, где $U_i \approx U$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, инъективная оболочка E^n модуля U^n совпадает с инъективной оболочкой $\hat{R}$ модуля R. Имеем $\operatorname{End} E^n_R = B_n$, где $B = \operatorname{End} E_R$. Поскольку E^n инъективен, радикал J кольца B_n состоит из элементов b с существенными ядрами (теорема Утуми 19.27). Так как $R \subseteq E^n$ и $b \in J$, то $x = b(1) \in E^n$ принадлежит сингулярному подмодулю S модуля E^n. Но $S = 0$, поскольку R — существенный подмодуль с нулевым сингулярным подмодулем. Тогда $\ker b \supseteq R$, и если $y \in E^n$, то найдется существенный правый идеал I, такой, что $yI \subseteq R$ и $b(y)I = 0$, так что $b(y) \in S = 0$. Таким образом, $b = 0$ и, значит, B_n, а следовательно, и B — кольца с нулевым радикалом. Поскольку B — локальное кольцо, то оно должно быть телом. Итак, из включения $R \subseteq E^n$ следует, что $n = \dim_B E$ (19.15), а потому $A = \operatorname{End}_B E$ канонически изоморфно кольцу B_n. Кроме того, E^n, изоморфное как A-модуль модулю A, является существенным расширением модуля R в категории R-модулей, и тогда из доказательства следующего предложения вытекает, что E не имеет нетривиальных вполне инвариантных подмодулей. Этим завершается доказательство нашего утверждения, а также импликации (a) $\Rightarrow$ (c).

Теперь (c) $\Rightarrow$ (a) доказано [при доказательстве импликации (c) $\Rightarrow$ (b)], а (b) $\Rightarrow$ (c) вытекает из следующего предложения,

[1]) Действительно, поскольку R не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов, то по 4.19 (1, стр. 260) R содержит существенный правый идеал $W' = U_1' \oplus \ldots \oplus U_n'$, где U_i' — однородные правые идеалы. Поскольку R первично, то $U_i' U \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому каждый из U_i' содержит элемент x_i, такой, что $x_i U \neq 0$. Тогда умножение слева на элемент x_i задает ненулевой гомоморфизм f_i правого идеала U на подмодуль $x_i U$ модуля U_i'. Поскольку R антисингулярно справа, $\ker f_i = 0$. (Если $\ker f_i \neq 0$, то он является в силу однородности модуля U его существенным подмодулем. Но тогда $U / \ker f_i \approx \operatorname{im} f_i = x_i U$ — сингулярный R-модуль, что противоречит антисингулярности модуля R_R.) Таким образом, U изоморфен существенному подмодулю $x_i U$ модуля U_i'. Но тогда $W = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, где $U_i = x_i U$.— *Прим. перев.*

значит, эквивалентность условий (a), (b) и (c) будет доказана, когда мы докажем следующее утверждение. □

19.55A. Предложение. *Пусть R — кольцо с простым артиновым (классическим) правым кольцом частных Q. Пусть E — минимальный правый идеал в Q. Тогда E — единственный (с точностью до изоморфизма) эндоконечный неразложимый инъективный точный правый R-модуль. Кроме того, E не имеет нетривиальных вполне инвариантных R-подмодулей.*

Доказательство. По теореме Веддербёрна 7.7 $Q \approx \approx \operatorname{Biend} E_Q$. Пусть $D = \operatorname{End} E_Q$ и $n = \dim_D E$. Поскольку кольцо Q артиново, то n — конечное число. Так как $D = \operatorname{End} E_R$ (на самом деле $Q = \operatorname{End} Q_R$), то правый R-модуль E эндоконечен. Поскольку Q — инъективная оболочка R-модуля R, а E — прямое слагаемое в Q, то E — инъективный точный правый R-модуль. Кроме того, E неразложим в категории mod-R, так как любое прямое слагаемое модуля E в категории R-модулей является его прямым слагаемым в категории Q-модулей.

Пусть H — ненулевой вполне инвариантный R-подмодуль модуля E, и представим E в виде $H \oplus G$, где G — некоторый D-подмодуль модуля E. Пусть $g \in Q$ — идемпотент, который индуцирует в категории D-модулей проекцию E на H с ядром G. Имеем $Eg = H$ и $H(1 - g) = 0$. Поскольку H есть R-подмодуль, то $gr = grg$ для любого $r \in R$, т. е. $gR(1 - g) = 0$. Но тогда $(gR \cap R)((1 - g)R \cap R) = 0$. Так как $H \neq 0$, то $g \neq 0$ и $gR \cap R \neq \neq 0$, а значит, из первичности R следует, что $g = 1$. Таким образом, $H = E$ и E не имеет нетривиальных вполне инвариантных подмодулей.

Тот факт, что любой эндоконечный точный неразложимый инъективный правый R-модуль F изоморфен E, вытекает из того, что $R \hookrightarrow F^m$ для некоторого целого $m > 0$ в силу 19.15, а следовательно, E вкладывается в качестве прямого слагаемого в F^m, поэтому $E \approx F$ по теореме 18.18 Крулля — Шмидта. □

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 19.54.

19.55B. Теорема. *Кольцо R обладает классически полупростым (классическим) правым кольцом частных тогда и только тогда, когда R — полупервичное кольцо, содержащее конечное точное множество*[1] *$\{E_1, \ldots, E_n\}$ неразложимых эндоконечных инъективных правых R-модулей, ни один из которых не имеет нетривиальных вполне инвариантных подмодулей и кольца эндоморфизмов которых являются телами.*

[1]) То есть $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{ann}_R E_i = 0$.— *Прим. перев.*

Условия теоремы эквивалентны существованию точного эндоконечного инъективного модуля F, такого, что $\operatorname{End} F$ *является произведением n тел (n — конечное число), а F содержит точно n вполне инвариантных неразложимых подмодулей, отличных от нуля.*

Первичное кольцо может иметь эндоконечные неразложимые инъективные модули, не являющиеся точными, но не быть правым кольцом Голди, как показывает, в частности, пример 19.47 регулярного V-кольца R, так как простой модуль $W = R/S$ инъективен и одномерен над своим кольцом эндоморфизмов R/S.

Правый идеал I кольца R называется **конеприводимым**, если R/I — однородный правый модуль.

19.56A. Следствие. *Если R — правое QI-кольцо, а I — такой конеприводимый правый идеал, что модуль $\widehat{R/I}$ эндоконечен, то I — максимальный дополнительный правый идеал.*

Доказательство. Любое правое QI-кольцо нётерово справа и является правым V-кольцом, а значит, полупервично (1, 7.32C) и обладает классически полупростым классическим правым кольцом частных Q. Кроме того, по 19.55A каждый эндоконечный неразложимый инъективный правый R-модуль E вкладывается в Q. Таким образом, $E = \widehat{R/I}$ вкладывается в Q с помощью гомоморфизма f, такого, что I — правый аннулятор элемента $x = f[1 + I]$ в кольце R. Поскольку Q классически полупросто, правый аннулятор элемента x в Q является главным правым идеалом eQ, т. е. дополнительным правым идеалом кольца Q, и, следовательно, $I = eQ \cap R$ — дополнительный правый идеал кольца R. Ясно, что I — максимальный правый дополнительный идеал. □

19.56B. Замечания. (a) Более общим образом, если R — любое антисингулярное справа кольцо с кольцом частных $\hat{R}$, то циклический модуль R/I вкладывается в $\hat{R}$ тогда и только тогда, когда I — дополнительный правый идеал.

(b) Если R — полупервичное правое кольцо Голди, то полурефлексивный модуль M квазиинъективен справа тогда и только тогда, когда он инъективен. Это происходит потому, что в этом случае на M каноническим образом определяется структура правого $Q = Q(R)$-модуля, и, следовательно, $\hat{M}$ — прямая сумма эндоконечных неразложимых инъективных правых R-модулей, каждый из которых канонически изоморфен правому главному неразложимому модулю кольца Q. Но правый главный неразложимый модуль E кольца Q не имеет вполне инвариантных подмодулей, как показывает 19.55A. □

Первичные идеалы в самоинъективных регулярных кольцах

В этом разделе мы докажем важный результат Гудёрла [73b] о структуре первичных идеалов в самоинъективных регулярных кольцах. Вот простейшие примеры неартиновых, а значит, не являющихся классически полупростыми регулярных самоинъективных колец: кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного правого векторного пространства V над телом D и максимальное правое кольцо частных области целостности, не являющейся областью Оре. В любом из этих случаев структура идеалов линейно упорядочена. Теорема Гудёрла устанавливает, что идеалы регулярного самоинъективного справа кольца, содержащие некоторый первичный идеал, линейно упорядочены. Усиленный вариант этой теоремы, утверждающий, что идеалы такого кольца, содержащие замкнутый первичный идеал, вполне упорядочены, доказывается в следующем разделе. В качестве следствия устанавливается, что гипотеза Капланского о примитивности первичных регулярных колец справедлива для самоинъективных колец.

Условимся говорить, что идеал I самоинъективного справа кольца R **замкнут (существен)**, если он является замкнутым (существенным) как правый идеал.

19.57А. Лемма. *Пусть R — самоинъективное справа регулярное кольцо. Тогда любой ненулевой замкнутый идеал I является кольцом и прямым сомножителем кольца R, т. е. $R = I \times K$ (как кольцо) для некоторого идеала K.*

Доказательство. По теореме 3.59 (**1**, стр. 220) кольцо R содержит инъективную оболочку идеала I, которая в силу его замкнутости совпадает с ним самим. Запишем $R = I \oplus K$, где K — некоторый правый идеал. Тогда $KI \subseteq K \cap I = 0$, так что $KI = 0$ и $(IK)^2 = 0$, а в полупервичном кольце $IK = 0$. Таким образом, K — двусторонний идеал и $R = I \times K$ как кольцо. (Ср., например, китайскую теорему об остатках 18.31.) □

19.57В. Следствие. *Самоинъективное справа регулярное кольцо R неразложимо в прямую сумму в категории* RINGS *тогда и только тогда, когда R — первичное кольцо.*

Доказательство. Любое первичное кольцо неразложимо в прямую сумму колец. Обратно, если самоинъективное справа кольцо R неразложимо в прямую сумму в категории RINGS, то по лемме 19.57А каждый ненулевой идеал I кольца R должен быть существенным правым идеалом, ибо в противном случае замыкание I' идеала I в R было бы прямым сомножителем кольца R и $I' \neq R$ — противоречие. □

Как отмечено в упражнении 19.21(q), в любом кольце R первичный идеал P или существен, или является правым аннуляторным идеалом. В самоинъективном справа кольце правые аннуляторные идеалы в общем случае не обязательно замкнуты. Однако

19.58. *В самоинъективном справа регулярном кольце R первичный идеал P или существен, или замкнут.*

Доказательство. Отметим сначала, что замыкание H идеала P в R [т. е. максимальное существенное расширение идеала P в R_R или, иначе говоря, единственная инъективная оболочка идеала P в R_R (19.33(c), 19.32(d))] есть идеал. Пусть $x \in R$. Достаточно доказать, что $xH + P$ — существенное расширение идеала P, так как P имеет в R единственную инъективную оболочку. Пусть $y = xh + p$ — произвольный элемент из $xH + P$, $h \in H$, $p \in P$. Мы должны показать, что если $y \neq 0$, то $yR \cap P \neq 0$. Если $xh = 0$, то все доказано. В противном случае $h \neq 0$ и найдется существенный правый идеал J, такой, что $hJ \subseteq P$. Тогда $yJ \subseteq xhJ + pJ \subseteq P$, так как P — идеал. Кроме того, $yJ \neq 0$, поскольку $\operatorname{sing} R = 0$ в силу 19.35. Это доказывает, что $xH + P \subseteq H$ и $xH \subseteq H$, т. е. H — двусторонний идеал. Если $H \neq R$, то по 19.57А $R = H \times K$ для некоторого ненулевого идеала K и $HK = 0$. В силу первичности идеала P имеем $H \subseteq P$, т.е. $P = H$ — замкнутый идеал. □

Следующая лемма доказывается в большей общности, чем это необходимо для теоремы о линейной упорядоченности идеалов, но (как заметил Гудёрл) ее можно использовать при доказательстве его теоремы 19.64 о полной упорядоченности идеалов.

Сделаем сначала такое замечание: любой конечно порожденный правый идеал в самоинъективном справа регулярном кольце R порожден идемпотентом (19.24), а следовательно, выделяется в R прямым слагаемым; значит, он проективен и инъективен.

19.59. Определение и предложение. *Скажем, что модуль M субизоморфен, или, для краткости,* ***субморфен****, модулю A, если он вкладывается в A. Если M вкладывается в конечное произведение A^n, то говорят, что он* ***n-субморфен*** *модулю A.*

Если A — правый идеал самоинъективного справа регулярного кольца R, то правый идеал xR, где $x \in R$, n-субморфен правому идеалу A в том и только том случае, когда x принадлежит двустороннему идеалу RA, порожденному A.

Доказательство. Если $x \in RA$, то $x \in r_1A + \ldots + r_nA$ для некоторых элементов $r_i \in R$. Если B — прямая сумма n экземпляров идеала A, то существует гомоморфное наложение модуля B на $r_1A + \ldots + r_nA$. Поскольку модуль xR проективен, отсюда следует, что он вкладывается в B.

Обратно, предположим, что xR вкладывается в $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где каждое A_i — экземпляр правого идеала A. Поскольку xR инъективен, должно существовать гомоморфное наложение $f: A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to xR$. Из инъективности модуля R_R мы выводим, что каждое из отображений $A_i \to A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to xR$ задается умножением слева на некоторый элемент $r_i \in R$. Тогда существуют элементы $a_i \in A$, такие, что $x = f(a_1, \ldots, a_n) = r_1a_1 + \ldots + r_na_n$. □

19.60. Лемма. *Любой конечно порожденный антисингулярный модуль M над самоинъективным справа регулярным кольцом инъективен и проективен.*

Доказательство. Как мы уже заметили, любой конечно порожденный правый идеал обладает этим свойством. Пусть x — один из образующих модуля M. Правый аннулятор элемента x — это правый идеал I, содержащийся в качестве существенного подмодуля в некотором правом идеале eR, $e = e^2 \in R$. Далее, последовательность

$$0 \to eR/I \to R/I \to R/eR \to 0$$

точна и модуль $R/eR \approx (1 - e)R$ проективен, а значит, эта последовательность расщепляется и eR/I выделяется прямым слагаемым в антисингулярном модуле $R/I \approx xR$. Так как eR/I — сингулярный модуль, то $I = eR$ и, следовательно, xR проективен и инъективен. Индукцией по числу образующих нетрудно доказать, что модуль M также инъективен и проективен. □

19.61. Лемма. *Пусть кольцо R регулярно и самоинъективно справа. Для любых антисингулярных инъективных правых R-модулей A и B существует центральный идемпотент $e \in R$, такой, что модуль Ae субморфен модулю Be, а $B(1 - e)$ субморфен $A(1 - e)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность всех пар (C, D), где $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ и $C \approx D$. Семейство $\{(C_i, D_i)\} \subseteq \mathcal{A}$ называется *независимым*, если $\{C_i\}$ — независимое семейство подмодулей модуля A, а $\{D_i\}$ — независимое семейство подмодулей модуля B. Выбрав максимальное независимое семейство $\{(C_i, D_i)\} \subseteq \mathcal{A}$, мы получим разложения $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, в которых A_1 является инъективной оболочкой модуля $\sum \oplus C_i$, а B_1 — инъективной оболочкой модуля $\sum \oplus D_i$. Поскольку $C_i \approx D_i$, то $A_1 \approx B_1$. В силу максимальности семейства $\{(C_i, D_i)\}$ ни один ненулевой подмодуль модуля A_2 не может быть субморфен модулю B_2.

Поскольку A антисингулярен, то аннуляторный идеал $H = \{r \in R \mid A_2r = 0\}$ замкнут. В силу леммы 19.57А идеал H должен совпадать с eR для некоторого центрального идемпотента $e \in R$. Тогда $Ae = A_1e \approx B_1e \subseteq Be$. Следовательно, Ae субморфен Be.

Мы утверждаем, что $B_2(1 - e) = 0$. Предположим, что, напротив, существует ненулевой элемент $x \in B_2(1 - e)$. Тогда xR проективен по 19.60. Значит, $xR \approx tR$ для некоторого идемпотента $t \in R$, и мы установили, что $te = 0$. Поскольку $t \neq 0$ (ведь $x \neq 0$), то $t \notin H$, а следовательно, $yt \neq 0$ для некоторого $y \in A_2$. Отсюда вытекает проективность модуля ytR (по 19.60) и существование гомоморфного наложения $xR \approx tR \to ytR$. Поэтому должно существовать вложение $ytR \to xR$. Но в этом случае ytR был бы ненулевым подмодулем модуля A_2, субморфным модулю B_2, что невозможно.

Таким образом, $B_2(1 - e) = 0$, откуда $B(1 - e) = B_1(1 - e) \approx A_1(1-e) \subseteq A(1 - e)$, а значит, $B(1 - e)$ субморфен $A(1 - e)$. □

19.62. Теорема. *Пусть кольцо R регулярно и самоинъективно справа, а P — его собственный идеал. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *P первичен.*

(b) *Для любого центрального идемпотента $e \in R$ или $e \in P$, или $1 - e \in P$.*

(c) *Идеалы кольца R, содержащие P, линейно упорядочены по включению.*

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если эта импликация неверна, то мы можем так выбрать в кольце R два идеала H и K, содержащие P, что найдется элемент x, лежащий в $H - K$, и элемент y, лежащий в $K - H$. Согласно лемме 19.61 [1]), существует центральный идемпотент $e \in R$, такой, что xRe субморфен yRe, а $yR(1 - e)$ субморфен $xR(1 - e)$. Если $e \in P$, то $yRe \subseteq P \subseteq H$ и $xR(1 - e) \subseteq H$, а значит, yR 2-субморфен модулю H. Однако тогда по 19.59 имеем $y \in H$, но это не так. Аналогично, если $1 - e \in P$, то $x \in K$, что неверно. Таким образом, ни e, ни $1 - e$ не принадлежат P, что противоречит п. (b).

(c) $\Rightarrow$ (a). Если I, J — идеалы кольца R, строго содержащие P, то по (c) мы без потери общности можем предполагать, что $I \subseteq J$. Поскольку R регулярно, $I^2 = I \nsubseteq P$, а следовательно, $IJ \nsubseteq P$. □

19.63. Следствие. *Если P — первичный идеал кольца R, то любой собственный идеал этого кольца, содержащий P, также первичен.* □

---

[1]) Здесь 19.61 применяется к инъективным оболочкам правых идеалов xR и yR.— *Прим. перев.*

Вполне упорядоченные структуры идеалов

Как и в теореме о соответствии (1, стр. 249), (идеалы R) обозначает структуру идеалов кольца R. Если R — кольцо всех линейных преобразований векторного пространства V над телом D, а $\dim_D V$ — бесконечное кардинальное число a, то идеалы кольца R — это или 0, или идеалы вида

$$\{t \in R \mid \operatorname{rank} t < b\}$$

для всех бесконечных кардинальных чисел b, не превосходящих $a+1$. Таким образом, структура идеалов кольца R вкладывается в структуру всех кардинальных чисел, не превосходящих $a+1$, и, значит, вполне упорядочена.

В настоящем разделе этот результат обобщается:

19.64. Теорема (Гудёрл [73b]). *Пусть R — самоинъективное справа регулярное кольцо, а P — его замкнутый первичный идеал. Тогда идеалы кольца R/P вполне упорядочены. Если R первично, т. е. $P=0$, то каждый идеал этого кольца изоморфен идеалу $H(\alpha)$ для некоторого бесконечного кардинала α, где*

$$H(\alpha) = \{0\} \cup \{x \in R \mid xR \not\approx E[\alpha(xR)]\},$$

здесь $E[A]$ означает инъективную оболочку модуля A, а $\alpha(A)$ — прямую сумму α экземпляров этого модуля [1]).

Мы отложим доказательство этой теоремы и установим пока некоторые промежуточные результаты. Прежде всего по 19.57A существует кольцевое разложение $R = P \times K$, где R/P — регулярное самоинъективное справа кольцо. Следовательно, мы можем предполагать без потери общности, что $P=0$. Это предположение о первичности кольца R остается в силе, пока теорема 19.64 не будет доказана.

Заметим, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $H(\alpha) \subseteq H(\beta)$. Действительно, если $x \in R - H(\beta)$, то

$$xR \approx E[\beta(xR)] = E[\alpha\beta(xR)] \approx E[\alpha(E[\beta(xR)])] \approx E[\alpha(xR)],$$

а значит, $x \notin H(\alpha)$.

В силу предположения о первичности кольца R лемма 19.61 принимает следующую более сильную форму:

19.64A. *Если A и B — антисингулярные инъективные модули, то или A субморфен B, или B субморфен A.*

Приведем для удобства ссылок предложение 3.60 (т. 1, стр. 221):

19.64B. *Любые два инъективных модуля, каждый из которых субморфен другому, должны быть изоморфны.*

[1]) Раньше для этого автор использовал обозначение $A^{(\alpha)}$.— *Прим. перев.*

19.64C. *Пусть B — антисингулярный инъективный модуль, а α — кардинальное число. Если B имеет ненулевой подмодуль C, такой, что $C \approx E[\alpha(C)]$, то $B \approx E[\alpha(B)]$.*

Доказательство. Мы, очевидно, можем предположить, что $\alpha > 1$. Положим $\mathcal{A} = \{A \subseteq B \mid A \approx E[\alpha(A)]\}$ и расширим $\{C\}$ до максимального независимого семейства $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$. Тогда $B = E[\sum \oplus A_i] \oplus D$ для некоторого D, и из максимальности семейства $\{A_i\}$ следует, что D не содержит ненулевых подмодулей, лежащих в $\mathcal{A}$. Поскольку C — ненулевой подмодуль модуля $E[\sum \oplus A_i]$, принадлежащий семейству $\mathcal{A}$, то $E[\sum \oplus A_i]$ не может быть субморфен модулю D. Тогда, согласно 19.64A, D должен быть субморфен $E[\sum \oplus A_i]$, а значит, B должен быть 2-субморфен $E[\sum \oplus A_i]$. Поскольку $\alpha > 1$, то $A_i \approx 2(A_i)$ для любого i, откуда $E[\sum \oplus A_i] \approx 2(E[\sum \oplus A_i])$. Таким образом, B субморфен $E[\sum \oplus A_i]$, а потому в силу 19.64B мы получаем, что $B \approx E[\sum \oplus A_i]$, откуда следует, что $B \approx E[\alpha(B)]$.

19.64D. *Пусть A — антисингулярный инъективный модуль, изоморфный своему собственному подмодулю. Тогда $A \approx 2(A) \approx E[\aleph_0(A)]$.*

Доказательство. Существует вложение $g\colon A \to A$, не являющееся эпиморфизмом. Так как gA изоморфен A, а значит, инъективен, то $A = gA \oplus B$ для некоторого ненулевого B, и тогда $g^nA = g^{n+1}A \oplus g^nB$ для всех положительных целых n. Значит, $\{gB, g^2B, \ldots\}$ — бесконечная независимая последовательность попарно изоморфных подмодулей модуля A. Следовательно, подмодуль $G = \sum \oplus g^nB$ изоморфен $2(G) \approx \aleph_0(G)$. Модуль A должен содержать инъективную оболочку C модуля G, и ясно, что $C \approx 2(C) \approx E[\aleph_0(C)]$. Из 19.64C теперь следует, что $A \approx 2(A) \approx E[\aleph_0(A)]$.

Из 19.64D легко вытекает, что если A — произвольный ненулевой антисингулярный инъективный модуль, то $A \approx 2(A)$ тогда и только тогда, когда $A \approx E[\aleph_0(A)]$. Значит,

$$H(\aleph_0) = \{0\} \cup \{x \in R \mid xR \not\approx 2(xR)\}.$$

19.64E. *Если A, B, C, D — антисингулярные инъективные модули и $A \oplus B \approx C \oplus D$, то существуют разложения $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, такие, что $A_1 \oplus B_1 \approx C$ и $A_2 \oplus B_2 \approx D$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что C — замкнутый подмодуль модуля $A \oplus B$ и что $D = (A \oplus B)/C$.

Пусть $p_1\colon A \oplus B \to A$ и $p_2\colon A \oplus B \to B$ — проекции. Так как $A_1 = A \cap C$ — замкнутый подмодуль в A, A_1 инъективен и $A = A_1 \oplus A_2$ для некоторого A_2. Кроме того, имеет место точная последовательность $0 \to A_1 \to C \to p_2C \to 0$, которая расщепляется, поскольку A_1 инъективен. Положив $B_1 = p_2C$, получаем $C \approx A_1 \oplus B_1$. Так как B_1 инъективен, то должно быть $B = B_1 \oplus B_2$ для некоторого B_2.

Заметим, что $B_1 = (1 - p_1)C \subseteq C + A$, откуда $B \subseteq C + A + B_2$ и, значит, $C + A + B_2 = A \oplus B$. Кроме того, $A = A_1 \oplus A_2 \subseteq C + A_2$. Следовательно, $C + A = C + A_2$, откуда $A \oplus B = C + A_2 + B_2$.

Положим теперь $F = C \cap (A_2 + B_2)$. Так как $p_2C = B_1$ и $p_2(A_2 + B_2) = B_2$, то $p_2F \subseteq B_1 \cap B_2 = 0$ и, следовательно, $F \subseteq A$. Поэтому $F \subseteq A \cap C = A_1$, так что $p_1F \subseteq A_1$. Кроме того, $p_1F \subseteq p_1(A_2 + B_2) = A_2$, откуда $p_1F \subseteq A_1 \cap A_2 = 0$. Поскольку $F \subseteq A$, то $F = 0$.

Таким образом, $A \oplus B = C \oplus (A_2 \oplus B_2)$ и, значит, $D = (A \oplus B)/C \approx A_2 \oplus B_2$.

19.64F. *Пусть A, B, C — антисингулярные инъективные модули, такие, что $A \not\approx 2(A)$. Если $A \oplus B \approx A \oplus C$, то $B \approx C$.*

Доказательство. Согласно 19.64E, существуют разложения $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, такие, что $A_1 \oplus B_1 \approx A$ и $A_2 \oplus B_2 \approx C$. По 19.64A или A_2 субморфен B_1, или B_1 субморфен A_2.

Если модуль A_2 изоморфен собственному подмодулю модуля B_1, то $A = A_1 \oplus A_2$ изоморфен собственному подмодулю модуля $A_1 \oplus B_1 \approx A$, что противоречит 19.64D. Такое же противоречие возникает, если предположить, что B_1 изоморфен собственному подмодулю модуля A_2. Значит, остается единственная возможность $A_2 \approx B_1$.

Таким образом, $B = B_1 \oplus B_2 \approx A_2 \oplus B_2 \approx C$. □

19.65. Предложение. *$H(\alpha)$ является идеалом кольца R для любого бесконечного кардинального числа α.*

Доказательство. *Случай* I. $\alpha = \aleph_0$. Если $H(\alpha)$ не является двусторонним идеалом, то существуют $x, y \in H(\alpha)$ и $z \in (RxR + RyR) - H(\alpha)$. Согласно 19.62, мы можем предположить, что $RxR \subseteq RyR$, а следовательно, $z \in RyR$. Отметим, что $z \neq 0$ и $y \neq 0$. Далее, $zR \approx 2(zR)$, и из 19.59 мы получаем, что zR субморфен модулю $n(yR)$ для некоторого положительного целого n, откуда по 19.64C получаем $n(yR) \approx 2n(yR)$. Однако $yR \not\approx 2(yR)$ и по индукции, основанной на 19.64F, мы получаем противоречие $0 \approx n(yR)$.

Случай II. $\alpha > \aleph_0$. Пусть $x, y \in H(\alpha)$ и $z \in RxR + RyR$. Мы должны доказать, что $z \in H(\alpha)$. Согласно теореме 19.62, мы можем предположить, что $RxR \subseteq RyR$, и, следовательно, $z \in RyR$. Если $y \in H(\aleph_0)$, то $z \in H(\aleph_0) \subset H(\alpha)$ по случаю I. Значит, нам нужно лишь рассмотреть возможность $y \notin H(\aleph_0)$. Таким образом, $y \neq 0$ и $yR \approx 2(yR)$. Поскольку zR субморфен модулю $n(yR)$ для некоторого положительного целого n (19.59), то из $yR \approx 2(yR)$ мы получаем, что zR субморфен модулю yR. Так как $yR \not\approx E[\alpha(yR)]$, то из 19.64C следует, что или $z = 0$, или $zR \not\approx E[\alpha(zR)]$, откуда $z \in H(\alpha)$.

19.66. Предложение. *Любой ненулевой идеал H кольца R должен совпадать с $H(\alpha)$ для некоторого бесконечного кардинального числа α.*

Доказательство. Если δ — бесконечное кардинальное число, строго большее, чем мощность кольца R, то никакой правый идеал кольца R не может содержать независимого семейства, состоящего из δ ненулевых правых идеалов. Таким образом, xR не изоморфен $E[\delta(xR)]$ ни для какого ненулевого $x \in R$, откуда $H(\delta) = R$. Поскольку $H \subseteq H(\delta)$, то должно существовать наименьшее бесконечно кардинальное число α, для которого $H \subseteq H(\alpha)$, и мы можем утверждать, что $H = H(\alpha)$. Действительно, предположим, что существует $y \in H(\alpha) - H$. Выбрав ненулевой $x \in H$, мы получаем, согласно 19.59, что yR не может быть субморфен никакой конечной прямой сумме экземпляров модуля xR. В частности, yR не субморфен xR, а значит, по 19.64A модуль xR должен быть субморфен модулю yR. Выбирая максимальное независимое семейство $\{A_i\}$ из тех подмодулей модуля yR, которые изоморфны xR, мы получаем, что $yR = E[\sum \oplus A_i] \oplus B$ для некоторого B. Из максимальности семейства $\{A_i\}$ следует, что xR не может быть субморфен B, а значит, по 16.64A модуль B должен быть субморфен модулю xR. Если τ — мощность множества $\{A_i\}$, то $E[\tau(xR)]$ субморфен yR, в то время как yR субморфен $E[(\tau + 1)(xR)]$. Поскольку yR не субморфен никакой конечной прямой сумме экземпляров модуля xR, то τ должно быть бесконечным кардинальным числом. Но тогда $\tau = \tau + 1$, и с помощью 19.64B мы заключаем, что $yR \approx E[\tau(xR)]$.

Докажем, что $yR \approx E[\tau(yR)]$ для этого бесконечного кардинального числа τ. Поскольку $yR \not\approx E[\alpha(yR)]$, то $\tau < \alpha$ и $H \not\subseteq H(\tau)$. Если $z \in H - H(\tau)$, то $zR \approx E[\tau(zR)]$. Из того, что $xR \not\approx yR \approx E[\tau(xR)]$, мы заключаем с помощью 19.64C, что zR не может быть субморфен xR. Таким образом, xR должен быть субморфен zR (19.64A), откуда вытекает, что $E[\tau(xR)]$ субморфен $E[\tau(zR)]$. Из этого следует, что yR субморфен zR, что, в свою очередь, с помощью 19.59 дает $y \in H$ — противоречие. □

Доказательство теоремы 19.64. Для любого непустого набора ненулевых идеалов кольца R должно существовать наименьшее бесконечное кардинальное число α, для которого $H(\alpha)$ принадлежит этому набору, и тогда $H(\alpha)$ — наименьший идеал из этого набора. Если же множество идеалов содержит нулевой идеал, то он и является в нем наименьшим. □

Насколько может первичное регулярное самоинъективное справа кольцо отличаться от *кольца всех линейных преобразований векторного пространства*? Такое кольцо R изоморфно кольцу всех линейных преобразований некоторого векторного пространства тогда и только тогда, когда оно содержит минимальный правый идеал. Вообще же говоря, в общем случае R не изоморфно даже никакому факторкольцу такого кольца в силу теоремыОсофской [66a], которая утверждает, что факторкольцо кольца всех линейных преобразований векторного пространства по нетривиальному идеалу не может быть самоинъективным справа. Другая приятная гипотеза состояла в том, что R изоморфно максимальному правому кольцу частных факторкольца кольца всех линейных преобразований некоторого векторного пространства, но Гудёрл [74a] опроверг ее.

Гипотеза Капланского

Частичное подтверждение гипотезы Капланского теперь легко следует из теоремы Гудёрла:

19.67. Следствие теоремы 19.64. *Регулярное самоинъективное справа кольцо R первично тогда и только тогда, когда оно примитивно.*

Доказательство. Поскольку все примитивные кольца первичны, надо рассмотреть лишь случай, когда R первично. Набор $\mathcal{P}$ примитивных идеалов кольца R непуст (так как $\mathcal{P}$ содержит все максимальные идеалы), значит, по 19.64 $\mathcal{P}$ имеет наименьший элемент P. Радикал Джекобсона регулярного кольца равен 0, а следовательно, $\bigcap\mathcal{P} = 0$, и, таким образом, $P = 0$. Поэтому 0 — примитивный идеал кольца R. □

19.68. Следствие. *Максимальное правое кольцо частных любого первичного антисингулярного справа кольца R примитивно.*

Доказательство. Заметим, что $\hat{R}$ — первичное самоинъективное справа регулярное кольцо. □

Таким образом, максимальное (правое или левое) кольцо частных любого регулярного первичного кольца примитивно.

Первичные идеалы самоинъективных колец

Из теоремы Гудёрла вытекает линейная упорядоченность идеалов кольца R/P для некоторых первичных идеалов P произвольного самоинъективного справа кольца R.

19.69. Теорема. *Пусть R самоинъективно справа. Если P — первичный идеал кольца R, содержащий его правый сингулярный идеал* sing $R(=$ rad $R)$, *например, если P — любой примитивный идеал или если* rad R *нильпотентен, то идеалы кольца R, содержащие P, линейно упорядочены.*

Доказательство. По теореме Утуми 19.28 rad $R =$ sing R и $R/$rad R самоинъективно справа и регулярно. Кроме того, теорема о соответствии для идеалов (1, стр. 102) устанавливает взаимно однозначное соответствие между первичными идеалами P, содержащими rad R, и первичными идеалами $P/$rad R кольца $R/$rad R. Значит, применима теорема Гудёрла 19.62 и идеалы кольца R/P линейно упорядочены при любом первичном идеале $P \supseteq$ rad R. Так как любой правый или левый примитивный идеал содержит rad R и любой первичный идеал содержит любой нильпотентный идеал, то доказательство завершено. □

Упражнения к гл. 19

1. Кольцо R называется **подпрямо неразложимым**, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям: (a) R имеет наименьший ненулевой идеал, который содержится в любом его ненулевом идеале; (b) если $R \subseteq \prod R_i$ и $\pi_i(R) = R_i$ для всякой проекции $\pi_i\colon \prod R_j \mapsto R_i$, то $\pi_i|R$ — изоморфизм R на R_i для некоторого i.

2 (Джекобсон). Любое простое кольцо подпрямо неразложимо.

3 (Джекобсон). Подпрямо неразложимое примитивное кольцо примитивно слева, т. е. над ним существует точный левый модуль.

4 (Биркгоф). Любое кольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых колец.

5 (Джекобсон). Коммутативное примитивное кольцо является полем.

6 (Джекобсон). Примитивное кольцо R является артиновым справа тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу всех линейных преобразований некоторого конечномерного векторного пространства.

7. Для самоинъективного справа кольца R следующие условия эквивалентны: (a) левая нётеровость, (b) правая нётеровость, (c) левая артиновость, (d) правая артиновость. Если эти условия выполняются, то каждый правый и левый идеал кольца R является аннуляторным и кольцо R самоинъективно слева.

8. Коммутативная область целостности наследственна тогда и только тогда, когда R/I самоинъективно и артиново для любого ненулевого идеала I. Это условие выполняется также в любом (не обязательно коммутативном) нётеровом справа и слева наследственном первичном кольце для любого идеала I, не совпадающего со своим квадратом (гл. 25).

9 (Джонсон [53]). Пусть R — антисингулярное первичное кольцо с однородным правым идеалом U и однородным левым идеалом V. Тогда $K = U \cap V$ — предкольцо, являющееся правой и левой областью Оре. Если $x_1, \ldots, x_n$ — линейно независимые над K элементы из U, а $y_1, \ldots, y_n$ — произвольные элементы из U, то существуют элементы $k \in K$ и $a \in R$, такие, что $x_i a = ky_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Теорема транзитивности Джонсона. О кольцах Джонсона см. также Фейс [67, гл. 14] и проблему 14 той же работы.)

10. Для любого кольца R пересечение аннуляторов неразложимых инъективных правых R-модулей равно нулю. (Что можно сказать об аннуляторах конечно порожденных неразложимых квазиинъективных модулей?)

11 (Фишер Дж. В.— Снайдер [74]). Вариант гипотезы Капланского для колец, содержащих счетное кофинальное подмножество идеалов $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$: если R — первичное регулярное кольцо и каждый его ненулевой идеал содержит один из идеалов I_j, то R примитивно.

12 (Форманек [72b] и Пассман [73]). Пусть $S_\omega = \bigcup_{n<\omega} S_n$ — бесконечная симметрическая группа. Тогда для любого поля F групповое кольцо FS_ω примитивно. (Форманек доказал, что его радикал равен нулю.) [Указание: Применить упр. 11.]

13 (Форманек — Снайдер [72]). Объединение счетной цепи классически полупростых колец примитивно тогда и только тогда, когда оно первично. (Применить упр. 11.)

14 (Ауслендер [57], Харада [56]). Группа G **локально конечна**, если каждое ее конечное подмножество порождает конечную подгруппу. Пусть R — кольцо. Тогда групповое кольцо RG регулярно в смысле Неймана в том и только том случае, когда R регулярно, группа G локально конечна и порядок каждой конечной подгруппы группы G обратим в R.

15 (Коннел [63]). Группа G называется **простой**, если она не имеет неединичных нормальных подгрупп. Групповое кольцо RG является первичным кольцом тогда и только тогда, когда R — первичное кольцо, а G — простая группа.

16 (Форманек — Снайдер [72]). Пусть G — счетная локально конечная группа, и пусть R — первичное регулярное кольцо с однозначным делением на порядки всех элементов группы G. Тогда RG примитивно в том и только том случае, когда G проста.

17 (Форманек — Снайдер). Пусть F — тело. Тогда любая группа G вкладывается в такую группу H, что кольцо FH примитивно. (Взять последовательность групп $\{G_i\}$ и последовательность модулей $\{M_i\}$, определенные по индукции следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1 &= G, & M_1 &= FG_1, \\ G_2 &= \mathrm{Aut}_F M_1, & M_2 &= FG_2 + M_1, \\ G_3 &= \mathrm{Aut}_F M_2, & M_3 &= FG_3 + M_2, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Тогда $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ — точный неприводимый FH-модуль, где $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.) [*Указание*: G_{i+1} действует транзитивно на ненулевых элементах модуля M_i, а значит, H действует транзитивно на ненулевых элементах модуля M. (При этом M_i является точным неприводимым FG_{i+1}-модулем.)]

18 (Форманек [73a]). Если F — тело, а G — свободное произведение нетривиальных групп и если $G \neq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, то FG примитивно.

19 (Форманек [73a]). Если R — коммутативная область целостности, а G — свободная группа, мощность которой не меньше мощности кольца R, то RG примитивно. (Таким образом, RG может быть примитивным, даже если R примитивным не является [ср. упр. 17 и упр. 19.23B.6].)

20 (Коннел [63]). Если R самоинъективно справа, а G — конечная группа, то RG самоинъективно справа. Более того, если G и R — произвольные группа и кольцо, то самоинъективность справа группового кольца RG влечет за собой конечность группы G и самоинъективность справа кольца R. (Коннел доказал, что G — периодическая группа, а ее конечность была независимо установлена Фаркасом, Джейном и Рено.)

21. Групповое кольцо RG самоинъективно справа и регулярно тогда и только тогда, когда G конечна, а R самоинъективно справа и регулярно.

22. Счетное объединение классически полупростых колец не обязательно самоинъективно. (Применить упр. 20.)

23 (Гудёрл [73b]). Регулярное самоинъективное справа кольцо R является произведением первичных колец тогда и только тогда, когда каждый ненулевой идеал этого кольца содержит его минимальный ненулевой идеал. (Это также характеризует R как произведение колец, которые первичны (или примитивны, или неразложимы, что эквивалентно в силу 19.57В и 19.67). См. также 19.37.)

24 (тривиальное обобщение следствия 19.6.3). Если идеалы кольца R линейно упорядочены по включению и идемпотентны, то все они первичны.

25 (обращение следствия 19.63). Если все идеалы кольца R первичны, то они линейно упорядочены по включению.

26 (тривиальное обобщение следствия 19.67). Если идеалы кольца R вполне упорядочены по включению и если каждый из этих идеалов I **полупримитивен** в том смысле, что R/I имеет нулевой радикал Джекобсона, то каждый идеал кольца R примитивен. (Полупримитивность вводится в гл. 26.)

27 (еще одно обобщение). Если R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов и если каждый его идеал полупримитивен, то каждый его первичный идеал примитивен.

28. Обобщить упр. 24 на примитивные идеалы (если это возможно).

29 (Маккарти [73]). Если R — регулярное кольцо в смысле Неймана, то кольцо многочленов $R[x]$ полунаследственно. Доказать или опровергнуть обратное утверждение. Ср. Джилмер [73] и Йондруп [71].

30 (Стринголл [71]). Под p-**кольцом**, где p — простое число (при $p=2$ приходим к определению булева кольца) понимается кольцо, удовлетворяющее тождествам $x^p = x$, $px = 0$. Пусть C_p, где p — простое число, обозначает подкатегорию категории RINGS, состоящую из всех p-колец. Для любых двух простых чисел p и q категории C_p и C_q эквивалентны.

31 (Тепли [70]). Пусть R — такое кольцо, что в каждом из R-модулей M сингулярный подмодуль выделяется прямым слагаемым. Тогда (R называется *расщепляющимся справа* кольцом и) R — антисингулярное справа кольцо с $\mathrm{gl{\cdot}dim} \leqslant 2$.

32 (Гудёрл [73]). Если R — расщепляющееся справа кольцо с нулевым правым цоколем, то (R антисингулярно справа по упр. 31 и) R изоморфно кольцу треугольных матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, где A — полупервичное кольцо, C — артиново слева и справа кольцо, а B есть (C, A)-бимодуль. Обратно, описанное кольцо треугольных матриц является расщепляющимся справа кольцом, если оно имеет нулевой правый цоколь, A — расщепляющееся справа кольцо, B — инъективный правый A-модуль, все антисингулярные правые C-модули проективны и $\mathrm{End}\, B_A$ — существенное расширение модуля C в категории mod-C.

33 (Гудёрл [72] [1])). Если каждый сингулярный модуль из категории mod-R инъективен или, что эквивалентно, если каждый сингулярный модуль полупрост, то R наследственно справа.

34 (Фейс [74]). Пусть R — некоторое кольцо. Тогда кольцо эндоморфизмов инъективного правого R-модуля E будет телом в том и только том случае, когда этот модуль неразложим и каждый правый идеал кольца R, отличный от R и такой, что R/A вкладывается в E, является «критическим».

Замечания к гл. 19

Инъективные модули обсуждались в замечаниях к гл. 3 (т. 1, стр. 237). Квазиинъективные модули были введены Джонсоном и Уонгом [61], хотя, как отмечалось, Джекобсон доказал в своей книге [61], что они удовлетворяют аннуляторному условию (19.10). Это же условие для случая модулей над классически полупростыми алгебрами было установлено М. Холлом [39] и распространено на квазифробениусовы алгебры и кольца [2]) Накаямой [39, 41]. Нагао и Накаяма [53] ввели для обозначения проективных и инъективных модулей символы M_0 и M_u соответственно (см. замечание на стр. 170 их только что упомянутой статьи). Они доказали, что над артиновым справа кольцом любой проективный модуль изоморфен прямой сумме правых главных неразложимых модулей (см. их замечание на стр. 167 той же статьи). Басс [60] распространил эту теорему на кольца с условием минимальности для главных правых идеалов. (Это будет изложено в гл. 22.) Кроме того,

[1]) См. также Койфман Л. А., *Матем. сб.*, 83 (1970), вып. 1, 120—150; *Матем. исследования*, 6 (1971), вып. 2, 185—204, вып. 3,62—82.— *Прим. ред.*

[2]) Квазифробениусовы кольца обсуждаются в гл. 25.

если A — конечномерная алгебра над телом k, то инъективные левые A-модули являются прямыми суммами модулей, k-дуальных к правым главным неразложимым модулям, и наоборот.

Некоммутативные (и не классически полупростые) регулярные в смысле Неймана кольца возникли как кольца, координатизирующие его непрерывные геометрии (Нейман [36a], [36b]). Утуми [65] доказал, что эти кольца самоинъективны, но лишь недавно (Гудёрлом [74]) было установлено, что эти кольца простые! (Мы обсудим это в следующем абзаце.)

Чтобы дать более точную формулировку, напомним, что непрерывная геометрия — это модулярная структура с дополнениями, которая **непрерывна** (и сверху [т. е. $a \wedge \bigvee_{b \in B} b = \bigvee_{b \in B} (a \wedge b)$ для направленного вверх множества B], и снизу). Нейман установил, что существует непрерывная неприводимая (в том смысле, что лишь 0 или 1 обладают единственными дополнениями) нётерова структура L, которая изоморфна структуре главных правых идеалов некоторого регулярного кольца $\mathscr{R}(L)$. Недавно Гудёрл [74] доказал удивительную теорему:

$R = \mathscr{R}(L)$ *есть* (*самоинъективное справа и слева*) *простое кольцо.*

Доказательство — это прямое применение теоремы Гудёрла 19.66, которая устанавливает, что каждый идеал самоинъективного регулярного кольца R имеет вид $H(\alpha)$ для некоторого бесконечного кардинала α. (R самоинъективно слева и справа по критерию Утуми [65], а именно R — прямая сумма n изоморфных левых (правых) идеалов, где n — порядок структуры L.) Поскольку при $\alpha \leqslant \beta$ имеем $H(\alpha) \subseteq H(\beta)$, то для установления простоты кольца R достаточно доказать, что $H(\aleph_0) = R$, т. е. $1 \in H(\aleph_0)$. Но по другой теореме Утуми 19.41 кольцо R конечно по Дедекинду ($xy = 1 \Rightarrow yx = 1$) и, значит, в силу инъективности модуля R_R не может быть изоморфно никакому собственному правому идеалу. В частности, $R \not\approx E[\aleph_0(R_R)]$, поэтому $1 \in H(\aleph_0)$ и R просто.

В лекциях автора [67, стр. 130] был поднят вопрос о строении неартинова простого самоинъективного справа кольца A. Обязательно ли оно самоинъективно слева? И если это так, то сохраняется ли это свойство, если A — максимальное правое кольцо частных простой области целостности K? Ответ на этот второй вопрос был дан, лишь когда Коззенс, отвечая на вопрос Ятегаонкара, построил пример простой области главных левых идеалов R, которая не является правой областью Оре. (Коззенс [72] показал, что она не является нётеровой справа, но из его доказательства следует, что она не будет правой областью Оре; появляется новая проблема: существует ли правая область Оре, не являющаяся нётеровой справа? (Ср. Камилло — Коззенс [73].) Если A — максимальное правое кольцо частных кольца R, то оно

самоинъективно справа по 19.35. Кроме того, любой ненулевой элемент $x \in R$ имеет левый обратный в A. В силу самоинъективности кольца A существует $y \in A$, такой, что $yxR = R$, откуда $yx = 1$. Если A самоинъективно и слева, то 19.41 показывает, что каждый элемент из R обратим в A, а значит, A — тело и R — правая область Оре.

Доказательство Коззенса имеет два непосредственных следствия:

(1) Для любой области целостности R кольцо $A = \hat{R}$ просто и регулярно, причем оно самоинъективно слева и справа тогда и только тогда, когда R — правая область Оре,— факт, который мне первым сообщил Рооз, отвечая на первый из моих вопросов; но для ответа на второй требовалось существование простой области целостности, не являющейся областью Оре.

(2) Второе следствие этого доказательства и того факта, что координатизирующие кольца Неймана неартиновы и самоинъективны с обоих сторон, состоит в том, что не каждое самоинъективное справа кольцо является максимальным кольцом частных некоторой области целостности. (Однако Хендельмен отметил (в частном письме), что, возможно, таковым будем любое бесконечное дедекиндово самоинъективное справа регулярное кольцо. См. также Гудёрл — Хендельмен [75].)

Мы отметили частичное решение Гудёрлом проблемы Капланского о импликации (первичное $\Rightarrow$ примитивное) для регулярных колец (19.67). Здесь имеются также некоторые достижения в случае регулярных групповых колец (Форманек, Пассман, а также Форманек и Снайдер). Мы не будем на них останавливаться, укажем лишь несколько основополагающих результатов, включая характеризацию Харады и Ауслендера регулярных групповых колец и характеризацию Коннела первичных групповых колец, а также ряд утверждений (см. упр. 11—19), в который входит упрощающая лемма Фишера Дж. В. и Снайдера [74]. (По близким вопросам, касающимся полупростоты групповых алгебр над полем характеристики 0, следует обратиться к работам Ауслендера [59] или Пассмана [62], [71], [77].)

Упражнения 19.37 и 19.38 содержат ряд результатов о строении максимальных правых колец частных Q кольца R (которое обычно предполагается антисингулярным справа). Например, выясняется, когда Q является 1) произведением колец всех линейных преобразований векторных пространств (Чейз — Фейс [65]); 2) левым кольцом частных (Утуми [63b], [63c]); 3) плоским левым R-модулем (Сандомирский [67], Катефорис [69a]); 4) гомоморфным образом кольца R в категории RINGS (Силвер [67]), а также рассматриваются некоторые результаты о вложении конечно порожденных антисингулярных модулей в свободные (Гудёрл [71]), об их проективности (Катефорис [69b]) или о проективности модуля Q

(Виола-Приоли [73], Хендельмен — Лоуренс [75] и Хендельмен [75]). Кроме того, выясняется строение антисингулярных модулей над самоинъективными кольцами (Сандомирский [68] и Зельманович [71]). Ср. Бойл и Гудёрл [75], где приведена классификация с точностью до изоморфизма антисингулярных инъективных модулей по их «рангу».

Теорема плотности Шевалле — Джекобсона в категорной формулировке (и для контекста Мориты) была установлена Амицуром [71], Фуллером [74] и Зельмановичем [73]. (Последний в [72] изучал также регулярные модули.) См. также Мюллер [74].

Куртер [69] выяснил, когда каждый модуль рационально замкнут (а также исследовал дуальное понятие корационально замкнутого модуля). Сторрер [71a], [71b] изучал максимальные рациональные расширения в общем случае и над совершенными кольцами.

Уорфилд [72b] ввел понятие кольца, обладающего как модуль свойством замены (см. определение перед 19.21), а Монк [72] охарактеризовал такие кольца, показав, что это более широкий класс колец, чем SBI-кольца, регулярные по модулю радикала.

Любое булево кольцо R — это коммутативное регулярное кольцо и, как отмечено в т. 1, 3.2.9, стр. 155, каждое булево кольцо R можно вложить в булево кольцо подмножеств Pow X некоторого множества X (Стоун). Кроме того, если A — произвольное коммутативное кольцо, то существует булево кольцо Idem A, состоящее из всех идемпотентных элементов кольца A со следующими операциями сложения и умножения:

$$a \dot{+} b = a + b - 2ab \quad \text{и} \quad a \cdot b = ab.$$

Функтор $A \rightsquigarrow \mathrm{Idem}\, A$ (из категории коммутативных колец в категорию булевых колец) обладает сопряженным слева, который ставит в соответствие каждому булеву кольцу B кольцо $Z[B]$, определяемое системой образующих $\{[b]\}_{b \in B}$ и соотношениями

$$[1] = 1,\ [0] = 0,\ [a + b] = [a] + [b] - 2[a][b],\ [a \cdot b] = [a] \cdot [b].$$

Кроме того, отображение $B \to \mathrm{Idem}\, Z[B]$, переводящее b в $[b]$ — кольцевой мономорфизм. Детали, усиления и обобщения см. у Бергмана [72]. По поводу обобщений теоремы Стоуна о представлении булевых колец на (би)регулярные кольца см. Аренс — Капланский [48], Капланский [50] и Джекобсон [64], особенно гл. IX последней монографии о строении структурного пространства кольца (т. е. о топологии на множестве его примитивных идеалов).

Маккой и Монтгомери [37] показали, что любое p-кольцо вкладывается в прямую сумму некоторого множества экземпляров кольца $GF(p)$. Мы отметили замечательное обобщение Стринголла [71] в упр. 30.

Вне всякого сомнения, наилучшая из основополагающих книг по примитивным кольцам — это «Строение колец» (Джекобсон [64]; особенно примеры на стр. 35—37 и стр. 251—255 дополнения А). Книга Ламбека «Кольца и модули» [71b] — ни с чем не сравнимое пособие по максимальным кольцам частных, а «Теория кручения, аддитивная семантика и кольца частных» [71a] — по кольцам частных, меньшим, чем максимальные. (Мы были предупреждены, если не подготовлены, локализациями Габриеля и категориями частных в гл. 15 и 16 (1, особенно стр. 643—657), что практически *все* — это «теория кручения»! Но при чем здесь семантика?)

Существует теория кручения в смысле т. 1 (16.8B, стр. 645), которая ставит в соответствие каждому модулю M его «периодический» подмодуль, а именно sing M, так, что антисингулярный подмодуль — модуль без кручения. Кроме того, существует теория кручения, которая ставит в соответствие каждому модулю M «периодический» подмодуль, состоящий из всех $x \in M$, аннулирующих какой-либо правый идеал I, для которого кольцо R служит рациональным расширением. (Такие правые идеалы называются **плотными** в R [см. 1, стр. 647].) Теория кручения, определенная таким образом, есть наибольшая, для которой R — модуль без кручения. (См. 1, упр. 1.3 к гл. 16 в связи с этим.)

Большая часть основных результатов (но не все они) о квазиинъективных модулях и их кольцах эндоморфизмов, рациональные расширения Финделя — Ламбека и максимальные кольца частных Джонсона — Утуми содержатся в лекциях автора [67].

Понятие антисингулярного справа кольца, введенное Джонсоном [51], [53], [61], [65a], обобщает понятия области целостности, простого кольца и регулярного кольца. Для коммутативной области целостности сингулярный подмодуль является периодическим подмодулем. Капланский [52] показал, что в этом случае все конечно порожденные модули расщепляются (т. е. периодический подмодуль выделяется в модуле прямым слагаемым) тогда и только тогда, когда исходное кольцо полунаследственно. Кроме того, все ограниченные модули над областью целостности расщепляются тогда и только тогда, когда эта область целостности дедекиндова (Капланский [52], Чейз [60]). Гудёрл [72], [73a] провел обширное исследование по поводу выделения прямым слагаемым сингулярного подмодуля над антисингулярным кольцом (включая вопрос о проективности и инъективности сингулярного подмодуля). Мы привели в качестве упражнения теорему Тепли о том, когда каждый сингулярный подмодуль выделяется прямым слагаемым: правая глобальная размерность кольца должна быть меньше или равна 2 (Тепли [70]), причем это верхняя грань достигается (Фулберт — Тепли [72]). Гудёрл [73a] охарактеризовал эти так называемые расщепляющиеся кольца в случае, когда они имеют нулевой правый цоколь (см. упр. 32—33).

Кольцо R называется **истинным справа** расширением своего подкольца A, если каждый ненулевой правый идеал этого кольца имеет ненулевое пересечение с A, и **строго истинным справа**, если каждый замкнутый правый идеал кольца A есть сокращение правого идеала кольца R. Фейс и Утуми [64b] охарактеризовали максимальное правое кольцо частных $\hat{A}$ антисингулярного справа кольца A с помощью свойства строгой истинности справа, когда $\hat{A}$ не имеет строго регулярных идеалов. (Последнее условие исключает случай, когда A — область целостности, а $\hat{A}$ — тело.) Кроме того, в этом случае любое строго истинное справа расширение R кольца A вкладывается в $\hat{A}$. Предполагая, что $\hat{A}$ является также левым кольцом частных, можно доказать то же самое для истинных справа расширений. В некоторых других случаях (например, когда A полупервично и является правым кольцом Голди или когда A — антисингулярное справа первичное кольцо, содержащее однородный правый идеал) тоже достаточно истинности справа. (См. Хатчинсон [69] и О'Мира [73]; О'Мира [75] также определил правые порядки в кольцах всех линейных преобразований бесконечномерных векторных пространств.)

Харада [65] и Миясита [65] доказали много теорем о QI-модулях, включая следствие 19.6(a) (доказанное Фейсом и Утуми [64a]). Харада доказал, что в любом квазиинъективном модуле M подмодуль $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(0))$ (где замыкание $\mathrm{cl}(N)$ подмодуля N определяется как множество всех $x \in M$, таких, что $\mathrm{ann}\, x/N$, или $x^{-1}N$,— существенный правый идеал) выделяется прямым слагаемым (19.30(a)). Харада применил этот результат, чтобы установить разложение QF-кольца в произведение классически полупростого кольца и кольца R, такого, что $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(0)) = R$. (Ср. с введенным Холлом [40] и Брауном — Маккоем [50] понятием кольца, **ограниченного своим радикалом**.)

Харада [65] выяснил строение неразложимого QI-модуля над дедекиндовой областью (ср. также Фоссум [71]). Этот результат вытекает из того факта, что квазиинъективный модуль над нётеровым справа кольцом есть прямая сумма неразложимых квазиинъективных модулей. (Ср. теорему Матлиса — Паппа 20.6. См. также 20.6A.) Далее Харада [72] определил строение нётеровых квазиинъективных модулей над коммутативным кольцом (они оказались также артиновыми). Это частично решает вопрос, который я поставил в [67, стр. 127, проблема 2]: выяснить, какие кольца служат кольцами эндоморфизмов квазиинъективных модулей конечной длины. (Другой поставленный там вопрос все еще открыт: каково строение квазиинъективного модуля конечной длины, удовлетворяющего в силу 19.10 аннуляторному условию?)

Кольца с квазиинъективными правыми идеалами изучались Джейном, Мохамедом и Сингхом [69] и Мохамедом [69], [70]. В случае когда все циклические модули квазиинъективны, следует обратиться к статье Ахсана [73], а если все собственные циклические модули инъективны — к статье Бойл [74] или Фейса [73]. Диксон и Фуллер [69] выяснили, когда каждый подмодуль неразложимого инъективного модуля над конечномерной алгеброй квазиинъективен. (Такие алгебры являются кольцами конечного модульного типа (см. гл. 20). Харада [65, p. 356] показал, что на самом деле любое артиново полуцепное кольцо (терминология гл. 25) обладает этим свойством.) См. также Фуллер [76].

Кольцо R называется FP-**инъективным**, если любой гомоморфизм $f\colon I \to R$ конечно порожденного правого идеала продолжается до гомоморфизма $f'\colon R \to R$. Таким образом, эти кольца обобщают и регулярные, и самоинъективные справа кольца. Джейн [73a] показал, что кольцо R FP-инъективно справа в том и только том случае, когда каждый конечно представимый левый R-модуль полурефлексивен; если кольцо когерентно справа, то это условие можно усилить до рефлексивности. Было бы интересно рассказать о многочисленных работах по FP-инъективным кольцам, но это явно невозможно (ср. Джейн [73b]).

В. П. Елизаров [69] составил обширный обзор по кольцам частных, библиография которого насчитывает несколько сотен названий.

Иванов [70] выяснил строение антисингулярного кольца с минимальными односторонними идеалами, обобщая работы Голди [64], Колби и Раттера [68] и других.

Ламбек [71b] изучал локализации, используя квазиинъективные модули вместо инъективных, и обобщил теорему плотности.

Ссылки

Адзумая [66], Амицур [56a], [59], [71], Аренс — Капланский [48], Армендариз [73], Артин Э. [50], Асано К. [49], Ахсан [73], Басс [60], Бергман [72], Биркгоф [67], Бичи [71], Бойл [74], Браун — Маккой [50], Вамош [68], Виола-Приоли [73], Голди [64], Гудёрл [72], [73a], [73b], [73d], [74], Джейн [73], Джейн — Мохамед — Сингх [69], Джекобсон [50], [64], Джонсон [51], [53], [64], [65], Джонсон — Уонг [61], Зельманович [67], [71], [72], [73], Иванов [70], Камилло — Коззенс [73], Капланский [50], [52], [69], Катефорис [69], [70], Коззенс [72], Колби — Раттер [68], Коннел [63], Кроули — Йонссон [64], Куртер [69], Ламбек [71a], [71b], Леви [63a], Маккарти [73], Мальцев [36], Миясита [65], Монк [72], Мохамед [69], Мюллер [74], Нагао — Накаяма [53], Накаяма [39, 41], фон Нейман [36a], [36b], [60], О'Мира [73], [75], Ософская [66a], [66b], [68a], Пассман [62], [71], [73], Сандомирский [67], [68], Силвер [67], Сторрер [71a], [71b], [73], Стринголл [71], Тепли [70], Уонг — Джонсон [59], Уорфилд [69a], [72], Утуми [56], [61], [63b], [63c], [65], [67], Фейс [67a], [72b], [73], Фейс — Уокер Э. [67], Фейс — Утуми [64a], [64b], [65a], Финдлей — Ламбек [58], Фишер Дж. В. — Снайдер [74], Форманек [72], [73a], Форманек — Снайдер [72], Фоссум [71], Фукс [69a], Фукс — Рангасвами [70], Фулберт — Тепли [72], Фуллер [69b], [74], Харада [65], [72], Хатчинсон [69], Хендельмен [75], Хендельмен — Лоуренс [75], Холл [39], [40], Чейз [60], Чейз — Фейс [65].

Дополнительные ссылки

Вамош [68], Гудёрл [75], Гудёрл — Бойл [76], Гудёрл — Хендельмен [75], Джилмер [73], Йондруп [71], Ламбек [76], Масаикэ [70b], [71a], [71b], Морита [70, 71a], [71b], Настасеску — Попеску [70], Рангасвами [73], Ричман — Уокер Э. [72], Роуен [74], Сандомирский [70], Фейс [74].

Глава 20

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЕЦ И МОДУЛЕЙ В ВИДЕ ПРЯМЫХ СУММ

Пусть C — класс правых R-модулей. Модуль M называется **$\sum$-C-модулем,** если он изоморфен прямой сумме модулей, принадлежащих классу C. Класс всех таких модулей обозначим через $\sum$-C. Если $\mathscr{M}$ — класс правых R-модулей, являющихся $\sum$-C-модулями, то мы говорим, что R — кольцо с **$\sum$-C-$\mathscr{M}$-модулями**. В частности, если $\mathscr{M}$ — класс (инъективных) правых R-модулей, а C — класс конечно порожденных правых R-модулей, то мы будем писать, что R — кольцо с **$\sum$-конечно порожденными (инъективными) правыми модулями.** Аналогично утверждение о том, что R — кольцо с **$\sum$-циклическими (инъективными) правыми модулями** означает, что каждый (инъективный) правый R-модуль — прямая сумма циклических модулей. В этом случае мы будем также называть R **$\sum$-циклическим справа кольцом.** (Заметим, что при этом R рассматривается как объект категории RINGS, а не mod-R; строго говоря, $\sum$-циклической оказывается вся категория mod-R, а не только R_R.)

Пусть fin. gen. mod-R — подкласс конечно порожденных модулей категории mod-R. Если C — подкласс категории mod-R, то через σ-C обозначим класс ($\sum$-C) $\cap$ (fin. gen. mod-R), состоящий из всех конечно порожденных модулей, являющихся $\sum$-C-модулями. Тогда R называется **σ-циклическим справа**, если каждый конечно порожденный правый R-модуль является прямой суммой циклических модулей.

Пусть α — произвольное кардинальное число. Модуль M называется **α-порожденным**, если он порождается не более чем α элементами. Если каждый неразложимый правый R-модуль является α-порожденным, то кольцо R называется **α-генным.** В этом случае мы также говорим, что R есть **BG-кольцо** (BG — сокращение для bounded generator). Если существует целое число $n > 0$, такое, что каждый конечно порожденный неразложимый R-модуль n-порожден, то R называется **FBG-кольцом** или **кольцом ограниченного модульного типа.**

Если C — класс модулей над R, таких, что каждый неразложимый модуль M из класса C α-порожден, то R называется **C-α-генным** кольцом, например, инъективно-α-генное кольцо — это кольцо, над которым каждый неразложимый инъективный модуль α-порожден. Если все конечно порожденные модули из класса C являются n-порожденными для некоторого натурального n, то говорят, что R является **F-C-n-генным**.

Вместо 1-генных мы будем говорить о циклически-генных кольцах. Если для некоторого целого числа $n > 0$ каждый (правый) R-модуль есть прямая сумма n-порожденных модулей, то говорят, что R — правое $\sum$-n-генное кольцо. (Тогда R оказывается n-генным справа кольцом.) Если каждый конечно порожденный правый R-модуль — прямая сумма n-порожденных для фиксированного числа n, то R называется **σ-n-генным** кольцом. Каждое n-генное кольцо A подобно циклически-генному кольцу (теорема 20.39).

Кольцо R называется кольцом **сильно конечного** (соотв. **конечного) модульного типа**, если число неизоморфных (конечно порожденных) неразложимых правых R-модулей конечно. Такие кольца называются также FM- и **FFM-кольцами** соответственно. (На самом деле в этой главе рассматриваются только FFM-кольца, известные в литературе также под названием колец с **конечным числом представлений**.) Во введении к тому 2 мы уже обсудили (но нигде не доказываем) такую гипотезу Брауэра — Тролла:

правое FBG-кольцо является правым FFM-кольцом,

т. е. ограниченность модульного типа влечет за собой его конечность. (Как уже отмечалось, А. В. Ройтер [68] подтвердил это для кольца R, являющегося конечномерной алгеброй над полем, а Ауслендер [74], используя другие методы, распространил справедливость гипотезы Брауэра — Тролла на артиновы кольца. См. также замечания к этой главе.)

Сводка результатов о разложениях модулей в прямую сумму

Здесь мы перечислим некоторые теоремы, доказанные в этой главе (включая одну доказанную в гл. 24). Мы призываем читателя обратиться к гл. 25 (полуцепные и $\sum$-циклические кольца) за другими теоремами этого рода.

20.7. Теорема (Фейс — Уокер Э. [67]). *Все неразложимые инъективные правые модули α-порождены для некоторого α тогда и только тогда, когда кольцо R нётерово справа.*

20.6 и 20.9. Теорема (Матлис [58], Папп [59]). *R — кольцо с $\sum$-неразложимыми инъективными правыми модулями тогда и только тогда, когда оно нётерово справа.*

20.17—20.18. Теорема (Фейс — Уокер Э. [67]). *Если R — кольцо с $\sum$-конечно порожденными инъективными правыми модулями, то оно артиново справа; для коммутативных колец верно и обратное утверждение.*

24.14. Теорема (Фейс — Уокер Э. [67] и Фейс [66b]). *Квазифробениусово кольцо R является кольцом с $\sum$-циклическими инъективными правыми модулями; для коммутативных колец верно и обратное утверждение* [1]).

20.23. Теорема. *Следующие условия эквивалентны и влекут за собой правую артиновость кольца R:*

(a) *Существует множество $\{M_i\}_{i\in I}$ правых R-модулей, таких, что каждый правый модуль изоморфен прямой сумме модулей из семейства $\{M_i\}_{i\in I}$.*

(b) *Существует кардинальное число α, такое, что каждый правый R-модуль является прямой суммой модулей, каждый из которых порождается множеством мощности, не превосходящей α, т. е. R — правое $\sum$-α-**генное** кольцо.*

20.42. Теорема (Уорфилд [70]). *Коммутативное локальное* FBG-*кольцо является кольцом нормирования* (*в том смысле, что идеалы кольца линейно упорядочены*).

20.49. Теорема (Капланский [52], Матлис [66], Гилл [71], Лафон [71a], Уорфилд [70]). *Локальное коммутативное кольцо R является σ-циклическим тогда и только тогда, когда оно — почти максимальное кольцо нормирования* (*в смысле Капланского* [52]).

Сводка результатов о прямых разложениях колец

Мы также включили в эту главу теоремы о разложениях колец в конечное прямое произведение (полу)первичных и артиновых колец и в том числе следующие результаты:

20.30. Теорема Чаттерса о нётеровых наследственных кольцах.

20.32. Теорема Леви о полупервичных наследственных справа правых кольцах Голди.

20.35. Критерий Робсона для разложимости нётерова кольца в прямую сумму полупервичного и артинова.

20.37. Теорема Крулля — Асано — Голди о кольцах главных идеалов.

Понятием, оказавшимся полезным в широком круге приложений, является понятие $\sum$-инъективности модуля M. Оно означает, что как M, так и каждая прямая сумма любого множества экземпляров модуля M являются инъективными модулями. Это свойство можно охарактеризовать условием обрыва возрастаю-

[1]) Мы напомним, что за этим результатом читателю следует обратиться к гл. 24.

щих цепей правых идеалов, являющихся аннуляторами подмножеств модуля M, и из него вытекает, что кольцо $R/\mathrm{ann}_R\, M$ удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм (20.3А). Эта теорема используется при характеризации QF-колец (гл. 24).

Другая теорема, имеющая многочисленные приложения,— это теорема Чейза, которая утверждает, что если каждое прямое произведение R^a экземпляров кольца R является $\bigcap$-чистым подмодулем прямой суммы правых модулей, мощность которых ограничена некоторой мощностью, не зависящей от a, то R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов (20.21). Таким образом, из теоремы Чейза следует, что $\mathbb{Z}^{\omega}$ — не свободная группа [1]) (20.22). Более того, в объединении с 20.7 теорема Чейза влечет за собой теорему 20.23 (см. также 22.31В.)

Представления инъективных модулей в виде прямых сумм

В любой категории произведение инъективных объектов инъективно; однако копроизведение инъективных объектов, вообще говоря, не инъективно.

20.1. Теорема (Картан — Эйленберг — Басс). *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R нётерово справа.*

(b) *Любая прямая сумма инъективных правых R-модулей инъективна.*

(c) *Любая счетная прямая сумма инъективных правых R-модулей инъективна.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $f\colon A \to \sum_{i\in I} \oplus M_i = M$ — гомоморфизм правого идеала A в прямую сумму M инъективных модулей. Поскольку A конечно порожден, $\mathrm{im} f \subseteq M'$, где M' — сумма некоторого конечного набора модулей M_i. Так как сумма прямая, то M' — инъективный модуль. Поэтому гомоморфизм $f\colon A \to M'$, а с ним и $f\colon A \to M$ индуцируются левой гомотетией. Следовательно, по критерию Бэра (1, 3.41, стр. 205) M инъективен.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ — цепь правых идеалов,

$$E_n = E(R/I_n)$$

— инъективная оболочка правого R-модуля R/I_n, $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $E = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_n$, $f_n\colon I \to E_n$ — гомоморфизм, задаваемый правилом $f_n(x) = [x + I_n]$, и пусть $f\colon I \to E$ — прямая сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus f_n$ этих гомоморфизмов. Поскольку E инъективен, то f индуцируется левой гомотетией с коэффициентом $m \in M$. Поэтому

$$\mathrm{im}\, f \subseteq mR \subseteq \sum_{n=1}^{t} \oplus E_n$$

для некоторого $t < \infty$ (в силу конечной порожденности модуля mR). Но тогда $I_n = I_{n+1}$ для всех $n > t$, следовательно, R нётерово. □

$\sum$-инъективные модули

Пусть M есть R-модуль с кольцом эндоморфизмов $S = \mathrm{End}\, M_R$. Через $\mathcal{A}_l(M, R)$ мы будем обозначать множество S-подмодулей модуля M, являющихся аннуляторами подмножеств кольца R. Таким образом, $X \in \mathcal{A}_l(M, R)$ тогда и только тогда, когда

$$X = \mathrm{ann}_M\, \mathrm{ann}_R\, X = {}^{\perp}(X^{\perp}),$$

где $^{\perp}$ обозначает взятие аннулятора. Аналогично $\mathcal{A}_r(M, R)$ обозначает множество правых идеалов кольца R, имеющих вид $X^{\perp}$, где X — подмножество из M. Итак, $I \in \mathcal{A}_r(M, R)$ тогда и только тогда, когда $I = \mathrm{ann}_R\, \mathrm{ann}_M\, I$ (ср. 19.10 и далее). Заметим, что если M — точный модуль, то любое прямое слагаемое модуля R_R является аннулятором, точнее, любой правый идеал, порожденный идемпотентом $e \in R$, является правым аннулятором подмножества $M(1 - e) = \{m \in M \mid me = 0\}$.

Пусть $\{M_a\}_{a\in A}$ — семейство правых R-модулей, индексированное множеством A. Если M_a для любого $a \in A$ изоморфен фиксированному правому модулю M, то положим

$$M^A = \prod_{a\in A} M_a \quad \text{(прямое произведение)}$$

и

$$M^{(A)} = \sum_{a\in A} \oplus M_a \quad \text{(прямая сумма).}$$

Если A — счетное множество, то положим $M^{\omega} = M^A$ и $M^{(\omega)} = M^{(A)}$.

Если модуль M инъективен, то M^A инъективен для любого множества индексов A; будем говорить, что M **$\sum$-инъективен,**

[1]) Точнее, это следует не из приведенной здесь формулировки теоремы Чейза, а из теоремы 20.21.— *Прим. перев.*

если $M^{(A)}$ инъективен для любого множества индексов A; M называется **счетно $\sum$-инъективным**, если $M^{(\omega)}$ инъективен.

20.2А. Предложение (Фейс [66а]). *Если $M \in$ mod-R, то $\mathcal{A}_r(M, R)$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда каждый правый идеал I кольца R содержит конечно порожденный правый идеал I_1, такой, что $^\perp I = {}^\perp I_1$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{A}_r(M, R)$ обладает условием максимальности или, эквивалентно, $\mathcal{A}_l(M, R)$ удовлетворяет условию минимальности. Пусть I — правый идеал кольца R и I_1 — конечно порожденный правый идеал, такой, что $^\perp I_1$ минимален в семействе $\{^\perp K\}$, где K пробегает все конечно порожденные идеалы, лежащие в I, и аннулятор $^\perp K$ берется. в M. Если $x \in I$, то правый идеал $Q = I_1 + xR$ конечно порожден, $Q \subseteq I$ и $^\perp Q \subseteq {}^\perp I_1$. Ввиду выбора I_1 отсюда следует, что $^\perp Q = {}^\perp I_1$, и потому $^\perp I_1 x = 0$. Так как это верно для любого $x \in I$, то $^\perp I_1 I = 0$, т. е. $^\perp I_1 \subseteq {}^\perp I$. Но поскольку $I_1 \subseteq I$, то $^\perp I_1 \supseteq {}^\perp I$, и поэтому $^\perp I_1 = {}^\perp I$, как и утверждалось.

Обратно, пусть $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ — цепь правых идеалов кольца R, принадлежащих $\mathcal{A}_r(M, R)$. Пусть $X_i = {}^\perp I_i$, $i = 1, 2, \ldots$,— соответствующие элементы из $\mathcal{A}_l(M, R)$, $I = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$, и пусть J_1 — конечно порожденный правый идеал, такой, что $J_1 \subseteq I$ и $^\perp I = {}^\perp J_1$. Так как J_1 конечно порожден, то существует целое число q, такое, что $J_1 \subseteq I_k$ для всех $k \geqslant q$, т. е. $^\perp J_1 \supseteq X_k = {}^\perp I_k$ для всех $k \geqslant q$. Но

$$^\perp J_1 = {}^\perp I = \bigcap_{n=1}^\infty X_n \subseteq X_k,$$

т. е. $X_k = {}^\perp J_1$ для всех $k \geqslant q$. Тогда $I_k = X_k^\perp = I_q$ для всех $k \geqslant q$, что завершает доказательство предложения. □

В случае, когда $M = R$, $\mathcal{A}_l(M, R)$ (соотв. $\mathcal{A}_r(M, R)$) совпадает просто со структурой левых (соотв. правых) аннуляторных идеалов кольца R, что приводит к такому следствию.

20.2В. Следствие. *Кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов тогда и только тогда, когда каждый правый идеал I содержит конечно порожденный правый идеал I_1 с тем же самым левым аннулятором (т. е. $^\perp I = {}^\perp I_1$).* □

20.3А. Предложение (Фейс [66]). *Следующие условия на инъективный модуль $M \in$ mod-R эквивалентны:*

(a) *M счетно $\sum$-инъективен.*

(b) *R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов из $\mathcal{A}_r(M, R)$.*

(c) *M $\sum$-инъективен.*

Если это так, то $R/\mathrm{ann}_R\, M$ удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов, порожденных идемпотентами (или, что ввиду 22.28 эквивалентно, $R/\mathrm{ann}_R\, M$ не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов).

Доказательство. (a) ⇒ (b). Пусть $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_m \subset \ldots$ — строго возрастающая последовательность правых идеалов в $\mathcal{A}_r(M, R)$, $I = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, и пусть x_n — элемент аннулятора $^\perp I_n$ (взятого в M), не лежащий в $^\perp I_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $r \in I$, то существует число q, такое, что $r \in I_k$ для всех $k \geqslant q$, и так как $^\perp I_q \supset {}^\perp I_k$ для всех $k \geqslant q$, то $x_k r = 0$ для всех $k \geqslant q$. Поэтому элемент $r' = (x_1 r, \ldots, x_n r, \ldots)$ лежит в $M^{(\omega)}$, даже если $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ лежит в M^ω. Пусть f обозначает отображение, определенное правилом $f(r) = r'$ для всех $r \in I$. Предположим теперь, что $M^{(\omega)}$ инъективен, и найдем по критерию Бэра 3.41 элемент $y = (y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots) \in M^{(\omega)}$, такой, что

$$f(r) = yr = (y_1 r, \ldots, y_m r, 0, \ldots) =$$
$$= (x_1 r, \ldots, x_m r, \ldots) \text{ для всех } r \in I.$$

Но это влечет за собой равенство $x_t r = 0$ для всех $t > m$ и всех $r \in I$, т. е. $x_t \in {}^\perp I \subseteq {}^\perp I_{t+1}$ в противоречие с выбором x_t. Итак, (a) ⇒ (b).

(b) ⇒ (c). Пусть I — правый идеал кольца R и $I_1 = r_1 R + \ldots + r_n R$ — конечно порожденный правый идеал, такой, что $I_1 \subseteq I$ и $^\perp I = {}^\perp I_1$. Он существует в силу 20.2А. Пусть $f\colon I \to M^{(A)}$ — любой гомоморфизм. Так как M^A инъективен, то существует элемент $p \in M^A$, такой, что $f(r) = pr$ для всех $r \in I$. Так как $f(r_i) = pr_i \in M^{(A)}$, $i = 1, \ldots, n$, то существует элемент $p' \in M^{(A)}$, такой, что $p_a r_i = p'_a r_i$ для всех $a \in A$, $i = 1, \ldots, n$, где g_a есть a-я координата элемента $g \in M^A$. Так как $r_1, \ldots, r_n$ порождают I_1, то отсюда следует, что $pr = p'r$ для всех $r \in I_1$, откуда $(p_a - p'_a) \in {}^\perp I_1$ для всех $a \in A$. Поскольку $^\perp I = {}^\perp I_1$, из этого вытекает, что $p_a x = p'_a x$ для всех $a \in A$ и всех $x \in I$; значит, $px = p'x$ для всех $x \in I$. Таким образом, $f(x) = p'x$ для всех $x \in I$ и $p' \in M^{(A)}$. Поэтому $M^{(A)}$ инъективен в силу критерия

Бэра 3.41. Итак, (b) $\Rightarrow$ (c), что завершает доказательство эквивалентности условий (a) — (c). Если M $\sum$-инъективен, то он точен и $\sum$-инъективен как правый $(R/\operatorname{ann}_R M)$-модуль и применение (b) к $R/\operatorname{ann}_R M$ дает условие максимальности для правых идеалов, порожденных идемпотентами [1]. □

20.3B. Предложение (Гурсо — Валетт [75]). *Если R обладает точным $\sum$-инъективным правым модулем M, то R удовлетворяет условию максимальности для прямых слагаемых.*

Доказательство. Пусть $I = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus x_n R$ — бесконечная прямая сумма ненулевых циклических правых идеалов кольца R. Так как модуль M точен, то для каждого n существует элемент $y_n \in M$, такой, что $y_n x_n \neq 0$. Тогда морфизм $f\colon I \to M^{(\mathbb{N})}$, такой, что

$$p_m(f(x_n)) = \delta_{mn} y_n x_n \quad (\delta \text{ — символ Кронекера}),$$

не может быть продолжен до отображения $R \to M^{(\mathbb{N})}$, что противоречит $\sum$-инъективности модуля M. □

Если инъективная оболочка модуля M $\sum$-инъективна, то мы говорим, что M имеет *$\sum$-инъективную оболочку.*

20.3C. Следствие. *Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда* mod-R *обладает $\sum$-инъективным кообразующим.*

Доказательство. Если R нётерово справа, то, согласно 20.1, каждый инъективный модуль $\sum$-инъективен. Обратно, если E — кообразующий, то по упражнению 20.4C(f) каждый правый идеал кольца R является аннулятором некоторого подмножества модуля E. Тогда по 20.3A если E $\sum$-инъективен, то R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов. □

20.3D. Следствие (Куршан [70]). *Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда прямая сумма инъективных оболочек любого семейства простых модулей инъективна.*

Доказательство. Действительно, тогда mod-R обладает $\sum$-инъективным кообразующим. □

20.3E. Следствие (Куршан [70]). *Если каждый полупростой правый R-модуль инъективен, то R нётерово справа.*

[1]) Поскольку для любого идемпотента e кольца $\overline{R} = R/\operatorname{ann}_R M$ имеет место включение $e\overline{R} \in \mathcal{A}_r(M, \overline{R})$ (см. начало параграфа).— *Прим. перев.*

Таким образом, эти кольца являются в точности нётеровыми справа правыми V-кольцами.

Замечание. Куршан доказал результат, более сильный, чем приведенный нами в 20.3D: он требует выполнения указанного условия лишь для счетных наборов простых модулей.

QI-кольца

Следующее замечание почти очевидно.

20.4A. Замечание. *Если R — кольцо и $M \in$* mod-R *таков, что $M \oplus \hat{R}$ — квазиинъективный модуль, то M инъективен.*

Доказательство. Действительно в таком случае $M \oplus \hat{R}$ — квазиинъективный модуль, содержащий R, и, следовательно, инъективен. □

Это доказывает эквивалентность условий (a) и (b) в следующем предложении.

20.4B. Предложение (Кёлер [70]). *Следующие два условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R — правое* QI-*кольцо;*

(b) *прямая сумма любых двух квазиинъективных правых R-модулей квазиинъективна.*

Если эти условия выполняются, то R нётерово справа.

Доказательство. Так как любой полупростой модуль, будучи квазиинъективным, инъективен, то R нётерово справа по 20.3E. □

20.4C. Упражнение (Фейс [72b]). Напомним определение из гл. 19: эндоконечность — это конечная порожденность как модуля над кольцом эндоморфизмов. Пусть M — правый R-модуль и $\overline{R} = R/\operatorname{ann}_R M$.

(a) Доказать справедливость утверждений (1) — (4):

(1) Если $\overline{R}$ классически полупросто и является плоским левым R-модулем, то M $\sum$-инъективен и эндоконечен.

(2) Если M имеет $\sum$-инъективную оболочку $\hat{M}$ и $\overline{R}$ — регулярное кольцо, то $\overline{R}$ классически полупросто.

(3) Если M имеет $\sum$-инъективную оболочку $\hat{M}$ и кольцо $R/\operatorname{ann}_R \hat{M}$ регулярно, то $M = \hat{M}$ эндоконечен и $\overline{R}$ классически полупросто.

(4) Если M — полупростой эндоконечный правый R-модуль, то $\overline{R} = R/\operatorname{ann}_R M$ классически полупросто. Кроме того, M инъективен в mod-R тогда и только тогда, когда $\overline{R}$ — плоский левый R-модуль.

(b) Для правого модуля M над регулярным кольцом R следующие условия эквивалентны:

(1) M имеет $\sum$-инъективную оболочку в mod-R.

(2) M имеет $\sum$-инъективную оболочку в mod-($R/\mathrm{ann}_R\, M$).

(3) $R/\mathrm{ann}_R\, M$ — классически полупростое кольцо.

(4) M — полупростой инъективный эндоконечный правый R-модуль.

(c) Если E — неразложимый инъективный модуль над R и E не содержит ненулевых вполне инвариантных подмодулей (т. е. E является NFI-модулем), то End E_R — тело (т. е. E является **эндопространством**) при условии, что в семействе правых идеалов вида $\{x^{\perp} \mid x \in E,\ x \neq 0\}$ кольца R существует максимальный элемент. Таким образом, любой неразложимый $\sum$-инъективный NFI-модуль является эндопространством.

(d) Кольцо R является правым кольцом Голди тогда и только тогда, когда $\hat{R}_R$ есть $\sum$-инъективный модуль.

(e) Если максимальное правое кольцо частных S кольца R классически полупросто, то S_R есть $\sum$-инъективный модуль.

(f) Если M — кообразующий категории mod-R, то M точен и каждый правый идеал кольца R принадлежит $\mathscr{A}_r(M,\ R)$ (Розенберг и Зелинский [61]).

*(g) (Длаб и Рингель [72b].) Любой эндоконечный кообразующий M категории mod-R сбалансирован (1, стр. 162). (Поскольку M точен, отсюда вытекает, что R изоморфно Biend M_R канонически.)

(h) (Морита [58].) Любой инъективный кообразующий над артиновым справа кольцом сбалансирован (применить (g)).

20.5. Предложение. *Если R — правое QI-кольцо, то оно нётерово справа, разлагается в прямое произведение простых колец и каждый неразложимый инъективный правый R-модуль является эндопространством.*

Доказательство. По 20.4B кольцо R нётерово справа. К тому же поскольку R — правое V-кольцо, то rad $R = 0$ (1, 7.32A, стр. 437), и потому R — полупервичное правое кольцо Голди (1, 9.9, стр. 483) или, что эквивалентно, правый порядок в классически полупростом кольце. В таком случае ввиду (1, 7.36A, стр. 440) R — прямое произведение простых колец, являющихся очевидным образом QI-кольцами. Последняя часть утверждения есть не что иное, как упражнение 20.4C (a). $\square$

Вполне разложимые модули

Модуль M называется **вполне разложимым**, если M — прямая сумма неразложимых модулей. (Заметьте аномалию: каждый неразложимый модуль вполне разложим!)

20.6. Теорема (Матлис [58], Папп [59].) *Если кольцо R нётерово, то каждый инъективный модуль вполне разложим.*

Доказательство. Пусть M — инъективный модуль. По 7.17 в M существует ненулевой однородный подмодуль, а тогда по лемме Цорна существует максимальное независимое множество $X = \{U_i \mid i \in I\}$ ненулевых однородных подмодулей. Пусть для щаждого $i \in I$ M_i есть инъективная оболочка модуля U_i, лежащая в M. Тогда каждый модуль M_i неразложим, а семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ также независимо: $\sum_{i \in I} M_i = \sum_{i \in I} \oplus M_i$. Так как R нётерово, то по теореме Картана — Эйленберга — Басса 20.1 $M' = \sum_{i \in I} \oplus M_i$ — инъективный модуль и, следовательно, прямое слагаемое модуля M, т. е. $M = M' \oplus N$. Если бы модуль N был отличен от нуля, то он содержал бы однородный подмодуль W, и тогда семейство $\{W\} \cup X$ однородных подмодулей было бы независимым в противоречие с максимальностью семейства X. Следовательно, $N = 0$ и модуль $M = M' = \sum_{i \in I} \oplus M_i$ вполне разложим. $\square$

Папп показал, что это свойство характеризует нётеровы кольца (см. 20.9).

20.6A. Следствие (Кайо — Рено [70]). *Квазиинъективный модуль M является $\sum$-квазиинъективным* [1]) *тогда и только тогда, когда $\hat{M}$ $\sum$-инъективен (и тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов, аннулируемых подмножествами модуля M). А это так в том и только том случае, когда M есть прямая сумма $\sum$-квазиинъективных неразложимых модулей.*

Доказательство. Остается в качестве упражнения (см. 20.3A и доказательство 20.6). $\square$

Характеризации нётеровых колец

20.7. Теорема (Фейс — Уокер Э. [67]). *Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда существует кардинальное число c, такое, что любой инъективный правый R-модуль разлагается в прямую сумму модулей, каждый из которых порождается c элементами* (ср. 20.19).

[1]) То есть $M^{(A)}$ квазиинъективен для любого множества A индексов. — *Прим. перев.*

Доказательство. Если R нётерово справа, то по 20.6 каждый инъективный модуль есть прямая сумма неразложимых инъективных модулей. Поскольку каждый неразложимый инъективный модуль D есть инъективная оболочка $\hat{C}$ любого своего ненулевого циклического подмодуля C, то достаточно показать, что существует кардинальное число c, такое, что каждый такой модуль D порождается c элементами. Поскольку класс всех классов изоморфных циклических модулей является множеством, то и класс всех классов изоморфных неразложимых инъективных модулей есть множество, скажем $\{M_i \mid i \in I\}$. Если c_i — мощность системы образующих модуля M из класса M_i, то $c = \sum_{i \in I} c_i$ (кардинальная сумма) — требуемое кардинальное число.

Обратно, допустим, что такое кардинальное число существует. Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда каждая прямая сумма инъективных модулей инъективна (20.1). По нашему предположению достаточно показать, что если M — прямая сумма $\sum_{i \in I} \oplus M_i$ инъективных модулей M_i, каждый из которых порождается c элементами, то M инъективен. Для простоты пусть c — бесконечное кардинальное число, большее или равное $|R|$. Мы можем предположить также, что множество I бесконечно.

Пусть B — множество мощности, строго большей, чем 2^{cd}, где $d = |I|$. Для каждого $i \in I$ пусть $N_i = \prod_{b \in B} M_{i,b}$ — прямое произведение $|B|$ экземпляров модуля M_i и $P = \prod_{i \in I} N_i$. Так как прямое произведение инъективных модулей всегда инъективно, то модули N_i инъективны для всех i и инъективен P. По предположению мы можем записать $P = \sum_{g \in G} \oplus Q_g$, где каждый из модулей Q_g порождается c элементами. Вполне упорядочим множество I и выберем одно из прямых слагаемых M_{1, b_1} модуля N_1. Так как M_{1, b_1} порождается c элементами, причем c бесконечно, и так как каждый элемент из M_{1, b_1} содержится в прямой сумме конечного числа модулей Q_g, $g \in G$, то M_{1, b_1} содержится в $P_1 = \sum_{g \in G_1} Q_g$, где G_1 — подмножество множества G, состоящее из c элементов. Поскольку каждый из Q_g порождается c элементами, то P_1 порождается $c^2 = c$ элементами. Следовательно, $|P_1| \leqslant c|R| \leqslant c^2 = c$, а значит, мощность множества подмножеств в P_1 не превосходит 2^c. Так как $\{M_{2,b} \cap P_1 \mid b \in B\}$ — независимое семейство подмодулей модуля P_1, а $|B| > 2^c$, то $M_{2, b_2} \cap P_1 = 0$ для некоторого $b_2 \in B$. Проекция φ модуля M_{2, b_2} в $\sum_{g \in G - G_1} Q_g$ есть мономорфизм, $\varphi(M_{2, b_2}) \subseteq P_2 = \sum_{g \in G_2} Q_g$, где G_2 — подмножество множества G, состоящее из c элементов и такое, что $G_1 \cap G_2$ пусто.

Предположим, что для $\alpha \in I$ существуют взаимно непересекающиеся подмножества $\{G_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ множества G, такие, что $|G_\gamma| = c$, а $P_\gamma = \sum_{g \in G_\gamma} Q_g$ содержит экземпляр M_{γ, b_γ} модуля M_γ. Пусть $H_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$, и положим $S_\alpha = \sum_{g \in H_\alpha} Q_g = \sum_{\gamma<\alpha} P_\gamma$. Так как каждый P_γ порождается c элементами и $|H_\alpha| \leqslant c \cdot d$, то отсюда следует, что $|S_\alpha| \leqslant c \cdot d \cdot c = c \cdot d$, и потому S_α имеет не более чем $2^{c \cdot d}$ подмножеств. Поскольку $|B| > 2^{c \cdot d}$, то в силу предыдущих рассуждений существует $b_\alpha \in B$, такой, что $M_{\alpha, b_\alpha} \cap S_\alpha = 0$. Таким образом, существует подмножество G_α, не пересекающееся с H_α и порождающееся c элементами, такое, что $P_\alpha = \sum_{g \in G_\alpha} Q_g$ содержит экземпляр M_{α, b_α} модуля M_α. По трансфинитной индукции получаем подмножества G_α и модули P_α для всех $\alpha \in I$. Пусть $H = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$P = \sum_{\alpha \in I} P_\alpha \oplus \sum_{g \notin H} Q_g.$$

Поскольку M_{α, b_α} инъективен, а P_α содержит модуль, изоморфный M_{α, b_α}, то M_{α, b_α} изоморфен прямому слагаемому модулю P_α для любого $\alpha \in I$. Так как $\sum_{\alpha \in I} P_\alpha$ — прямое слагаемое модуля P и P инъективен, то модуль $\sum_{\alpha \in I} M_{\alpha, b_\alpha}$, будучи изоморфным прямому слагаемому модулю P, инъективен. Так как $M \approx \sum_{\alpha \in I} M_{\alpha, b_\alpha}$, то M инъективен. □

Условие, сформулированное в доказанной теореме, впервые, по-видимому, было изучено Чейзом [60, лемма 4.1]. В этой статье в лемме, приписываемой Бассу, доказывается, что любое полупримарное кольцо, удовлетворяющее ему, артиново справа.

20.8. Следствие. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R нётерово справа;*

(b) *существует кардинальное число d, такое, что каждый инъективный правый R-модуль есть прямая сумма инъективных оболочек модулей (порожденных множеством) мощности $\leqslant d$;*

(c) *существует подкласс S класса* mod-R, *удовлетворяющий следующим двум условиям:*

(1) *S — множество;*

(2) *каждый инъективный объект в* mod-R *изоморфен прямой сумме объектов из S.*

Доказательство. Два утверждения, сформулированные в условии (b) (с пропуском заключенного в скобки и без скобок), эквивалентны (при условии, что используются различные кардинальные числа d и d'!).

Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) непосредственно следует из теоремы 20.7.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть F — свободный модуль, изоморфный $R^{(d)}$. Тогда каждый инъективный модуль является прямой суммой инъективных оболочек фактормодулей модуля F, т. е. модулей вида $\widehat{F/K}$. Так как $\{\widehat{F/K} \mid K \subseteq F\}$ — множество, то его и можно выбрать в качестве множества S, удовлетворяющего условию (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Если в теореме 20.7 в качестве c взять мощность множества S, то ее условия будут выполнены, и потому R нётерово справа. $\square$

20.9. Следствие (теорема Паппа [59]). *Если каждый инъективный правый R-модуль есть прямая сумма неразложимых модулей, то R нётерово справа.* $\square$

20.10. Упражнения.

20.10.1. (a) Если R — правый порядок в кольце S и S удовлетворяет условию максимальности для R-подмодулей, то $S = R$.

(b) Пусть кольцо R нётерово справа и содержит такой максимальный нильпотентный идеал N, что инъективная оболочка $E({}_RR/N)$ конечно порождена (в mod-R). Тогда R артиново справа. [*Указание*: сначала предположить, что $N = 0$. Тогда по теореме Голди R — правый порядок в классически полупростом кольце. В общем случае показать, что $\bar{R} = R/N$ наследует сформулированное свойство, т. е. что $E({}_{\bar{R}}\bar{R})$ — конечно порожденный $\bar{R}$-модуль.]

(c) Если R нётерово справа и инъективные оболочки циклических модулей конечно порождены, то R артиново справа. (Обратное неверно, ср. Розенберг — Зелинский [59].)

20.10.2. (a) Если однородный R-модуль конечно порожден и проективен, то он изоморфен правому идеалу кольца R.

(b) Каждый неразложимый инъективный проективный модуль изоморфен прямому слагаемому модуля R_R.

Инъективные оболочки конечно порожденных модулей

Пусть $\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M. В этом разделе мы столкнемся со следующим условием: если C — циклический или конечно порожденный модуль, то $\hat{C}$ конечно порожден. Это условие для артиновых колец было изучено Розенбергом и Зелинским [59]. Мы покажем, что каждое нётерово кольцо, удовлетворяющее этому условию, должно быть артиновым. Характерно, что все неприятности причиняет единственный циклический модуль, а именно R по модулю максимального нильпотентного идеала N.

20.11. Лемма. *Если R — нётерово справа полупервичное кольцо и инъективная оболочка $\hat{R}$ модуля R_R конечно порождена, то R классически полупросто и $R = \hat{R}$.*

Доказательство. По теореме Голди (9.12) R обладает единственным классическим правым кольцом частных $Q = \{ab^{-1} \mid a,\ b \in R,\ b$ регулярен$\}$, являющимся классически полупростым. Если $q = ab^{-1} \in Q$ и $q \neq 0$, то $a = qb$ — ненулевой элемент пересечения $qR \cap R$. Это показывает, что Q — существенное расширение модуля R_R, так что мы можем предположить, что $R \subseteq Q \subseteq \hat{R}$. [На самом деле, отсюда уже вытекает, что Q — инъективный R-модуль (доказательство?), так что мы могли бы считать, что $Q = \hat{R}$, но в доказательстве леммы нам это не нужно.]

Так как $\hat{R}$ конечно порожден, то это нётеров модуль. Если b — регулярный элемент кольца R, то $b^{-1} \in Q$ и $b^{-n}a = b^{-(n+1)}(ba)$ для любого $a \in R$. Таким образом,

$$R \subseteq b^{-1}R \subseteq \ldots \subseteq b^{-n}R \subseteq \ldots .$$

Так как $\hat{R}$ нётеров, то $b^{-n}R = b^{-(n+1)}R$ для некоторого n, поэтому $b^{-(n+1)} = b^{-n}a$ — для некоторого $a \in R$. Но тогда $b^{-1} = a \in R$. Поскольку это верно для всех регулярных элементов $b \in R$, то $Q = R$, т. е. R классически полупросто. $\square$

20.12. Теорема. *Если кольцо R нётерово справа, N — максимальный нильпотентный идеал и $\widehat{R/N}$* (инъективная оболочка R-модуля R/N) *— конечно порожденный правый R-модуль, то R артиново справа.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля R/N в категории mod-(R/N). Тогда Q является R-модулем и, как таковой, существенным расширением R-модуля R/N. Итак, мы можем считать, что имеют место включения $R/N \subseteq Q \subseteq \widehat{R/N}$. Поскольку $\widehat{R/N}$ конечно порожден, а R нётерово, то Q конечно порожден как R-модуль, а следовательно, и как R/N-модуль. По доказанной лемме R/N классически полупросто. Отсюда вытекает, что R — полупримарное нётерово справа кольцо, и применение теоремы Гопкинса и Левицкого (18.12) устанавливает, что R артиново справа. $\square$

20.13. Следствие. *Если R нётерово справа и инъективные оболочки циклических (соотв. конечно порожденных) модулей в* mod-R *конечно порождены, то R артиново справа.* $\square$

20.14. Предложение. *Пусть a, b — кардинальные числа, причем $a > b$. Предположим, что модуль C порождается b элементами в* mod-R, *а его инъективная оболочка $\hat{C}$ содержится в прямой сумме модулей, каждый из которых порождается менее чем a элементами. Тогда*

(i) *если $a = \aleph_0$, то $\hat{C}$ конечно порожден;*

(ii) *если $b \geqslant \aleph_0$, то $\hat{C}$ порождается a элементами.*

Доказательство. Пусть $\{Q_i \mid i \in I\}$ — семейство объектов в mod-R, такое, что $\hat{C}$ содержится в их прямой сумме, а каждый из Q_i порождается a элементами. Поскольку каждый образующий модуля C содержится в прямой сумме конечного числа Q_i, то C содержится в $K = \sum_{i \in I'} \oplus Q_i$, где I' — подмножество множества I с такими свойствами:

$$b < \aleph_0 \Rightarrow c = \operatorname{card} I' < \aleph_0,$$

$$b \geqslant \aleph_0 \Rightarrow c = \operatorname{card} I' \leqslant b.$$

Пусть теперь f — проекция модуля $\sum_{i \in I} \oplus Q_i$ на K. Так как $\ker f \cap C = 0$, то $\ker f \cap \hat{C} = 0$, и тем самым показано, что f — вложение $\hat{C}$ в K. Если $a = \aleph_0$, то $b < \aleph_0$ и $c < \aleph_0$, поэтому K — прямая сумма конечного числа конечно порожденных модулей, т. е. K конечно порожден. Но тогда конечно порожденным будет и любое его прямое слагаемое, в частности $f(\hat{C})$, откуда следует, что $\hat{C}$ конечно порожден.

Если $b \geqslant \aleph_0$, то $c \leqslant b$, поэтому K порождается $ca = a$ элементами, так что в этом случае как $f(\hat{C})$, так и $\hat{C}$ порождаются a элементами. $\square$

20.15. Теорема. *Для произвольного кольца R неразложимый инъективный и проективный правый R-модуль M изоморфен прямому слагаемому модуля R_R, т. е. существует идемпотент $e \in R$, такой, что $M \approx eR$.*

Доказательство. Запишем $M = \hat{C}$ (т. е. M — инъективная оболочка модуля C), где C — какой-нибудь ненулевой циклический подмодуль модуля M. Так как M проективен, то $\hat{C}$ содержится в прямой сумме некоторого множества экземпляров кольца R, и доказательство предложения 20.14 показывает, что $\hat{C}$ содержится в прямой сумме $R^{(n)} = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ n экземпляров кольца R. Следовательно, существует наименьшее целое число k, такое, что $R^{(k)} = R_1 \oplus \ldots \oplus R_k$ содержит экземпляр B модуля $\hat{C}$. Поскольку B неразложим и инъективен, то любые его два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Таким образом, если $k > 1$, то B не может иметь ненулевое пересечение с каждой компонентой R_i модуля $R^{(k)}$. Но если, например, $B \cap R_k = 0$, то проекция $R^{(k)}$ на $R^{(k-1)} = R_1 \oplus \ldots \oplus R_{k-1}$ индуцирует вложение B в $R^{(k-1)}$, что противоречит выбору числа k. Итак, $k = 1$, поэтому $B \subseteq R_1$ и B, будучи инъективным модулем, выделяется прямым слагаемым в модуле R_1. Таким образом, $\hat{C}$ изоморфен прямому слагаемому модуля R_R. $\square$

20.16. Следствие. *Однородный R-модуль U вкладывается в свободный R-модуль F тогда и только тогда, когда он вкладывается в R.*

Доказательство. Пусть $U \to F$ — вложение однородного R-модуля U в свободный R-модуль $F \approx \sum_{i \in I} \oplus R_\alpha$. Пусть B — любой ненулевой конечно порожденный подмодуль модуля U. Тогда B содержится в конечно порожденном свободном подмодуле $S = R_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus R_{\alpha_n}$ модуля F и доказательство теоремы 20.15 показывает, что $B \to U \to F \xrightarrow{p_\alpha} R_\alpha$ — мономорфизм для некоторого $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $p_\alpha \colon F \to R_\alpha$ — естественная проекция. Пусть $K = \ker(U \to F \xrightarrow{p_\alpha} R_\alpha)$. Тогда $K \cap B = 0$, и поскольку U однороден, а $B \neq 0$, то $K = 0$. Таким образом, $U \to F \xrightarrow{p_\alpha} R_\alpha$ — искомое вложение. $\square$

Прямые суммы конечно и счетно порожденных модулей

Теорема Капланского утверждает, что если модуль M является прямой суммой счетно порожденных модулей, то каждое прямое слагаемое модуля M обладает тем же свойством (Капланский [58a]). Мы воспользуемся этим результатом для доказательства следующей теоремы (Фейс — Уокер [67]), обобщающей теорему Коэна — Капланского [51] и Чейза [60].

20.17. Предложение. *Если каждый модуль из* mod-R *содержится в прямой сумме конечно порожденных модулей, то R артиново справа* (ср. 20.23).

Доказательство. Если M инъективен, то он выделяется прямым слагаемым в каждом своем надмодуле. Поэтому в силу теоремы Капланского M — прямая сумма счетно порожденных модулей. Но тогда из теоремы 20.7 вытекает, что R нётерово справа. Пусть теперь C — циклический модуль. Тогда $\hat{C}$ содержится в прямой сумме конечно порожденных модулей, и потому в силу 20.14 он конечно порожден. Применение 20.13 дает артиновость справа кольца R. □

20.18. Следствие. *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда оно артиново в том и только том случае, когда каждый инъективный R-модуль есть прямая сумма конечно порожденных модулей.*

Доказательство. В одну сторону утверждение следует из предыдущей теоремы. Обратно, пусть R — коммутативное артиново кольцо. Тогда, поскольку R нётерово, любой инъективный модуль M — прямая сумма неразложимых модулей. По теореме Мориты (см. упражнения в конце главы) неразложимый инъективный модуль над R конечно порожден. □

Если R — кольцо со свойством, сформулированным в предложении 20.17, то каждый конечно порожденный модуль C содержится в прямой сумме конечно порожденных модулей, и тогда из 20.14 вытекает, что $\hat{C}$ конечно порожден. Иначе говоря, если C — модуль конечной длины, то $\hat{C}$ также имеет конечную длину. Розенберг и Зелинский [59] показали, что, вообще говоря, артиновы справа кольца не обладают последним свойством и, следовательно, не имеют и предыдущего свойства.

К. Уокер [66] обобщила теорему Капланского следующим образом: если модуль M является прямой суммой модулей, каждый из которых порождается c элементами, где c — бесконечный кардинал, то каждое прямое слагаемое модуля M разлагается в прямую сумму модулей, каждый из которых порождается c элементами. Используя эту теорему, мы можем обобщить 20.7 следующим образом:

20.19. Теорема. *Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда существует кардинальное число c, такое, что каждый правый R-модуль содержится в прямой сумме модулей, порожденных c элементами.*

Доказательство. Если R нётерово справа, то 20.7 и тот факт, что каждый модуль содержится в инъективном модуле, дают требуемое c. Обратно, предположим, что такое c существует. Тогда обобщенная теорема Капланского вместе с 20.7 дает правую нётеровость кольца R. □

Кольца с условием минимальности для главных правых идеалов

Этот класс колец включает в себя помимо артиновых справа колец все полупримарные кольца ввиду теоремы Чейза (18.14). Кольца этого класса называются совершенными слева по причинам, подробнее обсуждаемым в гл. 22. В этом параграфе доказывается другая теорема Чейза, утверждающая, что кольцо R совершенно слева, если существует кардинал a, такой, что каждое прямое произведение экземпляров кольца R есть прямая сумма левых R-модулей, порожденных a элементами. Вместе с 20.7 это устанавливает, что любое кольцо, для которого последнее условие выполнено для всех модулей, обязательно артиново справа (20.23).

Упорядоченный класс C называется **возрастающим фильтром,** если C — направленное множество. Говорят также, что C *направлено вверх.* Противоположный, или дуальный, класс C^* называется тогда **убывающим фильтром** или *направленным вниз.* Говорят, что некоторое множество главных правых идеалов есть убывающий фильтр, если оно образует убывающий фильтр относительно порядка, определяемого включением, т. е. если

$$a,\ b \in R\ \&\ aR,\ bR \in F \Rightarrow \exists c \in R\ \&\ cR \in F\ \&\ cR \subset aR \cap bR.$$

20.20. Лемма Чейза. *Пусть* $A = \prod_{i \in \omega} {}^{(i)}A$ *и* $A_n = \prod_{i \leq n} {}^{(i)}A$, *где* $\{{}^{(i)}A\}_{i\in\omega}$ *— счетная последовательность объектов категории* R-mod. *Пусть* $C = \sum_{\alpha\in I} \oplus\, C_\alpha$ *— прямая сумма семейства* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *левых R-модулей,* $f\colon A \to C$ *— морфизм категории* R-mod, *и пусть* $f_\alpha\colon A \to C_\alpha$ *— композиция f и канонической проекции* $C \to C_\alpha$ *для каждого $\alpha \in I$. Тогда если F — какой-нибудь убывающий фильтр главных правых идеалов, то существуют $aR \in F$ и целое число $n > 0$, такие, что включение*

$$f_\alpha(aA_n) \subseteq \bigcap_{bR\in F} bC_\alpha$$

верно почти для всех $\alpha \in I$.

Доказательство (Чейз [61]). Допустим, что наше утверждение ложно, и построим по индукции последовательности $\{x_n\} \subseteq A$, $\{a_nR\} \subseteq F$ и $\{\alpha_n\} \subseteq I$, такие, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $a_nR \supseteq a_{n+1}R$;

(ii) $x_n \in a_nA_n$;

(iii) $f_{\alpha_n}(x_n) \not\equiv 0 \pmod{a_{n+1}C_{\alpha_n}}$;

(iv) $f_{\alpha_n}(x_k) = 0$ для $k < n$.

Приступим к построению следующим образом. Выберем какой нибудь a_1R из F. Тогда существует $\alpha_1 \in I$, такой, что $f_{\alpha_1}(a_1A_1) \nsubseteq \bigcap_{bR\in F} bC_{\alpha_1}$, и, следовательно, мы можем выбрать bR из F, такой, что $f_{\alpha_1}(a_1A_1) \nsubseteq bC_{\alpha_1}$. Поскольку F — фильтр главных правых идеалов, то существует $a_2 \in a_1R \cap bR$, такой, что $a_2R \in F$, откуда $f_{\alpha_1}(a_1A_1) \nsubseteq a_2C_{\alpha_1}$. Следовательно, существует $x_1 \in a_1A_1$, такой, что $f_{\alpha_1}(x_1) \not\equiv 0 \pmod{a_2C_{\alpha_1}}$. В этом случае все условия (i) — (iv), выписанные выше, выполняются для $n = 1$.

Продолжим индукцией по n; допустим, что уже построены последовательности $\{x_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ для $k < n$, а последовательность $\{a_kR\}$ построена для $k \leqslant n$, так что выполняются условия (i) — (iv). Тогда существуют $\beta_1, \ldots, \beta_r \in I$, такие, что если $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_r$, то $f_\alpha(x_k) = 0$ для всех $k < n$. Далее мы можем выбрать такое $\alpha_n \neq \beta_1, \ldots, \beta_r$, что $f_{\alpha_n}(a_nA_n) \nsubseteq \bigcap_{bR \in F} bC_{\alpha_n}$, так как если бы мы не смогли этого сделать, то теорема была бы верна. Следовательно, существует $bR \in F$, такой, что $f_{\alpha_n}(a_nA_n) \nsubseteq bC_{\alpha_n}$.

Так как F — фильтр главных правых идеалов, то существует $a_{n+1} \in a_nR \cap bR$, такой, что $a_{n+1}R$ принадлежит F, и в этом случае $f_{\alpha_n}(a_nA_n) \nsubseteq a_{n+1}C_{\alpha_n}$. Итак, мы можем выбрать $x_n \in a_nA_n$ так, что $f_{\alpha_n}(x_n) \not\equiv 0 \pmod{a_{n+1}C_{\alpha_n}}$. Теперь ясно, что последовательности $\{x_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ для $k \leqslant n$ и $\{a_kR\}$ для $k \leqslant n+1$ удовлетворяют условиям (i) — (iv), и, следовательно, построение всех трех последовательностей закончено.

Теперь запишем $x_k = (x_k^{(i)})$, где $x_k^{(i)} \in {}^{(i)}A$. Поскольку $x_k \in a_kA_k$, то $x_k^{(i)} = 0$ для всех $k > i$ и $x^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)}$ — корректно определенный элемент модуля ${}^{(i)}A$. К тому же так как $a_nR \supseteq a_{n+1}R \supseteq \ldots$, то существует $y_n^{(i)} \in {}^{(i)}A$, такой, что $x^{(i)} = x_1^{(i)} + \ldots + x_n^{(i)} + a_{n+1}y_n^{(i)}$. Поэтому, полагая $x = (x^{(i)})$ и $y_n = (y_n^{(i)})$, мы видим, что $x = x_1 + \ldots + x_n + a_{n+1}y_n$ для всех $n \geqslant 1$.

Из условий (iii) и (iv), выписанных выше, непосредственно вытекает, что $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$. Следовательно, существует n, такое, что $f_{\alpha_n}(x) = 0$. Записав установленное выше равенство $x = x_1 + \ldots + x_n + a_{n+1}y_n$, мы можем затем применить f_{α_n} и воспользоваться условием (iv) для того, чтобы вывести соотношение $f_{\alpha_n}(x_n) = -a_{n+1}f_{\alpha_n}(y_n) \equiv 0 \pmod{a_{n+1}C_{\alpha_n}}$ в противоречие с условием (iii). □

Как всегда, символ $|X|$ обозначает мощность множества X.

Подмодуль A' левого R-модуля A называется $\cap$-чистым, если $A' \cap aA = aA'$ для любого $a \in R$. (*Замечание*: каждое прямое слагаемое модуля A является чистым подмодулем. Ср. с понятием $\cap$-чистоты, обсуждавшимся в упражнении 19.21 и в абзацах, ему предшествующих.)

20.21. Следствие (Чейз). *Допустим, что существует бесконечное множество J, такое, что произведение $A = R^J$ является $\cap$-чистым подмодулем прямой суммы $C = \sum_{\gamma \in G} \oplus C_\gamma$ левых R-модулей C_γ, таких, что $|C_\gamma| \leqslant |J|$. Тогда R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов.* (*A по 22.29 R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов.*)

Доказательство. Так как множество J бесконечно, то легко видеть, что $A \approx \prod_{i=1}^{\infty} {}^{(i)}A$, где ${}^{(i)}A \approx A$, и поэтому без дальнейших церемоний мы отождествим A с $\prod_{i=1}^{\infty} {}^{(i)}A$. Пусть $f\colon A \to C$ — отображение включения и $f_\beta\colon A \to C_\beta$ — композиция f с проекцией модуля C на C_β. Наконец, положим $A_n = \prod_{i \leqslant n} {}^{(i)}A$.

Предположим, что наше утверждение ложно. Тогда существует строго убывающая бесконечная цепь $a_1R \supsetneqq a_2R \supsetneqq \ldots$ главных правых идеалов кольца R. Эти идеалы, конечно, составляют фильтр главных правых идеалов кольца R, и поэтому мы можем применить 20.20 и заключить, что существуют $n \geqslant 1$ и $\beta_1, \ldots, \beta_r$, такие, что $f_\beta(a_nA_n) \subseteq a_{n+1}C_\beta$ для $\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_r$.

Теперь положим $C' = C_{\beta_1} \oplus \ldots \oplus C_{\beta_r}$; тогда проекция C на C' индуцирует $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $g\colon a_nC/a_{n+1}C \to a_nC'/a_{n+1}C'$. Аналогично, ограничение f на A_n индуцирует $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $h\colon a_nA_n/a_{n+1}A_n \to a_nC/a_{n+1}C$. Подмодуль A_n — прямое слагаемое модуля A, являющегося чистым подмодулем в C, и поэтому A_n — также чистый подмодуль в C. Следовательно, h — мономорфизм. Теперь мы можем применить вывод предыдущего абзаца и получить, что композиция gh — мономорфизм. В частности, $|a_nA_n/a_{n+1}A_n| \leqslant |a_nC'/a_{n+1}C'| \leqslant |C'|$.

Заметим, что $|C'| \leqslant |J|$, так как J бесконечно и $|C_\beta| \leqslant |J|$ для всех β. Тем не менее, поскольку $a_nR \neq a_{n+1}R$, $a_nR/a_{n+1}R$ содержит по меньшей мере два элемента; поэтому $|a_nA_n/a_{n+1}A_n| = |a_nA/a_{n+1}A| \geqslant 2^{|J|} > |J|$. Таким образом, мы получили противоречие, и следствие тем самым доказано. □

20.22. Следствие (Бэр — Чейз). *Произведение $\mathbb{Z}^\omega$ не содержится в качестве чистой подгруппы ни в какой сумме счетно порожденных абелевых групп. В частности, $\mathbb{Z}$ — не свободная группа.* □

Теорема Шпекера утверждает, что любая счетно порожденная подгруппа группы $\mathbb{Z}^\omega$ свободна, а в группе всех ограниченных функций $\omega \to \mathbb{Z}$ любая подгруппа мощности, не превосходящей $\aleph$, свободна (Шпекер [50]). Некоторые обобщения см. у Дюбуа [66] и Нёбелинга [68]. Бергман [72b] предлагает другое доказательство. Капланский [69b, стр. 83] комментирует некоторые аспекты теоремы Шпекера.

Следующая теорема была независимо доказана Вамошем [71], Гриффитсом [70] и Фейсом [71c].

20.23. Теорема. *Если R — кольцо, для которого существует кардинальное число α, такое, что каждый правый R-модуль есть прямая сумма модулей, порожденных α (или меньшим числом) элементами, то R артиново справа.*

Доказательство. По доказанному выше следствию R должно удовлетворять условию минимальности для главных левых идеалов, а из этого вытекает, что $J = \operatorname{rad} R$ — ниль-идеал, т. е. каждый элемент $x \in J$ нильпотентен. (См. доказательство теоремы 22.29.) Поскольку по 20.7 R нётерово, то каждый ниль-идеал кольца R нильпотентен ввиду теоремы Левицкого 9.17. Условие минимальности для главных левых идеалов кольца R влечет за собой то же условие на кольцо R/J [1]), из чего вытекает левая артиновость кольца R/J. (См. доказательство теоремы 22.29.) Теперь применяется 18.12, и R оказывается артиновым справа кольцом. □

20.24. Следствие. *Пусть R — нётерово справа кольцо, не являющееся артиновым справа. Тогда существует кардинальное число α, такое, что каждый правый R-модуль содержится в прямой сумме модулей, порожденных α элементами, но не существует кардинального числа β, такого, что каждый правый R-модуль изоморфен прямой сумме модулей, порожденных β элементами.*

Доказательство. Применить 20.7 и 20.23. □

Говорят, что кольцо является **правым AD-кольцом**, если каждый правый модуль обладает диаграммой Адзумаи. (См. абзац *перед* 18.15.)

20.25. Следствие. *Правое AD-кольцо R полулокально, нётерово справа и является SBI-кольцом. Более того, если класс классов изоморфных неразложимых правых модулей является множеством, то R есть $\sum$-α-генное кольцо для некоторого α, и, следовательно, оно артиново справа.*

Доказательство. В силу 18.26 R — полулокальное SBI-кольцо. В силу 20.7 оно нётерово справа и, наконец, артиново справа по 20.23. □

Возможно, что *любое* правое AD-кольцо артиново справа. (Отметим, тем не менее, что над локальным кольцом R, полным в $\mathfrak{m}$-адической топологии, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца,

[1]) См. примечание на стр. 258.— *Прим. перев.*

каждый конечно порожденный модуль обладает диаграммой Адзумаи. К таким кольцам относятся кольца формальных степенных рядов над полем.)

Прямые разложения нётеровых колец

Теорема Веддербёрна — Артина может быть сформулирована таким образом:

Каждое кольцо R глобальной размерности 0 есть конечное прямое произведение артиновых первичных колец.

Конечно, все прямые сомножители являются простыми кольцами и, на самом деле, даже полными кольцами матриц над кольцами с делением (т. е. телами). (Кроме того, обратное утверждение также верно.) Эти утверждения доказаны в первом томе, точнее см: 1, 8.12, стр. 455; 1, 8.8, стр. 453; 1, 8.20, стр. 461.

Поскольку кольцо R нулевой глобальной размерности нётерово слева и справа, то для того, чтобы обобщить эту теорему на кольца глобальной размерности 1, т. е. на наследственные кольца, следует не упустить из виду нётеровость. Это и сделал Чаттерс [72].

Теорема Чаттерса (20.30). *Нётерово наследственное кольцо R есть прямое произведение конечного числа артиновых колец и первичных колец.*

Таким образом, строение наследственных нётеровых колец может быть описано с помощью двух категорий, а именно категории артиновых колец и категории первичных колец.

Доказательство теоремы Чаттерса начнем с леммы, выясняющей, когда циклический модуль вкладывается в свободный модуль.

20.26. Лемма. *Пусть I — правый идеал кольца R. Тогда R/I вкладывается в свободный модуль F (соотв. в прямое произведение $F = R^\alpha$ некоторого множества экземпляров кольца R) в том и только том случае, когда существует конечное подмножество (соотв. подмножество) $X \subseteq R$, такое, что $X^\perp = I$, где $X^\perp = \{r \in R \mid xr = 0$ для всех $x \in X\}$. При этом свободный модуль F может быть выбран конечно порожденным.*

Доказательство. Пусть $f\colon R/I \to R^\alpha$ — вложение в прямое произведение R^α. Тогда $I = X^\perp$, где X — множество ненулевых проекций в R элемента $f([1+I])$ из R^α. Если f — вложение в свободный модуль, то X, очевидно, конечно. Обратно, если дано, что $I = X^\perp$, где $X \subseteq R$, то имеет место вложение $f\colon R/I \to R^X$, переводящее $[a+I]$ в $(\ldots, xa, \ldots) \in R^X$, $x \in X$. Если X конечно, то R^X оказывается конечно порожденным свободным модулем.

Эта лемма будет использована еще раз в гл. 24.

20.27. Лемма. *Если кольцо R нётерово слева и полунаследственно справа, то каждый правый аннуляторный идеал I кольца R проективен и $I = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$.*

Доказательство. Тот факт, что I — правый аннуляторный идеал, скажем $I = A^{\perp}$ для некоторого левого идеала A кольца R, влечет за собой в силу леммы 20.26, что R/I вкладывается в R^n. Отсюда и из того, что R полунаследственно, вытекает, что R/I проективен. Таким образом, эпиморфизм $R \to R/I \to 0$ расщепляется, и потому $I = eR$ для некоторого $e = e^2 \in R$. □

Говорят, что модуль M обладает **ограниченным условием минимальности,** если модуль M/N артинов для любого существенного подмодуля N. Теорема Чаттерса 20.30 опирается на его лемму, утверждающую, что любое нётерово слева наследственное справа кольцо удовлетворяет некоторой разновидности ограниченного условия минимальности, а именно условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов, содержащих конечно порожденный существенный правый идеал. Доказательство его леммы показывает, что на самом деле справедлива следующая более общая лемма.

20.28. Лемма. *Если кольцо R нётерово слева и антисингулярно справа, а J — конечно порожденный проективный существенный правый идеал, то R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных проективных правых идеалов, содержащих J.*

Доказательство. Поскольку R антисингулярно справа, то существует максимальное правое кольцо частных Q, являющееся инъективным правым R-модулем (19.35). Таким образом, для любого существенного правого идеала I мы можем отождествить $I^* = \mathrm{Hom}_R(I, R)$ с множеством

$$\{q \in Q \mid qI \subseteq R\}.$$

(Ясно, что любой элемент $f: I \to R$ индуцируется элементом $q_f \in Q$ и q_f единствен, поскольку сингулярный подмодуль модуля Q равен 0.) Если, кроме того, I конечно порожден и проективен, то модуль I^* конечно порожден (и проективен) в R-mod и, следовательно, нётеров. Кроме того, $I^{**} = \{k \in Q \mid I^*k \subseteq R\}$ совпадает с I. Удостоверимся сначала в справедливости последнего утверждения. В силу проективности и конечной порожденности идеала I существуют элементы $\{x_i\}_{i=1}^n$ в I и $\{q_i\}_{i=1}^n$ в I^*

такие, что

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i(y) \text{ для всех } y \in I.$$

Поэтому $t = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$ аннулирует I. Так как I — существенный правый идеал, то t лежит в правом сингулярном идеале кольца R и, следовательно, $t = 0$; поэтому $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$. Но тогда из $I^*k \subseteq R$ следует, что

$$k = \sum_{i=1}^{n} x_i (q_i k) \in I$$

как и утверждалось. Теперь для любой цепи

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

конечно порожденных проективных правых идеалов $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, содержащих некоторый конечно порожденный проективный существенный правый идеал J, имеем

$$J^* \supset \ldots \supset I_n^* \supset \ldots \supset I_2^* \supset I_1^* .$$

Так как J^* — конечно порожденный модуль над нётеровым слева кольцом R, то он нётеров, из чего вытекает, что $I_n^* = I_{n+1}^*$, и, следовательно, $I_n = I_{n+1}$ для некоторого n. □

20.29. Следствие (Веббер [70], Чаттерс [71]). *Если R — наследственное нётерово кольцо, то R удовлетворяет левому и правому ограниченным условиям минимальности. Кроме того, любой конечно порожденный R-модуль M удовлетворяет ограниченному условию минимальности.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из леммы, а второе предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Теорема Чаттерса

20.30. Теорема о разложении (Чаттерс [72]). *Если R — нётерово справа и слева наследственное справа и слева кольцо, то оно разлагается в конечное прямое произведение $\prod_{i=1}^{n} R_i$, где R_i — либо артиновы, либо первичные кольца.*

Доказательство. Представим R в виде кольцевого прямого произведения $R \approx \prod_{i=1}^{n} R_i$ конечного числа неразложимых в категории RINGS колец. (Это возможно, поскольку R нётерово.) Следовательно, мы можем предположить, что R неразложимо и не первично. Тогда оно содержит первичный идеал P, отличный от 0 и R. Если P существен как правый или как левый идеал, то R/P артиново по 20.29, и в таком случае само R артиново по лемме 18.34B. Таким образом, мы можем считать, что P не существен, и потому $P \cap I = 0$ для некоторого одностороннего, скажем правого, идеала I, не равного нулю. Тогда $IP \subseteq I \cap P = 0$, поэтому $A = {}^{\perp}P \supseteq I$. Положим $B = A^{\perp}$. Тогда $AB = 0 \subseteq P$, и, поскольку $I \not\subseteq P$, то $A \not\subseteq P$, а следовательно, $B \subseteq P$. Но $B \supseteq P$, поэтому $B = P$ — правый аннуляторный идеал. Теперь лемма 20.27 показывает, что $P = eR$ для некоторого $e = e^2 \in R$. Двойственным образом, $P = Rf$ для $f = f^2 \in R$, откуда $e = f$ — центральный идемпотент. Итак, $R = P \oplus A$ — кольцевое прямое произведение, что противоречит неразложимости кольца R. Это противоречие и завершает доказательство теоремы. □

20.31. Пример. Эта теорема не может быть распространена на односторонние нётеровы и односторонние наследственные кольца, поскольку, как указывает Чаттерс, кольцо R верхних треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

наследственно справа и нётерово справа, но не наследственно слева (по существу, из-за того, что $\mathbb{Q}$ — не проективный $\mathbb{Z}$-модуль) и, следовательно, не нётерово слева. Кроме того, R не первично и не артиново.

Хотя 20.31 показывает, что теорема Чаттерса не верна для нётеровых справа наследственных справа колец, мы сейчас докажем теорему Леви, которая дает искомое разложение для полупервичных колец, удовлетворяющих условию, значительно более слабому, чем правая наследственность и правая нётеровость. Напомним из замечаний к гл. 17, что кольцо R называется **правым PP-кольцом**, если каждый его правый главный идеал проективен. (Заметим, что любая область целостности тривиальным образом является PP-кольцом.)

20.32. Теорема (Леви [63b]). *Полупервичное правое* PP*-кольцо, являющееся правым кольцом Голди, разлагается в конечное прямое произведение первичных правых* PP*-колец, являющихся правыми кольцами Голди. Более того, такое разложение единственно, и его первичные сомножители суть минимальные аннуляторные идеалы кольца R. В частности, любое полунаследственное справа полупервичное правое кольцо Голди обладает таким разложением.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (ср. 19.37(a)). □

20.33. Следствие. *Если кольцо частных $Q(R)$ коммутативного* PP*-кольца есть конечное прямое произведение полей, то R — конечное прямое произведение областей целостности. Верно и обратное.* □

20.34. Теорема (Смолл [66a]). *Наследственное* (*справа*) *нётерово справа кольцо R обладает* (*правым*) *кольцом частных $Q(R)$.*

Доказательство. В случае двустороннего условия это вытекает из теоремы Чаттерса, так как в этом случае R есть конечное прямое произведение первичных и артиновых колец. Тогда любой первичный прямой сомножитель A также нётеров справа и, следовательно, $Q(A)$ существует в силу следствия теоремы Голди и Лезье — Круазо (1, 9.10, стр. 484). И, конечно, для любого артинова кольца $Q(A) = A$. Итак, $Q(R)$ есть прямое произведение колец частных прямых сомножителей.

Односторонний случай остается в качестве упражнения. □

Теорема Робсона

Есть три теоремы о некоторых классах нётеровых (слева и справа) колец, которые приводят к одинаковому выводу — а именно что кольцо каждого из этих классов разлагается в прямую сумму полупервичного и артинова колец,— но доказательства этих теорем совершенно различны. Одна — теорема Крулля [24], Асано [38], [49a], Голди [62] — касается колец главных правых идеалов; другая — теорема Чаттерса [72] — касается наследственных колец; а третья — теорема Уорфилда [75] [1]) — касается полуцепных колец [2]). Следующая теорема представляет собой критерий Робсона для существования такого разложения, который без труда проверяется в упомянутых случаях.

Радикалом Веддербёрна кольца R называется максимальный нильпотентный идеал в предположении, что он существует. (Конечно, в нётеровом справа или слева кольце он существует всегда.)

[1]) См. также Кириченко В. В., *Матем. сб.*, 99 (1976), № 4, 559—580.— *Прим. перев.*

[2]) См. гл. 25, в частности 25.3.5.

Для кольца R с радикалом Веддербёрна N через $\mathscr{D}(N)$ обозначим множество $\{c \in R \mid c + N$ — регулярный элемент в $R/N\}$

20.35. Теорема (Робсон [74]). *Если R — нётерово кольцо с радикалом Веддербёрна N, то оно разлагается в прямую сумму полупервичного кольца и артинова кольца тогда и только тогда, когда $cN = Nc = N$ для всех $c \in \mathscr{D}(N)$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Поэтому предположим, что $cN = Nc = N$ для всех $c \in \mathscr{D}(N)$. Это предположение о кольце R наследуется всеми фактор-кольцами R/N^m. Из нашего предположения вытекает, что каждый элемент $c \in \mathscr{D}(N)$ регулярен и в кольце R (поскольку отображение $N \to cN$, являясь сюръективным эндоморфизмом нётерова модуля N, есть автоморфизм). Это позволяет стандартным способом рассматривать N^m/N^{m+1} как левый и правый модуль над кольцом частных Q кольца R/N (которое существует по теореме Голди — Лезьё — Круазо (1, 9.9, стр. 483)). Пусть $Q = Q_1 \oplus Q_1'$, где Q_1 — некоторый простой артинов прямой сомножитель кольца Q. Предположим, что $Q_1 \cdot (N^m/N^{m+1}) \neq 0$ для некоторого m. Тогда, являясь Q_1-модулем, $Q_1 \cdot (N^m/N^{m+1})$ изоморфен прямой сумме минимальных левых идеалов кольца Q_1, а как левый R/N-модуль он конечно порожден. Эти факты, собранные вместе, показывают, что Q_1 — конечно порожденный левый R/N-модуль (структура левого R/N-модуля на Q_1 индуцируется вложением R/N в Q). Отсюда легко следует, что $Q_1 \subseteq R/N$ и

$$R/N = Q_1 \oplus (Q_1' \cap (R/N)).$$

(Существует $b \in \mathscr{D}(N)$, такой, что $Q_1\bar{b} \subseteq \bar{R}_1 = R/N$. Поскольку $Q_1\bar{b} = Q_1$, то $Q_1 \subseteq R/N$, и утверждение доказано.)

Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $R/N = S \oplus T$, где S полупросто и артиново, а T — полупервичное кольцо, такое, что

$$T(N^m/N^{m+1}) = (N^m/N^{m+1})T = 0$$

для всех m. Пусть $e = e^2$ — прообраз в R единицы кольца T. Тогда $eN^m \subseteq N^{m+1}$ и $N^m e \subseteq N^{m+1}$ для всех m, и поэтому $eN = Ne = 0$. Следовательно,

$$R = eRe \oplus (1-e)R(1-e).$$

Конечно, $eRe = T$, а $(1-e)R(1-e)$, будучи нётеровым кольцом, которое по модулю своего первичного радикала изоморфно S, артиново (18.12). □

Если для нётерова кольца R предположить только, что $cN = N$ для всех $c \in \mathscr{D}(N)$, то приведенное выше доказательство даст изоморфизм

$$R \approx \begin{pmatrix} (1-e)R(1-e) & (1-e)Re \\ 0 & eRe \end{pmatrix},$$

где кольцо $(1-e)R(1-e)$ артиново, а eRe полупервично. Иллюстрацией этого результата является пример Смолла [66с]

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/(p) & \mathbb{Z}/(p) \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

который также показывает, что R не всегда разложимо. Но в частном случае мы имеем такой результат:

20.36. Теорема. *Если R — нётерово кольцо, радикал Веддербёрна N которого первичен, и если $cN = N$ для всех $c \in \mathscr{D}(N)$, то R либо первично, либо артиново.* □

Снова теорема Чаттерса

Заметим, что теперь у нас появилась возможность, используя теорему Робсона 20.35, дать несколько иное доказательство теоремы Чаттерса. Сейчас мы просто проверим выполнимость условий теоремы 20.35:

Каждый элемент $c \in \mathscr{D}(N)$ регулярен в R (поскольку его левый и правый аннуляторы содержатся в N и в то же время порождаются идемпотентами), и к тому же кольцо $R/{}^{\perp}N$ артиново ввиду 20.29 и 9.4.3. Последний факт показывает, что $c^nR + {}^{\perp}N = c^{n+1}R + {}^{\perp}N$ для некоторого n, и, следовательно, $c^nN = c^{n+1}N$. Теперь первое утверждение позволяет сделать вывод, что $cN = N$. □

20.37. Теорема (Крулль [24], Асано К. [38], [49а], Голди [62]). *Нётерово слева кольцо главных правых идеалов R есть конечное прямое произведение первичных колец и примарных артиновых колец.*

Доказательство. Пусть N — максимальный идеал. Тогда $\bar{R} = R/N$ — полупервичное кольцо главных правых идеалов. Каждый правый идеал I кольца $\bar{R}$ есть прямое слагаемое существенного правого идеала $K = I + J$, где J — дополнительный правый идеал правого идеала I. Кроме того, любой существенный правый идеал в полупервичном правом кольце Голди содержит регулярный элемент (см. доказательство теоремы 1, 9.9, стр. 483). Теперь $K = x\bar{R}$ — главный правый идеал, содержащий регулярный элемент y, откуда вытекает, что x также регулярен, так что $K \approx \overline{R}$ — проективный $\overline{R}$-модуль. Это доказывает, что I проективен, т. е. $\overline{R}$ наследственно справа. Но в таком случае теорема Леви 20.32 позволяет разложить $\overline{R}$ в конечное прямое произведение первичных колец, а по ключевой лемме Робсона [67, теорема 2.2] о поднятии разложений это разложение может быть поднято: R оказывается конечным прямым произведением колец, максимальный нильпотентный идеал каждого из которых является первичным идеалом. В предположении, что максимальный нильпотентный идеал кольца R является первичным идеалом, можно применить теорему 20.36. Пусть $c \in \mathscr{D}(N)$. Тогда $cR + N = dR$ для некоторого d. Поскольку $d \in \mathscr{D}(N)$ и $dR \supseteq N$, то ясно, что $dN = N$. Но тогда $cN = N (\mathrm{mod}\ N^2)$, откуда по лемме Накаямы $cN = N$.

Поэтому ввиду 20.36 неразложимые кольцевые слагаемые кольца R либо первичны, либо артиновы и примарны. □

Итак, мы получили новое доказательство утверждения 18.38.3. Доказательство следующего утверждения неявно содержится в работе Голди [62] (ср. 1, 10.22, стр. 506).

20.38. Следствие. *Любое полупервичное кольцо главных правых идеалов наследственно справа.* □

Кольца, подобные σ-циклическим кольцам

Тема, связанная с σ-циклическими кольцами, подробно освещается в гл. 25; здесь же мы довольствуемся лишь одной довольно очевидной теоремой, которая показывает, что n-генные кольца подобны σ-циклическим кольцам.

20.39. Теорема. *Пусть n — целое число, большее* 0.

(a) *Кольцо A оказывается n-генным тогда и только тогда, когда кольцо матриц A_n циклически-генное.*

(b) *A является σ-n-генным кольцом тогда и только тогда, когда кольцо матриц A_n σ-циклическое.*

(c) *Каждое n-генное кольцо A подобно циклически-генному кольцу, и обратно, каждое кольцо, подобное циклически-генному кольцу, является n-генным для некоторого n.*

Это утверждение остается верным, если «циклически-генное» заменить на «σ-циклическое», а «n-генное» — на «σ-n-генное».

Доказательство Упражнение □

Коммутативные FBG-кольца и σ-циклические кольца

В этом параграфе представлено несколько теорем о FBG- и σ-циклических коммутативных кольцах, принадлежащих Капланскому [49], [52], Уорфилду [69b], [70], Гиллу [71], Лафону [71a] и другим. Некоторые из этих теорем требуют владения основами коммутативной алгебры, но в основном это элементарные вещи, такие, как локализация по простому идеалу, и с ними можно ознакомиться специально для этой цели.

Коммутативное кольцо R называется **кольцом нормирования**, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(i) для любых двух элементов a и b либо a делит b, либо b делит a;

(ii) идеалы кольца R линейно упорядочены по включению;

(iii) R — локальное кольцо, и каждый его конечно порожденный идеал является главным.

Другой термин для кольца нормирования, встречающийся в литературе,— **арифметическое кольцо** [1]).

Подмодуль A R-модуля B называется **относительно делимым** или **чистым**, если для всех $r \in R$ выполняется равенство $rA = A \cap rB$. (Ср. с $\cap$-чистотой в 19.21(h).)

Модуль P называется **чисто-проективным**, если для любой короткой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

в которой A относительно делим в B, индуцированная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \to \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, C) \to 0$$

точна [2]).

Модуль M называется **циклически представимым** (CP-модулем), если имеется точная последовательность $R \to R \to M \to 0$.

20.40. Упражнение (Капланский [69b], Уорфилд [69b]). 1. Модуль M над коммутативным кольцом R чисто-проективен тогда и только тогда, когда M — прямое слагаемое прямой суммы CP-модулей.

[1]) Впрочем, чаще под арифметическим понимают кольцо с дистрибутивной структурой идеалов. Кольца нормирования называются также цепными.— *Прим. ред.*

[2]) Подробнее вопросы относительной проективности (а также относительной инъективности) рассматриваются в монографиях Штенштрёма (Stenström B., Rings of quotients, An introduction to methods of ring theory, Berlin, Springer, 1975) и А. П. Мишиной и Л. А. Скорнякова, Абелевы группы и модули, М., 1969.— *Прим. ред.*

2. Над кольцом нормирования любой конечно представимый циклический модуль циклически представим. [*Указание*: воспользоваться леммой Шанюэля 11.28 (1, стр. 532).]

3. Определить **чисто-инъективные** модули двойственным образом к определению чисто-проективных модулей и показать, что модуль Q чисто-инъективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым любого модуля, содержащего его в качестве чистого подмодуля. Вывести отсюда, что чисто-инъективность есть (ослабленная) форма алгебраической компактности, определенной перед 19.21, так как любой «чистый по Кону» подмодуль относительно делим.

20.41. Теорема. *Если M — конечно представимый модуль над кольцом нормирования R, то он является прямой суммой* CP-*модулей* [1]).

Доказательство (Уорфилд [70]). Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца R и $y_1, \ldots, y_n$ — базис векторного $(R/\mathfrak{m})$-пространства $M/\mathfrak{m}M$. Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы модуля M, такие, что $x_i + \mathfrak{m}M = y_i$, то $M = x_1R + \ldots + x_nR$. Один из базисных элементов $y_1, \ldots, y_n$ (скажем, y_1) обладает тем свойством, что аннулятор каждого элемента $x \in M$, такого, что $x + \mathfrak{m}M = y_1$, совпадает с аннулятором модуля M. (Если бы это было не так, то мы могли бы выбрать множество образующих $x_1, \ldots, x_n$, как указано выше, причем так, чтобы все аннуляторы элементов x_i были больше, чем аннулятор модуля M. Но это невозможно, поскольку идеалы кольца R линейно упорядочены, а аннулятор модуля M равен пересечению аннуляторов элементов x_i.) Если y_1 выбран таким образом, а x_1 выбран так, что $x_1 + \mathfrak{m}M = y_1$, то подмодуль (x_1), порожденный элементом x_1, относительно делим. (Чтобы убедиться в этом, предположим, что $rx_1 = sz$, где $z \in M$ и s не делит r. Тогда $s = rt$ для некоторого $t \in \mathfrak{m}$. Если в таком случае положить $x_1^* = x_1 - tz$, то $x_1^* + \mathfrak{m}M = y_1$ и $rx_1^* = 0$, откуда (в силу условия на y_1) $rx_1 = 0$. Следовательно, rx_1 делится на s, и это показывает, что (x_1) — относительно делимый подмодуль.)

Посмотрим теперь на последовательность $0 \to (x_1) \to M \to M/(x_1) \to 0$. По индукции модуль $M/(x_1)$ — прямая сумма CP-модулей и поэтому чисто-проективен. Следовательно, $M \approx (x_1) \oplus M/(x_1)$, откуда вытекает, что (x_1) также конечно представим и поэтому является CP-модулем. Итак, теорема доказана. □

20.42. Теорема (Уорфилд [70]). *Пусть R — коммутативное локальное кольцо, не являющееся кольцом нормирования. Тогда для*

[1]) Эта теорема неявно содержится в статье Капланского [49], и ее доказательство использует матрицы. Однако сам Капланский приписывает ее Круллю (в письме от июня 1974 г.).

любого $n > 0$ существуют конечно представимые модули, которые неразложимы и не могут быть порождены менее чем n элементами.

Доказательство. Пусть a и b — элементы кольца R, ни один из которых не делит другой. Заменив R подходящим факторкольцом, мы можем считать, что $(a) \cap (b) = 0$ и $\mathfrak{m}\cdot(a) = \mathfrak{m}\cdot(b) = 0$ (где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца). Пусть F — свободный модуль с образующими $x_1, \ldots, x_n$. Пусть, далее, K — подмодуль в F, порожденный элементами $ax_1 - bx_2, \ldots, ax_{n-1} - bx_n$, а $M = F/K$. Ясно, что $M/\mathfrak{m}M \approx (F/K)/\mathfrak{m}(F/K) \approx F/\mathfrak{m}F$, так что M не может быть порожден менее чем n элементами. Покажем, что M неразложим.

Пусть y_i и z_i — образы элемента x_i в модулях M и $M/\mathfrak{m}M$ соответственно. Пусть $S = aM + bM$. Заметим, что $aF + bF$ является векторным $(R/\mathfrak{m})$-пространством с базисом, состоящим из элементов $ax_1, \ldots, ax_n, bx_1, \ldots, bx_n$. Подпространство K пространства $aF + bF$ имеет размерность $n - 1$, так что соответствующее факторпространство $S(\approx (aF + bF)/K)$ имеет размерность $n + 1$. Одним из базисов пространства S является набор $by_1, ay_1, ay_2, \ldots, ay_n$, откуда вытекает, что aM (равно как и bM) — подпространство пространства S коразмерности 1. Имеют место естественные гомоморфизмы α, β, переводящие $M/\mathfrak{m}M$ в S и заданные умножением на a и b соответственно (так что $\alpha(z_i) = ay_i$). Эти гомоморфизмы являются вложениями (из соображений размерности). Теперь предположим, что $M = A \oplus B$. Ясно, что $aM = aA \oplus aB$ и $S = (aA + bA) \oplus (aB + bB)$. Так как коразмерность aM в S равна 1, одно из этих прямых слагаемых пространства S лежит в aM [1]); поэтому мы можем предположить, что $bB \subseteq aB$. Выберем в $B/\mathfrak{m}B$ ненулевой элемент $w = c_1z_1 + \ldots + c_nz_n$. (Отметим, что $B/\mathfrak{m}B \neq 0$ по лемме Накаямы 18.4(с).) Заметим, что $c_1 = 0$, так как в противном случае $\beta(w) \notin aM$ (поскольку $by_1, ay_1, \ldots, ay_n$ образуют базис S и последние n элементов порождают aM), а с другой стороны, мы знаем, что $\beta(w) \in aB$. Если $w = c_2z_2 + \ldots + c_nz_n$, то $\beta(w) = \alpha(c_2z_1 + \ldots + c_nz_{n-1})$, и поэтому $c_2z_1 + \ldots + c_nz_{n-1}$ лежит в $B/\mathfrak{m}B$ (поскольку α — вложение). Но тогда по доказанному $c_2 = 0$. Продолжая по индукции, получим, что $w = 0$. Это противоречие показывает, что модуль M неразложим. □

20.43. Следствие (Уорфилд [70]). (а) *Если R — коммутативное локальное кольцо и каждый конечно представимый модуль — прямое слагаемое прямой суммы циклических модулей, то R — кольцо нормирования.*

[1]) Действительно, $S/aM \approx (aA + bA)/aA \oplus (aB + bB)/aB$, а так как $\dim S/aM = 1$, то одно из прямых слагаемых в этом разложении равно 0. Последнее равносильно высказанному утверждению.— *Прим. перев.*

(b) *Любое коммутативное локальное* FBG-*кольцо является кольцом нормирования.*

Доказательство. Любое конечно порожденное прямое слагаемое M прямой суммы циклических модулей есть прямое слагаемое прямой суммы конечного числа циклических модулей, и тогда по теореме 18.18 о единственности разложения сам модуль M оказывается прямой суммой циклических модулей. Поэтому применима теорема 20.42. Утверждение (b) — очевидное следствие из 20.42. На самом деле в случае (b) можно сказать и больше; см. 20.49. □

Следующие упражнение и теорема используют понятие локального кольца $R_{\mathfrak{m}}$ относительно максимального или простого идеала $\mathfrak{m}$, а также понятие локального свойства.

20.44. Упражнение. Для конечно представимого модуля M над локальным кольцом R проективность и чистая проективность — локальные свойства, т. е. M обладает каждым из этих свойств тогда и только тогда, когда им обладает $M_{\mathfrak{m}} = M \otimes {}_R R_{\mathfrak{m}}$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$.

20.45. Теорема. *Любой конечно представимый модуль над коммутативным кольцом R является прямым слагаемым прямой суммы циклических модулей тогда и только тогда, когда $R_{\mathfrak{m}}$ — кольцо нормирования для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в R.*

Доказательство. Если конечно представимые R-модули обладают указанным свойством, то им обладают и $R_{\mathfrak{m}}$-модули, поскольку конечно представимый $R_{\mathfrak{m}}$-модуль имеет вид $M_{\mathfrak{m}}$ для некоторого конечно представимого R-модуля M. Поэтому в силу следствия, доказанного выше, условие теоремы необходимо. Обратно, по 20.44 [1]) конечно порожденный R-модуль M чисто проективен тогда и только тогда, когда M конечно представим и $M_{\mathfrak{m}}$ чисто проективен для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$, откуда следует требуемый результат. □

Почти максимальные кольца нормирования

Говорят, что кольцо нормирования **максимально**, если каждая система попарно разрешимых сравнений вида

$$x \equiv x_\alpha(I_\alpha) \quad (\alpha \in A,\quad x_\alpha \in R,\quad I_\alpha \text{ — идеал кольца } R)$$

[1]) И по 20.40.1.— *Прим. перев.*

имеет общее решение в R. Мы скажем, что R **почти максимально**, если эта система сравнений имеет общее решение всякий раз, когда $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \neq 0$. Эти определения являются прямыми обобщениями соответствующих определений максимальных и почти максимальных *областей* нормирования, данных Капланским [52], где объясняется термин «максимальное» [1]).

Определим **цепной** модуль как модуль с линейно упорядоченной структурой подмодулей. (Ср. полуцепные кольца в гл. 25.)

В этом разделе мы указываем ряд свойств коммутативного кольца, равносильных тому, что оно является почти максимальным кольцом нормирования. Для коммутативного локального кольца R с максимальным идеалом M следующие условия эквивалентны: (i) модуль $E(R/M)$ является цепным (через $E(X)$ обозначается инъективная оболочка модуля X); (ii) R — почти максимальное кольцо нормирования; (iii) каждый неразложимый инъективный R-модуль является цепным; (iv) каждый конечно порожденный R-модуль разлагается в прямую сумму циклических R-модулей (т. е. является σ-циклическим модулем.)

Символ $\subset$ будет обозначать строгое включение. Пусть $f\colon R \to S$ — кольцевой гомоморфизм, I — идеал кольца R, а J — идеал кольца S. Тогда обозначим через J^c *сокращение* идеала J, а через I^e — *расширение* идеала I. Итак,

$$J^c = f^{-1}(J \cap f(R)) \quad \text{и} \quad I^e = f(I)S;$$

поэтому $J^{ce} \supseteq J$ и $I^{ec} \supseteq I$. Основной результат для коммутативных колец состоит в том, что для любого мультипликативного подмножества S (например, если $S = R - P$ — дополнение какого-нибудь простого идеала P) отображение расширения $I \mapsto I^e$ из множества идеалов кольца R в множество идеалов кольца частных R_S относительно S (например, когда $S = R - P$, это кольцо есть как раз локальное кольцо R_P) является наложением. (См. 16.9 и 16.10 (1, стр. 648—650).)

Для любых непустых подмножеств x и y кольца R положим $(x:y) = \{a \in R \mid ya \subseteq x\}$. Если x — идеал, то $(x:y) = \operatorname{ann}_R(y/x)$.

20.46. Предложение (Гилл [71]). *Пусть R — кольцо нормирования, не являющееся областью целостности. Кольцо R почти максимально тогда и только тогда, когда оно максимально.*

Доказательство. Ясно, что если R максимально, то оно и почти максимально. Пусть P — пересечение всех простых идеалов кольца R. Поскольку R — кольцо нормирования, то

[1]) См. также упражнения к гл. 21.

P — простой идеал и $P \neq 0$, так как 0 не является простым идеалом. Идеал P состоит из всех нильпотентных элементов кольца R. Рассмотрим следующую систему попарно разрешимых сравнений:

(1) $$x \equiv x_\alpha (I_\alpha) \quad (\alpha \in A).$$

Мы можем считать, что $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha = 0$, так как если $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha \neq 0$, то система (1) имеет решение, поскольку R почти максимально. В силу того, что $P \neq 0$, существует $t\,(\neq 0) \in P$, такое, что $t^2 = 0$. А так как $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha = 0$, то существует $\alpha_0 \in A$, такой, что $I_{\alpha_0} \subset Rt \subseteq$ $\subseteq P$. Пусть $A' = \{\alpha \in A \mid I_\alpha \subseteq I_{\alpha_0}\}$. Положим $J_\alpha = (I_\alpha : t)$. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in A} J_\alpha \neq 0$ ввиду того, что $t \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} J_\alpha$. Из попарной разрешимости системы (1) следует, что $x_\alpha - x_{\alpha_0} \in I_{\alpha_0}$ для всех $\alpha \in A'$. Поэтому $x_\alpha - x_{\alpha_0} = z_\alpha t$, где $z_\alpha \in R$, $\alpha \in A'$. Рассмотрим теперь следующую систему сравнений:

(2) $$z \equiv z_\alpha (J_\alpha) \quad (\alpha \in A').$$

Возьмем $z_\alpha - z_\beta$ (α, $\beta \in A'$) и предположим, что $I_\alpha \subseteq I_\beta$. Тогда $x_\alpha - x_\beta \in I_\beta$ и $t(z_\alpha - z_\beta) \in I_\beta$. Итак, $z_\alpha - z_\beta \in J_\beta$, и поэтому система (2) попарно разрешима. Поскольку $\bigcap\limits_{\alpha \in A'} J_\alpha \neq 0$, система (2) имеет общее решение, скажем z_0. Теперь легко видеть, что $x_{\alpha_0} + z_0 t$ — решение системы (1), и поэтому R максимально. □

20.47. Лемма. *Пусть R — кольцо нормирования, а P — его простой идеал. Тогда если R максимально (почти максимально), то максимально (почти максимально) и кольцо R_P.*

Доказательство. Мы знаем, что R_P — это локальное кольцо с максимальным идеалом PR_P. Рассмотрим естественный гомоморфизм Φ: $R \to R_P$, задаваемый по правилу $\Phi(r) = r/1$ [1]). Пусть I — идеал кольца R_P. Тогда $I^{ce} = I$, и поэтому идеалы кольца R_P линейно упорядочены, поскольку линейно упорядочены идеалы кольца R.

Допустим, что R максимально (почти максимально). Предположим, что мы имеем следующую систему попарно разрешимых сравнений:

(1) $$x \equiv x_\alpha(I_\alpha) \quad (\alpha \in A)$$

(где $x_\alpha \in R_P$ и I_α — идеал кольца R_P). Мы можем считать, что $I_\alpha \subseteq PR_P$ для всех $\alpha \in A$, поскольку сравнению $x \equiv x_\alpha(R_P)$ удовлетворяет любой элемент $x \in R_P$.

---

[1]) Здесь $r/1$ отождествляется с соответствующим классом эквивалентности.— *Прим. ред.*

Предположим, что $x_\alpha \in \Phi(R)$ для всех $\alpha \in A$. Выберем $z_\alpha \in R$, такой, что $\Phi(z_\alpha) = x_\alpha$. Рассмотрим следующую систему сравнений:

(2) $$z \equiv z_\alpha (I_\alpha^c) \quad (\alpha \in A).$$

(Заметим, что если $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha \neq 0$, то $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha^c \neq 0$.) Так как система (1) попарно разрешима, то ясно, что система (2) также попарно разрешима. Поскольку R максимально (почти максимально), система (2) имеет решение в R, скажем z_0. Ясно, что $\Phi(z_0)$ — решение системы (1).

Таким образом, теперь мы можем считать, что существует $\alpha_0 \in A$, такой, что $x_{\alpha_0} \notin \Phi(R)$. Заметим, что $PR_P \subseteq \Phi(R)$ [1]). Рассмотрим произвольное сравнение из системы (1), скажем $x \equiv$ $\equiv x_\beta(I_\beta)$. Попарная разрешимость дает

$$x_{\alpha_0} - x_\beta \in I_{\alpha_0} \cup I_\beta \subseteq PR_P \subseteq \Phi(R).$$

Предположим, что $x_\beta \in \Phi(R)$. Тогда $x_{\alpha_0} - x_\beta + x_\beta \in \Phi(R)$, и поэтому $x_{\alpha_0} \in \Phi(R)$, что, однако, не так.

Итак, $x_\beta \notin \Phi(R)$ для всех $\beta \in A$. Поэтому система (1) имеет вид

(1′) $$x \equiv x_\alpha(I_\alpha) \quad (\alpha \in A),$$

где $x_\alpha \notin \Phi(R)$ для всех $\alpha \in A$. Теперь из того, что $x_{\alpha_0} \notin \Phi(R)$, вытекает, что $x_\alpha = \Phi(r_\alpha)^{-1}$, где $r_\alpha \in R - P$ [2]). Рассмотрим следующую систему сравнений:

(3) $$z \equiv r_\alpha (I_\alpha^c) \quad (\alpha \in A).$$

Эта система попарно разрешима, так как если $I_\alpha \subseteq I_\beta$, то $I_\alpha^c \subseteq I_\beta^c$ и

$$x_\alpha - x_\beta = \Phi(r_\alpha)^{-1} - \Phi(r_\beta)^{-1} = \Phi(r_\alpha)^{-1}\Phi(r_\beta)^{-1}\Phi(r_\beta - r_\alpha).$$

Таким образом,

$$\Phi(r_\alpha)^{-1}\Phi(r_\beta)^{-1}\Phi(r_\beta - r_\alpha) \in I_\beta, \quad \Phi(r_\beta - r_\alpha) \in I_\beta, \quad r_\beta - r_\alpha \in I_\beta^c.$$

Поскольку R максимально (почти максимально), система (3) имеет в R решение, скажем z_0. Теперь $z_0 - r_\alpha \in I_\alpha^c \subseteq P$ для всех $\alpha \in A$. Следовательно, $z_0 \in R - P$. Ясно, что $\Phi(z_0)^{-1}$ есть решение системы (1), и поэтому R_P максимально (почти максимально). □

20.48. Лемма. *Пусть R — кольцо нормирования. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(1) ann ann $Rb = Rb$ *для всех* $b \in R$.

---

[1]) Действительно, для любого $p \in P$ и $s \in R - P$ имеем $s \notin pR$, поэтому $sR \ni p$, откуда $sp_1 = p$ и $p \cdot \Phi(s)^{-1} = \Phi(s) \cdot \Phi(p_1) \cdot \Phi(s)^{-1} = \Phi(p_1) \in \Phi(R)$.— *Прим. перев.*

[2]) По соображениям, аналогичным приведенным в предыдущем примечании.— *Прим. перев.*

(2) *Каждый элемент кольца R либо обратим, либо является делителем нуля.*

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (1) и m — не делитель нуля. Тогда $\operatorname{ann} Rm = 0$, и потому $\operatorname{ann}\operatorname{ann} Rm = R$. Итак, по предположению $Rm = R$, и, значит, m — обратимый элемент.

Допустим теперь, что выполнено (2), и пусть M — максимальный идеал кольца R. Ясно, что $Rb \subseteq \operatorname{ann}\operatorname{ann} Rb$ для всех $b \in R$. Предположим, что существует $c \in R$, такой, что $Rc \subset \operatorname{ann}\operatorname{ann} Rc$. Тогда существует $0 \neq y \in R$, такой, что $y \in (\operatorname{ann}\operatorname{ann} Rc) - Rc$. В таком случае $Rc \subset Ry$, так что $c = my$ для некоторого $m \in M$. Теперь

$$Ry \subseteq \operatorname{ann}\operatorname{ann} Rc = \operatorname{ann}\operatorname{ann} Rmy.$$

Взяв аннуляторы, получим

$$\operatorname{ann} Ry \supseteq \operatorname{ann} Rmy.$$

Таким образом, если $rmy = 0$, то $ry = 0$. Следовательно, $Ry \cap \cap \operatorname{ann}(m) = 0$. Но $Ry \neq 0$, и так как идеалы кольца R линейно упорядочены, то $\operatorname{ann}(m) = 0$. Но m — делитель нуля, и мы пришли к противоречию. Итак, $\operatorname{ann}\operatorname{ann} Rb = Rb$ для всех $b \in R$. □

Капланский [52], Матлис [66], Гилл [71], Лафон [71a] и Уорфилд [70] внесли вклад в следующую теорему.

20.49. Теорема. *Пусть R — локальное коммутативное кольцо с максимальным идеалом M. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Единственный простой модуль R/M обладает цепной инъективной оболочкой $E(R/M)$.*

(ii) *R — почти максимальное кольцо нормирования.*

(iii) *Каждый неразложимый инъективный R-модуль является цепным.*

(iv) *Каждый конечно порожденный R-модуль разлагается в прямую сумму циклических R-модулей.*

Доказательство (Гилл [71]). (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что инъективная оболочка $E(R/M)$ — цепной модуль. Мы знаем, что $E = E(R/M)$ — инъективный кообразующий (1, 3.31, стр. 194). Рассмотрим аннуляторное отображение из множества идеалов кольца R в множество подмодулей модуля E, задаваемое соответствием $I \mapsto (0 :_E I)$. Известно, что это — вложение, обращающее порядок, и что $(0 : (0 :_E I)) = I$. (Доказательство?) (См. также 23.13.) Таким образом, поскольку подмодули модуля E линейно упорядочены, то линейно упорядочены и идеалы кольца R, и поэтому R — кольцо нормирования.

Рассмотрим следующую систему попарно разрешимых сравнений:

$$(1) \qquad x \equiv x_\alpha (I_\alpha) \quad (\alpha \in A, \ \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \neq 0).$$

Мы можем считать, что $I_\alpha \subseteq M$ для всех $\alpha \in A$, поскольку сравнению $x \equiv x_\alpha(R)$ удовлетворяет любой $x \in R$. Положим $E_\alpha = (0 :_E I_\alpha) = \{x \mid xI_\alpha = 0\}$. Как и выше, заметим, что если $E_\alpha \subseteq E_\beta$, то $I_\beta \subseteq I_\alpha$. К тому же $I_\alpha = (0 : E_\alpha) = \{r \in R \mid E_\alpha r = 0\}$. Поскольку $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \neq 0$, $E' = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha \subset E$. Определим гомоморфизм $f' \colon E' \to E'$, полагая $f'(e) = x_\alpha e$, если $e \in E_\alpha$. Для того чтобы убедиться в корректности определения отображения f', нам нужно показать, что если $e \in E_\alpha$ и $e \in E_\beta$, то $x_\alpha e = x_\beta e$. Предположим, что $E_\alpha \subseteq E_\beta$. Тогда $I_\beta \subseteq I_\alpha$. Попарная разрешимость системы (1) дает $x_\alpha - x_\beta \in I_\alpha$. Следовательно, так как $e \in (0 :_E I_\alpha)$, то $(x_\alpha - x_\beta)e = 0$, откуда $x_\alpha e = x_\beta e$.

Теперь, поскольку $E' \subset E$, существует $e_0 \in E$, такой, что $E' \subset Re_0 \subseteq E$. Ввиду того что модуль E инъективен, f' может быть продолжен до $f \colon E \to E$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[dl, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Мы утверждаем, что $f(e_0) = re_0$ для некоторого $r \in R$. Предположим, что это не так. Тогда, учитывая, что E — цепной модуль, получаем $e_0 = sf(e_0)$ для некоторого $s \in R$. Пусть теперь $e \in E_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$. Ясно, что $e = te_0$ для некоторого $t \in R$. Тогда

$$sf(e) = sf(te_0) = t \cdot sf(e_0) = te_0 = e.$$

Итак,

$$e - sf(e) = 0 \text{ и потому } e - sx_\alpha e = 0.$$

Отсюда вытекает, что $1 - sx_\alpha \in I_\alpha \subseteq M$. Следовательно, $sx_\alpha \notin M$ и потому $s \notin M$. Таким образом, s — обратимый элемент, а значит, $f(e_0) = s^{-1}e_0$. Следовательно, мы показали, что $f(e_0) = re_0$ для некоторого $r \in R$.

Пусть $e \in E'$. Тогда $e = te_0$ для некоторого $t \in R$ и

$$f'(e) = f'(te_0) = f(te_0) = tre_0 = re.$$

Итак, $f'(e) = re$ для всех $e \in E'$. Мы утверждаем, что r является решением системы (1). Рассмотрим $r - x_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$.

Пусть $e \in E_\alpha$. Тогда

$$(r - x_\alpha)e = re - x_\alpha e = f(e) - f(e) = 0.$$

Итак, $r - x_\alpha \in I_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Следовательно, r удовлетворяет системе (1), и поэтому R — почти максимальное кольцо нормирования.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Доказательство этой импликации опирается на следующее утверждение:

20.50. Упражнение (Клатт — Леви [69]). Предположим, что R — почти максимальное кольцо нормирования. Тогда оно самоинъективно в том и только том случае, когда

(1) $\operatorname{ann}\operatorname{ann} Rb = Rb$ для всех $b \in R$ и

(2) R максимально.

Очевидно, что множество делителей нуля кольца нормирования есть простой идеал, скажем P. Если R — не область целостности, то R_P максимально (ввиду 20.46 и 20.47). Очевидно, это также верно, если R — область целостности. В силу 20.48 $\operatorname{ann}\operatorname{ann} R_P b = R_P b$ для всех $b \in R_P$. Таким образом, R_P самоинъективно. Отсюда вытекает, что R_P — инъективный R-модуль. Кроме того, ясно, что R_P — существенное расширение модуля R. Итак, $E_R(R) = R_P$, и потому $E_R(R)$ — цепной модуль. Пусть теперь I — собственный идеал кольца R и $\bar{R} = R/I$. Так как R — почти максимальное кольцо нормирования, то $\bar{R}$ — максимальное кольцо нормирования. Отсюда, используя те же рассуждения, что и выше, мы получим, что $E_{\bar{R}}(\bar{R})$ — цепной модуль.

Пусть E — произвольный неразложимый инъективный R-модуль. Пусть Rx и Ry — его подмодули, где $x, y \in E$. Пусть $(0 : x) = \{r \in R \mid rx = 0\}$. Чтобы показать, что E — цепной модуль, мы должны показать, что либо $Rx \subseteq Ry$, либо $Ry \subseteq Rx$. Теперь либо $(0 : x) \subseteq (0 : y)$, либо $(0 : y) \subseteq (0 : x)$. Мы можем считать без ограничения общности, что $(0 : x) \subseteq (0 : y)$. Положим $I = (0 : x)$. Тогда $Rx, Ry \subseteq E' = (0 :_E I)$. К тому же E' — инъективный $\bar{R}$-модуль, где $\bar{R} = R/I$, и $E' = E_{\bar{R}}(\bar{R})$. Но последний модуль является цепным. Таким образом, либо $Rx \subseteq Ry$, либо $Ry \subseteq Rx$. Итак, E — цепной R-модуль.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Предположим, что каждый неразложимый инъективный R-модуль является цепным. Тогда $E(R/M)$ цепной, поскольку это неразложимый инъективный R-модуль. Итак, по (i) $\Rightarrow$ (ii) R — кольцо нормирования.

Пусть A — конечно порожденный R-модуль и $a_1, \ldots, a_n$ — множество его образующих. Тогда $(0 : A) = \bigcap_{i=1}^{n} (0 : a_i)$, и так как R — кольцо нормирования, то $(0 : A) = (0 : a_s)$ для некоторого s $(1 \leqslant s \leqslant n)$. Ясно, что $(0 : a_s) \subseteq (0 : x)$ для всех $x \in A$. Положим $I = (0 : a_s)$. Тогда $Ra_s \approx R/(0 : a_s) = R/I$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ra_s \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & A \arrow[ddl, "f"] \\
& R/I \arrow[d, "i_2"'] & \\
& E(R/I) &
\end{tikzcd}$$

где i_1, i_2 — включения. Обозначим через α сквозной гомоморфизм $Ra_s \xrightarrow{\approx} R/I \xrightarrow{i_2} E(R/I)$. Конечно, α — мономорфизм. Поскольку модуль $E(R/I)$ инъективен, существует гомоморфизм f: $A \to E(R/I)$, превращающий диаграмму в коммутативную. Рассмотрим в $E(R/I)$ подмодуль $f(A)$. Так как A конечно порожден, то конечно порожден и $f(A)$. Поскольку I конеприводим [1]), то $E(R/I)$ — неразложимый инъективный R-модуль. Таким образом, модуль $E(R/I)$ цепной, и поэтому каждый его конечно порожденный подмодуль циклический. Следовательно, $f(A)$ — циклический R-модуль, скажем $f(A) = Ry$, где $y \in E(R/I)$. Теперь имеем

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ra_s \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[dl, "f"] \\
& Ry &
\end{tikzcd}$$

Ввиду того, что f — эпиморфизм (из A на Ry), существует $z \in A$, такой, что $f(z) = y$. Теперь если $rz = 0$, то $f(rz) = rf(z) = ry = 0$. Поэтому $(0 : z) \subseteq (0 : y)$. Кроме того, $\alpha(a_s) = ty$ для некоторого $t \in R$. Если $ry = 0$, то

$$\alpha(ra_s) = r\alpha(a_s) = rty = 0.$$

Но α — мономорфизм, и поэтому $ra_s = 0$. Таким образом, $(0 : y) \subseteq (0 : a_s)$. В таком случае имеем

$$(0 : z) \subseteq (0 : y) \subseteq (0 : a_s),$$

откуда в силу выбора элемента a_s $(0 : z) = (0 : y) = (0 : a_s)$. Таким образом, $Rz \to A \xrightarrow{f} Ry$, где первое из отображений — включение, есть изоморфизм, откуда $A = Rz \oplus B$ для некоторого R-модуля B.

[1]) То есть не представляется в виде пересечения конечного числа идеалов, отличных от I. — *Прим. перев.*

С учетом леммы Накаямы 18.4 (c) требуемый результат получается индукцией по $\dim_{R/M} A/MA$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что каждый конечно порожденный R-модуль есть прямая сумма циклических R-модулей. Тогда, поскольку $E = E(R/M)$ — неразложимый инъективный R-модуль, каждый конечно порожденный R-подмодуль модуля E циклический. Пусть теперь A и B — подмодули модуля E, такие, что $A \nsubseteq B$ и $B \nsubseteq A$. Чтобы доказать, что E — цепной модуль, мы должны показать, что это предположение ведет к противоречию. Действительно, в таком случае найдутся x, $y \in E$, такие, что $x \in A$, $x \notin B$, $y \notin A$, $y \in B$. По установленному выше найдется $z \in E$, такой, что $Rx + Ry = Rz$. Конечно, $z \neq 0$. Итак, существуют элементы a, b, r, $s \in R$, такие, что

$$z = ax + by, \quad x = rz, \quad y = sz.$$

Поэтому

$$z = arz + bsz \quad \text{и} \quad (1 - (ar + bs))z = 0.$$

Поскольку кольцо R локально, множество его необратимых элементов совпадает с M. В силу этого для любого $t \in R$ либо t, либо $1 - t$ обратим. В частности, либо $ar + bs$, либо $1 - (ar + bs)$ обратим. Но $z \neq 0$, поэтому должен быть обратимым элемент $ar + bs$. Тогда либо ar, либо bs обратим. Без ограничения общности мы можем считать, что ar обратим. Но в таком случае обратим r, и потому x порождает тот же модуль, что и z. Таким образом, $y \in A$, и мы получаем противоречие. Следовательно, E — цепной модуль. □

Упражнения к гл. 20

1. Доказать, что если длины конечно порожденных неразложимых правых R-модулей над артиновым справа кольцом R ограничены [или, эквивалентно, если существует целое число n, такое, что каждый такой модуль порождается n (или меньшим числом) элементами], то каждый неразложимый инъективный правый R-модуль нётеров (и порождается не более чем n элементами). Показать, что в таком случае mod-R обладает инъективным кообразующим U конечной длины. (Это влечет за собой U-двойственность в смысле Мориты. См. 23.25.7.)

2. Доказать теорему Мориты, утверждающую, что артиново коммутативное кольцо R обладает конечно порожденным инъективным кообразующим. [Это равносильно утверждению, что инъективная оболочка кольца R (или, эквивалентно, цоколя кольца R) конечно порождена. При этом достаточно предположить, что R — локальное кольцо.]

***3.** (Ср. Чейз [61, стр. 851].) Пусть A — прямое произведение конечно порожденных абелевых групп. Если K — подгруппа в A, такая, что A/K — периодическая группа, то A/K разлагается в прямую сумму делимой группы и группы, порядки элементов которой ограничены в совокупности.

4. (a) Пусть e — идемпотент в кольце R, а M — правый eRe-модуль. Если последовательность

$$R^n \to M \otimes_{eRe} eR \to 0 \quad (\text{в mod-}R)$$

точна, то точна последовательность

$$(Re)^n \to M \to 0 \quad (\text{в mod-}eRe).$$

(b) Если R есть FBG-кольцо, то таково же и кольцо eRe для любого идемпотента e.

***5.** Кольцо R, над которым каждый циклический правый модуль либо полупрост, либо изоморфен R, является либо простым правым V-кольцом без делителей нуля, либо классически полупростым кольцом, либо локальным артиновым справа кольцом главных правых идеалов, причем $J(R)^2 = 0$.

6. Кольцо $R = k[y, D]$ дифференциальных многочленов над универсальным дифференциальным полем k обладает такими свойствами: (a) каждый циклический модуль, не изоморфный R, является полупростым инъективным модулем конечной длины; (b) каждый квазиинъективный модуль инъективен; (c) существует в точности два класса эквивалентности неразложимых инъективных правых модулей: один из них порождается единственным простым модулем V, а второй — правым телом частных K кольца R. (Ср. с упр. 32 гл. 19, а также с характеризацией Гудёрла колец, которые ограниченно полупросты справа в том смысле, что модуль R/I полупрост для каждого существенного правого идеала (Гудёрл [72, стр. 47]) [1]).)

7. Пусть R — полунаследственное слева полупервичное кольцо Голди. Тогда R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных проективных правых идеалов, содержащих какой-нибудь фиксированный ненулевой конечно порожденный существенный проективный правый идеал в том и только в том случае, когда оно нётерово слева (ср. 20.28).

8 (обращение теоремы Веббера — Чаттерса для полупервичного кольца Голди). Пусть R — полунаследственное слева полупервичное кольцо Голди, которое удовлетворяет ограниченному правому условию минимальности (см. стр. 196). Тогда R нётерово слева и, следовательно, наследственно слева.

[1]) См. также Л. А. Койфман, *Матем. исслед.*, 6 (1971), вып. 2, 85—104; вып. 3, 62—82.— *Прим. перев.*

9 (Камилло — Коззенс [73]). Следующие условия на левую область Оре, являющуюся кольцом главных правых идеалов, эквивалентны: (1) R — кольцо главных левых идеалов; (2) R нётерово слева; (3) R удовлетворяет условию максимальности для главных левых идеалов; (4) R удовлетворяет ограниченному правому условию минимальности. (До сих пор нет примера, когда (1) не было бы выполнено [1].)

10. Над любым кольцом R любая прямая сумма инъективных правых R-модулей является эпиморфным образом прямой суммы некоторого множества экземпляров инъективной оболочки $\hat{R}$ модуля R_R.

11. R-модуль M называется **вполне инъективным**, если каждый его фактормодуль инъективен. Далее, M называется **$\sum$-вполне инъективным** модулем, если прямая сумма любого множества экземпляров модуля M вполне инъективна. Кольцо R нётерово справа и наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый инъективный правый R-модуль M $\sum$-вполне инъективен, и в том и только том случае, когда инъективная оболочка $\hat{R}$ $\sum$-вполне инъективна.

12. Над нётеровым справа кольцом прямая сумма вполне инъективных правых R-модулей вполне инъективна. Вывести из упр. 11, что нётерово справа кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда инъективная оболочка $\hat{R}$ вполне инъективна.

13. Пусть I — правый идеал в (не классически полупростом) кольце R, являющийся максимальным в множестве тех правых идеалов K, для которых инъективная оболочка $\widehat{R/K}$ — неполупростой модуль. (I всегда существует в нётеровом справа кольце, не являющемся классически полупростым.) Тогда I конеприводим. Кроме того, если $E = \widehat{R/I}$ не имеет вполне инвариантных подмодулей (как будет в случае, когда R — правое QI-кольцо), то E/K полупрост для каждого ненулевого подмодуля K.

14 (Фейс [76a]). Гипотеза Бойл: Если R — правое QI-кольцо, то оно наследственно справа. Доказать ее в предположении, что выполняется ограниченное правое условие существования ненулевого цоколя: если I — собственный существенный правый идеал, то R/I имеет ненулевой цоколь.

[1]) Недавно Кон (Cohn P., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **66** (1977), № 2, 217—222) построил пример, показывающий, что такой случай возможен.— *Прим. перев.*

15. Заметить, что ограниченное правое условие существования ненулевого цоколя необходимо для справедливости гипотезы Бойл в предположении, что R — левое и правое QI-кольцо.

16. Кольцо левых и правых главных идеалов является σ-циклическим. (Нётерово слева полупервичное кольцо главных правых идеалов является σ-циклическим справа.)

17 (Капланский [49, 12.3, стр. 486]). Коммутативное кольцо R является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда оно нётерово и его максимальные идеалы главные.

18 (Коэн И. [50]). Коммутативное кольцо R нётерово в том и только том случае, когда каждый простой идеал конечно порожден. Вывести из упр. 17, что кольцо R является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда каждый его простой идеал является главным.

Говорят, что кольцо главных идеалов R *специальное*, если его радиал нильпотентен. Это понятие нам потребуется для следующего «упражнения».

*19 (Уорфилд [70]). Следующие условия на коммутативное нётерово кольцо R эквивалентны:

(i) размерность $R/\mathfrak{m}$-пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ равна единице для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$;

(ii) R есть (конечное) прямое произведение дедекиндовых областей и специальных колец главных идеалов;

(iii) $R_{\mathfrak{m}}$ — кольцо дискретного нормирования (т. е. коммутативная локальная область главных идеалов) или специальное кольцо главных идеалов для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$.

(iv) каждый конечно порожденный R-модуль является прямым слагаемым прямой суммы циклических модулей.

***20.** Если R — коммутативное нётерово кольцо, то либо для каждого положительного целого числа n существует конечно порожденный неразложимый R-модуль, который не может быть порожден менее чем n элементами, либо R удовлетворяет условиям упр. 19 и в этом случае любой конечно порожденный неразложимый R-модуль может быть порожден двумя элементами.

*21 (Капланский [52]). Кольцо дискретного нормирования R всегда почти максимально. Кроме того, R максимально тогда и только тогда, когда оно полно в p-адической топологии, где p — единственный простой элемент.

22 (Матлис [59]). Коммутативная область нормирования R с полем частных K является почти максимальной в том и только том случае, когда K/R — инъективный R-модуль.

Замечания к гл. 20

Капланский [49, стр. 483, теорема 11.1] доказал, что над коммутативной локальной областью целостности R каждый модуль, порожденный двумя элементами, является σ-циклическим в том и только том случае, когда «каждое псевдосходящееся множество в R ненулевой ширины имеет в R предел». В статье Капланского [52, стр. 336] объясняется, почему последнее условие эквивалентно тому, что R есть почти максимальная область нормирования, а теорема 14 той же статьи утверждает, что тогда каждый конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей. Обратное утверждение для областей целостности вытекает, как отмечено, из статьи Капланского [49]; Матлис [66] дал другое доказательство этой теоремы, а Гилл [71] распространил ее на общий случай колец с делителями нуля [см. 20.49]. В работе Капланского неявно содержится и теорема 20.41, утверждающая [1], что каждый конечно представимый модуль над локальным кольцом R является σ-циклическим в том и только том случае, когда R — кольцо нормирования. Этот результат явно сформулирован в статьях Лафона [71a] и Уорфилда [70]. (См. теоремы Уорфилда, сформулированные в упр. 19 и 20 к этой главе.)

Ру [72] частично обобщил теорему 20.41 на некоммутативный случай (исправив ошибку в статье Лафона [71a]): если R — локальное кольцо с линейно упорядоченной структурой правых (левых) идеалов, т. е. если R в терминологии гл. 25 — цепное локальное кольцо, то каждый конечно представимый модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей. (Частная теорема получена также и для одностороннего случая.) Этот результат является частью более общей теоремы Уорфилда, представленной в гл. 25, а именно: R — полуцепное кольцо в том и только том случае, когда каждый конечно представимый правый или левый модуль есть прямая сумма главных циклических модулей (теоремы 25.2.6 и 25.3.4) [2].

Матлис [59] охарактеризовал почти максимальные области нормирования среди локальных областей нормирования таким свойством: R-модуль Q/R инъективен, где $Q = Q(R)$ — поле частных. Гилл [71] (см. 20.49) сообщает, что это не верно уже для колец с делителями нуля, но никаких подтверждающих примеров не приводит [3]. Конечно, в этом случае Q не обязано быть инъективным

---

[1] Вместе с 20.42. — *Прим. перев.*

[2] См. также Дрозд Ю. А., *Матем. заметки*, 18 (1975), № 5, 705—710. — *Прим. перев.*

[3] Построим такие примеры. Для этого сначала заметим, что если R — кольцо нормирования с делителями нуля, то R-модуль $D = Q(R)/R$ инъективен тогда и только тогда, когда он нулевой (т. е. когда $Q(R) = R$). В одну

R-модулем. Если же Q_R инъективен, то Q/R будет инъективным лишь при дополнительных предположениях, например, если R наследственно. Капланский [69b, комментарии, стр. 73 и далее] дает разъяснения по этому поводу и по ряду других тем, рассматривавшихся в этой главе, включая чистую проективность и двойственную ей чистую инъективность (алгебраическую компактность).

Если для некоторого кардинала α кольцо R — правое $\sum$-α-генное кольцо, то по 20.23 R артиново справа. Уорфилд [72] показал, что если R к тому же коммутативно, то оно является кольцом главных идеалов и, следовательно, $\sum$-циклическим кольцом.

Проблема характеризации в некоммутативном случае остается открытой. Разлагается ли каждый модуль над $\sum$-α-генным кольцом в прямую сумму неразложимых модулей? Родственный вопрос: является ли кольцо, над которым каждый (правый) модуль — прямая сумма неразложимых модулей, артиновым (справа) и/или правым FFM-кольцом? Тот же вопрос для правых AD-колец: если каждый правый R-модуль разлагается в прямую сумму модулей с локальными кольцами эндоморфизмов, то будет ли R артиновым справа и правым FFM-кольцом? (См. в этой связи 20.25.)

сторону это утверждение очевидно. Обратно, предположим, что модуль D инъективен и не равен 0. Тогда в R найдется регулярный необратимый элемент r. Пусть z — делитель нуля в R. Так как r регулярен, то $(0: z) \not\ni r$, откуда $rR \supseteq (0: z)$. Поэтому соответствие $za \longmapsto r^{-1}a + R$ является корректно определенным гомоморфизмом $zR \to D$. В силу инъективности модуля D существует элемент $q^{-1} + R \in D$, такой, что $(q^{-1} + R)z = r^{-1} + R$. Это равенство означает, что $q^{-1}z - r^{-1} = b \in R$, или $rz = q(1 + rb)$. Отсюда и из того, что z — делитель нуля, вытекает, что $q(1 + rb)$ — делитель нуля. Но элемент q регулярен, следовательно, делителем нуль является $1 + rb$. С другой стороны, поскольку r необратим, то элемент $1 + rb$ должен быть обратимым, и мы получили противоречие.

Пусть теперь $\mathbb{Z}_p$ — локальное кольцо частных кольца $\mathbb{Z}$ относительно простого идеала $p\mathbb{Z}$ и E — инъективная оболочка простого $\mathbb{Z}_p$-модуля $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$. Рассмотрим кольцо R, аддитивная группа которого равна $\mathbb{Z}_p \oplus E$, а умножение задается по правилу $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$. Поскольку $R/(0, E) \approx \mathbb{Z}_p$ и модуль E цепной (см. 20.49), то R — кольцо нормирования. Легко также видеть, что $Q(R) = R$. Тем не менее, R не является почти максимальным; в самом деле, следующая система попарно разрешимых сравнений: $x \equiv p(\mathrm{mod}\ p^2R)$; $x \equiv p + p^2(\mathrm{mod}\ p^3R)$; ... ; $x \equiv p + p^2 + \ldots + p^n(\mathrm{mod}\ p^{n+1}R)$, ..., очевидно, не имеет общего решения в R.

С другой стороны, если $\check{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, а $\check{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел, то рассмотрим кольцо R, аддитивная группа которого равна $\check{\mathbb{Z}}_p \oplus \check{\mathbb{Q}}_p$, а умножение задается правилом $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$. По тем же соображениям, что и в примере выше, R — кольцо нормирования. Легко также проверить, что $Q(R) \neq R$. Однако R максимально. — *Прим. перев.*

Во введении к тому 2 мы уже комментировали подтверждение А. В. Ройтером гипотезы Брауэра — Тролла и тот факт, что Ауслендер и Тахикава обобщили и усовершенствовали теорему Ройтера, дав совершенно другие доказательства. Более того, Габриелю [72], а также Длабу и Рингелю [73] удалось явно описать неразложимые модули и обобщить теоремы Йосии [56] [1]). (Ср. Кэртис — Джанс [65] и Кавада [62—64].) Джанс [57], Тахикава [60] и Колби [66] показали, что артиново справа правое FFM-кольцо имеет конечную структуру идеалов (см. 25.4.5). На самом деле бесконечность структуры идеалов влечет за собой «строго неограниченный модульный тип» кольца. Действительно, тогда существует бесконечное число неразложимых квазипроективных модулей; то же самое верно для квазиинъективных модулей над конечномерными алгебрами (Ву — Джанс [67]).

Теоремы Чейза, появившиеся в этой главе, восходят к характеризациям Чейзом колец, над которыми каждое произведение проективных правых R-модулей проективно. (Это эквивалентно требованию, чтобы каждое произведение R^a было проективно.) Решение этой задачи (22.31B) использует данное Чейзом описание (1, 11.34, стр. 535) колец, над которыми R^a — плоский модуль, и характеризацию Басса колец, над которыми каждый плоский правый модуль проективен. Первые — это в точности когерентные слева кольца, а вторые — совершенные справа кольца. Таким образом, решение Чейза — когерентные слева совершенные справа кольца, и только они, суть кольца со свойством, сформулированным в начале абзаца. Этот результат явился обобщением теоремы Крулля. (См. Капланский [69b, стр. 82].)

Аналогично, теоремы Фейса и Фейса — Уокера используются в гл. 24 для того, чтобы выяснить, когда каждый инъективный правый модуль проективен (тогда каждый инъективный модуль должен быть $\sum$-инъективным), и для решения дуальной проблемы: когда каждый проективный правый модуль инъективен? (В таком случае каждый инъективный модуль есть $\sum$-конечно порожденный модуль.) В обоих случаях ответ один и тот же: R должно быть квазифробениусовым кольцом. Верно и обратное. (Таким образом, большинство теорем из этой главы будет использовано в нашей книге и далее.)

Теорема 20.30 Чаттерса относится к изучению нётеровых колец конечной глобальной размерности (он рассмотрел случай, когда она равна 1). Теорема Ауслендера — Буксбаума [57], [59] утверждает, что коммутативное нётерово кольцо конечной глобальной размерности есть прямое произведение конечного числа областей

[1]) См. также С. А. Кругляк, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1972, 60—68.— *Прим перев.*

целостности с однозначным разложением на множители. (Здесь наше внимание акцентируется на областях целостности, т. е. на первичных кольцах.) За доказательством этой теоремы мы отсылаем читателя к лекциямОсофской [71a, стр. 52].

Уже после того, как эта глава была написана, я прочитал статью Гудёрла [72] и заметил связь между QI-кольцами и некоторыми из его результатов о кольцах, которые он называет SI-кольцами (кольцами, над которыми сингулярные модули инъективны) [1]). Как мы отметили в упр. 6 (а также упр. 32 гл. 19), эти кольца ограниченно классически полупросты и наследственны справа. Более того, по модулю цоколя они разлагаются в прямое произведение классически полупростого и нётерова кольца. На самом деле правое SI-кольцо с нулевым цоколем подобно конечному произведению SI-областей. Последние, очевидно, являются правыми областями Оре, и каждый собственный циклический правый модуль над ними инъективен. Кольца с этим последним свойством были названы правыми PCI-кольцами и изучены Бойл [73], [74] и Фейсом [73]. Правое PCI-кольцо либо классически полупросто, либо является полунаследственной справа правой областью Оре; открытый вопрос: является ли правая PCI-область наследственной справа или, что эквивалентно, нётеровой справа.

Правые QI-кольца, конечно, являются правыми V-кольцами (определенными в гл. 7 и обсуждавшимися также в гл. 19). V-кольца широко изучались, так что я могу дать только ограниченную библиографию в ссылках к этой главе. Здесь я упомяну статьи Коззенса и Джонсона [72] (показавших, что нётеровы V-кольца не обязаны быть наследственными),Ософской [71c] (показавшей, что нётеровы V-кольца могут иметь бесконечное число (неизоморфных) простых модулей), Коззенса [73] (распространившего примерыОсофской на произвольную характеристику и упростившего некоторые доказательства) и Бойл и Гудёрла [75] (первыми показавших, что нётеровы V-кольца не обязаны быть QI-кольцами). Михлер и Вилльямайор [73], в честь которого и было введено название «V-кольцо» (см. Фейс [67a, стр. 190, проблема 17]), показали, что любое правое V-кольцо «размерности Крулля, не превосходящей 1», является нётеровым справа и наследственным справа [2]) (ср. 20.5). (С этой теоремой связано упр. 10.) Кроме того, групповое кольцо RG конечной группы G является правым V-кольцом в том и только том случае, когда R — правое V-кольцо, а $|G|$ обратим в R.

По поводу условия максимальности для аннуляторных правых идеалов интересный результат получил Джонсон [69]: существует

[1]) См. также Л. А. Койфман, *Матем. исследования*, 6 (1971), вып. 2.85—104; вып. 3, 62—82.— *Прим. перев.*

[2]) Более того, оно является правым SI-кольцом.— *Прим. перев.*

область целостности D, такая, что кольцо D_n ($n \times n$)-матриц для $n > 1$ не удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов. Такая область целостности (названная Джонсоном областью Мальцева) не может быть вложена в тело, поскольку любое подкольцо кольца ($n \times n$)-матриц над телом удовлетворяет этому условию; а в действительности пример Джонсона (так же, как примеры Л. А. Бокутя [67], Баутелла [67] и Клейна [67]) таков, что мультипликативная полугруппа D^* ненулевых элементов вкладывается в группу.

Предположим, что D — область целостности с таким свойством: (N) любая нильпотентная ($n \times n$)-матрица над D имеет индекс нильпотентности, не больший n. Тогда мультипликативная полугруппа D^* вложима в группу (Клейн [69]). [В частности (loc. cit.), любое полу-FI-кольцо обладает этим свойством.] Неизвестно, может ли D быть вложено в тело[1]. Тем не менее известно, что D есть IBN-кольцо и в действительности конечно по Дедекинду (Клейн [69, стр. 151]).

См. также замечания к гл. 21 и 25.

Ссылки

Асано К. [38], [49a], Ауслендер [74], Ауслендер — Буксбаум [57], [59], Баутелл [67], Бек [72a], Бергман [72b], Бойл [73], [74], Бойл — Гудёрл [75], Бокуть [67], Буш [63], Вамош [71], Веббер [70], Габриель [72], Гилл [71], Голди [62], Гудёрл [72], Длаб — Рингель [72c], [73], Джанс [57], Джонсон [69], Дюбуа [66], Йосии [56], Кавада [62, 63, 64], Кайо — Рено [70], Камилло — Коззенс [73], Капланский [49], [52], [69b], Картан — Эйленберг [60], Клатт — Леви [69], Клейн [67], [69], [72], Коззенс [70], [73], Коззенс — Джонсон [72], Колби [66], Коэн [50], Коэн — Капланский [51], Крулль [24], Куршан [70], Кэртис — Джанс [65], Лафон [71a], Леви [63], Левин [71], Мальцев [36], Матлис [58], [59], [66], Михлер — Вилльямайор [73], Морита [58], Нёбелинг [68],Ософская [71a], [71c], Папп [59], Робсон [67b], [74], Розенберг — Зелинский [59], Ройтер [68], Ру [72], Смолл [66a], Тахикава [59], [60], [61], [73], Уорфилд [69b], [70], [72a], [75], Фейс [66a], [67a], [71c], [72b], [73], [75a], [76], Фейс — Уокер Э. [67], Фуллер [69], Чаттерс [71], [72], Чейз [60], [61], [62a], [62b], Шпекер [50].

[1] Бергман (Bergman G. M., Trans, Amer. Math. Soc., **200** (1974), 1—32) построил пример, дающих отрицательный ответ на этот вопрес. — *Прим. перев.*

Дополнительные ссылки

Адзумая [50], Андерсон — Фуллер [72], Басс [60], Капланский [58a], Колби — Раттер [71], Коззенс — Фейс [75], Кроули — Йонссон [64], Матлис [58], Монк [72], Суон [60], [68], Уокер К. [66], Уорфилд [69b], [69c], [72a], [72b], Фейс — Уокер Э. [67], Фукс [69a], Фуллер [73], Харада [71], Харада — Саи [70], Шорес [71], Шорес — Виганд [74], Ямагата [73].

Глава 21

ДИАГРАММЫ АДЗУМАИ

В этой главе теорема 18.18 о единственности разложения распространяется на диаграммы Адзумаи в AB5-категории (21.6). Другими результатами этой главы являются: (1) X-лемма 21.1; (2) теорема 21.2 о сокращении; (3) I-адически полные кольца (21.7—21.8); (4) теорема 21.15 о том, что прямые слагаемые диаграмм Адзумаи инъективных модулей также являются диаграммами Адзумаи (ср. 21.14).

21.1. ***X*-лемма.** *Если диагонали следующей диаграммы точны и произведение hf — изоморфизм, то gj — изоморфизм:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& A \arrow[dr, "f"] & & D \arrow[ur] & \\
& & X \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "g"] & & \\
& C \arrow[ur, "j"] & & B \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Применить теорему о вложении и проверить справедливость леммы для модулей. $\square$

21.2. Теорема о сокращении. *Если C — абелева категория и A — ее объект с локальным кольцом эндоморфизмов* $\mathrm{End}_C\, A$, *то верна импликация*

$$(A \oplus B \approx A' \oplus B' \quad \text{и} \quad A \approx A') \Rightarrow B \approx B'.$$

Доказательство. Используя изоморфизм объектов $A \oplus B$ и $A' \oplus B'$, получим морфизмы $A \to A' \to A$ и $A \to B' \to A$, сумма которых равна 1_A. Следовательно, один из этих морфизмов есть эквивалентность. Если $A \to A' \to A$ — эквивалентность,

то положим $X = A \oplus B$. Применяя X-лемму к диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & A' \\
& X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
B \arrow[ur] & & B
\end{tikzcd}$$

получим, что $B' \to B$ — эквивалентность [1]).

Предположим теперь, что $A \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} A$ — эквивалентность. Тогда $C' = \mathrm{im}\, f$ — прямое слагаемое объекта B', а именно $B' = C' \oplus \ker g$. Положим $C'' = \ker g$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& A \arrow[dr] & & C' \arrow[ur] & \\
& & X \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& A' \oplus C'' \arrow[ur] & & B \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

где $X = A \oplus B$. Применение X-леммы дает изоморфизм $A' \oplus C'' \approx B$. Поскольку объект C' изоморфен A', то $B' \approx B$. $\square$

21.3. Следствие. *Если объекты A и A' абелевой категории C имеют конечные диаграммы Адзумаи, то*

$$(A \oplus B \approx A' \oplus B' \quad \text{и} \quad A \approx A') \Rightarrow B \approx B'$$

для любых объектов B и B'. $\square$

---

[1]) Для того чтобы применить X-лемму, нужно сначала убедиться, что $A \to A' = (A \to X \to A')$ — изоморфизм. Пусть $A \xrightarrow{\varphi} A$ — эквивалентность, обратная к $A \to A' \to A$. Тогда $A \xrightarrow{\varphi} A \to A' \to A = A \xrightarrow{1_A} A$. Поэтому сквозной морфизм $A' \to A \xrightarrow{\varphi} A \to A'$, являясь ненулевым идемпотентом в кольце $\mathrm{End}_C A'$, которое по условию также локально, равен $1_{A'}$. Отсюда легко следует, что $A \to A'$ — изоморфизм.— *Прим. перев.*

21.4. Упражнение. (a) Использовать теорему о сокращении для иного доказательства теоремы о единственности разложения 18.18 (ср. Суон [68, 2.8, стр. 79].)

(b) Если R — произвольное полулокальное кольцо, то изоморфизм $R \oplus B \approx R \oplus B'$ в mod-R (в R-mod) влечет за собой изоморфизм $B \approx B'$.

21.5. Лемма. *Пусть X — объект абелевой категории C и $\{A_i\}_{i \in I}$ — его неразложимые подобъекты с локальными кольцами эндоморфизмов. Предположим, что либо множество I конечно, либо C —* AB 5-*категория (т. е. имеет точные прямые пределы). Если $X = \sum_{i \in I} \oplus A_i$ и B — любой ненулевой подобъект объекта X, выделяющийся в нем прямым слагаемым, $X = B \oplus B'$, то существует $i \in I$, такой, что $A_i \to B \to A_i$ — эквивалентность.*

Доказательство. Существует конечное подмножество S множества I, такое, что морфизм $B \to (\sum_{i \in I} \oplus A_i)/(\sum_{i \in S} \oplus A_i)$ не является вложением Это очевидно, если I конечно. Пусть C есть AB5-категория, I бесконечно, и предположим, что такого подмножества нет. Тогда морфизм $B \to \varinjlim ((\sum_{i \in I} \oplus A_i)/(\sum_{i \in S} \oplus A_i))$, где $\varinjlim$ берется по всем конечным подмножествам множества I, оказывается мономорфизмом. Но этот предел равен 0 вопреки предположению, что B не равен нулю.

Продолжим доказательство леммы индукцией по числу элементов множества S. Выберем любое $j \in S$. Если $A_j \to B \to A_j$ — эквивалентность, то лемма доказана. Если нет, то эквивалентностью будет $A_j \to B' \to A_j$, поскольку $\mathrm{End}_C A_j$ — локальное кольцо. Тогда $B' = C' \oplus C''$, где C' — образ морфизма $A_j \to B'$. Следовательно, имеет место эквивалентность $A_j \to C'$. Применим X-лемму к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& A_j \arrow[dr] & & C' \arrow[ur] & \\
& & X \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& B \oplus C'' \arrow[ur] & & \sum\limits_{i \neq j} \oplus A_i \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

Получим, что объект $B \oplus C''$ изоморфен $\sum_{i \neq j} \oplus A_i$. Тогда $B \to (\sum_{i \in I} \oplus A_i)/(\sum_{i \in S - \{j\}} \oplus A_i)$ не является мономорфизмом. Если $|S| = 1$, это — противоречие. В противном случае по предположению индукции найдется $i \in S - \{j\}$, такой, что $A_i \to B \to A_i$ — эквивалентность. □

21.6. Теорема о единственности разложения. *Пусть C — абелева категория, $A = \sum_{i \in I} \oplus A_i$ и $B = \sum_{j \in J} \oplus B_j$ — диаграммы Адзумаи для двух объектов A и B. Предположим, что либо множество I конечно, либо C есть* AB5-*категория. Тогда $A \approx B$ в том и только том случае, когда существует биекция $p\colon I \to J$ и для каждого $i \in I$ имеет место эквивалентность $g_i\colon A_i \approx B_{p(i)}$.*

Доказательство (Адзумая [50]; ср. Суон [68]). Достаточно доказать теорему в предположении, что $A = B$. Если $|I|$ конечно, то требуемый результат доказывается индукцией по $|I|$, поскольку по 21.3 $A_1 \approx B_j$ для некоторого j, а по теореме о сокращении $A/A_1 \approx B/B_j$ (ср. 18.18).

Предположим теперь, что I бесконечно. Пусть M — одно из неразложимых прямых слагаемых объекта A. Обозначим через a число таких $i \in I$, для которых $A_i \approx M$, а через b — число таких $j \in J$, что $B_j \approx M$. Утверждается, что $a = b$. Если a конечно, то это доказывается тем же самым рассуждением, что и для конечного I. В противном случае для каждого $i \in I$ множество S_i, состоящее из всех $j \in J$, таких, что $A_i \to B_j \to A_i$ — эквивалентность, конечно, поскольку существует [1]) конечное множество S, для которого морфизм $A_i \to (\sum_{j \in J} \oplus B_j)/(\sum_{s \in S} \oplus B_s)$ не является мономорфизмом, и ясно, что $S \supseteq S_i$. Так как B_j неразложимы, то $B_j \approx A_i$ для всех $j \in S_i$. Поскольку для каждого B_j существует по крайней мере один A_i, такой, что $A_i \to B_j \to A_i$ — эквивалентность, то

$$\bigcup_{\{i \in I \mid A_i \approx M\}} S_i = \{j \in J \mid B_j \approx M\}.$$

Таким образом, $b \leqslant a$. По симметрии $a \leqslant b$ и, следовательно, $a = b$. Отсюда, очевидно, вытекают остальные утверждения теоремы. □

21.7А. Определение. Пусть I — идеал в кольце R. Тогда R называется I-**адически полным**, если каноническое отображение $R \to \varprojlim R/I^n$ является эквивалентностью. Эквивалентное определение: R является I-адически полным, если в топологии на R

[1]) См. первую часть доказательства леммы 21.5.— *Прим. перев.*

с идеалами $\{I^n\}_{n=1}^{\infty}$ в качестве базы окрестностей нуля каждая последовательность Коши сходится к единственному пределу.

Необходимым условием для того, чтобы R было I-адически полным, является **резидуальная нильпотентность** идеала (см. 24.31), а достаточным условием — его нильпотентность.

Самым простым примером (кроме тривиального случая, когда I нильпотентен) является кольцо формальных степенных рядов $k\langle x\rangle$ над полем k. (Каждый элемент этого кольца есть предел последовательности многочленов и обратно.) В действительности эти кольца характеризуют равнохарактеристичные кольца дискретного нормирования с единственным простым элементом p, которые к тому же (p)-адически полны. (Теорема Тейхмюллера. Ее обобщение Коэном на полные регулярные кольца см. в книге Зарисского и Самюэля [63, стр. 355, следствие].)

21.7B. Предложение. *Если R есть I-адически полное кольцо, то обратимые элементы и идемпотенты кольца R/I поднимаются, в частности, I должен лежать в радикале Джекобсона кольца R.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность проекций

$$\ldots \to R/I^{n+1} \to R/I^n \to \ldots \to R/I \to 0.$$

Пусть $x \in R$ таков, что его образ $\bar{x}_1$ в R/I обратим. Пусть $\bar{x}_n$ — образ элемента x в R/I^n. По 18.4 и 18.6 элемент $\bar{x}_n$ обратим в R/I^n. Пусть $\ldots \to y_n \to y_{n-1} \to \ldots \to y_1$ — последовательность соответствующих обратных элементов и $y = \lim y_i$. В силу полноты $y \in R$. Кроме того, и yx, и xy отображаются в 1 каждой проекцией $R \to R/I^n$. Поэтому $xy = yx = 1$, т. е. x обратим. Тогда ввиду 18.4 $I \subseteq \operatorname{rad} R$.

Если $e_1 \in R/I$ — идемпотент, то, поскольку I^{n-1}/I^n нильпотентен, по 18.21 существуют идемпотенты $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что e_n отображается в e_{n-1} проекцией $R/I^n \to R/I^{n-1}$ для всех n. Пусть $e = \lim e_n$. Тогда $e^2 - e = 0$, поскольку $e_n^2 - e_n = 0$ для всех n. Таким образом, e — идемпотент, образом которого в R/I является e_1. □

21.8. Следствие. *Пусть C — абелева категория и A — ее объект, для которого существует идеал I кольца $R = \operatorname{End}_C A$, такой, что R I-адически полно, а R/I артиново слева или справа. Тогда A обладает конечной диаграммой Адзумаи.*

Доказательство. Поскольку R I-адически полно и $(\operatorname{rad} R)/I$ — нильпотентный идеал кольца R/I, то R $(\operatorname{rad} R)$-полно. Поэтому в силу 21.7 R — полулокальное SBI-кольцо. Теперь следствие вытекает из 18.26. □

Коммутативное нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом J называется **полным локальным кольцом**, если оно J-адически полно.

21.9. Упражнение (Суон [60, стр. 566]). Если R — полное локальное кольцо, то каждый конечно порожденный R-модуль имеет конечную диаграмму Адзумаи.

Если M есть R-модуль, а α — кардинальное число, то запись $\dim M = \alpha$ будет означать, что M имеет диаграмму Адзумаи $\coprod_{i \in I} M_i$, где $|I| = \alpha$. Термин «размерность» часто используется в математике; в этой книге мы столкнулись с ним трижды: (1) размерность векторного пространства; (2) размерность Голди; (3) гомологическая (проективная или инъективная) размерность. Настоящее словоупотребление обобщает случай (1), в то время как inj. .dim, proj.dim или gl.dim обозначают размерности из (3). Введенное понятие имеет некоторое пересечение с (2) (см. последующие упражнения).

В приводимом далее следствии утверждение «$\dim P \leqslant n$» означает, что P имеет диаграмму Адзумаи $\coprod_{j=1}^{m} P_j$ и $m \leqslant n$. Кроме того, если $\coprod_{i=1}^{n} M_i$ — любая другая диаграмма Адзумаи для P, то из теоремы 21.6 следует, что $n = m$ и каждый M_i изоморфен некоторому P_j.

21.10. Следствие. *Пусть M есть R-модуль конечной размерности n и P — его прямое слагаемое. Тогда P имеет диаграмму Адзумаи и $\dim P \leqslant n$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $P = M$.*

Доказательство остается в качестве упражнения. □

21.11. Следствие. *Если модуль M удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм, то M — конечная прямая сумма неразложимых модулей. Если к тому же M — модуль конечной длины, то он имеет конечную размерность.*

Доказательство. Первое утверждение — не что иное, как упражнение 1, 7.18. Если длина модуля M конечна, то $M \approx \approx \coprod_{i=1}^{n} M_i$, где M_i $(i = 1, \ldots, n)$ — неразложимый модуль конечной длины. Поскольку кольцо эндоморфизмов модуля M_i локально по 18.11, то M имеет конечную размерность. □

Прямые слагаемые диаграмм Адзумаи

Если $M = \coprod_{i \in I} M_i$ — диаграмма Адзумаи, то естественно спросить: обладает ли диаграммой Адзумаи каждое прямое слагаемое модуля M? В общем случае ответ неизвестен; тем не менее теорема Матлиса — Паппа 20.6 дает утвердительный ответ, когда M — инъективный модуль над нётеровым кольцом, а следствие 21.10 — когда $\dim M < \infty$. В этом разделе эти результаты обобщаются на произвольные инъективные модули над любым кольцом, а также на случай, когда неразложимые прямые слагаемые счетно порождены и инъективны (Фейс — Уокер [67]).

21.12. Лемма. *Пусть Q — прямая сумма неразложимых инъективных модулей $\{Q_i \mid i \in I\}$ и S — прямое слагаемое модуля Q, $Q = S \oplus T$. Тогда*

(a) *если M — конечно порожденный подмодуль в S, то S содержит инъективную оболочку $\hat{M}$ модуля $\hat{M}$ и $\dim \hat{M} < \infty$.*

(b) *Если S_1 — любое прямое слагаемое модуля S, $S = S_1 \oplus N$ и $y \in S$, то существует прямое слагаемое T_1 модуля N, такое, что $\dim T_1 < \infty$ и $y \in S_1 \oplus T_1$.*

Доказательство. (a) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ порождают M. Каждый элемент x_i содержится в конечной прямой сумме модулей Q_i, и, следовательно, весь модуль M содержится в такой конечной прямой сумме, которую мы обозначим через P. Так как P инъективен, он содержит инъективную оболочку P_1 модуля M. Поскольку $\dim P < \infty$, а P_1 — прямое слагаемое модуля P, то $\dim P_1 < \infty$ [1]). Ограничение на P_1 проекции модуля Q на S параллельно T тождественно на M и поэтому является мономорфизмом, как так M — существенный подмодуль в P_1. Ясно, что образ модуля P_1 является инъективной оболочкой $\hat{M}$ модуля M и $\dim \hat{M} < \infty$.

(b) Запишем $y = s + t$, $s \in S_1$, $t \in N$. Применяя (a) к прямому слагаемому N модуля Q и модулю $tR \subseteq N$, получим прямое слагаемое T_1 модуля N, содержащее tR и имеющее конечную размерность. Ясно, что $S_1 \oplus T_1$ содержит y, как и требовалось. □

21.13. Предложение. *Пусть модуль Q — прямая сумма неразложимых инъективных модулей и S — его прямое слагаемое.*

(a) *Если S счетно порожден, то он вполне разложим.*

(b) *Если S — инъективная оболочка конечно порожденного подмодуля, то $\dim S < \infty$.*

(c) *Если S содержит конечно порожденный подмодуль M, такой, что S/M счетно порожден, то S вполне разложим.*

[1]) Ввиду 21.10.— *Прим. перев.*

Доказательство. (a) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — счетное множество образующих модуля S. По лемме 21.12 (b) S содержит цепь $S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$ прямых слагаемых, таких, что $x_1, \ldots, x_n \in S_n$ и $\dim S_n < \infty$ для всех n. Ясно, что $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, где $S_0 = 0$. Поскольку S_n — прямое слагаемое модуля S_{n+1}, то $P_{n+1} = S_{n+1}/S_n$ имеет конечную размерность, не превосходящую $\dim S_{n+1}$. Теперь $S_{n+1} \approx \coprod_{i=0}^{n+1} P_i$ и $S \approx \coprod_{i=0}^{\infty} P_i$ вполне разложим.

(b) непосредственно вытекает из леммы 21.12, а (c) — следствие из (a). □

21.14. Следствие. *Пусть Q — прямая сумма (любого числа) счетно порожденных неразложимых инъективных модулей. Тогда любое прямое слагаемое S модуля Q вполне разложимо.*

Доказательство. По теореме Капланского [58a] S само есть прямая сумма счетно порожденных модулей. Следовательно, достаточно доказать наше следствие для случая, когда S счетно порожден. Но этот случай вытекает из утверждения 21.13(a). □

Доказанное следствие было обобщено Уорфилдом [69b, 7.1, стр. 275].

21.15. Теорема. *Пусть Q — вполне разложимый инъективный правый R-модуль, т. е. $Q = \sum_{i \in I} \oplus Q_i$, где $\{Q_i \mid i \in I\}$ — множество неразложимых (инъективных) модулей.*

(a) *Пусть S — вполне разложимый подмодуль в Q, являющийся прямой суммой $\sum_{j \in J} \oplus S_j$ неразложимых инъективных подмодулей $\{S_j \mid j \in J\}$. Тогда S инъективен и $|J| \leqslant |I|$.*

(b) *Любое прямое слагаемое P модуля Q вполне разложимо.*

Доказательство. Для каждого подмножества A множества I положим $Q_A = \sum_{a \in A} Q_a$, и пусть π_A — проекция Q на Q_A с ядром Q_{I-A}. *Однородная компонента модуля Q* определяется как подмодуль Q_A, где A состоит из всех $b \in I$, для которых Q_b изоморфен некоторому фиксированному Q_a. Тогда $Q = \sum_A \oplus Q_A$, и если S — подмодуль, упомянутый в (a), то он также является прямой суммой своих однородных компонент, $S = \sum \oplus S_K$.

(a) Если $k \in K$, то S_k, будучи инъективным, выделяется в Q прямым слагаемым и потому в силу своей неразложимости изоморфен Q_a для некоторого $a \in I$. Покажем сначала, что

(i) S_K *изоморфен подмодулю однородной компоненты* Q_A *модуля* Q, *содержащей* Q_a. Предположим временно, что $S_K \cap \ker \pi_A \neq 0$. Если y — ненулевой элемент из этого пересечения, то подмодуль T, который он порождает, содержится в $S_{K'}$, где K' — конечное подмножество в K, и, кроме того, $T \subseteq Q_B$, где B — конечное подмножество в $I - A$. (Напомним, что $\ker \pi_A = Q_{I-A}$.) Поскольку $S_{K'}$ (соотв. Q_B) инъективен, то он содержит инъективную оболочку E (соотв. F) модуля T. Так как $S_{K'}$ — прямая сумма конечного числа неразложимых изоморфных между собой модулей, то таков же и модуль E [1]). Поскольку E и F изоморфны, то E содержит прямое слагаемое G, изоморфное Q_b для некоторого $b \in I - A$. Так как модуль G неразложим, то он изоморфен S_k, а, следовательно, и Q_a. Но это невозможно, поскольку $A = \{c \in I \mid Q_c \approx Q_a\}$. Это противоречие показывает, что $\ker \pi_A \cap S_K = 0$, поэтому π_A отображает S мономорфно в Q_A. Ниже φ_K обозначает мономорфизм $S_K \to Q_A$, индуцированный π_A.

Далее мы покажем, что

(ii) S_K *инъективен.* Если $|A|$ бесконечно, то Q_a счетно $\sum$-инъективен, и, следовательно, по 20.3A Q_a есть $\sum$-инъективный модуль. Отсюда вытекает инъективность модуля S_K. Предположим теперь, что $|A|$ конечно, скажем, $|A| = n$. Если $|K| > n$, то S_K содержит в качестве прямого слагаемого подмодуль T, являющийся прямой суммой $n + 1$ экземпляров модуля Q_a. Тогда, поскольку T инъективен, $\varphi_K(T)$ — прямое слагаемое модуля Q_A, являющееся прямой суммой $n + 1$ экземпляров модуля Q_a, что противоречит теореме Крулля — Шмидта — Ремака. Поэтому $|K| < \infty$, так что S_K инъективен и в этом случае. Это доказывает (ii), а также

(iii) *Если* W — *подмодуль модуля* Q, *являющийся прямой суммой изоморфных между собой неразложимых инъективных подмодулей, то он инъективен.* [(iii) есть не что иное, как однородный вариант утверждения (a), т. е. случай, когда $W = S = S_K$.]

Для того чтобы упростить обозначения, положим $X = Q_A$ и $U = \varphi_K(S_K) = \operatorname{im} \varphi_K$. Поскольку U изоморфен S_K, он инъективен; поэтому $X = U \oplus V$ для некоторого подмодуля V. По лемме Цорна существует максимальное независимое семейство P неразложимых инъективных подмодулей модуля V. Сумма W подмодулей из семейства P прямая. Поскольку модуль $X = Q_A$ однороден, то однороден и W, и поэтому в силу (iii) W инъективен. Следовательно, W — прямое слагаемое модуля V, откуда в силу максимальности семейства P получаем, что $W = V$. Вполне разложимые модули U и V дают разложение модуля $X = U \oplus V$ в прямую сумму неразложимых модулей. Тогда из теоремы о единственности разложения вытекает, что число неразложимых прямых слагаемых в разложении модуля $U = \varphi_K(S_K)$ не превосходит $|A|$, т. е. $|K| \leqslant |A|$. Таким образом, S_K изоморфен прямому слагаемому модуля Q. Это доказывает инъективность модуля S. Кроме того, поскольку J (соотв. I) — свободное объединение различных K (соотв. A), то $|K| \leqslant |A|$ влечет за собой неравенство $|J| \leqslant |I|$. Это доказывает (a), а (b) доказывается точно таким же способом, каким мы доказали, что V вполне разложим. $\square$

[1]) В силу 21.10 и 21.6.— *Прим. перев.*

Из рассуждения, которое в ходе доказательства показывало, что V вполне разложим, вытекает неравенство $|K| \leqslant |A|$. Этот факт имеет следующее прямое доказательство: каждый подмодуль S_k содержится в конечной прямой сумме модулей из семейства $\{Q_a\}$, а это дает вложение K в множество всех конечных подмножеств множества A, откуда $|K| \leqslant |A|$, если $|A|$ бесконечно. [В случае когда $|A| = n < \infty$, неравенство было установлено при доказательстве утверждения (ii).]

Упражнения к гл. 21

1. Если C — абелева категория и ее объекты A, B и B' обладают диаграммами Адзумаи, то $A \oplus B \approx A \oplus B'$ тогда и только тогда, когда $B \approx B'$. Любая эквивалентность $B \approx B'$ продолжается до эквивалентности объектов $A \oplus B$ и $A \oplus B'$.

2. Если в AB5-категории объекты A и B обладают диаграммами Адзумаи, то эквивалентность $A^{(I)} \approx B^{(J)}$ имеет место тогда и только тогда, когда $|I| = |J|$ и $A \approx B$. (Для конечных множеств I и J это верно в любой абелевой категории.)

3. Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм и условию максимальности для существенных правых идеалов. Привести пример коммутативного нenётерова кольца с условием максимальности для существенных правых идеалов.

4. Кольцо R называется **сильным правым кольцом Голди,** если каждое факторкольцо является правым кольцом Голди. Коммутативное кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда оно — сильное кольцо Голди (Камилло [75]).

5 (Ямагата [73]). Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

(I) R удовлетворяет условию максимальности для конеприводимых правых идеалов (т. е. таких правых идеалов, что R/I — однородный модуль).

(II) R удовлетворяет условию максимальности для существенных конеприводимых правых идеалов.

(III) Каждый вполне разложимый инъективный модуль обладает единственным разложением в прямую сумму неразложимых инъективных модулей (единственность понимается в смысле 21.6).

6 (Уорфилд [72b]). Если R — кольцо со свойством замены, то каждый проективный правый (левый) модуль изоморфен прямой сумме неразложимых правых (левых) идеалов, порожденных идемпотентами.

7 (Уорфилд). Говорят, что модуль M обладает *свойством n-замены*, где n — целое число, если для всякого прямого разложения

$$N = M \oplus K = \sum_{i=1}^{m} \oplus A_i,$$

где $m \leqslant n$, существует подмножество $m' \subseteq \{1, \ldots, m\}$, такое, что

$$N = M \oplus \Big(\sum_{i \in m'} \oplus A_i\Big).$$

Если это свойство выполняется для всех конечных кардинальных чисел n, то говорят, что M обладает *свойством конечной замены*. Правый R-модуль M обладает свойством конечной замены тогда и только тогда, когда свойством конечной замены обладают как $(\mathrm{End}_R\, M)_{\mathrm{End}_R M}$, так и ${}_{\mathrm{End}_R M}(\mathrm{End}_R\, M)$. Более того, R_R обладает свойством конечной замены в том и только том случае, когда R_R обладает свойством замены.

8 (Монк [72]). Кольцо R обладает свойством конечной замены тогда и только тогда, когда для каждого $a \in R$ существуют b и c в R, такие, что

$$bab = b$$

и

$$c(1 - a)\,(1 - ba) = 1 - ba.$$

Замечания к гл. 21

Общий вопрос, возникающий в различных категориях: имеет ли единственное разложение прямое слагаемое модуля с единственным разложением? Ответ на этот вопрос утвердительный для конечных разложений по теореме Крулля — Шмидта, а также в некоторых других случаях, обсуждавшихся в этой главе. В общем случае этот вопрос был поставлен Матлисом [58], и им же был дан ответ для инъективных модулей над нётеровыми кольцами. Теорема 21.15 обходится без предположения нётеровости. (См. также условие дополняемости прямых слагаемых, определяемое ниже.)

Теорема Крулля — Шмидта обсуждалась Райнером [61], [62], [70]. Она неверна для прямых сумм неразложимых модулей над целочисленными групповыми кольцами и кольцами целых алгебраических чисел. Например, для любых двух ненулевых идеалов I и J кольца R целых алгебраических чисел в поле алгебраических чисел (определенном в **1**, 12.19.2, стр. 558) или, более общим образом, в любой дедекиндовой области R (определенной в **1**, стр. 457) имеет место изоморфизм

$$I \oplus J \approx R \oplus K,$$

где K изоморфно произведению IJ двух идеалов (см. статью Капланского [52, теорема 2], где эта теорема приписывается Штейницу). Поскольку R — область целостности, все прямые слагаемые в указанном выше разложении однородны и, следовательно, неразложимы. В то же время $I \approx R$ тогда и только тогда, когда I — главный идеал. Аналогичная ситуация имеет место для проективных модулей над групповым кольцом RG любой конечной группы G, такой, что никакой простой делитель числа $|G|$ не обратим в R (Суон [60]). (Таким примером является целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$.)

Свойство замены было определено в гл. 19 перед упр. 19.21, результаты Кроули — Йонссона [64], Уорфилда [69a] и Фукса [69a] комментировались в упр. 19.21. Уорфилд [69a] применяет результаты Кроули и Йонссона, с тем чтобы получить некоторые обобщения теорем Фейса и Уокера, представленных в этой главе. В частности, предложение 21.14 справедливо для любой прямой суммы Q счетно порожденных инъективных модулей: любые два разложения в прямую сумму имеют изоморфные уплотнения.

Над кольцом, обладающим диаграммой Адзумаи, т. е. полулокальным SBI-кольцом, проективные модули ведут себя благородно: они изоморфны прямым суммам правых главных неразложимых модулей (для совершенных колец по теореме Басса [60], доказываемой в гл. 22, а для полусовершенных колец[1]) по теореме Мюллера [70a] и Уорфилда [72b]).

Говорят, что прямое разложение модуля $M = \sum_{i \in I} \oplus M_i$ **дополняет прямые слагаемые**, если для каждого прямого слагаемого P модуля M существует подмножество J множества индексов I, такое, что $M = P \oplus Q$, где $Q = \sum_{j \in J} \oplus M_j$. В таком случае говорят

---

[1]) То есть в силу 22.23 как раз для колец с диаграммами Адзумаи.— *Прим. перев.*

также, что M обладает **свойством дополняемости прямых слагаемых**. Для того чтобы это было так, каждый M_i, $i \in I$, должен быть неразложимым.

Придерживаясь хода доказательства теоремы 21.15, можно показать, что если инъективный модуль вполне разложим, то соответствующее прямое разложение дополняет прямые слагаемые. (См., например, Андерсон — Фуллер [72, стр. 251, предложение 7] и Уорфилд [69b].) По 20.6 и 20.9 все инъективные правые R-модули обладают свойством дополняемости прямых слагаемых тогда и только тогда, когда R нётерово справа, а все проективные правые R-модули обладают этим свойством тогда и только тогда, когда R совершенно справа (Андерсон — Фуллер, loc. cit.). [Таким образом, хотя над локальным кольцом R каждый проективный модуль P свободен и, следовательно, каждое прямое слагаемое проективного модуля является прямой суммой неразложимых проективных модулей, тем не менее P, вообще говоря, не обладает свойством дополняемости прямых слагаемых.]

Для любого конечно порожденного правого R-модуля M и его кольца эндоморфизмов $S = \operatorname{End}_R M$ функтор

$$\operatorname{Hom}_R(M, \ ): \quad \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}S$$

индуцирует эквивалентность категории $\sum_M$ прямых слагаемых прямых сумм модуля M с категорией проективных правых S-модулей; поэтому по теореме Фуллера — Андерсона все модули в $\sum_M$ обладают свойством дополняемости прямых слагаемых тогда и только тогда, когда S совершенно справа. (Эквивалентность категорий была отмечена Тахикавой и Фуллером в примечании к статье Фуллера [73, стр. 178]. В том же примечании указано, что каждый модуль над артиновым FFM-кольцом обладает свойством дополняемости прямых слагаемых — результат, обобщающий один из результатов Фуллера [73].)

Как отмечено в упр. 5, Ямагата [73] выяснил, когда каждый вполне разложимый модуль обладает единственным разложением; найденное им условие характеризует кольца, над которыми каждый инъективный вполне разложимый (в прямую сумму неразложимых инъективных модулей) правый модуль обладает свойством дополняемости прямых слагаемых. (Это имеет место тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию максимальности для конеприводимых правых идеалов — условие, значительно более слабое, чем нётеровость справа.)

Как выяснил Камилло [75a] (и другие), многие теоремы для нётеровых колец переносятся на сильные кольца Голди, и ввиду теоремы Камилло, сформулированной в упр. 4, встает вопрос: являются ли вполне ограниченные сильные кольца Голди нётеровыми справа?

См. также замечания к гл. 20.

Ссылки

Адзумая [50], Андерсон — Фуллер [72], Басс [60], Зариский — Самюэль [63], Камилло [75], Капланский [58a], Кроули — Йонссон [64], Матлис [58], Монк [72], Суон [60], [68], Уокер К. [66], Уорфилд [69b], [69c], [72a], [72b], Фейс — Уокер Э. [67], Фукс [69a], Фуллер [73], Харада [71], Харада — Саи [70], Ямагата [73].

Глава 22

ПРОЕКТИВНЫЕ НАКРЫТИЯ И СОВЕРШЕННЫЕ КОЛЬЦА

Говорят, что морфизм $f\colon A \to B$ R-модулей **минимален**, если $\ker f$ — косущественный подмодуль модуля A. Например, для правого идеала I канонический гомоморфизм $R \to R/I$ минимален тогда и только тогда, когда $I \subseteq \operatorname{rad} R$ (18.3). Модуль A называется **проективным накрытием** модуля B (в обозначениях $P(B)$), если A проективен и существует минимальный эпиморфизм $A \to B$. Это понятие дуально понятию инъективной оболочки, однако, хотя каждый R-модуль обладает инъективной оболочкой, проективного накрытия может и не существовать. Например, как показывается в этой главе, необходимое условие для того, чтобы каждый правый R-модуль имел проективное накрытие, состоит в том, чтобы кольцо $R/\operatorname{rad} R$ было классически полупростым, а $\operatorname{rad} R$ — ниль-идеалом.

Говорят, что кольцо R **совершенно** (соотв. **полусовершенно**) справа, если каждый правый R-модуль (соотв. каждый циклический правый R-модуль) имеет проективное накрытие. Симметрично определяются левые (полу)совершенные кольца.

Эквивалентность $T\colon \text{mod-}R \sim \text{mod-}S$ абелевых категорий индуцирует структурный изоморфизм между структурами подобъектов объекта $X \in \text{mod-}R$ и объекта $TX \in \text{mod-}S$. Отсюда следует, что косущественность подмодуля, а следовательно, и свойство быть проективным накрытием — категорные свойства. Так как свойство конечной порожденности модуля в mod-R категорно, то свойства полусовершенности и совершенности инвариантны в смысле Мориты. Рассмотрим простейший случай, скажем, когда кольцо R локально. Любой собственный правый идеал I кольца R содержится в $\operatorname{rad} R$ и косуществен (18.4); поэтому канонический гомоморфизм $R \to R/I$ является проективным накрытием. Это показывает, что любое локальное кольцо R полусовершенно, и поэтому полусовершенно кольцо матриц R_n для любого n.

При изучении проективных накрытий важным оказывается следующее обобщение свойства нильпотентности идеала: говорят, что множество I кольца R **исчезает слева** (или является **исчезающим слева**), если для каждой бесконечной последовательности $\{a_n\}$ элементов из I существует целое число k, такое, что $a_k a_{k-1} \dots a_1 = 0$. Симметрично определяется понятие множества, исчезающего справа [1]). Таким образом, идеал, исчезающий справа (слева), является ниль-идеалом. Это понятие связано также с понятием существенно нильпотентного идеала: идеал N содержит исчезающий справа правый идеал J, являющийся существенным в N, тогда и только тогда, когда он содержит нильпотентный правый идеал, существенный в N. (Шок [71c]; ср. 19.13C.)

Теорема 22.29 Басса [60] утверждает, что следующие условия на кольцо R эквивалентны:

I. *R совершенно справа.*

II. *$R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто и $\operatorname{rad} R$ исчезает слева.*

III. *Каждый ненулевой левый R-модуль имеет ненулевой цоколь, и число ортогональных идемпотентов кольца R ограничено.*

IV. *R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов.*

22.0. Упражнение. (a) Показать, что свойства I, II и III инвариантны в смысле Мориты.

(b) Доказать эквивалентность свойств I — IV для локального кольца.

(c) Доказать, что конечное прямое произведение (полу)совершенных колец (полу)совершенно. Показать, что бесконечное прямое произведение колец никогда не полусовершенно.

Помимо только что обсуждавшейся теоремы Басса эта глава содержит следующие основные теоремы: (1) теорему 22.10 Бьёрка, утверждающую, что условие минимальности для циклических подмодулей любого модуля влечет за собой то же условие для его конечно порожденных подмодулей; (2) теорему 22.13 Чейза, выясняющую, когда прямые произведения проективных модулей проективны, а также ряды Лёви и теорию Брауэра блоков для совершенных слева колец (22.33 и далее).

Теорема Бьёрка показывает, что свойство IV влечет за собой условие минимальности для конечно порожденных левых идеалов.

Радикал проективных модулей

22.1A. Предложение. *Если P — ненулевой проективный R-модуль, то*

$$\operatorname{rad} P = P \cdot \operatorname{rad} R \neq P. \tag{1}$$

[1]) То, что мы назвали «исчезающим слева», Басс [60] называет «**T-нильпотентным** справа» (T от «transfinite»). «Слева» означает, что члены последовательности $\{a_n \dots a_1\}$ «наращиваются» слева, а «исчезающее» указывает на потенциальное обращение в нуль членов последовательности, т. е. «исчезающее слева» — сокращение для «потенциально исчезающего слева».

Доказательство. Во-первых,

$$\mathrm{rad}\left(\sum_{i\in I}\oplus A_i\right)=\sum_{i\in I}\oplus\,\mathrm{rad}\,A_i \tag{2}$$

для любого модуля $A=\sum_{i\in I}\oplus A_i$. Действительно, если $A\supseteq B$, то $\mathrm{rad}\,A\supseteq\mathrm{rad}\,B$, поэтому левая часть равенства (2) содержит правую. Если

$$a=\sum a_i\in\sum_{i\in I}\oplus A_i$$

и $a_i\notin\mathrm{rad}\,A_i$ для некоторого i, то a_iR не является косущественным подмодулем в A_i, и отсюда сразу вытекает, что aR не косуществен в A. Итак, равенство (2) справедливо. Из него следует, что $\mathrm{rad}\,F = F\cdot\mathrm{rad}\,R$, если F — свободный модуль. В общем случае имеем $P\oplus Q=F$ для некоторого свободного модуля F и

$$\mathrm{rad}\,F=\mathrm{rad}\,P\oplus\mathrm{rad}\,Q=F\cdot\mathrm{rad}\,R=P\cdot\mathrm{rad}\,R\oplus Q\cdot\mathrm{rad}\,R,$$

откуда $\mathrm{rad}\,P=P\cdot\mathrm{rad}\,R$. Остается показать, что $\mathrm{rad}\,P\neq P$. Пусть $\{x_i\mid i\in I\}$ — базис модуля F, и допустим, что $0\subset P\subset F\cdot\mathrm{rad}\,R$. Пусть x — любой ненулевой элемент модуля P, и допустим, что базис $\{x_i\mid i\in I\}$ выбран таким образом, что в выражении

$$x=\sum x_ir_i\quad(r_i\in R)$$

число ненулевых коэффициентов r_i является наименьшим из возможных, скажем n, а значит, $r_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n$. Поскольку $F=P\oplus Q$, мы можем записать

$$x_i=p_i+q_i\quad(p_i\in P,\quad q_i\in Q,\quad i=1,\ldots,n).$$

Кроме того,

$$p_i=\sum_{j=1}^n x_js_{ij}\quad(s_{ij}\in R,\quad i,\ j=1,\ldots,n).$$

Так как $P\subseteq F\cdot\mathrm{rad}\,R$, то $s_{ij}(i,\ j=1,\ldots,n)$ должны лежать в $\mathrm{rad}\,R$. Поскольку

$$x=\sum_{i=1}^n x_ir_i=\sum_{i=1}^n p_ir_i+\sum_{i=1}^n q_ir_i\in P,$$

то $\sum_{i=1}^n q_ir_i=0$. Итак,

$$x=\sum_{i=1}^n p_ir_i=\sum_{j,\,i=1}^n x_js_{ij}r_i=\sum_{i=1}^n x_ir_i,$$

поэтому $r_1=\sum_{i=1}^n s_{i1}r_i$, откуда $(1-s_{11})r_1=\sum_{i=2}^n s_{i1}r_i$. Так как $s_{11}\in\mathrm{rad}\,R$, то $1-s_{11}$ обратим в R. Если $s=(1-s_{11})^{-1}$, то

$$r_1=\sum_{i=2}^n ss_{i1}r_i$$

и

$$x=\sum_{i=2}^n (x_i+x_1ss_{i1})\,r_i. \tag{3}$$

Но система $\{x_1,\ x_2+x_1ss_{21},\ \ldots,\ x_n+x_1ss_{n1}\}$ линейно независима над R и вместе с $\{x_i\mid i>n\}$ образует базис модуля F, такой, что запись (3) элемента x в этом базисе содержит только $n-1$ ненулевых «коэффициентов» $r_2,\ \ldots,\ r_n$. Полученное противоречие доказывает, что $P\neq P\cdot\mathrm{rad}\,R$. □

Это доказательство Хинохары [63] создано по образцу рассуждений Капланского (см. также Басс [60]).

Докажем теперь теорему Эйленберга [56] — Капланского [58].

22.1В. Следствие. *Если R — локальное кольцо, то любой конечно порожденный проективный R-модуль $P\neq 0$ свободен. (На самом деле в этом случае любой проективный R-модуль свободен.)*

Доказательство. Сначала покажем, что любой проективный R-модуль является образующим и имеет вид $R\oplus A$ для некоторого $A\in\text{mod-}R$. Пусть $T=\mathrm{tr}\,P_R$ и $J=\mathrm{rad}\,R$. Поскольку $P=PT$ по 12.1, то из предложения 22.1А вытекает, что $T\nsubseteq J$, и поэтому существуют $p\in P$ и $f\in P^*=\mathrm{Hom}_R(P,\ R)$, такие, что $t=f(p)\notin J$. Поэтому t — обратимый элемент и $R=tR$. Таким образом, $f\colon P\to R$ — эпиморфизм, из чего вытекает, что $P\approx R\oplus A$, как и утверждалось.

Теперь предположим, что P к тому же конечно порожден. Тогда P/PJ является векторным пространством конечной размерности, скажем n, над телом R/J. Таким образом, P/PJ имеет самое большее n прямых слагаемых (изоморфных R/J). Пусть k — целое положительное число и B — такой R-модуль, что $P\approx R^k\oplus B$. Тогда $P/PJ\approx(R/J)^k\oplus(B/BJ)$ и, следовательно, $k\leqslant n$. Пусть k — максимальное целое число, такое, что $P\approx R^k\oplus B$ для некоторого модуля B. Предположим, что $B\neq 0$. Поскольку B проективен, то предыдущий результат показывает, что $B\approx R\oplus C$ для некоторого модуля C. Но тогда $P\approx R^{k+1}\oplus C$. Полученное противоречие показывает, что $B=0$, и, таким образом, $P\approx R^k$ свободен. (На самом деле, $k=n$.)

Общий случай [1]) разобран Капланским [58]. □

[1]) Указанный в формулировке в скобках.— *Прим. перев.*

Проективные B-объекты

Напомним определение 18.3 *B-объекта* категории mod-R, необходимое нам для нескольких следующих результатов: B-объектом называется модуль M, каждый собственный подмодуль которого содержится в максимальном подмодуле.

22.2. Предложение. *Если P — проективный R-модуль и $S = \operatorname{End} P_R$, то*

$$\operatorname{rad} S = \{f \in S \mid P \circ\!- \operatorname{im} f\}.$$

Доказательство дуально доказательству утверждения 19.27 (a). $\square$

22.3. Следствие. *Если P — конечно порожденный проективный B-объект категории mod-R, то радикал его кольца эндоморфизмов равен*

$$\operatorname{rad}(\operatorname{Hom}_R(P, P)) = \operatorname{Hom}_R(P, P\cdot\operatorname{rad} R). \ \square$$

22.4. Предложение. *Любая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Q_1 \longrightarrow 0 \\ \theta_2\downarrow & & \downarrow\theta_2 \\ P_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Q_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

с точными строками и проективными R-модулями P_1 и P_2 может быть дополнена до коммутативной гомоморфизмом θ_2: $P_1 \to P_2$.

(a) *Если $P_2 \circ\!- \ker \alpha_2$, то θ_2 является эпиморфизмом, если θ_1 — эпиморфизм.*

(b) *Если $P_2 \circ\!- \ker \alpha_2$ и $P_1 \circ\!- \ker \alpha_1$, то θ_2 является изоморфизмом, если θ_1 — изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 = \theta_1\alpha_1$. В силу проективности модуля P_1 существует гомоморфизм θ_2: $P_1 \to P_2$, такой, что $\alpha_2\theta_2 = \varphi_1$, т. е. θ_2 дополняет диаграмму до коммутативной. Если θ_1 — эпиморфизм, то и φ_1 — эпиморфизм. Таким образом, если $y \in P_2$, то $\alpha_2(y) = \varphi_1(x) = \theta_1\alpha_1(x)$ для некоторого $x \in P_1$. Поскольку

$$\theta_1\alpha_1(x) = \alpha_2\theta_2(x) = \alpha_2(y),$$

то $\theta_2(x) - y \in \ker \alpha_2$. Поэтому $P_2 = \operatorname{im} \theta_2 + \ker \alpha_2$, и так как $P_2 \circ\!- \ker \alpha_2$, то отсюда следует, что $P_2 = \operatorname{im} \theta_2$. Следовательно, θ_2 — эпиморфизм, т. е. (a) доказано. Поскольку P_2 проективен, то $P_1 = A \oplus \ker \theta_2$, где $A \approx P_2$. Предположив, что θ_1 — мономорфизм, получим $\ker \theta_2 \subseteq \ker \alpha_1$. Теперь из $P_1 \circ\!- \ker \alpha_1$, вытекает, что $P_1 \circ\!- \ker \theta_2$. Так как $\ker \theta_2$ — прямое слагаемое, то $\ker \theta_2 = 0$. $\square$

22.5. Следствие. *Пусть P_i — проективный модуль, являющийся B-объектом категории* mod-R *(например, пусть P_i — конечно порожден и проективен), $i = 1, 2$. Если K_i — подмодуль в $\operatorname{rad} P_i$, $i = 1, 2$, то*

(a) $(P_1/K_1 \approx P_2/K_2) \Rightarrow (P_1 \approx P_2)$,

(b) $(P_1/\operatorname{rad} P_1 \approx P_2/\operatorname{rad} P_2) \Leftrightarrow (P_1 \approx P_2)$.

Следствие вытекает непосредственно из 22.4, 22.1 и утверждения 18.3 о том, что $\operatorname{rad} P_i$ косуществен в P_i. $\square$

22.6. Предложение. *Пусть P — проективный B-объект категории* mod-R *и $S = \operatorname{End} P_R$. Тогда*

(a) $S/\operatorname{rad} S \approx \operatorname{End}(P/P\cdot\operatorname{rad} R)_R$;

(b) *если модуль $P/(P\cdot\operatorname{rad} R)$ полупрост, то $P/(P\cdot\operatorname{rad} R)$ является простым тогда и только тогда, когда S — локальное кольцо.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & P/PJ \longrightarrow 0 \\ \theta\downarrow & & \downarrow\theta' \\ P & \xrightarrow{\alpha} & P/PJ \longrightarrow 0 \end{array} \qquad (J = \operatorname{rad} R)$$

где α: $P \to P/PJ$ — канонический эпиморфизм, а $\theta \in S$. Поскольку $\theta(PJ) = (\theta P)J \subseteq PJ$, θ индуцирует гомоморфизм θ': $P/PJ \to P/PJ$. Ясно, что соответствие $\theta \mapsto \theta'$ является кольцевым гомоморфизмом

$$h\colon S \to \operatorname{End}(P/PJ)_R.$$

Теперь из 22.4 вытекает, что h — наложение колец. В силу коммутативности диаграммы $\theta \in \ker h$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} \theta \subseteq PJ$. Следовательно, по 22.3 $\ker h = \operatorname{rad} S$, что и доказывает (a).

(b) По теореме Утуми 19.27 полупростота модуля P/PJ влечет за собой регулярность кольца $\operatorname{End}(P/PJ)_R$. Легко видеть, что следующие утверждения эквивалентны: (i) P/PJ прост, (ii) $\operatorname{End}(P/PJ)_R$ не содержит нетривиальных идемпотентов; (iii) $\operatorname{End}(P/PJ)_R$ — тело. Поэтому из (a) вытекает, что S — локальное кольцо. $\square$

B-кольца и исчезающие слева идеалы

Далее мы исследуем класс колец, называемых *правыми B-кольцами*. Они названы так в честь Басса (Bass) [60], который положил начало их изучению. Это кольца, над которыми каждый ненулевой правый модуль имеет максимальный подмодуль, или, эквивалентно, каждый правый модуль является B-объектом (18.3).

22.7A. Упражнение. (a) Любое кольцо R, для которого mod-R имеет нётеров кообразующий, является правым B-кольцом (ср. 1, 7.41).

(b) Любое полупримарное кольцо является левым и правым B-кольцом.

(c) Модуль M, имеющий проективное накрытие, содержит максимальный подмодуль. Следовательно, любое совершенное справа кольцо является правым B-кольцом.

22.7B. Предложение (Басс [60]). *Если R — правое B-кольцо, то* rad R *— идеал, исчезающий слева.*

Доказательство. (Розенберг — Зелинский [61]). Пусть P — свободный модуль со счетным базисом $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, и пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — бесконечная последовательность элементов из rad R. Рассмотрим элемент f кольца $S = \operatorname{End} P_R$, отображающий x_i в $x_{i+1}a_i$, $i = 1, 2, \ldots$. По 22.3 $f \in \operatorname{rad} S$, следовательно, $1 - f$ обратим в S. Пусть $y = (1-f)^{-1}x_1$. Запишем

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i,$$

где $b_i \in R$, $b_n = 0$, $n \geqslant k$. Тогда

$$x_1 = (1-f)\, y = \sum x_i b_i - \sum x_{i+1} a_i b_i =$$
$$= x_1 b_1 + x_2 (b_2 - a_1 b_1) + \sum_{n>2} x_n (b_n - a_{n-1} b_{n-1}).$$

Поскольку $\{x_n \mid n \geqslant 1\}$ является базисом, то $b_1 = 1$ и $b_n = a_{n-1} \ldots a_2 a_1$, $n \geqslant 2$. Таким образом, $b_k = a_{k-1} \ldots a_2 a_1 = 0$. □

22.8. Предложение. *Каждое совершенное справа кольцо является правым B-кольцом (и имеет исчезающий слева радикал).*

Доказательство. Пусть M — такой модуль, что rad $M = M$, и пусть $P \xrightarrow{f} M$ — проективное накрытие модуля M. Если $M \neq 0$, то $P \neq 0$, и поэтому P имеет максимальный подмодуль P'. Пусть $f' = f \mid P'$ — ограничение f на P'. Отображение $x + P' \mapsto f(x) + \operatorname{im} f'$ будет гомоморфизмом $P/P' \to M/\operatorname{im} f'$. Поскольку P/P' — простой модуль, а rad $M = M$, то im $f' = M$, т. е. $P = P' + \ker f$. Так как $P \circ\!- \ker f$, то $P' = P$. Полученное противоречие доказывает, что равенство rad $M = M$ влечет за собой $M = 0$. □

22.9. Предложение. *Если главные левые идеалы, лежащие в* rad R, *удовлетворяют условию минимальности, то* rad R *исчезает слева.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, $\{b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, где $a_n \in \operatorname{rad} R$ и $b_n = a_n \ldots a_2 a_1$ для всех n. Цепь главных левых идеалов

$$Rb_1 \supseteq Rb_2 \supseteq \ldots \supseteq Rb_n \quad \ldots$$

обрывается, скажем $Rb_k = Rb_{k+1}$. Пусть $b = b_k$. Тогда $b_{k+1} = a_{k+1}b$. Так как $b \in Rb_{k+1}$, то существует x, такой, что $b = xa_{k+1}b$. Поскольку $u = xa_{k+1}$ лежит в rad R, то $1 - u$ — обратимый элемент кольца R. Поэтому равенство $(1-u)b = 0$ влечет за собой $b = 0$. □

Цокольные слева кольца

Ниже мы вводим термин для одного понятия, использованного Бассом [60].

22.10A. Предложение[1]. *Говорят, что кольцо R* **цокольное слева**, *если выполнены следующие эквивалентные условия:*

(a) *Каждый ненулевой левый модуль имеет ненулевой левый цоколь.*

(b) *Каждый циклический левый модуль R/I содержит простой подмодуль, если $I \neq R$.*

Если это так, то rad R *исчезает слева.*

Доказательство. По индукции определим последовательность $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ идеалов кольца R, где Λ — некоторое вполне упорядоченное множество ординальных чисел. Если 0 — наименьший элемент в Λ, то положим $S_0 = 0$. Если $\alpha \in \Lambda$, то $S_{\alpha+1}/S_\alpha$ совпадает с левым цоколем кольца R/S_α; если $\beta \in \Lambda$ и β — предельное число, то положим $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha$. Поскольку R — цокольное слева кольцо, то Λ можно выбрать таким образом, что $R = S_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Lambda$. Для каждого $a \in R$ положим $h(a)$ равным наименьшему из таких элементов α множества Λ, для которых $a \in S_\alpha$. Заметим, что число $h(a)$ не является предельным ни для какого $a \in R$ (если $a \in S_\beta$, где β — предельное число, то $a \in S_\alpha$ для некоторого $\alpha < \beta$). Пусть $h(a) = \beta + 1$, и пусть $J = \operatorname{rad} R$. Так как $J \cdot (S_{\beta+1}/S_\beta) = 0$, т. е. $J \cdot S_{\beta+1} \subseteq S_\beta$, то отсюда следует, что $h(ba) < h(a)$ для любого $b \in J$, если только $h(a) \neq 0$, т. е. если $a \neq 0$. Если $\{a_n\}$ — бесконечная последовательность элементов из J и если $b_n = a_n \ldots a_1$, то

$$\ldots < h(b_n) < h(b_{n-1}) < \ldots < h(a_1)$$

[1] Поскольку совершенные справа кольца оказываются цокольными (socular) слева, я сочинил стишок, связывающий «socular» с «jocular» (забавный), но более благоразумный коллега убедил меня не приводить его здесь.

— бесконечная строго убывающая последовательность ординальных чисел из Λ, если только $b_n = a_n \ldots a_1$ не равен нулю для некоторого n. Поскольку Λ вполне упорядоченно, то первый случай невозможен и потому $\operatorname{rad} R$ исчезает слева. $\square$

22.10B. Сводка. *Радикал кольца R исчезает слева в каждом из следующих случаев*:

(a) *R — правое B-кольцо* (22.7).

(b) *R совершенно справа* (22.8).

(c) *R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов* (*или для главных левых идеалов, лежащих в* $\operatorname{rad} R$) (22.9).

(d) *R — цокольное слева кольцо* (22.10A).

Единственность проективного накрытия

Следующая лемма показывает, что, когда проективные накрытия существуют, они единственны.

22.11. Лемма. *Допустим, что $P \xrightarrow{g} A$ — проективное накрытие правого R-модуля A, а $Q \xrightarrow{f} A \to 0$ — точная последовательность, в которой модуль Q проективен. Тогда*

(a) *Существует эпиморфизм h: $Q \to P$, такой, что $Q = (\ker h) \oplus P'$, где $P' \approx P$, $\ker f \supseteq \ker h$ и $P' \circ\!- (\ker f \cap P')$.*

(b) *Если $Q \xrightarrow{f} A$ — проективное накрытие, то h — изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку Q проективен, следующая диаграмма может быть дополнена до коммутативной:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & A \\ P \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Так как f — эпиморфизм, то $P = \operatorname{im} h + \ker g$. Тогда $P \circ\!- \ker g$ влечет за собой тот факт, что h является эпиморфизмом. Поскольку P проективен, h расщепляется: $Q = (\ker h) \oplus P'$. Таким образом, h индуцирует изоморфизм h': $P' \to P$. Если $x \in \ker f \cap P'$, то $gh(x) = (fx) = 0$, и поэтому $h'(\ker f \cap P') \subset \ker g$. Следовательно, $h'(\ker f \cap P')$ косущественен в $P = h'(P')$. Так как h' — изоморфизм, это влечет за собой $P' \circ\!- (\ker f \cap P')$. Это доказывает (a). В случае (b) $Q \circ\!- \ker f$, поэтому $Q = \ker f + P'$ влечет за собой $Q = P'$, откуда $\ker h = 0$. $\square$

22.12A. Лемма. (a) *Если I — правый идеал кольца R, то канонический гомоморфизм $R \to R/I$ является проективным накрытием тогда и только тогда, когда $I \subseteq \operatorname{rad} R$.*

(b) *Если R/I имеет проективное накрытие и $I \nsubseteq \operatorname{rad} R$, то I содержит ненулевое прямое слагаемое кольца R, т. е. I содержит идемпотент кольца R.*

Доказательство. (a) есть следствие того факта, что $\operatorname{rad} R$ — косущественный правый идеал, содержащий любой другой косущественный правый идеал кольца R (18.4).

(b) Пусть $P \to R/I \to 0$ — проективное накрытие. По лемме 22.11 можем записать $R = P' \oplus H$, $H \subseteq I$. Поскольку $I \nsubseteq \operatorname{rad} R$, R не является проективным накрытием модуля R/I, т. е. R не изоморфно P' и $H \neq 0$. Правый идеал H и есть искомое прямое слагаемое кольца R, содержащееся в I. $\square$

22.12B. Лемма. *Пусть I — идеал кольца R.*

(a) *Если $P \xrightarrow{f} A \to 0$ — проективное накрытие правого R-модуля A и $AI = 0$, то $P/PI \xrightarrow{\bar f} A \to 0$ — проективное накрытие правого (R/I)-модуля A, где $\bar f$ индуцирован гомоморфизмом f.*

(b) *Если R* (*полу*)*совершенно, то таково же и R/I.*

Доказательство. (a) Тот факт, что P/PI — проективный (R/I)-модуль, проверяется непосредственно. Так как $AI = 0$, то $\ker f \supseteq PI$. Это показывает, что соответствие $x + PI \mapsto f(x)$, определенное для всех $x \in P$, является гомоморфизмом $\bar f$: $P/PI \to A$. Если S — подмодуль модуля P, содержащий PI и такой, что $P/PI = (S/PI) + (K/PI)$, где $K = \ker f$, то $P = S + K$. Тогда $P \circ\!- \ker f$ влечет за собой равенство $P = S$ и $P/PI = S/PI$. Это показывает, что K/PI — косущественный подмодуль в P/PI. Поскольку $\ker \bar f = K/PI$, то P/PI является проективным накрытием модуля A (как (R/I)-модуля). Очевидно, (a) $\Rightarrow$ (b). $\square$

22.13. Предложение. *Полусовершенное кольцо полулокально.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $\operatorname{rad} R = 0$, поскольку $R/\operatorname{rad} R$ полусовершенно, если полусовершенно кольцо R. В таком случае мы должны доказать, что R классически полупросто. Пусть I — любой правый идеал и f: $P \to R/I$ — проективное накрытие модуля R/I. Тогда, поскольку $\ker f$ косущественен в P, мы имеем $\ker f \subseteq \operatorname{rad} P = P \cdot \operatorname{rad} R$ (ср. 22.1A и 18.3). Так как $\operatorname{rad} R = 0$, то $\ker f = 0$, и потому $R/I \approx P$ — проективный R-модуль. Но тогда канонический гомоморфизм $R \to R/I$ расщепляется; поэтому R классически полупросто ввиду 8.12. $\square$

22.14. Предложение. *Идемпотенты поднимаются по модулю любого ниль-идеала.*

Доказательство. См. 18.21. □

Идеал I кольца R называется **локально нильпотентным**, если любой идеал, порожденный конечным множеством элементов из I, нильпотентен. Если I локально нильпотентен, то прямые вычисления показывают, что I_n — ниль-идеал кольца матриц R_n, и поэтому в силу 22.14 идемпотенты по mod I_n кольца R_n могут быть подняты — факт, используемый в следующем доказательстве. (Эта теорема больше нигде не используется.)

22.15. Предложение (Эйленберг [56], Суон [60]). *Если I — идеал кольца R, такой, что либо* (a) *I локально нильпотентен, либо* (b) *кольцо R I-адически полно, то отображение $[P] \to [P/PI]$ является биекцией между множествами классов эквивалентности конечно порожденных проективных R-модулей и конечно порожденных проективных (R/I)-модулей.*

Доказательство. (a) В 22.12 мы отметили, что P/PI проективен над $S = R/I$, если P проективен над R. Обратно, если Q — конечно порожденный проективный S-модуль, то $Q \oplus U = S^n$ для некоторого n и некоторого S-модуля U. Тогда, отождествляя S_n с $\mathrm{End}_S S^n$, получим, что существует идемпотент $\bar{e} \in S_n$, такой, что $Q = \bar{e}S^n$. Теперь $S_n = (R/I)_n \approx R_n/I_n$. Отождествляя R_n/I_n с S_n, идемпотент $\bar{e}$ можно поднять до идемпотента $e \in R_n$. Тогда $P = eR^n$ — проективный R-модуль и

$$P/PI \approx eR^n/eR^nI = eR^n/eI^n \approx \bar{e}\,(R/I)^n \approx \bar{e}S^n = Q.$$

[Изоморфизм $(R^n/I^n) \approx (R/I)^n$ задается соответствием $(a_1, \ldots, a_n) + I^n \mapsto (a_1 + I, \ldots, a_n + I)$.]

Таким образом, отображение φ: $[P] \mapsto [P/PI]$ является наложением. Наконец, пусть $P/PI \approx Q/QI$, где P, Q — конечно порожденные проективные модули. Поскольку $I \subseteq \mathrm{rad}\, R$, 22.5 влечет за собой $P \approx Q$, и поэтому φ биективно.

(b) В силу доказательства утверждения (a) остается лишь показать, что идемпотенты кольца R_n/I_n поднимаются. Чтобы это сделать, досточно ввиду 21.7B показать, что R_n есть I_n-адически полное колоцо. Доказательство этого в свою очередь опирается на утверждение о том, что $(IK)_n = I_nK_n$ для любых идеалов I и K кольца R, которое следует из теоремы о соответствии 1, 4.6 (ср. 1, 4.31) [1]). Таким образом, $(I^m)_n = (I_n)^m$ для любых m и n и сквозной гомоморфизм

$$R_n \to \varprojlim R_n/(I^m)_n \approx \varprojlim (R/I^m)_n,$$

[1]) Еще проще в этом убедиться непосредственно.— *Прим. перев.*

где первое отображение каноническое, является изоморфизмом, поскольку кольцо R I-адически полно. Следовательно, R_n I_n-адически полно, что и требовалось. □

22.16. Упражнение. Пусть Proj.mod-R — полная подкатегория категории mod-R, состоящая из конечно порожденных проективных R-модулей. Показать, что φ: Proj.mod-$R \to$ Proj$\cdot$mod-(R/I), определенное в 22.15, можно продолжить до изоморфизма этих категорий, если для f: $P \to Q$ положить $\varphi(f)$: $P/PI \to Q/QI$ равным индуцированному отображению $(x + PI) \to (f(x) + QI)$.

22.17. Лемма. *Пусть I — идеал кольца R, содержащийся в* rad R, *и допустим, что идемпотенты кольца R/I могут быть подняты. Пусть π — каноническое отображение $R \to R/I$. Если g — идемпотент кольца R, то любой идемпотент кольца R/I, ортогональный к $\pi(g)$, поднимается до идемпотента в R, ортогонального к g.*

Доказательство. Если $y \in R/I$ — идемпотент, ортогональный к $\pi(g)$, то по условию существует идемпотент $f \in R$, такой, что $\pi(f) = y$. Поскольку fg, gf лежат в I, то оба эти элемента лежат в rad R и, следовательно, $1 - fg$ имеет обратный в R. Положим

$$f' = (1 - fg)^{-1}f(1 - fg).$$

Так как f' сопряжен к f, то f' — идемпотент. Кроме того, $f'g = 0$, поскольку $f(1 - fg)g = 0$. Теперь $(1 - fg)f' = f - fg$, поэтому $f' - fgf' = f - fg$ и $f' - f = (fg)f' - (fg)$. Так как $fg \in I$, то это показывает, что $f' - f \in I$.

Теперь положим $e = f' - gf' = (1 - g)f'$. Тогда $ge = eg = 0$ и

$$e \equiv (1 - g)f \equiv f \equiv y \text{ (по модулю } I).$$

Кроме того, $e^2 = (1 - g)f'(1 - g)f' = (1 - g)f' = e$. □

22.18. Предложение. *Если I — идеал кольца R, содержащийся в* rad R, *а идемпотенты кольца R/I могут быть подняты, то любое конечное или счетное множество $\{u_i\}$ ортогональных идемпотентов кольца R/I может быть поднято до множества ортогональных идемпотентов кольца R.*

Доказательство. (Ламбек [71a]). Предположим, что мы уже подняли ортогональные идемпотенты $u_1, \ldots, u_k$ из R/I до ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Тогда $g = e_1 + \ldots + e_k$ — идемпотент, такой, что $u_{k+1}\pi(g) = \pi(g)u_{k+1} = 0$. Следовательно, по предыдущей лемме u_{k+1} поднимается до идемпотента e_{k+1}, ортогонального к g. Но тогда e_{k+1} ортогонален к $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Это завершает индукцию и доказывает предложение. □

22.19. Предложение. *Если кольцо R полусовершенно, то оно — полулокальное* SBI*-кольцо и прямые разложения R-модуля $R/\mathrm{rad}\ R$ могут быть подняты до прямых разложений модуля R.*

Доказательство. Кольцо R полулокально по 2.13. Пусть π — каноническое отображение $R \to R/J$, где $J = \mathrm{rad}\ R$. Предположим, что $u \in R$ — идемпотент по модулю J, т. е. $\pi(u) = \bar{u}$ — идемпотент в $\bar{R} = R/J$. Тогда правый идеал $A_1 = \bar{u}\bar{R}$ — прямое слагаемое кольца $\bar{R}$, так что $\bar{R} = A_1 \oplus A_2$, где $A_2 = (1 - \bar{u})\bar{R}$.

Пусть $P_i \xrightarrow{f_i} A_i$ — проективные накрытия с $K_i = \ker f_i$, $i = 1, 2$. *Утверждение*: $P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} A_1 \oplus A_2$ *— проективное накрытие R-модуля $\bar{R}$.* Поскольку $P_1 \oplus P_2$ проективен и $f = f_1 \oplus f_2$ — эпиморфизм, остается только показать, что $K_1 \oplus K_2$ — ядро гомоморфизма f — косущественно в $P_1 \oplus P_2$. Пусть в самом деле S — такой подмодуль, что $P_1 \oplus P_2 = S + (K_1 \oplus K_2)$. В целях простоты записи отождествим P_1, P_2, K_1, K_2 с их образами в $P_1 \oplus P_2$. Тогда $P_1 \supseteq K_1$ влечет за собой

$$P_1 = (K_1 + K_2 + S) \cap P_1 = K_1 + (K_2 + S) \cap P_1,$$

откуда ввиду того, что $P_1 \circ\!\!- K_1$, вытекает, что $P_1 = (K_2 + S) \cap P_1$ и, следовательно, $P_1 \subseteq K_2 + S$. Аналогично, $P_2 \subseteq K_1 + S$. Следовательно,

$$P_1 \oplus P_2 = S + K_2 + P_2 = S + P_2 = S + (K_1 + S) = S + K_1$$

и

$$P_1 = (P_1 \oplus P_2) \cap P_1 = (S + K_1) \cap P_1 = (S \cap P_1) + K_1.$$

Но $P_1 \circ\!\!- K_1$, поэтому $P_1 = S \cap P_1$ и $P_1 \subseteq S$. Аналогично, $P_2 \subseteq S$, и поэтому $P_1 + P_2 = P_1 \oplus P_2 = S$. Это доказывает наше утверждение о том, что $K_1 \oplus K_2$ косуществен в $P_1 \oplus P_2$.

Теперь в силу 22.12A R является проективным накрытием модуля $\bar{R} = R/J$, поэтому в силу единственности проективного накрытия (22.11) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P_1 \oplus P_2 \arrow[rr, "f = f_1 \oplus f_2"] \arrow[d, "h"'] & & A_1 \oplus A_2 \\
R \arrow[urr, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

в которой h — изоморфизм. Это показывает, что прямое разложение R-модуля $\bar{R}$ может быть поднято до прямого разложения R-модуля R (поскольку $R = h(P_1) \oplus h(P_2)$ и $\pi h(P_i) = A_i$, $i = 1, 2$), но (как указал Уиллард) не означает, что идемпотент $\bar{u}$ может быть поднят.

Покажем теперь, что последнее утверждение все-таки справедливо. Так как $R = h(P_1) \oplus h(P_2)$, то $h(P_i)$ порождается идемпотентом e_i, $i = 1, 2$ и $1 = e_1 + e_2$. Поэтому

$$\bar{u} + (1 - \bar{u}) = 1 = \pi(1) = \pi(e_1 + e_2) = fh^{-1}(e_1 + e_2) = \\ = f_1h^{-1}(e_1) + f_2h^{-1}(e_2).$$

Поскольку $\bar{R} = A_1 \oplus A_2$, представление элементов кольца $\bar{R}$ в виде суммы элементов из A_i, $i = 1, 2$ единственно; следовательно,

$$\bar{u} = f_1(h^{-1}e_1) = (f_1h^{-1})e_1 = \pi(e_1)$$

и e_1 — требуемый идемпотент. □

22.20. Следствие. (a) *Если R — кольцо и $P_i \to A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— конечное число проективных накрытий в* mod-R, *то копроизведение отображений является проективным накрытием*

$$\coprod_{i=1}^{n} f_i\colon \ \coprod_{i=1}^{n} P_i \to \coprod_{i=1}^{n} A_i,$$

где $f_i\colon P_i \to \coprod_{i=1}^{n} A_i$ — произведение гомоморфизма $P_i \to A_i$ и канонической инъекции $A_i \to \coprod_{i=1}^{n} A_i$.

(b) *Кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный правый R-модуль имеет проективное накрытие.*

(c) *(Полу)совершенность — свойство, инвариантное в смысле Мориты.*

Доказательство. (a) для случая $n = 2$ совпадает с утверждением, сформулированным в 22.19. Общий же случай получается по индукции. (b) есть непосредственное следствие из (a); (c) уже обсуждалось во введении к этой главе. □

22.21. Лемма. *Предположим, что идемпотенты кольца R/I по модулю идеала I, лежащего в* rad R, *могут быть подняты, и обозначим через π канонический гомоморфизм $R \to R/I$. Если e — неразложимый идемпотент кольца R, то $\pi(e) = e + I$ — неразложимый идемпотент кольца R/I.*

Доказательство. Предположим, что $\pi(e) = u + v$, где u и v — ортогональные идемпотенты кольца R/I, и $u \neq 0$. Тогда поскольку e ортогонален к $1 - e$, то u ортогонален к $\pi(1 - e)$ и потому (22.17) u поднимается до идемпотента f, ортогонального к $1 - e$. Но тогда $fe = ef = f$ и $e = f + (e - f)$ — сумма ортогональных идемпотентов e и $e - f$. Поскольку e неразложим и $f \neq 0$, то обязательно $e = f$. Таким образом, $\pi(e) = \pi(f) = u$, и поэтому $v = 0$, т. е. $\pi(e)$ неразложим. □

Определение. Правый идеал I кольца R называется **радикальным правым идеалом**, если $I \subseteq \operatorname{rad} R$. Правый идеал I, минимальный в множестве правых идеалов, не являющихся радикальными, называется **минимальным нерадикальным**. В этом случае $I \cap \operatorname{rad} R$ — единственный максимальный подмодуль модуля I.

22.22. Предложение. *Пусть R — полулокальное SBI-кольцо. Тогда*

(a) *R имеет диаграмму Адзумаи и справедливы предложения 18.23.1—18.23.5.*

(b) *Правый идеал I нерадикален тогда и только тогда, когда он содержит ненулевой идемпотент. Таким образом, минимальный нерадикальный правый идеал порождается идемпотентом* [1].

Доказательство. (a) Достаточно сослаться на 18.26 и 18.23. (b) Из 22.12A(b) следует, что если идеал I не радикален, то он содержит ненулевой идемпотент e. Тогда eR — правый идеал, содержащийся в I и не являющийся радикальным. □

(b) — это теорема Кёте [30, стр. 168, теорема 7].

22.23. Структурная теорема для проективных модулей. *Кольцо R является полулокальным SBI-кольцом тогда и только тогда, когда оно полусовершенно. Кроме того, кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда оно полусовершенно слева. Если это так, то выполнены условия (a) — (c):*

(a) *Пусть V — произвольный простой правый R-модуль. Тогда $V \approx eR/eJ$ для некоторого неразложимого идемпотента $e \in R$, а естественное отображение $eR \to V$ — проективное накрытие модуля V.*

(b) *Запишем $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus e_iR$, где e_i — неразложимый идемпотент для всех i (в силу 22.22 (a) это возможно), и пусть $J = \operatorname{rad} R$. Если A — правый R-модуль, то фактормодуль A/AJ полупрост и изоморфен прямой сумме $\sum_{k \in K} \oplus e_{i_k}R/e_{i_k}J$, где $e_{i_k} \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ для каждого k. Модуль $P = \sum_{k \in K} \oplus e_{i_k}R$ проективен. Пусть $f\colon P \to A/AJ$ — копроизведение канонических проекций $p_{i_k}\colon e_{i_k}R \to e_{i_k}R/e_{i_k}J$ для любых i_k и любых $k \in K$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A/AJ \\ & A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

в которой $A \to A/AJ$ — канонический гомоморфизм. Кроме того, $P \xrightarrow{g} A$ является проективным накрытием при выполнении любого из следующих условий:

(1) *Если B — модуль с числом образующих, не превосходящим число образующих модуля A, то $B = BJ$ тогда и только тогда, когда $B = 0$.*

(2) *A конечно порожден.*

(c) *Если A — такой проективный модуль, что $A \cdot \operatorname{rad} R$ косуществен (например, если A есть B-объект (18.4)), то A изоморфен прямой сумме правых главных неразложимых модулей.*

Доказательство. Мы докажем (a), (b) и (c) в предположении, что R — полулокальное SBI-кольцо. Тогда из справедливости утверждения (b) при условии (2) будет следовать полусовершенность кольца R. Более того, в силу 22.19 любое полусовершенное кольцо является полулокальным SBI-кольцом. Это доказывает первое утверждение теоремы. Поскольку свойство «быть полулокальным SBI-кольцом» право-лево симметрично, то отсюда вытекает и второе утверждение теоремы. Итак, остается только вывести (a) — (c) в предположении, что R — полулокальное SBI-кольцо. Действительно, в этом случае справедливы утверждения 18.23.1—18.23.5 и (a) следует из 18.23.4. Тогда если A — любой проективный модуль, то A/AJ полупрост и, следовательно, изоморфен прямой сумме $\sum_{k \in K} \oplus e_{i_k}R/e_{i_k}J$ главных неразложимых правых модулей кольца $\bar{R} = R/J$. (Это непосредственно вытекает из теорем Веддербёрна — Артина 8.8 и далее.) Но тогда прямая сумма $P = \sum_{k \in K} \oplus e_{i_k}R$ проективных модулей проективна и в результате имеет место коммутативная диаграмма, указанная в (b).

Для завершения доказательства (b) рассмотрим любой из модулей A или P и обозначим его через C. Пусть S — такой подмодуль в C, что $S + CJ = C$. Поскольку число образующих модуля C не превосходит числа образующих модуля A и $B \cdot J =$

[1] На самом деле неразложимым идемпотентом, и это свойство характеризует минимальные нерадикальные правые идеалы в этом классе колец.— *Прим. перев.*

$= B$, где $B = C/S$, то предположение (1) влечет за собой $B = C/S = 0$. Поэтому $C = S$ и CJ — косущественный подмодуль в C (для $C = P$ или $C = A$). Поскольку AJ косуществен в A и $\operatorname{im} g$ отображается каноническим отображением $A \to A/AJ$ на A/AJ, то $A = \operatorname{im} g + AJ$ и, значит, $A = \operatorname{im} g$. Поэтому $g\colon P \to A$ — эпиморфизм. Кроме того, поскольку $\ker g \subseteq \ker f = PJ$ и PJ — косущественный подмодуль, то $\ker g$ также косуществен и, следовательно, $P \to A$ — проективное накрытие. По 18.4 любой конечно порожденный модуль A удовлетворяет (1) и, следовательно, имеет проективное накрытие. Это доказывает (b).

Если A проективен и AJ косуществен в A, то каноническое отображение $A \to A/AJ$ является проективным накрытием. В силу единственности проективного накрытия мы видим, что $A \approx P$, так что A обладает требуемым в (c) строением.

Положив в (a) модуль A равным простому модулю eR/eJ (тот факт, что любой простой модуль изоморфен модулю такого вида, вытекает из 22.22(a)), мы видим, что (a) — следствие (b). □

22.23(b) еще раз доказывает, что каждый (конечно порожденный) проективный модуль над локальным кольцом свободен.

22.24. Следствие[1]). *Если R — полусовершенное кольцо и $R/\operatorname{rad} R$ — первичное кольцо, то $R \approx A_n$, где A — локальное кольцо.*

Доказательство. Существует неразложимый идемпотент e кольца R. Тогда $A = eRe$ — локальное кольцо (22.22). Поскольку по теореме 8.8 Веддербёрна — Артина $R/\operatorname{rad} R$ — простое кольцо, то

$$(ReR) + \operatorname{rad} R = R.$$

Так как $\operatorname{rad} R$ косуществен в R, то $ReR = R$, так что $\operatorname{tr}_R eR = R$, и потому eR — образующий, а следовательно, прообразующий. Тогда eR — сбалансированный R-модуль, т. е.

$$R \approx \operatorname{End}_A eR$$

и eR конечно порожден и проективен над локальным кольцом $A = eRe \approx \operatorname{End} eR_R$ (7.3). По предыдущему следствию eR — свободный A-модуль, скажем $eR \approx {}_A A^n$, и тогда $R \approx \operatorname{End}_A A^n \approx A_n$. □

Характеризация совершенных колец

22.26. Теорема (Басс [60]). *Полусовершенное кольцо R совершенно справа тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} R$ исчезает слева.*

[1]) Веддербёрн [08], Артин [27a], [27b], Нётер [29], Кёте [30a]. Ср. Ламбек [65] и замечания к гл. 18.

Доказательство. Любое совершенное кольцо R имеет исчезающий слева радикал (22.8). Обратно, пусть R полусовершенно, и допустим, что $J = \operatorname{rad} R$ исчезает слева. По условию (1) из 22.23(b) для того, чтобы показать, что каждый модуль имеет проективное накрытие, достаточно показать, что $MJ \neq M$ для любого ненулевого правого R-модуля M.

Предположим, что $M = MJ$ и $x \in M$, $x \neq 0$, и запишем

$$x = \sum_{i_1} x_{i_1} a_{i_1}, \quad x_{i_1} \in M, \ a_{i_1} \in J.$$

Для каждого i_1 имеем

$$x_{i_1} = \sum x_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}, \quad x_{i_1 i_2} \in M, \ a_{i_1 i_2} \in J$$

и, продолжая, получим

$$x_{i_1 \ldots i_{n-1}} = \sum x_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n}.$$

Тогда для каждого n

$$x = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \ldots a_{i_1 i_2} a_{i_1}.$$

Так как $x \neq 0$, то существует последовательность $i_{10}, i_{20}, \ldots, i_{n0}$, такая, что

$$b_n = a_{i_{10} i_{20} \ldots i_{n0}} \ldots a_{i_{10} i_{20}} a_{i_{10}} \neq 0.$$

Рассмотрим граф, вершинами которого являются все такие последовательности, а ребра соответствуют присоединению одного нового индекса. Этот граф является деревом, и мы видим, что на нем существуют пути произвольной длины. По лемме Кёнига о графах (см. упр. 41.10 из теоретико-множественного введения (т. 1)) в нем существует путь бесконечной длины, т. е. последовательность $i_{10}, i_{20}, \ldots, i_{n0}, \ldots$, такая, что выписанный выше элемент b_n не равен нулю ни для какого n. Это противоречит тому, что $\operatorname{rad} R$ исчезает слева. □

22.27. Упражнение. (a) Любое артиново справа кольцо, или, более общим образом, любое полупримарное кольцо, совершенно справа и слева.

(b) Любое коммутативное полусовершенное кольцо является прямым произведением конечного числа локальных колец.

(c) В кольце бесконечных матриц, у которых вне главной диагонали лишь конечное число коэффициентов не равно нулю, рассмотрим подкольцо R верхних треугольных матриц с фиксированным для каждой матрицы коэффициентом на главной диагонали. Тогда R совершенно справа, но не совершенно слева.

Следующая лемма будет использована в доказательстве теоремы 22.29, характеризующей совершенные кольца.

22.28. Лемма. *Пусть R — произвольное кольцо. Следующие предложения эквивалентны*:

(a) *R не содержит бесконечного множества ненулевых ортогональных идемпотентов*;

(b) *R_R удовлетворяет условию минимальности для прямых слагаемых*;

(c) *R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов вида eR,* где $e = e^2 \in R$;

(d) *левый аналог условия* (b) или (c).

Доказательство. Прямое слагаемое модуля R_R имеет вид eR, где $e \in R$ — идемпотент, поэтому эквивалентность (b) и (c) очевидна.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\{e_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ — бесконечное семейство ненулевых ортогональных идемпотентов. Тогда $f_n = e_1 + \ldots + e_n$ и $1 - f_n$ — идемпотенты для всех $n > 1$. Так как

$$Re_1 \subset Rf_2 \subset \ldots \subset Rf_n \subset \ldots,$$

то

$$(1 - e_1) R \supset (1 - f_2) R \supset \ldots \supset (1 - f_n) R \supset \ldots .$$

Таким образом, отрицание (a) влечет за собой отрицание (c).

(a) $\Rightarrow$ (c). Пусть $f_1R \supset f_2R \supset \ldots \supset f_nR \supset \ldots$ — строго убывающая последовательность, где f_n — идемпотенты из R для $n = 1, 2, \ldots$. Если e — идемпотент и правый идеал A выделяется в eR прямым слагаемым, $eR = A \oplus B$, то, поскольку $eRe \approx \approx \operatorname{End} eR_R$, существуют ортогональные идемпотенты e_1, $e_2 \in \in eRe$, такие, что $e = e_1 + e_2$, $e_1eR = e_1R = A$ и $e_2R = B$. Полагая $h_1 = f_1$ и применяя этот результат к выписанной выше последовательности, получим, что для каждого n существует пара ненулевых ортогональных идемпотентов таких, что

$$g_{n+1},\ h_{n+1} \in h_nRh_n,$$

причем

$$h_n = g_{n+1} + h_{n+1} \text{ и } f_{n+1}R = h_{n+1}R.$$

Если $m > n$, то $g_m \in h_{m-1}Rh_{m-1} \subseteq h_nRh_n$ и $g_nh_n = h_ng_n = 0$ влечет за собой равенство $g_mg_n = g_ng_m = 0$. Поэтому $\{g_n \mid n = 2, \ldots\}$ — бесконечное множество ненулевых ортогональных идемпотентов. □

Использование ниже римских цифр от I до IV согласуется с их прежним употреблением во введении к этой главе.

22.29. Теорема. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны*:

I. *R совершенно справа.*

II. *$R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто, и $J = \operatorname{rad} R$ исчезает слева.*

III. *R — цокольное слева кольцо с ограниченным числом ортогональных идемпотентов.*

IV. *R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов.*

V. *R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных левых идеалов.*

VI. *Каждый левый R-модуль удовлетворяет условию минимальности для циклических подмодулей.*

VII. *Каждый левый R-модуль удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных подмодулей.*

Доказательство. I $\Leftrightarrow$ II. Предположим, что имеет место I. Тогда R полусовершенно. Поэтому $R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто и в силу 22.26 $\operatorname{rad} R$ исчезает слева. Из 22.26 также следует и обратное. В самом деле, поскольку из II вытекает, что $\operatorname{rad} R$ — ниль-идеал, то идемпотенты могут быть подняты по модулю $\operatorname{rad} R$, и потому R полусовершенно. Тогда по 22.26 R совершенно справа.

II $\Rightarrow$ III. Любое классически полупростое кольцо R имеет ограниченное число ортогональных идемпотентов (ограниченное числом минимальных правых идеалов в разложении в прямую сумму модуля R_R; ср.21.6), и поскольку ненулевые ортогональные идемпотенты кольца R отображаются на ненулевые ортогональные идемпотенты кольца $R/\operatorname{rad} R$, то число ортогональных идемпотентов кольца R также ограниченно.

Мы хотим показать, что каждый ненулевой левый R-модуль M содержит ненулевой полупростой подмодуль. Так как R по модулю $J = \operatorname{rad} R$ классически полупросто, то это эквивалентно утверждению о том, что M содержит ненулевой (R/J)-подмодуль. Приводимая ниже подлемма и доказывает это.

Подлемма 1. *Пусть R — произвольное кольцо с исчезающим слева радикалом J. Тогда каждый ненулевой левый R-модуль M содержит ненулевой (R/J)-подмодуль или, что эквивалентно, для каждого левого модуля M и собственного подмодуля L существует $y \in M$, не лежащий в L и такой, что $Jy \subseteq L$.*

Доказательство. Первый вариант утверждения получается из второго при $L = 0$. Второй же вытекает из первого, если в качестве M рассмотреть модуль M/L. Доказательство первого утверждения можно получить, заметив, что его отрицание означает, что $Jy \neq 0$ для всех ненулевых y из M, и, следовательно, существует бесконечная последовательность $\{n_i\}_{i=1, 2, \ldots}$ элементов радикала J, такая, что для всех i

$$n_in_{i-1} \ldots n_2n_1y \neq 0.$$

Это противоречит тому, что идеал J исчезает слева. □

III $\Rightarrow$ II. Во-первых, по 22.10 $J = \operatorname{rad} R$ исчезает слева. Мы хотим показать, что $R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто. Поскольку J — ниль-идеал, то идемпотенты могут быть подняты по модулю J (22.15). Так как кольцо $\bar{R} = R/J$ полупервично, то любой его минимальный левый идеал порождается идемпотентом (8.5). Каждый подмодуль M цоколя модуля ${}_{R}\bar{R}$ полупрост, и если M конечно порожден, то он порождается идемпотентом e (19.25). Если $M = \bar{R}e$ полупрост, то в $e\bar{R}e$ существуют ортогональные идемпотенты $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, такие, что $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ и $\bar{R}e_i$ — простой модуль, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, по 22.17 ортогональные идемпотенты кольца $\bar{R}$ могут быть подняты до ортогональных идемпотентов кольца R. Так как R имеет ограниченное число ортогональных идемпотентов, это показывает, что левый цоколь $S = \operatorname{soc} {}_{\bar{R}}\bar{R}$ должен быть прямой суммой лишь конечного числа минимальных левых идеалов, и поэтому S порождается идемпотентом, скажем f. Дополнительное прямое слагаемое $\bar{R}(1 - f)$ имеет нулевой цоколь и поэтому (поскольку R цокольно слева) само равно нулю. Следовательно, кольцо $\bar{R} = S$ классически полупросто, что завершает доказательство импликации.

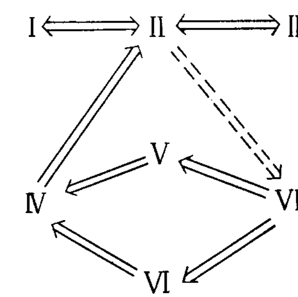
IV $\Rightarrow$ II. Пусть R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов. Тогда по 22.9 $\operatorname{rad} R$ исчезает слева. Для того чтобы вывести II, нам нужно показать, что $\bar{R} = R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто. Так как $\bar{R}$ наследует от кольца R свойство IV[1]), то по 22.28 оно удовлетворяет условию минимальности, а следовательно, и условию максимальности для прямых слагаемых. Поскольку каждая конечная сумма минимальных левых идеалов кольца $\bar{R}$ порождается идемпотентом (см. доказательство импликации III $\Rightarrow$ II) и, следовательно, является прямым слагаемым модуля ${}_{\bar{R}}\bar{R}$, то отсюда вытекает, что $\bar{R}$ обладает левым цоколем конечной длины и $S = \bar{R}e$, где e — некоторый идемпотент. Условие минимальности для главных левых идеалов влечет за собой то, что каждый ненулевой левый идеал содержит минимальный левый идеал, и таким образом имеет ненулевое пересечение с S. Итак, $\bar{R}(1 - e) = 0$ и $\bar{R} = S$ классически полупросто.

1) В самом деле, для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что для любой убывающей цепи $\bar{R}\bar{a}_1 \supseteq \bar{R}\bar{a}_2 \supseteq \bar{R}\bar{a}_3 \supseteq \ldots$ главных левых идеалов кольца $\bar{R}$ найдется убывающая цепь $Ra'_1 \supseteq Ra'_2 \supseteq \ldots$ главных левых идеалов кольца R, такая, что $\bar{a}'_i = \bar{a}_i$ для всех i, где черта означает образ элемента при каноническом отображении $R \longrightarrow R/J$. Докажем это по индукции. Пусть уже найдены $a'_1, \ldots, a'_n$, такие, чте $a'_1R \supseteq \ldots \supseteq a'_nR$ и $\bar{a}'_i = \bar{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $\bar{R}\bar{a}'_n = \bar{R}\bar{a}_n \supseteq \bar{R}\bar{a}_{n+1}$, то $a_{n+1} = ra'_n + x$ для некоторого $x \in J$. Полагая $a'_{n+1} = ra'_n$, получим, что $\bar{a}'_{n+1} = \bar{a}_{n+1}$ и $Ra'_n \supseteq Ra'_{n+1}$, и это заканчивает доказательство.— *Прим. перев.*

Следующие импликации тривиальны:

$$\text{VII} \Rightarrow \text{VI} \Rightarrow \text{IV},$$
$$\text{VII} \Rightarrow \text{V} \Rightarrow \text{IV}.$$

Таким образом, мы уже доказали все импликации, указанные на рисунке сплошными стрелками



Мы намереваемся доказать импликацию II $\Rightarrow$ VII, которая завершит цикл. Перед тем как это проделать, поучительно взглянуть на доказательство теоремы Бьёрка, из которой импликация II $\Rightarrow$ VII получается как следствие.

22.30. Теорема (Бьёрк). *Если левый модуль M над кольцом R удовлетворяет условию минимальности для циклических подмодулей, то он удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных подмодулей.*

Доказательство. Множество $F = F(M)$, состоящее из всех подмодулей L, удовлетворяющих условию минимальности для конечно порожденных подмодулей, упорядочено по включению и индуктивно. Пусть L — максимальный элемент множества F. Мы хотим показать, что $L = M$. Предположим, что это не так. Тогда существует элемент $y \in M$, такой, что Ry минимален в множестве тех циклических левых R-модулей, которые не содержатся в L. Ясно, что L должен быть максимальным подмодулем модуля $Ry + L$.

Подлемма 2. *Если L_1 — конечно порожденный*[1]) *подмодуль модуля $Ry + L$, не содержащийся в L, то существуют элемент $x \in L$ и конечно порожденный подмодуль L'_1 модуля $L \cap L_1$, такие,*

[1]) Доказательство также показывает, что если L_1 не конечно порожден, то L'_1 требует образующих не больше, чем модуль L_1, причем это верно при одном лишь предположении, что L — максимальный подмодуль модуля $Ry + L$.

что $y + x \in L_1$ и

$$L_1 = R(y + x) + L_1'.$$

Доказательство. Пусть $z \in L_1$, $z \notin L$. Поскольку $L_1 \subseteq Ry + L$, то $z = ry + x'$, где $r \in R$ и $x' \in L$. Тогда из соотношения $z \notin L$ следует, что $ry \notin L$, и поэтому $Rry + L = Ry + L$, так как L — максимальный подмодуль в $Ry + L$. Пусть $a \in R$ — такой элемент, что $ary = y + m$, где $m \in L$. Тогда $az = y + (m + ax') \in L_1$ и $x = m + ax' \in L$, как и требовалось.

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — конечное множество образующих модуля L_1. Так как $y' = y + x \notin L$, то $Ry + L = Ry' + L$, и поэтому мы можем записать

$$y_i = a_i y' + m_i, \quad a_i \in R, \ m_i \in L,$$

$= 1, \ldots, n$. Тогда $m_i = y_i - a_i y' \in L \cap L_1$ для каждого i. Пусть L_1' — подмодуль модуля L_1, порожденный элементами m_i. Тогда

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} Ry_i = \sum_{i=1}^{n} R(a_i y' + m_i) \subseteq Ry' + L_1' \subseteq L_1,$$

т.е. $L_1 = Ry' + L_1'$. □

Теперь пусть

(1) $$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_n \supseteq \ldots$$

— убывающая последовательность конечно порожденных подмодулей модуля $Ry + L$. Мы придем к противоречию с максимальностью L в $F(M)$, показав, что $Ry + L \in F(M)$, т. е. что (1) обрывается. Если $L_n \subseteq L$ для некоторого n, то это тривиально, поскольку $L \in F(M)$. Итак, предположим, что ни один из L_n не содержится в L. Тогда по последней подлемме мы можем для каждого n выбрать $y_n = y + x_n \in L_n$, где $x_n \in L$, и конечно порожденный подмодуль L_n' модуля L, такие, что

(2) $$L_n = Ry_n + L_n'.$$

Кроме того, по условию теоремы мы можем выбрать y_n такими, что каждый Ry_n будет минимальным элементом в множестве циклических подмодулей, для которых $L_n = Ry_n + (L_n \cap L)$.

Подлемма 3. *Пусть X — любой такой подмодуль в $L \cap L_n$, что*

$$L_n = Ry_n + X.$$

Тогда

$$L_n = Ry_{n+1} + X.$$

Доказательство. Так как $y_{n+1} \in L_{n+1} \subseteq L_n$, то существует $b \in R$, такой, что

$$y_{n+1} \equiv by_n (\mathrm{mod}\, X).$$

Поскольку $X \subseteq L$ и $Ry_{n+1} + L = Ry_n + L = Ry + L$, мы имеем

$$Rby_n \equiv Ry_n (\mathrm{mod}\, L).$$

Запишем

$$y_n = aby_n + m, \quad a \in R, m \in L.$$

Тогда $m \in L_n \cap L$ и

$$Ry_n + (L_n \cap L) = R(aby_n + m) + (L_n \cap L) \subseteq Rby_n + Rm + (L_n \cap L) \subseteq Ry_n + (L_n \cap L).$$

Таким образом, $Ry_n + (L_n \cap L) = Rby_n + (L_n \cap L)$, и поэтому в силу выбора модуля Ry_n получаем, что $Ry_n = Rby_n$. Так как $y_{n+1} \equiv by_n (\mathrm{mod}\, X)$, мы имеем

$$Ry_{n+1} + X = Ry_n + X = L_n,$$

что и требовалось. □

Завершение доказательства теоремы Бьёрка. Рассмотрим модуль $L_1 = Ry_1 + L_1'$. Тогда по подлемме 3 имеем $L_1 = Ry_2 + L_1'$ и, поскольку $L_2 \supseteq Ry_2$, получаем

$$L_2 = Ry_2 + \overline{L}_2,$$

где $\overline{L}_2$ — конечно порожденный подмодуль модуля L_1'. По индукции мы получим $L_n = Ry_n + \overline{L}_n$, где $\overline{L}_n$ — конечно порожденный подмодуль модуля $\overline{L}_n \subseteq L$. Так как $L \in F(M)$, то $\overline{L}_n = \overline{L}_{n+1} = \ldots = \overline{L}_{n+k} = \ldots$ для некоторого n и тогда

$$L_n = Ry_{n+1} + \overline{L}_n = Ry_{n+1} + \overline{L}_{n+1} = L_{n+1} = \ldots = L_{n+k} = \ldots,$$

что завершает доказательство теоремы Бьёрка. □

II $\Rightarrow$ VII (Бьёрк). Как и в доказательстве теоремы Бьёрка, выберем максимальный элемент L в множестве $F = F(R)$ левых идеалов кольца R, удовлетворяющих условию минимальности для конечно порожденных левых идеалов, в них содержащихся. Мы хотим доказать, что $L = R$. В противном случае по подлемме 1 существует $y \in R$, такой, что $y \notin L$ и $Jy \subseteq L$, где $J = \mathrm{rad}\, R$. Так как R/J классически полупросто и $JRy = Jy \subseteq L$, то $(Ry + L)/L$ — полупростой модуль. Таким образом, мы можем выбрать y таким, чтобы $(Ry + L)/L$ был прост. Кроме того, по 22.22 единица кольца R является суммой конечного числа ортогональных неразложимых идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Поэтому мы можем предположить, что существует i, скажем $i = 1$, такое, что модуль $(Re_1 y + L)/L$ прост. Для краткости запишем $e = e_1$. Таким образом, можем считать, что $y = ey$.

Пусть $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_n \supseteq \ldots$ — произвольная цепь конечно порожденных левых идеалов, содержащихся в левом идеале

$Ry + L$. Покажем, что она обрывается, т. е. что $Ry + L \in F(R)$. Так же как и в доказательстве теоремы 22.30, мы можем считать, что L_n не содержится в L ни при каком n. Поскольку L максимален в $Ry + L$, то по подлемме 2 конечно порожденному левому идеалу L_1 соответствует элемент $x_1 \in L$ и конечно порожденный левый подидеал $\hat{L}_1 \subseteq L \cap L_1$, такие, что $y'_1 = y + x_1 \in L_1$ и

$$L_1 = Ry'_1 + \hat{L}_1.$$

Так как $ey'_1 = y + ex_1$ и $ex_1 \in L$, мы можем считать, что $y'_1 = ey'_1$. Таким образом, $x_1 = ex_1$ и $y'_1 = y + ex_1$.

Подлемма 4. *Пусть $L' = Ry' + \hat{L}'$ для некоторых $y' = ey' \in L$ и $\hat{L}' \subset L \cap L'$, и пусть L'' — конечно порожденный подмодуль в L'. Тогда существует элемент $ex \in \hat{L}'$ и конечно порожденный подмодуль $\hat{L}''$ модуля $\hat{L}'$, такой, что*

$$L'' = R(y' + ex) + \hat{L}''.$$

Доказательство. В силу результатов, установленных выше, в L существует элемент z', такой, что $y + z' \in L''$. Так как $L' = Ry' + \hat{L}'$, мы можем записать

$$y + z' = ry' + z, \quad r \in R,\ z \in \hat{L}'.$$

Поскольку $y \notin L$, то $ry' \notin L$. Поэтому $Ry \equiv Rry' (\mathrm{mod}\ L)$, и, следовательно, так как $re \notin J$ и $Re/(J \cap Re)$ — простой R-модуль, то $Re \equiv Rre (\mathrm{mod}\ J)$. Заметим, что $Je = J \cap Re$ — единственный максимальный левый подидеал левого идеала Re. Отсюда следует, что $Re = Rre$. Запишем $e = are$, где $a \in R$. Тогда

$$\begin{aligned} ay + az' &= ary' + az = \\ &= y' + ex \in L'', \end{aligned}$$

где $x = az \in \hat{L}'$. Отсюда, поскольку $L' = R(y' + ex) + \hat{L}'$ и $R(y' + ex) \subseteq L''$, вытекает утверждение подлеммы. □

Применяя теперь подлемму 4 к левым идеалам $L_1 = R(y + ex_1) + \hat{L}_1$ и L_2, мы можем записать

$$L_2 = R(y + ex_1 + ex_2) + \hat{L}_2,$$

где $\hat{L}_2$ — конечно порожденный подмодуль в $\hat{L}_1$ и $ex_2 \in \hat{L}_1$.

Рассуждая далее по индукции, мы сможем записать

$$L_n = R(y + ex_1 + ex_2 + \ldots + ex_n) + \hat{L}_n,$$

где $ex_n \in \hat{L}_{n-1}$ и $\hat{L}_n$ — конечно порожденный подмодуль модуля $\hat{L}_{n-1}$. Поскольку $\hat{L}_n \subseteq L$ для каждого n, а $L \in F(R)$, мы получаем, что $\hat{L}_n = \hat{L}_{n+1} = \ldots = \hat{L}_{n+k} = \ldots$ для некоторого n. Но тогда

$ex_{n+1} \in \hat{L}_n = \hat{L}_{n+1}$, так что $L_n = L_{n+1} = \ldots$. Это завершает доказательство импликации II $\Rightarrow$ VII, а с ней и всей теоремы 22.29. □

22.31А. Теорема (Басс [60]). *Кольцо R совершенно справа тогда и только тогда, когда каждый плоский правый R-модуль проективен.*

Доказательство. Предположим, что R совершенно справа, и пусть M — плоский правый R-модуль. Рассмотрим его проективное накрытие $P \twoheadrightarrow M \to 0$. Его ядро K косущественно в P, и поэтому в силу 18.3а и 22.1А $K \subseteq \mathrm{rad}\, P = P \cdot \mathrm{rad}\, R$. Отсюда и из 11.21 (1, стр. 528) вытекает, что $K \cdot \mathrm{rad}\, R = (P \cdot \mathrm{rad}\, R) \cap K = K$. Но при доказательстве теоремы 22.26 было показано, что $K \cdot \mathrm{rad}\, R \neq K$ для всякого ненулевого R-модуля K. Поэтому $K = 0$ и $P \twoheadrightarrow M$ — изоморфизм, т. е. M проективен.

Доказательство обратного намного сложнее, а доказательство Басса использует функтор Tor, который даже не встречался в этой книге. По этой причине мы оставляем доказательство в качестве упражнения; сошлемся также на Басса [60, стр. 475][1]). □

1) Приведем тем не менее доказательство, принадлежащее, по существу, Бассу (loc. cit.) и не использующее функтор Tor. Во-первых, заметим, что поскольку функтор $\otimes_R N$ для любого ${}_R N$ сохраняет прямые пределы (1, 5.54, стр. 346) и mod-R — категория с точными прямыми пределами, то прямой предел любого индуктивного семейства плоских правых R-модулей является плоским R-модулем. Покажем теперь, что если все плоские правые R-модули проективны, то R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов. Пусть $Ra_1 \supseteq Ra'_2 \supseteq \ldots \supseteq Ra'_n \supseteq \ldots$ — убывающая цепь главных левых идеалов. Тогда $a'_2 = a_2 a_1$ и $a'_i = a_i a'_{i-1}$ для некоторых $a_i \in R$. Ясно, что $a'_n = a_n a_{n-1} \ldots a_1$ для всех n. В свободном правом R-модуле F с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ рассмотрим свободный подмодуль K с базисом $x_1 - x_2 a_1,\ x_2 - x_3 a_2, \ldots,\ x_n - x_{n+1} a_n, \ldots$, и пусть $M = F/K$. Тогда $M = \varinjlim F/K_n$, где K_n — подмодуль, порожденный первыми n элементами базиса модуля K. Поскольку, очевидно, каждый из K_n — прямое слагаемое модуля F, то F/K_n — проективный R-модуль, откуда следует, что M — плоский правый R-модуль. Тогда по условию модуль M проективен, следовательно, K — прямое слагаемое модуля F, $F = K \oplus M'$. Запишем

$$x_k = z_k + \sum_i (x_i - x_{i+1} a_i)\, r_{ik} \quad \text{для всех } k,$$

где $z_k \in M'$ и r_{ik} не равны нулю лишь для конечного числа номеров i. Умножив k-е равенство для каждого k на a_{k-1} и вычтя его из $(k-1)$-го равенства, получим

$$(x_k - x_{k+1} a_k) = (z_{k+1} - z_k a_k) + \sum_i (x_i - x_{i+1} a_i)(r_{ik} - r_{ik+1} a_k),$$

откуда, поскольку левая часть и второе слагаемое правой части лежат в K, а $z_{k+1} - z_k a_k \in M'$, получается, что $z_{k+1} - z_k a_k = 0$ и

$$\begin{aligned} r_{kk} - r_{kk+1} a_k &= 1, \\ r_{ik} - r_{ik+1} a_k &= 0 \end{aligned}$$

для всех $i \neq k$ и всех k.

Когда прямые произведения проективных модулей проективны?

Подготовка к следующей теореме была проведена в гл. 11 и 20.

22.31B. Теорема (Чейз [60]). *Для любого кольца R следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *Прямое произведение любого семейства проективных левых R-модулей проективно.*

(b) *Прямое произведение любого семейства экземпляров кольца R проективно как левый R-модуль.*

(c) *R совершенно слева и когерентно справа.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) тривиально.

(b) $\Rightarrow$ (c). Поскольку проективный модуль является прямым слагаемым и, следовательно, чистым подмодулем некоторого свободного модуля, то (b) влечет за собой выполнимость условий следствия 20.21, и поэтому R совершенно слева. Кроме того, поскольку прямое произведение любого семейства экземпляров кольца R есть проективный и, следовательно, плоский левый R-модуль, то по 11.34 (1, стр. 535) R когерентно справа.

(c) $\Rightarrow$ (a). Так как любой проективный модуль плоский (1, 11.22, стр. 528), то по 11.34 прямое произведение P любого семейства проективных левых R-модулей — плоский левый R-модуль. А поскольку R совершенно слева, то каждый плоский левый R-модуль проективен (22.31A), и потому P проективен. □

Ряды и модули Лёви[1]

Пусть M — модуль. Определим по индукции вполне упорядоченную последовательность $\{M_i\}_{i\in I}$, где I — (некоторое) множество ординальных чисел, начинающееся с нуля, и где

$$M_0=0,$$
$$M_1=\operatorname{soc}(M),$$
$$M_{b+1}/M_b=\operatorname{soc}(M/M_b),$$
$$M_a=\bigcup_{b<a} M_b \quad (a \text{ — предельный ординал}).$$

Семейство $\{M_i\}_{i\in I}$ называется **возрастающим рядом Лёви (цепью Лёви) модуля** M[1]). Модуль M называется **модулем Лёви**, если существует ординальное число a, такое, что $M=M_a$. В этом случае наименьшее из таких ординальных чисел называется **длиной Лёви модуля** M. Заметим, что длина Лёви модуля с конечным композиционным рядом не превосходит длины модуля. Например, полупростой модуль имеет длину Лёви и она не превосходит 1.

Дуальным к понятию возрастающего ряда Лёви[2]) является понятие убывающего ряда Лёви.

Если M — модуль Лёви конечной длины n и $J=\operatorname{rad} R$, то $M_1J=0$, $M_2J\subseteq M_1$, поэтому $M_2J^2=0$ и по индукции $MJ^n=0$. Обратно, если R полулокально и $MJ^n=0$, то M имеет конечную длину Лёви и она не превосходит n. В этом случае M обладает также убывающим рядом Лёви, длина которого не превосходит n. Все это — частные случаи следующего предложения.

22.32. Предложение. (a) *Кольцо R цокольно слева тогда и только тогда, когда каждый левый R-модуль является модулем Лёви, а также тогда и только тогда, когда R — левый модуль Лёви.*

(b) *Кольцо R является правым B-кольцом тогда и только тогда, когда каждый правый R-модуль обладает убывающим рядом Лёви.*

Доказательство (a). Пусть $M_0=\operatorname{soc}(M)$. Если $\beta\in I$ и $\beta=\gamma+1$, то определим M_β так, чтобы $M_\beta/M_\gamma=\operatorname{soc}(M/M_\gamma)$, а для предельного β положим $M_\beta=\bigcup_{\delta<\beta} M_\delta$. Итак, M_β определен по трансфинитной индукции для всех $\beta\in I$. Поскольку R цокольно слева, существует ординальное число α, такое, что $M=M_\alpha$. Тогда $\{M_\beta\}$ — возрастающий ряд Лёви. Обратное тривиально. Так же просто доказывается и равносильность первого и третьего условий.

Выберем теперь n таким, чтобы $r_{n1}=0$. В силу выписанных равенств будем иметь

$$0=r_{n1}=r_{n2}a_1=$$
$$=r_{n3}a_2a_1=$$
$$=\dots,$$
$$0=a_{n-1}\dots a_1+r_{nn+1}a_n\dots a_1=a'_{n-1}+r_{nn+1}a'_n,$$
$$0=a_{n-1}\dots a_1+r_{nn+k}a_{n+k-1}\dots a_1=a'_{n-1}+r_{nn+k}a'_{n+k-1}.$$

Последние равенства показывают, что $Ra'_m\supseteq Ra'_{n-1}$ для всех $m\geqslant n$ и, таким образом, $Ra'_{n-1}=Ra'_n=\dots$, т. е. наша цепь обрывается. — *Прим. перев.*

[1]) В литературе их часто называют рядами и модулями Лоева. — *Прим. ред.*

---

[1]) В литературе под **возрастающим рядом Лёви** модуля M понимается любая цепь его подмодулей $0=M_0\subseteq M_1\subseteq\dots\subseteq M_\alpha\subseteq\dots$, такая, что $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ — полупростые модули для всех α. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее говоря, к определению, данному в предыдущем примечании. А именно: ряд подмодулей $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\dots\supseteq M_\alpha\supseteq\dots$ называется **убывающим рядом Лёви** модуля M, если модули $M_\alpha/M_{\alpha+1}$ полупросты для всех α. — *Прим. перев.*

Докажем теперь (b). Если M — правый R-модуль над правым B-кольцом, то каждый его подмодуль N содержит максимальный подмодуль $\max(N)$. Полагая теперь $M_0 = M$, $M_{\alpha+1} = \max(M_\alpha)$ и $M_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} M_\beta$ для предельного α, получим убывающий ряд Лёви модуля M. Обратное очевидно. □

Простые факторы

Если $L = \{M_i \mid i \in I\}$ — возрастающий ряд Лёви модуля M, то его **простой фактор** определяется как простой модуль V, изоморфный прямому слагаемому модуля $M_{\gamma+1}/M_\gamma$ для некоторого γ. Он называется также **простым фактором модуля** M. Простой левый модуль V над полусовершенным кольцом R изоморфен Re/Je для некоторого неразложимого идемпотента $e \in R$, где $J = \text{rad } R$. На самом деле, если f — неразложимый идемпотент полусовершенного кольца R, то $V \approx Rf/Jf$ тогда и только тогда, когда $fV \neq 0$.

22.33. Следствие. *Пусть R — кольцо, совершенное справа, M — левый (правый) R-модуль и e — неразложимый идемпотент кольца R. Пусть $\{M_\beta \mid \beta \in I\}$ — возрастающий (убывающий) ряд Лёви модуля M и $J = \text{rad } R$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $eM \neq 0$ $(Me \neq 0)$.

(b) $eM_\beta \neq 0$ $(M_\beta e \neq 0)$ *для некоторого* $\beta \in I$.

(c) *Существует* $\gamma \in I$, *такое, что полупростой модуль* $M_{\gamma+1}/M_\gamma$ $(M_\gamma/M_{\gamma+1})$ *содержит прямое слагаемое, изоморфное простому R-модулю* Re/Je (eR/eJ).

(d) Re/Je (eR/eJ) — *простой фактор ряда Лёви* $\{M_\beta \mid \beta \in I\}$.

Доказательство. Эквивалентность (c) $\Leftrightarrow$ (d) следует из определения простого фактора.

(a) $\Leftrightarrow$ (b). Если $x \in M$ и $ex \neq 0$, то $x \in M_\beta$ для некоторого β, а потому $eM_\beta \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если $eM_\beta \neq 0$, скажем $ex \neq 0$ для некоторого $x \in M_\beta$, то существует ординальное число γ, такое, что $ex \in M_{\gamma+1}$, но $ex \notin M_\gamma$. Тогда $e(M_{\gamma+1}/M_\gamma) \neq 0$, поскольку $e(ex + M_\gamma) \not\subseteq M_\gamma$. Теперь, так как $W = M_{\gamma+1}/M_\gamma$ — полупростой модуль, то W содержит прямое слагаемое V, являющееся простым модулем и такое, что $eV \neq 0$. Тогда по 22.22(a) имеем $V \approx Re/Je$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Если $V \approx Re/Je$, то $eV \neq 0$. Поэтому из (c) вытекает, что $eM_{\gamma+1} \neq 0$, откуда $eM \neq 0$. (Доказательство утверждения в скобках дуально приведенному.) □

Связанные идеалы

В этом разделе[1]) мы используем обозначения и предполагаем выполнение условий структурной теоремы для полусовершенных колец (22.22). Более того, мы предполагаем, что R — совершенное (справа) кольцо. Итак,

$$(1) \qquad R = \sum_{i=1}^{n} e_i R = \sum_{i=1}^{n} Re_i,$$

где $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ — ортогональное представление единицы неразложимыми идемпотентами.

Любой левый идеал кольца R, изоморфный левому идеалу Re_i, входящему в разложение (1), называется **левым главным неразложимым идеалом.** Аналогично определяются правые главные неразложимые идеалы. Из структурной теоремы 22.22 для полусовершенных колец можно вывести, что если к тому же rad R — ниль-идеал, то левый идеал L является главным неразложимым тогда и только тогда, когда $L = Rf$ для некоторого неразложимого идемпотента $f \neq 0$.

Говорят, что два левых главных неразложимых идеала Re и Rf *связаны*, в обозначениях $Re \sim Rf$ или $e \sim f$, если существует конечная последовательность

$$e_1 = e,\ e_2,\ \ldots,\ e_n = f$$

неразложимых идемпотентов, такая, что каждые два левых R-модуля Re_i и Re_{i+1} имеют общий простой фактор, $i = 1, \ldots, n - 1$. В этом случае мы также говорим, что Re **связан** с Rf **посредством** $e_1, \ldots, e_n$. Связанность — это отношение эквивалентности на множестве левых главных неразложимых идеалов кольца R. Обозначим через $\{Re\}$ класс эквивалентности левых идеалов, связанных с Re. Тогда $Rf \in \{Re\}$ в том и только том случае, когда $Re \sim Rf$.

Блоки

(Левый) **блок** кольца R определяется как сумма левых идеалов из $\{Re\}$, где e — неразложимый идемпотент. Эта сумма называется **блоком, определенным идемпотентом** e или **левым идеалом** Re, и обозначается через $[Re]$. Таким образом,

$$[Re] = \sum_{Rf \in \{Re\}} Rf.$$

[1]) А также и в следующем. — *Прим. перев.*

Мы докажем, что $[Re]$ — идеал кольца R (очевидно, $[Re]$ — левый идеал). Поскольку $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus Re_i$, то, очевидно,

$$R = \sum_{i=1}^{n} [Re_i],$$

т. е. R — сумма конечного числа блоков. На самом деле, R — прямая сумма своих блоков, и это тоже сейчас будет доказано.

Идеал I кольца R называется **неразложимым**, если I не представляется в виде прямой суммы двух ненулевых идеалов кольца R. Ненулевой идеал I кольца R называется **минимальным**, если 0 и I — единственные идеалы кольца R, лежащие в I. Ясно, что любой минимальный идеал кольца R неразложим.

22.34. Предложение (Брауэр). *Пусть R — совершенное справа кольцо или, эквивалентно, R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных левых идеалов.*

(a) *Если два блока кольца R, рассматриваемые как левые идеалы, имеют общий простой фактор, то эти блоки равны. Различные блоки аннулируют друг друга.*

(b) *Блоки кольца R являются идеалами и R — прямая сумма своих блоков. Запишем $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus Re_i$, где e_i — неразложимый идемпотент, $i = 1, \ldots, n$. Перенумеруем идемпотенты так, что $[Re_1], \ldots, [Re_s]$, $s \leqslant n$, суть все различные блоки в множестве $\{[Re_i] \mid i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $[Re_1], \ldots, [Re_s]$ — это все блоки кольца R и R — прямая сумма этих блоков:*

$$R = \sum_{i=1}^{s} \oplus [Re_i].$$

(c) *Любой неразложимый (как кольцо) прямой сомножитель кольца R является блоком, и наоборот, каждый блок кольца R — неразложимый прямой сомножитель.*

(d) *Два левых главных неразложимых идеала Re и Rf принадлежат одному блоку тогда и только тогда, когда они связаны.*

Доказательство. (a) Пусть $[Re]$ и $[Rf]$ — два блока кольца R. Если $[Re] \neq [Rf]$, то Rf не имеет простых факторов, изоморфных Re/Je, где $J = \operatorname{rad} R$, и поэтому $eRf = 0$ [1]). Аналогично $e'Rf' = 0$ и, следовательно, $Re'Rf' = 0$ для любых неразложимых идемпотентов e' и f', таких, что $Re' \in [Re]$ и $Rf' \in [Rf]$. Это доказывает, что

(i) $$[Re][Rf] = [Rf][Re] = 0.$$

[1]) Здесь и далее используется следствие 22.33.— *Прим. перев.*

Поскольку R — сумма своих блоков, например $R = \sum_{i=1}^{n} [Re_i]$, то (i) влечет за собой

(ii) $$[Re_j]\,R = \sum_{i=1}^{n} [Re_j][Re_i] = [Re_j]^2 \subseteq [Re_j].$$

По теореме 21.2 о единственности разложения каждый блок имеет вид $[Re_j]$ для некоторого j. Таким образом, (ii) показывает, что каждый блок кольца R является идеалом, который ввиду (i) аннулирует всякий другой блок.

Предположим, что Re'/Je' — общий фактор блоков $[Re]$ и $[Rf]$. Тогда $e'[Re] \neq 0$ и $e'[Rf] \neq 0$, поэтому существуют $Re'' \in \{Re\}$, $Re''' \in \{Rf\}$, такие, что $e'Re'' \neq 0$ и $e'Re''' \neq 0$. Отсюда следует, что Re'' и Re''' связаны (посредством Re'), а следовательно, связаны левые идеалы Re и Rf, так что $[Re] = [Rf]$. Это доказывает (a).

(b) Теперь докажем, что

$$R = \sum_{i=1}^{s} \oplus [Re_i].$$

Очевидно, $R = \sum_{i=1}^{s} [Re_i]$. Предположим, что $[Re_j] \cap \sum_{i \neq j} [Re_i] \neq 0$ для некоторого $j \leqslant s$, и выберем из этого пересечения ненулевой элемент x. Тогда $x = \sum_{i \neq j} x_i$ для некоторых $x_i \in [Re_i]$, $i \leqslant s$. Так как $x \neq 0$, то найдется идемпотент e_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такой, что $e_k x \neq 0$ и, следовательно, $e_k x_i \neq 0$ для некоторого $i \leqslant s$. Таким образом, $e_k [Re_j] \ni e_k x \neq 0$ и $e_k [Re_i] \ni e_k x_i \neq 0$, откуда ввиду 22.33 получаем, что $[Re_j]$ и $[Re_i]$ имеют общий простой фактор. Применение (a) дает $[Re_i] = [Re_j]$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, $[Re_j] \cap \sum_{\substack{i \neq j \\ i \leqslant s}} [Re_i] = 0$ для всех j, и это завершает доказательство (b).

(c) Поскольку кольцо R полусовершенно, то оно есть прямая сумма конечного числа неразложимых идеалов, т. е.

$$R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_h$$

для конечного числа неразложимых идеалов $B_1, \ldots, B_h$. Если e — идемпотент кольца R, то $Re = B_1 e \oplus \ldots \oplus B_h e$. Если e неразложим, то для некоторого i имеем $Re = B_i e \subseteq B_i$ и $B_j e = 0$ при $j \neq i$. Аналогично $eB_j = 0$ при $j \neq i$. Так как B_i — идеал, то $B_i \supseteq ReR$. Если f — другой неразложимый идемпотент, то $RfR \subseteq B_j$ для некоторого j, и если $i \neq j$, то $B_j e = eB_j = 0$, а значит, $fRe = eRf = 0$. Это доказывает, что если $B_i \supseteq Re$, то B_i содержит любой такой Rf, что либо $fRe \neq 0$, либо $eRf \neq 0$. Далее, предположим, что Re связан с Rf посредством идемпотентов $e_1 = e, \ldots, e_t = f$. Тогда Re_q и Re_{q+1} имеют общий простой фактор, изоморфный Re'/Je' для некоторого неразложимого идемпотента e'. Таким образом, $e'Re_q \neq 0$ и $e'Re_{q+1} \neq 0$, поэтому e_q, e_{q+1} и e' содержатся в одном и том же B_k. По индукции $e_1 = e$ и $e_t = f$ принадлежат одному и тому же идеалу B_i. Это доказывает, что B_i содержит блок $[Re]$. Поскольку R — прямая сумма своих блоков, то $[Re]$ — прямое слагаемое идеала B_i. А так как B_i неразложим, это доказывает, что $[Re] = B_i$ неразложим. Следовательно, $B_1, \ldots, B_h$ — блоки, и это и есть единственные неразложимые прямые сомножители кольца R.

(d) Достаточно показать, что $Rf \subseteq [Re]$, где f — неразложимый идемпотент, тогда и только тогда, когда $Rf \sim Re$. Если $Rf \sim Re$, то $Rf \subseteq [Re]$. Обратно, предположим, что $Rf \subseteq [Re]$. Так как Rf — прямое слагаемое в ${}_RR$, то оно — прямое слагаемое и в $[Re]$; поэтому $[Rf]$ и $[Re]$ имеют общий простой фактор, например Rf/Jf. Тогда в силу (a) имеем $[Re] = [Rf]$, и потому $Rf \sim Re$. Таким образом, два левых главных неразложимых идеала Rf и Re содержатся в $[Re]$ тогда и только тогда, когда они связаны.

22.35. Следствие. *Пусть кольцо R совершенно справа, B — его (левый) блок*[1] *и $\overline{B}$ — образ идеала B при каноническом отображении $R \to \overline{R} = R/\mathrm{rad}\ R$. Тогда $\overline{B}$ — прямая сумма простых идеалов кольца $\overline{R}$, число которых равно числу классов изоморфных левых главных неразложимых идеалов кольца R, содержащихся в B.*

Доказательство. Поскольку кольцо $\overline{R} = R/J$, где $J = \mathrm{rad}\ R$, классически полупросто, то $\overline{R}$ — прямая сумма своих минимальных идеалов и каждый идеал кольца $\overline{R}$ — прямая сумма некоторого числа этих минимальных идеалов. Запишем $\overline{B} = \overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_t$, где $\overline{S}_i$ — минимальный идеал кольца $\overline{R}$. Все минимальные левые идеалы, содержащиеся в $\overline{S}_i$, изоморфны, поскольку $\overline{S}_i$ — кольцо, изоморфное полному кольцу матриц над телом. Теперь поскольку B — прямая сумма левых главных неразложимых идеалов, скажем Re_i, $i = 1, \ldots, h$, то

$$\overline{B} = \sum_{i=1}^{h} \oplus \overline{Re_i} = \overline{S}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{S}_t.$$

Но $\overline{Re_i} \approx Re_i/Je_i$ и по 22.5 $Re_i \approx Re_j$ тогда и только тогда, когда $Re_i/Je_i \approx Re_j/Je_j$. Так как имеется точно t неизоморфных левых модулей $\overline{Re_i}$, мы заключаем, что число неизоморфных левых идеалов Re_i также равно t. Это завершает доказательство, поскольку каждый левый главный неразложимый идеал, содержащийся в B, изоморфен некоторому Re_i. □

[1] Это следствие верно для любого идеала B полусовершенного кольца R.— *Прим. перев.*

22.36. Следствие (при тех же условиях и обозначениях, что и в предложении 22.34). (a) *Если B — (левый) блок кольца R, то любой простой фактор левого идеала B изоморфен Re_i/Je_i для некоторого $Re_i \subseteq B$.*

(b) *Пусть $B_i = [Re_i]$ — блок кольца R, $i = 1, \ldots, s$. Тогда $R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$. Пусть M — любой левый R-модуль. Тогда*

$$M = B_1M \oplus \ldots \oplus B_sM$$

и каждый простой фактор модуля B_iM является простым фактором идеала B_i, $i = 1, \ldots, s$.

Доказательство. (a). Пусть V — простой фактор (левого) блока B. Тогда $V \approx Re_j/Je_j$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и блоки B и $[Re_j]$ имеют общий простой фактор V. По 22.34(a) они равны. Таким образом, $Re_j \subseteq [Re_j] = B$.

(b) $RM = M$ влечет за собой $M = \sum_{i=1}^{s} B_iM$. Пусть e_i — единица кольца B_i. Если $x \in B_iM \cap \sum_{j \neq i} B_jM$, то $x = e_ix = e_i\left(\sum_{j \neq i} e_jx\right) = 0$. Поэтому $M = \sum_{i=1}^{s} \oplus B_iM$. Поскольку B_iM аннулируется всеми $e_j \notin B_i$, по 22.33 отсюда следует, что если V — простой фактор модуля B_iM, то $V \approx Re_k/je_k$ для некоторого $e_k \in B_i$. Тогда $Re_k \subseteq B_i$, поэтому $V \approx Re_k/je_k$ — простой фактор левого идеала B_i тоже. □

Упражнения к гл. 22

1. Существуют цокольные слева правые B-кольца, не являющиеся полусовершенными.

2. Класс (полу)совершенных (соотв. самобазисных) колец замкнут относительно конечных прямых произведений.

3. Кольцо нижних треугольных (2×2)-матриц над телом самобазисное, но не является прямым произведением локальных колец.

***4** (Йонах [70]). Кольцо R совершенно слева тогда и только тогда, когда каждый левый R-модуль удовлетворяет условию максимальности для циклических подмодулей.

5. Если P — проективный артинов R-модуль, то $\mathrm{rad}\ (\mathrm{End}\ P_R)$ исчезает справа.

6. (a) Ввести квазипроективность как понятие, дуальное квазиинъективности. Показать, что модуль E, имеющий проективное накрытие $P \twoheadrightarrow E$, квазипроективен тогда и только тогда, когда $\ker(P \twoheadrightarrow E)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля P. (b) Если R совершенно справа, то неразложимыми квазипроективными модулями являются модули P/PA, где P — неразложимое прямое слагаемое модуля R_R, а A — идеал кольца R, и только они (Джанс—Ву [67]).

7 (Сандомирский [64]). Кольцо R является, так сказать, «тестовым» модулем для инъективности (критерий Бэра в гл. 3). Показать, что если R совершенно справа, то оно — тестовый модуль для проективности, т. е. модуль P проективен тогда и только тогда, когда каждая диаграмма с точной строкой может быть дополнена до коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ R \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

8 (Сандомирский [64]). Если P квазипроективен и $S = \operatorname{End} P_R$, то

$$\operatorname{rad} S = \{f \mid P \multimap \operatorname{im} f\} = \\ = \{f \mid \operatorname{im} f \text{ косуществен в } P\}.$$

Кроме того, если для каждого $f \in S$ существует подмодуль M, такой, что $\operatorname{im} f + M = P$ и $\operatorname{im} f \cap M$ косуществен в P, то $S/\operatorname{rad} S$ — регулярное кольцо. (Если P — артинов модуль, выбрать M минимальным из таких N, что $\operatorname{im} f + N = P$. Если P — полупростой модуль, то M_f может быть выбран таким, что $\operatorname{im} f \cap M = 0$.)

9. Пусть R и S — полулокальные SBI-кольца, т. е. полусовершенные кольца. Тогда R и S подобны в том и только том случае, когда их базисные кольца изоморфны.

10 (Басс [60]). Следующие условия на кольцо R эквивалентны: (a) R совершенно слева; (b) плоская или слабая размерность [1]) левого R-модуля равна его проективной размерности. (c) Прямой предел модулей проективной размерности, не превосходящей n, имеет проективную размерность, также не превосходящую n. (d) Каждый плоский левый R-модуль проективен.

[1]) Слабую размерность левого R-модуля M (обозначается $\text{w}\cdot\dim_R M$) можно определить как наименьшее из таких n, для которых существует точная последовательность $0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$, в которой P_i, $(i = 0, \ldots, n)$ — плоские R-модули.— *Прим. перев.*

11 (Куртер [69]). Следующие условия на кольцо R эквивалентны: (a) Каждый модуль в mod-R и R-mod рационально полон. (b) R — прямое произведение конечного числа полных колец матриц над совершенными слева и справа локальными кольцами. (c) R совершенно справа, и каждый правый R-модуль рационально полон. (d) R совершенно слева и справа, и каждый как правый, так и левый модуль корационально полон (в смысле, дуальном к рациональной полноте).

12. Если R — локальное кольцо с нильпотентным радикалом, то каждый правый и каждый левый модуль рационально полон. В частности, $R = \bar{R} = \operatorname{Biend} \hat{R}_R$ (ср. 19.34).

13 (Чейз [60]). Коммутативное кольцо R, такое, что R^a — проективный R-модуль для любой мощности a, артиново. Верно и обратное.

14. Прямое произведение свободных модулей над коммутативным артиновым кольцом не обязано быть свободным модулем (тем не менее в силу упр. 13 над ним любое прямое произведение проективных модулей проективно).

Замечания к гл. 22

Поскольку совершенные кольца являются обобщением артиновых (а также полупримарных) колец, то ясно, что всякие попытки создания полной библиографии вряд ли когда-либо достигнут цели. (Как и Алисе, нужно бежать быстрее и быстрее, чтобы оставаться на месте. Итак, мы оставляем «будущее» совершенных колец последующим поколениям, а сами сконцентрируем свое внимание на их «прошлом»[1]).

В статье Басса [60] рассказывается о происхождении идеи проективного накрытия, а также содержатся многие теоремы о финитной гомологической размерности, не упомянутые здесь. Идеологическим предшественником Басса является Эйленберг [56].

Коззенс [70] [2]) привел примеры нётеровых областей целостности (V-областей), не являющихся телами и обладающих простым

[1]) В оригинале игла слов: future perfect и past perfect — названия времен глаголов в английском языке.— *Прим. перев.*

[2]) См. также Л. А. Койфман, *Матем. заметки*, **7** (1970), 359—368.— *Прим. перев.*

инъективным кообразующим. Таким образом, эти кольца, являясь правыми и левыми B-кольцами, оказываются несовершенными, что дает ответ на вопрос Басса [60] (см. упр. 22.7А (а)).

Рентшлер [66] дал негомологическое доказательство импликации II $\Rightarrow$ IV теоремы 22.29, ответив тем самым на вопрос, поставленный Бассом. На этот же вопрос дает ответ и теорема 22.30 Бьёрка. Тем не менее этот успех был достигнут ценой использования части теоремы Басса (часть, установленная в 22.31А), имеющей гомологическую формулировку.

Фукс [69b] и Ософская [70b] ответили утвердительно на другой вопрос Басса [60], доказав, что для любой пары бесконечных кардинальных чисел a и b существует кольцо, совершенное справа и слева, левая и правая длины Лёви которого равны $a + 1$ и $b + 1$ соответственно.

Камилло и Фуллер [74] доказали, что любое кольцо левой длины Лёви n имеет конечную правую длину Лёви, не превосходящую 2^n.

Вудс [71] и Рено [70] показали, что групповое кольцо RG совершенно тогда и только тогда, когда кольцо R совершенно, а группа G конечна, и тем самым обобщили теорему Коннелла для артиновых колец (Коннелл [63]) (ср. также соответствующие результаты для QF-колец 24.28).

Для каких групп G кольцо RG полусовершенно? Этот вопрос в общем случае остается открытым, тем не менее продвижения были достигнуты последовательно Коннеллом [63], Бёрджиссом [69а], Валеттом и другими. Некоторые обобщения этих результатов и библиография содержатся в работах Гурсо [73] и Лоуренса [75b]. Гупта [70] охарактеризовал порядки в совершенных кольцах (ср. 18.48).

Совершенные и полусовершенные модули были охарактеризованы Маресом [63] и Кашем и Маресом [66].

Джа̀нс и Ву [67] изучали квазипроективные накрытия и показали, что если структура идеалов совершенного справа кольца бесконечна, то существует бесконечное число неизоморфных неразложимых квазипроективных главных циклических левых модулей. Столько же существует и квазиинъективных модулей. (Это показывает, что совершенное кольцо, имеющее конечный модульный тип [т. е. являющееся FFM-кольцом (см. гл. 20)], имеет конечную структуру идеалов.)

Кёлер [70], Фуллер [69b] и Голан [70, 72], доказали, что существование квазипроективных накрытий влечет за собой совершенность кольца!

Мюллер [70а] и Уорфилд [72] распространили на полусовершенные кольца структурную теорему для проективных модулей над совершенным кольцом: они разлагаются в прямую сумму главных неразложимых модулей. (См. 22.23. См. также гл. 20 и 21, где обсуждаются другие теоремы о разложении в прямую сумму.) Аналогичным образом, теорема Уорфилда выявляет строение проективных модулей над кольцом, которое по модулю своего радикала регулярно в смысле фон Неймана и является SBI-кольцом, что одновременно дает обобщение теорем Капланского [58а] и Альбрехта [61]. См. гл. 21, упр. 6—8.

Сандомирский [64] показал, что над совершенным кольцом R-модуль R_R является «тестовым» модулем для проективности в смысле, дуальном к утверждению, что модуль M инъективен тогда и только тогда, когда гомоморфизмы подмодулей модуля R_R в M продолжаются до гомоморфизмов $R \to M$ (критерий Бэра для инъективности 3.41 (1, стр. 205)). Характеризация всех таких колец — все еще открытая проблема.

Куртер и Йонах (Йонах [70]) охарактеризовали совершенные слева кольца таким свойством: для каждого целого числа n любой левый модуль M удовлетворяет условию максимальности для подмодулей, порожденных n элементами.

Теория блоков Брауэра (для артиновых колец) содержится в работе Брауэра и Вайсса (ее изложение и упрощения для групповых алгебр можно найти в статье Розенберга и Зелинского [61]).

Михлер [69с] показал, что идемпотентные идеалы в совершенном кольце порождаются идемпотентами, центральными по модулю радикала.

Мы уже упоминали теорему Куртера (упр. 11) о кольцах, подобных конечным прямым произведениям локальных совершенных колец (ср. Длаб [70]). Тепли [70] описал кольца R, для которых каждое кручение (т. е. наследственный радикал в смысле определения из т. 1, стр. 647), рассматриваемое как функтор на mod-R, точно: это имеет место тогда и только тогда, когда R — конечное прямое произведение совершенных слева [sic!] колец, каждое из которых имеет единственный максимальный идеал[1]). В этом случае R является правым B-кольцом (в нашей терминологии) тогда и только тогда, когда rad R исчезает слева (Тепли [70, стр. 200, следствие 34]; ср. 22.7В. См. в этой связи также Длаб [70].)

Некоторые другие аспекты (полу)совершенных колец обсуждаются в замечаниях к гл. 18.

Замечание о рядах Лёви

Ряды, которые теперь называются рядами Лёви, последний ввел в 1905 году в своей статье о представлениях матричных групп и позже, в 1917 году, при изучении комплексов матриц, представ-

[1]) То есть каждое из них есть кольцо матриц над локальным совершенным слева кольцом.— *Прим. перев.*

ляющих линейные системы дифференциальных уравнений. Группа или множество (комплекс) матриц определяет алгебру и матрицы, соответствующие линейным преобразованиям некоторого векторного пространства. Лёви получил нижние треугольные матричные представления с неразложимыми блоками под диагональю, и существенная единственность этих представлений равнозначна некоторым утверждениям о факторах ряда Лёви этой алгебры и инвариантных подпространств указанного векторного пространства.

Крулль [26] определил понятия «ряд Лёви» и «инварианты или элементарные делители» в том виде, в котором они используются и теперь, и применил их к «обобщенным кольцам целых чисел» в своей статье, написанной в 1928 году. В это время Крулль уже ясно сознавал возможность рассмотрения трансфинитных рядов Лёви (как мы их определили в этой главе), что явствует из примечания на стр. 64 его статьи [28], но никакой пользы из этой идеи не извлек.

Детальнее история возникновения рядов Лёви исследуется в двух статьях в журнале Крелля (название этого журнала по имени его основателя звучит намного лучше!) — Фукса [69b] и Шореса [74].

Ссылки

Адзумая [74], Альбрехт [61], Басс [60], Бьёрк [69], [70], Вудс [71], Голан [70, 72], Гупта [70], Джанс — Ву [67], Диксон — Келли [70], Длаб [70], Йонах [70], Камилло — Фуллер [74], Капланский [58a], Каш — Марес [66], Кёлер [70], Кёте [30a], Коззенс [70], Коннел [63], Крулль [26], [28], Куртер [69], Лёви [05], [17], Марес [63], Михлер [69], Мюллер [70], Особская [71], Рант [72], Рено [70], Рентшлер [66], Розенберг — Зелинский [61], Сандомирский [64], Суон [60], [68], Тепли [70], Уорфилд [72], Фукс [69b], Фуллер [69b], Фуллер — Хилл [70], Хинохара [63], Цёшингер [73], Чейз [60], Шорес [71], [72], [74], Эйленберг [56].

Глава 23

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МОРИТЫ

В этой главе мы вводим двойственность Мориты. Грубо говоря, доказываемые теоремы дуальны к теоремам Мориты о категорной эквивалентности (гл. 12).

Если C и D — категории, то контравариантный функтор T: $C \rightsquigarrow D$ называется **двойственностью**, если существует контравариантный функтор S: $D \rightsquigarrow C$, такой, что

$$ST \approx 1_C \text{ и } TS \approx 1_D.$$

Упорядоченная пара (T, S) называется **парой двойственности.** (Тогда (S, T) — пара двойственности $D \rightsquigarrow C$.)

23.1. Упражнение. Если (T, S) и (T, S') — пары двойственности $C \rightsquigarrow D$, то функторы S и S' естественно эквивалентны.

Упражнение 23.1 показывает, что мы можем говорить о S как о функторе, **обратном** к T. (В таком случае T — обратный к S функтор.) Мы говорим, что T и T' — эквивалентные двойственности, если $T \approx T'$ как функторы. (Тогда обратные к ним функторы также эквивалентны.)

Пусть A и B — кольца, C — полная подкатегория категории mod-A и D — полная подкатегория в B-mod. Пара двойственности (T, S): $C \rightsquigarrow D$ называется **парой U-двойственности**, если существует (B, A)-бимодуль U, такой, что $\mathrm{Hom}_A(\ \ , U)$ и $\mathrm{Hom}_B(\ \ , U)$ индуцируют функторы, естественно эквивалентные T и S соответственно. В этом случае будем говорить, что $\mathrm{Hom}_A(\ , U)$ индуцирует T и что T является **U-двойственностью.** Для краткости мы будем также говорить, что U индуцирует T. Итак, высказывание «U индуцирует U-двойственность» приобретает вполне определенный смысл. Теорема Мориты утверждает, что любая двойственность категорий C и D, как она была только что определена, эквивалентна некоторой U-двойственности, если $A \in \mathrm{Obj}\, C$, $B \in \mathrm{Obj}\, D$ и каждый модуль из mod-A (соотв. B-mod), изоморфный объекту из C (соотв. D), принадлежит C (соотв. D) (23.29). Если к тому же C и D — классы Серра категорий mod-A и B-mod соответственно, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы объект U определял U-двойственность, состоит в том, что U является инъективным кообразующим как в категории mod-A, так и в категории B-mod и при этом $B \approx \mathrm{End}\, U_A$ и $A \approx \approx \mathrm{End}\,{}_B U$ (23.16). Тогда ${}_B U_A$ называется **контекстом двойствен-**

ности[1]). Если кольцо A артиново справа, то предыдущее условие можно существенно сократить, заменив его следующим: U — конечно порожденный инъективный кообразующий в mod-A и $B \approx \approx \operatorname{End} U_A$ (23.25). Необходимым условием на кольцо A для существования контекста двойственности ${}_BU_A$ является его полусовершенность (23.18). Если же A совершенно, то оно должно быть артиновым справа, а по симметрии B должно быть артиновым слева (23.20). Квазифробениусовы кольца обладают A-двойственностью

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}$$

и имеют много других характеризаций, изложенных в гл. 24. (Здесь, конечно, fin.gen.mod-A — полная подкатегория категории mod-A, состоящая из всех конечно порожденных модулей.)

Для некоторых полусовершенных колец двойственность — обычное явление. Например, 23.32 утверждает, что если A — конечномерная алгебра над полем k, то $\operatorname{Hom}_k(\ ,\ k)$ индуцирует двойственность

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}.$$

Пусть $X' = \operatorname{Hom}_k(X,\ k)$ для любого $X \in \operatorname{Obj}$ mod-A. В силу ассоциативности сопряженности мы имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(X,\ A') = \operatorname{Hom}_A(X,\ \operatorname{Hom}_k(A,\ k)) &\approx \\ \approx \operatorname{Hom}_k(X \otimes_A A,\ k) &\approx \\ \approx \operatorname{Hom}_k(X,\ k) &= \\ = X'.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что двойственность, определяемая функтором $\operatorname{Hom}_k(\ ,\ k)$, является A'-двойственностью в смысле, объясненном выше; а именно: A' есть $(A,\ A)$-бимодуль, индуцирующий A'-двойственность

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}.$$

В этой связи естественно спросить, когда $\operatorname{Hom}_k(\ ,\ k)$ или, что то же самое, $\operatorname{Hom}_A(\ ,\ A')$ индуцирует A-двойственность? Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда A и A' изоморфны как правые A-модули. (Вопрос об A-двойственности обсуждается в следующей главе о квазифробениусовых кольцах.)

[1]) При этом U-двойственность называется **двойственностью Мориты**. — *Прим. перев.*

U-дуальные модули

Для любого объекта U аддитивной категории C символом h^U мы обозначали функтор $C \rightsquigarrow$ ABEL GROUPS, индуцированный функтором $\operatorname{Mor}_C(U,\ )$, а символом h_U — контравариантный функтор, определенный функтором $\operatorname{Mor}_C(\ ,U)$. Если U есть (B,A)-бимодуль, то для каждого $X \in$ mod-A объект $h_U(X)$ является левым B-модулем относительно умножения

$$bf = h_U(b_s)\, f$$

для всех $b \in B$, $f \in h_U(X)$, где b_s — гомотетия, или, что эквивалентно,

$$(bf)(x) = b \cdot f(x) \quad \forall\ x \in X.$$

Модуль $h_U(X)$ называется **U-дуальным** к X. Итак, h_U определяет функтор mod-A $\rightsquigarrow$ B-mod, называемый **U-дуальным функтором.** Функтор $\operatorname{Hom}_B(\ ,U)$ мы также будем обозначать через h_U. Тогда h_U^2 обозначает оба произведения $h_U \circ h_U$ (в одном случае это функтор mod-A $\rightsquigarrow$ mod-A, а в другом — B-mod $\rightsquigarrow$ B-mod.) Модуль $h_U^2(X)$ для каждого X называется **U-бидуальным** к X, а функтор h_U^2 — **U-бидуальным функтором.**

Сокращения обозначений

Если $(B,\ A)$-бимодуль U зафиксирован и нет необходимости каждый раз его явно указывать, то функтор h_U обозначим через $(\ )^*$. Итак, $X^* = h_U(X)$, а для морфизма $f\colon X \to Y$ мы полагаем $f^* = h_U(f)$. Другие используемые сокращения:

$$h_U^2(X) = X^{**} = (X^*)^*, \quad h_U^3(X) = X^{***},$$
$$h_U^2(f) = f^{**} = (f^*)^*, \qquad h_U^3(f) = f^{***}.$$

U-дуальный функтор h_U: mod-A $\rightsquigarrow$ B-mod обозначается через $(\ )_A^*$ или просто через $(\ )^*$; U-бидуальный функтор h_U^2: mod-A $\rightsquigarrow$ mod-A обозначается через $(\ )_A^{**}$ или $(\ )^{**}$.

Симметричные обозначения

Для $x \in X$, $f_1 \in X^*$, $f_2 \in X^{**}$, $f_3 \in X^{***}$ положим

$$\begin{aligned}\langle f_1,\ x\rangle &= f(x),\\ \langle f_1,\ f_2\rangle &= (f_1)f_2 \quad (\text{значение } f_2 \text{ на } f_1),\\ \langle f_3,\ f_2\rangle &= f_3(f_2).\end{aligned}$$

Тогда ясно, что существует A-гомоморфизм

$$\pi_U(X)\colon X \to X^{**},$$

такой, что

$$\langle f, \pi_U(X)(x)\rangle = \langle f, x\rangle$$

для всех $f \in X^*$, $x \in X$. Когда нет необходимости явно указывать U и X, для $\pi(X)(x)$ используется сокращение x^{**}. (Обозначение x^{**} для $\pi(X)(x)$ можно объяснить.) Аналогично, мы имеем B-гомоморфизм

$$\pi_U(Y)\colon Y \to Y^{**},$$

где $Y \in B$-mod.

Естественное преобразование

Как и в случае $U = A = B$, семейство A-гомоморфизмов $\pi_U(X)\colon X \to h_U^2(X) = X^{**}$ определяет естественное преобразование функторов

$$\pi_U\colon 1_{\text{mod-}A} \to h_U^2 = (\ \ )^{**}.$$

U-полурефлексивные и U-рефлексивные модули

Говорят, что A-модуль X является **U-полурефлексивным,** если отображение $\pi_U(X)\colon X \to X^{**}$ инъективно (является мономорфизмом), где $X^{**} = h_U^2(X)$. Если $\pi_U(X)$ — изоморфизм, то X называется **U-рефлексивным.** Поскольку π_U — естественное преобразование функторов, то модуль X U-рефлексивен (соотв. U-полурефлексивен) тогда и только тогда, когда таким же является любой A-модуль, ему изоморфный.

Если $U = A$, то вместо A-рефлексивных и A-полурефлексивных модулей мы говорим просто о рефлексивных и полурефлексивных модулях соответственно. Кроме того, функтор $(\ )^* = h_A$ называется **каноническим контравариантным функтором** mod-A $\rightsquigarrow$ A-mod.

23.2. Предложение. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль.*

(a) *${}_BB$ U-полурефлексивен тогда и только тогда, когда U — точный B-модуль.*

(b) *${}_BB$ U-рефлексивен тогда и только тогда, когда U — сбалансированный точный B-модуль, т. е. тогда и только тогда, когда каноническое отображение $B \to \operatorname{End} U_A$ есть изоморфизм.*

(c) *Если ${}_BB$ U-рефлексивен, то U-рефлексивен и A-модуль U.*

Доказательство. В самом деле,

$$\pi_U(B)\colon B \to \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_B(B, U), U),$$

где

$$\langle \pi_U(b), f\rangle = \langle b, f\rangle = (b)f = b\cdot(1)f$$

для всех $b \in B$, $f \in \operatorname{Hom}_B(B, U)$. Поскольку

$$\begin{cases} \operatorname{Hom}_B(B, U) \to U \\ \qquad\qquad f \mapsto (1)f \end{cases}$$

— изоморфизм (B, A)-бимодулей, то отсюда следует, что ${}_BB$ U-полурефлексивен тогда и только тогда, когда U — точный B-модуль, и ${}_BB$ U-рефлексивен тогда и только тогда, когда U — сбалансированный точный B-модуль. Это доказывает (a) и (b).

(c) Естественный B-изоморфизм

$$h\colon U \to \operatorname{Hom}_B(B, U),$$

где

$$(b)h(u) = bu \text{ для всех } b \in B,\ u \in U,$$

является также A-гомоморфизмом. Умножение его слева на A-изоморфизм $h_U(\varphi^{-1})$, где φ — естественный изоморфизм $B \to \operatorname{Hom}_A(U, U) = U^*$, указанный выше, дает изоморфизм

$$\pi_U\colon U \to \operatorname{Hom}_B(U^*, U) = U^{**}.$$

Итак, изоморфизм $B \approx U^*$ дает изоморфизм $U^{**} \approx \operatorname{Hom}_B(B, U) \approx U$, т. е. U *U-рефлексивен.* □

Основной факт, связанный с U-полурефлексивностью, состоит в том, что модуль X является U-полурефлексивным тогда и только тогда, когда он может быть вложен в прямое произведение некоторого множества экземпляров модуля U. Сначала докажем лемму.

23.3. Лемма. *Класс U-полурефлексивных модулей замкнут относительно взятия прямых произведений и подмодулей.*

Доказательство. Пусть $X = \prod_{i\in I} X_i$ — прямое произведение U-полурефлексивных модулей и $p_i\colon X \to X_i$ — его проекции. Если $x \in X$ и $x \neq 0$, то $x' = p_i(x) \neq 0$ для некоторого i. Теперь, поскольку $x' \in X_i$, существует $f \in X_i^*$, такой, что

$$\langle f, x'\rangle = \langle f, p_i x\rangle = \langle fp_i, x\rangle \neq 0$$

Так как $fp_i \in X^*$, то отсюда следует, что X U-полурефлексивен[1]). Далее, пусть X U-полурефлексивен и $h\colon M \to X$ — мономорфизм. Если $m \in M$ и $m \neq 0$, то существует $f \in X^*$, такой, что

$$\langle f, h(m)\rangle = \langle fh, m\rangle \neq 0.$$

Так как $fh \in M^*$, то отсюда следует, что M U-полурефлексивен. □

[1]) Действительно, модуль X по определению U-полурефлексивен тогда и только тогда, когда $\pi_U(X)(x) \neq 0$ для любого ненулевого $x \in X$, т. е. когда найдется $f \in X^*$, такой, что $\langle f, \pi_U(X)(x)\rangle = \langle f, x\rangle \neq 0$.— *Прим. перев.*

23.4. Предложение. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль. Для любого A-модуля X следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *X U-полурефлексивен.*

(b) *Существует мономорфизм $X \to U^I$ в прямое произведение некоторого множества I экземпляров модуля U.*

(c) *Каноническое отображение*

$$F \begin{cases} X \to U^{\mathrm{Hom}_A(X,\, U)} = \prod\limits_{f \in \mathrm{Hom}_A(X,\, U)} U_f \\ x \mapsto (\ldots, f(x), \ldots) \end{cases}$$

инъективно.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (c). Если $x \in X$ и $x \neq 0$, то по (a) существует $f \in X^*$, такой, что

$$\langle f, \pi_U(x)\rangle = \langle f, x\rangle = f(x) \neq 0,$$

и тогда $F(x) \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Ясно, что A-модуль U U-полурефлексивен и, следовательно, по лемме 23.3 U-полурефлексивен любой A-подмодуль модуля U^I. Итак, X изоморфен U-полурефлексивному модулю и, следовательно, сам U-полурефлексивен. □

23.5. Предложение. *Для каждого $X \in$ mod-A последовательность*

(1) $$0 \to X^* \xrightarrow{\pi_U(X^*)} X^{***}$$

точна и расщепляема.

Доказательство. Функтор $(\ )^*$ переводит $\pi_U\colon X \to X^{**}$ в $\pi_U^*\colon X^{***} \to X^*$. Мы докажем, что последовательность (1) точна и расщепляема, показав, что $\pi_U(X^*) \circ \pi_U^* = 1_{X^*}$. Так как X^* и X^{***} — левые B-модули, то мы воспользуемся правосторонней записью гомоморфизмов π_U^* и $\pi_U(X^*)$. Пусть $x \in X$, $g \in X^*$, $f \in X^{***}$. Тогда

$$\langle (f)\,\pi_U^*, x\rangle = \langle f, \pi_U(x)\rangle,$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle g\,(\pi_U(X^*) \circ \pi_U^*), x\rangle &= \langle (g)\,\pi_U(X^*), \pi_U(x)\rangle = \\ &= \langle g, \pi_U(x)\rangle = \\ &= \langle g, x\rangle. \end{aligned}$$

Итак, $\pi_U(X^*) \circ \pi_U^* = 1_{X^*}$. □

23.6. Следствие. *Любой U-дуальный модуль X^* U-полурефлексивен.*

Доказательство. $\pi_U(X^*)\colon X^* \to X^{***}$ — мономорфизм. □

Категория коротких точных последовательностей

Пусть C — абелева категория. Рассмотрим категорию S-EX SEQ всех коротких точных последовательностей, объектами которой являются все точные последовательности

$$\{A_i\}\colon\ 0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

в C. Если $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ — две такие точные последовательности, то морфизмами $\gamma\colon \{A_i\} \to \{B_i\}$ в этой категории являются все упорядоченные тройки $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ морфизмов $\gamma_1\colon A_1 \to B_1$, $\gamma_2\colon A_2 \to B_2$, $\gamma_3\colon A_3 \to B_3$ категории C, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{rccccccccc} \{A_i\}\colon & 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\alpha} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \\ \{B_i\}\colon & 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow[\beta]{} & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативна. Категория S-EX SEQ является аддиативной. 5-лемма (**1**, 5.35, стр. 331) показывает, что каждый морфизм γ имеет ядро $\ker \gamma$, а именно

(1) $$0 \to \ker \gamma_1 \to \ker \gamma_2 \to \alpha \cdot \ker \gamma_2 \to 0,$$

и коядро coker γ, а именно

(2) $$0 \to \overline{\beta}\ \mathrm{coker}\ \gamma_1 \to \mathrm{coker}\ \gamma_2 \to \mathrm{coker}\ \gamma_3 \to 0.$$

где $\overline{\beta}\colon \mathrm{coker}\ \gamma_1 \to \mathrm{coker}\ \gamma_2$ — морфизм, индуцированный морфизмом β.

23.7. Предложение. *Пусть C — абелева категория и предположим, что*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

— коммутативная диаграмма с точными строками. Тогда

(a) *если γ_2 — мономорфизм, то и γ_1 — мономорфизм;*

(b) *если γ_2 — эпиморфизм, то и γ_3 — эпиморфизм;*

(c) *если γ_2 — эквивалентность, то γ_1 — эпиморфизм в том и только том случае, когда γ_3 — мономорфизм;*

(d) *если γ_2 — эквивалентность, то γ_1 — эквивалентность тогда и только тогда, когда γ_3 — эквивалентность;*

(e) *если γ_1 и γ_3 — эквивалентности, то и γ_2 — эквивалентность.*

Доказательство. Тройка $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ является морфизмом категории S-EX SEQ, и поэтому мы можем построить $\ker \gamma$ и coker γ в виде точных последовательностей (1) и (2). Отсюда вытекают утверждения (a), (b) и (c). Далее, (d) — непосредственное следствие пп. (a), (b) и (c). Наконец, (e) непосредственно вытекает из 5-леммы (5.35). □

23.8. Следствие и определение. *Пусть C — произвольная категория, $T: C \rightsquigarrow C$ — функтор и $h: 1_C \to T$ — естественное преобразование функторов. Говорят, что объект A из C **h-рефлексивен**, если $h(A): A \to T(A)$ — эквивалентность. Пусть теперь C — абелева категория и*

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

— точная последовательность. Предположим, что T — точный функтор. Тогда

(a) *если A_2 h-рефлексивен, то A_1 h-рефлексивен тогда и только тогда, когда A_3 h-рефлексивен,*

(b) *если A_1 и A_3 h-рефлексивны, то и A_2 h-рефлексивен.*

Доказательство. Положим $B_i = T(A_i)$, $\gamma_i = h(A_i)$, $i = 1, 2, 3$, и применим предложение 23.7. □

Если U есть (B, A)-бимодуль, то, конечно, π_U-рефлексивные модули[1]) — это как раз те, которые мы назвали U-рефлексивными модулями.

23.9. Предложение. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль, являющийся инъективным как в* mod-A, *так и в* B-mod. *Пусть в* mod-A *или в* B-mod *заданы объект X и его подобъект X_0. Тогда*

(a) *если X U-рефлексивен, то X_0 U-рефлексивен в том и только том случае, когда X/X_0 U-рефлексивен;*

(b) *если X_0 и X/X_0 оба U-рефлексивны, то X U-рефлексивен.*

Доказательство. Поскольку U инъективен и как A-, и как B-модуль, то оба функтора h_U: mod-$A \rightsquigarrow B$-mod и h_U: B-mod $\rightsquigarrow$ mod-A точны и, следовательно, точен функтор h_U^2. Теперь остается применить следствие 23.8. □

23.10. Следствие. *Любое прямое слагаемое U-рефлексивного модуля U-рефлексивно.*

Доказательство. Для простоты обозначений U-бидуальный функтор h_U^2 обозначим через T, а π_U — через h, и пусть

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y/X \to 0$$

— расщепляющаяся точная последовательность, в которой Y есть U-рефлексивный модуль. Так как функтор T аддитивен, то последовательность

$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{Tf} TY \xrightarrow{Tg} T(Y/X) \longrightarrow 0$$

[1]) При этом $T = h_U^2$.— *Прим. перев.*

также точна и расщепляема[1]). Рассмотрим коммутативную диаграмму, полагая в диаграмме из 23.7 $A_1 = X$, $B_1 = TX$, $h(X) = \gamma_1$ и т.д. Поскольку Y/X эквивалентен подобъекту объекта Y, то Y/X U-полурефлексивен, т. е. $h(Y/X) = \gamma_3$ — мономорфизм, и по той же причине мономорфизмом является γ_1. Следовательно, по 23.7 (c) из того, что $h(Y) = \gamma_2$ — эквивалентность, вытекает, что γ_1 будет также и эпиморфизмом. Итак, γ_1 — эквивалентность. Теперь в силу 23.7 (d) γ_3 — также эквивалентность. □

23.11. Упражнение. (a) Пусть A — кольцо. Любой конечно порожденный проективный A-модуль A-рефлексивен.

(b) (Фрейд) Если C — абелева категория, то факторкатегория категории коротких точных последовательностей в C по подкатегории расщепляющихся точных последовательностей абелева (см. факторкатегории, гл. 15 т. 1).

Замкнутые модули

Пусть U есть (B, A)-бимодуль. Если M — правый A-модуль и M^* — его U-дуальный модуль, то отображение

$$\begin{cases} M^* \times M \to U \\ \quad (y, x) \longmapsto \langle y, x \rangle = y(x) \end{cases}$$

для всех $y \in M^*$, $x \in M$ определяет следующие аннуляторные соотношения между подмножествами модулей M и M^*: если $X \subseteq M$ и $Y \subseteq M^*$, то положим

$$X' = \{y \in M^* \mid \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X\} = \operatorname{ann}_{M^*} X,$$
$$Y' = \{x \in M \mid \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} = \operatorname{ann}_M Y.$$

Если X — подмножество в M или в M^*, то X'' определяется как $(X')'$. Подмножество X называется **U-замкнутым**, если $X = X''$. Если $X \subseteq M$, то X' — левый B-подмодуль в M^*, а если $X \subseteq M^*$, то X' — правый A-подмодуль в M. Если $M = A$, то $A^* \approx U$, и тогда для подмножества $X \subseteq A$ множество X^* есть не что иное, как аннулятор множества X в модуле U, т. е. $\operatorname{ann}_U X$. Аналогично, если $A = \operatorname{End}_B U = U^*$ и Y — подмножество из U, то Y' совпадает с $\operatorname{ann}_A Y$.

Поскольку функтор $\operatorname{Hom}_A(\ , U)$ точен слева, то для каждой точной последовательности правых A-модулей

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y/X \longrightarrow 0$$

имеется дуальная точная последовательность

(1) $$0 \longrightarrow (Y/X)^* \xrightarrow{g^*} Y^* \xrightarrow{f^*} X^*.$$

[1]) См. 1, 3.38, стр. 203.— *Прим. перев.*

Если f — включение, g — каноническое отображение $Y \to Y/X$ и $k \in Y^*$, то, рассматривая коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "kf"'] & & Y \arrow[dl, "k"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

получим, что

$$\ker f^* = \{k \in Y^* \mid f^*(k) = 0\}$$

равен

$$\ker f^* = \{k \in Y^* \mid kf(x) = k(x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

Итак, $\ker f^* = X'$. Точность последовательности (1) показывает, что $X' \approx (Y/X)^*$. Итак, мы доказали

23.12. Предложение. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль и $Y^* = \operatorname{Hom}_A(Y, U)$ для любого $Y \in$ mod-A. Если X — некоторый A-подмодуль модуля Y, то левый B-модуль $X' = \operatorname{ann}_{Y^*} X$ изоморфен левому B-модулю $(Y/X)^*$.*

23.13. Предложение. *Если U — кообразующий в* mod-A, *то каждый подмодуль X_0 правого A-модуля X удовлетворяет аннуляторному условию, т. е.*

$$X_0 = \operatorname{ann}_X \operatorname{ann}_{X^*} X_0,$$

где X^* обозначает модуль, U-дуальный к X. Если I — любой правый идеал кольца A, то

$$I = \operatorname{ann}_A \operatorname{ann}_U I.$$

Доказательство. Мы должны показать, что если $x \in X$ и $x \notin X_0$, то $x \notin \operatorname{ann}_X \operatorname{ann}_{X^*} X_0$, т. е. что существует $f \in X^* = \operatorname{Hom}_A(X, U)$, такой, что $\ker f \supseteq X_0$ и $f(x) \neq 0$. Так как $X_0 \cap xA \neq xA$, то $C = xA/(X_0 \cap xA)$ — ненулевой циклический A-модуль, и поэтому существует эпиморфизм $C \to V$, где V — простой модуль. Так как $C \approx (xA + X_0)/X_0$, то мы получаем эпиморфизм $g\colon (xA + X_0) \to V$, такой, что $\ker g$ содержит X_0. Поскольку U — кообразующий, то по 1, 3.55, стр. 217, существует мономорфизм $h\colon \hat{V} \to U$, где $\hat{V}$ — инъективная оболочка модуля V_A. Пусть $M = h(\hat{V})$. Тогда $k = hg$ — ненулевое отображение $xA + X_0 \to M$, которое в силу инъективности модуля M может быть продолжено до гомоморфизма $f\colon X \to M$. Так как $M \subseteq U$, то мы можем считать, что $f \in X^*$. Поскольку $\ker f \supseteq X_0$, это завершает доказательство первой части предложения. Вторая часть — частный случай первого утверждения, когда $X = A$, $X_0 = I$ (тогда $X^* = \operatorname{Hom}_A(A, U) \approx U$).

23.14. Следствие. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль и U — инъективный кообразующий в* mod-A. *Тогда каждый подмодуль U-рефлексивного A-модуля U-рефлексивен.*

Доказательство. Пусть $f\colon X_0 \to X$ — включение, а X U-рефлексивен. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\pi(X_0)"] \arrow[d, "f"'] & h_U^2(X_0) \arrow[d, "h^2(f)"] \\ X \arrow[r, "\pi(X)"'] & h_U^2(X) \end{tikzcd}$$

где $\pi = \pi_U$, коммутативна. Пусть

$$X' = \pi(X)^{-1} h^2(f)\, h_U^2(X_0)$$

и $g \in \operatorname{ann}_{X^*} f(X_0)$, т. е. $g\colon X \to U$ и $gf = 0$. Так как $h^2(gf) = 0$ и

$$h^2(g)\,\pi(X) = \pi(U)\, g,$$

то

$$\begin{aligned} \pi(U)\, g(X') &= \pi(U)\, g\pi(X)^{-1} h^2(f)\, h_U^2(X_0) = \\ &= h^2(g)\, h^2(f)\, h_U^2(X_0) = \\ &= h^2(gf)\, h_U^2(X_0) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\pi(U)$ — мономорфизм, то отсюда следует, что $g(X') = 0$ и, таким образом, $X' \subseteq \operatorname{ann}_X \operatorname{ann}_{X^*} f(X_0)$. Применение 23.13 показывает, что $X' = f(X_0)$. Если теперь $y \in h_U^2(X_0)$, то

$$\pi(X_0) f^{-1} \pi(X)^{-1} h^2(f) y = y \in \operatorname{im} \pi(X_0).$$

В самом деле, так как U — инъективный A-модуль, то функтор h_U^2 точен слева, в частности, $h^2(f)$ — мономорфизм. Отсюда, поскольку $h^2(f)\pi(X_0) f^{-1} \pi(X)^{-1} h^2(f) y = h^2(f) y$, и следует выписанное равенство. Итак, $\pi(X_0)$ — эпиморфизм и, следовательно, эквивалентность. □

Класс Серра

Если C — абелева категория, то подкласс $\mathscr{S}$ ее объектов называется **классом Серра**, если для каждой точной последовательности

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

объектов из C объект X принадлежит $\mathscr{S}$ тогда и только, когда классу $\mathscr{S}$ принадлежат X' и X''.

Если $\mathscr{S}$ — класс Серра абелевой категории C, то порожденная им полная подкатегория категории C абелева (1, 15.2), и ее также называют **классом Серра** (см. 1, стр. 609).

23.15. Теорема. *Пусть U — такой (B, A)-бимодуль, что он является инъективным кообразующим в* mod-A *и инъективным модулем в* B-mod. *Тогда класс U-рефлексивных правых A-модулей является классом Серра.*

Доказательство. Если X U-рефлексивен и $X_0 \subseteq X$, то по следствию 23.14 X_0 U-рефлексивен и, следовательно, ввиду 23.9 (a) U-рефлексивен фактормодуль X/X_0. Обратно, если X_0 и X/X_0 оба U-рефлексивны, то ввиду 23.9 (b) U-рефлексивен и X. □

U-двойственность

Мы начали эту главу с определения двойственности. Теперь мы дадим необходимые и достаточные условия для существования U-двойственности.

23.16. Теорема и определние. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль. Через* U_A-Ref *обозначим полную подкатегорию U-рефлексивных правых A-модулей, а через* ${}_BU$-Ref *— полную подкатегорию U-рефлексивных левых B-модулей. Тогда U индуцирует U-двойственность* U_A-Ref $\rightsquigarrow$ ${}_BU$-Ref *и следующие условия эквивалентны:*

(a) U_A-Ref *— класс Серра, содержащий как A, так и U, и* ${}_BU$-Ref *— класс Серра, содержащий B и U.*

(b) *U — инъективный кообразующий в категориях* mod-A *и* B-mod *и каждый из модулей A_A и ${}_BB$ U-рефлексивен.*

(c) U_A-Ref (*соотв.* ${}_BU$-Ref) *— абелева полная подкатегория категории* mod-A [1]) (*соотв.* B-mod), *содержащая U, A и все подмодули модуля A* (*соотв. U, B и все подмодули модуля B*), *а подкатегория* ${}_BU$-Ref *также полна и содержит B и все его подмодули* (*соотв.* U_A-Ref *полна и содержит A и все его подмодули*).

(d) U_A-Ref *— класс Серра, содержащий A, а* ${}_BU$-Ref *— класс Серра, содержащий B.*

(e) U_A-Ref *— абелева полная подкатегория категории* mod-A, *содержащая A и все его правые идеалы, а* ${}_BU$-Ref *— абелева полная подкатегория категории* B-mod, *содержащая B и все его левые идеалы.*

Если выполнено любое из перечисленных условий, то ${}_BU_A$ называется ***контекстом двойственности.***

[1]) Здесь, а также в (е) под этим понимается следующее: если $f\colon X \to Y$ — морфизм в U_A-Ref, то $\ker f$ и $\operatorname{coker} f$, вычисленные в mod-A, принадлежат U_A-Ref. В частности, мономорфизмы и эпиморфизмы категории U_A-Ref являются мономорфизмами и эпиморфизмами в mod-A. — *Прим. перев.*

Доказательство. В ходе доказательства предложения 23.5 было установлено, что $\pi_U(X^*) \circ \pi_U^*(X) = 1_{X^*}$ для любого A-модуля X. Таким образом, если $\pi_U(X)$ — изоморфизм, т. е. если X есть U-рефлексивный модуль, то $\pi_U(X^*) = (\pi_U^*(X))^{-1}$ — также изоморфизм, т. е. модуль X^* U-рефлексивен. Поэтому функтор h_U индуцирует функтор U_A-Ref $\rightsquigarrow$ ${}_BU$-Ref, который мы обозначим через h_{U_A}. Двойственным образом определяется функтор $h_{{}_BU}\colon$ ${}_BU$-Ref $\rightsquigarrow$ U_A-Ref, так что

$$h_{{}_BU} \circ h_{U_A} = h_U^2\colon U_A\text{-Ref} \rightsquigarrow U_A\text{-Ref},$$

$$h_{U_A} \circ h_{{}_BU} = h_U^2\colon {}_BU\text{-Ref} \rightsquigarrow {}_BU\text{-Ref}.$$

Поскольку в обоих случаях функтор h_U^2 естественно эквивалентен тождественному функтору на категории U-рефлексивных модулей, то пара $(h_{U_A}, h_{{}_BU})$ является парой U-двойственности. Итак, U индуцирует U-двойственность.

Перейдем теперь к доказательству эквивалентности условий (a) — (e). По 23.2 (a) $\Longleftrightarrow$ (d) и (c) $\Longleftrightarrow$ (e). Кроме того, (b) $\Rightarrow$ (a) в силу 23.2 и 23.15.

(a) $\Rightarrow$ (c). Полная подкатегория U_A-Ref категории mod-A полна и абелева, поскольку U_A-Ref — класс Серра.

(c) $\Rightarrow$ (b). Заметим сначала, что $U \in {}_BU$-Ref ввиду 23.2 (c). Далее по 23.2 (b) из того, что $B \in {}_BU$-Ref, следует, что каноническое отображение $B \to \operatorname{End} U_A$ является изоморфизмом. Кроме того, U_A — инъективный кообразующий в U_A-Ref в силу того, что B — проективный образующий в ${}_BU$-Ref, а двойственность $h_{{}_BU}$ переводит B в $h_{{}_BU}(B) = \operatorname{Hom}_B(B, U) \approx U_A$. Симметрично, U — инъективный кообразующий в ${}_BU$-Ref.

Остается только показать, что U — инъективный кообразующий в mod-A. (Доказательство для ${}_BU$ проводится симметрично.) Если I — правый идеал кольца A, то по условию A и I лежат в U_A-Ref и, поскольку U_A-Ref — полная подкатегория в mod-A, критерий Бэра 3.41 показывает, что U_A инъективен в mod-A. Далее, пусть V — простой правый A-модуль. Тогда $V \approx A/I$ для некоторого правого идеала I кольца A. По 23.9(a) $W = A/I \in$ $\in U_A$-Ref, а поскольку U_A — кообразующий в U_A-Ref, то существует мономорфизм $W \to U$. Таким образом, U — инъективный объект в mod-A, содержащий в качестве подобъекта любой простой объект категории mod-A, и, следовательно, по 3.31.2 U — инъективный кообразующий в mod-A. □

23.17. Упражнение. Допустим, что ${}_BU_A$ — контекст двойственности.

(a) Показать, что бесконечная прямая сумма ненулевых U-рефлексивных модулей никогда не является U-рефлексивным модулем [1]).

(b) Пусть P — одно из следующих свойств объектов: проективность, инъективность, быть проективным накрытием, инъективной оболочкой, образующим, кообразующим и т. д. Для каких P верно, что всякий U-рефлексивный правый A-модуль X обладает свойством P в категории U-рефлексивных A-модулей тогда и только тогда, когда X обладает этим свойством в категории всех A-модулей? Показать, что это верно не для всех P. (Ср. Ософская [66b]).

(c) Для любого идеала I кольца A имеет место контекст двойственности ${}_{B/I'}E_{A/I}$, где $E = \operatorname{ann}_U I \approx \operatorname{Hom}_A(A/I, U)$ и $I' = \{b \in B \mid bE = 0\}$. Показать, что эта двойственность индуцируется контекстом двойственности ${}_BU_A$, т. е. $\operatorname{Hom}_{A/I}(X, E) \approx \operatorname{Hom}_A(X, U)$ для любого $X \in \text{mod-}A/I$.

(d) Пусть $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow E$ — контравариантные функторы абелевых категорий.

(1) Если T точен слева, а S точен справа, то $ST\colon C \rightsquigarrow E$ точен справа.

(2) Если $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$ — контравариантные функторы и $ST \approx 1_C$, то T унивалентен. Кроме того, если S унивалентен, то T точен.

(3) Если $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$ — двойственность, то каждый из функторов T и S вполне унивалентен и точен.

23.18. Следствие (Ософская [66b]). *Пусть ${}_BU_A$ — контекст двойственности. Тогда A и B — полусовершенные кольца.*

Доказательство. Каждый модуль в mod-A имеет инъективную оболочку и, так как U_A инъективен, то для любого n подмодули модуля U^n имеют инъективные оболочки, лежащие в U^n; поэтому их инъективные оболочки U-рефлексивны. Пусть теперь Y — конечно порожденный левый B-модуль, и покажем, что он имеет проективное накрытие в B-mod. Так как Y конечно порожден, то для некоторого числа n существует эпиморфизм ${}_BB^n \to Y \to 0$; учитывая, что функтор h_U переводит ${}_BB$ в U_A, получим, что h_U переводит Y в подмодуль Y^* модуля U^n. Пусть $Y^* \to E$ — инъективная оболочка модуля Y^*, лежащая в U^n. Как уже было отмечено, E принадлежит категории U_A-Ref. Применяя к точной последовательности $0 \to E \to U^n$ функтор h_U,

[1]) Заметим, что если ${}_BU_A$ не является контекстом двойственности, то (a) необязательно верно. Например, если V — бесконечномерное векторное пространство над полем k и $B = \operatorname{End} V_k$, то модули V_k и k V_k-рефлексивны и в то же время $V \approx \sum_{i \in I} \oplus k_i$, где $k_i \approx k$ и I бесконечно. — *Прим. перев.*

получим точную последовательность $B^n \to E^* \to 0$, в которой E^* — проективный объект категории ${}_BU$-Ref. Следовательно, эта последовательность расщепляется, так что E^* — проективный B-модуль. Но тогда $E^* \to Y^{**} \approx Y$ — проективное накрытие объекта Y в B-mod. Итак, каждый конечно порожденный левый B-модуль имеет проективное накрытие и, следовательно, B полусовершенно. Полусовершенность кольца A устанавливается симметрично. □

Итак, существование контекста двойственности накладывает некоторые ограничения на кольца. Мы увидим, что не каждое полусовершенное кольцо обладает контекстом двойственности, однако каждая конечномерная алгебра над полем им обладает (см. 23.32).

23.19. Лемма (Орнстейн [68] и Ософская [66b]). (a) *Если I — такой идеал кольца R, что I/I^2 — нётеров правый R-модуль, то нётеровым будет и модуль I^k/I^{k+1} для всех $k \geqslant 1$.*

(b) *Если R — кольцо с условием минимальности для конечно порожденных правых идеалов (т. е. совершенное слева (22.29)) и правый идеал $J = \operatorname{rad} R$ конечно порожден по модулю J^2, то R артиново справа.*

Доказательство. (a) Пусть элементы $x_1, \ldots, x_t$ порождают I по модулю I^2. Тогда система $\{x_i x_j\}_{i, j=1}^{n}$ порождает I^2 по модулю I^3. Действительно, каждый элемент $z \in I^2$ есть конечная сумма произведений $y_1 y_2$, где $y_i \in I$, $i = 1, 2$, так что

$$y_i = \sum_{j=1}^{t} x_j r_{ij},$$

где $r_{ij} \in R$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, t$. Итак, z — конечная сумма произведений $x_j r_{ij} x_m r_{km}$. Поскольку $r_{ij} x_m r_{km} \in I$, то $r_{ij} x_m r_{km}$ равен линейной комбинации элементов x_i с коэффициентами из R плюс элемент из I^2. Таким образом, $x_j r_{ij} x_m r_{km}$ есть линейная комбинация элементов $x_i x_j$ с коэффициентами из R плюс элемент из I^3. Следовательно, I^2/I^3 конечно порожден и, продолжая по индукции, получим (a).

(b) Пусть F_1 — конечно порожденный правый идеал кольца R, такой, что $J = F_1 + J^2$. Тогда $J^2 = F_1 J + J^3$ и, учитывая, что $F_1 J \subseteq F_1 \cap J^2$, получим, что $J^2 = F_1 \cap J^2 + J^3$. Поскольку J^2/J^3 конечно порожден, то существует конечно порожденный правый идеал F_2, лежащий в $F_1 \cap J^2$, такой, что $J^2 = F_2 + J^3$. Рассуждая далее по индукции, установим существование последовательности конечно порожденных правых идеалов

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_m \supseteq \ldots,$$

таких, что F_n порождает J^n по модулю J^{n+1}. Так как R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов, то $F_n = F_{n+1}$ для некоторого n, откуда $J^n = J^{n+1}$. Но кольцо R совершенно слева, в частности, это левое B-кольцо (22.8), и поэтому $M = JM$ для некоторого левого R-модуля M тогда и только тогда, когда $M = 0$. Таким образом, $J^n = 0$. Теперь из (a) следует, что R_R имеет композиционный ряд (ср. 18.12—18.13), поэтому R артиново справа. □

23.20. Предложение (Ософская [66b]). *Пусть* ${}_BU_A$ — *контекст двойственности и* $J = \text{rad}\, A$. *Тогда*

(a) MJ^n/MJ^{n+1} — *полупростой модуль конечной длины для любого U-рефлексивного модуля M из* mod-A *и всех* $n \geqslant 0$.

(b) *Если A совершенно слева или справа, то A артиново справа.*

(c) *В этом случае U имеет конечную длину как A-модуль и как B-модуль и B артиново слева.*

Доказательство. Пусть $J = \text{rad}\, A$. По 23.16(a) подкатегория U_A-рефлексивных модулей содержит fin.gen.mod-A. Так как U_A-Ref — класс Серра, то точность последовательности

$$0 \to MJ/MJ^2 \to M/MJ^2 \to M/MJ \to 0$$

влечет за собой U-рефлексивность модулей M/MJ и MJ/MJ^2, если U-рефлексивен модуль M. Ввиду 23.18 кольцо A полусовершенно и потому M/MJ и MJ/MJ^2 — полупростые модули. Так как никакая бесконечная прямая сумма ненулевых модулей не является U-рефлексивной [1]), то отсюда следует, что M/MJ, MJ/MJ^2, а с ними и M/MJ^2 имеют конечную длину. По индукции конечную длину имеет и модуль MJ^n/MJ^{n+1} для каждого n.

(b) Полагая $M = J$ и применяя (a), получим, что J/J^2 — конечно порожденный правый A-модуль. Теперь если A совершенно слева, то лемма 23.19(b) показывает, что A артиново справа. Если же A совершенно справа, то A — правое B-кольцо и, следовательно, по 18.3(b) и (c) rad $M = MJ$ — косущественный подмодуль для любого модуля M. Тогда, если M U-рефлексивен, то M/MJ конечно порожден ввиду (a), т. е. $M = F + MJ$ для некоторого конечно порожденного правого подмодуля F модуля M, и из косущественности подмодуля MJ вытекает, что $M = F$, т. е. M конечно порожден. Поскольку каждый подмодуль U-рефлексивного модуля U-рефлексивен, отсюда следует, что U_A-Ref состоит из нётеровых модулей. В частности, A нётерово справа. Так как A совершенно справа, то J — ниль-идеал и, следовательно, по теореме 9.17 Левицкого J нильпотентен. Тогда теорема Гопкинса и Левицкого 18.13 показывает, что A артиново справа.

[1]) См. 23.17 (1).— *Прим. перев.*

(c) Поскольку U U_A-рефлексивен, то (a) и тот факт, что в силу (b) $J^n = 0$, показывают, что U имеет конечную длину в mod-A. Далее, из U-двойственности следует, что $B = \text{Hom}_A(U, U)$ имеет конечную длину в B-mod, т. е. B артиново слева. Теперь по симметрии U имеет конечную длину в B-mod. □

Замечание. Доказанное предложение показывает, что не всякое (полу)совершенное кольцо обладает контекстом двойственности.

Пусть I — правый идеал кольца A и U — правый A-модуль. Тогда U называется **I-полным**, если каждый A-гомоморфизм f: $I \to U$ определяется некоторым элементом $m \in U$, т. е.

$$f(x) = mx \quad \forall x \in I.$$

Иначе говоря, последовательность

$$\text{Hom}_A(A, U) \to \text{Hom}_A(I, U) \to 0$$

точна. По 3.41 модуль U инъективен тогда и только тогда, когда он I-полон для всех правых идеалов I кольца A.

Рассмотрим условия (a), (b), (c) и (d):

(a) U — *I-полный модуль для каждого правого идеала* I (критерий Бэра 3.41).

(b) $\text{ann}_U(I \cap J) = \text{ann}_U I + \text{ann}_U J$ *для всех правых идеалов I и J.*

(c) $\text{ann}_U \text{ann}_A S = US$ *для каждого левого идеала S кольца A, где* $\text{ann}_A S = S^{\perp}$.

(d) *Если* $B = \text{End}\, U_A$, *то* $Y = \text{ann}_U \text{ann}_A Y$ *для каждого B-подмодуля Y модуля U.*

Если x = a, b, c или d, то через (x*) обозначим условие (x), в котором все участвующие подмодули и односторонние идеалы конечно порождены, а через (x**) — условие, получающееся из (x) тем же способом, что и (x*), но с заменой всех подмодулей и односторонних идеалов на циклические и главные соответственно. Например, (d*) утверждает, что $Y = \text{ann}_U \text{ann}_A Y$ для каждого конечно порожденного B-подмодуля Y модуля U.

23.21. Предложение (Икеда — Накаяма [54]). *Имеют место следующие импликации:*

23.21.1. (a**) $\Leftrightarrow$ (c**).

23.21.2. (a*) $\Leftrightarrow$ ((b*) *и* (c**)).

23.21.3. (a) $\Rightarrow$ (b), (c*) *и* (d*).

Доказательство. Пусть ${}^{\perp}I = \text{ann}_U I$ и $I^{\perp} = \text{ann}_A I$ для любого подмножества $I \subseteq A$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Ясно, что ${}^\perp(I_1 \cap I_2) \supseteq {}^\perp I_1 + {}^\perp I_2$. Пусть $z \in {}^\perp(I_1 \cap I_2)$. Если $a \in U$, то отображения

$$\psi_1\colon x_1 \mapsto ax_1, \qquad x_1 \in I_1,$$
$$\psi_2\colon x_2 \mapsto (a+z)x_2, \qquad x_2 \in I_2,$$

являются гомоморфизмами $\psi_i\colon I_i \to U$, $i = 1, 2$. Поскольку $\psi_1 = \psi_2$ на $I_1 \cap I_2$, то

$$\psi\colon x_1 + x_2 \mapsto \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2), \quad x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2,$$

есть гомоморфизм из $I_1 + I_2$ в U. По условию (a) существует $m \in U$, такой, что $\psi(x) = mx$ для всех $x \in I_1 + I_2$. Тогда, учитывая, что

$$ax_1 = mx_1,\ (a+z)x_2 = mx_2 \text{ для всех } x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2,$$

получаем, что $u = a - m \in {}^\perp I_1$, $v = a + z - m \in {}^\perp I_2$. Но тогда $z = v - u \in {}^\perp I_1 + {}^\perp I_2$. Итак, ${}^\perp(I_1 \cap I_2) = {}^\perp I_1 + {}^\perp I_2$, т. е. справедливо (b). Это доказательство показывает также, что (a*) $\Rightarrow$ (b*). Кроме того, импликация (a) $\Rightarrow$ (d*) — частный случай предложений 19.10(a), в то время как равносильность условий (a**) и (c**) фактически была установлена в 3.44.

((b*) и (c**)) $\Rightarrow$ (a*). Пусть $I = x_1A + \ldots + x_nA$ — произвольный конечно порожденный правый идеал кольца A и $f\colon I \to M$ — гомоморфизм. Эквивалентность (c**) $\Leftrightarrow$ (a**) показывает, что U I-полон для $n = 1$, и, рассуждая по индукции, мы можем предположить, что U I_1-полон, где $I_1 = x_1A + \ldots + x_{n-1}A$. Обозначим через f_i ограничение гомоморфизма f на I_i, $i = 1, 2$, где $I_2 = x_nA$. Так как U является I_i-полным, $i = 1, 2$ (в силу (a**) и по предположению индукции), то существуют $m_i \in U$, такие, что $f_i(x) = m_i(x)$ для всех $x \in I_i$, $i = 1, 2$. Ясно, что $m_1 - m_2 \in {}^\perp(I_1 \cap I_2)$, поскольку $f_1 = f_2 = f$ на $I_1 \cap I_2$. Но по условию (b*) ${}^\perp(I_1 \cap I_2) = {}^\perp I_1 + {}^\perp I_2$, следовательно, существуют $b_i \in {}^\perp I_i$, такие, что $m_1 - m_2 = b_1 - b_2$. Тогда $m_1 - b_1 = m_2 - b_2$; обозначим этот элемент через m. Если $w = w_1 + w_2 \in I_1 + I_2 = I$, $w_1 \in I_1$, $w_2 \in I_2$, то $mw_i = m_iw_i$, $i = 1, 2$, так что для всех $w \in I$ имеем

$$mw = m_1w_1 + m_2w_2 = f_1(w_1) + f_2(w_2) = f(w).$$

Таким образом, U есть I-полный модуль и 23.21.2 доказано.

Наконец, докажем импликацию (a) $\Rightarrow$ (c*). Для этого воспользуемся уже установленными импликациями (a) $\Rightarrow$ (b) и (a) $\Rightarrow$ (c**).

Если элементы $x_1, \ldots, x_n$ порождают левый идеал S, то

$$\operatorname{ann}_U \operatorname{ann}_A S = \operatorname{ann}_U \Big(\bigcap_{i=1}^n \operatorname{ann}_A x_i\Big) = \sum_{i=1}^n \operatorname{ann}_U \operatorname{ann}_A x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n \operatorname{ann}_U \operatorname{ann}_A (Ax_i) = \sum_{i=1}^n U(Ax_i) =$$
$$= U\Big(\sum_{i=1}^n Ax_i\Big) = US. \ \square$$

23.22. Следствие. *Если каждый правый идеал кольца A конечно порожден, то любое из следующих условий на R-модуль M вытекает из двух остальных.*

(a) *M инъективен.*

(b) $\operatorname{ann}_M I + \operatorname{ann}_M J = \operatorname{ann}_M (I \cap J)$ *для любых правых идеалов I и J.*

(c) $\operatorname{ann}_M \operatorname{ann}_R a = Ma$ *для каждого $a \in A$.* $\square$

23.23. Следствие. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль, B канонически изоморфно* $\operatorname{End} U_A$, *а θ_A и η_A — такие отображения:*

$$\theta = \theta_A = \left\{ \begin{array}{l} \text{правые идеалы кольца } A \to B\text{-подмодули модуля } U \\ \qquad\qquad I \mapsto {}^\perp I = \operatorname{ann}_U I, \end{array} \right.$$

$$\eta = \eta_A = \left\{ \begin{array}{l} B\text{-подмодули модуля } U \to \text{правые идеалы кольца } A \\ \qquad\qquad Y \mapsto Y^\perp = \operatorname{ann}_A Y. \end{array} \right.$$

(a) *Если U — кообразующий в* mod-A, *то θ инъективно, η сюръективно и $\eta\theta = 1_A$.*

(b) *Если U квазиинъективен в* mod-A, *то η индуцирует инъективное отображение на подмножестве конечно порожденных B-подмодулей модуля U.*

(c) *Если U_A — инъективный кообразующий и либо A артиново справа, либо U — нётеров B-модуль, то θ и η биективны и $\theta = \eta^{-1}$.*

Доказательство. (a) есть не что иное, как 23.13, а (b) — это 19.10(a).

(c) Поскольку в силу (a) и (b) η биективно на конечно порожденных подмодулях, то, если A артиново справа, получаем, что ${}_BU$ удовлетворяет условию максимальности для конечно порожденных подмодулей, и, следовательно, это нётеров модуль. Поэтому каждый его подмодуль конечно порожден, η биективно и $\theta = \eta^{-1}$. $\square$

Если θ_A и η_A являются биекциями, то мы говорим, что ${}_BU_A$ удовлетворяет **аннуляторным условиям** относительно A. Если ${}_BU_A$ удовлетворяет этим условиям относительно A и B, то мы говорим, что U удовлетворяет (B, A)-**аннуляторным условиям.**

23.24. Лемма. *Пусть кольцо A нётерово справа и U есть (B, A)-бимодуль. Если ${}_BU$ инъективен в B-mod и A U-рефлексивен, то каждый конечно порожденный правый A-модуль U-рефлексивен.*

Доказательство. Функтор $T = h_{U_A}$: mod-$A \rightsquigarrow B$-mod точен слева, а $S = h_{{}_BU}$: B-mod $\rightsquigarrow$ mod-A точен, поэтому h_U^2: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-A точен справа. Теперь если $A^n \to X \to 0$ — точная последовательность, то, используя рефлексивность модуля A_A, получим, что точна последовательность $A^n \to X^{**} \to 0$. Итак, h_U^2 индуцирует функтор

$$h_U^2\colon \text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.mod-}A = \mathcal{S}_A.$$

Поскольку кольцо A нётерово справа, то $\mathcal{S}_A$ — абелева категория. Теперь, учитывая, что $\pi_U(A)\colon A \to h_U^2(A)$ — эквивалентность, и применяя предложение 23.27, получим, что $\pi_U\colon 1_{\mathcal{S}_A} \to h_U^2$ — естественная эквивалентность функторов. □

23.25. Теорема (Морита [58], Адзумая [59]). *Пусть кольцо A артиново справа и U — произвольный (B, A)-бимодуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *${}_BU_A$ — контекст двойственности.*

(2) *U является конечно порожденным инъективным кообразующим в категориях* mod-A *и* B-mod, *а A и B U-рефлексивны.*

(3) *Кольцо B артиново слева и каждый конечно порожденный модуль категорий* mod-A *и* B-mod *U-рефлексивен.*

(4) (a) *U_A и ${}_BU$ — точные модули.*

(b) *Каждый простой модуль V в* mod-A *или в* B-mod *изоморфен своему U-бидуальному модулю V^{**}.*

(c) *B артиново слева.*

(5) (a) *U_A и ${}_BU$ — точные модули.*

(b) *U-дуальный к каждому простому объекту в* mod-A *или* B-mod *прост.*

(c) *U_A конечно порожден.*

(6) (a) *Каждый правый идеал I кольца A и каждый B-подмодуль W модуля U удовлетворяют аннуляторным условиям*

$$I = \operatorname{ann}_A \operatorname{ann}_U I,$$

$$W = \operatorname{ann}_U \operatorname{ann}_A W.$$

(b) *Каждый левый идеал J кольца B и каждый A-подмодуль V модуля U удовлетворяют аннуляторным условиям*

$$J = \operatorname{ann}_B \operatorname{ann}_U J,$$

$$V = \operatorname{ann}_U \operatorname{ann}_B V.$$

(7) (a) *B есть U-рефлексивный B-модуль, т. е. канонический гомоморфизм колец $B \to \operatorname{End} U_A$ есть изоморфизм.*

(b) *U_A — конечно порожденный инъективный кообразующий.*

(8) *Существует U-двойственность*

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}B\text{-mod}.$$

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Учитывая определение контекста двойственности (см. 23.16), нам нужно лишь показать, что условие (1) влечет за собой конечную порожденность модуля U с обеих сторон. Поскольку кольцо A артиново справа, это вытекает из 23.20(c).

(1) $\Rightarrow$ (3). Кольцо B артиново слева по 23.20(c). Остальная часть условия (3) имеет место по определению контекста двойственности (23.16).

(3) $\Rightarrow$ (4) тривиально, если учесть 23.2(b).

(4) $\Rightarrow$ (5). Пусть X — простой A-модуль. Тогда, если $\operatorname{ann}_X X^* = X$, то $X^* = 0$, откуда $X^{**} = 0$, и поэтому X^{**} не изоморфен X. Противоречие показывает, что $\operatorname{ann}_X X^* = 0$. Отсюда следует, что $\pi_U\colon X \to X^{**}$ — мономорфизм, а так как X^{**} — простой модуль, то π_U — изоморфизм. Поэтому каждый простой модуль (в mod-A или B-mod) U-рефлексивен. В силу того что кольцо B артиново слева, любой собственный B-подмодуль Y модуля X^* содержится в максимальном подмодуле Y_1 (B является B-кольцом в терминологии гл. 22). Пусть $X_1 = \operatorname{ann}_X Y_1$. Тогда по предложению 23.12 $(X^*/Y_1)^* \approx X_1$. Следовательно, $X_1 \neq 0$, так как по доказанному X^*/Y_1 U-рефлексивен. Но тогда $X_1 = X$, откуда $Y_1 = 0$. Это доказывает, что X^* — простой модуль. По симметрии дуальный к простому B-модулю также прост.

Покажем теперь, что U_A конечно порожден. Если $X_1 \subset X_2$ — подмодули модуля U_A, такие, что $V = X_2/X_1$ прост, то $V^* = (X_2/X_1)^* \neq 0$, и поэтому $X_1^* \neq X_2^*$. Но $U_A^* \approx B$ [1]), поэтому

---

[1]) Установим это, показав, что B есть U-рефлексивный модуль (см. 23.2(b)). Рассмотрим композиционный ряд $0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n = B$ модуля ${}_BB$ и докажем по индукции, что если I_k U-рефлексивен, то U-рефлексивен и модуль I_{k+1}. Через V обозначим простой B-модуль I_{k+1}/I_k. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_U(I_k)"'] & I_{k+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi_U(I_{k+1})"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\pi_U(V)"] & 0 \\
 & I_k^{**} \arrow[r, "i^{**}"] & I_{k+1}^{**} \arrow[r, "j^{**}"] & V^{**} &
\end{tikzcd}$$

с точной верхней строкой $\pi_U(I_k)$ и $\pi_U(V)$ — изоморфизмы (по условию и предположению индукции), а $\pi_U(I_{k+1})$ — мономорфизм в силу 23.2(a) и 23.3. Отсюда вытекает, что i^{**} — мономорфизм, j^{**} — эпиморфизм, а так как V^{**} — простой модуль, то I_k^{**} — максимальный подмодуль в I_{k+1}^{**}. Но $\operatorname{im} \pi_U(I_{k+1}) \supsetneqq \operatorname{im} \pi_U(I_k) = I_k^{**}$, откуда $\operatorname{im} \pi_U(I_{k+1}) = I_{k+1}^{**}$. Итак, $\pi_U(I_{k+1})$ — изоморфизм, т. е. I_{k+1} есть U-рефлексивный модуль. — *Прим. перев.*

точность последовательности

$$0 \to X_i \to U$$

влечет за собой

$$X_i^* \approx B/\operatorname{ann}_B X_i,$$

так что $\operatorname{ann}_B X_2 \subset \operatorname{ann}_B X_1$. Ввиду того что B имеет композиционный ряд, отсюда следует, что U_A также имеет композиционный ряд.

(5) $\Rightarrow$ (3). Если $V \in$ mod-A — простой модуль, то V^* и V^{**} — простые модули. Так же как и при доказательстве импликации (4) $\Rightarrow$ (5), отсюда следует, что π_U: $V \to V^{**}$ — изоморфизм, так что каждый простой модуль U-рефлексивен. Пусть теперь X — конечно порожденный A-модуль. Так как A артиново справа, то X имеет композиционный ряд длины $n \geqslant 1$. Сделаем следующее предположение индукции:

Если X_1 имеет длину, строго меньшую n, то X_1 U-рефлексивен, и если f: $X_1 \to X$ — ненулевой мономорфизм, где X имеет длину, не превосходящую n, то $h_U^2(f) \neq 0$. Оно, очевидно, выполняется при $n = 1$.

Сначала заметим, что $\pi_U(X)$ не может быть нулевым морфизмом. Пусть t: $X \to V$ — эпиморфизм, где V — простой модуль. Тогда квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_U(X)"] \arrow[d, "t"'] & X^{**} \arrow[d, "h^2(t)"] \\ V \arrow[r, "\pi_U(V)"'] & V^{**} \end{tikzcd}$$

коммутативен, и поэтому с учетом того, что $\pi_U(V)$ — изоморфизм, из равенства $\pi_U(V)t = h^2(t)\pi_U(X) = 0$ вытекало бы, что $t = 0$, и мы бы пришли к противоречию.

Пусть теперь $X_1 = \ker \pi_U(X)$ и f: $X_1 \to X$ — включение. Тогда

$$h_U^2(f)\,\pi_U(X_1) = \pi_U(X)\,f = 0.$$

Так как по доказанному $X_1 = \ker \pi_U(X) \neq X$, то длина модуля X_1 строго меньше n, так что $\pi_U(X_1)$ — эквивалентность, откуда следует, что $h_U^2(f) = 0$. Но тогда по предположению индукции $f = 0$, и это доказывает, что $\pi_U(X)$ — мономорфизм. Пусть теперь X_0 — простой подмодуль. Тогда точность последовательности

$$0 \to X_0 \to X \to X/X_0 \to 0$$

влечет за собой точность последовательности

$$0 \to X_0^{**} \to X^{**} \to (X/X_0)^{**},$$

так что длина модуля X^{**}/X_0^{**} не превосходит длины модуля $(X/X_0)^{**}$. Так как X_0 и X/X_0 U-рефлексивны, отсюда вытекает, что длина X^{**} не превосходит n. Учитывая теперь, что длина модуля X равна n и что $\pi_U(X)$: $X \to X^{**}$ — мономорфизм, получим, что $\operatorname{im} \pi_U(X) = X^{**}$. Поэтому $\pi_U(X)$ — изоморфизм. Итак, каждый конечно порожденный модуль в mod-A U-рефлексивен [1].

(3) $\Rightarrow$ (2). Поскольку (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5), U_A конечно порожден. Так как A_A имеет конечную длину, то $A^* \approx {}_BU$ также имеет конечную длину [2] и, в частности, конечно порожден. Итак, класс Серра $\mathscr{S}_A =$ fin.gen.mod-A содержит A и U и лежит в U_A-Ref. Симметричным свойством обладает класс Серра ${}_B\mathscr{S}$. Теперь по доказательству импликации (c) $\Rightarrow$ (b) в теореме 23.16 получаем, что U — инъективный кообразующий в mod-A и B-mod.

(2) $\Rightarrow$ (6). Так как кольцо B артиново слева, а модуль ${}_BU$ конечно порожден, то ${}_BU$ нётеров. Аналогично U_A нётеров. Но если ${}_BU$ и U_A нётеровы, то импликация (2) $\Rightarrow$ (6) есть не что иное, как импликация (a) $\Rightarrow$ (c*), установленная в 23.21.3.

(3) $\Rightarrow$ (8). Если выполнено (3), то U_A и ${}_BU$ конечно порождены, и потому h_U индуцирует требуемую двойственность [3].

(8) $\Rightarrow$ (3). При доказательстве этой импликации мы не будем заранее предполагать, что кольцо A артиново справа, а ограничимся лишь предположением, что A нётерово справа. (Тогда правая артиновость будет вытекать из (8)). Ясно, что правая нётеровость кольца A равносильна абелевости полной подкатегории fin.gen.mod-A. Поскольку категория, дуальная абелевой категории, также абелева, отсюда следует, что кольцо B нётерово слева. Доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (b) теоремы 23.16 показывает, что U — инъективный кообразующий как A-модуль и как B-модуль. Кроме того, модули U_A и ${}_BU$ конечно порождены. Далее, так как U есть (B, A)-бимодуль, то ${}^{\perp}I = \operatorname{ann}_U I$ — левый B-модуль для любого правого идеала I кольца A. Следовательно, соответствие $I \to {}^{\perp}I$ определяет отображение θ_A из структуры

[1] Чтобы доказать справедливость остальных утверждений условия (3), заметим сначала, что, поскольку модули, U-дуальные к простым модулям, просты, то по индукции легко показать, что модуль, U-дуальный к модулю конечной длины, имеет конечную длину. В частности, B-модуль U_A^* имеет конечную длину, откуда, учитывая, что U — точный B-модуль и, следовательно, $\pi_U(B)$: $B \to B^{**} = U_A^*$ — мономорфизм (см. 23.2(a)), заключаем, что ${}_BB$ имеет конечную длину. Таким образом, B артиново слева. Теперь рассуждение, аналогичное приведенному в доказательстве импликации (5) $\Rightarrow$ (3), показывает, что каждый конечно порожденный модуль в B-mod U-рефлексивен. — *Прим. перев.*

[2] См. примечание 1. — *Прим. перев.*

[3] Поскольку U-дуальный к конечно порожденному модулю конечно порожден. См. примечание 1. — *Прим. перев.*

правых идеалов кольца A в структуру левых B-подмодулей модуля U. Это отображение инъективно ввиду 23.13 и обращает порядок. Поскольку модуль $_BU$ конечно порожден и, следовательно, нётеров, отсюда вытекает правая артиновость кольца A. Симметрично доказывается, что кольцо B артиново слева. Осталось только показать, что A_A и $_BB$ суть U-рефлексивные модули. Из определения U-двойственности следует, что имеет место изоморфизм правых A-модулей φ: $A \approx \mathrm{Hom}_B(U, U)$. Кроме того, поскольку U — кообразующий в mod-A, то модуль A_A U-полурефлексивен (23.4), т. е. $\pi_U(A)$: $A \to \mathrm{Hom}_B(U, U)$ — мономорфизм. Но тогда $\varphi^{-1}\cdot\pi_U(A)$: $A_A \to A_A$ — мономорфизм артинова модуля в себя и потому является изоморфизмом. Следовательно, и $\pi_U(A)$ — изоморфизм. Итак, модуль A_A U-рефлексивен, а симметричное рассуждение дает U-рефлексивность модуля $_BB$.

(7) $\Rightarrow$ (5). Поскольку U_A — кообразующий, U_A точен. Так как $B \approx \mathrm{End}\, U_A$, то $_BU$ также точен.

Учитывая правую артиновость кольца A, по 23.23(с) получим, что отображение

$$\eta\colon B\text{-подмодули модуля } U \to \text{правые идеалы кольца } A$$

биективно. Поэтому $_BU$ имеет конечную длину. Поскольку для некоторого n существует точная последовательность $A^n \to U \to 0$, а $A^* \approx U$, $U^* \approx B$, то, применяя функтор $(\ )^*$, получим точную последовательность $0 \to B \to U^n$, откуда вытекает левая артиновость кольца B. Теперь мы можем применить лемму 23.24 [1]) и заключить, что каждый конечно порожденный левый B-модуль U-рефлексивен. В частности, каждый простой левый B-модуль U-рефлексивен и доказательство импликации (4) $\Rightarrow$ (5) показывает, что U-дуальный к каждому простому B-модулю прост.

Нам осталось показать, что U-дуальный к каждому простому A-модулю V прост. Так как U_A — инъективный кообразующий, то V вкладывается в U. Таким образом, U_A содержит экземпляр каждого простого A-модуля. Каждый простой A-модуль изоморфен модулю eA/eJ, где e — неразложимый идемпотент, а $J = \mathrm{rad}\, A$. Пусть $e_1, \ldots, e_t$ — семейство неразложимых идемпотентов, соответствующее полному набору $V = V_1 \approx e_1A/e_1J, \ldots, V_t = e_tA/e_tJ$ неизоморфных простых A-модулей. Так как $B \approx \mathrm{End}\, U_A$, то неразложимые прямые слагаемые модуля U_A соответствуют неразложимым идемпотентам кольца B. Следовательно, если $\hat{V}_i$ — инъективная оболочка модуля V_i, лежащая в U_A, то в кольце B найдутся попарно ортогональные идемпотенты $e'_1, \ldots, e'_t$, где каждый идемпотент e'_i соответствует проекции $U \to \hat{V}_i$. Так как U_A инъективен, то по 19.27

$$N = \mathrm{rad}\, B = \{b \mid \ker b \text{ — существенный подмодуль}\}.$$

[1]) Точнее, ее симметричный вариант.— *Прим. перев.*

Отсюда, поскольку цоколь $\mathrm{soc}(U)$ модуля U_A — существенный подмодуль, получаем

$$N = \mathrm{rad}\, B = \mathrm{ann}_B\, \mathrm{soc}(U).$$

Так как

$$\mathrm{ann}_B(e'_i\, \mathrm{soc}(U)) = \{b \in B \mid be'_i \in N\} = B(1 - e'_i) + Ne'_i,$$

то инъективность модуля U_A^* и изоморфизм $U_A^* \approx B$ дают

$$(e'_i\, \mathrm{soc}(U))^* \approx B/\mathrm{ann}_B(e'_i\, \mathrm{soc}(U)) \approx Be'_i/Ne'_i.$$

Поскольку

$$e'_i\, \mathrm{soc}(U) = \mathrm{soc}(e'_iU) = \mathrm{soc}(\hat{V}_i) = V_i \approx e_iA/e_iJ,$$

то $V^* \approx Be'_1/Ne'_1$. Так как e'_1 — неразложимый идемпотент артинова слева кольца B, то Be'_1/Ne'_1 — простой модуль. Это завершает доказательство того, что U-дуальный к каждому простому A-модулю прост.

(2) $\Rightarrow$ (7). (7) — это часть условия (2).

(6) $\Rightarrow$ (5). Структурный антиизоморфизм

$$\begin{cases} \text{правые идеалы кольца } A \to B\text{-подмодули модуля } U \\ \qquad\qquad I \mapsto \mathrm{ann}_U I, \end{cases}$$

существующий по условию (а), влечет за собой точность модуля U_A. Кроме того, $\mathrm{ann}_U I$ — минимальный левый B-подмодуль в U тогда и только тогда, когда I — максимальный правый идеал. Таким образом, если I — максимальный правый идеал, то из изоморфизма

$$(A/I)^* = \mathrm{Hom}_A(A/I, U) \approx \mathrm{ann}_U I$$

следует, что U-дуальный к каждому простому правому A-модулю прост. Это завершает доказательство части условий 5(а) и 5(b), касающейся B-модулей. Другая их часть устанавливается по симметрии [1]). $\square$

[1] Осталось еще доказать справедливость условия 5(с). Поскольку кольцо A артиново справа, 5(с) равносильно конечности длины полупростого модуля U/UJ. Предположим, что это не так. Тогда не имеет конечной длины однородная компонента $[\bar{S}]$ модуля $\bar{U} = U/UJ$, порожденная некоторым простым модулем S. Итак, $\bar{U} = [\bar{S}] \oplus \bar{T}$ для некоторого подмодуля $\bar{T}$ из $\bar{U}$, $[\bar{S}] = \sum_{i\in I} \oplus S_i$, где $S_i \approx S$ и множество индексов I бесконечно. Обозначим через S_i и T полные прообразы в U модулей $\bar{S}_i$ и $\bar{T}$ соответственно. Тогда $U = \sum_{i\in I} S_i + T$. Для каждого $j \in I$ положим $S'_j = \sum_{i\in I,\, i\neq j} S_i + T$. Легко видеть, что $\bigcap_{j\in I} S'_j = T$, откуда в силу аннуляторных условий получаем, что $\mathrm{ann}_B T = \sum_{i\in I} \mathrm{ann}_B S'_j$. Пусть $x \in \mathrm{ann}_B T$. Тогда $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}$, где каждый x_{i_l}

23.26. Упражнение (Морита [58]). (a) Показать, что любое коммутативное артиново кольцо имеет конечно порожденный инъективный кообразующий E и, следовательно, E-двойственность.

(b) Пусть R — локальное коммутативное артиново кольцо и E — инъективная оболочка модуля $R/\text{rad}\,R$. Тогда R канонически изоморфно $\text{End}\,E_R$, т. е. существует E-двойственность категории fin.gen.mod-R в себя, называемая инволюцией (ср. упр. 13 в конце главы).

(c) (Фуллер [69a]) Пусть кольцо R артиново справа, e и f — такие его идемпотенты, что eR — инъективный R-модуль и множества классов эквивалентности простых модулей, лежащих в $\text{soc}(eR)$ и $\text{top}(fR)$ соответственно, совпадают. Тогда ${}_{eRe}eRf_{fRf}$ является контекстом двойственности.

(Достаточно рассмотреть случай, когда eR — неразложимый инъективный модуль. В этом случае $\text{top}(fR) = \text{soc}(eR)$. В любом случае eRf является инъективным кообразующим как в eRe-mod, так и в mod-fRf. Ср. упр. 8 в конце главы.)

23.27. Предложение. *Пусть C и D — абелевы категории, а T и T' — точные справа аддитивные функторы из C в D. Предположим, что C имеет образующий U и каждый объект категории C конечно порожден относительно U* [1]*). Если h: $T \to T'$ — естественное преобразование, такое, что $h(U)$ — эквивалентность, то h — естественная эквивалентность функторов.*

Доказательство. Аддитивные функторы сохраняют конечные копроизведения. Поскольку функторы T и T' сохраняют коядра (как функторы, точные справа), то, как и в доказательстве предложения 5.37, 5-лемма показывает, что h — эквивалентность функторов. □

23.28. Упражнение. Пусть A и B — кольца. Если T: fin.gen.mod-$A \rightsquigarrow$ fin.gen.B-mod — двойственность, то функ-

---

лежит в $\text{ann}_B S'_{i_l}$. Если $i \in I - \{i_1, \ldots, i_k\}$, то $S_i \subseteq S'_{i_l}$, $l = 1, \ldots, k$, откуда следует, что $xS_i = 0$. Таким образом, поскольку множество I бесконечно, для любого $x \in \text{ann}_B T$ найдется $i \in I$, такой, что $xS_i = 0$.

Рассмотрим теперь в U подмодуль U', являющийся ядром сквозного A-гомоморфизма $U \to U/T \approx \sum_{i \in I} \oplus \overline{S}_i \to \overline{S}$, где правый гомоморфизм индуцирован изоморфизмами $\overline{S}_i \approx \overline{S}$. По определению U' — максимальный подмодуль в U и $U' \supset T$. В силу 6(b) получаем, что $\text{ann}_B U' \subset \text{ann}_B T$ и $\text{ann}_B U'$ — минимальный левый и, в частности, главный левый идеал кольца B, т. е. $\text{ann}_B U' = Bx$, где $x \in B$. По доказанному найдется $i \in I$, такой, что $xS_i = 0$, откуда $U' = \text{ann}_U Bx \supset S_i$. С другой стороны, из определения U' ясно, что U' не содержит S_i ни для какого $i \in I$. Полученное противоречие завершает доказательство конечной порожденности модуля U_A. —*Прим. перев.*

[1]) См. определение в 3.37.4(b) (**1**, стр. 202).— *Прим. перев.*

тор T представим, т. е. $T \approx h_U$, где $U = TA$ есть (B, A)-бимодуль. Кроме того, два контравариантных функтора h_{U_i}: fin.gen.mod-$A \rightsquigarrow$ fin.gen.B-mod, $i = 1, 2$, естественно эквивалентны тогда и только тогда, когда $U_1 \approx U_2$ как (B, A)-бимодули.

23.29. Теорема (Морита [58]). *Пусть A и B — кольца, а $\mathscr{S}_A$ и ${}_B\mathscr{S}$ — полные подкатегории категорий* mod-A *и* B-mod *соответственно, такие, что*: (i) *$\mathscr{S}_A$ содержит A, ${}_B\mathscr{S}$ содержит B и* (ii) *каждый A-модуль (соотв. B-модуль), изоморфный модулю из $\mathscr{S}_A$ (соотв. из ${}_B\mathscr{S}$), сам принадлежит $\mathscr{S}_A$ (соотв. ${}_B\mathscr{S}$). Тогда любая двойственность*

$$\mathscr{S}_A \underset{S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} {}_B\mathscr{S}$$

эквивалентна U-двойственности, т. е. $U = TA$ определяет U-двойственность и существуют естественные эквивалентности функторов

$$T \approx \text{Hom}_A(\ \ , U), \qquad S \approx \text{Hom}_B(\ \ , U).$$

Кроме того, все модули из подкатегорий $\mathscr{S}_A$ и ${}_B\mathscr{S}$ U-рефлексивны.

Доказательство (следуя Кону [66, стр. 56]). Пусть S — двойственность, обратная к T, т. е. $ST \overset{\eta}{\approx} 1_{\mathscr{S}_A}$ и $TS \overset{\theta}{\approx} 1_{{}_B\mathscr{S}}$. Положим $V = SB$. Тогда V есть (B, A)-бимодуль и для каждого $X \in \mathscr{S}_A$ имеют место B-изоморфизмы

$$(*) \qquad TX \approx \text{Hom}_B(B, TX) \overset{S}{\approx} \text{Hom}_A(STX, SB) =$$
$$= \text{Hom}_A(STX, V) \overset{h_V(\eta(X))}{\approx} \text{Hom}_A(X, V).$$

Итак, для каждого $X \in \mathscr{S}_A$ левый B-модуль $\text{Hom}_A(X, V)$ изоморфен объекту TX, лежащему в ${}_B\mathscr{S}$; поэтому $\text{Hom}_A(X, V) \in {}_B\mathscr{S}$, т. е. $\text{Hom}_A(\ \ , V)$ индуцирует функтор $\mathscr{S}_A \rightsquigarrow {}_B\mathscr{S}$. Кроме того, поскольку все изоморфизмы в $(*)$ естественны по X, то $T \approx \text{Hom}_A(\ \ , V)$. Симметрично доказывается, что $S \approx \text{Hom}_B(\ \ , U)$, где $U = TA$ есть (B, A)-бимодуль. Полагая в $(*)$ X равным A и учитывая, что STA есть (A, A)-бимодуль, а $\eta(A)$: $STA \to A$ является (A, A)-изоморфизмом, получим последовательность (B, A)-изоморфизмов

$$U = TA \approx \text{Hom}_B(B, TA) \overset{S}{\approx} \text{Hom}_A(STA, V) \overset{h_V(\eta(A))}{\approx}$$
$$\approx \text{Hom}_A(A, V) \approx V.$$

Итак, U изоморфен V как (B, A)-бимодуль, что дает нам эквивалентности функторов

$$T \approx \mathrm{Hom}_A(\ \ , V) \approx \mathrm{Hom}_A(\ \ , U)$$

и

$$S \approx \mathrm{Hom}_B(\ \ , U) \approx \mathrm{Hom}_B(\ \ , V).$$

Нам осталось показать, что все модули из $\mathcal{S}_A$ и ${}_B\mathcal{S}$ U-рефлексивны. Теперь без потери общности мы можем предположить, что $U = V$, $T = \mathrm{Hom}_A(\ \ , U)$, $S = \mathrm{Hom}_B(\ \ , U)$, а η: $ST \approx 1_{\mathcal{S}_A}$ и θ: $TS \approx 1_{{}_B\mathcal{S}}$ — естественные эквивалентности функторов.

В ситуации X_A, ${}_BY_A$, ${}_BZ$ имеет место гомоморфизм,

$$\psi: X \otimes_A \mathrm{Hom}_B(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, Y), Z)$$

естественный по всем переменным, где

$$(f_1)\,\psi\,(x \otimes f_2) = (f_1(x))f_2$$

для всех $x \in X$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ и $f_2 \in \mathrm{Hom}_B(Y, Z)$. Когда $Y = U$ и $Z = U$, естественный гомоморфизм ψ определяет естественное преобразование функторов

$$t': \ \ \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(\ \ , U), U).$$

Теперь для любого $X \in \mathcal{S}_A$ естественная эквивалентность η: $ST \approx 1_{\mathcal{S}_A}$ влечет за собой изоморфизм $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, U), U) \approx X$ правых A-модулей, откуда, полагая $X = A$, получим изоморфизм правых A-модулей

$$g' = \eta(A): \quad \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A, U), U) \to A$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \arrow[r, "a_s \otimes 1"] \arrow[d, "t''(A)"'] & A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \arrow[d, "t''(A)"] \\
A \arrow[r, "a_s"'] & A
\end{tikzcd}$$

где $t''(A) = g' \cdot t'(A)$ — изоморфизм правых A-модулей (поскольку $t'(A)$ — изоморфизм), а a_s: $A \to A$ — левая гомотетия с коэффициентом a. Итак,

$$t''(A)[(a_s \otimes 1)(1 \otimes f)] = a_s[t''(A)(1 \otimes f)]$$

для всех $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_B(U, U)$. Обозначив произведение естественного изоморфизма

$$A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \approx \mathrm{Hom}_B(U, U)$$

и изоморфизма $t''(A)$ через $t(A)$, мы можем переписать предыдущее равенство таким образом:

$$t(A)(af) = at(A)(f),$$

т. е. $t(A)$ является изоморфизмом левых A-модулей. Следовательно, $t(A)$ есть (A, A)-бимодульный изоморфизм. Обозначим через g (A, A)-изоморфизм $t(A)^{-1}$,

$$g: \quad A \to \mathrm{Hom}_B(U, U).$$

По симметрии определим (B, B)-бимодульный изоморфизм

$$h: \quad B \to \mathrm{Hom}_A(U, U).$$

Пусть $e = g(1)$ и $f = h(1)$. Утверждается, что e и g суть (B, A)-изоморфизмы $U \to U$.

Сначала покажем, что A-гомоморфизм

$$t'(X): \quad X \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, U), U)$$

является изоморфизмом для любого $X \in \mathcal{S}_A$. Имеем

$$(f_2)t'(X)(x \otimes f_1) = (f_2(x))f_1$$

для всех $f_1 \in \mathrm{Hom}_B(U, U)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_A(X, U)$ и $x \in X$. Для того чтобы убедиться, что $t'(X)$ — изоморфизм, достаточно доказать, что изоморфизмом будет сквозной гомоморфизм

$$(**) \qquad X \approx X \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes g} X \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \xrightarrow{t'(X)} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, U), U).$$

Так как $X \in \mathcal{S}_A$, то естественная эквивалентность η: $ST \approx 1_{\mathcal{S}_A}$ определяет изоморфизм

$$\eta(X): \quad \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, U), U) \approx X.$$

Покажем, что $\eta(X)$ является обратным к гомоморфизму (**), т. е. что сквозной гомоморфизм

$$(***) \qquad X \approx X \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes g} X \otimes \mathrm{Hom}_B(U, U) \xrightarrow{t'(X)} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X, U), U) \overset{\eta(X)}{\approx} X$$

равен единице.

Заметим сначала, что поскольку

$$(A \approx A \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U)) = (A \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_B(U, U) \approx A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U))$$

и по определению $g = t(A)^{-1}$, то сквозной гомоморфизм

$$A \approx A \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(U, U) \xrightarrow{t'(A)} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A, U), U) \xrightarrow{g'} A$$

тождествен. Теперь, рассматривая для каждого $x \in X$ A-гомоморфизм f_x: $A \to X$, при котором 1 переходит в x, приходим к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
A \approx A \otimes_A A & \xrightarrow{1\otimes g} & A \otimes_A \operatorname{Hom}_B(U, U) & \xrightarrow{t'(A)} & \\
{\scriptstyle f_x}\downarrow \qquad \downarrow{\scriptstyle f_x\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_x\otimes 1} & & \\
X \approx X \otimes_A A & \xrightarrow{1\otimes g} & X \otimes_A \operatorname{Hom}_B(U, U) & \xrightarrow{t'(X)} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(A, U), U) & \overset{g'}{\approx} & A \\
\downarrow{\scriptstyle h_U^2(f_x)} & & \downarrow{\scriptstyle f_x} \\
\to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(X, U), U) & \approx & X
\end{array}$$

Поскольку гомоморфизм, определяемый верхней строкой, равен единице, отсюда получаем, что гомоморфизм $(***)$ переводит x в x. Следовательно, $(***)$ — тождественный гомоморфизм, и потому гомоморфизм $(**)$ является изоморфизмом.

Итак, $t'(X)$ — изоморфизм для любого $X \in \mathscr{S}_A$. В частности, поскольку $U = SB \in \mathscr{S}_A$, то $t'(U)$ является изоморфизмом, а вместе с ним изоморфизмом оказывается и сквозное отображение $U \to U$:

$$\begin{cases}
U \approx U \otimes_A A \xrightarrow{1\otimes g} U \otimes_A \operatorname{Hom}_B(U, U) \xrightarrow{t'(U)} \\
\qquad \to \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(U, U), U) \xrightarrow{h_U(h)} \operatorname{Hom}_B(B, U) \approx U \\
u \mapsto u \otimes 1 \mapsto u \otimes g \mapsto t'(U)(u \otimes g) \mapsto (fu)e.
\end{cases}$$

Отсюда следует, что f — мономорфизм, а e — эпиморфизм. Аналогично доказывается, что (B, A)-бимодульный гомоморфизм

$$\begin{cases} U \to U \\ u \mapsto f(ue) \end{cases}$$

является изоморфизмом, откуда вытекает, что f — эпиморфизм, а e — мономорфизм. Поэтому f и e — изоморфизмы. По определению f является A-гомоморфизмом. Мы проверим, что он также и B-гомоморфизм. Действительно, поскольку $f = h(1)$ и h: $B \to \operatorname{Hom}_A(U, U)$ есть (B, B)-изоморфизм, то

$$(****) \qquad fb = h(1)b = h(1\cdot b) = h(b) = h(b\cdot 1) = bh(1) = bf,$$

откуда

$$f(bu) = fb(u) = bf(u) = b(f(u))$$

для всех $b \in B$, $u \in U$, т. е. f — это B-гомоморфизм. Итак, f: $U \to U$ является (B, A)-изоморфизмом. Аналогично (B, A)-изо-

морфизмом будет отображение e: $U \to U$. Покажем теперь, что модуль A_A U-рефлексивен или (это эквивалентно ввиду 23.2) что канонический гомоморфизм $A \to \operatorname{End}_B(U)$ является изоморфизмом. Рассмотрим произведение (A, A)-бимодульного изоморфизма

$$g \begin{cases} A \to \operatorname{Hom}_B(U, U) = \operatorname{End}_B U \\ 1 \mapsto e \end{cases}$$

и (A, A)-изоморфизма $h_U(e^{-1})$. Мы получим (A, A)-бимодульный изоморфизм

$$h_U(e^{-1}) \circ g\colon \quad A \to \operatorname{End}_B(U),$$

для которого

$$h_U(e^{-1})g(1) = h_U(e^{-1})(e) = 1,$$

т. е. $h_U(e)^{-1} \circ g$ совпадает с каноническим гомоморфизмом $A \to \operatorname{End}_B(U)$. Следовательно, A_A есть U-рефлексивный модуль, т. е. отображение $\pi_U(A)$: $A \to h_U^2(A) = \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(A, U), U)$ — изоморфизм. Далее, если X — произвольный A-модуль из $\mathscr{S}_A$, то прямое вычисление показывает, что произведение изоморфизмов

$$X \approx X \otimes_A A \overset{1\otimes\pi_U(A)}{\approx} X \otimes_A \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(A, U), U) \approx$$

$$\approx X \otimes_A \operatorname{Hom}_B(U, U) \overset{t'(X)}{\approx} \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(X, U), U) = h_U^2(X)$$

равно $\pi_U(X)$. Таким образом, X есть U-рефлексивный модуль. Симметрично доказывается U-рефлексивность всех модулей из категории ${}_B\mathscr{S}$, и это завершает доказательство теоремы. □

Дуальный к свободному модулю

Для любого правого A-модуля M A-дуальный модуль $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ является левым A-модулем. Любой контравариантный функтор h_U превращает копроизведения в произведения (см. 1, 5.57). Если M — свободный правый A-модуль, изоморфный $A^{(I)}$ для некоторого множества I, то $M^* \approx A^I$. Последний модуль не обязательно свободен (например, $\mathbb{Z}^\omega$ не свободен). Тем не менее если M изоморфен A^n, где n — целое число, большее нуля, то изоморфизм $(A_A)^* \approx {}_AA$ показывает, что $M^* \approx A^n$ — свободный левый A-модуль.

23.30. Лемма о дуальном базисе для свободных модулей. *Пусть A — кольцо и n — натуральное число.*

(а) *Если M — свободный A-модуль, изоморфный A^n, то M рефлексивен и M^* — свободный левый A-модуль, изоморфный A^n.*

(b) *Если $x_1, \ldots, x_n$ — базис модуля M (соотв. M^*), то существует базис $y_1, \ldots, y_n$ модуля M^* (соотв. M), такой, что $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$ (δ — символ Кронекера) (соотв. $\langle y_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$), $i, j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Перед формулировкой леммы мы уже отметили, что M^* — свободный левый A-модуль, но это еще раз доказывается при доказательстве (b). Переходя к этому доказательству, заметим, что существуют элементы $y_1, \ldots, y_n \in M^*$, такие, что $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть $y = \sum_{j=1}^{n} r_j y_j$, где $r_1, \ldots, r_n \in A$, — элемент левого A-подмодуля S модуля M^*, порожденного элементами $y_1, \ldots, y_n$. Если $y = 0$, то $\langle x_i, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} r_j \delta_{ij} = r_i = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Это показывает, что S — свободный левый A-модуль с базисом $y_1, \ldots, y_n$. Пусть u — произвольный элемент из M^* и $r_i = \langle x_i, u\rangle$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $w = \sum_{j=1}^{n} r_j y_j \in S$. Поскольку $\langle x_i, u\rangle = \langle x_i, w\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, то $u = w$, из чего заключаем, что $M^* = S$. Это доказывает, что M^* — свободный левый A-модуль, изоморфный A^n[1]). Для любого $x \in M$ через x^{**} обозначим его образ при гомоморфизме $\pi_A(M)$: $M \to M^{**}$. Так как M полурефлексивен, то $x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}$ — различные элементы модуля M^{**} и

$$\langle x_i^{**}, y_j\rangle = \langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Применяя к левому A-модулю $N = M^*$ левый вариант только что доказанного утверждения, получим, что $N^* = M^{**}$ — свободный правый A-модуль с базисом $x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}$, так что $\pi_A(M)$: $M \to M^{**}$ — эпиморфизм и, следовательно, изоморфизм. Это завершает доказательство (a) и остается доказать утверждение из (b), заключенное в скобки. Если $u_1, \ldots, u_n$ — базис свободного левого A-модуля M^*, то по уже доказанной первой части утверждения (b) существует базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$ модуля $(M^*)^* = M^{**}$, такой, что $\langle v_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Так как M рефлексивен, существует $x_i \in M$, такой, что $x_i^{**} = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\langle x_i, u_j\rangle = \langle x_i^{**}, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, что завершает доказательство. □

[1]) Доказательство остальных утверждений леммы, приводимое ниже, можно упростить, если заметить, что для любого (B, A)-бимодуля U прямая сумма конечного числа U-рефлексивных модулей U-рефлексивна ввиду аддитивности функтора h_U^2. Для случая, когда $U = {}_AA_A$, отсюда сразу следует, что M рефлексивен, а часть утверждения (b), заключенная в скобки, получается по симметрии.— *Прим. перев.*

Если A и B — алгебры над коммутативным кольцом k, то под двойственностью категорий mod-A *и* B-mod *понимаются k-линейные функторы в смысле определения, данного перед* 5.72 (**1, стр. 361—362**).

23.31. Следствие. *Если A — конечномерная алгебра над полем k, то* $\mathrm{Hom}_k($ $, k)$ *индуцирует двойственность*

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}_A$ и ${}_A\mathcal{S}$ соответственно категории конечно порожденных правых и левых A-модулей, а через $\mathcal{S}_k$ — категорию конечномерных векторных пространств над k. Поскольку A — конечномерная алгебра над k, то, очевидно, $\mathcal{S}_A$ и ${}_A\mathcal{S}$ лежат в $\mathcal{S}_k$. Если теперь $X \in \mathcal{S}_A \subseteq \mathcal{S}_k$, то по 23.30(a) $h_k(X) = \mathrm{Hom}_k(X, k) \in \mathcal{S}_k$ и, кроме того, $h_k(X)$ является левым A-модулем. Таким образом, $h_k(X) \in {}_A\mathcal{S}$. Аналогично $h_k(X) \in \mathcal{S}_A$ для всякого $X \in {}_A\mathcal{S}$. Поэтому функтор h_k: $\mathcal{S}_k \rightsquigarrow \mathcal{S}_k$ индуцирует функторы $\mathcal{S}_A \rightsquigarrow {}_A\mathcal{S}$ и ${}_A\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{S}_A$, которые мы также обозначим через h_k. Теперь остается заметить, что ограничение естественного преобразования π_k: $1_{\mathcal{S}_k} \approx h_k^2$ на $\mathcal{S}_A$ является естественной эквивалентностью $1_{\mathcal{S}_A} \approx h_k^2$, поскольку (a) конечномерные векторные пространства ввиду 23.30(a) рефлексивны; (b) $\pi_k(X)$ — гомоморфизм правых A-модулей для любого $X \in \mathcal{S}_A$; (c) если f: $X \to X'$ — правый A-гомоморфизм, то $h_k(f)$: $h_k(X') \to h_k(X)$ — A-гомоморфизм. □

23.32. Упражнения. (a) Для конечномерных алгебр A и B над полем k эквивалентны следующие условия:

(1) A и B эквивалентны в смысле Мориты.

(2) Существует двойственность fin.gen.mod-$A \rightsquigarrow$ fin.gen.B-mod.

(3) Базисные алгебры (кольца) алгебр A и B изоморфны.

(b) В условиях следствия 23.31 показать, что $\mathrm{Hom}_k($ $, k) \approx \mathrm{Hom}_A($ $, A')$, где A' — модуль, k-дуальный к A_A.

(c) (Нагао — Накаяма [53]). Пусть A — конечномерная алгебра над полем k. Левый A-модуль X инъективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямой сумме модулей, k-дуальных к правым главным неразложимым A-модулям.

Автоморфизм Накаямы

Для любого правого A-модуля X и $a \in A$ через a_X обозначим гомотетию $X \to X$, определенную элементом a. Если U и V — правые A-модули, то **полулинейным** преобразованием f: $U \to V$ называется пара отображений, состоящая из

(a) эндоморфизма θ: $A \to A$ кольца A,

(b) гомоморфизма $f\colon U \to V$ абелевых групп, причем

$$(ua)f = (uf)\theta(a)$$

или

$$\theta(a)_V = f^{-1}a_U f$$

для всех $a \in A$ и $u \in U$ [1]). Если θ — автоморфизм, а f —изоморфизм, то f называется **полулинейным** (A, θ)**-изоморфизмом** $U \to V$.

23.33. Предложение. *Пусть* ${}_BU_A$ *и* ${}_BV_A$ *— контексты двойственности.*

(a) *Любой B-изоморфизм $f\colon U \to V$ является полулинейным (A, θ)-изоморфизмом для единственного автоморфизма θ кольца A, называемого* ***автоморфизмом Накаямы****, определенным с помощью f.*

(b) *В условиях утверждения* (a) *U и V определяют эквивалентные двойственности в том и только том случае, когда автоморфизм Накаямы θ является внутренним автоморфизмом.*

(c) *Если φ — любой автоморфизм кольца A, то существуют контекст двойственности ${}_BW_A$ и B-изоморфизм $g\colon U \to W$, для которого автоморфизм Накаямы равен φ. Модуль W будет обозначаться через (U, φ).*

Доказательство (Кон [66]). (a) Поскольку A канонически изоморфно $\operatorname{End}_B V$ (23.16 и 23.2.(b)), то для каждого $a \in A$ существует единственный элемент $a' \in A$, такой, что $a'_V = f^{-1}a_U f$. Соответствие $a \mapsto a'$ и является искомым автоморфизмом.

(b) Если $\theta(a) = x^{-1}ax$ для всех $a \in A$ и некоторого $x \in A$, то

$$\theta(a)_V = x_V^{-1}a_V x_V = f^{-1}a_U f,$$

откуда вытекает, что $fx_V^{-1}\colon U \to V$ является (B, A)-изоморфизмом. Следовательно, U и V определяют эквивалентные двойственности, поскольку тогда функторы h_U и h_V естественно эквивалентны в силу предложения Йонеды (1, 2.3).

Обратно, если $h_U \approx h_V$, то по предложению 2.3 имеет место (B, A)-изоморфизм $h\colon U \to V$. Тогда $g = fh^{-1}$ есть B-автоморфизм модуля U, т. е. g — обратимый элемент в кольце $\operatorname{End}_B U$. Пусть $x \in A$ таков, что $x_U = g$. Тогда $f = x_U h$ и

$$\text{(i)} \qquad \theta(a)_V = f^{-1}a_U f = h^{-1}x_U^{-1}a_U x_U h.$$

Поскольку h есть A-изоморфизм, то $h^{-1}b_U h = b_U$ для всех $b \in A$; поэтому из равенства (i) следует, что $\theta(a)_V = x_U^{-1}a_U x_U$ для всех $a \in A$, т. е. θ — внутренний автоморфизм, определенный элементом x.

[1]) Поскольку в возникающих ниже ситуациях f является гомоморфизмом левых модулей, то здесь используется правосторонняя запись гомоморфизмов.— *Прим. перев.*

(c) Структура A-модуля на U задается кольцевым гомоморфизмом $t\colon A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} U$. Теперь с помощью кольцевого гомоморфизма

$$t\theta\colon A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} U$$

определим на абелевой группе U A-модуль W. Итак, $u \cdot a = u\theta(a)$ для всех $a \in A$ и $u \in U$. Ясно, что $B \approx \operatorname{End} W_A$. Кроме того, ${}_BW_A$ есть контекст двойственности, поскольку W_A (соотв. ${}_BW$) — инъективный кообразующий в mod-A (соотв. B-mod) и A и B оба W-рефлексивны (см. 23.16). □

Если существует (A, θ)-изоморфизм $f\colon U \to V$ и f является тождественным отображением, то V обозначается через (U, θ). Таким образом, 23.33(b) и доказательство 23.33(c) утверждают, что U и (U, θ) определяют эквивалентные двойственности тогда и только тогда, когда θ — внутренний автоморфизм.

23.34. Упражнения (Морита). (a) Если ${}_BU_A$ — контекст двойственности, то центры колец A и B изоморфны. Вывести отсюда, что если коммутативные кольца связаны U-двойственностью, то они изоморфны.

(b) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathcal{S}_A$ — класс Серра в mod-A, содержащий A, и $T\colon \mathcal{S}_A \rightsquigarrow \mathcal{S}_A$ — двойственность. Тогда

(1) T индуцирует автоморфизм θ кольца A и его порядок не превосходит 2;

(2) если $U = TA$, то T индуцирует полулинейный (A, θ)-изоморфизм $U \to U$;

(3) T эквивалентна (U, θ)-двойственности.

(c) Пусть A — коммутативное артиново кольцо. Показать, что существует биекция из класса классов эквивалентных двойственностей $\mathcal{S}_A \rightsquigarrow \mathcal{S}_A$ на множество автоморфизмов кольца A, порядок которых не превосходит 2. [*Указание*: достаточно предположить, что A локально, и показать, что инъективная оболочка U модуля $A/\operatorname{rad} A$ конечно порождена. Тогда U определяет двойственность $\mathcal{S}_A \rightsquigarrow \mathcal{S}_A$ и каждая двойственность эквивалентна (U, θ)-двойственности для подходящего автоморфизма θ.]

Упражнения к гл. 23

1. Если кольцо A обладает контекстом двойственности ${}_BU_A$, то любое его факторкольцо $A' = A/I$ обладает контекстом двойственности ${}_{B'}U'_{A'}$, где $U' = \operatorname{ann}_U I$ и $B' = B/K$ для $K = \{b \in B \mid bU' = 0\}$.

[Модуль M называется (алгебраически) **линейно компактным** (точнее, линейно компактным в дискретной топологии — см. замечания к этой главе), если из разрешимости каждой конечной подсистемы системы сравнений $x \equiv x_a (\operatorname{mod} M_a)$, где M_a — подмодули в M для всех $a \in I$, вытекает существование общего решения всей системы. Например, кольцо нормирования линейно компактно тогда и только тогда, когда оно является максимальным кольцом нормирования. Ср. определения на стр. 207 перед 20.46.]

2 (Мюллер [70b]). Кольцо R обладает контекстом двойственности ${}_BU_A$ тогда и только тогда, когда минимальный инъективный кообразующий E категории mod-A линейно компактен, а само A E-полно, т. е. полно относительно конечной топологии, определенной E. (Таким образом, базисом окрестностей нуля этой топологии на A служат всевозможные пересечения правых идеалов вида $(0:x)$, где $x \in E$.) В этом случае E определяет контекст двойственности. Более того, для любого контекста двойственности класс всех U-рефлексивных правых модулей совпадает с классом всех линейно компактных модулей. В частности, A — линейно компактный правый A-модуль.

3 (Онодера [72]). Любой линейно компактный правый A-модуль M имеет конечную размерность Голди. Любой подмодуль и фактормодуль линейно компактного модуля линейно компактен.

4 (Онодера [72]). Любой линейно компактный модуль M дополняем, т. е. для любого подмодуля N существует подмодуль N', минимальный относительно свойства $M = N + N'$.

5 (Особская — Онодера). Любое линейно компактное справа кольцо R полусовершенно. Более того, если R линейно компактно справа и цокольно слева, то оно артиново справа (ср. 23.20).

6 (Онодера [72]). Кольцо R является двусторонним инъективным кообразующим тогда и только тогда, когда оно является односторонним линейно компактным кообразующим.

7. Существует артиново слева кольцо R с левым конечно-порожденным инъективным кообразующим U, не являющееся, однако, артиновым справа. (См. Особская [68e], ср. примеры 24.34.)

8 (Мюллер [70b]). Если коммутативное кольцо A обладает контекстом двойственности ${}_BU_A$, то существует контекст двойственности ${}_AW_A$.

9 (Мюллер, loc.cit). Коммутативное локальное кольцо R обладает контекстом двойственности тогда и только тогда, когда оно U-полно, где U — минимальный инъективный кообразующий (см. упр. 2), а модуль R/I является кообразующим инъективным (R/I)-модулем для любого конеприводимого идеала I кольца R (ср. PF-кольца, 24.32).

10. Пусть A — конечномерная алгебра над полем k. Показать, что правые конечно порожденные (инъективные) A-модули являются σ-циклическими тогда и только тогда, когда каждый неразложимый (проективный) конечно порожденный левый A-модуль вкладывается в $A' = \operatorname{Hom}_k(A, k)$.

11 (Фуллер [69a]). Если e — идемпотент артинова слева кольца R с радикалом J, то следующие условия эквивалентны:

(a) Re — инъективный левый R-модуль.

(b) Для каждого примитивного идемпотента e_i, входящего в разложение идемпотента e на ортогональные примитивные идемпотенты, существует примитивный идемпотент f_i из R, такой, что $\operatorname{soc}(Re_i) \approx Rf_i/Jf_i$ и $\operatorname{soc}(f_iR) \approx e_iR/e_iJ$.

(c) Существует идемпотент f в R, такой, что (i) $\operatorname{ann}_{fR} Re = 0$ и $\operatorname{ann}_{Re} fR = 0$; (ii) функторы $\operatorname{Hom}_{fRf}(\ \ , fRe)$ и $\operatorname{Hom}_{eRe}(\ \ , fRe)$ определяют двойственность из категории конечно порожденных левых fRf-модулей в категорию конечно порожденных правых eRe-модулей.

Более того, если Re инъективен, то модули f_iR из (b) и fR из (c) также инъективны.

12 (Морита [58] и Длаб — Рингель [72a]). Над любым кольцом эндоконечный инъективный кообразующий сбалансирован.

13 (Кон [66]). Пусть U есть (B, A)-бимодуль, кольцо $B = \operatorname{End} U_A$ нётерово слева, а $A = \operatorname{End} {}_BU$ нётерово справа. Тогда (a) если U — инъективный A-модуль, то он — кообразующий в категории B-модулей; (b) вывести, что U — инъективный кообразующий в mod-A тогда и только тогда, когда он — инъективный кообразующий в B-mod. В этом случае ${}_BU_A$ — контекст двойственности, U конечно порожден как A-модуль и как B-модуль, а кольцо A (кольцо B) артиново справа (слева).

14. Если ${}_BU_A$ — контекст двойственности, то бесконечная прямая сумма U-рефлексивных ненулевых модулей не может быть U-рефлексивной.

15 (Эрдёш — Капланский). Если V — бесконечномерное векторное пространство размерности b над телом A, то размерность A-дуального к V равна 2^b. Сформулировать обобщение этого утверждения.

16 (Матлис [58]). Пусть R — коммутативное нётерово локальное кольцо с радикалом P, $E = \widehat{R/P}$ и $B = \operatorname{End} E_R$. Тогда B есть

p-адическое пополнение кольца R (ср. 18.9.7), E — артинов B-модуль и имеет место двойственность между артиновыми R-модулями и конечно порожденными R-модулями, индуцированная функтором $h_E = \mathrm{Hom}_R(\ \ , E)$.

Замечания к гл. 23

Двойственность Понтрягина (см. его книгу [72]) Char из категории LCAb локально абелевых групп на себя ставит в соответствие каждой группе $X \in$ LCAb ее группу характеров

$$\mathrm{Char}\, X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — группа окружности, а $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ состоит из непрерывных гомоморфизмов и наделяется компактно-открытой топологией (ср. 1, 2.6.6, стр. 130).

Теорема Понтрягина утверждает, что категория Ab абелевых групп (в дискретной топологии) двойственна категории компактных абелевых групп и эту двойственность осуществляет соответствие $X \mapsto \mathrm{Char}\, X$; при этом если $X \in$ Ab, то на X рассматривается дискретная топология.

Морита [58] доказал, что если D — произвольная двойственность LCAb $\rightsquigarrow$ LCAb, то D эквивалентна U-двойственности, индуцированной группой $U = D(\mathbb{Z}) \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Итак,

$$D(X) = \mathrm{Hom}(X,\ U) \approx \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Char}\, X,$$

т. е. каждая двойственность эквивалентна двойственности Понтрягина. (Здесь, конечно, $\mathbb{Z}$ снабжена дискретной топологией.) (О двойственности для некоммутативных групп см. Хохшильд [65].)

В своей книге «Алгебраическая топология» Лефшец расширил двойственность для конечномерных векторных пространств над полем R до двойственности между всеми абстрактными и всеми линейно компактными топологическими векторными пространствами. Капланский [53] (обсуждается также в его работе [69b, стр. 79—80]) проделал то же самое для модулей над полными кольцами дискретного нормирования. Здесь само кольцо R рассматривается как топологическое — с топологией, определяемой степенями радикала, а в качестве X^* нужно взять множество $\mathrm{Hom}(X, K/R)$ всех непрерывных гомоморфизмов из X в поле частных K по модулю R. Тогда если X дискретно, то X^* линейно компактно (в топологическом смысле) и X изоморфен дуальному к X^*.

Эти теоремы были обобщены Лептином, Шёненборном, Макдональдом и Мюллером [71]. Кроме того, Мюллер показал, что среди

топологий, определенных U-двойственностью, имеются самая слабая и самая сильная [1]).

Оберст [70] охарактеризовал категорию, дуальную категории Гротендика, как категорию строгих полных топологических когерентных левых R-модулей (STC-модулей) над некоторым линейно компактным [2]) STC-кольцом R. (Предупреждение: обратите внимание на (2) в работе Оберста [70, стр. 540].) Мюллер [70], выясняя, когда кольцо R обладает контекстом двойственности, показывает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы минимальный инъективный кообразующий R-модуль E был линейно компактным, а само кольцо R E-полно в смысле, объясненном в упр. 2. Тогда класс всех U-рефлексивных правых R-модулей для любого контекста двойственности ${}_BU_R$ совпадает с классом всех линейно компактных модулей. (Этот факт тщательно изучен в работе Мюллера [71]. В другом направлении, параллельном теореме Гельфанда и Наймарка о двойственности между компактными топологическими пространствами и коммутативными C^*-алгебрами, Хоффман [70] установил полную двойственность между категорией компактных моноидов и категорией C^*-алгебр с коумножением.)

Эти результаты тем не менее оставляют в стороне вопрос о том, какое строение должно иметь кольцо для того, чтобы обладать двойственностью (точнее, контекстом двойственности). В частности, имея в виду характеризацию Мюллера, как узнать, что E линейно компактен, рассматривая только R? Конечно, для существования контекста двойственности ${}_BU_R$ кольцо R само обязано быть линейно компактным справа (как U-рефлексивный модуль). (См. также упр. 9 к этой главе.) Любое коммутативное артиново кольцо имеет контекст двойственности (23.26), однако произвольное артиново кольцо может его и не иметь. Это следует из теоремы Розенберга и Зелинского [59], которые свели рассматриваемый вопрос к вопросу о существовании тела K, содержащего подтело F, такое, что размерность правого векторного пространства K над F конечна, а размерность левого векторного про-

[1]) Точнее говоря, имеется в виду следующее. Если ${}_BU_A$ — контекст двойственности, то, как видно из приведенных примеров, для того, чтобы распространить U-двойственность на все модули, нужно снабдить их линейной топологией, точнее — отделимой топологией, у которой базис окрестностей нуля состоит из подмодулей. Однако это можно сделать не одним способом, поскольку неоднозначен выбор топологии на дуальном модуле X^*. Тем не менее среди всех топологий, приводящих к двойственности, существуют самая слабая, носящая имя Лептина и задаваемая для каждого модуля X базисом окрестностей нуля, состоящим из ядер гомоморфизмов $X \to U$, и самая сильная, в которой за базис окрестностей нуля берутся все такие подмодули A из X, что всякий промежуточный подмодуль B, $A \subseteq B \subseteq X$, замкнут в топологии Лептина.— *Прим. перев.*

[2]) В этой формулировке термин «линейная компактность» употребляется в несколько другом смысле.— *Прим. перев.*

странства K над F бесконечна. Такой пример был приведен Коном [61] в качестве ответа на проблему Артина.

Ламбек и Раттрей [75] рассматривают двойственность в кополных аддитивных категориях и обобщают многие классические теоремы, включая теоремы Матлиса [58] (см. упр. 16) и Капланского [53]. Вариант теоремы Матлиса для некоммутативных нётеровых колец см. у А. Ятегаонкара [74a], [74b].

В следующей главе артиновы кольца с контекстом двойственности ${}_R R_R$ характеризуются в терминах свойств левых и правых идеалов (24.5). Более того, в ней описываются кольца R, являющиеся инъективными кообразующими в mod-R (24.32). (Если такое кольцо самоинъективно слева, то оно обладает контекстом двойственности ${}_R R_R$.)

Дальнейшие замечания об этих кольцах, а также о двойственности см. в замечаниях к гл. 24.

Ссылки

Адзумая [59], Басс [60], Бэр [43b], Джанс [61], Икеда [51, 52], Икеда — Накаяма [54], Капланский [53], Кон [61], [66], Кэртис [59], Ламбек — Раттрей [75], Матлис [58], Морита [58], [67], [69], Морита — Кавада — Тахикава [57], Мюллер [70b], [71], Нагао — Накаяма [53], Накаяма [39], [40], [41], Оберст [70], Онодера [72], [73], Орнстейн [68], Ософская [66b], [68e], Понтрягин [72], Розенберг — Зелинский [59], [61], Сандомирский [72], Тахикава [58], [59], Фуллер [69a], Хоффман [70], Хохшильд [65], Ятегаонкар А. [74a], [74b].

Глава 24

КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫ КОЛЬЦА

Кольцо A называется квазифробениусовым (QF-кольцом), если оно артиново и слева и справа и существует A-двойственность

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}.$$

Как показано в 24.4, последнее условие можно заменить требованием, чтобы каждый односторонний идеал кольца A был аннуляторным. Такие кольца самоинъективны и справа и слева. Обратно, если кольцо A является инъективным A-модулем и нётерово или артиново (справа или слева) [1]), то оно будет QF-кольцом ввиду 24.5. Над QF-кольцом A каждый точный модуль является образующим и содержит базисный модуль (24.6). Произвольное кольцо A является квазифробениусовым в том и только том случае, когда каждый инъективный правый A-модуль проективен (24.12). Справедлива также дуальная теорема (24.23) (но доказывается она не двойственным образом). Над самобазисными QF-кольцами конечно порожденные точные модули определяются кольцами эндоморфизмов (24.26).

Псевдофробениусово справа кольцо (правое PF-кольцо) определяется свойством, что любой точный правый R-модуль является образующим категории mod-R всех правых R-модулей (QF-кольца этим свойством обладают). Ввиду 24.32 кольцо R является правым PF-кольцом тогда и только тогда, когда оно — полулокальное самоинъективное справа кольцо с существенным цоколем. (Другими словами, это самоинъективное справа существенно артиново справа кольцо!) Если каждое факторкольцо кольца R псевдофробениусово, то R — артиново примарно разложимое полуцепное кольцо. Обратное утверждение также справедливо. (Это доказано в гл. 25. См. 25.4.6A.)

Мы начнем с нескольких простых замечаний об аннуляторных идеалах.

24.1. Предложение. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *В категории mod-R каждый циклический модуль содержится в проективном модуле.*

---

[1]) Достаточно требовать, чтобы условие максимальности выполнялось лишь для правых или левых аннуляторных идеалов (24.25).

(b) *Каждый правый идеал кольца R является аннулятором конечного подмножества элементов множества R.*

Доказательство. См. 20.26.

24.2. Следствие. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *В категории* mod-R *каждый циклический R-модуль можно вложить в произведение некоторого множества экземпляров модуля R_R.*

(b) *Каждый правый идеал кольца R является правым аннуляторным идеалом.*

24.3. Упражнение. (a) Если каждый правый (и каждый левый) идеал кольца R является аннулятором конечного подмножества элементов кольца R, то R артиново слева и справа.

(b) Найти пример неартинова слева кольца, в котором каждый циклический правый R-модуль содержится в свободном R-модуле категории mod-R.

(c) Если Q — идеал кольца A, то каждый содержащий его левый идеал этого кольца является левым аннуляторным идеалом в том и только том случае, когда Q — левый аннуляторный идеал и каждый левый идеал факторкольца A/Q также является аннуляторным. Вывести отсюда, что в полулокальном кольце A каждый (максимальный) левый идеал, содержащий радикал J, является аннуляторным тогда и только тогда, когда J — левый аннуляторный идеал.

(d) Полупервичное кольцо классически полупросто в том и только том случае, когда каждый его левый идеал является аннуляторным.

(e) Показать, что существует ниль-идеал N кольца R, который является пересечением всех идеалов H, таких, что кольцо R/H полупервично. [Тогда N называется (*бэровским*) *нижним ниль-радикалом* кольца R. Ср. 26.11.] Установить эквивалентность следующих условий: (1) каждый левый идеал кольца R, содержащий идеал N, является аннуляторным, 2) кольцо R/N классически полупросто, а N является левым аннуляторным идеалом. Показать, что в этом случае $N = \operatorname{rad} R$.

(f) Самоинъективное справа кольцо R является кообразующим в категории mod-R в том и только том случае, когда каждый максимальный правый идеал кольца R является правым аннуляторным идеалом, или в том и только том случае, когда R — полулокальное кольцо, радикал J которого является правым аннуляторным идеалом.

(g) (Фейс — Уокер Э. [67].) Полулокальное кольцо R, являющееся кообразующим в категории mod-R, самоинъективно справа.

24.4. Теорема и определение. *Кольцо A называется* **квазифробениусовым** (*сокращенно* QF-*кольцом*), *если оно артиново слева*

и справа и удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(a) *Бимодуль A определяет A-двойственность*

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}A\text{-mod}.$$

(b) *Каждый простой модуль категории* mod-A (*или категории* A-mod) *рефлексивен.*

(b′) *Радикал кольца A является и левым, и правым аннуляторным идеалом, а каждый минимальный правый или левый идеал — правым или левым аннуляторным.*

(c) *Модуль, A-дуальный простому правому или левому A-модулю, прост.*

(d) *Отображение*

$$\varphi\left\{\begin{array}{l}\text{правые идеалы кольца } A \to \text{левые идеалы кольца } A,\\ \qquad\qquad\qquad I \mapsto {}^{\perp}I = \operatorname{ann}_A I\end{array}\right.$$

является структурным антиизоморфизмом между структурами правых и левых идеалов кольца A. Иначе говоря, каждый односторонний идеал кольца A является аннуляторным.

(e) *Кольцо A самоинъективно справа.*

(f) *Модуль A_A является инъективным кообразующим.*

Доказательство. Условия (a) — (d) соответствуют различным частям теоремы 23.25 при $A = U$. Поэтому эквивалентность условий (a) — (d) вытекает из 23.25, равно как и импликации (a) $\Rightarrow$ (c) и (f) $\Rightarrow$ (a).

(e) $\Rightarrow$ (f). Пусть e и f — неразложимые идемпотенты кольца A. Тогда модуль eA неразложим и инъективен как прямое слагаемое модуля A_A. Значит, цоколь модуля eA является простым A-модулем и

$$\operatorname{soc}(eA) \approx \operatorname{soc}(fA)$$

в том и только том случае, когда

$$eA \approx fA.$$

В силу результатов о полусовершенных кольцах (22.23) из только что установленного факта следует, что каждый простой правый A-модуль изоморфен цоколю некоторого идеала fA. Таким образом, каждый простой правый A-модуль изоморфен подмодулю модуля A_A, и, следовательно, A — инъективный предкообразующий категории mod-A и ввиду 1, 3.31 является инъективным кообразующим.

(b′) $\Longleftrightarrow$ (c). Ввиду упражнения 24.3(c) каждый максимальный правый идеал M является правым аннуляторным идеалом.

Но всякий модуль, A-дуальный простому модулю $V = A/M$, канонически изоморфен модулю ${}^{\perp}M$ при отображении $f \mapsto f(1+M)$. Поэтому, если W — минимальный левый идеал, содержащийся в ${}^{\perp}M$, то $W^{\perp} = M$. Так как W — левый аннуляторный идеал, то $W = {}^{\perp}M \approx \mathrm{Hom}_A(V, A)$, т. е. левый модуль $\mathrm{Hom}_A(V, A)$ прост. Это доказывает, что модуль, A-дуальный какому-либо простому правому, а по симметрии — и какому-либо простому левому модулю, прост. Импликации (c) $\Rightarrow$ (d) и (d) $\Rightarrow$ (b′) тривиальны. □

24.5. Теорема. *Следующие свойства кольца A эквивалентны:*
(a) *A квазифробениусово.*
(b) *Модуль A_A инъективен и нётеров.*
(c) *Модуль A_A инъективен и артинов.*
(d) *Модуль A_A инъективен, а ${}_AA$ нётеров.*

Доказательство. (b) $\Rightarrow$ (c). Так как кольцо A нётерово справа, то оно удовлетворяет условию минимальности для левых аннуляторных идеалов. Поскольку A_A инъективен, то каждый конечно порожденный левый идеал кольца A ввиду 19.3 является левым аннуляторным идеалом (ср. 23.21). Таким образом, кольцо A удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных левых идеалов, т. е. совершенно справа и, значит, артиново справа ввиду леммы 23.19.

(c) $\Rightarrow$ (d). Так как модуль A_A артинов, то кольцо A удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторных идеалов, и, значит, ввиду 19.3 для конечно порожденных левых идеалов, т. е. A — нётерово слева кольцо.

(d) $\Rightarrow$ (a). По теореме Утуми 19.27 кольцо $A/\mathrm{rad}\, A$ регулярно, и тогда из нётеровости модуля A следует классическая полупростота кольца $A/\mathrm{rad}\, A$. Далее, из того, что модуль A_A инъективен, а ${}_AA$ нётеров, как и выше, вытекает, что каждый левый идеал кольца A является аннуляторным. В частности, если $J = \mathrm{rad}\, R$, то J^n является левым аннуляторным идеалом для каждого n. Теперь $(J^n)^{\perp}$ — идеал кольца A, и из нётеровости A следует, что $(J^n)^{\perp} = (J^{n+1})^{\perp}$ для некоторого n. Но тогда $J^n = J^{n+1}$. Так как $M = J^n$ — конечно порожденный левый идеал, удовлетворяющий условию $JM = M$, то $M = J^n = 0$ в силу 18.4. Таким образом, кольцо A полупримарно и вследствие 18.12 артиново слева. Более того, из доказательства импликации (e) $\Rightarrow$ (f) теоремы 24.4 следует, что A — инъективный кообразующий категории mod-A. В этом случае из следствий 23.23(a) или 24.2 вытекает, что каждый правый идеал кольца A аннуляторный. Следовательно, нётеровость модуля A влечет за собой правую артиновость кольца A. Но тогда из 24.4 вытекает, что кольцо A квазифробениусово.

24.6. Следствие. *Если A — квазифробениусово кольцо, то следующие свойства A-модуля M эквивалентны:*
(a) *M — точный правый A-модуль.*
(b) *M содержит базисный модуль кольца A (см. 18.24).*
(c) *Базисный модуль кольца A изоморфен прямому слагаемому модуля M.*
(d) *M — образующий категории* mod-A.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (d). Ввиду 19.13A существует $n > 0$, такое, что M^n содержит модуль, изоморфный A. Так как модуль A_A инъективен, то он выделяется в M^n прямым слагаемым. Следовательно, существует эпиморфизм $M^n \to A$, т. е. M является образующим.

(d) $\Rightarrow$ (c) установлено в 18.24.

(b) $\Rightarrow$ (a). Базисный модуль — образующий, а значит, точен. □

24.7. Следствие. *Любой конечно порожденный точный проективный A-модуль P над квазифробениусовым кольцом A является прообразующим категории* mod-A, *и кольцо $S = \mathrm{End}\, P_A$ квазифробениусово.* □

24.8. Упражнение. (a) Кольцо A является квазифробениусовым в том и только том случае, когда каждый инъективный A-модуль проективен, а проективный инъективен.

(b) Если кольцо A квазифробениусово, то базисный модуль B кольца A является инъективной оболочкой и проективным накрытием своего цоколя.

(c) Если кольцо A квазифробениусово, то A — инъективная оболочка модуля $A/\mathrm{rad}\, A$.

(d) Базисный модуль квазифробениусова кольца A является минимальным инъективным кообразующим категории mod-A.

(e) (Бэр [43] и Икеда [51].) Если кольцо A артиново справа и существует структурный антиизоморфизм структур его правых и левых идеалов, то A является QF-кольцом.

(f) (Кавада [57], Морита — Тахикава [56], Утуми [60].) Пусть $P(M)$ означает следующее условие на правый R-модуль M: для любых двух подмодулей A и B модуля M из изоморфизма $M/A \approx M/B$ вытекает изоморфизм $A \approx B$. Пусть, далее, (l_n) означает условие $P(R^n)$ в категории R-mod, а (r_n) — то же условие в категории mod-R. Тогда

(1) R есть QF-кольцо $\Leftrightarrow$ (r_n) и (l_n) $\forall n$.

(2) Если R — конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем, то

R есть QF-кольцо $\Leftrightarrow$ $((r_1)$ или $(l_1))$.

(3) Если кольцо R удовлетворяет (l_2) или (r_2), то оно квазифробениусово.

(4) Если кольцо R_2 всех (2×2)-матриц над R удовлетворяет (r_1) или (l_1), то R квазифробениусово.

(g) Показать, что свойство: каждый точный правый R-модуль является образующим — характеризует квазифробениусовы кольца среди правых (или левых) артиновых колец.

(h) (Тахикава [69].) Доказать (g), заменив «точный правый R-модуль» на «точный конечно порожденный R-модуль».

(i) Каждое групповое кольцо конечной группы над квазифробениусовым кольцом квазифробениусово.

Проективные кообразующие над полулокальными кольцами

Квазифробениусово кольцо A полулокально и служит проективным кообразующим категории mod-A. Теперь мы установим общую теорему для проективного кообразующего над полулокальным кольцом, которая нам понадобится для того, чтобы охарактеризовать квазифробениусовы кольца как кольца, над которыми каждый инъективный модуль проективен (см. 24.12).

24.9. Предложение. *Если P—конечно порожденный проективный кообразующий категории* mod-R, *а кольцо R полулокально, т. е. кольцо $R/\mathrm{rad}\, R$ классически полупросто, то R-модули P и R инъективны.*

Доказательство. Доказательство использует следующие два результата (см. 22.5 и 22.6).

I. Пусть P и Q — конечно порожденные проективные модули категории mod-R и $J = \mathrm{rad}\, R$. Тогда $P/PJ \approx Q/QJ$ в том и только том случае, когда $P \approx Q$.

II. Пусть P — конечно порожденный проективный правый R-модуль, $\Lambda = \mathrm{End}_R\, P$, $Q = \mathrm{rad}\, \Lambda$, a $J = \mathrm{rad}\, R$. Тогда кольцо $\mathrm{End}_R(P/PJ)$ изоморфно факторкольцу Λ/Q.

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — множество всех неизоморфных простых правых R-модулей, a $\hat{U}_i$ — инъективная оболочка модуля U_i, $i = 1, \ldots, n$. Так как модуль P — кообразующий, то можно считать, что $\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_n$ содержатся в нем. Поскольку все эти модули инъективны, то они являются прямыми слагаемыми модуля P и, значит, конечно порождены и проективны, как и P. Так как $U_1, \ldots, U_n$ — неизоморфные простые подмодули модуля P, то они независимы, т. е. сумма $U_1 + \ldots + U_n$ является прямой. Следовательно, сумма $\hat{U}_1 + \ldots + \hat{U}_n$ также прямая. Более того, модуль $C = \hat{U}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{U}_n$, будучи конечной прямой суммой проективных инъективных модулей, проективен и инъективен.

Так как модуль U_i прост, то модуль $\hat{U}_i$ неразложим (и инъективен); тогда $\Lambda_i = \mathrm{End}_R\, \hat{U}_i$ — локальное кольцо. В силу утверждения II

$$\Lambda_i/Q_i \approx \mathrm{End}_R\, (\hat{U}_i/\hat{U}_i J),$$

где $Q_i = \mathrm{rad}\, \Lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $\hat{U}_i/\hat{U}_i J$ — полупростой модуль, кольцо эндоморфизмов которого является телом, изоморфным Λ_i/Q_i, то $\hat{U}_i/\hat{U}_i J$ — простой модуль. Из утверждения I теперь следует, что $\hat{U}_i/\hat{U}_i J$ изоморфен $\hat{U}_j/\hat{U}_j J$ в том и только том случае, когда $\hat{U}_i \approx \hat{U}_j$. Так как U_i — единственный простой подмодуль модуля $\hat{U}_i$, а изоморфные модули имеют изоморфные инъективные оболочки, то $\hat{U}_i$ и $\hat{U}_j$ могут оказаться изоморфными лишь в случае, когда $U_i \approx U_j$, т. е. когда $i = j$. Таким образом, $\hat{U}_1/\hat{U}_1 J, \ldots, \hat{U}_n/\hat{U}_n J$ — семейство представителей всех неизоморфных простых модулей. Иначе говоря, каждый простой модуль является эпиморфным образом модуля $C = \hat{U}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{U}_n$. Поскольку модуль C проективен, то отсюда следует, что он является образующим категории mod-R (доказательство?). Следовательно, существует эпиморфизм $\sum C_\alpha \to R$ прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля C на R. Из проективности модуля R следует, что этот эпиморфизм расщепляется, т. е. R изоморфно прямому слагаемому модуля $\sum C_\alpha$. Так как R — конечно порожденный R-модуль, то он является прямым слагаемым суммы конечного числа экземпляров модуля C. Тогда из инъективности модуля C следует инъективность модуля R. Поскольку модуль P конечно порожден и проективен, то из этих же соображений вытекает инъективность R-модуля P. □

24.10. Следствие. *Если R — кообразующий категории* mod-R, *а кольцо $R/\mathrm{rad}\, R$ классически полупросто, то кольцо R самоинъективно справа.*

24.11. Упражнение (Ософская [66]). Если R — инъективный кообразующий категории mod-R, то кольцо R полулокально. (Обратное к следствию 24.10.)

24.12. Теорема (Фейс — Уокер Э. [67]). *Кольцо R квазифробениусово в том и только том случае, когда каждый инъективный правый R-модуль проективен.*

Доказательство. Пусть кольцо R квазифробениусово, а M — произвольный инъективный правый R-модуль. Так как R артиново справа, то оно нётерово справа (см. 18.13), т. е. M — прямая сумма неразложимых инъективных модулей. Поскольку прямая сумма проективных модулей проективна, то можно ограничиться случаем, когда M неразложим (и инъективен). Тогда M совпадает с инъективной оболочкой $\hat{C}$ любого своего ненулевого циклического подмодуля C. В силу предложения 24.1 модуль C содержится в конечно порожденном свободном модуле R^n. Так как R инъективен, то вложение модуля C в R^n можно продолжить до вложения модуля $M = \hat{C}$ в R^n. Тогда модуль M, будучи инъективным, оказывается прямым слагаемым модуля R^n и, следовательно, проективен.

Обратно, если каждый инъективный модуль проективен, то каждый модуль содержится в свободном; в частности, каждый модуль содержится в прямой сумме циклических модулей и по теореме 20.18 кольцо R оказывается артиновым справа. Но поскольку каждый модуль M содержится в прямом произведении (даже в прямой сумме) экземпляров модуля R, то R — кообразующий. Так как кольцо $R/\operatorname{rad} R$ классически полупросто, то из следствия 24.10 вытекает самоинъективность справа кольца R. Из 24.5 теперь следует, что R квазифробениусово. □

24.13. Следствие. *Артиново кольцо R является кообразующим в категории* mod-R *тогда и только тогда, когда оно квазифробениусово.*

Доказательство. Используем 24.10 и 24.4(f). □

24.14. Теорема. *Кольцо R квазифробениусово в том и только том случае, когда каждый инъективный правый R-модуль является прямой суммой циклических модулей, изоморфных правым главным неразложимым идеалам кольца R.*

Доказательство. Если R квазифробениусово и M — инъективный модуль, то M является прямой суммой неразложимых инъективных модулей $\{M_i,\ i \in I\}$ (см. 20.6). В силу 24.12 каждый из M_i проективен и, значит, по 20.15 изоморфен правому главному неразложимому идеалу. Это доказывает одну часть. Обратное утверждение следует из 24.12, поскольку прямая сумма правых главных неразложимых идеалов проективна. □

24.15. Следствие. *Кольцо R квазифробениусово в том и только том случае, когда каждый правый R-модуль содержится в свободном правом R-модуле.*

24.16. Следствие. *Если каждый (инъективный) правый R-модуль содержится в прямой сумме правых идеалов, то кольцо R квазифробениусово.*

Действительно, в этом случае каждый инъективный модуль проективен. □

Инъективность проективных модулей

Оставшаяся часть этой главы посвящена главным образом доказательству утверждения, двойственного теореме 24.12, а именно: кольцо R квазифробениусово в том и только том случае, когда каждый проективный правый R-модуль инъективен. Отсюда следует, что каждый свободный модуль инъективен, и, следовательно, инъективный правый R-модуль R является $\sum$-инъективным. Таким образом, оказывается полезным такой результат из гл. 20 о $\sum$-инъективности:

24.17. Следствие. *Если инъективная оболочка правого R-модуля R счетно $\sum$-инъективна, то R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов.*

24.18. Теорема (Фейс [66a]). *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*

(a) *Любой счетно порожденный проективный правый R-модуль инъективен.*

(b) *R самоинъективно справа и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов.*

(c) *Любой проективный правый R-модуль инъективен.*

Доказательство. (a) ⇒ (b). Модули R_R и $R^{(\omega)}$ инъективны. Таким образом, $\hat{R}$ счетно $\sum$-инъективен и из 20.3A следует, что R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов.

(b) ⇒ (c). Так как $\mathcal{A}_r(\hat{R}, R)$ совпадает с множеством правых аннуляторных идеалов кольца R, то из 20.3A следует, что любой свободный и, значит, любой проективный правый R-модуль инъективны.

Импликация (c) ⇒ (a) тривиальна. □

24.19. Лемма. *Если R совершенно справа и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, то R полупримарно.*

Доказательство. Пусть $J = \operatorname{rad} R$. Тогда R/J классически полупросто. Ввиду условия максимальности для правых аннуляторных идеалов

$$(J^n)^\perp = (J^{n+1})^\perp$$

для некоторого n. Если $R = (J^n)^\perp$, то $J^n = 0$, что и требовалось. С другой стороны, так как R совершенно справа, то ввиду теоремы 22.29 левый R-модуль $R/(J^n)^\perp$ имеет ненулевой цоколь $T/(J^n)^\perp$, где T — левый идеал, строго содержащий $(J^n)^\perp$. Так как

J аннулирует этот модуль, то $JT \subseteq (J^n)^\perp$. Тогда $T \subseteq (J^{n+1})^\perp = (J^n)^\perp$ — противоречие.

24.20. Теорема. *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(a) *R квазифробениусово.*
(b) *Каждый инъективный правый R-модуль проективен.*
(c) *Каждый проективный правый R-модуль инъективен.*
(d) *R самоинъективно справа и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов.*

Доказательство. Эквивалентность условий (a) $\Leftrightarrow$ (b) составляет содержание теоремы 24.12. Импликация (a) $\Rightarrow$ (c) следует из того факта, что над нётеровым кольцом каждый модуль $\sum$-инъективен. Значит, любой свободный, а потому и любой проективный модуль инъективны.

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Это теорема 24.18.

(d) $\Rightarrow$ (a). По предыдущей лемме R полупримарно, значит, ввиду 18.14 R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов. Пусть $A_1 \supseteq \ldots A_n \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность правых аннуляторных идеалов в кольце R. По лемме 24.21 существует последовательность $A_1' \supseteq \ldots \supseteq \ldots A_n' \supseteq \ldots$ конечно порожденных правых идеалов, такая, что ${}^\perp A_i' = {}^\perp A_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, найдется номер n, такой, что $A_n' = A_m'$ для любого $m \geqslant n$. Тогда ${}^\perp A_n = {}^\perp A_m$ для любого $m \geqslant n$, что доказывает условие минимальности (соотв. максимальности) для правых (соотв. левых) аннуляторных идеалов. Так как ввиду 19.11 каждый конечно порожденный левый идеал кольца R является левым аннуляторным идеалом, то R удовлетворяет условию максимальности для конечно порожденных левых идеалов. Следовательно, каждый левый идеал конечно порожден. Тогда R квазифробениусово по теореме 24.5.

24.21. Лемма. *Если R самоинъективно справа и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, а A и B — правые идеалы, такие, что $A \supseteq B$, то существуют конечно порожденные правые идеалы A', B', лежащие в A и B соответственно, такие, что $A' \supseteq B'$, ${}^\perp A = {}^\perp A'$ и ${}^\perp B = {}^\perp B'$.*

Доказательство. Так как модуль R_R инъективен, то по 23.21.3

$${}^\perp(A \cap B) = {}^\perp A + {}^\perp B.$$

Пусть $A \supseteq B$ и A' — конечно порожденный правый идеал, содержащийся в A, определенный в 20.2A, такой, что ${}^\perp A = {}^\perp A'$. Тогда

$${}^\perp(A' \cap B) = {}^\perp A + {}^\perp B = {}^\perp B.$$

Последнее равенство справедливо, так как ${}^\perp A \subseteq {}^\perp B$. Повторное применение 20.2A дает конечно порожденный правый идеал B', лежащий в $A' \cap B$, такой, что ${}^\perp B' = {}^\perp B$. $\square$

24.22. Следствие. *Если кольцо R самоинъективно справа или слева и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, то оно квазифробениусово.*

Доказательство. Если R самоинъективно слева, то ввиду 19.11 каждый конечно порожденный правый идеал является аннуляторным. Поэтому из условия следует, что R нётерово справа и по 24.5 R оказывается QF-кольцом. Если же R самоинъективно справа, то оно квазифробениусово ввиду 24.20. $\square$

Изоморфизми точных модулей над квазифробениусовыми кольцами

Если ω — полулинейный (A, θ)-изоморфизм $U \to V$, то отображение

$$\varphi \begin{cases} \operatorname{End} U_A \to \operatorname{End} V_A \\ f \mapsto \omega f \omega^{-1} \end{cases}$$

является изоморфизмом колец $\operatorname{End} U_A \approx \operatorname{End} V_A$ (см. 23.33).

24.23. Определение. Говорят, что конечно порожденный точный A-модуль U **определяется своим кольцом эндоморфизмов**, если каждому конечно порожденному точному A-модулю V и кольцевому изоморфизму φ: $\operatorname{End} U_A \to \operatorname{End} V_A$ соответствует полулинейный (A, θ)-изоморфизм ω: $U \to V$, такой, что

$$\varphi(f) = \omega f \omega^{-1} \quad (f \in \operatorname{End} U_A).$$

Частными случаями следующей теоремы являются теоремы Джекобсона [64], Шода (1929 г.) (цит. Морита [62]), Асано К. [39] и Бэра (1943 г.).

24.24. Теорема. (Морита [62]). *Любой конечно порожденный точный модуль U над базисным QF-кольцом A определяется своим кольцом эндоморфизмов* [1]).

Доказательство. По 24.6 модули U и V являются собственными образующими категории mod-A (см. 16.17). Из 16.20 тогда следует, что изоморфизм φ: $\operatorname{End} U_A \to \operatorname{End} V_A$ влечет за собой эквивалентность T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-A, такую, что $TU = V$

[1]) На самом деле Морита доказывает, что модули определяются «строго плотными подкольцами» колец эндоморфизмов.

и T индуцирует φ. Если $\varphi = T(1_U)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\omega} & V = TU \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f)=\varphi(f)} \\ U & \xrightarrow[\omega]{} & V = TU \end{array}$$

коммутативна. Здесь $\omega\colon U \to V$ — естественный изоморфизм, определенный эквивалентностью T. Следовательно,

$$\varphi(f) = \omega f \omega^{-1}. \square$$

Если f — внутренний автоморфизм кольца R, то существует $x \in R$, такой, что $f(a) = xax^{-1}$ для любого $a \in R$. Тогда f индуцирует тождественное отображение центра кольца R. Кольцо R обладает In aut-*свойством*, если кольцевой автоморфизм f, индуцирующий тождественное отображение центра кольца R, непременно оказывается внутренним. Кроме коммутативных колец, примерами таких колец являются простые конечномерные алгебры (теорема Сколема — Нётер) и алгебры Адзумаи над локальными кольцами (см. Басс [67, стр. 109]).

24.25. Теорема. *Пусть A — самобазисное* QF-*кольцо с* In aut-*свойством, а U и V — конечно порожденные точные правые A-модули. Тогда любой кольцевой изоморфизм*

$$\varphi\colon B = \operatorname{End} U_A \to C = \operatorname{End} V_A,$$

такой, что $\varphi(b) = b$ для любого $b \in \mathscr{C}(B)$, имеет вид

$$\varphi(f) = \omega f \omega^{-1} \text{ для любого } f \in B,$$

где $\omega\colon U \to V$ — подходящий A-изоморфизм.

Доказательство. По 24.24 существует полулинейный (A, θ)-изоморфизм $\omega'\colon U \to V$, который определяет изоморфизм φ. Далее,

$$h \begin{cases} \mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(B) \\ a \longmapsto a_d \end{cases}$$

является кольцевым изоморфизмом. Если $a \in \mathscr{C}(A)$, а $u \in U$, то

$$\omega'(u)\theta(a) = \omega'(ua) = \omega' a_d(u) = \omega' a_d (\omega')^{-1} \omega'(u) =$$
$$= \varphi(a_d)\omega'(u) = \varphi(a)\omega'(u) = a\omega'(u) = \omega'(u)a.$$

Таким образом, $\theta | \mathscr{C}(A) = 1_A$. Тогда по нашему предположению θ является внутренним автоморфизмом. Если θ — внутренний автоморфизм, определенный элементом $a' \in A$,

$$\theta\colon a \mapsto a' a (a')^{-1},$$

то $\omega' = \omega' a'_d$ — нужный нам изоморфизм $U_A \to V_A$ [1]).

[1]) Действительно, для $u \in U$ имеем $\omega f \omega^{-1}(v) = \omega' a'_d f (a'_d)^{-1} (\omega')^{-1}(u) = \omega' a'_d f((\varphi')^{-1}(u)(a')^{-1}) = \omega' f((\omega')^{-1}(u))(a')^{-1} a' = \omega' f (\omega')^{-1}(u) = \varphi(u)$. — *Прим. ред.*

24.26. Следствие. *Пусть A — самобазисное* QF-*кольцо с* In aut-*свойством, U — конечно порожденный точный правый A-модуль, а $B = \operatorname{End} U_A$. Тогда B также обладает* In aut-*свойством.*

Доказательство. Положим в теореме 24.25 $V = U$. Тогда $\omega \in B = \operatorname{End} U_A$ и φ является внутренним автоморфизмом, определенным изоморфизмом ω. $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 24.25 и ее доказательства.

24.27. Следствие. *Пусть A — квазифробениусово кольцо, $A_0 = e_0 A e_0$ — его базисное кольцо, а U и V — конечно порожденные точные правые A-модули. Тогда кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} U_A \approx \operatorname{End} V_A$ существует в том и только том случае, когда существует полулинейный (A_0, θ)-изоморфизм правых A_0-модулей Ue_0 и Ve_0.*

Групповые кольца над самоинъективными кольцами

В этом разделе мы докажем, что групповое кольцо AG конечной группы G самоинъективно справа тогда и только тогда, когда кольцо A самоинъективно справа. Отсюда непосредственно следует, что групповое кольцо AG квазифробениусово в том и только том случае, когда A квазифробениусово, что дает неистощимый источник QF-колец, не являющихся классически полупростыми, так как любая конечная группа G определяет квазифробениусово, но не классически полупростое групповое кольцо AG над любым полем A характеристики, делящей $|G|$.

Мы начнем с леммы о групповых кольцах над произвольным кольцом.

24.28. Лемма о следе для групповых колец. *Пусть G — произвольная группа, A — кольцо и $R = AG$ — групповое кольцо. Функция следа*

$$\operatorname{Tr}_G \begin{cases} AG \to A & (a_g \in A,\ g \in G), \\ \sum\limits_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum\limits_{g \in G} a_g \end{cases}$$

является элементом из $\operatorname{Hom}_A(AG, A)$. Для любого $r \in R$ и любого $g \in G$ определим далее $c_g[r]$ равенством $r = \sum\limits_{g \in G} c_g[r] g^{-1}$. Пусть M — правый AG-модуль. Тогда отображение

$$t\colon \operatorname{Hom}_{AG}(M, AG) \to \operatorname{Hom}_A(M, A),$$

определенное правилом

$$t(f)(m) = c_1[f(m)]$$

для всех $f \in \mathrm{Hom}_{AG}(M, AG)$ *и всех* $m \in M$, *оказывается мономорфизмом абелевых групп. Более того, если группа* G *конечна, мономорфизм* t *оказывается изоморфизмом.*

Доказательство. Сначала проверим, что гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_{AG}(M, AG)$ однозначно определяется морфизмом $t(f)$. С этой целью установим справедливость равенства

$$(1) \qquad c_{hk}[r] = c_k[rh]$$

для любых $h, k \in G$, $r \in AG$. В самом деле,

$$r = \sum_{g \in G} c_g[r]\, g^{-1}.$$

Тогда

$$rh = \sum_{g \in G} c_g[r]\, g^{-1} h = \sum_{g \in G} c_g[r]\,(h^{-1}g)^{-1}.$$

С другой стороны,

$$rh = \sum_{k \in G} c_k[rh]\, k^{-1}.$$

Полагая $k = h^{-1}g$, получаем $g = hk$, т. е.

$$c_{hk}[r] = c_k[rh],$$

что и требовалось. Поэтому

$$t(f)(mg) = c_1[f(mg)] = c_1[f(m)\cdot g] = c_g[f(m)],$$

т. е.

$$(2) \qquad c_g[f(m)] = t(f)(mg)$$

для любых $m \in M$, $g \in G$. Из равенства (2) вытекает, что t является мономорфизмом групп.

Для того чтобы показать, что t является изоморфизмом в случае конечной группы G, возьмем $p \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ и определим $f\colon M \to R$, положив

$$c_g[f(m)] = p(mg).$$

Тогда $f(m) \in R$ для любого $m \in M$, и, учитывая (2), получаем

$$t(f)(m) = c_1[f(m)] = p(m),$$

т. е. t действительно оказывается эпиморфизмом. □

24.29. Теорема (Коннел [63]). *Пусть* G — *конечная группа,* A — *любое кольцо. Тогда групповое кольцо* AG *самоинъективно справа в том и только том случае, когда* A *самоинъективно справа.*

Доказательство. Пусть A самоинъективно справа и $R = AG$. Так как $\mathrm{Hom}_R(R, R) \approx R$ (1, 3.6.3, стр. 162—163), то лемма 24.28 дает изоморфизм абелевых групп

$$t\colon R \to \mathrm{Hom}_A(R, A) = H,$$

где $t(r)(r') = c_{rr'}$ (1). Легко проверить, что t— изоморфизм R-модулей. Из 5.62 (1, стр. 351) следует, что H — инъективный правый R-модуль, так как A — инъективный правый A-модуль, а R — плоский левый А-модуль. Таким образом, кольцо R самоинъективно справа, как и требовалось. Обратное оставляем в качестве упражнения. □

24.30. Теорема. *Пусть* A — *квазифробениусово кольцо,* G — *конечная группа. Тогда групповое кольцо* $R = AG$ *квазифробениусово.*

Доказательство. Так как A артиново справа (и слева) и нётерово, а R — конечно порожденный A-модуль, то R как A-модуль имеет конечную длину. Однако любой односторонний идеал кольца R канонически является A-модулем, и, следовательно, A имеет конечную длину как A-модуль (с обеих сторон). Значит, ввиду 24.5 достаточно установить, что R самоинъективно (с одной стороны). Это, однако, следует из 24.29. □

Фундаментальным (пополняющим) идеалом группового кольца AG называется ядро функции следа $AG \to A$.

24.31. Упражнение. (a) (Дженингс [41].) Групповое кольцо AG конечной группы G над полем A характеристики, делящей $|G|$, не является классически полупростым кольцом. Если G есть p-группа, а A имеет характеристику p, то $\mathrm{rad}(AG)$ является фундаментальным идеалом и нильпотентен.

(b) (Коннел [63].) Групповое кольцо классически полупросто тогда и только тогда, когда A — классически полупростое кольцо, G — конечная группа и $|G|$ обратим в A (ср. теорему Машке (1, стр. 580)).

(c) (Дженнингс [41], Форманек [70].) Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, A — любое кольцо. Тогда фундаментальный идеал N кольца AG **резидуально нильпотентен** в том смысле, что $\bigcap N^n = 0$.

(d) (Коннел, Фаркаш [73], Рено [70], Джейн.) Если кольцо AG самоинъективно справа, то группа G конечна.

Кольца, являющиеся инъективными кообразующими

По теореме Мориты для того чтобы кольцо A обладало A-двойственностью, необходимо и достаточно, чтобы A являлось инъективным кообразующим как в категории A-mod, так и в категории mod-A (см. 23.16). Как мы отмечали в этой главе, примерами таких колец служат квазифробениусовы кольца, в том числе групповое кольцо AG конечной группы G над QF-кольцом A и, в частности, над полем (24.30). До 1966 г. QF-кольца были единственными известными примерами колец, являющихся инъективными кообразующими, но в 1966 г. Особская [66] предложила и другие примеры (см. 24.33). Сейчас мы рассмотрим теорему, позволяющую указать неквазифробениусово кольцо R, являющееся инъективным кообразующим как правый R-модуль, хотя теперь хорошо известны примеры двусторонних инъективных кообразующих (См., однако, пример 24.34.2.)

По поводу следующего предложения см. Адзумая [66], Особская [66] и Утуми [67].

24.32. Определение и предложение. *Кольцо R называется* ***псевдофробениусовым справа*** *(сокращенно —* ***правым*** PF-***кольцом****), если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:*

(a) *R — инъективный кообразующий в* mod-R.

(b) *Каждый точный правый R-модуль является образующим категории* mod-R.

(c) *R — самоинъективное справа кольцо с конечно порожденным и существенным правым цоколем.*

(d) *R — полусовершенное самоинъективное справа кольцо с существенным правым цоколем.*

(e) *Кольцо R самоинъективно справа и существенно артиново справа.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Ввиду 23.25 из (a) следует, что каждый правый идеал кольца R является аннуляторным. Таким образом, если M — точный правый R-модуль, такой, что $\mathrm{tr}_R\, M = I \neq R$, то существует ненулевой элемент $a \in R$, для которого $aI = 0$. Тогда $af(m) = 0$ для любых $f \in M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ и $m \in M$. Отсюда следует, что $aM^* = 0$. Поскольку модуль M точен, то R в mod-R является подмодулем (см. 1, стр. 189) и, значит, прямым слагаемым произведения M^I в категории mod-R, скажем $M^I = R \oplus X$. Тогда, применяя функтор $(\ )^* \approx \mathrm{Hom}_R(\ , R)$ и используя изоморфизм $(M^I)^* \approx (M^*)^I$, мы получаем, что R является прямым слагаемым модуля $(M^*)^I$. Следовательно, модуль M^* точен. Но тогда из того, что $aM^* = 0$, следует, что $a = 0$. Это противоречие показывает, что $\mathrm{tr}_R M = R$ и тогда по 3.26 M является образующим категории mod-R.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть G — прямая сумма инъективных оболочек представителей каждого класса эквивалентных простых правых R-модулей, т. е. G — наименьший кообразующий категории mod-R (см. 1, 3.55). Тогда G — точный модуль, т. е. является образующим, и $G^n = R \oplus X$ для некоторого натурального n.

По теореме 18.18 о единственности разложения R оказывается прямой суммой конечного множества неразложимых инъективных модулей с простыми цоколями. Это доказывает (c).

(c) $\Rightarrow$ (d). Из (c) следует, что R является прямой суммой инъективных оболочек минимальных правых идеалов. Тогда R обладает диаграммой Адзумаи. Следовательно, R — полулокальное SBI-кольцо ввиду 18.26 и, значит, полусовершенно вследствие 22.23.

(d) $\Rightarrow$ (a). В силу 22.23 каждый простой правый R-модуль V изоморфен eR/eJ для некоторого неразложимого идемпотента e, т. е. цоколю некоторого главного неразложимого модуля. Таким образом, R является предкообразующим. Но поскольку R_R — инъективный модуль, то ввиду 3.41 он является кообразующим.

Это доказывает эквивалентность условий (a) — (d), а эквивалентность условий (c) и (e) следует из 19.13A. □

24.33. Упражнение. (a) (Фейс [76d].) Кольцо R является правым PF-кольцом, если оно самоинъективно справа, а каждый точный ([квази]инъективный) правый R-модуль эндоконечен.

(b) (Особская [66b]). Существуют правые PF-кольца, которые не артиновы и не нётеровы ни слева, ни справа.

(c) (Онодера [68]). Если кольцо R является кообразующим и слева, и справа, то оно самоинъективно и слева, и справа.

(d) (Морита [58], Като [68].) R является и левым, и правым PF-кольцом в том и только том случае, когда каждый конечно порожденный R-модуль рефлексивен.

(e) (Особская [66b].) Если R является правым и левым PF-кольцом и совершенно слева или справа, то R квазифробениусово. [*Указание*: применить 23.20.]

В силу 24.5 и 24.32 квазифробениусовы кольца псевдофробениусовы и слева, и справа. Следующие примеры показывают, что PF-кольцо не обязано быть квазифробениусовым.

24.34. Примеры (Особская [66b]).

24.34.1. Инъективный кообразующий без условий обрыва цепей.

Пусть $\mathbb{Z}_p$ обозначает кольцо целых p-адических чисел для некоторого простого p.

Определим кольцо R, положив

$$(R,\ +) = \mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

и

$$(\lambda,\ x)(\mu,\ y) = (\lambda\mu,\ \lambda y + \mu x)$$

для любых $(\lambda, x), (\mu, y) \in R$. Умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения (проверка использует тот факт, что $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ и $\mathbb{Z}_{(p)}$ — коммутативное кольцо).

Пусть I — собственный идеал кольца R. Если он не совпадает ни с какой аддитивной подгруппой группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, то выберем $(\lambda, x) \in I$, где $\lambda \neq 0$. Тогда $(\lambda, x)\cdot\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty} \subseteq I$ и $I/\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — идеал кольца $\mathbb{Z}_{(p)}$. Такой идеал имеет вид (p^i) для некоторого $i \geqslant 0$, и тогда $I = ((p^i, 0))$.

Таким образом, R — локальное кольцо с максимальным идеалом $((p, 0))$ и R содержит единственный простой R-модуль, а именно подгруппу группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ порядка p. Тогда в силу 3.31 (1, стр. 194) из инъективности модуля R_R следует, что он является кообразующим категории mod-R.

Пусть f — любой гомоморфизм идеала I кольца R в R.

Если $I \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то f отображает I в подгруппу без кручения группы $(R, +)$, а именно в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Так как $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — инъективная группа, то f продолжается до элемента $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{(p)}$. Тогда $f(0, x) = (\lambda, 0)\cdot(0, x)$ для всех $(0, x) \in I$.

Если $I = ((p^i, 0))$ и $f(p^i, 0) = (0, x)$, то существует $y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, такой, что $p^i y = x$. Тогда $f(p^i, 0) = (0, y)\cdot(p^i, 0)$, т. е. $f(\lambda, z) = (0, y)\cdot(\lambda, z)$ для всех $(\lambda, z) \in ((p^i, 0)) = I$.

Если $I = ((p^i, 0))$ и $f(p^i, 0) = (\lambda, x)$, то $(0 : (p^i, 0))$ является аддитивной подгруппой порядка p^i, аннулируемой элементом λ. Значит, p^i делит λ. Тогда $f(p^i, 0) = (\lambda/p^i, y)\cdot(p^i, 0)$, где элемент y определен выше. Таким образом,

$$f(\mu, z) = (\lambda/p^i, y)\cdot(\mu, z)$$

для всех $(\mu, z) \in I$.

Следовательно, во всех случаях гомоморфизм f определяется левым умножением и по критерию Бэра (1, 3.41, стр. 205) модуль R_R инъективен.

24.34.2. Неинъективный кообразующий категории mod-R без условия максимальности для прямых сумм.

Пусть R — алгебра над полем F с базисом

$$\{1\} \cup \{e_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\},$$

таким, что

(i) 1 — двусторонняя единица алгебры R.

(ii) Для всех i и всех j выполняются условия

$$e_i x_j = \delta_{ij} x_j,\ x_j e_i = \delta_{i,\,j-1} x_j,\ e_i e_j = \delta_{ij} e_i \text{ и } x_i x_j = 0.$$

Здесь δ_{ij} — дельта Кронекера. Пусть, далее, $J = \mathrm{rad}\, R$ и π: $R \to R/J$ — естественный гомоморфизм.

Легко проверить, что это умножение элементов базиса ассоциативно и что $J = (\{x_i \mid i \geqslant 0\})$. Более того,

$$(R/J, +) = \sum \pi(e_i)\cdot F + 1\cdot F,$$

и простыми R-модулями являются в точности $\{\pi(e_i)\cdot R\}$ и $R/\sum e_i R$. Так как они изоморфны $\{x_{i+1}R\}$ и $x_0 R$ соответственно, то R будет кообразующим, если каждый $e_i R$ инъективен.

Пусть I — правый идеал алгебры R и f: $I \to e_i R$. Отметим, что $(e_i R, +) = e_i F + x_i F$, причем $f = 0$ на $I \cap R(1 - e_i - e_{i-1})$, где $e_{-1} = 0$. Значит, f может быть ненулевым только на

$$e_i F + e_{i-1} F + x_i F + x_{i+1} F.$$

Более того, $x_{i+1} R$ минимален, но не изоморфен $x_i R$. Тогда f должно быть равным 0 на $x_{i+1} R$. Значит, f можно продолжить на $I + (1 - (e_i + e_{i-1}))R$, положив его равным 0 на последнем слагаемом. Если $e_{i-1} \notin I$, положим $f(e_{i+1}) = 0$. Тогда f продолжается на $I + (1 - e_i)R$. Если $e_i \in I$, то f можно продолжить до отображения из R в $e_i R$. Именно, если $x_i \notin I$ или $f(x_i) = 0$, то положим $f(e_i) = 0$. В противном же случае $f(x_i) = x_i \nu$ для некоторого $\nu \in F$ и можно положить $f(e_i) = e_i \nu$. Во всех случаях мы продолжили гомоморфизм f до отображения из R. Значит, $e_i R$ инъективен, согласно критерию Бэра. □

24.35. Пример (Леви [66]). Пусть R — кольцо формальных степенных рядов от переменной x, индексированных семейством W всех вполне упорядоченных подмножеств множества неотрицательных действительных чисел. Таким образом, элемент $r \in R$ имеет вид $r = \sum_{i \in w} a_i x^i$, где $w \in W$ и $a_i \in \mathbb{R}$. Все ненулевые идеалы кольца R исчерпываются главными идеалами (x^b) и идеалами вида

$$(x^{>b}) = \{x^c u,\ | c > b \text{ и } u \text{ обратим в } R\}.$$

Тогда если I — произвольный ненулевой идеал, то кольцо R/I самоинъективно (и не нётерово) (доказательство см. у Леви [66]). Более того, R — локальное кольцо, и легко проверить, что единственный простой модуль $R/\mathrm{rad}\, R$ вкладывается в R/I для любого ненулевого идеала I, т. е. R/I является инъективным кообразующим. Этот пример гораздо нагляднее, чем пример из 24.34, поскольку любое факторкольцо кольца многочленов $k[x]$ (над любым полем k) по любому ненулевому идеалу квазифробениусово. (Доказательство?)

24.36. Предложение. *Пусть R — базисное кольцо с радикалом J.*

(a) *Кольцо R является* PF-*кольцом в том и только том случае, когда оно изоморфно инъективной оболочке своей вершины R/J в категории* mod-R.

(b) *Пусть A — идеал правого* PF-*кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R/A является правым* PF-*кольцом.*

(2) *Левый аннулятор ${}^{\perp}A$ идеала A является главным правым и главным левым идеалом кольца R.*

(3) *Существует* $z \in R$, *такой, что* ${}^{\perp}A = zR = Rz$.
(4) *Существует* $z \in R$, *такой, что* $z^{\perp} = A$ *и* $zR = Rz$.
(5) ${}^{\perp}A$ *и* R/A *изоморфны как* R-*модули*.

Доказательство. (a) Если $R = \widehat{R/J}$, то R является правым PF-кольцом в силу 24.32 (c). Обратно, если R — базисное кольцо и правое PF-кольцо, то из доказательства импликации (d) $\Rightarrow$ (a) предложения 24.32 следует, что $R \approx \widehat{R/J}$.

(b) Вершина любого модуля M изоморфна прямому слагаемому вершины модуля M/MA для любого идеала A, так как top $M = MJ$ полупроста и существует точная последовательность

$$0 \to (MJ + MA)/MJ \to M/MJ \to \text{top } M/MA \to 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (3). Поскольку, согласно (a), $R = \widehat{R/J}$ и так как вершина модуля R/A вкладывается в R/J, то существует вложение вершины модуля R/A в R. Снова применяя (a), а также предположение (1), получаем, что R/A является существенным расширением своей вершины, и, значит, R/A также можно вложить в R (1, 3.57). Тогда A является правым аннулятором образа z элемента $[1 + A]$ при этом вложении (ср. 24.1). Так как модуль R инъективен в mod-R, то в силу 19.11 левый идеал Rz является аннуляторным и тогда $Rz = {}^{\perp}A$. Из того, что $zR \approx R/A$ — инъективный кообразующий категории mod-R/A, следует, что каждый простой подмодуль W модуля ${}^{\perp}A$ в категории mod-R/A изоморфен подмодулю V модуля zR. Однако поскольку R — базисное кольцо и самоинъективно справа, то $V = W$, так что

$$\text{soc } {}^{\perp}A = \text{soc } zR.$$

Так как R имеет существенный правый цоколь, то существен и правый цоколь идеала ${}^{\perp}A$. Из того, что правые цоколи идеалов zR и ${}^{\perp}A$ совпадают, следует, что ${}^{\perp}A$ является инъективной оболочкой цоколя идеала zR. Но $zR \approx R/A$ есть инъективная оболочка цоколя идеала zR. Следовательно, ${}^{\perp}A = Rz = zR$.

(2) $\Rightarrow$ (3) вытекает из 19.43. Более того, импликации (3) $\Rightarrow$ (4) и (4) $\Rightarrow$ (5) по существу установлены в ходе доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (3). Наконец, так как R имеет существенный цоколь, то из (5) следует, что R/A имеет существенный цоколь и ввиду 19.12 R/A инъективен. Тогда по 24.32(c) кольцо R/A является правым PF-кольцом. Таким образом, (5) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Упражнения к гл. 24

1. Если A — область главных (левых и правых) идеалов, то кольцо A/K квазифробениусово для любого идеала $K \neq 0$. Вывести отсюда, что коммутативная алгебра $A = k[x]$ над полем k либо квазифробениусова, либо является кольцом полиномов.

2. Коммутативная область целостности R тогда и только тогда является дедекиндовым кольцом, когда R/K — квазифробениусово кольцо для любого идеала $K \neq 0$. Ср. упр. 8 к гл. 19.

3. Кольцо R является артиновым справа кольцом главных правых идеалов в том и только том случае, когда каждое его факторкольцо является QF-(соотв. правым PF-)кольцом [см. 24.36].

4. Пусть $A = k[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x и y над полем k. Тогда $\bar{A} = A/(x^2, y^2)$ — квазифробениусова локальная алгебра размерности 4 над полем k. Более того, soc $\bar{A} = \bar{A}\bar{x}\bar{y}$, rad $\bar{A} = \bar{A}\bar{x} + \bar{A}\bar{y}$, а кольцо $\bar{A}$/soc $\bar{A}$ не квазифробениусово.

5. Коммутативное локальное артиново кольцо квазифробениусово тогда и только тогда, когда его цоколь прост.

6. Усеченное кольцо многочленов от n переменных определяется как

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{r_1+1}, \ldots, x_n^{r_n+1}),$$

где $k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n независимых переменных. Показать, что A квазифробениусово, выяснив, что цоколь A прост (в действительности порожден произведением $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$).

7. (Басс [62].) Если A нётерово с обеих сторон и inj$\cdot$dim$_A$ $A \leqslant 1$ и если x необратим и не является делителем нуля в $\mathscr{C}(A)$, то $A/(x)$ квазифробениусово (см. упр. 1).

8. Пусть ${}_BU_A$ — контекст двойственности Мориты. Тогда A квазифробениусово, если и только если квазифробениусово B. Исследовать, какие другие кольцевые свойства сохраняются.

9. Пусть A является QF-кольцом. Тогда кольца A и B эквивалентны в смысле Мориты в том и только том случае, когда существует двойственность

$$\text{fin.gen.mod-}A \rightsquigarrow \text{fin.gen.}B\text{-mod}.$$

10 (Бэр [43b] и Икеда [51]). Если кольцо A артиново справа и существует структурный антиизоморфизм

$$\begin{cases} \text{правые идеалы кольца } A \to \text{левые идеалы кольца } A, \\ I \to I', \end{cases}$$

то A квазифробениусово. Более того, $I' = \operatorname{ann}_A I$ для каждого I.

11 (Икеда — Накаяма). Конечномерная алгебра A над полем k квазифробениусова тогда и только тогда, когда каждый ее правый идеал является аннуляторным (а для этого достаточно, чтобы все простые правые идеалы и $\operatorname{rad} A$ оказались правыми аннуляторными идеалами).

12 (Накаяма [39], Брауэр-Несбит [37]). Алгебра A над полем k называется **фробениусовой**, если $n = \dim_k A$ конечна и выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) Модуль A^*, k-дуальный модулю A, изоморфен A в категории mod-A.

(b) Каждый правый идеал I является аннуляторным и выполнено следующее соотношение:

$$(*) \qquad \dim_k ({}^{\perp}I) + \dim_k I = \dim_k A.$$

(c) A квазифробениусово и соотношение $(*)$ выполняется для правых и левых идеалов.

(d) Существует гиперплоскость векторного пространства A над полем k (т. е. векторное пространство размерности $n-1$), которая не содержит ненулевых идеалов.

(e) Существует $f \in A^*$, такой, что $\ker f$ не содержит ненулевых идеалов. [Ввиду (c) и (e) эти условия право-лево симметричны, и тогда можно предположить, что $\ker f$ является гиперплоскостью.]

13 (Накаяма [41]). **Автоморфизм Накаямы** Nak фробениусовой алгебры A над полем k определяется как линейная функция f, указанная в упр. 12 (e), такая, что $\ker f$ не содержит ненулевого идеала, и задаваемая тождеством

$$f(\mathrm{Nak}(x)y) = f(yx) \ \forall \ x, y \in A,$$

т. е. $\mathrm{Nak}(x)y - yx$ лежит в гиперплоскости $H = \ker f$. Более того, H инвариантно относительно Nak, т. е. $\mathrm{Nak}(x) \in H$ для любого $x \in H$. Автоморфизм Накаямы определяется однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры A (ср. 23.33).

14. Конечномерная алгебра A над полем k квазифробениусова тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий: (a) Базисный модуль алгебры A в категории mod-A является прямым слагаемым модуля $A^* = \operatorname{Hom}_k(A, k)$. (b) A^* является образующим категории mod-A.

15 (Тахикава [69]). Если R совершенно слева и каждый конечно порожденный точный правый модуль M является образующим категории mod-R, то R является правым PF-кольцом. Таким образом, любое артиново слева или справа кольцо с этим свойством оказывается квазифробениусовым. (См. также упр. 25 и 26).

16. Пусть A — полупримарное кольцо, являющееся инъективным кообразующим категории A-mod. Обязано ли A быть QF-кольцом? [Подсказка: нет. Ср. Като [68b] и также упр. 24.]

17. Пусть A — самобазисное QR-кольцо и U — образующий в mod-A, не являющийся прообразующим (например, $U = A \oplus X$, где X не является конечно порожденным проективным модулем). Показать, что U — конечно порожденный точный и проективный модуль над кольцом $B = \operatorname{End} U_A$, но не является образующим категории B-mod. Следовательно, B — не QF-кольцо, хотя U_A точен и, возможно, конечно порожден.

18 (Фейс — Уокер Э. [67]). Пусть A самоинъективно справа, а B — кольцо эндоморфизмов свободного модуля с бесконечной системой образующих. Тогда B самоинъективно справа в том и только том случае, когда A квазифробениусово (ср. Сандомирский [70]).

19. Если U — образующий категории mod-R и его кольцо эндоморфизмов самоинъективно справа, то R самоинъективно справа.

20 (Като [71]). Если кольцо R — двусторонний инъективный кообразующий (т. е. R — правое и левое PF-кольцо), то любой конечно порожденный точный модуль M инъективен как $\operatorname{End}_R M$-модуль в том и только том случае, когда он рефлексивен.

21. Следующие свойства кольца A эквивалентны: (a) Каждый циклический правый A-модуль (и каждый циклический левый A-модуль) содержится в проективном A-модуле. (b) Каждый правый идеал (и каждый левый идеал) является аннулятором конечного подмножества кольца A. (c) A квазифробениусово.

22 (Фейс — Уокер [67]). Кольцо A квазифробениусово тогда и только тогда, когда каждый инъективный правый A-модуль изоморфен прямой сумме правых главных неразложимых идеалов кольца A.

23 (Кавада [57]). Назовем модуль M **псевдоинъективным**, если каждый изоморфизм подмодуля модуля M в M индуцируется эндоморфизмом модуля M (ср. Джейн — Синг [67]). Конечномерная алгебра A над алгебраически замкнутым полем псевдоинъективна как правый A-модуль в том и только том случае, когда

она квазифробениусова (и, следовательно, псевдоинъективна как левый A-модуль).

24. Если A — квазифробениусово кольцо, то gl.dim. A равна 0 или ∞.

25A (Фейс [76d]). Кольцо R называется **правым FPF-кольцом,** если каждый конечно порожденный точный правый R-модуль является образующим (см. упр. 15). Правое FPF-кольцо ограничено справа в том смысле, что любой существенный правый идеал содержит ненулевой двусторонний идеал. Более того, любое примитивное правое FPF-кольцо является простым артиновым кольцом, а любое первичное правое FPF-кольцо антисингулярно справа. Нётерово с обеих сторон первичное кольцо является (правым и левым) FPF-кольцом в том и только том случае, когда R — наследственное ограниченное кольцо без идемпотентных идеалов. Коммутативная область целостности оказывается FPF-кольцом тогда и только тогда, когда она полунаследственна. Если G — конечная группа порядка n, а R — правое (F)PF-кольцо, то (F)PF-кольцом будет и групповое кольцо RG. (Для $R = \mathbb{Z}$ это оказывается неверным.)

25B. Полусовершенное правое FPF-кольцо R является прямой суммой своих однородных правых идеалов, и на самом деле каждый главный неразложимый модуль однороден. Более того, базисное кольцо R_0 кольца R *строго ограничено справа* в том смысле, что каждый ненулевой правый идеал содержит ненулевой двусторонний идеал. Любое самоинъективное справа строго ограниченное справа кольцо R является правым FPF-кольцом. Частичное обращение: любое полусовершенное справа правое FPF-кольцо, радикал Джекобсона которого является ниль-идеалом, самоинъективно справа. (Ср. теорему Тахикавы [69], сформулированную в 24.8 (h).)

26A (Фейс [76b], [76c], [76d]). Полупервичное правое FPF-кольцо R, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, есть конечное произведение первичных правых FPF-колец. Первичное кольцо Голди (правое и левое одновременно) является правым FPF-кольцом в том и только том случае, когда каждый ненулевой правый идеал является образующим категории mod-R, а кольцо R ограничено справа. Ограниченное первичное кольцо Голди, ненулевые конечно порожденные идеалы которого являются образующими (и правыми, и левыми) оказывается FPF-кольцом (и правым, и левым).

26B. Нётерово полусовершенное кольцо R является FPF-кольцом тогда и только тогда, когда оно есть конечное произведение полусовершенных ограниченных «дедекиндовых первичных колец»

(т. е. HNP-колец без нетривиальных идемпотентных идеалов) и QF-колец. (Для коммутативного кольца R предположение о полусовершенности можно опустить.)

27. Конечномерная алгебра A над полем k называется **симметрической**, если существует невырожденная билинейная форма $f\colon A \times A \to k$, ассоциативная и симметричная (т. е. $f(ab, c) = f(a, bc)$ и $f(a, b) = f(b, a)$ для любых $a, b, c \in A$). Любая групповая алгебра kG конечной группы G над полем k симметрическая, а каждая симметричная алгебра над полем k фробениусова.

28. Доказать строгие включения:

(групповые алгебры конечных групп) $\subset$ (симметрические алгебры) $\subset$ (фробениусовы алгебры) $\subset$ (QF-алебры).

29 (Накаяма [42]). Конечномерная алгебра A квазифробениусова в том и только том случае, когда структуры односторонних идеалов автодуальны.

30 (Накаяма [39, 41]). Пусть R — самобазисное артиново кольцо с радикалом J и правыми главными неразложимыми модулями $e_1R, \ldots, e_nR$. Напомним, что eR/eJ называется вершиной модуля eR для любого $e = e^2$. Показать, что кольцо R квазифробениусово в том и только том случае, когда существует перестановка p набора $\{1, \ldots, n\}$ такая, что имеет место равенство

$$\operatorname{top} e_iR = \operatorname{soc} e_{p(i)} R, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и выполняется аналогичное левостороннее условие. (Таким образом, для любого артинова кольца R из этого условия следует, что R квазифробениусово тогда и только тогда, когда квазифробениусово его базисное кольцо.)

31. Следующие свойства кольца R эквивалентны: PJ1. R — примарно разложимое артиново полуцепное кольцо; PJ2. вершина и цоколь любого конечно порожденного (правого или левого) R-модуля изоморфны; PJ3. вершина и цоколь любого модуля изоморфны; PJ4. инъективная оболочка и проективное накрытие каждого конечно порожденного модуля изоморфны; PJ5. кольцо R нётерово, а вершины и цоколи (соотв. инъективные оболочки и проективные накрытия) неразложимых модулей изоморфны (Бойл [73]).

32 (Ауслендер). Каждый главный неразложимый модуль групповой алгебры конечной группы над полем имеет изоморфные вершину и цоколь (ср. упр. 31).

Замечания к гл. 24

Фробениусовы и квазифробениусовы кольца возникали при изучении представлений конечной группы над полем k. Из теоремы 24.30 следует, что групповая алгебра kG квазифробениусова, но на самом деле она не только квазифробениусова, но и симметрична. Симметрические алгебры были введены Несбиттом и Троллом (в статье 1937 года в Proc. Nat. Acad. Sci). По существу, идея симметрии возникла из классического определения фробениусовой алгебры A над полем k, а именно: алгебра A фробениусова тогда и только тогда, когда правое регулярное представление $\mathbf{R}$ и левое регулярное представление $\mathbf{S}$ эквивалентны между собой. Тогда A симметрическая, если $\mathbf{R}$ можно превратить в $\mathbf{S}$ с помощью невырожденной симметричной матрицы (см. Накаяма [39, стр. 611] и Кэртис — Райнер [69, гл. 9, § 61, 66]).

Вне зависимости от того, какое определение QF-кольца применялось (см. упр. 10, 12, 28 и 29), различные двойственности были очевидны. Двойственность

$$(D_1) \qquad \text{fin.gen.mod-}R \rightsquigarrow \text{fin.gen.}R\text{-mod},$$

определяемая функтором $\mathrm{Hom}_R(\ \ , R)$, однако, не была отчетливо выявлена до работ Мориты — Тахикавы [56], Дьёдонне [58] и Мориты [58] (ср. Тахикава [58]). Дьёдонне выделил три двойственности: (D_1), определенную выше, (D_2) — аннулирование односторонних идеалов, и двойственность (D_3) (для случая, когда R — алгебра конечной размерности над полем k):

$$(D_3) \qquad \text{fin.gen.mod-}R \rightsquigarrow \text{fin.gen.}R\text{-mod},$$

индуцированную k-двойственностью (D_1) для $R = k$. Ввиду упражнения 23.31 (b) двойственность (D_3) также индуцируется функтором $\mathrm{Hom}_R(\ \ , A')$, где A' есть k-дуальный модуль. Таким образом, A-двойственность (D_1) и A'-двойственность (D_3) совпадают в том и только том случае, когда $A \approx A'$ (тогда и только тогда, когда алгебра фробениусова; см. упр. 14).

Бэр [43b] и Икеда [51] доказали, что любая двойственность между структурами левых и правых идеалов артиновых колец задается аннулированием и, значит, существует только для QF-колец. (См. упр. 11.)

Другая двойственность, задаваемая с помощью аннуляторов, имеет место для любого инъективного кообразующего E категории mod-R над произвольным кольцом R: если I — любой правый идеал, то

$$I = \mathrm{ann}_R\,\mathrm{ann}_E\,I$$

(Морита — Кавада — Тахикава [57], Морита [58], Тахикава [58], Адзумая [59] и Розенберг — Зелинский [61]). Более того, любой

эндоконечный (т. е. конечный над своим кольцом эндоморфизмов) инъективный кообразующий сбалансирован (Длаб — Рингель [72b]). Таким образом, над артиновыми кольцами любой инъективный кообразующий сбалансирован (см. 19.16).

Особская [66b] построила и охарактеризовала кольца, которые являются инъективными кообразующими, и показала, что они не обязательно квазифробениусовы (24.32). (Такие кольца появились также у Леви [66a] и у Клатта и Леви [69] — см. пример 24.35.) Оказалось, что это кольца, над которыми все точные модули являются образующими (Адзумая [66], Утуми [66]. Ср. Като [68]). Таким образом, характеризация колец с контекстом R-двойственности завершается предложением 24.32, сводящимся к выяснению того, что означает самоинъективность; проблема решена только в частных случаях (например, когда R нётерово справа или слева, и тогда оно оказывается квазифробениусовым (см. 24.5) или регулярным (см. Утуми [56])).

Самоинъективные артиновы кольца были охарактеризованы как QF-кольца Икедой [52] (где критерий Бэра назывался условием Шоды). Более простые доказательства были предложены Икедой и Накаямой [54], где условие артиновости заменено условием нётеровости. Дальнейшее улучшение путем перехода к односторонним условиям осуществили Эйленберг и Накаяма [55] (ср. Фейс [66]), доказавшие, что глобальная размерность QF-кольца равна 0 или ∞. Кроме того, групповое кольцо конечной группы над коммутативным кольцом K квазифробениусово в том и только том случае, когда K квазифробениусово,— результат, установленный для произвольного кольца K Коннелом [63] (теорема 24.29). Джанс [59b] расширил понятие фробениусовой алгебры (над полем) на бесконечномерные алгебры и доказал, что они остаются самоинъективными. Кэртис [59] заложил основы теории Галуа квазифробениусовых колец. Накаяма [50b] объединил эти два подхода — теорию Галуа и (квази)фробениусовы алгебры — во вдохновенном эссе, и его библиография содержит другие ссылки по этим вопросам, включая некоторые его статьи о теории Галуа артиновых колец.

Каш [54], [60], [61] обобщил фробениусовы кольца до фробениусовых расширений колец, а Мюллер [64], [65] осуществил аналогичный переход от квазифробениусовых колец к квазифробениусовым расширениям. Таким образом, R является левым QF-кольцом над подкольцом S, если R — конечно порожденный проективный левый S-модуль, а S-дуальный модуль R^* порождает категорию R-mod таким образом, что R является (R, S)-прямым слагаемым некоторого множества экземпляров модуля R^*. (Тогда R квазифробениусово в том и только том случае, когда квазифробениусово кольцо S. Ср. Морита [62], [67].)

Тролл [48] определил иерархию алгебр, обобщающих QF-алгебры: QF-1, QF-2, QF-3. Кольцо (или алгебра) R называется правым QF-1-кольцом, если каждый точный правый R-модуль M сбалансирован, т. е. естественное отображение $R \to \mathrm{Biend}_R\, M$ сюръективно. Тролл и Несбитт [46, стр. 560] доказали, что QF-алгебры являются QF-1-алгебрами. Это было сделано в два шага: сначала они показали, что базисный модуль e_0R является прямым слагаемым любого точного модуля над QF-кольцом. В этой статье e_0R называется редуцированным регулярным представлением, и этот результат на самом деле доказывает, что любая QF-алгебра является PF-кольцом,— результат, справедливый и для колец (см. 24.32).

Второй шаг доказательства Несбитта — Тролла сбалансированности модуля M заключается в доказательстве того, что любой модуль, содержащий e_0R в качестве прямого слагаемого, сбалансирован. Короче говоря, первый шаг устанавливает, что M — образующий категории mod-R, второй шаг устанавливает, что образующие сбалансированы, — результат 7.1 (1, стр. 404), который, как заметил Морита [58], справедлив для произвольных колец. (См. 1, 7. 1, стр. 404, ср. также с теоремой Фуллера, гл. 17, упр. 17.) Список более поздних статей о QF-1-, QF-2- или QF-3-кольцах включает: Камилло [70a], Камилло — Фуллер [72] (где независимо от Длаба — Рингеля [72] доказано для артиновых алгебр, т. е. конечно порожденных алгебр над артиновыми центрами, что каждое факторкольцо кольца R будет QF-1-кольцом в том и только том случае, когда R — примарно разложимое полуцепное кольцо; Фуллер [70b] доказал примарную разложимость, ср. также Джанс [70]), Колби — Раттер [73] (здесь приведена обширная библиография), Диксон — Фуллер [70] (результат, содержащийся в ее названии, обобщен в статье Рингеля [74] до такого: нётеровы коммутативные QF-1-кольца квазифробениусовы; ср. Камилло [70a], Флойд [68]), Длаб — Рингель [72a], [72b], [72c], [72d], Фуллер [68b], Джанс [69], [70], Харада [65b], [66], Като [72], Морита [69] (распространивший свою двойственность на QF-3-кольца), Рингель [74], Рингель — Тахикава [75] и Тахикава [73] (обширный трактат о QF-1- и QF-3-кольцах).

Вслед за теоремой Голди появились работы, характеризующие порядки в различных типах колец и среди них порядки в QF-кольцах: Джанс [67], Мьюборн — Уинтон [69], Масаикэ [71] и Тахикава [71, стр. 241 и далее]. См. также библиографию в работах В. П. Елизарова [69] и Фейса [71b].

Возвращаясь к двойственности в QF-кольцах, отметим, что Фейсом и Уокером был выявлен еще и другой аспект двойственности. Произвольное кольцо R квазифробениусово тогда и только тогда, когда каждый проективный модуль инъективен (Фейс — Уокер Э. [67]). Дуальная теорема была доказана Фейсом [66a] (см. теоремы 24.12 и 24.23). Доказательства этих теорем привели к множеству теорем о прямых разложениях модулей, включая и понятие $\sum$-инъективности (см. гл. 20).

Ссылки

Асано К. [39], Адзумая [59], [66], Басс [62], [67], Брауэр [63], Брауэр — Несбитт [37], Бэр [43b], Вагонер [71], Гевиртсман [67], Джанс [59a], [59b], [61], [67], [69], [70]. Джейн — Сингх [67], Джекобсон [64], Дженнингс [41], Диксон — Фуллер [70], Длаб — Рингель [72], Дьёдонне [58], Елизаров [69], Икеда [51], [52], Икеда — Накаяма [54], Кавада [57], Камилло [70a], Камилло — Фулер [72], Като [68a], Клатт — Леви [69], [68b], [72], Каш [54], [60], [61], Колби — Раттер [73], Кон [66a], Коннел [63], Кэртис [59], Кэртис — Райнер [69], Леви [66a], Масаикэ [71], Морита [58], [62], [66], [67], [69]. Морита — Тахикава [56], Мьюборн — Уинтон [69], Мюллер [64, 65], Накаяма [39], [40a], [40b], [42], [50a], [50b], Онодера [68], [71], Особская [66b], Парайгис [71], Рено [70], Рингель [74], Рингель — Тахикава [75], Тахикава [58], [62], [69], [71], [73], Утуми [56], [60], [66], [67], Фаркас [73], Фейс [66a], [71b], [76b], [76c], [76d], Фейс — Уокер Э. [67], Флойд [68], Форманек [70], Фуллер [68a], [68b], [69a], [70a], [70b], [72], Ханнула [73], Эйленберг — Икеда — Накаяма [55], Эйленберг — Нагао — Накаяма [56], Эйленберг — Накаяма [55, 57].

Глава 25

$\sum$-ЦИКЛИЧЕСКИЕ И ПОЛУЦЕПНЫЕ КОЛЬЦА

Первые три раздела этой главы посвящены результатам Уорфилда [75] о строении полуцепных колец [1]). Основная теорема 25.3.4 выясняет, когда каждый конечно представимый левый модуль над кольцом R разлагается в прямую сумму цепных модулей; это имеет место тогда и только тогда, когда само R как левый и как правый модуль разлагается в такую прямую сумму, или тогда и только тогда, когда R — полуцепное кольцо. (Определения см. в разделе 0.) В этом случае любой конечно порожденный проективный модуль P и любой его конечно порожденный подмодуль M обладают «согласованными» разложениями в прямую сумму цепных модулей (см. 25.3.3 и далее). Кроме того, любое нётерово полуцепное кольцо разложимо в конечное прямое произведение артинова и (полу)первичных колец (25.3.5). Эта теорема напоминает теорему Чаттерса (20.30) для наследственных колец и теорему Крулля — Асано — Голди (20.37) для колец главных идеалов, и, более того, используемый для их доказательства общий метод Робсона (20.35) применяется и здесь.

Полуцепные кольца совпадают с классом колец, над которыми конечно представимые модули суть прямые суммы циклических цепных модулей (25.3.4). (Это обобщает и усиливает некоторые результаты гл. 20, особенно 20.41 и 20.43.) Кроме того, любой циклический цепной модуль над полусовершенным кольцом является локальным модулем, на самом деле главным циклическим модулем. Поэтому над полуцепными кольцами любой конечно представимый модуль есть прямая сумма главных циклических модулей.

Располагая результатами Уорфилда [75], в разделе 4 мы, добавляя несколько современных штрихов, доказываем главный результат об артиновых полуцепных кольцах, принадлежащий Накаяме [41]: артиново кольцо является полуцепным тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму главных циклических модулей, а также тогда и только тогда, когда каждый доминантный правый или

[1]) Аналогичные результаты независимо получили Ю. А. Дрозд и В. В. Кириченко. А именно: теорема 25.2.6, а также 25.3.4 доказаны Ю. А. Дроздом (*Матем. заметки*, 18 (1975), № 5, стр. 705—710); теоремы 25.3.5 и 25.3.6 доказаны в работе В. В. Кириченко (*Матем. сб.*, 99 (1976), стр. 559—581). О других связях работ В. В. Кириченко и Уорфилда см. примечание на стр. 390.— *Прим. перев.*

левый главный неразложимый идеал всякого факторкольца $R/(\operatorname{rad} R)^n$ квазиинъективен (или, что эквивалентно, инъективен по модулю $(\operatorname{rad} R)^n$) для каждого n (Фуллер [69a], Айзенбуд — Гриффитс [71a]). Над артиновым полуцепным кольцом каждый модуль является $\sum$-цепным (25.4.2). Любое артиново полуцепное кольцо имеет конечный модульный тип, и структура идеалов таких колец конечна (25.4.4, 25.4.5). Примарно разложимые полуцепные кольца характеризуются в 25.4.6 (A и B). Заключительная часть раздела 4 посвящена σ-циклическим кольцам и кольцам с $\sum$-циклическими инъективными модулями. Любое FBG-кольцо подобно σ-циклическому кольцу (20.33), а любое артиново справа FBG-кольцо обладает контекстом двойственности (25.4.11).

В коротком последнем разделе мы доказываем теорему Айзенбуда — Гриффитса — Робсона о том, что любое собственное факторкольцо R/I нётерова наследственного первичного кольца R является полуцепным. Доказательство (и сама теорема в этой общности) восходит к Айзенбуду и Гриффитсу [71a] и включает в себя элегантное применение характеризации Накаямой (и Фуллером) артиновых полуцепных колец (как колец, над которыми доминантные главные неразложимые модули инъективны по модулю своих аннуляторов). Ступенью к доказательству служит теорема Веббера, поскольку она утверждает, что R/I артиново справа. (См. теорему Веббера — Чаттерса 20.29.)

0. Терминология и примеры

Модуль M называется **$\sum$-циклическим** (как было определено в гл. 20), если он — прямая сумма циклических модулей. Если число слагаемых в этой прямой сумме конечно, то M называется **σ-циклическим.** Тогда если каждый (конечно порожденный) правый R-модуль является $\sum$-циклическим (σ-циклическим), то говорят, что категория mod-R **$\sum$-циклическая (σ-циклическая).** В этом случае удобно также говорить о самом кольце R, что оно $\sum$-циклическое (σ-циклическое) справа. Никакой путаницы при этом не возникает, поскольку R — циклический модуль (и поэтому всегда $\sum$-циклический модуль !). Аналогично определяются $\sum$- и σ-циклические слева кольца. Мы скажем, что R есть **$\sum$-циклическое (σ-циклическое) кольцо**, если R является $\sum$-циклическим (σ-циклическим) кольцом справа и слева.

25.0.1. Пример (основная теорема для абелевых групп, см. 1, 27, стр. 115).

25.0.1 (а). Прекрасные примеры σ-циклических колец: кольцо $\mathbb{Z}$, а также любое почти максимальное кольцо нормирования (20.49). Кольцо $\mathbb{Z}_n$ для любого отличного от нуля целого числа n является $\sum$-циклическим (см. 1, 26, стр. 115).

25.0.1(b). Любое полупростое артиново кольцо не только $\sum$-циклическое, но и $\sum$-простое [1]).

Термин **цепной** [2]) будет использоваться как название модуля M, подмодули которого линейно упорядочены:

$A \subseteq B$ или $B \subseteq A$ для любых подмодулей A и B из M.

Говорят, что модуль $\sum$**-цепной** (**σ-цепной**), если он является прямой суммой (конечного числа) цепных модулей. Говоря, что кольцо R **полуцепное справа**, мы подразумеваем под этим, что R есть σ-цепной правый R-модуль. Симметрично определяются кольца, полуцепные слева, а термин **«полуцепное»** обозначает кольцо, полуцепное слева и справа.

25.0.2. Пример.

25.0.2(а). Любое кольцо R, обладающее как объект в mod-R единственным композиционным рядом, является полуцепным справа, и таким же будет всякое кольцо, подобное R; более того, кольцо ($n \times n$)-матриц над полуцепным справа кольцом оказывается полуцепным справа. Такое кольцо не обязано быть полуцепным слева, как показывают 7.11′.1 и 7.11′.2 (1, стр. 416—417).

25.0.2.(b). Абелева группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, где p — простое число (1, стр. 85),— цепной $\mathbb{Z}$-модуль. Любая делимая периодическая абелева группа является $\sum$-цепным $\mathbb{Z}$-модулем (упражнение). Кольцо $\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ цепное, и любой периодический ограниченный модуль над дедекиндовой областью, например над областью главных идеалов, является $\sum$-цепным. (Это справедливо также и для неточных периодических модулей над наследственными нётеровыми первичными кольцами. См. 25.5.1.)

25.0.2(с). Кольцо $R = k\langle x\rangle$ формальных степенных рядов над полем k полуцепное, поскольку его идеалы исчерпываются степенями J^n, $n = 1, 2, \ldots$, радикала J. (Доказательство?)

25.0.2(d). Полуцепное справа локальное кольцо является правым кольцом нормирования (в смысле определения, получающегося из определения, приведенного в гл. 20 перед 20.40 для коммутативного случая [3])), заменой всех условий на их правосторонние варианты).

[1]) То есть любой модуль — прямая сумма простых модулей.— *Прим. перев.*

[2]) В оригинале «uniserial», ведет свое начало от «Einreihig». Первоначально это понятие включало в себя требование конечности (т. е. артиновости и нётеровости).— *Прим. ред.*

[3]) Такое кольцо естественно назвать цепным справа.— *Прим. ред.*

25.0.3. Упражнение. Обозначим через $\mathbb{Z}_{(p)}$ кольцо частных кольца $\mathbb{Z}$ относительно простого идеала (p) (заметим, что оно локально); т. е.

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ab^{-1} \in \mathbb{Q} \mid (b, p) = 1\}$$

Тогда кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

полуцепное (доказательство?) и нётерово справа, но не нётерово слева (см. 1, стр. 417—418).

Понятие **правого (левого) главного неразложимого идеала** для полулокального SBI-кольца было введено в 18.23, а именно: это правый (левый) идеал, порожденный идемпотентом e и такой, что его кольцо эндоморфизмов eRe локально.

В полусовершенном кольце (или полулокальном SBI-кольце) идемпотент e порождает главный неразложимый идеал (левый или правый) тогда и только тогда, когда e неразложим, т. е. не равен сумме двух ненулевых ортогональных идемпотентов (см. 18.23). Правый (левый) главный неразложимый идеал артинова справа (слева) кольца называется **доминантным**, если он имеет максимальную длину среди всех правых (левых) главных неразложимых идеалов.

25.0.4. Упражнение. (а) Если левый главный неразложимый идеал Re полулокального SBI-кольца R с радикалом J является цепным, то модуль Je/J^2e либо равен нулю, либо прост. Если к тому же Re — артинов левый модуль, не являющийся простым, то Je/J^2e — простой модуль и, более того, просты все ненулевые фактормодули $J^ne/J^{n+1}e$. Это свойство достаточно для того, чтобы Re был цепным, поскольку в этом случае

$$Re \supset Je \supset J^2e \supset \ldots \supset J^ne \supset \ldots$$

— единственный композиционный ряд.

(b) В артиновом слева полуцепном слева кольце R главные циклические модули исчерпываются модулями, изоморфными Re/J^ne, где $J = \operatorname{rad} R$, а Re — некоторый левый главный неразложимый идеал.

1. Модули над полусовершенными кольцами[1])

Если R — полусовершенное кольцо, то каждый класс стабильно эквивалентных конечно порожденных модулей содержит

[1]) Здесь мы отходим от стиля, принятого в других главах, и нумеруем разделы, причем эта нумерация согласуется с нумерацией разделов в работе Уорфилда [75], которой мы следуем в нашем изложении.

единственный (с точностью до изоморфизма) «минимальный» элемент (25.1.4 и 25.1.5). Усовершенствование обычных понятий числа образующих и соотношений конечно представимого модуля (25.1.6—25.1.11) является главным инструментом, используемым при характеризациях полуцепных слева колец (25.1.13) и полусовершенных колец, у которых каждый конечно порожденный левый идеал главный (25.1.14).

Мы напомним определение (ранее приведенное перед 18.23).

Определение. Модуль M называется **локальным**, если он содержит наибольший собственный подмодуль.

Некоторые из результатов, формулируемых в этом разделе, являются повторениями установленных ранее теорем о полусовершенных кольцах либо их непосредственными приложениями.

25.1.1. Лемма. *Пусть R — полулокальное кольцо. Следующие условия на R эквивалентны:*

(i) *R_R — прямая сумма локальных модулей.*
(ii) *${}_RR$ — прямая сумма локальных модулей.*
(iii) *R есть* SBI-*кольцо.*
(iv) *Все конечно порожденные проективные модули — прямые суммы локальных циклических проективных модулей.*
(v) *R полусовершенно.*
(vi) *R обладает диаграммой Адзумаи.*

Доказательство. См. 18.23 и 22.23. □

В действительности во всех этих условиях, кроме (iii), предположение о том, что R полулокально, лишнее.

25.1.2. Предложение. *Любой локальный левый модуль над полусовершенным кольцом R является главным циклическим* (*т. е. эпиморфным образом левого главного неразложимого идеала*).

Доказательство. См. 18.23.4. □

25.1.3. Лемма. *Если $J = \operatorname{rad} R$ и M — конечно порожденный левый R-модуль, то* (i) *JM — косущественный подмодуль в M. Более того, если R полулокально, то* (ii) *M/JM — прямая сумма конечного числа простых модулей и* (iii) *M — локальный модуль тогда и только тогда, когда фактормодуль M/JM прост.* □

Замечание. (i) есть не что иное, как 18.4(d), т. е. одна из формулировок леммы Накаямы 18.4(с), а (ii) и (iii) тривиальны.

25.1.4. Теорема. *Пусть M — конечно порожденный модуль над полусовершенным кольцом R. Тогда имеет место прямое разложение $M = N \oplus P$, где P проективен, а N не имеет проективных прямых слагаемых. Далее, если $M = N' \oplus P'$ — другое такое разложение, то $N \approx N'$ и $P \approx P'$.*

Доказательство. Существование указанного разложения доказывается тривиально — мы будем последовательно отщеплять проективные прямые слагаемые, если они существуют, и этот процесс в конце концов прекратится, поскольку по 25.1.3 модуль M/JM удовлетворяет условиям обрыва. Предположим теперь, что мы имеем два таких разложения:

$$M = N \oplus P = N' \oplus P'.$$

По 25.1.1(iv)—(vi) кольцо эндоморфизмов конечно порожденного неразложимого проективного модуля над полусовершенным кольцом локально, из чего вытекает, что любой конечно порожденный проективный модуль обладает свойством замены (19.21 (n)) [1]). Применяя свойство замены к P, мы получим подмодули $P_0' \subseteq P'$ и $N_0' \subseteq N'$, такие, что $M = P \oplus P_0' \oplus N_0'$ (между прочим, это и есть определение свойства замены). Отсюда, очевидно, следует, что $N \approx P_0' \oplus N_0'$, так что $P_0' = 0$ (поскольку N не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых). Итак, $M = P \oplus N_0'$ и $N' \supseteq N_0'$, что дает прямое разложение $N' = N_0' \oplus (N' \cap P)$. Сравнение двух прямых дополнений модуля N_0' в модуле M показывает, что $(N' \cap P) \oplus P' \approx P$. Учитывая, что по предположению N' не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых, получаем $N' \cap P = 0$, $N' = N_0'$ и $P' \approx P$. Наконец, полученные выше соотношения $N \approx P_0' \oplus N_0'$, $P_0' = 0$ и $N' = N_0'$ показывают, что $N \approx N'$. □

Модули X и Y называются **стабильно эквивалентными**, если существуют проективные модули P и Q, такие, что $X \oplus P \approx \approx Y \oplus Q$. Если X и Y конечно порождены, то модули P и Q также можно выбрать конечно порожденными [2]). Поэтому доказанная теорема дает следующее усиление понятия стабильной эквивалентности для модулей над полусовершенными кольцами.

25.1.5. Следствие. *Если R — полусовершенное кольцо, то* (i) *каждый конечно порожденный модуль стабильно эквивалентен модулю, не содержащему ненулевых проективных прямых слагаемых,*

[1]) Это вытекает также из леммы 18.17.— *Прим. перев.*

[2]) В самом деле, дополняя, если нужно, модуль Q до свободного модуля, мы можем с самого начала считать, что $X \oplus P \overset{\varphi}{\approx} Y \oplus F$ и F — свободный модуль. Тогда если X конечно порожден, то $\varphi(X) \subseteq Y \oplus F_1$ для некоторого конечно порожденного прямого слагаемого F_1 модуля F. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi\colon Y \oplus F \to F/F_1$. По построению $\ker(\pi\varphi) \supset X$, откуда $\ker(\pi\varphi) = X \oplus P'$, где $P' \subseteq P$. Кроме того, поскольку F/F_1 — проективный модуль, то $\ker(\pi\varphi)$ — прямое слагаемое в $X \oplus P$, так что P' — прямое слагаемое в P и, следовательно, проективен.

Теперь, поскольку φ индуцирует изоморфизм $\ker(\pi\varphi) \approx \ker \pi$, а $\ker \pi = Y \oplus F_1$, получаем, что $X \oplus P_1 \approx Y \oplus F_1$, причем F_1 конечно порожден и проективен. Ясно, что если Y конечно порожден, то конечно порожден и модуль P_1.—*Прим. перев.*

и (ii) *два модуля, не содержащие ненулевых проективных прямых слагаемых, стабильно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны.* □

Этот результат позволяет нам существенно уточнить в следующем разделе формулировку двойственности Ауслендера — Бриджера для полусовершенных колец, которую первоначально мы определяем просто как соответствие между классами стабильно эквивалентных модулей. Для того чтобы воспользоваться этой двойственностью, нам также потребуется несколько понятий (вводимых в 25.1.7 и 25.1.9), касающихся «образующих и соотношений» модулей над полусовершенными кольцами. Для удобства ссылок мы вновь сформулируем следующий результат:

25.1.6. Лемма. *Если R — полусовершенное кольцо с радикалом J и M — конечно порожденный модуль* [1]), *то существуют проективный модуль P и эпиморфизм $f\colon P \to M$, такие, что индуцированный гомоморфизм $P/JP \to M/JM$ есть изоморфизм. Если $g\colon Q \to M$ — другой такой эпиморфизм (где Q проективен), то имеет место изоморфизм $\varphi\colon P \to Q$, такой, что $g\varphi = f$.* □

Эта лемма — не что иное, как переформулировка условия существования и единственности проективного накрытия модуля M (см. 22.11). Единственность проективного накрытия позволяет дать следующее определение.

25.1.7. Определение. Пусть M — конечно порожденный модуль над полусовершенным кольцом R и S — простой модуль. Определим $\mathrm{Gen}\,(M)$ как число слагаемых в разложении модуля M/JM в прямую сумму простых модулей, а $\mathrm{Gen}\,(M;\ S)$ — как число таких слагаемых, изоморфных S.

25.1.8. Лемма. *Конечно порожденный правый модуль M над полусовершенным кольцом R является циклическим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Gen}\,(M;\ S) \leqslant \mathrm{Gen}\,({}_RR;\ S)$ для каждого простого модуля S.* □

25.1.9. Определение. Пусть M — конечно представимый модуль над полусовершенным кольцом R, $f\colon P \to M$ — проективное накрытие (т. е. f и P удовлетворяют условию леммы 25.1.6) и $K = \ker(f)$. Тогда определим $\mathrm{Rel}(M)$ и $\mathrm{Rel}(M;\ S)$ следующим образом: $\mathrm{Rel}(M) = \mathrm{Gen}(K)$ и $\mathrm{Rel}(M;\ S) = \mathrm{Gen}(K;\ S)$ для любого простого модуля S. Эти определения корректны ввиду 25.1.6 [2]).

---

[1]) Здесь и далее в разделах 1—3, если не оговорено противное, все модули предполагаются левыми.— *Прим. перев.*

[2]) Тот факт, что K конечно порожден, вытекает из леммы Шанюэля (1, 11. 28).— *Прим. перев.*

25.1.10. Лемма. *Если M — конечно порожденный модуль над полусовершенным кольцом, S — простой модуль и $M = A \oplus B$, то*

$$\mathrm{Gen}(M;\ S) = \mathrm{Gen}(A;\ S) + \mathrm{Gen}(B;\ S).$$

Если M конечно представим, то

$$\mathrm{Rel}(M;\ S) = \mathrm{Rel}(A;\ S) + \mathrm{Rel}(B;\ S).$$

Эти соотношения легко установить, взяв проективные накрытия модулей A и B, рассмотрев их прямую сумму и заметив, что при этом получится проективное накрытие модуля M (см. 22.20). □

Ввиду 25.1.8 ясно, что $\mathrm{Gen}(M)$ лишь косвенно связано с минимальным числом образующих модуля M. Однако, если мы ограничимся элементами специального типа, эта связь становится теснее. Если M — некоторый R-модуль и $x \in M$, то мы скажем, что x — **локальный элемент,** если Rx — локальный модуль. Тот факт, что любой конечно порожденный проективный модуль над полусовершенным кольцом порождается локальными элементами (25.1.1), влечет за собой, что любой конечно порожденный модуль порождается локальными элементами.

25.1.11. Лемма. *Если M — конечно порожденный модуль над полусовершенным кольцом с радикалом J и X — множество локальных элементов модуля M, то оно является минимальным семейством локальных образующих для M тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм $M \to M/JM$ отображает X биективно на минимальное семейство локальных образующих модуля M/JM. Число элементов в любом минимальном семействе локальных образующих равно $\mathrm{Gen}(M)$.* □

25.1.12. Определение. Модуль называется **цепным,** если его подмодули линейно упорядочены по включению. Кольцо R называется **полуцепным слева,** если ${}_RR$ — прямая сумма цепных модулей. Кольцо R называется **полуцепным**, если оно полуцепное справа и слева.

Артиновы полуцепные кольца традиционно назывались «обобщенно однорядными кольцами» («generalized uni-serial») и были ввведены Кёте [35] и Накаямой [40], [41]. Любое артиново кольцо главных идеалов является полуцепным (Кёте [35], Асано К. [39], [49a]). Полуцепное слева кольцо может не быть полуцепным справа (1, 7.11′.1, стр. 416).

25.1.13. Лемма. *Если M — конечно порожденный левый модуль над полуцепным слева кольцом и N — его конечно порожденный подмодуль, то*

$$\mathrm{Gen}(N) \leqslant \mathrm{Gen}(M).$$

Доказательство. Пусть L — локальный подмодуль модуля M, такой, что L не содержится в JM. (Можно найти такой подмодуль, взяв проективное накрытие модуля M (25.1.6) и рассмотрев в M образ одного из неразложимых прямых слагаемых этого проективного накрытия.) Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to N \cap L \to N \to N/N \cap L \to 0.$$

Для любой точной последовательности $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ определена индуцированная точная последовательность $X/JX \to \to Y/JY \to Z/JZ \to 0$. Заметим, что если X — цепной модуль, то либо $X = JX$, либо X/JX — простой модуль [1]). Применяя эти соображения к выписанной выше последовательности и используя тот факт, что $N \cap L$ — цепной модуль [2]), мы получим, что $\text{Gen}(N) \leqslant 1 + \text{Gen}(N/(N \cap L))$. С другой стороны, $\text{Gen}(M/L) + + 1 = \text{Gen}(M)$, и, поскольку $N/(N \cap L)$ — конечно порожденный подмодуль модуля M/L, требуемый результат получается индукцией по $\text{Gen}(M)$. □

Лемма 25.1.13 дает характеризацию полуцепных слева колец, аналогичную хорошо известным характеризациям колец главных конечно порожденных левых идеалов. (Если R — такое кольцо, M — левый модуль, который может быть порожден n элементами, а N — его конечно порожденный подмодуль, то N может быть также порожден n элементами.) Довольно легко охарактеризовать полусовершенные кольца, у которых каждый конечно порожденный левый идеал главный. Это мы сейчас и проделаем в качестве приложения предыдущих результатов.

Но сначала — одно определение. Если M — цепной модуль, то мы скажем, что M **однородно цепной**, если $A/JA \approx B/JB$ для всех пар его ненулевых конечно порожденных подмодулей A и B. Если M — артинов и нётеров модуль, то это означает, что все простые факторы композиционного ряда модуля M изоморфны.

25.1.14. Теорема. *Следующие свойства полусовершенного кольца R эквивалентны:*

(i) *Каждый конечно порожденный левый идеал главный.*

(ii) *R — полуцепное слева и неразложимые прямые слагаемые модуля ${}_RR$ однородно цепные.*

(iii) *R — прямое произведение конечного числа полных колец матриц над локальными полуцепными слева кольцами.*

(iv) *R подобно конечному прямому произведению локальных полуцепных слева колец.*

[1]) Здесь существенно, что кольцо R является полуцепным слева. — *Прим. перев.*

[2]) Поскольку $N \cap L$ — подмодуль локального и потому (см. 18.23.4) цепного модуля L. — *Прим. перев.*

Доказательство. Чтобы доказать, что (i) влечет за собой (ii), мы сначала покажем, что если ${}_RR = P \oplus Q$, где P — неразложимый проективный модуль, и A — конечно порожденный подмодуль в P, то A/JA не содержит простых подмодулей, не изоморфных $S = P/JP$, или, что эквивалентно, $\text{Gen}(A) = = \text{Gen}(A;\ S)$. Предположим, что это не так. Тогда $\text{Gen}(A;\ S') \geqslant \geqslant 1$ для некоторого простого модуля S', не изоморфного S. Очевидно, $\text{Gen}(Q;\ S') = \text{Gen}({}_RR;\ S')$, поэтому по 25.1.10

$$\text{Gen}(A \oplus Q;\ S') = \text{Gen}(A;\ S') + \text{Gen}(Q;\ S') \geqslant 1 + \text{Gen}({}_RR;\ S').$$

Но в силу 25.1.8 отсюда следует, что конечно порожденный левый идеал $A \oplus Q$ не является главным в противоречии с предположением. Покажем теперь, что R должно быть полуцепным слева. Предположим противное. Тогда ${}_RR = P \oplus Q$, где P — неразложимое прямое слагаемое, не являющееся цепным модулем. Поэтому в P существуют элементы a и b, такие, что $Ra \nsubseteq Rb$ и $Rb \nsubseteq Ra$, или, что эквивалентно, $Ra/(Ra \cap Rb) \neq 0$ и $Rb/(Ra \cap Rb) \neq 0$. Рассматривая точную последовательность

$$0 \to Ra \cap Rb \to Ra + Rb \to$$
$$\to (Ra/(Ra \cap Rb)) \oplus (Rb/(Ra \cap Rb)) \to 0$$

и учитывая, что гомоморфный образ локального модуля локален, заключаем, что $Ra + Rb$ — нелокальный, модуль, откуда в силу 25.1.11 следует, что $\text{Gen}(Ra + Rb) \geqslant 2$. По доказанному выше $\text{Gen}(Ra + Rb) = \text{Gen}(Ra + Rb;\ S)$, где $S = P/JP$ — простой модуль. Итак, $\text{Gen}(Ra + Rb;\ S) \geqslant 2$. Рассмотрим теперь конечно порожденный левый идеал $(Ra + Rb) \oplus Q$. По условию он циклический, в частности, ввиду 25.1.8

$$\text{Gen}\,((Ra + Rb) \oplus Q;\ S) = \text{Gen}\,(Ra + Rb;\ S) + \text{Gen}\,(Q;\ S) \leqslant$$
$$\leqslant \text{Gen}({}_RR;\ S) = \text{Gen}(P;\ S) + \text{Gen}(Q;\ S),$$

откуда вытекает, что

$$\text{Gen}(Ra + Rb;\ S) \leqslant \text{Gen}(P;\ S) = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство того, что R — полуцепное слева кольцо. Если теперь A — конечно порожденный подмодуль в неразложимом прямом слагаемом P модуля ${}_RR$, то A — локальный модуль, т. е. модуль A/JA прост. В силу утверждения, доказанного вначале, $A/JA \approx P/JP$. Итак, импликация (i) ⇒ (ii) установлена.

Покажем теперь, что (ii) влечет за собой (iii). Из условия (ii) вытекает, что если P и Q — неизоморфные неразложимые проективные слагаемые модуля ${}_RR$, то $\text{Hom}(P,\ Q) = 0$, поскольку если бы образ A какого-нибудь гомоморфизма $P \to Q$ был отличен от нуля, то мы бы имели

$$P/JP \approx A/JA \approx Q/JQ$$

и тогда P и Q были бы изоморфны. Поэтому R есть прямое произведение $\prod_{i=1}^{n} A_i$ конечного числа колец A_i, удовлетворяющих (ii) и дополнительному условию, состоящему в том, что все неразложимые проективные прямые слагаемые P кольца $A = A_i$ изоморфны, так что $A \approx P^t$ (P и t зависят от i). Тогда по 1, 3.33.3, стр. 199, и 22.24 A изоморфно полному кольцу $(t \times t)$-матриц над локальным кольцом $B = \operatorname{End}_A P$. Свойство кольца быть полуцепным слева инвариантно относительно эквивалентности Мориты (так как это свойство допускает категорную переформулировку: каждый конечно порожденный проективный модуль разлагается в прямую сумму цепных модулей). Поэтому все возникшие локальные кольца должны быть также полуцепными слева. Это завершает доказательство импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii).

В доказательстве импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) мы можем ограничиться рассмотрением неразложимых колец (поскольку свойство (i) наследуется конечными прямыми произведениями колец). Неразложимое кольцо, удовлетворяющее (iii), имеет с точностью до изоморфизма только один простой модуль. Учитывая 25.1.8 и 25.1.13, мы видим, что если R — полуцепное слева кольцо с единственным с точностью до изоморфизма простым модулем, то каждый конечно порожденный подмодуль циклического модуля циклический, что влечет за собой (i).

Эквивалентность (iii) и (iv) вытекает из 18.36. □

В 18.38.3 эта теорема доказана в полупримарном случае. Ср. Айзенбуд — Гриффитс [71a], Джекобсон [47] и Ятегаонкар А. [70].

2. Двойственность Ауслендера — Бриджера

В этом разделе мы уточняем теорию двойственности Ауслендера — Бриджера и используем ее для изучения колец, над которыми каждый конечно представимый модуль есть прямая сумма локальных модулей.

В частности, оказывается, что кольца с этим свойством являются полуцепными.

Если R — произвольное кольцо с единицей и M — конечно представимый левый R-модуль (FP-модуль), то его дуальный $D(M)$ в смысле Ауслендера и Бриджера определяется следующим образом. Выберем точную последовательность $Q \xrightarrow{\varphi} P \to M \to 0$,

в которой P и Q — конечно порожденные проективные модули, и положим $D(M)$ равным коядру гомоморфизма $\varphi^*: P^* \to Q^*$ (где $X^* = \operatorname{Hom}_R(X, R)$, причем если X — левый модуль, то X^* — правый модуль). $D(M)$ корректно определен с точностью до стабильной эквивалентности (введенной перед 25.1.5). Эта конструкция задает двойственность между категорией классов стабильно эквивалентных левых FP-модулей и категорией классов стабильно эквивалентных правых FP-модулей. (Упражнение.)

Следует заметить, что если модуль M задается n образующими и k соотношениями, т. е. имеет место точная последовательность $R^k \to R^n \to M \to 0$, то $D(M)$ задается k образующими и n соотношениями. Для модулей над полусовершенными кольцами мы можем высказать более точное утверждение, используя инварианты, определенные в предыдущем разделе (25.1.7 и 25.1.9), а также тот факт, что над таким кольцом каждый класс стабильно эквивалентных конечно порожденных модулей содержит в некотором смысле канонический минимальный элемент (25.1.4 и 25.1.5).

25.2.1. Лемма. *Если R — полусовершенное кольцо и P — неразложимый проективный левый модуль, то его дуальный P^* — неразложимый проективный правый модуль. Далее, если $S \approx P/JP$, то $P^*/P^*J \approx S'$, где S' — дуальный к модулю S, рассматриваемому как (R/J)-модуль* [1]. □

25.2.2. Лемма. *Если R — полусовершенное кольцо, P — конечно порожденный проективный модуль и N — подмодуль, не лежащий в JP, то N содержит ненулевое прямое слагаемое модуля P.*

Доказательство. Прямое обобщение предложения 22.22(b). □

Если M — конечно представимый модуль над полусовершенным кольцом и $Q \xrightarrow{\varphi} P \to M \to 0$ — точная последовательность, в которой P и Q — конечно порожденные проективные модули, то мы назовем эту последовательность **минимальным представлением** модуля M, если (i) индуцированный гомоморфизм $P/JP \to M/JM$ — изоморфизм и (ii) индуцированный гомоморфизм $Q/JQ \to K/JK$, где K — ядро гомоморфизма $P \to M$, — изоморфизм. В этом случае изоморфные типы модулей P/JP и Q/JQ являются инвариантами модуля M [2] (25.1.6, 25.1.7 и 25.1.9).

[1]) Если P — неразложимый проективный левый модуль, то $P \approx Re$, где e — примитивный идемпотент, и поэтому $S \approx P/JP \approx \bar{R}\bar{e}$, где $\bar{R} = R/J$. Отсюда следует, что $P^* \approx \operatorname{Hom}_R(Re, R) \approx eR$ и $\operatorname{Hom}_{\bar{R}}(S, \bar{R}) \approx \approx \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\bar{R}\bar{e}, \bar{R}) \approx \bar{e}\bar{R} \approx P^*/P^*J$, что и требуется.— *Прим. перев.*

[2]) То есть эти модули определяются модулем M однозначно с точностью до изоморфизма.— *Прим. перев. и ред.*

Кроме того, чтобы получить некоторое (а на самом деле любое) минимальное представление модуля M, нужно выбрать проективные накрытия $P \twoheadrightarrow M$ и $Q \twoheadrightarrow K$, где $K = \ker(P \twoheadrightarrow M)$. (Действительно, тогда, например, $P/JP \approx M/JM$, поскольку $JP = \mathrm{rad}\, P \supseteq K$.)

25.2.3. Лемма. *Если R — полусовершенное кольцо, M — конечно представимый левый R-модуль, не содержащий ненулевых проективных прямых слагаемых, и $Q \to P \to M \to 0$ — минимальное представление модуля M, то индуцированная последовательность $P^* \to Q^* \to D \to 0$ является минимальным представлением для D и D также не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых.*

Замечание. Строго говоря, $D(M)$ — это класс стабильной эквивалентности, представителем которого является модуль D. Смысл этой леммы состоит в том, что, выбирая подходящую проективную резольвенту, мы можем добиться того, чтобы получающийся представитель класса стабильной эквивалентности был каноническим. Его существование гарантируется следствием 25.1.5.

Доказательство. Пусть φ: $Q \to P$ — гомоморфизм из минимального представления для M и φ^*: $P^* \to Q^*$ — гомоморфизм, ему дуальный. Нам нужно сначала показать, что $\varphi^*(P^*) \subseteq Q^*J$. Если бы это было не верно, то по 25.2.2 мы бы смогли разложить P^*: $P^* = A \oplus B$, причем так, чтобы φ^* изоморфно отображало B на ненулевое прямое слагаемое модуля Q^*. Применяя функтор $(\ \ )^*$ к φ^*: $P^* \to Q^*$ и учитывая естественные изоморфизмы $P^{**} \approx P$ и $Q^{**} \approx Q$, мы получили бы, что $\mathrm{im}\ \varphi$ содержит прямое слагаемое модуля P (изоморфное B^*). Но $\mathrm{im}\ \varphi$ равен ядру гомоморфизма из P в M, и мы пришли бы к противоречию с тем, что это ядро — косущественный подмодуль в P.

Пусть теперь L — ядро гомоморфизма $Q^* \to D$. По доказанному мы знаем, что $L \subseteq Q^*J$. Мы хотим показать, что гомоморфизм φ^* индуцирует изоморфизм $P^*/P^*J \to L/LJ$. Если это не так, то по 25.2.2 мы можем представить P^* в виде $P^* = C \oplus E$, где $C \neq 0$ и C лежит в ядре гомоморфизма φ^* [1]). Переходя к дуальным модулям, мы получим, что $P = C' \oplus E'$ и $\varphi(Q) \subseteq E'$, где $C' \approx C^*$ и $E' \approx E^*$. Следовательно, M содержит ненулевое проективное прямое слагаемое (изоморфное C'), что противоречит условию.

В заключение осталось показать, что D не имеет ненулевых проективных прямых слагаемых. Рассуждая, как и прежде, предположим, что D имеет такое прямое слагаемое. Но это означает, что $\varphi^*(P^*)$ содержится в собственном прямом слагаемом модуля Q^*, и, переходя к дуальным модулям, мы получим, что $\ker \varphi$ содержит ненулевое прямое слагаемое модуля Q, что противоречит косущественности ядра $\ker \varphi$ в Q. □

25.2.4. Теорема. *Пусть R — полусовершенное кольцо, $\mathscr{X}$ — класс конечно представимых левых модулей, не содержащих ненулевых проективных прямых слагаемых, и $\mathscr{Y}$ — класс конечно представимых правых модулей, также не содержащих ненулевых проективных прямых слагаемых. Каждому $M \in \mathscr{X}$ однозначно с точностью до изоморфизма можно поставить в соответствие модуль $D(M) \in \mathscr{Y}$ так, чтобы* (i) *$M \approx N$ тогда и только тогда, когда $D(M) \approx D(N)$ и* (ii) *$D(M \oplus N) \approx D(M) \oplus D(N)$. Кроме того, если каждому простому левому модулю S сопоставить с помощью* 25.2.1 *простой правый модуль S', то справедливы следующие равенства:*

$$\mathrm{Gen}(M;\ S) = \mathrm{Rel}(D(M);\ S')$$

и

$$\mathrm{Rel}(M;\ S) = \mathrm{Gen}(D(M);\ S').$$

Эта теорема непосредственно вытекает из двойственности Ауслендера — Бриджера, сформулированной в начале этого раздела, а также из 25.2.3, 25.2.1, 25.1.5, 25.1.7 и 25.1.9.

Функцию D: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ можно задать явно с помощью 25.2.3. Симметрично можно определить функцию $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, которая, очевидно, будет обратной для D. □

25.2.5. Определение. Модуль M называется **локально представимым** (LP-модулем), если существует точная последовательность $Q \to P \to M \to 0$, в которой P и Q — проективные локальные модули. Эквивалентное определение: M конечно представим и $\mathrm{Gen}(M) = \mathrm{Rel}(M) = 1$.

25.2.6. Теорема [1]). *Следующие свойства полусовершенного кольца R эквивалентны:*

[1]) В самом деле, $L = \ker(Q^* \to D) = \mathrm{im}\ \varphi^*$. Поэтому φ^* индуцирует эпиморфизм φ': $P^* \to L$. Следовательно, эпиморфизмом будет и гомоморфизм $P^*/P^*J \to L/LJ$. Если он не является изоморфизмом, то его ядро отлично от нуля, т. е. $\varphi'(N) \subseteq LJ$ для некоторого подмодуля N в P^*, не лежащего в P^*J. По 25.2.2 существует прямое разложение $P^* = C' \oplus E'$, где $0 \neq C' \subseteq N$.

Без ограничения общности мы можем считать, что C' неразложим, в частности, $C' = xR$ — циклический модуль.

Имеем $L = \varphi'(P^*) = \varphi'(E') + \varphi'(C') \subseteq \varphi'(E') + LJ$, откуда $L = \varphi'(E') + LJ$, а поскольку модуль L конечно порожден, это означает, что $L = \varphi'(E')$. Поэтому для элемента x мы можем найти в E' элемент y, такой, что $\varphi'(y) = \varphi'(x)$, т. е. такой, что $x - y \in K = \ker \varphi'$. Тогда $(x - y)R \subseteq K$. Ясно, что $K \nsubseteq P^*J$ (в противном случае $C' = C'J$, что невозможно). Применяя к K лемму 25.2.2 и учитывая, что $\ker \varphi' = \ker \varphi^*$, получим требуемое разложение.— *Прим. перев.*

[1]) См. примечание на стр. 346.— *Прим. перев.*

(i) *каждый конечно представимый левый модуль есть прямая сумма локально представимых модулей;*

(ii) *каждый конечно представимый левый модуль есть прямая сумма цепных модулей;*

(iii) *каждый конечно представимый правый модуль есть прямая сумма локально представимых модулей;*

(iv) *каждый конечно представимый левый модуль и каждый конечно представимый правый модуль суть прямые суммы локальных модулей;*

(v) *каждый конечно представимый правый или левый модуль есть прямая сумма главных циклических модулей;*

(vi) *каждый конечно представимый правый модуль есть прямая сумма цепных модулей;*

(vii) R *— полуцепное кольцо.*

Доказательство. Условие (i) гласит, что если M — неразложимый конечно представимый левый модуль, который не проективен, то $\operatorname{Gen}(M) = \operatorname{Rel}(M) = 1$. Отсюда вытекает, что если P — неразложимый проективный левый модуль и A — его ненулевой конечно порожденный подмодуль, то $\operatorname{Gen}(A) = 1$, поскольку $\operatorname{Gen}(A) = \operatorname{Rel}(P/A)$ и P/A неразложим [1]). По 25.1.11 получаем, что любой конечно порожденный подмодуль A в P локален, а отсюда легко следует, что R — полуцепное слева кольцо. Но для полуцепного слева кольца условия (i) и (ii) тривиально эквивалентны.

Далее, учитывая эквивалентную переформулировку условия (i), приведенную в начале доказательства, с помощью 25.2.4 получим, что оно эквивалентно аналогичному условию для правых модулей, т. е. что (i) и (iii) эквивалентны.

Наконец, ясно, что (i) и (iii) влекут за собой (iv). Обратно, если R удовлетворяет (iv) и M — неразложимый непроективный FP-модуль, то $\operatorname{Gen}(M) = 1$ и $\operatorname{Gen}(D(M)) = 1$ в силу (iv) и того обстоятельства, что $D(M)$ также неразложим (25.2.4). Поскольку $\operatorname{Gen}(D(M)) = \operatorname{Rel}(M)$ (по 25.2.4), то отсюда следует, что M есть LP-модуль. Итак, (iv) влечет за собой (i).

Эквивалентность условий (iv) и (v) для полусовершенных колец вытекает из 18.23.4.

Это завершает доказательство эквивалентности свойств (i)—(v). Так как (iv) право-лево симметрично, то условие, симметричное (ii), а именно (vi), эквивалентно остальным, т. е. условия (i)—(vi) эквивалентны.

[1]) Оба этих факта — следствие того, что $P \to P/A$ — проективное накрытие модуля P/A. Это в свою очередь справедливо, поскольку P — неразложимый проективный, а следовательно, локальный модуль, и поэтому $A \subseteq JP$.— *Прим. перев.*

Ясно, что (ii) и (vi) влекут за собой (vii), поэтому для завершения доказательства нужно только доказать импликацию (vii) $\Rightarrow$ (ii). Но для этого требуется еще некоторая подготовка. Поэтому мы отложим доказательство до следующего раздела (см. 25.3.4). □

3. Теорема о разложении

В этом разделе мы доказываем теорему Уорфилда [1]), утверждающую, что конечно представимый модуль над полуцепным кольцом разлагается в прямую сумму локально представимых модулей,— теорему, которая первоначально была установлена Ру [72] для не обязательно коммутативных локальных колец. (Коммутативный случай см. в 20.41 и 20.43.)

Мы завершим этот раздел принадлежащим Робсону доказательством теоремы Уорфилда [1]) о разложении нётеровых полуцепных колец: они оказываются прямыми суммами артиновых и полупервичных колец. (Ср. теорему Чаттерса 20.30 и теорему Крулля — Асано — Голди 20.37.)

25.3.1. Лемма. *Если M — конечно представимый модуль над полуцепным кольцом, то* $\operatorname{Gen}(M) \geqslant \operatorname{Rel}(M)$. *Более того, M не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Gen}(M) = \operatorname{Rel}(M)$.

Доказательство. Первое утверждение получается применением леммы 25.1.13 к проективному накрытию модуля M (25.1.6) и использованием определения $\operatorname{Rel}(M)$ (25.1.9). Если M не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых, то, применяя полученное неравенство к дуальному модулю $D(M)$ и учитывая 25.2.6, мы получим обратное неравенство $\operatorname{Rel}(M) \geqslant \operatorname{Gen}(M)$. Обратно, если $M = N \oplus P$, P — проективный модуль и $\operatorname{Gen}(P) > 0$, то $\operatorname{Rel}(M) = \operatorname{Rel}(N) \leqslant \operatorname{Gen}(N) < \operatorname{Gen}(M)$. Итак, $\operatorname{Rel}(M) < \operatorname{Gen}(M)$, что и требуется. □

25.3.2. Лемма. *Пусть P — конечно порожденный проективный модуль над полуцепным кольцом и x — локальный элемент из P. Тогда существует такое неразложимое прямое слагаемое Q модуля P, что $x \in Q$.*

Доказательство. Если $x \notin JP$, то по 25.2.2 Rx — локальное прямое слагаемое модуля P. Если $x \in JP$ и $M = P/Rx$, то $\operatorname{Gen}(M) = \operatorname{Gen}(P)$ и $\operatorname{Rel}(M) = 1$. Если мы запишем M в виде $M = A \oplus B$, где B проективен, а A не содержит ненулевых проективных прямых слагаемых (25.1.4), то по 25.1.10 $\operatorname{Rel}(A) =$

[1]) См. примечание на стр. 346.— *Прим. перев.*

$= 1$. По 25.3.1 это влечет за собой $\mathrm{Gen}(A) = 1$. Если $Q = \{y \in P \mid y + Rx \in A\}$, то очевидно, что Q — прямое слагаемое модуля P, дополнение которого в P изоморфно B, $Q \supseteq Rx$ и Q — локальный модуль. □

25.3.3. Теорема. *Пусть R — полуцепное кольцо, P — конечно порожденный проективный модуль и M — конечно порожденный подмодуль модуля P. Тогда существует прямое разложение $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_k$ модуля P на неразложимые подмодули, такие, что если $M_i = M \cap P_i$, то $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему индукцией по $\mathrm{Gen}(M)$ (см. определение 25.1.7). Случай, когда $\mathrm{Gen}(M) = 0$, тривиален, а случай, когда $\mathrm{Gen}(M) = 1$, был фактически разобран в 25.3.2. Поэтому мы предположим, что теорема верна, если $\mathrm{Gen}(M) = n$, и докажем ее в случае, когда $\mathrm{Gen}(M) = n + 1$. Применяя 25.3.1 к модулю P/M, мы найдем разложение $P = A \oplus B$ модуля P, такое, что $\mathrm{Gen}(A) = n + 1$ и $M \subseteq A$. Поэтому мы можем без потери общности считать, что $\mathrm{Gen}(P) = n + 1$. Предположив это, мы заметим, что для доказательства теоремы нам достаточно найти разложение $P = Q \oplus L$, в котором Q — неразложимый проективный модуль и $M = (M \cap Q) \oplus (M \cap L)$. В последующем мы будем неоднократно ссылаться на этот факт.

Напомним теперь необходимые нам основные факты о разложениях проективных модулей над полусовершенными кольцами. Пусть P — конечно порожденный проективный модуль, Q — неразложимое прямое слагаемое модуля P и $P = \sum_{i \in I} \oplus P_i$ — разложение P на неразложимые прямые слагаемые. Для каждого $j \in I$ положим $I(j) = I - \{j\}$ и будем говорить, что Q заменяет P_j, если

$$P = Q \oplus \Big(\sum_{i \in I(j)} \oplus P_i\Big). \tag{$*$}$$

Пусть π_i — проекция на P_i, а φ_i — ограничение π_i на Q. В этой ситуации мы сделаем три вывода: (i) Q заменяет P_j тогда и только тогда, когда φ_j — изоморфизм (из Q на P_j); (ii) если Q заменяет P_j, то в разложении ($*$) проекция P на Q равна $\varphi_j^{-1}\pi_j$; (iii) существует по крайней мере один индекс j, такой, что Q заменяет P_j. Первые два вывода, по существу, тривиальны, а третий — это как раз утверждение о том, что Q обладает свойством замены (18.17).

Доказательство теоремы. Мы можем предположить, что $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_{n+1}$, где каждый P_i неразложим, а M обладает минимальным множеством локальных образующих $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. По предположению индукции, примененному к подмодулю, порожденному семейством $\{x_1, \ldots, x_n\}$, мы можем считать, что P_i и x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выбраны так, что $x_i \in P_i$. По 25.3.2 существует неразложимое проективное прямое слагаемое Q модуля P, содержащее x_{n+1}. Следуя предыдущим замечаниям, положим π_i равным проекции P на P_i, а φ_i — ограничению π_i на Q. Если φ_{n+1} — изоморфизм, то по замечанию (i) Q заменяет P_{n+1}, и мы получаем требуемое разложение. В противном случае по замечанию (iii) φ_j — изоморфизм для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Без потери общности мы можем считать, что φ_1 — изоморфизм. Так как P_1 — цепной модуль, то либо $\varphi_1(x_{n+1}) \in Rx_1$, либо $x_1 \in R\varphi_1(x_{n+1})$. В первом случае из $\varphi_1(x_{n+1}) \in Rx_1$ вытекает, что $\pi_1(M) \subseteq Rx_1 = M \cap P_1$, поэтому $M = (M \cap P_1) \oplus (M \cap (P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n+1}))$. Теперь применение предположения индукции к $M \cap (P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n+1})$ завершает доказательство. Во втором случае запишем $P = Q \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n+1}$ (это мы можем сделать ввиду (i)), причем проекция f на Q в этом разложении равна $\varphi_1^{-1}\pi_1$ (по (ii)). По построению $f(x_1) \in Rx_{n+1}$, из чего мы заключаем, что $f(M) \subseteq Rx_{n+1} = M \cap Q$. Как и раньше, отсюда следует, что $M = (M \cap Q) \oplus (M \cap (P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n+1}))$, и требуемый результат опять получается по индукции. □

Если M — подмодуль модуля P и разложения в прямую сумму

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$$

и

$$P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n \quad (n \geqslant k)$$

таковы, что $M_i = M \cap P_i$, $i = 1, \ldots, k$, то говорят, что эти разложения **совместимы** (Капланский [49]) или **согласованны**. Если, как и в 25.3.3, P_i — цепной модуль, порожденный, скажем, x_i, $i = 1, \ldots, n$, то в R найдутся элементы $r_1, \ldots, r_k$, такие, что $y_i = r_i x_i$ порождает M_i, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{k}$ называются **совместимыми** или **согласованными** системами образующих модулей P и M.

В случае, когда R — цепное слева кольцо, элементы $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ можно выбрать таким образом [1]), чтобы r_i делил r_{i+1}, т. е. $Rr_i \supseteq Rr_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k - 1$, и мы получим так называемые **элементарные делители**. (Ср. Капланский [49]. См. также статью Коэна Дж. и Глюка [70] о согласованных системах образующих модулей.)

Приводимое ниже следствие завершает доказательство теоремы 25.2.6.

25.3.4. Следствие. *Кольцо R является полуцепным тогда и только тогда, когда каждый конечно представимый модуль есть прямая сумма циклических цепных модулей.*

[1]) Переупорядочив, если нужно, слагаемые P_i и M_i.— *Прим. перев.*

Доказательство. Если R — полуцепное кольцо и F — конечно представимый модуль, то, рассматривая точную последовательность $0 \to M \to P \to F \to 0$, в которой P конечно порожден и проективен, а M — конечно порожденный модуль, и используя существование согласованных прямых разложений модулей P и M (25.3.3), получим, что $F \approx P/M \approx \sum_{i=1}^{n} \oplus P_i/M_i$. Ввиду того что каждый неразложимый конечно порожденный проективный модуль P_i над полусовершенным кольцом [1]) является главным циклическим (25.1.1), то P_i — циклический цепной модуль. Следовательно, F — прямая сумма циклических цепных модулей P_i/M_i, $i = 1, \ldots, n$.

Обратное утверждение — следствие из 25.1.1 и уже доказанных импликаций теоремы 25.2.5. □

25.3.5. Теорема о разложении (Уорфилд [75]) [2]). *Нётерово полуцепное кольцо R разлагается в прямое произведение артинова кольца и полупервичного кольца.*

Доказательство (Робсон [74]). Пусть N — радикал Веддербёрна кольца R и $\mathscr{D}(N) = \{c \in R \mid c + N$ — регулярный элемент в $R/N\}$ (ср. определение на стр. 200 перед 20.35). Если $c \in \mathscr{D}(N)$, то по 25.3.3 мы можем выбрать согласованные разложения для R и Rc; скажем, $R = \sum \oplus Re_i$, $Rc = \sum \oplus (Re_i \cap Rc)$, где e_i — идемпотенты, $i = 1, \ldots, n$. Тогда автоматически $N = \sum \oplus Ne_i$. Размерности Голди кольца R/N как левого R/N-модуля и его существенного левого идеала $(Rc + N)/N$ должны равняться n. Поэтому $Re_i \cap Rc \not\subseteq Ne_i$ для всех i. Следовательно, $Re_i \cap Rc \supset Ne_i$ и поскольку $N(Re_i \cap Rc)$ — наибольший собственный подмодуль в $Re_i \cap Rc$, то $N(Re_i \cap Rc) = Ne_i$ для всех i. Поэтому $Nc \leftharpoondown NRc = N((\sum \oplus Re_i) \cap Rc) = \sum \oplus N(Re_i \cap Rc) = \sum \oplus Ne_i = N$. Симметрично доказывается, что $cN = N$, и остается применить 20.35. □

25.3.6. Следствие (Уорфилд) [2]). *Нётерово полуцепное кольцо разлагается в конечное прямое произведение артинова кольца и наследственных первичных колец.*

Доказательство. Ввиду 25.3.5 достаточно рассмотреть случай, когда кольцо R полупервично. Но в этом случае R как полупервичное кольцо Голди антисингулярно по (**1**, 9.13, стр. 486). Далее, любое антисингулярное полуцепное слева кольцо полунаследственно слева — результат, который ввиду его простоты мы оставляем в качестве упражнения (либо отсылаем к теореме Уорфилда loc. cit.). Итак, R — наследственное полупервичное кольцо. Следовательно, по теореме Леви — Чаттерса (см. 20.30 и 20.32) оно разлагается в конечное прямое произведение первичных колец. □

[1]) Очевидно, что любое полуцепное слева или справа кольцо полусовершенно. — *Прим. перев.*

[2]) См. примечание на стр. 346. — *Прим. перев.*

25.3.7. Предложение. *Если R — полуцепное кольцо (соотв. левое FFM- или левое FBG-кольцо), то таково же и кольцо eRe для любого ненулевого идемпотента e кольца R.*

Доказательство. Пусть $B = eRe$ и M — какой-нибудь конечно представимый левый B-модуль. Тогда $M' = Re \otimes_B M$ — конечно представимый левый R-модуль. Запишем

$$M' = Re \otimes_B M = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \tag{1}$$

в виде прямой суммы цепных левых R-модулей. Тогда $eM' = B \otimes_B M \approx M$ есть прямая сумма цепных левых B-модулей $eU_1, \ldots, eU_n$. Аналогично если R — левое FFM-кольцо, M — конечно порожденный неразложимый левый B-модуль и (1) есть разложения модуля M' в прямую сумму неразложимых левых R-модулей, то существует i, такое, что $M \approx eM' = eU_i$. Таким образом, существует лишь конечное число неразложимых конечно порожденных левых B-модулей. (Доказательство для случая левых FBG-колец аналогично.)

4. Артиновы полуцепные и $\sum$-циклические кольца

Ввиду теоремы 25.3.5 о разложении нётеровых полуцепных колец мы можем ограничить наше внимание артиновыми либо полупримарными полуцепными кольцами. В этом разделе мы изучаем первый случай [1]).

25.4.1.A. Определение. Пусть S — некоторое множество модулей конечной длины. Говорят, что модуль $M \in S$ **доминантный**, если он имеет максимально возможную длину. (Это понятие предполагает, что длины модулей из S ограничены в совокупности.)

[1]) С этого места мы перестаем следовать статье Уорфилда [75] в изложении теории полуцепных колец. Читатель может продолжить это изучение чтением дальнейших глав работы Уорфилда, посвященных, в частности, (полу)-первичным полуцепным кольцам. [Читателю рекомендуется также обратиться к соответствующим разделам статьи В. В. Кириченко, упоминаемой в примечании на стр. 346. — *Перев.*]

Например, если R — артиново слева кольцо и Re — левый главный неразложимый идеал, то Re называется доминантным, если он является доминантным в множестве всех левых главных неразложимых идеалов кольца R.

25.4.1.В. Упражнение. (а) Цепной модуль M является циклическим тогда и только тогда, когда он конечно порожден, или тогда и только тогда, когда M — локальный модуль.

(b) Цепной модуль M над полусовершенным кольцом R является главным циклическим тогда и только тогда, когда он конечно порожден.

25.4.2. Теорема [1]). *Для кольца R с радикалом J следующие условия эквивалентны:*

(1) *Каждый левый R-модуль есть прямая сумма конечно порожденных цепных модулей.*

(1_{bis}) *R артиново слева и каждый конечно пdрожденный левый R-модуль разлагается в прямую сумму цепных модулей.*

(2) *Каждый левый и каждый правый R-модуль является прямой суммой циклических цепных модулей.*

(2_{bis}) *R артиново слева и каждый конечно представимый левый или правый модуль есть прямая сумма цепных циклических модулей.*

(3) *R артиново слева и справа полуцепное кольцо.*

(3_{bis}) *R артиново слева и каждый главный циклический правый модуль eR/eJ^2 и каждый главный циклический левый модуль Re/J^2e являются цепными.*

(4) *R артиново слева и каждый доминантный левый главный неразложимый идеал всякого факторкольца R/A квазиинъективен в* R-mod.

(5) *R артиново слева и каждый доминантный левый главный неразложимый идеал кольца R/J^n инъективен в* (R/J^n)-mod *для всех n.*

(6) *R артиново слева и каждый конечно порожденный неразложимый правый или левый модуль является главным циклическим.*

---

1) Кольца, описываемые в этой теореме, впервые были изучены Кёте [35], Асано К. [39] (и позднее [49]) и Накаямой [39], [40]. Кёте ввел термин «однорядный» (Einreihig), а Накаяма придумал другой термин — «обобщенно однорядное» для колец, которые мы называем артиновыми полуцепными кольцами. Однорядными же кольцами назывались примарно разложимые артиновы полуцепные кольца. Некоторые части приводимой теоремы заимствованы из работ Фуллера [69а] и Айзенбуда и Гриффитса [71а]. (Заметим также, что эквивалентность условий (1) — (3) — следствие теоремы Л. А. Скорнякова (*Матем. заметки*, 5 (1969), № 2, стр. 173—182); ср. упр. 11 в конце главы.— *Перев.*)

Доказательство. Доказательство идет по следующей схеме:

$(2) \Rightarrow (2_{\text{bis}})$, $(1) \Rightarrow (1_{\text{bis}})$, $(4) \Rightarrow (5)$, $(1) \Rightarrow (5)$, которая используется для установления других импликаций, $(5) \Rightarrow (1)$, $(6) \Rightarrow (2_{\text{bis}})$, $(3) \Longleftrightarrow (3_{\text{bis}})$, $(2_{\text{bis}}) \Rightarrow (3)$, $(3) \Longleftrightarrow (2_{\text{bis}})$, $(3) \Rightarrow (5)$ — эти соотношения также используются в дальнейшем, $(1_{\text{bis}}) \Rightarrow (6)$, $(3) \Rightarrow (4)$ и $(1) \Rightarrow 2$.

Импликации $(2) \Rightarrow (2_{\text{bis}})$ и $(1) \Rightarrow (1_{\text{bis}})$ тривиальны. Далее, $(4) \Rightarrow (5)$ ввиду того, что по 19.16А модуль над артиновым кольцом квазиинъективен тогда и только тогда, когда он инъективен по модулю своего аннулятора.

$(1) \Rightarrow (5)$. Из того, что каждый модуль разлагается в прямую сумму конечно порожденных модулей, по 20.17 вытекает, что кольцо R артиново слева. Далее, если M — доминантный левый главный неразложимый идеал кольца R/J^n, то M цепной и, следовательно, однородный модуль. Поэтому его инъективная оболочка $\hat{M}$ в категории (R/J^n)-mod неразложима и, следовательно, является цепным модулем. Отсюда по 18.23.4 и 18.25.3 следует, что $\hat{M}$ — главный циклический (R/J^n)-модуль и потому его длина не превосходит длины модуля M. Но тогда $M = \hat{M}$, так что M инъективен по модулю J^n.

$(5) \Rightarrow (1)$. Без ограничения общности можем считать, что в условии (5) n не превосходит индекса нильпотентности радикала J. Покажем сначала индукцией по n, что каждый доминантный левый главный неразложимый идеал $Re/J^n e$ кольца R/J^n цепной и его длина равна n. Для $n = 1$ это утверждение очевидно, поэтому мы предположим, что оно верно для $n = m - 1$, и докажем его для факторкольца R/J^m. Поскольку $J^{m-1} \neq J^m$ (в противном случае $J^{m-1} = J^m = 0$ и мы пришли бы в противоречие с тем, что m не превосходит индекса нильпотентности радикала), то найдется примитивный идемпотент f кольца R, такой, что $J^{m-1}f \neq J^m f$, т. е. $J^{m-1}f/J^m f \neq 0$. Тогда, рассматривая ряд

$$(*) \qquad 0 \subset J^{m-1}f/J^m f \subset \ldots \subset Jf/J^m f \subset Rf/J^m f$$

и учитывая, что все его члены различны, получим, что длина левого главного неразложимого идеала $Rf/J^m f$ кольца R/J^m не меньше m. Пусть теперь $Re/J^m e$ — доминантный левый главный неразложимый идеал. Тогда его длина также не меньше m. Если бы $J^{m-1}e/J^m e = 0$, то $Re/J^m e = Re/J^{m-1}e$ и, применяя предположение индукции к левому идеалу $Re/J^{m-1}e$ кольца R/J^{m-1}, мы получили бы, что длина модуля $Re/J^m e (= Re/J^{m-1}e)$ не превосходит $m - 1$, т. е. строго меньше m. Противоречие показывает, что $J^{m-1}e/J^m e \neq 0$. По условию модуль $Re/J^m e$ инъективен в (R/J^m)-mod. Следовательно, его цоколь $\mathrm{soc}(Re/J^m e)$ — простой модуль. Но $0 \neq J^{m-1}e/J^m e \subseteq \mathrm{soc}\,(Re/J^m e)$, откуда $J^{m-1}e/J^m e$ — простой модуль, т. е. его длина равна 1. Поэтому длина левого главного неразложимого идеала $Re/J^{m-1}e$ кольца R/J^{m-1} не меньше, чем $m-1$. В силу предположения индукции отсюда следует, что его длина равна $m-1$ и он доминантный, а следовательно, и цепной модуль. Теперь, поскольку $J^{m-1}e/J^m e$ — простой модуль, ясно, что $Re/J^m e$ — цепной модуль длины m.

Докажем далее, что каждый левый R-модуль M разлагается в прямую сумму цепных модулей (тот факт, что цепные модули над артиновым слева кольцом конечно порождены, тривиален). Для каждого модуля M найдется число n, не превосходящее индекса нильпотентности радикала J (и равное ему, когда M точен), такое, что $J^n M = 0$. Проведем доказательство индукцией по этому числу n. Если $n = 1$, то утверждение очевидно. Пусть теперь любой модуль, аннулятор которого содержит J^{n-1}, есть прямая сумма цепных модулей, и рассмотрим модуль M, такой, что $J^n M = 0$. В силу предположения индукции мы можем ограничиться случаем, когда $J^{n-1}M \neq 0$. Покажем сначала, что любой такой модуль M обладает разложением $M = M' \oplus M''$, где M' — цепной модуль, изоморфный доминантному левому главному неразложимому идеалу кольца R/J^n. В самом деле, если $J^{n-1}M \neq 0$, то $J^{n-1}x \neq 0$ для некоторого $x \in M$. Следовательно, $J^{n-1}ex \neq 0$ для некоторого примитивного идемпотента e из R. Поэтому все члены ряда

$$0 \subset J^{n-1}ex \subset \ldots \subset Jex \subset Rex$$

различны и, следовательно, длина модуля Rex не меньше n. Рассматривая эпиморфизм (R/J^n)-модулей $Re/J^n e \to Rex \to 0$ и учитывая, что по доказанному выше длина левого главного неразложимого идеала $Re/J^n e$ кольца R/J^n не превосходит n, заключаем, что $Rex \approx Re/J^n e$ и $Re/J^n e$ — доминантный левый идеал. Как мы уже установили, модуль $Re/J^n e$ цепной. Поскольку по условию он инъективен в (R/J^n)-mod, а M является (R/J^n)-модулем, то $M = Rex \oplus M''$, что и требуется. Выберем теперь в M максимальную независимую систему $\{M_i\}_{i\in I}$ цепных подмодулей M_i, изоморфных доминантным левым главным неразложимым идеалам кольца R/J^n. Все M_i по условию инъективны в (R/J^n)-mod, откуда, учитывая левую артиновость кольца R/J^n, получаем, что инъективен и (R/J^n)-модуль $\sum\limits_{i\in I} \oplus M_i$. Поэтому $M = (\sum\limits_{i\in I} \oplus M_i) \oplus \oplus M_1$. Утверждается, что $J^{n-1}M_1 = 0$. Если это не так, то по доказанному M_1 обладает разложением $M_1 = M' \oplus M''$, причем M' — цепной модуль, изоморфный доминантному левому главному неразложимому идеалу кольца R/J^n. Но тогда система $\{M_i, M'\}_{i\in I}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\{M_i\}_{i\in I}$, и мы приходим к противоречию с максимальностью системы $\{M_i\}_{i\in I}$. Итак, $J^{n-1}M_1 = 0$. Применяя теперь индуктивное предположение к модулю M_1, получим требуемое прямое разложение модуля M.

(6) $\Rightarrow$ (2_{bis}). Из условия (6) вытекает условие (v) теоремы 25.2.6, и поэтому выполнены условие (ii) той же теоремы и его правый аналог. Значит, каждый конечно представимый модуль есть прямая сумма цепных главных циклических модулей.

(3) $\Rightarrow$ (3_{bis}) тривиально.

(3_{bis}) $\Rightarrow$ (3). Если Re — произвольный левый главный неразложимый идеал кольца R, то по условию $Re/J^2 e$ — цепной модуль, в частности, $Je/J^2 e$ либо равен нулю, либо является простым модулем. Следовательно, если $Je/J^2 e \neq 0$, то $Je/J^2 e \approx Rf/Jf$ для некоторого левого главного неразложимого идеала Rf. Ввиду проективности модуля Rf этот изоморфизм может быть продолжен до эпиморфизма $Rf \to Je \to 0$, который индуцирует эпиморфизм $Jf/J^2 f \to J^2 e/J^3 e \to 0$. Поскольку $Jf/J^2 f$ — либо нулевой, либо простой модуль, то и для $J^2 e/J^3 e$ имеет место одна из этих возможностей. Итак, для каждого примитивного идемпотента e модуль $J^2 e/J^3 e$ или прост, или равен нулю. Продолжая рассуждение по индукции, мы получим, что модуль $J^{n-1}e/J^n e$ для каждого n или прост, или равен нулю. Так как кольцо R артиново слева, то $J^n = 0$ для некоторого n. Отсюда легко следует, что Re — цепной модуль. Симметрично доказывается, что eR — цепной модуль для любого примитивного идемпотента e. Поэтому R — полуцепное кольцо.

Остается только доказать, что R артиново справа. Но кольцо R полупримарно и J/J^2 — прямая сумма конечного числа простых модулей eJ/eJ^2. Поэтому J/J^2 — нётеров правый модуль, откуда по 23.19 кольцо R артиново справа.

(Можно обойтись и без применения 23.19. Действительно, те же рассуждения, что были приведены для J/J^2, доказывают нётеровость правых модулей J^n/J^{n+1} для всех n. Поэтому R как правый R-модуль имеет композиционный ряд. Ср. 18.12 и его доказательство.)

(2_{bis}) $\Rightarrow$ (3). Ясно, что в силу 25.2.6 из условия (2_{bis}) вытекает, что R — полуцепное кольцо. Правая же артиновость полупримарного полуцепного кольца R была уже установлена в доказательстве импликации (3_{bis}) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2_{bis}) следует из 25.2.6.

(3) $\Rightarrow$ (5). Доказательство подобно доказательству импликации (1) $\Rightarrow$ (5), за исключением того, что заключение о том, что $\hat{M}$ — цепной модуль, следует теперь из других соображений. Именно поскольку $\hat{M}$ — однородный модуль, то любой его конечно порож-

денный подмодуль неразложим и, следовательно, ввиду 25.2.6, является цепным. А отсюда по ($2_{\rm bis}$) вытекает, что он изоморфен главному циклическому модулю (см. 25.4.1). Это означает, что длины конечно порожденных подмодулей модуля $\hat{M}$ конечны и ограничены длиной модуля ${}_RR$. Поэтому конечно порожденные подмодули модуля $\hat{M}$ удовлетворяют условию максимальности и, следовательно, $\hat{M}$ — нётеров модуль. В частности он конечно порожден, откуда по 25.2.6 получаем, что он цепной. Отсюда следует, что $\hat{M}$ — главный циклический модуль, причем его длина не меньше длины модуля M. Поэтому $M = \hat{M}$ — инъективный модуль, что и требуется.

($1_{\rm bis}$) $\Rightarrow$ (6) ввиду импликации (ii) $\Rightarrow$ (v) из теоремы 25.2.6.

(3) $\Rightarrow$ (4) доказывается аналогично импликации (3) $\Rightarrow$ (5).

(1) $\Rightarrow$ (2). Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) — следствие из уже доказанных импликаций. То же самое верно и для импликации (3) $\Rightarrow$ (1). Однако (3) лево-право симметрично, и поэтому справедливо условие (1′), симметричное (1). Следовательно, (1) влечет за собой (2) $=$ $=$ ((1) + (1′)). □

25.4.3. Следствие. *Если R — полупримарное кольцо, а кольцо $R/(\mathrm{rad}\ R)^2$ квазифробениусово, то R — артиново полуцепное кольцо.*

Доказательство. По 23.19 R артиново слева и справа. Более того, каждый левый главный неразложимый идеал кольца $\bar{R} = R/(\mathrm{rad}\ R)^2$ неразложим и инъективен. Следовательно, такой идеал имеет простой цоколь и простую вершину. Поэтому он цепной. По симметрии то же самое справедливо для правых главных неразложимых идеалов кольца $\bar{R}$.

Итак, для R справедливо условие ($3_{\rm bis}$) теоремы 25.4.2, и поэтому R — полуцепное кольцо. □

Теорема Джанса [57], Тахикавы [60] (для алгебр) и Колби [66] для артиновых колец утверждает, что из бесконечности структуры идеалов следует, что кольцо имеет строго неограниченный модульный тип. Следующий результат значительно слабее. (Тем не менее см. 25.4.5.)

25.4.4. Следствие. *Артиново полуцепное кольцо R имеет конечный модульный тип (т. е. является левым и правым* FFM*-кольцом) и конечную структуру идеалов.*

Доказательство. Пусть $R = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$, где e_i, $i = 1, \ldots, n$, — примитивные идемпотенты кольца. По 25.4.2 каждый неразложимый циклический левый модуль является главным циклическим и, следовательно, изоморфен модулю вида

Re_i/K для некоторого Re_i и его подмодуля K. Поскольку Re_i — цепной модуль, то множество всех его подмодулей конечно для всех i. Таким образом, множество классов изоморфных неразложимых главных циклических модулей конечно.

Поскольку, согласно 25.2.6, каждый левый R-модуль разлагается в прямую сумму главных циклических модулей, то отсюда следует, что R — левое FFM-кольцо (и даже более того, R — левое FM-кольцо). По симметрии R — правое FFM-кольцо.

Далее, пусть $C_1, \ldots, C_t$ — все попарно неизоморфные главные циклические R-модули. Тогда каждый левый R-модуль M конечной длины, не превосходящей, скажем, d, изоморфен прямой сумме

$$M \approx C_1^{e_1} \oplus \ldots \oplus C_m^{e_m},$$

где все показатели $e_1, \ldots, e_m$ ограничены некоторым числом $f(d)$, зависящим от d. По теореме 18.18 о единственности разложения мы, таким образом, получаем, что число неизоморфных модулей длины, не превосходящей d, конечно. Отсюда, учитывая, что для идеалов A и B циклические модули R/A и R/B изоморфны тогда и только тогда, когда $A = B$, легко получаем, что структура идеалов кольца R конечна. □

25.4.5. Следствие. *Любое артиново слева левое* FFM*-кольцо имеет конечную структуру идеалов.*

То же самое доказательство. □

25.4.6А. Предложение (Накаяма [40], Гурсо [70], Фейс [72a]) [1]. *Если R — кольцо, являющееся полным* PF*-кольцом в том смысле, что каждое факторкольцо является правым* PF*-кольцом, то R — примарно разложимое артиново полуцепное кольцо.*

Доказательство. По 24.32 любое факторкольцо кольца R полусовершенно и имеет конечно порожденный и существенный цоколь. Кроме того, поскольку любой ненулевой модуль M является образующим над кольцом $R/\mathrm{ann}_R M$, то M имеет ненулевой цоколь. Поэтому R совершенно слева ввиду 22.29. Пусть $J = \mathrm{rad}\ R$. Так как каждое факторкольцо имеет конечно порожденный правый цоколь, то правый идеал J/J^2 конечно порожден и потому по 23.19 R артиново справа. Ввиду того, что R самоинъективно справа, по 24.5 отсюда вытекает, что оно квазифробениусово. Аналогично квазифробениусовым будет и каждое факторкольцо кольца R, поэтому в силу 25.4.3 R — полуцепное кольцо. Ввиду 18.36 для того, чтобы показать, что R

[1]) См. также Л. А. Койфман, Вестник МГУ, Серия «Математика, механика», 1971, № 5, стр. 7—11.— *Прим. перев.*

примарно разложимо, достаточно доказать, что примарно разложимо его базисное кольцо B. Учитывая 4.32 (1, стр. 279) и тот факт, что квазифробениусовость кольца — свойство, инвариантное в смысле Мориты, получаем, что все факторкольца кольца B также квазифробениусовы. Тогда по 24.36 каждый идеал кольца B является левым и правым главным идеалом. Применение 19.44 теперь дает, что B примарно разложимо. □

25.4.6B. Предложение (Кёте [35], Асано К. [39], [49], Накаяма [40], Фейс [66b]). *Кольцо R является артиновым примарно разложимым полуцепным кольцом тогда и только тогда, когда выполнены следующие эквивалентные условия:*

(a) *R — артиново кольцо главных левых и главных правых идеалов.*

(b) *R — полуцепное артиново кольцо главных правых идеалов.*

(c) *R — квазифробениусово кольцо главных правых идеалов.*

(d) *R — кольцо главных правых идеалов и каждый левый главный неразложимый идеал кольца R является цепным модулем конечной длины.*

(e) *Каждое факторкольцо кольца R квазифробениусово.*

(f) *R артиново слева или справа и инъективная оболочка каждого циклического правого R-модуля циклична.*

(g) *R нётерово справа и в* mod-R *инъективные оболочки циклических модулей цикличны.*

Доказательство. Каждое кольцо, удовлетворяющее одному из условий (a)—(d), является артиновым кольцом главных правых идеалов и, следовательно, по 19.44 примарно разложимо. Поскольку все эти свойства сохраняются при переходе к конечным прямым произведениям, достаточно доказать эквивалентность (a)—(d) для кольца матриц A_n над вполне примарным кольцом A. Мы оставим это в качестве упражнения читателю, сделав два замечания: (1) Вообще говоря, может случиться, что кольцо A_n является кольцом главных правых идеалов, а кольцо A — нет. (Такой пример был указан Суоном [62]; ср. 10.21 и далее.) Однако для артиновых колец такая возможность исключена; (2) поэтому тот факт, что любое кольцо A_n, удовлетворяющее одному из условий (a)—(d), является полуцепным, непосредственно вытекает из того, что во всех этих случаях полуцепным будет кольцо A.

Учитывая, что любое факторкольцо примарно разложимого полуцепного кольца также полуцепное и примарно разложимо и то, что по доказанному это свойство эквивалентно условиям (a)—(d), получим, что (a)—(d) влекут за собой (e). В то же время ввиду 25.4.6A из (e) следует, что R — примарно разложимое и полуцепное кольцо. Итак, условия (a)—(e) эквивалентны. Далее, импликация (f) $\Rightarrow$ (g) тривиальна [1]). Мы завершим доказательство, если установим импликации (b) $\Rightarrow$ (f) и (g) $\Rightarrow$ (c).

(b) $\Rightarrow$ (f). Если $C = R/I$ — циклический правый модуль, то, поскольку ${}^{\perp}I = Ry$ для некоторого $y \in R$, получаем, что $C = R/y^{\perp} \approx yR$, т. е. что C вкладывается в R_R. Ввиду эквивалентности условий (b) и (c) отсюда следует, что инъективная оболочка $\hat{C}$ модуля C, являясь прямым слагаемым в $\hat{R}_R = R_R$, будет циклическим модулем.

(g) $\Rightarrow$ (c). Покажем сначала, что R самоинъективно справа. Если это не так, то $\hat{R}_R \approx R/I$ для некоторого ненулевого правого идеала I в R. Поэтому в R найдется элемент x, такой, что $xR \cap I = 0$, $xR \approx R_R$ и $(xR \oplus I)/I$ — существенный подмодуль в R/I. Следовательно, $xR \oplus I$ — существенный правый идеал в R, откуда $\widehat{xR} \oplus \hat{I} = \hat{R}_R$, и, учитывая, что $\widehat{xR} \approx \hat{R}_R$, получим изоморфизмы $\hat{R}_R \oplus \hat{I} \approx \hat{R}_R$, $\hat{R}_R \oplus \hat{I} \oplus \hat{I} \approx \hat{R}_R, \ldots, \hat{R}_R \oplus \hat{I}^{(n)} \approx \approx \hat{R}_R$ и т. д. Итак, $\hat{R}_R$ содержит бесконечную прямую сумму подмодулей (изоморфных $\hat{I}$). Но тогда их пересечение с R_R дает бесконечную прямую сумму подмодулей в R_R, что противоречит нётеровости справа кольца R. Итак, установлено, что (g) влечет за собой самоинъективность справа кольца R. Применение теоремы 24.5 теперь показывает, что R квазифробениусово. Далее, если $C = R/I$ — произвольный циклический правый модуль, то его инъективная оболочка $\hat{C}$ циклична, а по 24.12 и проективна. Следовательно, $\hat{C}$ изоморфен прямому слагаемому модуля R_R. В частности, $C = R/I$ вкладывается в R, т. е. ${}^{\perp}I$ — главный левый идеал. Поскольку аннуляторным является каждый левый идеал кольца R, то это показывает, что R — квазифробениусово кольцо главных левых идеалов. Итак, R удовлетворяет левому аналогу условия (c). Однако (c) $\Longleftrightarrow$ (a), а (a) — лево-право симметрично. Поэтому (c) эквивалентно своему левому аналогу. □

25.4.7. Упражнение. (a) Коммутативное артиново кольцо R является полуцепным тогда и только тогда, когда его факторкольцо по квадрату радикала квазифробениусово.

[1]) Конечно, это так, если в (f) предполагается, что R артиново справа. Если же, напротив, R артиново слева, то импликация (f) $\Rightarrow$ (g) не совсем тривиальна. Достаточно показать, что R самоинъективно справа, тогда оно окажется нётеровым справа ввиду 24.5. Если $\hat{R}_R \neq R$, то по условию $\hat{R}_R \approx R/I$ для некоторого ненулевого правого идеала I кольца R. Рассуждение из доказательства импликации (g) $\Rightarrow$ (c) тогда показывает, что $R/I \approx \hat{R}_R$ обладает прямыми разложениями с любым числом ненулевых слагаемых. С другой стороны, поскольку R совершенно, то ввиду 22.20(a) число слагаемых в любом прямом разложении модуля R/I ограничено сверху длиной модуля R/J. Противоречие дает требуемое равенство $R = \hat{R}_R$.— *Прим. перев.*

(b) QF-кольцо R будет полуцепным тогда и только тогда, когда QF-кольцом является факторкольцо $R/(\mathrm{rad}\ R)^2$.

(c) Кольцо $T_n(F)$ нижних треугольных $(n \times n)$-матриц над классически полупростым кольцом F является полуцепным, но не квазифробениусовым кольцом. [Инъективная оболочка модуля $T_n(F)$ равна полному кольцу матриц F_n.] Если $n > 1$ и F — тело, то $T_n(F)$ не будет примарно разложимым кольцом.

(d) Показать, что обратное к 25.4.3 неверно.

(e) (Айзенбуд — Робсон [71] и Уорфилд [75].) Любое полупримарное правое FBG-кольцо артиново справа.

Сплетение

25.4.8. Определение. Пусть M_1 и M_2 — правые R-модули и $a\colon S_1 \to S_2$ — гомоморфизм подмодулей $S_1 \subseteq M_1$ и $S_2 \subseteq M_2$. Тогда

$$\mathrm{diag}\ a = \{(s, as) \in M_1 \times M_2 \mid s \in S\}$$

— подмодуль в $M_1 \times M_2$ и фактормодуль

$$(M_1 \times M_2)/\mathrm{diag}\ a$$

называется **сплетением** (или **сплетающим модулем**) для a и обозначается через $M_1 \underset{a}{\times} M_2$.

25.4.9. Предложение. *Пусть R — полулокальное кольцо с радикалом J и M — цепной модуль длины $m - 1$. Если M_1 и M_2 — два цепных модуля длины m, каждый из которых содержит модуль M, то сплетение для 1_M есть модуль P длины $m + 1$, а его вершина имеет длину 2. Более того, вложение*

$$\begin{cases} M_1 \to P, \\ m \mapsto (m, 0) + \mathrm{diag}\ 1_M = [m, 0] \end{cases}$$

оказывается существенным мономорфизмом тогда и только тогда, когда 1_M не может быть продолжен до изоморфизма $f\colon M_1 \to M_2$. Конечно, P неразложим в этом и только в этом случае.

Доказательство. Обозначим через $[m_1, m_2]$ смежный класс элемента (m_1, m_2) по подмодулю $\mathrm{diag}\ 1_M$. Так как M_i — цепной модуль, то по 18.40.1

$$M = \mathrm{rad}\ M_i = M_i J$$

$i = 1, 2$, где $J = \mathrm{rad}\ R$. Это показывает, что модуль

$$\mathrm{rad}\ P = PJ = [M_1 J, M_2 J] = [M, 0] = [0, M]\ ^{1)}$$

[1]) Здесь через $[M_1 J, M_2 J]$ обозначен образ подмодуля $M_1 J \times M_2 J$ при каноническом гомоморфизме $M_1 \times M_2 \to M_1 \underset{1_M}{\times} M_2$. Аналогичный смысл имеют обозначения $[M, 0]$, $[0, M]$.— *Прим. перев.*

изоморфен M при соответствии $m \mapsto [m, 0]$. Далее,

$$(\text{длина}\ (P)) = 2m - (m - 1) = m + 1 = \\ = \text{длина}\ (P/PJ) + \text{длина}(PJ)$$

и $(\text{длина}(PJ)) = (\text{длина}(M)) = m - 1$, откуда

$$(\text{длина}(P/PJ)) = m + 1 - (m - 1) = 2.$$

Обозначим теперь через M_1' образ модуля M_1 при вложении, указанном в условии предложения, т. е. $M_1' = [M_1, 0]$.

Предположим сначала, что M_1' — существенный подмодуль в P, и в то же время $1_M\colon M \to M$ продолжается до изоморфизма $f\colon M_1 \to M_2$. Поскольку M_1 — цепной модуль конечной длины, то по 18.40.2 он циклический, скажем, $M_1 = m_1 R$ для некоторого $m_1 \in M_1$. Положим $m_2 = f(m_1)$. Очевидно, $M_2 = m_2 R$. Более того, если $m_2 r \in M$ для некоторого $r \in R$, то $m_2 r = f^{-1}(m_2 r) = m_1 r$. Рассмотрим теперь в P ненулевой подмодуль $[m_1, m_2] R$. Так как $M_1' = [M_1, 0]$ — существенный подмодуль в P, то $0 \neq [m_1, m_2] r \in [M_1, 0]$ для некоторого $r \in R$. Из того, что $[m_1 r, m_2 r] \in [M_1, 0]$, легко следует, что $m_2 r \in M$. Но тогда $m_1 r = m_2 r \in M$ и, следовательно, $(m_1, m_2) r = (m_1 r, m_2 r) \in \mathrm{diag}\ 1_M$, т. е. $[m_1, m_2] r = 0$, и мы пришли к противоречию. Итак, 1_M не продолжается до изоморфизма $M_1 \to M_2$.

Обратно, пусть тождественное отображение $1_M\colon M \to M$ не продолжается до изоморфизма $f\colon M_1 \to M_2$. Предположим, что тем не менее M_1' не является существенным подмодулем в P. Так как $(\text{длина}\ (M_1')) = (\text{длина}(M_1)) = m$, а $(\text{длина}(P)) = m + 1$, то M_1' — максимальный подмодуль в P, и потому, если M_1' — не существенный подмодуль, то $P = M_1' \oplus S$, где S — простой, в частности, циклический подмодуль. Запишем $S = xR$, где $x = [m_1, m_2] \in P$, и заметим, что $m_2 \notin M$. В самом деле, если $m_2 \in M$, то $[m_1, m_2] = [m_1 - m_2, 0] \in [M_1, 0] = M_1'$ и, таким образом, $0 \neq [m_1, m_2] \in S \cap M_1' = 0$. Противоречие показывает, что $m_2 \notin M$. Поскольку M_2 — цепной модуль и M — его максимальный подмодуль, то отсюда вытекает что $M_2 = m_2 R$. Пусть, далее, $m_2 r \in M$ для некоторого $r \in R$. Тогда $[m_1, m_2] r = [m_1 r, m_2 r] = [m_1 r - m_2 r, 0] \in [M, 0] \cap S$, откуда $[m_1, m_2] r = 0$, т. е. $(m_1 r, m_2 r) \in \mathrm{diag}\ 1_M$. Следовательно, $m_1 r = m_2 r$. В частности, если $m_2 r = 0$, то $m_1 r = m_2 r = 0$, и поэтому отображение $g\colon m_2 R \to m_1 R$, при котором $g(m_2) = m_1$, является корректно определенным гомоморфизмом $g\colon M_2 \to M_1$. Если $m \in M$, то $m = m_2 r$ для некоторого $r \in R$ и, как было замечено, $g(m) = g(m_2 r) = m_1 r = m_2 r = m$. Итак, гомоморфизм g продолжает тождественное отображение 1_M. В частности, g — мономорфизм. Но поскольку длины модулей M_1 и M_2 равны, то g — изоморфизм. Полагая теперь $f = g^{-1}$, мы получим изоморфизм $M_1 \to M_2$, продолжающий 1_M, в противоречие с предположением. □

25.4.10. Упражнения (Тахикава [59]).

1. Пусть R — артиново кольцо. Если M_1 и M_2 суть R-модули и a: $\operatorname{soc} M_1 \to \operatorname{soc} M_2$ — изоморфизм, где $\operatorname{soc} M$ обозначает цоколь модуля M (1, стр. 451), то сплетение для a разложимо тогда и только тогда, когда либо a продолжается до вложения M_1 в M_2, либо a^{-1} продолжается до вложения M_2 в M_1.

2. В тех же предположениях доказать, что сплетение для a имеет простой цоколь тогда и только тогда, когда либо существует гомоморфизм b: $S \to M_2$, где S — подмодуль в M_1 длины, большей 1, такой, что b индуцирует a, либо существует гомоморфизм b: $T \to M_1$, где $T \subseteq M_2$, (длина $(T)) \geqslant 1$, такой, что b индуцирует a^{-1}.

3. Показать на примере, что не каждый цепной модуль над полуцепным кольцом является квазиинъективным.

4. Охарактеризовать полуцепные кольца, над которыми каждый цепной модуль квазиинъективен.

$\sum$-циклические кольца

Термины «$\sum$-циклическое», «n-генное», BG- и FBG-кольца были определены и обсуждались в гл. 20. Если кольцо A артиново справа и является FBG-кольцом или, что эквивалентно, σ-n-генным для некоторого целого $n>0$, то A обладает контекстом двойственности 25.4.11. Эти кольца характеризуются в 25.4.12. Если кольцо A обладает контекстом двойственности ${}_BE_A$ и каждый неразложимый левый B-модуль конечной длины вкладывается в E, то A оказывается σ-циклическим справа (25.4.13). Достаточное условие для этого состоит в том, что каждый неразложимый левый B-модуль обладает цоколем, свободным от квадратов [1]) (25.4.13(b)). То же самое справедливо и для колец с $\sum$-циклическими инъективными модулями (25.4.14).

25.4.11. Предложение. *Если A — артиново справа правое FBG-кольцо (т. е. n-генное кольцо, для некоторого $n>0$), то каждый неразложимый инъективный правый A-модуль конечно порожден и A обладает конечно порожденным инъективным кообразующим E, а следовательно, и контекстом двойственности ${}_BE_A$.*

Доказательство. В силу рассуждения, аналогичного доказательству импликации $(3) \Rightarrow (5)$ в теореме 25.4.2, получим, что любой неразложимый инъективный A-модуль конечно порожден. Так как A артиново справа, то $A/\operatorname{rad} A$ классически полупросто. Поэтому существует лишь конечное число неизоморфных неразложимых инъективных правых модулей $E_1, E_2, \ldots, E_t$, являющихся инъективными оболочками неизоморфных простых модулей. Тогда $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t$ — конечно порожденный инъективный кообразующий. Следовательно, по теореме Мориты 23.25 существует контекст двойственности ${}_BE_A$. □

[1]) То есть цоколь не содержит двух различных изоморфных простых модулей.— *Прим. перев.*

25.4.12. Предложение. *Пусть кольцо A артиново справа, кольцо B артиново слева и ${}_BE_A$ — контекст двойственности. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *A — правое FBG-кольцо.*

(b) *A — правое n-генное или, эквивалентно, σ-n-генное кольцо для некоторого $n>0$.*

(c) *A подобно σ-циклическому кольцу.*

(d) *Существует целое число $m>0$, такое, что каждый конечно порожденный неразложимый левый B-модуль может быть вложен в E^m.*

(e) *Существует целое число q, такое, что длина цоколя каждого конечно порожденного неразложимого левого B-модуля не превосходит q.*

(f) *B — левое FBG-кольцо.*

Если n (соотв. m) — минимальное целое число, для которого справедливо условие (b) *(соотв.* (d)*), то $n = m$.*

Доказательство. Напомним, что E-дуальный к модулю X обозначается через X^* (см. стр. 279). Ясно, что X — простой модуль тогда и только тогда, когда прост его дуальный X^* (ср. 23.25). По индукции получаем, что длина модуля X не превосходит n тогда и только тогда, когда длина модуля X^* не превосходит n. Кроме того, X неразложим тогда и только тогда, когда неразложим X^*. Итак, (a) $\Leftrightarrow$ (f). Далее, последовательность $A^n \to X \to 0$ в mod-A точна тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$(A^n)^* \approx (A^*)^n \approx E^n \leftarrow X^* \leftarrow 0$$

в B-mod. Поэтому (b) $\Leftrightarrow$ (d)[1]). Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) очевидна, а эквивалентность (b) $\Leftrightarrow$ (c) была доказана в 20.39. Наконец, эквивалентность (d) $\Leftrightarrow$ (e) вытекает из того, что инъективная оболочка любого B-модуля над артиновым кольцом B совпадает с инъективной оболочкой его цоколя, а каждый полупростой модуль длины q вкладывается в E^q (это верно для любого инъективного кообразующего E). Так как каждый модуль M в B-mod имеет существенный цоколь, то вложение цоколя модуля M в E^q продолжается до вложения M в E^q. □

[1]) Это также доказывает второе утверждение предложения.— *Прим. перев.*

До полного решения А. В. Ройтером [68] проблемы Брауэра — Тролла Кэртис и Джанс [65] предложили ее решение для конечномерных алгебр над алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих условию (b) следствия 25.4.13, которое показывает, что такие алгебры σ-циклические.

25.4.13. Следствие. *Пусть ${}_BE_A$ — контекст двойственности, где кольцо A артиново справа, а кольцо B артиново слева.*

(a) *A является σ-циклическим тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный неразложимый левый B-модуль может быть вложен в E.*

(b) *Достаточное условие для того, чтобы выполнялось* (a), *состоит в том, чтобы каждый конечно порожденный неразложимый левый B-модуль имел цоколь, свободный от квадратов. Если E — минимальный инъективный кообразующий в B-mod, то это условие также и необходимо. Таким образом, в этом случае A есть σ-циклическое кольцо тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный неразложимый левый B-модуль имеет цоколь, свободный от квадратов.*

Доказательство. (a) вытекает из 25.4.12, а (b) следует из того, что модуль над артиновым кольцом вкладывается в минимальный инъективный кообразующий тогда и только тогда, когда его цоколь свободен от квадратов. □

25.4.14. Следствие. *Пусть ${}_BE_A$ — контекст двойственности, где кольцо A артиново справа, а кольцо B артиново слева.*

(a) *Все инъективные правые A-модули являются $\sum$-циклическими тогда и только тогда, когда каждый левый главный неразложимый B-модуль Be (где $e = e^2 \in B$) вкладывается в E.*

(b) *Достаточное условие выполнимости* (a) *состоит в том, что каждый левый главный неразложимый B-модуль Be, $e = e^2 \in B$, свободен от квадратов. Если E — минимальный инъективный кообразующий в B-mod, то это условие также и необходимо.*

Доказательство. Ясно, что модуль X неразложим и инъективен тогда и только тогда, когда дуальный левый модуль X^* неразложим и проективен. Но над артиновым кольцом каждый такой модуль X^* изоморфен левому главному неразложимому идеалу Be (см. 22.23(c)). Остальное доказывается точно так же, как и в 24.32. □

25.4.15. Следствие. *Пусть R есть QF-кольцо.*

(a) *Тогда R — правое σ-циклическое кольцо в том и только том случае, когда каждый неразложимый конечно порожденный левый R-модуль вкладывается в R.*

(b) *R оказывается левым и правым σ-циклическим кольцом тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный модуль изоморфен прямой сумме односторонних идеалов.*

Если кольцо R удовлетворяет условиям утверждения (b), *то каждый его правый идеал, лежащий в правом главном неразложимом идеале eR, циклический.*

Доказательство. Бимодуль ${}_RR_R$ является контекстом двойственности. Тогда 25.4.13(a) влечет за собой (a), а (b) есть объединение утверждения (a) с лево-право симметричным к нему. Если же условия из (b) выполнены и правый идеал $I \subseteq eR$, то I неразложим и, следовательно, циклический. □

25.4.16. Следствие. *Пусть кольцо A артиново справа. Тогда для того, чтобы нашлось целое число $n > 0$, такое, что каждый конечно порожденный неразложимый правый A-модуль порождается n элементами, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой контекст двойственности ${}_BE_A$, что каждый неразложимый левый B-модуль вкладывается в E^n.*

Доказательство. Это следствие — просто переформулировка эквивалентности условий (b) и (d) предложения 25.4.12. □

25.4.17A. Предложение. *Пусть R — кольцо.*

(a) *Если каждый правый R-модуль вкладывается в свободный модуль, то R есть QF-кольцо.*

(b) *Пусть кольцо R артиново справа или нётерово слева. Если каждый конечно порожденный правый модуль вкладывается в свободный правый R-модуль, то R есть QF-кольцо. Таким образом, для того, чтобы каждый конечно порожденный неразложимый правый модуль был изоморфен правому идеалу кольца R, необходимо, чтобы R было QF-кольцом.*

(c) *Если R — полуцепное QF-кольцо, то каждый R-модуль изоморфен прямой сумме циклических цепных односторонних идеалов. В этом случае каждый модуль изоморфен прямой сумме главных односторонних идеалов.*

Доказательство. (a). По условию каждый инъективный правый модуль вкладывается в свободный модуль и, следовательно, выделяется в нем прямым слагаемым. Таким образом, каждый инъективный модуль проективен, откуда по 24.12 вытекает, что R есть QF-кольцо.

(b) По 24.1 каждый правый идеал является правым аннулятором конечного подмножества элементов из R. Поэтому из условия максимальности для левых идеалов вытекает условие минимальности для правых идеалов, так что в обоих случаях мы можем предполагать, что R артиново справа. Теперь поскольку ввиду 20.16 каждый конечно порожденный однородный правый R-модуль вкладывается в R, то он имеет конечную длину и длины всех таких модулей ограничены длиной модуля R_R. Отсюда так же, как и при доказательстве импликации (3) ⇒ (5) теоремы 25.4.2, следует, что каждый неразложимый инъективный правый модуль нётеров и потому также вкладывается в R. Таким образом, R_R содержит инъективную оболочку каждого простого модуля, т. е. является кообразующим. Применяя 24.13, получаем, что R есть QF-кольцо.

(c) Если R — полуцепное артиново кольцо, то по 25.4.2 каждый правый модуль M изоморфен прямой сумме главных циклических или, что эквивалентно, артиновых цепных модулей. Применяя теперь 25.4.15(b), получим, что каждый цепной модуль изоморфен одностороннему идеалу. Это доказывает, что M — прямая сумма циклических цепных правых идеалов. □

25.4.17В. Упражнение. Показать, что существует (QF-)кольцо R, над которым каждый конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму циклических односторонних идеалов, и тем не менее R не является полуцепным (см. замечания к этой главе о групповых кольцах).

25.4.18. Предложение (Фейс — Уокер Э. [67] и Фейс [66]). *Если кольцо R коммутативно, то R квазифробениусово тогда и только тогда, когда каждый инъективный модуль является прямой суммой циклических модулей.*

Доказательство. В одну сторону утверждение вытекает из 24.14. Пусть, далее, R — коммутативное кольцо, над которым инъективные модули суть прямые суммы циклических модулей. Тогда по 20.18 R артиново. Поэтому R есть прямое произведение конечного числа локальных артиновых колец, так что достаточно доказать, что локальное артиново кольцо с указанным свойством квазифробениусово. Но в этом случае инъективная оболочка $\widehat{R/J}$, где $J = \mathrm{rad}\, R$, являясь циклическим инъективным кообразующим и, в частности, точным модулем, должна быть изоморфна R-модулю R. Следовательно, $\widehat{R/J} \approx R$ — инъективный модуль. Ввиду 24.5 это доказывает, что R есть QF-кольцо. □

Кольца с $\sum$-циклическими левыми и правыми инъективными модулями

По 24.14 каждое QF-кольцо R обладает свойством, указанным в заглавии, а если R коммутативно, то верно и обратное. Следующее предложение показывает, что в общем случае обратное не верно.

25.4.19. Предложение. *Пусть B — артиново коммутативное кольцо и E — инъективная оболочка модуля $B/\mathrm{rad}\, B$ в B-mod.*

(a) *Тогда ${}_BE_A$ — контекст двойственности, где $A = \mathrm{End}_B E$,*

и поэтому ${}_BE^n_{A_n}$ — контекст двойственности для любого $n > 0$ (ср. 23.25).

(b) *Кроме того, если длина цоколя $\mathrm{soc}\, B$ не превосходит n, то над кольцом матриц A_n правые и левые инъективные модули являются $\sum$-циклическими.*

(c) *Если B не квазифробениусово, то и A_n не является таковым. (Если B локально, то оно квазифробениусово тогда и только тогда, когда B имеет простой цоколь).*

Доказательство. (a) Так как $B/\mathrm{rad} B$ содержит экземпляр каждого простого B-модуля, то E — инъективный кообразующий. Далее, над коммутативным артиновым кольцом инъективная оболочка модуля конечной длины также имеет конечную длину (Морита [58]) [1]. Итак, ${}_BE$ конечно порожден и потому ${}_BE_A$ — контекст двойственности по теореме 23.25 Мориты. Так как $A_n = \mathrm{End}_B E^n$, то то же самое рассуждение показывает, что ${}_BE^n_{A_n}$ — контекст двойственности.

(b) Если цоколь $\mathrm{soc}\, B$ модуля B имеет длину, не превосходящую n, то тем же свойством обладает и любой левый главный неразложимый идеал Be, в силу чего он может быть вложен в E^n. Теперь (b) вытекает из 25.4.14(a) и того, что условие (b) лево-право симметрично. (В действительности $A \approx B$ и E — инъективный кообразующий в mod-A (см. 23.25(a), а также упр. 16 к гл. 23).)

(c) Так как кольца B и A_n связаны E^n-двойственностью, то одно из них квазифробениусово тогда и только тогда, когда квазифробениусово другое. Артиново (с обеих сторон) локальное кольцо квазифробениусово тогда и только тогда, когда длина как правого, так и левого его цоколя равна 1 [2]. □

---

[1] Очевидно, что можно ограничиться случаем локального кольца B, и достаточно показать, что над B инъективная оболочка E простого модуля конечно порождена. Проверим, что бимодуль ${}_BE_B$ удовлетворяет условиям (4) теоремы 23.25. Справедливость (4) (a) и (4) (c) тривиальна, и нужно только проверить, что E-дуальный к простому модулю B/J, где $J = \mathrm{rad}\, B$, прост. Но это так, поскольку $(B/J)^* = \mathrm{Hom}_B(B/J, E) \approx \mathrm{Hom}_B(B/J, B/J) \approx \approx \mathrm{Hom}_{B/J}(B/J, B/J) \approx B/J$. Теперь из 23.25 вытекает, что E конечно порожден. — *Прим. перев.*

[2] В одну сторону утверждение очевидно. Обратно, пусть R — артиново локальное кольцо, а $\mathrm{soc}\,({}_RR)$ и $\mathrm{soc}\,(R_R)$ имеют длину 1, т. е. являются простыми Так как $\mathrm{soc}\,({}_RR)$ — существенный левый идеал, а $\mathrm{soc}\,(R_R)$ — левый идеал, то $\mathrm{soc}\,({}_RR) \subseteq \mathrm{soc}\,(R_R)$. Симметрично, $\mathrm{soc}\,(R_R) \subseteq \mathrm{soc}\,(R_R)$, откуда $S = \mathrm{soc}\,({}_RR) = \mathrm{soc}\,(R_R)$ и ${}_RS_R \approx {}_RR/J_R$, где $J = \mathrm{rad}\, R$. Теперь легко видеть, что ${}_RS^* \approx S_R$ и $S^*_R \approx {}_RS$, где S^* есть R-дуальный к S. Поскольку ${}_RS$ (соотв. S_R) — единственный простой левый (соотв. правый) R-модуль, то ввиду 24.4 это означает, что R квазифробениусово. — *Прим. перев.*

5. Факторкольца наследственных нётеровых первичных колец: теорема Айзенбуда — Гриффитса — Робсона

Мы теперь применим теорему 20.29 Веббера — Чаттерса и теорему 25.4.2 Накаямы об артиновых полуцепных кольцах, для того чтобы доказать теорему, которой озаглавлен этот раздел, а именно:

25.5.1. Теорема (Айзенбуд — Гриффитс [71a], Айзенбуд — Робсон [70]) [1]). *Если R — нётерово наследственное первичное кольцо, то R/I — артиново полуцепное кольцо для каждого ненулевого идеала I. На самом деле это верно для любого наследственного слева кольца R с плоской инъективной оболочкой и для любого его идеала I, такого, что R/I артиново слева.*

Доказательство. По теореме Голди и Лезьё — Круазо (1, 9.10, стр. 484) R обладает классическим левым кольцом частных Q, являющимся простым артиновым кольцом. Кроме того, по 16.9 (1, стр. 468) Q — плоский правый R-модуль. Итак, Q самоинъективно слева и каноническое вложение Q-mod $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ R-mod обладает точным левым сопряженным $Q\otimes_R$. Поэтому Q — инъективный левый R-модуль по 11.35.3 (1, стр. 537). (См. также упр. 19.38.) Отсюда следует, что Q — инъективная оболочка левого R-модуля R. Учитывая, что Q является также правым классическим кольцом частных кольца R, по 16.9 (1, стр. 648) получаем, что Q — плоский левый R-модуль. Кроме того, поскольку R первично, то любой его ненулевой идеал I является существенным и, следовательно, кольцо R/I артиново слева по 20.29.

Следовательно, мы можем предположить, что R и I удовлетворяют условиям второго утверждения теоремы. Так как любой идеал, содержащий I, также удовлетворяет этим условиям, то любое утверждение, доказанное о кольце $A = R/I$, справедливо для всех факторколец кольца A. Ввиду 25.4.2 для того, чтобы показать, что A — полуцепное кольцо, достаточно доказать, что полуцепным будет факторкольцо $A/(\mathrm{rad}\,A)^2$. Поэтому без ограничения общности мы можем с самого начала считать, что идеал I таков, что $(\mathrm{rad}\,A)^2 = 0$. Чтобы показать, что A полуцепное, опять же в силу 25.4.2 достаточно доказать, что любой доминантный левый главный неразложимый идеал кольца A инъективен.

[1]) В прототипе этой теоремы, полученном Айзенбудом и Робсоном [70], дополнительно требовалось, чтобы кольцо имело «достаточно много обратимых идеалов». Айзенбуд и Гриффитс доказали теорему в общем случае. Сингх [75] дал набросок доказательства обратной теоремы для ограниченных нётеровых первичных колец. (Более того, его замечание, добавленное к доказательству, устраняет предположение об ограниченности.)

Пусть E — инъективная оболочка левого R-модуля R. Мы вычислим с помощью E инъективную оболочку левого A-модуля A. Так как R наследственно слева, E/I — инъективный R-модуль. (Воспользоваться тем, что $\mathrm{inj}\dim E/I \leqslant 1$. См. 1, стр. 456, а также 2.4 (1, стр. 656).) Пусть $F = \{x \in E \mid Ix \subseteq I\}$. Ясно, что F — левый R-подмодуль в E и, следовательно, плоский R-модуль [1]). Положим $F/I = E'$ и заметим, что E' — левый A-модуль, содержащий A. Кроме того, E' — инъективный A-модуль, поскольку

$$E' = \mathrm{Hom}_R(A,\ F/I) \approx \{x \in E/I \mid Ix = 0\}.$$

С другой стороны, мы покажем, что E' — проективный A-модуль. По 22.31А достаточно показать, что E' — плоский A-модуль.

Заметим, что $I = IF$, так как $1 \in F$. Следовательно, $E' = F/IF \approx A \otimes_R F$. Но F — плоский R-модуль, поэтому E' — плоский A-модуль.

Итак, E' — инъективный и проективный A-модуль. По 22.23(с) мы можем записать $E' = \coprod X_i$, где X_i — инъективные левые главные неразложимые идеалы кольца A. Пусть теперь X — доминантный левый главный неразложимый идеал кольца A. Поскольку $(\mathrm{rad}\,A)^2 = 0$, то длина Лёви любого A-модуля не превосходит 2. Поэтому, если A не классически полупросто (в этом случае A, очевидно, полуцепное кольцо), то длина Лёви модуля X равна 2. Покажем, что X изоморфен одному из X_i. Для каждого i имеем гомоморфизм $X \xrightarrow{\varphi_i} X_i$, равный сквозному гомоморфизму

$$X \to A \to E' = \coprod X_i \xrightarrow{p_i} X_i,$$

где $X \to A$ — включение. Так как $X \to A \to E'$ — мономорфизм, то мы можем выбрать i, такое, что $\ker \varphi_i \not\supseteq \mathrm{soc}\, X$, и поэтому длина Лёви образа $\mathrm{im}\,\varphi_i$ равна длине Лёви модуля X, т. е. 2. Поскольку X_i инъективен и неразложим, то $\mathrm{soc}\, X_i$ — простой A-модуль. Кроме того, $\mathrm{top}\, X_i$ также прост ввиду того, что X_i — левый главный неразложимый идеал. Поэтому модуль X_i имеет длину, не превосходящую 2. Но $X_i \supseteq \mathrm{im}\,\varphi_i$, откуда следует, что длины модулей X_i и $\mathrm{im}\,\varphi_i$ равны 2, т. е. $X_i = \mathrm{im}\,\varphi_i$. Итак,

[1]) Это вытекает из того, что над наследственным слева кольцом R каждый подмодуль N любого плоского левого R-модуля M является плоским. В самом деле, по 11.32 (1, стр. 533) M изоморфен $\varinjlim_{i\in I} P_i$ — прямому пределу направленного семейства проективных R-модулей. Пусть $a_i\colon P_i \to M$, $i \in I$, — канонические гомоморфизмы и $P_i' = a_i^{-1}(a_i(P_i) \cap N)$. Тогда, используя 14.6(с) (1, стр. 598), легко видеть, что $\varinjlim_{i\in I} P_i' \approx N$. Но все модули P_i' как подмодули проективных модулей P_i также проективны и, в частности, это плоские модули. Поскольку прямой предел плоских модулей — плоский модуль (см. примечание на стр. 263), то отсюда следует, что N — плоский модуль.— *Прим. перев.*

φ_i: $X \to X_i$ — эпиморфизм. Теперь, поскольку X_i проективен, а X неразложим, получаем, что φ_i — изоморфизм. Поэтому X инъективен, что и требовалось. □

Замечание. Любое наследственное слева кольцо антисингулярно слева. Следовательно, инъективная оболочка Q левого R-модуля R совпадает с максимальным левым кольцом частных кольца R, являющимся регулярным в смысле Неймана и самоинъективным слева кольцом (19.35). Тогда по теореме Жантиля [60] и Сандомирского [68] Q — плоский правый [sic!] R-модуль (ср. гл. 11, упр. 5). Однако Q не обязан быть плоским левым R-модулем. Например, в предположении, что $R \hookrightarrow Q$ — эпиморфизм колец (что имеет место, если Q — классическое левое кольцо частных кольца R), Q — плоский левый R-модуль тогда и только тогда, когда Q является также правым кольцом частных кольца R (Гудёрл [71]). (Ср. упр. 19.38 (j) и (n).)

Упражнения к гл. 25

1. Локальное кольцо, над которым левые и правые инъективные модули являются $\sum$-циклическими, квазифробениусово. (Ср. 25.4.19.)

2. Кольцо R является артиновым полуцепным тогда и только тогда, когда оно — полупримарное кольцо, над которым инъективные оболочки неразложимых модулей неразложимы или, что эквивалентно, каждый неразложимый правый или левый модуль имеет простой цоколь.

3 (Фуллер [69b]). Артиново слева кольцо является полуцепным тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих эквивалентных условий: (a) каждый неразложимый (правый или левый) модуль квазиинъективен; (b) каждый неразложимый модуль квазипроективен; (c) каждый неразложимый квазиинъективный модуль квазипроективен; (d) каждый неразложимый квазипроективный модуль квазиинъективен, (e) каждый неразложимый левый модуль квазиинъективен и квазипроективен, (f) каждый левый главный неразложимый идеал Re и инъективные оболочки простых левых модулей — цепные модули, (g) инъективная оболочка каждого минимального левого идеала является цепным модулем, а каждый левый главный неразложимый идеал имеет простой цоколь.

4. Если R — конечномерная алгебра над полем k и инъективная оболочка каждого простого (левого или правого) модуля является цепным модулем, то R — полуцепное кольцо.

5 (Уорфилд [75, 6.8]). Если $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n$ — идеалы кольца R, то прямая сумма $(R/I_1) \oplus \ldots \oplus (R/I_n)$ — сбалансированный модуль. Вывести отсюда, что любой конечно представимый модуль над кольцом нормирования сбалансирован [1]). (См. также результат Уорфилда о сбалансированных модулях, приведенный в замечаниях к этой главе.)

6 (Асано К. [49a]). Пусть A — конечномерная алгебра над полем. Тогда кольцо A является цепным левым A-модулем в том и только том случае, когда A — цепной правый A-модуль.

7 (Уорфилд [75]). Пусть R — полусовершенное кольцо. Следующие условия эквивалентны:

(i) R — антисингулярное слева и полуцепное слева и справа кольцо.

(ii) R антисингулярно слева, его левая размерность Голди конечна и все конечно порожденные антисингулярные левые модули проективны.

(iii) R полунаследственно слева, его левая размерность Голди конечна и ${}_RQ$ — плоский модуль, где Q — максимальное левое кольцо частных кольца R.

(iv) R — полуцепное кольцо, полунаследственное слева и справа.

8 (Голди [64]). Неразложимое артиново полуцепное кольцо антисингулярно тогда и только тогда, когда оно изоморфно полному кольцу $T_n(D)$ верхних треугольных матриц над телом.

9 (Мурасэ [63 II, теоремы 17, 18]). Пусть A — артиново полуцепное кольцо с радикалом N. Тогда A/N^2 имеет конечную глобальную размерность тогда и только тогда, когда A разлагается в конечное прямое произведение колец, каждое из которых подобно факторкольцу кольца вида $T_n(D)$ для различных чисел n и тел D (ср. 8).

10 (Мурасэ, Амдал — Рингдал и Айзенбуд — Гриффитс [71b]). Любое полуцепное кольцо есть прямое произведение $A_0 \times A_1 \times A_2 \times A_3$, такое, что

(0) A_0 классически полупросто и A_i не имеет классически полупростых прямых сомножителей для $i \geqslant 1$;

(1) A_1 — артиново кольцо главных идеалов;

(2) $A_2/(\text{rad}\, A_2)^2$ имеет конечную глобальную размерность (ср. упр. 9);

(3) $A_3/(\text{rad}\, A_3)^2$ квазифробениусово и не имеет однородных проективных модулей [2]).

[1]) Указание: воспользоваться теоремой 20.41.— *Прим. перев.*

[2]) Здесь под однородным понимается модуль Лёви, все простые факторы которого изоморфны (см. определение перед 22.33).—*Прим. перев.*

11 (Скорняков Л. А. (цитируется по статье Айзенбуда — Гриффитса [71b, стр. 120]) [1]). Кольцо R является артиновым полуцепным в том и только том случае, когда каждый левый R-модуль есть прямая сумма цепных модулей.

12 (Фуллер [69b]). Если R артиново слева и каждый модуль, порожденный двумя элементами, разлагается в прямую сумму цепных модулей, то R — полуцепное кольцо. (Ср. упр. 3 (f), а также Иванов [74].) |

Замечания к гл. 25

Цепные (Einreihig) модули изучались Кёте [35], который доказал, что над примарно разложимым полуцепным кольцом каждый модуль $\sum$-цепной — результат, который Накаяма [39, 41], [40] распространил на артиновы полуцепные кольца (см. 25.4.2). В той же статье Кёте охарактеризовал коммутативные артиновы $\sum$-циклические кольца как артиновы кольца главных идеалов. (Капланский и Коэн И. [51] показали, что предположение об артиновости кольца излишне, и это привело к нескольким похожим теоремам (см. гл. 20)). Асано К. [39] охарактеризовал артиновы кольца R со следующими двумя свойствами: (1) R $\sum$-циклическое и (2) каждый подмодуль циклического модуля циклический. Оказалось, что это в точности примарно разложимые полуцепные кольца. Очевидно, свойство (2) выделяет из класса артиновых колец как раз артиновы кольца главных идеалов. На самом деле теорема 2 из статьи Асано К. [39] утверждает, что артиново кольцо является примарно разложимым полуцепным кольцом тогда и только тогда, когда каждый идеал является главным правым и главным левым идеалом, так что для артиновых колец справедлива импликация (2) $\Rightarrow$ (1). Чтобы примарное кольцо было полуцепным, достаточно потребовать, чтобы его радикал был главным левым и главным правым идеалом [Hilfssatz 5]. Более общий результат Мориты о том, когда радикал является главным левым и главным правым идеалом, сформулирован ниже в *замечании о групповых кольцах*.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базисное множество идемпотентов кольца R, т. е. $e_0 = e_1 + \ldots + e_n$ — базисный идемпотент. Куппиш [59] показал, что если R — артиново полуцепное кольцо с радикалом J, то эти идемпотенты можно занумеровать так, что

(a) $\overline{Re_i} \approx \overline{Je_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ и $\overline{Re_n} \approx \overline{Je_1}$, если $Je_1 \neq 0$;
(b) $c(Re_i) \geqslant 2$, $i = 2, \ldots, n$;
(c) $c(Re_{i+1}) \leqslant c(Re_i) + 1$, $i = 1, \ldots, n-1$;
(d) $c(Re_1) \leqslant c(Re_n) + 1$,

где через $\overline{A}$ обозначен образ подмножества $A \subseteq R$ при каноническом отображении $R \to R/J$, а через $c(M)$ — длина модуля M.

Последовательность $Re_1, \ldots, Re_n$, упорядоченная таким образом, что условия (a) — (d) справедливы, называется **рядом Куппиша** полуцепного кольца R. Куппиш показал, что неразложимое артиново полуцепное кольцо R квазифробениусово тогда и только тогда, когда ${}_RR$ и Re_i имеют одинаковую длину Лёви для $i = 1, \ldots, n$. Для конечномерной полуцепной алгебры R над алгебраически замкнутым полем k ее ряд Куппиша, длина модуля ${}_RR$ и $\dim_k(Re_i/Je_i)$, $i = 1, \ldots, n$, составляют полное множество инвариантов, определяющих алгебру R однозначно с точностью до изоморфизма. Этот результат обобщил Мурасэ [63, 64], который расклассифицировал артиновы полуцепные кольца, используя ряды Куппиша. Кроме того, Фуллер [68] показал, что глобальная размерность любого артинова полуцепного кольца полностью определяется рядами Куппиша его неразложимых прямых сомножителей. Оказалось также, что самобазисное артиново полуцепное кольцо имеет одинаковую длину как левый и как правый модуль над собой [*loc. cit.*, стр. 252, следствие 2.3]. Фуллер также изучал полуцепные артиновы QF-1-кольца (и, более того, сбалансированные [1]) кольца) [2]) — тема, затронутая для нётеровых полуцепных алгебр Уорфилдом. (См. теорему Уорфилда 6.7, цитируемую ниже вместе с соответствующими ссылками.)

Мурасэ показал, что «многие» артиновы полуцепные кольца (алгебры) могут быть представлены как «квазиматричные кольца» с элементами из тела и наоборот. Более того, Мурасэ построил класс наследственных первичных нётеровых колец — бесконечных квазиматричных колец,— обладающий свойством, что каждое квазиматричное кольцо есть эпиморфный образ кольца из этого класса. В действительности этот класс состоит из «сокращенных» полугрупповых колец $K[S]$ полугрупп S с мультипликативным нулем над полем K. Квазиматричные кольца Мурасэ имеют вид $K[S]$, где S — «факторполугруппа Риса» полугруппы $\mathrm{QM}(\infty)$ бесконечных верхних треугольных матриц, обратимых по модулю некоторого идеала (Кларк [68, стр. 102, теорема 1]). Сокращенное полугрупповое кольцо $K[\mathrm{QM}(n)]$ изоморфно кольцу A всех $(n \times n)$-матриц (a_{ij}) над кольцом многочленов $K[x]$ от одной пере-

[1]) См. Л. А. Скорняков, *Мат. заметки*, т. 5 (1969), № 2, 173—182.— *Прим. перев.*

[1]) Определение QF-1-колец см. на стр. 344 в замечаниях к гл. 24. Кольцо R называется **сбалансированным**, если его факторкольца являются правыми QF-1-кольцами, или, что эквивалентно, если все правые R-модули сбалансированы.— *Прим. перев.*

[2]) Другую характеризацию этого класса колец дали Рингель и Тахикава [74, теорема 5.7].— *Прим. перев.*

менной, таких, что $x \mid a_{ij}$, если $i > j$, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} K[x] & K[x] & \dots & K[x] \\ (x) & K[x] & \dots & K[x] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x) & (x) & & K[x] \end{pmatrix},$$

и, более того, каждое факторкольцо кольца A по ненулевому идеалу является артиновым полуцепным кольцом (Кларк, *loc. cit.* теоремы 2 и 3). (Ср. Харада [68, стр. 484]. См. также теорему 9 из статьи Кларка.)

Характеристику «многие» в начале предыдущего абзаца я заимствовал у Иванова [74], который обобщил результаты Мурасэ на артиновы полуцепные слева кольца, представив их как обобщенные кольца матриц над цепными слева кольцами и модулями. Однако его результаты не дают полного описания артиновых полуцепных слева колец, поскольку строение цепных слева колец и модулей до конца не известно. Эти результаты обобщают теорему Колби и Раттера [68], полученную для артиновых антисингулярных полуцепных слева колец, и теорему Голди [64] для артиновых полуцепных антисингулярных колец. (На самом деле, эти работы уже ранее были обобщены Ивановым [70].) (См. также упр. 8—11 к этой главе.)

Над полуцепным кольцом любой конечно порожденный проективный модуль и любой его конечно порожденный подмодуль обладают согласованными прямыми разложениями (теорема Уорфилда [75] — см. 25.3.3 и далее). Леви [66] доказал обратное для артиновых колец.

Примарно разложимые артиновы полуцепные кольца Бойл [73] охарактеризовала как кольца, над которыми вершина и цоколь каждого конечно порожденного модуля изоморфны. То же самое верно, если требовать справедливость этого условия для инъективных оболочек и проективных накрытий конечно порожденных модулей. См. гл. 24, упр. 31.

Замечание о групповых кольцах

Групповое кольцо kG конечной группы G над полем k классически полупросто тогда и только тогда, когда характеристика p поля k не делит $n = |G|$ (теорема Машке (1, 13.21, стр. 580)). Если же $p \mid n$, то теорема Хигмана Г. [56] утверждает, что kG обладает конечным типом представлений (т. е. является FFM-кольцом) тогда и только тогда, когда p-подгруппы группы G циклические.

Так как силовские p-подгруппы сопряжены, то это выполняется тогда и только тогда, когда G имеет циклическую силовскую p-подгруппу P. Для этого случая Хигман нашел не зависящую от G верхнюю оценку $b(n)$ числа классов изоморфных неразложимых конечно порожденных модулей, а Каш, Кнезер и Куппиш [57] усилили этот результат, показав, что $b(n) = n$ — точная верхняя грань, причем $b(n) = n$ тогда и только тогда, когда G содержит нормальную подгруппу P, такую, что G/P — абелева группа экспоненты m и k содержит все корни m-й степени из единицы. Янус [69] построил все неразложимые модули для FFM-кольца kG и показал, что если kG есть FFM-кольцо, то цоколь каждого неразложимого модуля свободен от квадратов.

Важнейшими примерами FFM-колец являются полуцепные кольца. (См. 25.4.4.) Янус [69] выяснил, когда kG является полуцепным в предположении, что k — поле разложения для G [1]). Это имеет место тогда и только тогда, когда силовская p-подгруппа группы G циклическая и каждый простой kG-модуль F имеет вид $k \otimes F^*$ для некоторого R-модуля F^*, где R — полная локальная область целостности характеристики 0 с полем вычетов, изоморфным k. (Ср. Сринивасан [60], где показано, что каждый неразложимый модуль вкладывается в kG, когда G p-разрешима и имеет циклическую силовскую p-подгруппу. См. также Янус [70], [72a], Ср. 25.4.17 A(b)[2]).

Морита [56] нашел необходимые и достаточные условия на радикал J артинова слева кольца R для того, чтобы он был главным левым и главным правым идеалом $J = Ra = bR$, а именно R должно быть полуцепным и квазипримарно разложимым в том смысле, что R разлагается в конечное прямое произведение колец, главные неразложимые левые идеалы которых имеют одинаковую «кратность». Пусть G — конечная группа с силовской p-подгруппой P и H — наибольшая нормальная подгруппа, порядок которой взаимно прост с p. Тогда групповая алгебра kG над алгебраически замкнутым полем k характеристики p обладает указанным свойством тогда и только тогда, когда HP — нормальная подгруппа группы G, а P — циклическая.

---

[1]) То есть такое, что $kG/\operatorname{rad}(kG) \approx k_{n_1} \times \dots \times k_{n_r}$ — конечное прямое произведение полных матричных алгебр k_{n_i} над k.— *Прим. перев.*

[2]) См. также Green E. L., Gustafson W. H., Pathological Quasi-Frobenius algebras of finite type, Comm. Algebra, 2 (1974), № 3, стр. 233 — 260. — *Прим. перев.*

Замечание о статье Уорфилда

Другой тип полуцепных колец — кольца нормирования — изучался в гл. 20. Капланский [49] показал, что над коммутативным кольцом нормирования каждый конечно представимый модуль является σ-циклическим (см., однако, примечание на стр. 204). Ру [72] обобщил этот результат на некоммутативные цепные (т. е. локальные полуцепные) кольца и получил его частичное обращение. По признанию Уорфилда [75] доказательство Ру оказалось стимулирующей идеей для его результатов, изложенных в первых трех разделах этой главы. Я признателен профессору Уорфилду за великодушное разрешение изложить здесь его результаты почти дословно.

Я закончу эти замечания дополнительными комментариями по поводу статьи Уорфилда и некоторых проблем, поставленных им.

Если полуцепное кольцо антисингулярно, то оно полунаследственно. В частности, полусовершенное полупервичное левое и правое кольцо Голди полунаследственно тогда и только тогда, когда оно полуцепное (ср. упр. 8—13 к этой главе). Уорфилд также приводит довольно полную структурную теорию нётеровых полуцепных колец [1]). Как мы видели в 25.3.5, такое кольцо разлагается в прямое произведение артинова полуцепного кольца и конечного числа первичных колец (обязательно наследственных в силу результатов, цитировавшихся перед этим). Если R — первичное нётерово полуцепное кольцо, не являющееся классически полупростым, то теорема Михлера [69b] гласит, что существует

[1]) Аналогичные результаты о строении нётеровых полуцепных колец получил также В. В. Кириченко в статье, уже упоминавшейся в примечании на стр. 346. Более того, в других работах В. В. Кириченко (*ДАН УССР*, серия А, 1976, № 1, стр. 9—12; а также препринт ИМ-75-1 «Обобщенно однорядные кольца», Институт математики АН УССР, 1975) доказывается теорема о строении полуцепных колец, нётеровых лишь справа, а именно: нётерово справа кольцо R является полуцепным тогда и только тогда, когда оно разлагается в конечное прямое произведение двусторонне нётерова полуцепного кольца и колец, эквивалентных в смысле Мориты факторкольцам колец вида

$$\begin{pmatrix} H_m(\mathcal{O}) & M_{m,n}(D) \\ 0 & T_n(D) \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{O}$ — локальная область главных левых и главных правых идеалов, D — ее тело частных, $T_n(D)$ — кольцо верхних треугольных матриц порядка n над D, $M_{m,n}(D)$ — пространство всех $(m \times n)$-матриц над D, а $H_m(\mathcal{O})$ — кольцо всех $(m \times m)$-матриц над $\mathcal{O}$, у которых элементы, расположенные ниже диагонали, принадлежат $J = \mathrm{rad}\,\mathcal{O}$. При этом над R все конечно порожденные левые R-модули являются полуцепными в том и только том случае, когда все кольца $\mathcal{O}$ можно выбрать J-адически полными.— *Прим. перев.*

кольцо дискретного нормирования [1]) $\mathcal{O}$ (не обязательно коммутативное) с радикалом Джекобсона J, такое, что R является кольцом $(\mathcal{O}: J)$-блочных верхних треугольных матриц. (По поводу этой терминологии см. Робсон [72a]. Любое такое кольцо подобно (т. е. эквивалентно в смысле Мориты) кольцу матриц над $\mathcal{O}$, у которых элементы, расположенные ниже диагонали, лежат в J.) Уорфилд дает новое короткое доказательство теоремы Михлера. (Ср. Фулберт — Кузманович [75b].)

В последнем разделе своей статьи он применяет полученные результаты к алгебрам над коммутативными нётеровыми кольцами. Предположим, что R — коммутативное нётерово кольцо и A — R-алгебра, которая конечно порождена как R-модуль. Для каждого максимального идеала m в R пусть R^*_m является m-адическим пополнением кольца R (m-адическое пополнение кольца R^*_m равно R^*_m). Тогда m-адическое пополнение A^*_m алгебры A определяется как $A^*_m = A \otimes R^*_m$. Кольцо A^*_m является полусовершенным. Основная теорема Уорфилда:

Теорема (Уорфилд [75, 6.6]). *Следующие свойства алгебры A эквивалентны*: (i) A/I — *полуцепное кольцо для каждого идеала I, такого, что кольцо A/I артиново*; (ii) *каждый конечно порожденный модуль является прямой суммой проективного модуля и конечного числа артиновых цепных модулей*; (iii) A — *прямое произведение артинова полуцепного кольца и конечного числа наследственных порядков над дедекиндовыми областями и* (iv) A^*_m — *полуцепное кольцо для каждого максимального идеала m кольца R.*

Отсюда как следствие получается такая теорема о строении некоторого класса наследственных алгебр:

Теорема (Уорфилд [75, 6.7]). *Пусть R — коммутативное нётерово кольцо и A — R-алгебра, конечно порожденная как R-модуль. Предположим, что алгебра A наследственна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) A — *прямое произведение конечного числа блочно треугольных матричных колец над телами и конечного числа наследственных порядков над дедекиндовыми областями.*

(ii) *Факторкольцо A/I полуцепное для каждого такого идеала I, что A/I артиново.*

(iii) ${}_AQ$ — *плоский модуль, где Q — максимальное левое кольцо частных кольца A.*

Условие (ii) имеет отношение к теореме 25.5.1 Айзенбуда — Гриффитса — Робсона.

[1]) То есть локальная область главных левых и главных правых идеалов (см. также предыдущее примечание).— *Прим. перев.*

Кроме того, сколь ни неожиданным это может показаться, указанные результаты позволили Уорфилду охарактеризовать алгебры, над которыми каждый конечно порожденный модуль сбалансирован.

Теорема (Уорфилд [75, 6.10]). *Пусть R — коммутативное нётерово кольцо и A — R-алгебра, которая конечно порождена как R-модуль. Следующие свойства алгебры A эквивалентны:*

(i) *факторкольцо A/I является кольцом главных левых и главных правых идеалов для каждого идеала I, такого, что A/I артиново;*

(ii) *каждый конечно порожденный модуль разлагается в прямую сумму проективного модуля с нулевым цоколем и конечного числа артиновых однородно цепных модулей* (см. 25.1.14);

(iii) *A есть прямое произведение артинова кольца главных левых и главных правых идеалов и конечного числа максимальных порядков над дедекиндовыми областями;*

(iv) A^*_m (*пополнение локализации*) *является кольцом главных левых и главных правых идеалов для каждого максимального идеала m кольца R;*

(v) *каждый конечно порожденный модуль сбалансирован.*

Эквивалентность свойств (i), (ii) и (iv) непосредственно вытекает из предыдущей теоремы Уорфилда (6.6) и из 25.1.14. Эквивалентность же этих свойств свойству (iii) — следствие из (6.6) и теоремы 25.3.3 Айзенбуда и Гриффитса [71a]. На самом деле импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) была доказана Асано [39, стр. 239, Satz 5] для максимального порядка в простой алгебре. Кроме того, (iv) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (i) вытекает из теоремы Камилло и Фуллера [72] и Длаба и Рингеля [74].

Проблемы Уорфилда

Далее мы воспроизводим несколько проблем, поставленных Уорфилдом [75]:

Проблема 1. Над какими кольцами каждый конечно представимый модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей?

Проблема 2. Над какими кольцами каждый конечно представимый модуль является прямым слагаемым прямой суммы конечно представимых циклических модулей?

Артиновы кольца со свойством из проблемы 1 Кавада [62, 63, 64] назвал кольцами Кёте. Он же [loc. cit.] дал ответ на эту проблему для конечномерных алгебр над полем, удовлетворяющих указанному свойству как слева, так и справа. Фейс [66b] под

кольцом Кёте понимает артиново кольцо, над которым каждый модуль разлагается в прямую сумму циклических модулей.

В коммутативном случае ответ на проблему 2 дает теорема 20.45. Описания колец, обладающих свойством из проблемы 1, были даны Капланским [49] и Лафоном [71a], но насколько их можно считать «ответами» на эту проблему, зависит от вкусов читателей [1]). В частности, до сих пор нерешенной остается проблема: всегда ли область Безу обладает свойством, указанным в вопросе 1. Если в проблеме 1 слово «циклический» заменить словом «локальный», то полученным таким образом свойством обладают полуцепные кольца и только они (теоремы 25.2.6 и 25.3.4). Одно из достоинств этого свойства в том, что оно, очевидно, инвариантно относительно подобия колец, т. е. инвариантно в смысле Мориты. (В 20.39 мы указали необходимые и достаточные условия на кольцо A для того, чтобы оно было подобно σ-циклическому кольцу: это имеет место тогда и только тогда, когда A является σ-n-генным для некоторого целого числа n.)

Проблема 4. При каких условиях полусовершенное кольцо имеет ограниченный модульный тип для конечно представимых неразложимых модулей? (т. е. когда указанные модули n-порождены для некоторого целого числа n?)

Теоремы А. В. Ройтера [68], Ауслендера [74] и Тахикавы [73] в известной степени решают эту проблему для артиновых алгебр и артиновых колец, устанавливая, что такое кольцо (и тем более FBG-кольцо) имеет конечный модульный тип (т. е. является FFM-кольцом). Кроме того, Эйзенбуд — Гриффитс [71a] и Уорфилд (*loc. cit.*) показали, что полупримарное правое FBG-кольцо артиново справа и поэтому по приведенному результату является правым FFM-кольцом.

Проблема 5. Всегда ли является полуцепным полусовершенное полунаследственное кольцо, над которым неразложимые конечно представимые модули n-порождены для некоторого n? [2])

Проблема 6. Когда представление модуля в виде прямой суммы цепных модулей единственно?

[1]) Окончательный ответ на аналогичный вопрос о строении коммутативных колец, над которыми конечно порожденные модули разлагаются в прямую сумму циклических модулей, был получен недавно Вамошем и Вигандом (см. J. London Math. Soc., Ser. 2, 16 (1977), № 2, 209—219) (ср. также с 20.43 и 20.49). — *Прим. перев.*

[2]) Следующий пример дает отрицательный ответ на эту проблему уже для $n = 1$. Пусть $R = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ \Delta & \Delta & 0 \\ \Delta & 0 & \Delta \end{pmatrix}$ — кольцо обобщенно-треугольных 3×3 матриц над телом Δ. Тогда R артиново и наследственно, и все левые и правые неразложимые модули над ним 1-порождены, т. е. R — кольцо Кёте. Тем не менее R неполуцепное (ср. Л. А. Койфман, *Матем. сб.* 83 (1970), 1, 119—148). — *Прим. перев.*

Это, конечно, так, когда кольца эндоморфизмов цепных модулей локальны, так как тогда прямая сумма цепных модулей является диаграммой Адзумаи (21.6). Кроме того, это так, когда кольцо R коммутативно (Капланский [70]).

Ссылки

Адзумая [66], Айзенбуд — Гриффитс [71a], [71b], Айзенбуд — Робсон [70b], Асано К. [38], [39], [49a], Ауслендер [74], Ауслендер — Бриджер [69], Бойл [73], Голди [64], Гудёрл [71], Гурсо [70], Джанс [57], Диксон С.— Фуллер [69], Длаб — Рингель [72a]; Жантиль [60], Закс [74], Иванов [70], [74], Кавада [62, 63, 64], Камилло — Фуллер [72], Капланский [49], [51], Каш — Кнезер — Куппиш [57], Кёте [35], Кларк [68], Колби — Раттер [68], Коэн Дж.— Глюк [70], Коэн И.— Капланский [52], Куппиш [59], Кэртис — Джанс [65], Леви [66a], [66b], Михлер [69b], Морита [56], Мурасэ [63, 64], Накаяма [39, 41], [40], Робсон [74], Ройтер [68], Ру [72], Сандомирский [68], Сринивасан [60], Тахикава [60], [73], Уорфилд [70], [75], Фейс [66b], [72a], Фейс — Уокер Э. [67], Фуллер [68], [69a], [69b], Хигман Г. [56], Янус [69], [70], [72a], Ятегаонкар А. [70].

Дополнительные ссылки

Амдал — Рингдал [68], Брангс [69], Длаб — Рингель [72c], Иванов [72], [74], Кэртис — Джанс [65], Лафон [71a], [73], Морита [58], Тахикава [59], [60], [61], Фулберт — Кузманович [75b], Фуллер [73], Шорес — Виганд [74], Янус [72b].

Глава 26

ПОЛУПРИМИТИВНЫЕ КОЛЬЦА, ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ КОЛЬЦА И НИЛЬ-РАДИКАЛ

Кольцо R полупервично (полупримитивно) в том и только том случае, когда пересечение его первичных (примитивных) идеалов равно нулю. В этом случае R оказывается подпрямым произведением первичных (примитивных) колец (26.6 и 26.13). Первичный радикал (Маккоя) кольца определяется как пересечение всех его первичных идеалов; оказывается, что он совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца R (теорема Левицкого 26.5). В коммутативном кольце R это просто множество всех нильпотентных элементов.

Для любого сепарабельного алгебраического расширения P/F поля F радикал $\operatorname{rad}(A_P)$ канонически изоморфен $(\operatorname{rad} A)_P$ для любой алгебры A над полем F и скалярного расширения $A_P = A \otimes P$ (см. 26.16). Если, с другой стороны, P/F — чисто трансцендентное расширение, то $\operatorname{rad} A_P = N_P$, где $N = \operatorname{rad}(A_P) \cap A$ является ниль-идеалом алгебры A (26.17) [1]). Эти результаты Амицура применяются для доказательства его же теоремы о полупримитивности групповой алгебры kG над трансцендентным полем k характеристики 0 (26.20). В частности, алгебра kG полупримитивна, если k — несчетное поле характеристики 0 (см. 26.21).

Подпрямое произведение колец и модулей

Пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство колец и B — любое подкольцо прямого произведения колец $R = \prod_{i \in I} R_i$. Пусть π_i означает проекцию $R \to R_i$ [где $\pi_i(f) = f(i)$ для любого $f \in R$]. Это кольцевой гомоморфизм на R_i, и он индуцирует кольцевой гомоморфизм π_i': $B \to R_i$. Если последний гомоморфизм окажется наложением, т. е. если $\operatorname{im} \pi_i' = R_i$ для любого i, то B называется **подпрямым произведением колец** R_i, $i \in I$.

[1]) Если A — коммутативная алгебра, то N — максимальный ниль-идеал (Снаппер [50]).

Пример. Любое подкольцо B кольца $\prod_i R_i$, содержащее $\coprod_i R_i$ [1]), является подпрямым произведением, поскольку для любого i гомоморфизм π_i отображает $\coprod_i R_i$, а значит, и B на R_i.

26.1A. Предложение. *Кольцо B изоморфно подпрямому произведению колец R_i, $i \in I$, в том и только том случае, когда выполняются следующие два условия:* (a) *каждому $i \in I$ соответствует идеал Q_i кольца B, такой, что $B/Q_i \approx R_i$;* (b) $\bigcap_{i\in I} Q_i = 0$.

Доказательство. Пусть B — подпрямое произведение, а Q_i — ядро гомоморфного наложения колец $B \twoheadrightarrow R_i$, индуцированного наложением π_i. Тогда $B/Q_i \approx R_i$. Если $b \in \bigcap_{i\in I} Q_i$, то $\pi_i(b) = 0$ для любого $i \in I$ и, значит, $b = 0$. Таким образом, условия (a) и (b) выполняются. Любое кольцо, изоморфное кольцу B, также удовлетворяет этим условиям.

Обратно, пусть условия (a) и (b) выполнены. Для каждого $i \in I$ пусть φ_i: $B \twoheadrightarrow R_i$ — гомоморфное наложение колец, ядро которого равно Q_i. Тогда существует кольцевой гомоморфизм f: $B \to \pi_i R_i$, где $f(b)(i) = \varphi_i(b)$ для любых $b \in B$ и $i \in I$. Если $b \in \ker f$, то $\varphi_i(b) = 0$ для любого i, значит, $b \in \bigcap_{i\in I} \ker \varphi_i$. Так как $\ker \varphi_i = Q_i$, то из (b) следует, что $b = 0$, т. е. f — изоморфизм. Проекция π_i: $\prod_i R_i \to R_i$ отображает $f(B)$ на $\varphi_i(B) = R_i$ для любого $i \in I$, т. е. $\operatorname{im} f$ является подпрямым произведением колец R_i, $i \in I$, а $B \approx \operatorname{im} f$. □

Модуль M назовем **подпрямым произведением** модулей $\{N_i\}_{i\in I}$, если существует мономорфизм f: $M \to \prod_{i\in I} N_i$, такой, что каждое индуцированное отображение f_i: $M \to N_i$ оказывается эпиморфизмом. (Это эквивалентно выделению семейства подмодулей $\{M_i\}_{i\in I}$ модуля M, такого, что $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$ и $M/M_i \approx N_i$, так как в этом случае компоненты f_i, $i \in I$, становятся проекциями p_i: $M \to M/M_i$.) Модуль M называется **подпрямо неразложимым**, если в каждом его представлении в виде подпрямого произведения модулей по крайней мере одна из компонент-отображений является изоморфизмом. Это равносильно утверждению, что пересечение всех ненулевых подмодулей модуля M не равно нулю. Это пересечение дает минимальный подмодуль, содержащийся в каждом ненулевом подмодуле, и, таким образом, каждый подпрямо неразложимый модуль существенно артинов.

[1]) Здесь под $\coprod_i R_i$ понимается копроизведение (или прямая сумма) абелевых групп, оказывающаяся, как легко видеть, предкольцом.—*Прим. ред.*

26.1B. Предложение (Бичи [71b]). *Следующие свойства правого R-модуля M эквивалентны:*

(i) *M существенно артинов* (см. стр. 113).

(ii) *M содержит существенный артинов подмодуль.*

(iii) *Для любого семейства подмодулей $\{M_i\}_{i\in I}$ модуля M, такого, что $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$, существует конечное подмножество $F \subseteq I$, такое, что $\bigcap_{i\in F} M_i = 0$.*

(iv) *Если M является подмодулем прямого произведения $\prod_{i\in I} N_i$, то существует конечное подмножество $F \subseteq I$, такое, что M оказывается подмодулем прямого произведения $\prod_{i\in F} N_i$.*

(v) *M является подпрямым произведением конечного множества подпрямо неразложимых модулей.*

(vi) *Цоколь модуля M является существенным и артиновым подмодулем.*

(vii) *Инъективная оболочка модуля M изоморфна прямой сумме конечного числа инъективных оболочек простых модулей.*

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (ii) очевидна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть N — существенный подмодуль модуля M, удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепей. Совокупность $\{M_i \cap N\}_{i\in I}$ подмодулей модуля N имеет нулевое пересечение, если $\bigcap_{i\in I} M_i = 0$. Так как модуль N удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, то в этой совокупности существует конечное подсемейство с нулевым пересечением. При этом

$$\bigcap_{i\in F} (M_i \cap N) = \Big(\bigcap_{i\in F} M_i\Big) \cap N = 0 \Rightarrow \bigcap_{i\in F} M_i = 0,$$

поскольку N — существенный подмодуль. Это доказывает (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Если f: $M \to \prod_{i\in I} N_i$ — мономорфизм, то $\bigcap_{i\in I} \ker f_i = 0$. Тогда $\bigcap_{i\in F} \ker f_i = 0$ для конечного подмножества $F \subseteq I$, и (iv) установлено.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Для каждого ненулевого элемента $m \in M$ обозначим через M_m подмодуль модуля M, максимальный среди подмодулей, не содержащих m. Такой подмодуль существует ввиду леммы Цорна, и тогда $\bigcap_{m\in M} M_m = 0$. Следовательно, M является подпрямым произведением модулей M/M_m. Но каждый из них подпрямо неразложим, поскольку любой подмодуль, строго содержащий M_m, должен содержать элемент m, и тогда пересечение всех подмодулей модуля M/M_m содержит элемент $m + M_m$. По предположению существует конечное подмножество $F \subseteq M$, такое, что M представляется как подпрямое произведение модулей $\{M/M_m\}_{m\in F}$.

(v)$\Rightarrow$(vi). Пусть M является подпрямым произведением семейства модулей $\{N_i\}_{i=1}^n$, где каждый из N_i подпрямо неразложим. Обозначим через S_i наименьший подмодуль модуля N_i. Так как S_i существен в N_i, то прямая сумма $\sum_{i=1}^{n} \oplus S_i$ существенна в $\sum_{i=1}^{n} \oplus N_i = \prod_{i=1}^{n} N_i$, т. е.

$$M \cap \left(\sum_{i=1}^{n} \oplus S_i\right) \neq 0.$$

Пусть $S = M \cap \left(\sum_{i=1}^{n} \oplus S_i\right)$. Тогда S — существенный полупростой артинов подмодуль модуля M. Более того, для любого минимального подмодуля $M_0 \subseteq M$ пересечение $M_0 \cap S$ отлично от 0 и, значит, $S \supseteq M_0$. Таким образом, S содержит все минимальные подмодули и сам является суммой простых подмодулей, т. е. S — цоколь модуля M.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Пусть $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, где каждый модуль S_i прост. (Поскольку модуль S артинов, прямая сумма должна быть конечной.) Так как S существен в M, то для инъективных оболочек имеем

$$E(M) = E(S) \cong E(S_1) \oplus \ldots \oplus E(S_n).$$

(vii) $\Rightarrow$ (i). Если инъективная оболочка модуля M изоморфна прямой сумме инъективных оболочек конечного множества простых модулей, то M является подмодулем конечной прямой суммы существенно артиновых модулей и, значит, сам существенно артинов. □

Пункт (iv) указывает на двойственность, так как модуль конечно порожден, если из того, что он является фактормодулем какой-либо прямой суммы семейства модулей вытекает, что он является фактормодулем прямой суммы конечного подсемейства этих модулей (Доказательство?). Модуль удовлетворяет условию максимальности в том и только том случае, когда каждый его подмодуль конечно порожден, а двойственное предложение утверждает, что модуль удовлетворяет условию минимальности в том и только том случае, когда каждый его фактормодуль существенно артинов (см. 19.16B).

26.2. Упражнения. (a) Подпрямое произведение семейства колец $\{R_i \mid i \in I\}$ является коммутативным кольцом тогда и только тогда, когда каждое из R_i коммутативно.

(b) (1) $\mathbb{Z}$ является подпрямым произведением конечных полей $\{\mathbb{Z}/(p)\}$, по одному для каждого простого p.

(2) $\mathbb{Z}$ есть подпрямое произведение колец $\mathbb{Z}/(p^{e_i})$, где p пробегает все простые числа, а e_i — все целые $\geqslant 1$.

(c) Кольцо R **подпрямо неразложимо**, если для любого представления R в виде подпрямого произведения колец R_i, $i \in I$, где $R_i \approx R/Q_i$, причем Q_i— идеалы кольца R, всегда один из идеалов Q_i равен 0 (ср. стр. 161).

(1) Кольцо R подпрямо неразложимо тогда и только тогда, когда пересечение всех его ненулевых идеалов отлично от 0.

(2)* (Биркгоф) Каждое кольцо изоморфно подпрямому произведению подпрямо неразложимых колец.

(c)* (Джин и Мосс [75]) Нётерово слева и справа кольцо R артиново справа в том и только том случае, когда оно существенно артиново справа.

Первичный радикал

Идеал P кольца R называется **первичным**, если R/P — первичное кольцо. Если $K \supseteq Q$ — идеалы кольца R, то

$$0 \to K/Q \to R/Q \to R/K \to 0$$

— точная последовательность, т. е. существует изоморфизм колец

$$R/K \approx (R/Q)/(K/Q).$$

Это доказывает следующее предложение.

26.3. Предложение. *Если $K \supseteq Q$ — идеалы кольца R, то K является первичным идеалом кольца R в том и только том случае, когда K/Q — первичный идеал кольца R/Q.* □

Первичный радикал кольца R определяется как пересечение первичных идеалов кольца R и обозначается через $\mathfrak{P}$-rad R. Ввиду 26.3 мы получаем такое следствие.

26.4. Следствие. $\mathfrak{P}\text{-rad}\,(R/\mathfrak{P}\text{-rad}\,R) = 0$.

Элемент $a \in R$ называется **строго нильпотентным**, если для любой последовательности $\{a_n \mid n \geqslant 0\}$, такой, что $a_0 = a$ и $a_{n+1} \in a_n R a_n$, $n = 0, 1, \ldots$, существует такой номер k, что $a_n = 0$ для любого $n \geqslant k$. Если элемент a строго нильпотентен и $\{a_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ — последовательность $a_0 = a$, $a_1 = a^2, \ldots$ $\ldots, a_n = a^{2^n}$, то $a_{n+1} = a^{2^{n+1}} = a^{2^n} \cdot a^{2^n} = a_n^2 \in a_n R a_n$ для всех n. Таким образом, $a_k = a^{2^k} = 0$ для некоторого k, т. е. каждый строго нильпотентный элемент нильпотентен. Если R — коммутативное кольцо, то и, обратно, каждый его нильпотентный элемент строго нильпотентен.

26.5. Предложение (Левицкий [51]). *Первичный радикал совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов кольца R.*

Доказательство. Пусть a — элемент кольца R, не принадлежащий первичному радикалу. Тогда a не принадлежит некоторому первичному идеалу P. При этом $aRa \nsubseteq P$, т. е. существует элемент $a_1 \in aRa$, такой, что $a_1 \notin P$. Если $a_n \notin P$, то $a_nRa_n \nsubseteq P$, т. е. существует $a_{n+1} \in a_nRa_n$, но $a_{n+1} \notin P$. Так как $a_n \notin P$ для любого n, то $a_n \neq 0$ при всех n, т. е. элемент a не является строго нильпотентным.

Обратно, пусть элемент a не является строго нильпотентным, и пусть $\{a_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ — последовательность элементов кольца R, такая, что $a_0 = a$ и $a_{n+1} \in a_nRa_n$ для каждого n. Положим

$$T = \{a_n \mid n = 0, 1, \ldots\}.$$

Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует идеал P, максимальный среди идеалов, не содержащих элементов множества T.

Пусть теперь A, B — правые идеалы кольца R, такие, что $A \nsubseteq P$, $B \nsubseteq P$. Так как $A + P \neq P$, $B + P \neq P$, то идеалы $A + P$ и $B + P$ имеют непустое пересечение с множеством T. Пусть $a_i \in A + P$, $a_j \in B + P$. Если $m = \max\{i, j\}$, то

$$a_{m+1} \in a_mRa_m \subseteq (A+P)(B+P) \subseteq AB+P.$$

Но $a_{m+1} \notin P$, значит, $AB \nsubseteq P$. Таким образом, P — первичный идеал и $a_0 = a \notin P$. Следовательно, $a \notin \mathfrak{P}\text{-rad}\, R$. □

26.6. Упражнение. (a) Показать, что нижний нильрадикал (Бэра [43a]) (определенный в 24.3(e)) совпадает с первичным радикалом.

(b) Следующие свойства кольца R эквивалентны:

(1) R полупервично.

(2) $\mathfrak{P}\text{-rad}\, R = 0$.

(3) R есть подпрямое произведение первичных колец.

(4) Для любой пары идеалов A, B

$$AB = 0 \Leftrightarrow A \cap B = 0.$$

Ниль-радикалы

Идеал A кольца R называется **ниль-идеалом**, если каждый его элемент нильпотентен. Объединение возрастающей последовательности ниль-идеалов кольца R является ниль-идеалом. Значит, ввиду леммы Цорна существует максимальный ниль-идеал N кольца R. Если A — любой ниль-идеал кольца R, то $A + N$ — ниль-идеал, содержащий N [1]); значит, $A + N = N$ и $N \supseteq A$. Таким

[1]) Нужно только проверить, что сумма двух ниль-идеалов — ниль-идеал. Действительно, пусть A и B — ниль-идеалы и $C = A + B$. Тогда $C/A \approx B/(A \cap B)$ — ниль-идеал, откуда легко следует, что C — ниль-идеал. — *Прим. перев.*

образом, кольцо R имеет наибольший ниль-идеал N, называемый **ниль-радикалом** кольца R и обозначаемый через $\mathfrak{N}\text{-rad}\, R$. Ввиду 18.8 и 26.5 имеют место включения

$$\text{rad}\, R \supseteq \mathfrak{N}\text{-rad}\, R \supseteq \mathfrak{P}\text{-rad}\, R,$$

каждое из которых может оказаться строгим; однако в коммутативном кольце R каждый нильпотентный элемент строго нильпотентен, и тогда из 26.5 вытекает следующее предложение:

26.7. Предложение. *Если R — коммутативное кольцо, то*

$$\mathfrak{N}\text{-rad}\, R = \mathfrak{P}\text{-rad}\, R. \quad \square$$

Определим теперь **ниль-радикал идеала** A кольца R как $\eta^{-1}(\mathfrak{N}\text{-rad}\, R/A)$, где $\eta\colon R \to R/A$, т. е. $\mathfrak{N}\text{-rad}\, A$ — наибольший идеал кольца R, являющийся ниль-идеалом по модулю A; $\mathfrak{P}\text{-rad}\, A$ определяется аналогично.

26.8. Следствие. *Если R — коммутативное кольцо и A — идеал, то $\mathfrak{N}\text{-rad}\, A$ совпадает с пересечением всех первичных идеалов, содержащих A.* □

Первичные идеалы, содержащие A, будем называть **первичными идеалами, принадлежащими** A. **Минимальный первичный идеал, принадлежащий** A,— это идеал, минимальный в множестве первичных идеалов, принадлежащих A, упорядоченном по включению.

26.9. Предложение (Маккой [49]). *Если A — идеал кольца R, то каждый первичный идеал, содержащий A, содержит минимальный первичный идеал, принадлежащий A, а $\mathfrak{P}\text{-rad}\, A$ совпадает с пересечением минимальных первичных идеалов, принадлежащих A.*

Доказательство непосредственно следует из 26.5, так как идеал P, построенный там, на самом деле является минимальным первичным идеалом. □

Идеал I кольца R называется **полупервичным**, если для любого правого идеала K из условия $K^n \subseteq I$ для некоторого n следует, что $K \subseteq I$. Иначе говоря, идеал I полупервичен тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I полупервично. Комбинируя 26.3 и 26.6, получаем

26.10. Предложение. *Идеал I кольца R полупервичен в том и только том случае, если он совпадает с пересечением первичных идеалов кольца R, содержащих этот идеал. Следовательно, каждый полупервичный идеал кольца R содержит $\mathfrak{P}\text{-rad}\, R$.* □

26.11. Следствие (Левицкий [51]). *Пусть $N(\alpha, R)$ — идеал кольца R, определенный по индукции для любого ординального числа α следующим образом:*

$N(0, R)$ — сумма всех нильпотентных элементов кольца R;
$N(\alpha+1, R)$ — полный прообраз в R идеала $N(0, R/N(\alpha, R))$;
$N(\alpha, R) = \bigcup_{\beta<\alpha} N(\beta, R)$, если α — предельный ординал.
Тогда существует по крайней мере один ординал α, такой, что $N(\alpha, R) = N(\alpha+1, R)$. В этом случае $N(\alpha, R)$ называется ***нижним ниль-радикалом Бэра.*** *Кроме того, $N(\alpha, R) = \mathfrak{P}\text{-rad } R$.*

Доказательство. Очевидно, $M = \mathfrak{P}\text{-rad } R \supseteq N(0, R)$, и, более того, из существования трансфинита α_0, такого, что $M \supseteq N(\beta, R)$ для любого $\beta \leqslant \alpha_0$, вытекает, что $M \supseteq N(\alpha_0, R)$. (Это следует из того, что M содержит любой идеал, нильпотентный по модулю $N(\beta, R)$.) По трансфинитной индукции $M \supseteq N(\alpha, R)$. Однако по 26.10 $N(\alpha, R) \supseteq M$. □

Полупримитивные кольца

Идеал I кольца R назовем **примитивным справа** или просто **примитивным**, если R/I — примитивное справа кольцо. Так как любое примитивное кольцо первично, то каждый примитивный идеал является первичным идеалом.

Если V — точный простой R/I-модуль, то V — простой R-модуль, аннулятор которого равен I. Обратно, если M — любой (простой) R-модуль, аннулятор которого совпадает с идеалом I, то M — точный (простой) R/I-модуль. Эти два утверждения доказывают следующее предложение.

26.12. Предложение. *Идеал I кольца R примитивен в том и только том случае, когда он является аннулятором простого правого R-модуля.* □

Кольцо R **полупримитивно (справа)**, если пересечение его примитивных справа идеалов равно 0. **Полупримитивные слева** кольца определяются симметрично.

26.13. Теорема (Джекобсон [45]). *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(a) *R полупримитивно.*
(b) $\text{rad } R = 0$.
(c) *R является подпрямым произведением примитивных колец.*
(d) *R полупримитивно слева.*

Доказательство. Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (c) есть следствие утверждения 26.1. Поскольку (b) право-лево симметрично (см. 18.5), то (b) $\Leftrightarrow$ (c) ввиду эквивалентности (a) $\Leftrightarrow$ (b), установленной в 18.0. □

26.14. Следствие. $\text{rad } R$ *совпадает с пересечением всех примитивных идеалов кольца R.* □

Пусть A — алгебра над полем F. Для любого расширения P поля F положим $A_P = A \otimes_F P$. Если f — автоморфизм поля P, оставляющий все элементы из F на месте, то $1 \otimes f$ — автоморфизм алгебры A_P, оставляющий неподвижными все элементы из $A \otimes_F \otimes F \approx A$. Если P/F — расширение Галуа с группой Галуа $\text{Gal}(P/F) = G$, то

$$G_P = \{1 \otimes f \mid f \in G\}$$

— группа автоморфизмов алгебры A_P, и подкольцо $\text{fix } G_P$ элементов алгебры A_P, остающихся на месте для каждого преобразования из G_P, совпадает с образом A при каноническом вложении $A \to A \otimes_F P$. Для простоты обозначим этот образ также через A.

26.15. Лемма. *Если A — полупримитивная алгебра над полем F и P/F — конечное расширение Галуа поля F, то алгебра $A_P = A \otimes_F P$ полупримитивна.*

Доказательство. Для любого кольца B положим $J(B) = \text{rad } B$, и пусть $z \in A \cap J(A_P)$. Если z' — квазиобратный для элемента z в A_P, то $(1+z)(1+z') = 1$, и тогда из того, что $f(z) = z$ для любого $f \in G$, следует, что $f(z') = z'$. Это доказывает, что $A \cap J(A_P) = J(A) = 0$. Теперь рассмотрим G-след элемента $x \in P$, определяемый равенством $\text{tr}_G(x) = \sum_{f\in G} f(x)$. Так как P/F — расширение Галуа, то для базиса $p_1, \ldots, p_n$ поля P над F дискриминант расширения P/F, равный по определению $\det(\text{tr}_G(p_i p_j))$, отличен от 0. Положим теперь

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes p_i \in J(A_P),$$

где $a_1, \ldots, a_n \in A$. Для каждого j

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \text{tr}_G(p_i p_j) \in J(A_P),$$

так как $J(A_P)$ отображается в себя с помощью элементов из G_P. Но $t_j \in J(A_P) \cap A$, так как $\text{tr}_G(p_i p_j) \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ввиду того что $J(A_P) \cap A \subseteq J(A)$, имеем $t_j = 0$ для всех j. Поскольку дискриминант расширения P/F не равен нулю, отсюда следует, что $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, $z = 0$. □

26.16. Следствие (Амицур [57c]). *Если P/F — алгебраическое и сепарабельное расширение поля F, то* $\text{rad } (A_P)$ *канонически отождествляется с* $(\text{rad } A)_P$.

Доказательство. Для конечного расширения это вытекает из леммы 26.15. Общий случай остается в качестве упражнения. □

26.17A. Предложение (Амицур [56], [57c]). *Пусть P/F — чисто трансцендентное расширение поля F* [1]). *Тогда $N = \operatorname{rad}(A_P) \cap A$ является ниль-идеалом и N_P канонически отождествляется с* $\operatorname{rad} A_P$.

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному для 26.15 и 26.16 и следует Джекобсону [64, стр. 252 и далее].

$$J(A_P) \neq 0 \Rightarrow J(A_P) \cap A \neq 0. \tag{1}$$

Для доказательства (1) обозначим через $B = \{x_i\}_{i\in I}$ трансцендентный базис алгебры многочленов $Q = F[B]$, такой, что $P = F(B)$ является ее полем частных. Таким образом, для любого конечного подмножества $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ множество всех произведений

$$\{x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \ldots x_{i_k}^{n_k} \mid n_i \in \mathbb{Z}^+, \ i = 1, \ldots k\}$$

линейно независимо над полем F. Так как мы отождествляем A (соотв. P) с его каноническим образом при отображении $A \to A_P$ (соотв. $P \to A_P$), то это множество, рассматриваемое как подмножество множества A_P, также линейно независимо над F. Если z — ненулевой элемент из $J(A_P)$, то существует многочлен $q \in Q$, такой, что qz — ненулевой многочлен от B с коэффициентами из A. Значит, существует ненулевой элемент $z \in J(A_P)$, лежащий в $A[B] = A \otimes_F Q$ и имеющий наименьшую степень относительно B, скажем t. Если $t = 0$, то z — ненулевой элемент из $A \cap J(A_P)$, как и требовалось. В противном случае существует $j \in I$, такой, что если $B' = B - \{x_j\}$, то $z = \sum_{i=0}^{s} z_i x_j^i$ — многочлен степени $s > 0$ от x_j с коэффициентами из кольца многочленов $A[B']$. Для простоты обозначений положим $x = x_j$, и пусть f — автоморфизм поля P, такой, что $f(x) = x + 1$, а $f(b) = b$ для любого $b \in F(B')$. Тогда $g = 1 \otimes f$ — автоморфизм алгебры $A_P = A \otimes_F P$. Поэтому $z - g(z)$ является элементом пересечения $A[B'] \cap J(A_P)$ степени $< s$. Значит, $z = g(z)$, что возможно лишь в случае, когда характеристика поля F равна $p > 0$. Но тогда f — автоморфизм конечного порядка p, и подполе $E = F(B')(x^p - x)$ поля P, порожденное

[1]) Элементы $u_1, \ldots, u_r$ **алгебраически независимы**, если из равенства $f(u_1, \ldots, u_r) = 0$, где f — многочлен с коэффициентами из P, следует равенство нулю всех коэффициентов многочлена f. **Чисто трансцендентным расширением** поля P называется поле $P(\mathfrak{M})$, полученное присоединением к P алгебраически независимого множества $\mathfrak{M}$. — *Прим. перев.*

$F(B')$ и $x^p - x$, совпадает с множеством элементов, неподвижных при f. Таким образом, $z = f(z)$ принадлежит $A_E \cap J(A_P)$. Поскольку P/E есть расширение Галуа порядка p и $A_P = (A_E)_P$, то из 26.15 следует, что $J(A_E) = J(A_P) \cap A_E$. Таким образом, $z \in J(A_E)$. Пусть $F' = F(B')$. Тогда $P = F'(x)$ и $E = F'(x^p - x)$. Пусть h: $P \to E$ — изоморфизм, такой, что $h(x) = x^p - x$ и $h \mid F' = 1_{F'}$, а $k = 1 \otimes h$ — продолжение этого изоморфизма до $A_P \to A_E$. Тогда $w = k^{-1}(z)$ — элемент из $J(A_P)$ и его степень $< t$. Это противоречит выбору z.

$$J(A_P) = N_P, \tag{2}$$

где $N = J(A_P) \cap A$ — ниль-идеал.

Ясно, что $J(A_P) = N_P$, и остается только показать, что N — ниль-идеал. Предположим, что $N \neq 0$, и будем использовать обозначения доказательства импликации (1). Таким образом, x — это один из x_i, а $F' = F(B')$ — подполе, порожденное остальными x_j. Если $0 \neq z \in N$, то $xz \in J(A_P)$ и имеет квазиобратный $g(x)^{-1} w$, где $g(x) = \sum_{i=0}^{m} g_i x^i \in F'[x]$ и $w \in A_{F'}[x]$. Таким образом,

$$w + g(x)xz + wxz = 0. \tag{3}$$

Так как $z \neq 0$, то $w \neq 0$. Запишем $w = \sum_{i=0}^{n} w_i x^i$, где $w_i \in A_{F'}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и $w_n \neq 0$. Так как $P = F'(x)$, то $J(A_P) = (A_{F'} \cap J(A_P))_P$. Значит, из включения $w \in J(A_P)$ следует, что $w_i \in J(A_P)$, $i = 0, \ldots, n$. Равенство (3) и тот факт, что $z \in A \subseteq A_{F'}$, влекут за собой, что $g(x)xz = -w - wxz$ как многочлен от x над $A_{F'}$ имеет степень $m + 1$, где $m = \deg g(x)$. Более того, $m + 1 = \deg(w + wxz) \leqslant n + 1$, значит, $m \leqslant n$. Если $m = n$, то из (3) следует, что $g_m z + w_m z = 0$ и $z + g_m^{-1} w_m z = 0$. Поскольку $g_m^{-1} w_m$ лежит в $J(A_P)$ и, значит, квазирегулярен, то отсюда следует, что $z = 0$ в противоречие с предположением. Значит, $m < n$. Сравнение коэффициентов при $x^{n+1}, x^n, \ldots, x^{m+1}$ в равенстве (3) приводит к соотношениям

$$w_n z = 0, \ w_n + w_{n-1} z = 0, \ \ldots, \ w_{n+2} + w_{n+1} z = 0 \tag{4}$$

и

$$g_m z + w_{m+1} + w_m z = 0.$$

Следовательно,

$$z^{n-m+1} - g_m^{-1} w_m z^{n-m+1} = 0,$$

что вместе с квазирегулярностью элемента $g_m^{-1} w_m$ влечет за собой равенство $z^{n-m+1} = 0$. Таким образом, элемент z нильпотентен и, значит, N — ниль-идеал. □

26.17B. Следствие. *Если кольцо A не имеет ненулевых ниль-идеалов, то A_P полупримитивно для каждого чисто трансцендентного расширения P поля F.* $\square$

Говорят, что расширение P поля F **сепарабельно порождаемо**, если существует чисто трансцендентное расширение E/F, такое, что P/E — сепарабельное алгебраическое расширение (13.13). Следующий результат вытекает из 26.16 и 26.17B.

26.18A. Следствие. *Если P/F — сепарабельно порождаемое (трансцендентное) расширение, то из $J(A) = 0$ следует, что $J(A_P) = 0$.* $\square$

26.18B. Упражнения. (a) Доказать, что для любого кольца A

$$\operatorname{rad} A[x] = N[x],$$

где $A[x]$ — кольцо многочленов, а N — ниль-идеал.

(b) Установить, что $A[x]$ полупримитивно, если в A нет ненулевых ниль-идеалов, и, следовательно, $A[x]$ может быть полупримитивным, даже если A не является таковым.

Групповые алгебры над формально действительными полями

Поле F называется **формально действительным**, если для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in F$ из равенства

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

26.19. Лемма. *Если G — группа, а F — формально действительное поле, то групповая алгебра FG не содержит ненулевых ниль-идеалов.*

Доказательство. Инволюция группы G, переводящая g в g^{-1}, продолжается до инволюции * алгебры FG, а именно если

$$a = \sum_{g \in G} a_g g \in FG,$$

где $a_g \in F$, то

$$a^* = \sum_{g \in G} a_g g^{-1}.$$

Отображение t: $FG \to F$, такое, что $t(a) = a_1$, где 1 означает единицу группы, является линейным преобразованием пространства FG над полем F и $t(ab) = t(ba)$ для любых $a, b \in F(G)$ (ср. 13.22).

Более того, $t(aa^*) = \sum_{g \in G} a_g^2$. Таким образом,

$$aa^* = 0 \Rightarrow a = 0, \tag{5}$$

поскольку F — формально действительное поле. Если теперь b — ненулевой элемент ниль-идеала алгебры FG, то $a = bb^* \neq 0$ является нильпотентным элементом алгебры FG, причем $a^* = a$. Пусть $a^t \neq 0$, а $a^{t+1} = 0$. Тогда для $c = a^t$ имеет место равенство $c^2 = 0$. Но $c^* = c$, откуда $cc^* = 0$ и, вследствие (5), $c = 0$. Это противоречит условию $c = a^t \neq 0$. $\square$

Поле F называется **абсолютно алгебраическим**, если F — алгебраическое расширение простого подполя.

26.20. Предложение (Амицур [59]). *Если поле F характеристики 0 не является абсолютно алгебраическим, то для любой группы G групповая алгебра FG полупримитивна.*

Доказательство. Простое подполе $\mathbb{Q}$ поля F является формально действительным полем. Пусть P — подполе поля F, такое, что $P/\mathbb{Q}$ чисто трансцендентно, а F/P сепарабельно и алгебраично [1]). Тогда из 26.17A следует, что для $A = \mathbb{Q}G$ имеет место равенство $J(A_P) = N_P$, где N — ниль-идеал алгебры $\mathbb{Q}G$. Таким образом, $J(A_P) = 0$ в силу леммы 26.19, и тогда $J(A_F) = 0$ ввиду 26.8. $\square$

26.21. Следствие. *Каждая групповая алгебра FG над несчетным полем F характеристики 0 полупримитивна.*

Доказательство. Абсолютно алгебраическое поле счетно. $\square$

Упражнения к гл. 26

Кольцо R **радикально над подкольцом** B, если для каждого $a \in R$ существует натуральное число $n = n(a)$, такое, что $a^n \in B$.

1 (Веддербёрн [05]). Любое конечное тело коммутативно и является радикальным расширением каждого своего подкольца.

2 (Джекобсон [45]). Любая алгебраическая алгебра с делением над конечным полем коммутативна. (Лемма. Каждая алгебраическая алгебра с делением содержит элемент, сепарабельный над ее центром.)

3 (Джекобсон). Если каждый элемент кольца R удовлетворяет условию $a^{n(a)} = a$, то кольцо R коммутативно.

[1]) См., например, Ван-дер-Варден В., Алгебра, «Наука», М., 1976, стр. 266.— *Прим. ред.*

4 (Херстейн [53]). Если каждый элемент a кольца R удовлетворяет условию, что $a^{n(a)} - a$ принадлежит центру кольца R, то кольцо R или коммутативно, или обладает ненулевым ниль-идеалом.

5 (Капланский [51]). Поле P радикально над подполем $F \neq P$ в том и только том случае, когда P имеет характеристику $p \neq 0$ и, кроме того, или расширение P/F чисто несепарабельно, или P алгебраично над $GF(p)$.

6 (Капланский [51]). Тело R радикально над своим центром только в случае, когда оно коммутативно.

7 (Фейс [60]). Тело R радикально над своим подкольцом $\neq R$ только в случае, когда оно коммутативно.

8 (Фейс [61]). Если R — радикальное расширение кольца A, то: (a) Из (полу)примитивности R следует (полу)примитивность кольца A. (b) Если R — тело, то A тоже тело. (c) Если rad $R = 0$ и A коммутативно, то R тоже коммутативно. (d) (Армендариз [67]). Если A — радикальное расширение кольца B, то rad $B = B \cap$ rad A.

9. Подпрямо неразложимое примитивное кольцо примитивно слева. (Не каждое примитивное кольцо является примитивным и слева. См. Бергман [64] и Ятегаонкар А. [69].)

10 (Снаппер [50]). Если A — коммутативное кольцо, а x — переменная над A, то rad $A[x] = N[x]$, где N — максимальный ниль-идеал кольца A.

11 (Голдман [51] — Крулль [51]). Если A — конечно порожденное коммутативное кольцо, то rad A является ниль-идеалом.

*12 (Амицур [56]). Пусть F — несчетное поле. (a) Радикал конечно порожденной F-алгебры является ниль-идеалом.
(b) Максимальный ниль-идеал содержит каждый правый и каждый левый ниль-идеал. (c) Если A алгебраична над F, то A_P алгебраична над P для любого расширения P и полная матричная алгебра A_n алгебраична над F. (d) (Амицур [56b]). Для любой алгебры R над полем F имеет место равенство rad $R[x] = N[x]$, где $R[x]$ — кольцо многочленов, а N — максимальный ниль-идеал (ср. 26.18B). Для любого кольца многочленов $R[x_\alpha]$ от бесконечного множества переменных (мощности α) этот результат справедлив без предположения о несчетности F.

13 (Паттерсон [61—62]). Если R_ω — кольцо конечнострочных $(\omega \times \omega)$-матриц над произвольным кольцом R, то rad R_ω канонически отождествляется с (rad $R)_\omega$ в том и только том случае, когда rad R исчезает справа.

14. Первичный идеал P называется **правым несущественным**, если он не является существенным правым идеалом. Любой правый несущественный первичный идеал является правым аннуляторным идеалом. Любой идеал, максимальный среди левых аннуляторных идеалов, является первичным.

*15 (Ленаган [73]). Если R *имеет размерность Крулля*, то $\mathfrak{N}$-rad R нильпотентен. (Ввиду теоремы Левицкого (1, 9.15, стр. 487) так будет, например, если R нётерово справа. См. также гл. 17.)

*16 (Форманек [72b, 73a]). Свободная алгебра ранга >1 над полем k примитивна. (Аналогичным образом, примитивна и групповая алгебра kG при G, являющейся свободным произведением, отличным от $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.) Групповая алгебра kS_ω бесконечной симметрической группы полупримитивна.

Замечания к гл. 26

Как указывалось в предисловии, гл. 18 и настоящая глава являются вступительными к главным темам монографии Джекобсона [56, 64]. (В ней, а также и в других трудах Джекобсон использует термин «полупростое» для того, что мы назвали «полупримитивным» (по предложению Нагаты) по аналогии с термином «полупервичный».)

Полупримитивность группового кольца kG произвольной группы G над трансцендентным полем k характеристики 0 была установлена Амицуром [57c], [59]. Амицур (цит. выше) показал также, что $D[x]$ не является примитивным для алгебраической центральной алгебры с делением D над несчетным полем k. (См. также Амицур [56b].) В случае если $D[x] = D \otimes_k k[x]$ примитивно, можно показать, что $D(x) = D \otimes_k k(x)$ — простое кольцо, являющееся кольцом главных правых и главных левых идеалов, но не телом. (Это всегда так, когда D — алгебра, трансцендентная над своим центром k, т. е. для того, чтобы $D[x]$ не было примитивным, необходимо, чтобы D была алгебраична над k. См. упр. 13.11.6—13.11.13 (1, стр. 571—572).) Любая коммутативная групповая алгебра характеристики 0 полупримитивна (Амицур [59]).

Бергман [64] привел первый пример примитивного справа кольца, не являющегося примитивным слева, а А. Ятегаонкар [69] построил пример области главных идеалов, удовлетворяющей этим условиям.

Джекобсон предполагал, что радикал факторалгебры свободной алгебры с конечным алфавитом (т. е. конечно порожденной алгебры) должен быть ниль-идеалом. Амицур [56a] проверил это для алгебр над несчетным полем, а Голдман [51] и Крулль [51] для коммутативной алгебры A. Амицур обобщил последн результат на PI-алгебры (алгебры с полиномиальным тождество (см. его статью 1967 г. в Proc. Amer. Math. Soc). См. также А цур — Прочези К. [66] и Прочези К. [67b].

Как отмечалось в замечаниях к гл. 18, радикал Кёте, если о существует, является ниль-идеалом, содержащим все односторо ние ниль-идеалы кольца R (Кёте [30]). Неизвестно, существует л радикал Кёте у произвольного кольца, но опять-таки Амицу [56a] доказал его существование для алгебр над несчетным п лем. (См. также Амицур [73].)

Что касается упражнения 13 и теоремы Паттерсона, то радик кольца R_ω определен явным образом (см. Слоувер [69]).

Теорема Крулля о пересечении для нётерова коммутативног кольца R утверждает, что $\bigcap\limits_{n<\omega} (\mathrm{rad}\ R)^n = 0$. Предположение Дж кобсона, что это верно также для произвольных нётеровых колец было проверено Ятегаонкаром А. [74a]и Кошоном [76] для вполн ограниченных нётеровых колец.

Инвариантные факторы Веддербёрна

Пусть A — алгебра конечной размерности над полем k, сеп рабельная над своим радикалом (1, стр. 575). Если S_1 и S_2 — дв полупростых фактора алгебры A (13.18), то существует элеме $x \in \mathrm{rad}\ R$, такой, что $S_1 = (1-x)^{-1}S_2(1-x)$ (Мальцев [42]) (Это остается справедливым, если предполагать только, что A/rad имеет конечную размерность (Экштейн [69]; см. также Кэртис [54] цит. Экштейном).)

Полупростой фактор S (называемый также **фактором Веддербёрна**) называется **G-инвариантным** относительно конечной групп G автоморфизмов и антиавтоморфизмов алгебры A, если $g(S) \subseteq$ для любого $g \in G$. Если A конечномерна, а G конечна, то A обла дает G-инвариантными факторами Веддербёрна, если характери стика поля k не делит $|G|$ (Тафт [57]) или если G — вполне при водимая группа, действующая на A, и k имеет характеристику (Мостов [56]). (См. Тафт [68].) Тафт [64] установил единственност G-инвариантных факторов Веддербёрна для вполне приводимо группы G.

Замечания о первичных идеалах

Не говоря уже о классическом соответствии между первичны (= простыми) идеалами в кольцах многочленов над алгебраическ замкнутыми полями и алгебраическими многообразиями, важност

первичных идеалов в общей теории коммутативных колец не вызывает сомнения благодаря информации о кольцах, получаемой «локально», т. е. при рассмотрении локальных колец R_P для первичного идеала P. (См. замечания к гл. 18 о развитии теории локальных колец.) Однако из этого еще не следует, что первичные идеалы играют важную роль в некоммутативных кольцах, где соответствующие локальные кольца могут и не существовать. Например, первичное кольцо R может не иметь правого или левого (классического) кольца частных $Q(R)$. Хотя ввиду теоремы Голди — Лезье — Круазо (1, 9.9, стр. 483) оно существует, если, скажем, R нётерово справа, тем не менее «локального» кольца R_P для первичного идеала P [1]) может и не существовать. Эта трудность будет частично преодолена, если мы ограничимся рассмотрением PI-колец, так как по теореме Познера [60] и Смола [71] можно построить R_P (каноническим образом), если в R и в R/P выполняются одни и те же полиномиальные тождества.

Ятегаонкар А. [74c] расширил область действия теоремы о первичных идеалах с нётеровых коммутативных колец на нётеровы PI-алгебры. Капланский очень прозрачно описал историю теоремы Крулля о главном идеале (Капланский [68]); Ятегаонкар [75] перенес это на PI-кольца.

Крулль [28] определил такие понятия, как наибольший первичный идеал, делящий идеал A, первичные идеалы, принадлежащие идеалу A, и изолированные компоненты для некоммутативных колец, удовлетворяющих «условиям конечности, более слабым, чем условия Нётер на цепи».

Фиттинг [35] определил первичный и примарный идеалы идеала некоммутативного кольца «без условий конечности». Однако при выполнении условий обрыва возрастающих цепей каждый конеприводимый идеал (т. е. идеал, не являющийся пересечением двух бо́льших идеалов) примарен, и, конечно, каждый идеал есть пересечение примарных идеалов. Развивая теорию первичных идеалов, Фиттинг далее определяет радикал $\sqrt{A}$ идеала A как множество элементов, собственно нильпотентных по модулю A, т. е. элементов c, порождающих идеал, нильпотентный по модулю A. Фиттинг применил свои результаты, чтобы выяснить, когда порядок простой алгебры (конечной размерности) есть произведение примарных идеалов. Это происходит в том и только том случае, когда собственные примарные идеалы комаксимальны и коммутативны. (Ср. с китайской теоремой об остатках 18.30, а также 18.32.)

---

[1]) См., однако, локальную «оболочку» идеала P, определенную Голди [67], рассматриваемую Ламбеком — Михлером [73], [74] и Ятегаонкаром А. [74b]. (Ятегаонкар привел очень простое условие на инъективную оболочку модуля R/P, необходимое и достаточное для существования этой локальной оболочки. См. его теорему 4.5.)

Замечания о первичном радикале

Все попытки дать в произвольном кольце характеризацию первичного радикала (Маккоя), являющегося пересечением первичных идеалов, терпели неудачу, пока Маккой [49] не охарактеризовал его как множество всех элементов r, таких, что любая «m-система», содержащая r, содержит и 0. Здесь m-система M (обобщающая понятие мультипликативной системы) есть множество элементов кольца R, таких, что для любых a, $b \in M$ существует $x \in R$, для которого $axb \in M$. Маккой доказал также, что первичный радикал совпадает с пересечением минимальных первичных идеалов.

Замечания о нижнем ниль-радикале Бэра

Бэр [43] определил нижний ниль-радикал $L(R)$ как пересечение всех радикальных идеалов, т. е. всех ниль-идеалов I, таких, что R/I не содержит нильпотентных идеалов. (Бэр также описал конструкцию ниль-радикала $L(R)$ с помощью трансфинитной индукции.) Маккой [49] показал, что первичный радикал $\mathfrak{P}\text{-rad}(R)$ содержится в $L(R)$, а Левицкий [51] доказал, что $\mathfrak{P}\text{-rad}\,(R) = L(R)$, т. е. *первичный радикал совпадает с бэровским нижним ниль-радикалом.*

Левицкий также предложил другую характеризацию радикала $\mathfrak{P}\text{-rad}\,(R)$ (одна была приведена в 26.5). Назовем **m-последовательностью** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую последовательность, что для любого натурального m существует b_m, для которого $a_{m+1} = a_m b_m a_m$. Элемент a **связан с m-последовательностью** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если $a_0 = a$. Элемент a назовем **строго нильпотентным**, если существует связанная с ним m-последовательность, содержащая 0. Характеризация Левицкого: $\mathfrak{P}\text{-rad}\,(R)$ есть множество всех строго нильпотентных элементов. (Терминология принадлежит Ламбеку [71b].)

Другие результаты о первичных радикалах см. у Маккоя [64] и Джекобсона [64, стр. 193—202].

Аналогичные результаты о радикалах можно посмотреть также в замечаниях к гл. 17, 18 и 22. Общую теорию радикалов см. у Брауна и Маккоя [47], [48], Амицура [54] и Куроша [53] (ср. Джекобсон [64]).[1] См. также Амицур [73а].

О примитивных (максимальных) идеалах I универсальной обертывающей алгебры U конечномерной комплексной нильпотентной алгебры Ли g см. у Диксмье [68]. (Факторалгебры U/I

[1] См. также монографии Дивинского (Divinsky N., Rings and radicals, London, 1965), Саса (Szász F., Radikale der ringe, Berlin, 1975) и В. А. Андрунакиевича и Ю. М. Рябухина, Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979.— *Прим. перев.*

являются алгебрами Вейля A_n, где n одно и то же «почти для всех I».) См. работы Макконелла и Борхо — Габриеля — Рентшлера [73] для более общих классов алгебр Ли и их обобщений.

Другие замечания о групповых кольцах

Форманек и Снайдер [72] построили первые примеры примитивных групповых колец. (См. упр. 11—19 к главе 19.) Лоуренс [74], [75а] определил кольца коэффициентов примитивных групповых колец. Более того, установлено, что свободная алгебра ранга >1 над полем примитивна (Форманек [73а]).

Книги и доклад Пассмана [71], [74], [77] о групповых кольцах служат богатым источником результатов о полупримитивности и примитивности групповых колец, а также по многим другим вопросам теории групповых колец. Например, теорема Капланского о конечности по Дедекинду групповой алгебры kG над полем характеристики 0 (называемой также **конечной по Нейману**, цит. выше) имеется в разделе работы Пассмана [74], посвященном алгебраическим элементам и содержащем теоремы о следе идемпотентов. (В случае нулевой характеристики след $\operatorname{tr} e$ идемпотента $e \neq 1$ есть рациональное число, заключенное между 0 и 1 (строго), ввиду теоремы Капланского и А.Е. Залесского [1].)

Другой пример: алгебра kG удовлетворяет полиномиальному тождеству в том и только том случае, если G имеет абелеву подгруппу конечного индекса. (Теорема Амицура, Айзекса, Пассмана и Смита.) Это относится к групповым алгебрам kG, все неприводимые представления которых имеют ограниченный порядок. (См. Капланский [49b] и Амицур [61], а также Снайдер [74] для обобщений.)

Замечание о полицикличности конечных групповых колец

Одна из самых знаменитых проблем теории групповых колец — это **вопрос о делителе нуля**: если G — группа без кручения, будет ли kG областью целостности? Ответ: «да», если группа G сверхразрешима (Форманек). Этот результат обобщен Фаркашем и Снайдером на случай расширений полициклических групп с помощью конечных.

Кольцо R называется **кольцом Гильберта**, если оно нётерово, а $\operatorname{rad} R/A$ нильпотентен для каждого идеала A. **Капиталом** кольца R называется факторкольцо R/A, где A — максимальный

[1] Залесский А. Е., Об одном предположении Капланского, *ДАН СССР*, 203 (1972), № 4, 749—751. —*Прим. ред.*

идеал. (Если R коммутативно, то R/A — поле.) Поле k назовем **абсолютным**, если оно имеет простую характеристику и абсолютно алгебраично. Группу G впредь будем предполагать расширением полициклической группы с помощью конечной.

Теорема (Розенблад [73]). *Если k — любое абсолютное поле, то любой простой kG-модуль конечномерен над k.*

Это обобщает теорему Ф. Холла для конечно порожденной нильпотентной группы G. Более того, ввиду работы Холла, цитированной Розенбладом (цит. выше), это влечет за собой, что все простые модули над групповым кольцом $\mathbb{Z}\,G$ конечны. (Ср. Ятегаонкар А. [74a], который доказал резидуальную нильпотентность фундаментального идеала.) Более того,

Следствие (Розенблад). *Если R — коммутативное гильбертово кольцо, все капиталы которого абсолютны, то любой простой RG-модуль конечномерен над капиталом кольца R.*

Розенблад доказал также, что для любого кольца R групповое кольцо RG гильбертово в том и только том случае, когда R гильбертово, обобщая различные формы теоремы Гильберта о нулях. Для колец многочленов над полями это теорема Голдмана [51] и Крулля [51]. (См. Розенблад, цит. выше, стр. 309.)

Митчелл [72] перенес радикал Джекобсона и некоторые другие результаты теории колец в малые аддитивные категории.

Ссылки

Амицур [56a], [56b], [56c], [59], [73], Армендариз [67], Бергман [64], Браун — Маккой [47], [48], Бэр [43a], Веддербёрн [05], Голдман [51], Джекобсон [45a], [45b], [45c], [47], [56, 64], Кёте [30a], [30b], Крулль [28], [48], [51], Кэртис [54], Ламбек [71b], Левицкий [51], Ленаган [73], Маккой [49], [55], [56], [57a], [64], Мальцев [42], Мостов [56], Паттерсон [61—62], Снаппер [50], Тафт [57], [64], [68], Фейс [60], [62], Фиттинг [35], Херстейн [53], Хэмптон — Пассман [72], Шок [72], Экштейн [69], Ятегаонкар А. [68].

Дополнительные ссылки

Амицур [54], [57b], [61], [73a], Амицур — Прочези [66], Бичи [71b], Боро — Габриэль — Рентшлер [73], Вамош [68], [75], Дискмье [68], Капланский [48], [49], [68], Кошон [76], Курош [53], Лоуренс [74], [75a], Митчелл [72], Пассман [71], [74], Розенблад [73], Смит [71], Смолл [71], [73], Снайдер [74], Флюх [65], Форманек [72b], [73a], Форманек — Снайдер [72], Ятегаонкар А. [74a], [75].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абьянкар, Хейнзер, Икин (Abhyankar S. S., Heinzer W., Eakin P.)

[72] On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring, *J. Algebra*, **23** (1972), 310—342.

Адзумая (Azumaya G.)

[48] On generalized semiprimary rings and Krull-Remark-Schmidt's theorem, *Japan J. Math.*, **19** (1948), 525—647.

[50] Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull—Remark—Schmidt's theorem, *Nagoya Math. J.*, **1** (1950), 117—124.

[51] On maximally central algebras, *Nagoya Math. J.*, **2** (1951), 119—150.

[59] A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules), *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 249—278.

[66] Completely faithful modules and self-injective rings, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 697—708.

[74] Characterizations of semi-perfect and perfect modules, *Math. Z.*, **140** (1974), 95—103.

Айзекс, Бергман, см. Бергман, Айзекс.

Айзенбуд (Eisenbud D.)

[70] Subrings of Artinian and Noetherian rings, *Math. Ann.*, **185** (1970), 247—249.

Айзенбуд, Гриффитс (Eisenbud D., Griffith P.)

[71a] Serial rings, *J. Algebra*, **17** (1971), 389—400.

[71b] The structure of serial rings, *Pacif. J. Math.*, **36** (1971), 109—121.

Айзенбуд, Робсон (Eisenbud D., Robson J. C.)

[70a] Modules over Dedekind prime rings, *J. Algebra*, **16** (1970), 67—85.

[70b] Hereditary Noetherian prime rings, *J. Algebra*, **16** (1970), 86—104.

Алберт (Albert A. A.)

[39] Structures of Algebras, Coll. Publ. Amer. Math. Soc., 24, Providence, R. I., 1939.

Альбрехт (Albrecht F.)

[61] On projective modules over semi-hereditary rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 638—639.

Амдал, Рингдал (Amdal I. K., Ringdal F.)

[68] Catégories unisériales, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. A, **267** (1968), 85—87, 247—249.

Амицур (Amitsur S. A.)

[54a] A general theory of radicals, II, Radicals in rings and bicategories, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 100—125.

[54b] Differential polynomials and division algebras, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 245—278.

[55] Finite subgroups of division rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 361—386.

[56a] Algebras over infinite fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 35—48.

[56b] Radical of polynomial rings, *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 355—361.
[57a] Derivations im simple rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) 7 (1957), 87—112.
[57b] A generations of Hilbert's Nullstellensatz, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 649—656.
[57c] The radiacal of filed extensions, *Bull. Res. Council of Israel* (*Israel J. Math.*), **7F** (1957), 1—10.
[59] On the semi-simplicity of group algebra, *Mich. Math. J.*, 6 (1956), 251—253.
[60] Finite dimensional central division algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1960), 28—31.
[61] Groups with representations of bounded degree II. *Ill. J. Math.*, 5 (1961), 198—205.
[63] Remarks on principal ideal rings, *Osaka Math. J.*, 15 (1963), 59—69.
[68] Rings with involution, *Israel J. Math.*, 6 (1968), 99—106.
[70] A noncommutative Hilbert basis theorem and subrings of matrices, *Trans, Amer. Math. Soc.*, 149 (1970), 133—142.
[71a] Rings of quotients and Morita context, *J. Algebra*, 17 (1971), 273—298.
[71b] Embeddings in matrix rings, *Pacif. J. Math.*, 36 (1971) 21—29.
[72a] On central division algebras, *Israel J. Math.*, 12 (1972), 408—420.
[72b] On rings of quotients, Instituto Nazionale di Alta Matematica Symposia VIII, 1972, pp. 149—164.
[73a] Nil radicals, Historical notes and some new results, in the book edited by Kertész [73].
[73b] Polynomial identities and Azumaya algebras, *J. Algebra*, 27 (1973), 113—125.
[75] Central embeddings in semi-simple rings, *Pacif. J. Math.* 56 (1975), 1—6.

Амицур, Прочези (Amitsur S. A., Procesi C.)
[66] Jacobson rings and Hilbert algebras, *Annali di Mat.*, 71 (1966), 61—72.

Андерсон, Фуллер (Anderson F. W., Fuller K. R.)
[72] Modules, with decompositions that complement direct summands, *J. Algebra*, 22 (1972), 241—253.
[74] Rings and Categories of Modules, Graduate Text in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

Аренс, Капланский (Arens R. F., Kaplansky I.)
[48] Topological representations of algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 457—481.

Армендариз (Armendariz E. P.)
[67] On radical extensions of rings, *J. Austral. Math. Soc.*, 7 (1967), 552—554.
[73] A note on semiprime rings with torsionless injective envelopes, *Canad. Math. Bull.*, 16 (1973), 429—431.

Артин М. (Artin M.)
[69] On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, *J. Algebra*, 11 (1969), 532—563.

Артин Э. (Artin E.)
[27a] Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. U. Hamburg*, 5 (1927), 251—260.
[27b] Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, *Abh. Math. Sem. U. Hamburg*, 5 (1927), 261—289.
[50] The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56 (1950), 65—72.

[55] Galois Theory, Notre Dame Univ., South Bend, 1955.
[59] Theory of Algebraic Numbers, Mathematical Institute, Göttingen, 1959.
[69] Геометрическая алгебра, «Наука», М., 1969.

Артин Э., Несбитт, Тролл (Artin E., Nesbitt E., Thrall R.)
[44] Rings with Minimum Condition, U. of Mich. Press, Ann Arbor, 1944.

Артин Э., Уэплс (Artin E., Whaples G.)
[43] The theory of simple rings, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 87—107.

Асано К. (Asano K.)
[38] Nichtkommutative Hauptidealringe I, Act. Sci. Ind., 696, Paris, 1938.
[39] Über verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring und ihre Anwendungen, *Japan J. Math.*, 15 (1939), 231—253.
[49a] Über Hauptidealringe mit Kettensatz, *Osaka Math. J.*, 1 (1949), 52—61.
[49b] Über die Quotientenbildung von Schiefringen, *J. Math. Japan*, 1 (1949), 73—79.
[50] Zur Arithmetik in Schiefringen II, *J. Polytech. Osaka City U.*, Ser. A Math., 1 (1950), 1—27.

Асано С. (Asano S.)
[61] On the radical of quasi-Frobenius algebras; Remarks concerning two quasi-Frobenius rings with isomorphic radicals; Note on some generalizations of quasi-Frobenius rings, *Kodai Nath. Sem. Reps.*, 13 (1961), 135—151, 224—226, 227—334.

Ауслендер (Auslander M)
[55] On the dimension of modules and algebras III, *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 67—77.
[57] On regular group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 658—664.
[66a] Remarks on a theorem of Bourbaki, *Nagoya Math. J.*, 27 (1966), 361—369.
[66b] Coherent functors, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, No. 9, 1966, pp. 189—231.
[74] Representation theory of Artin algebras I, II, *Comm. Algebra*, 1 (1974), 177—268, 269—310.

Ауслендер, Бриджер (Auslander M., Bridger M.)
[69] Stable Module Theory, Nemoirs of the Amer. Math. Soc., No. 94, Providence, 1969.

Ауслендер, Брумер (Auslander M., Brumer A.)
[68] Brauer groups of discrete valuation rings, *Nederl. Akad. Wetenskh. Proc.*, Ser. A, *Indag. Math.*, 30 (1968), 286—296.

Ауслендер, Буксбаум (Auslander M., Buchsbaum D. A.)
[57] Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), 390—405.
[59] Uniqie factorization in regular local rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 45 (1959), 733—734.

Ауслендер, Голдман (Auslander M., Goldman O.)
[60a] Maximal orders, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 1—24.
[60b] The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 367—409.

Ауслендер, Райтен (Auslander M., Reiten I.)
[74] Stable equivalence of dualizing R-varieties I—IV, *Advances in Math.*, 12 (1974), 306—366.
[75] Representation theory of Artin algebras III, Almost split sequences, *Comm. Algebra*, 3 (1975), 239—294.

Ахсан (Ahsan J.)
[73] Rings all of whose modules are quasi-injective, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) 27 (1973), 425—439.

Бальцежик (Balcerzyk S.)
[66] On projective dimension of direct limits of modules, *Bull. acad. Polon. Sci.*, Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 14 (1966), 241—244.

Бамби (Bumby R. T.)
[65] Modules which are isomorphic to submodules of each other, *Arch. Math.*, 16 (1965), 184—185.

Банг (Bang C. M.)
[70] Countably generated modules over complete discrete valuation rings, *J. Algebra*, 14 (1970), 552—560.

Бар-Хиллел, Френкель см. Френкель, Бар-Хиллел.

Басс (Bass H.)
[60] Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 466—488.
[61] Projective modules over algebras, *Ann. of Math.*, 73 (1961), 532—542.
[62a] The Morita Theorems, Math. Dept., U. of Oreg., Eugene, 1962.
[62b] Injective dimension in Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 18—29.
[62c] Torsion free and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 319—327.
[63a] Big projective modules are free, *Ill. J. Math.*, 7 (1963), 24—31.
[63b] On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, 82 (1963), 8—28.
[64a] Projective modules over free groups are free, *J. Algebra*, 1 (1964), 367—373.
[64b] K-theory and stable algebra, in: Publications I.H.E.S., No. 22, 1964, pp. 5—60.
[67] Lectures on topics in algebraic K-theory, Tata Institute for Advanced Study, Colaba, 1967.
[73a] Introduction to some methods of algebraic K-theory, Conference Board of the Math. Sciences Regional Conference, Series in Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.
[73b] Алгебраическая K-теория, «Мир», М., 1973.

Баттс (Butts H. S.)
[64] Unique factorization of ideals into nonfactorable ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964).
[65] Quasi-invertible prime ideals, *Proc. Amer. Math. Soc*, 16 (1965), 291—292.

Баттс, Джилмер (Butts H. S., Gilmer R. W., Jr.)
[66] Primary ideals and prime power ideals, *Canad. J. Math.*, 18 (1966), 1183—1195.

Баутелл (Bowtell A. J.)
[67] On a question of Malcev, *J. Algebra*, 7 (1967), 126—139.

Бек (Beck I.)
[71] Injective modules over a Krull domain, *J. Algebra*, 17 (1971), 116—131.
[72a] Σ-injective modules, *J. Algebra*, 21 (1972), 232—249.
[72b] Projective and free modules, *Math. Z.*, 129 (1972), 231—234.

Белл (Bell E. T.)
[37] Men of Mathematics, Simon and Shuster, New York, 1937.

Бергман (Bergman G. M.)
[64] A ring primitive on the right but not the left, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964), 473—475.
[69a] Centralizers in free Associative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 137 (1969), 327—344.
[69b] Ranks of tensors and change of base field, *J. Algebra*, 11 (1969), 613—621.
[71a] Groups acting on hereditary rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 3 (23) (1971), 70—80.
[71b] Commutative rings and centres of hereditary rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 23 (1971), 214—236.
[72a] Boolean rings of projection maps, *J. Lond. Math. Soc.*, (2), 4 (1972), 593—598.
[72b] Hereditary and cohereditary of projective modules, Proc. of conference on ring theory in Park City, Utah 1971, New York and London, 1972, pp. 29—62.
[74] Some examples in P. I. ring theory, *Isreal J. Math.*, 18 (1974), 257—277.

Бергман, Айзекс (Bergman G. M., Isaacs I. M.)
[73] Rings with fixed-point-free, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 27 (1973), 69—87.

Бергман, Кларк (Bergman G. M., Clark W. E.)
[73] The automorphism class group of the category of rings, *J. Algebra*, 24 (1973), 80—99.

Бергман, Кон (Bergman G. M., Cohn P. M.)
[69] Symmetric elements in free powers of rings, *J. Lond. Math. Soc.* (2) 1 (1969), 525—534.
[71] The centres of 2-firs and hereditary rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 23 (1971), 83—98.

Беренс (Behrens E.-A.)
[60] Distributiv darstellbare Ringe, *Math. Z.*, 73 (1960), 409—432.
[61a] Distributiv darstellbare Ringe, II, *Math. Z.*, 76 (1961), 367—384.
[61b] Einreihige Ringe, *Math. Z.*, 77 (1961), 207—218.

Бёрджисс (Burgess W. D.)
[69a] On semiperfect group rings, *Canad. Math. Bull.*, 12 (1969), 645—652.
[69b] Rings of quotients of group rings, *Canad. J. Math.*, 21 (1969), 865—875.

Биркгоф (Birkhoff G.)
[52] Теория структур, ИЛ, М., 1952. [Русский перевод II изд. [67] 1948 г.]
[67] Lattice Theory (revised). Coll. Pub. Vol. 25. Amer. Math. Soc. Providence, 1967.

Бичи (Beachy J. A.)
[71a] Bicommutators of cofaithful, fully divisible modules, *Canad. J. Math.*, 23 (1971), 202—213; Corrigendum, 26 (1974), 256.

[71b] On Quasi-Artinian rings, *J. Lond. Math. Soc.*, (2) 3 (1971), 449—452.
[71c] Generating and Cogenerating structures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158 (1971), 75—92.

Бичи, Блер (Beachy J. A., Blair W. D.)
[75] Rings when faithful left ideals are cofaithful, *Pacif. J. Math.* (1975), 1—14.

Блер (Blair W. D.)
[73] Right Noetherian rings integral over center, *J. Algebra*, 27 (1973), 187—198

Блер, Бичи см. Бичи, Блер.

Бойл (Boyle A. K.)
[73] When projective covers and injective hulls are isomorphic, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 8 (1973), 471—476.
[74] Hereditary QI-rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192 (1974), 115—120.

Бойл, Гудёрл (Boyle A. K., Goodearl K. R.)
[75] Rings over which certain modules are injective, *Pacif. J. Math.*, 58 (1975), 43—53.

Бойл, Гудерл см. Гудерл, Бойл.

Бойсен, Ларсен (Boisen M. B., Larsen M. D.)
[73] On Prüfer rings as images of Prüfer rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40 (1973), 87—90.

Бокуть Л. А.
[67] О вложении колец в тела, *ДАН СССР*, 175, № 4 (1967), 755—758.

Бонгейл (Bongale P. R.)
[68] Filtered Frobenius algebras II, *J. Algebra*, 9 (1968), 79—93.

Борель (Borel A.)
[72] Линейные алгебраические группы, «Мир», М., 1972.

Боро, Габриель, Рентшлер (Borho W., Gabriel P., Rentschler R.)
[73] Primideale in einhüllenden auslösbaren Lie-Algebren, Lecture Notes im Mathematics, vol. 357, New York-Heidelberg-Berlin, Springer, 1973.

Брангс (Brungs H. H.)
[69] Generalized discrete valuation rings, *Canad. J. Math.*, 21(1969), 1404—1408.
[70] Idealtheorie für eine Klasse noetherescher Ringe, *Math. Z.*, 118 (1970), 86—92.
[73a] Non commutative Krull domains, *J. reine u. angew. Math.*, 264 (1973), 161—171.
[73b] Left Euclidian rings, *Pacif. J. Math.*, 45 (1973), 27—33.

Браун (Brown B.)
[51] An extension of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2 (1951), 114—117.

Браун, Маккой (Brown B., McCoy N.)
[47] Radicals and subdirect sams, *Amer. J. Math.*, 69 (1947), 46—58.
[48] The radical of a ring, *Duke Math. J.*, 15 (1948), 495—499.
[50] The maximal regular ideal of a ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 165—171.

Брауэр (Brauer R.)
[29] Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, *Math. Z.*, 39 (1929) 79—107.

[63] Representations of finite groups, in: Lectures on Modern Mathematics, Vol. I (T. L. Saaty, ed.), John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963, pp. 133—175.

Брауэр, Несбитт (Brauer R., Nesbitt C.)
[37] On the regular representations of algebras, *Proc. Mat. Acad. Sci.*, 23 (1937), 236—240.

Бриджер, Ауслендер см. Ауслендер, Бриджер.

Брумер (Brumer A.)
[63] Structure of hereditary orders, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 721—724; addendum, ibid., 70 (1964), 185.

Брумер, Ауслендер см. Ауслендер, Брумер.

Буксбаум (Buchsbaum D.)
[55] Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1—34.
[61] Some remarks on factorization in power series rings, *J. of Math. and Mech.* (now *Indiana J. Math.*), 10 (1961), 749—754.

Буксбаум, Ауслендер см. Ауслендер, Буксбаум.

Букур, Деляну (Bucur I., Deleanu A.)
[72] Введение в теорию категорий и функторов, «Мир», М., 1972.

Бурбаки (Bourbaki N.)
[62, 65, 66] Алгебра, «Наука», М., 1962, 1965, 1966.
[71] Коммутативная алгебра, «Мир», М., 1971.

Буш (Bush G. G.)
[63] The embedding theorems of Mal'cev and Lambek, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 49—58.

Бьёрк (Björk J. E.)
[69] Rings satisfying a minimum condition on principal ideals, *J. reine u. angew. Math.*, 236 (1969), 466—488.
[70a] On subrings of matrix rings over fields, *Proc. Cam. Phil Soc.*, 68 (1970), 275—284.
[70b] Rings satisfying certain chain conditions, *J. reine u. angew. Math.*, 245 (1970), 63—73.
[71] Conditions which imply that subrings of semiprimary rings are semiprimaty, *J. Algebra*, 19 (1971), 384—395.
[72a] Radical properties of perfect modules, *J. reine u. angew. Math.*, 253 (1972), 78—86.
[72b] The global dimension of some algebras of operators, *Inv. Math.*, 17 (1972), 67—78.
[74] Noetherian and Artinian chain conditions of associative rings. *Arch. Math.*, 24 (1974), 366—378.

Бьюмонт, Пирс (Beaumont R., Pierce R.)
[61] Torsion-free rings, *Ill. J. Math.*, 5 (1961), 61—98.

Бэр (Baer R.)
[40] Abelian groups that are directed summands of every containing abelian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 800—806.
[42] Inverses and zero-divisors, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 630—638.
[43a] Radical ideals, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 537—568.
[43b] Rings with duals, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 569—584.

[48] Direct decompositions into infinitely many summands, *Trans. Amer. Math., Soc.*, 64 (1948), 519—551.
[52] Kriterian für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Z.*, 56 (1952), 1—17.
[68] Dualisierbare Moduln und Praemoduln, in: Studies on abelian groups, Springer, 1968, pp. 37—68.

Вагнер (Wagner G. B.)
[70] Radicals related to *V*-rings, Technical Report, Dept. of Math, U. of Maryland, College Park, 1970.

Вагонер (Wagoner R.)
[71] Cogenerator endomorhpism ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 347—351.

Вазан, Сингх см. Сингх, Вазан.

Валетт, Гурсо см. Гурсо, Валетт.

Вамош (Vamos P.)
[68] The dual of the notion of finitely generated, *J. Lond. Math. Soc.*, 43 (1968), 643—646.
[71] Direct decompositions of modules, Algebra Seminar Notes, Dept. of Math., U. of Sheffield, 1971.
[75] Classical rings, *J. Algebra*, 34 (1975), 114—129.
[76] Rings with duality, Preprint U. of Sheffield, 1976.

Вамош, Шарп см. Шарп, Вамош.

Васконселос (Vasconcelos W. V.)
[68] Reflexive modules over Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 1349—1355.
[69] On finitely generated flat modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138 (1969), 505—512.
[70a] Flat modules over commutative Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152 (1970), 137—143.
[70b] Simple flat extension, *J. Algebra*, 16 (1970), 106—107.
[72] The local rings of global dimension two, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 35 (1972), 381—386.
[73a] Coherence of one polynomial ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41 (1973), 449—456.
[73b] Finiteness in projective ideals, *J. Algebra*, 25 (1973), 269—278.

Ватанабе, Эндо см. Эндо, Ватанабе.

Веббер (Webber D. B.)
[70] Ideals and modules of simple Noetherian hereditary rings, *J. Algebra*, 16 (1970), 239—242.

Веддербёрн (Wedderburn J. H. M.)
[05] A theorem on finite algebras, *Trans, Amer. Math. Soc.*, 6 (1905), 349—352.
[08] On hypercomplex numbers, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2) 6 (1908), 77—117.
[09] On the direct product in the theory of finite groups, *Ann. of Math.*, 10 (1909), 173—176.
[14] A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 15 (1914), 162—166.
[37] A note on algebras, *Ann. of Math.*, 38 (1937), 854—856.

Вейль А. (Weil A.)
[74] Two lectures on number theory, past and present, L'enseignement Math., **XX** (1974), 87—110.

Вейль Г. (Weil H.)
[47] Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.

Вилард (Willard E.)
[65] Properties of generators, *Math. Ann.*, 158 (1965), 352—364.

Вильямайор (Villamayor O. E.)
[58] On the semisimplicity of group algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 621—627.

Вильямайор, Михлер см. Михлер, Вильямайор.

Вильямс (Williams R. E.)
[68] A note on weak Bezout rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 951—952.

Виола-Приоли (Viola-Prioli J.)
[73] On absolutely torsion-free rings and kernel functors, Rutgers U. Ph. D. Thesis, Rutgers, The State U., New Brunswick, N.J., 1973.

Ву (Wu L.)
[66] A characterization of self-injective rings, *Ill. J. Math.*, 10 (1966), 61—65.

Ву, Джанс см. Джанс, Ву.

Вудс (Woods S. M.)
[71] On perfect group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27 (1971), 49—52.

Габриель (Gabriel P.)
[62] Des categories abeliennes, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 323—448.
[72] Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.*, 6 (1972), 71—103.

Габриель, Боро, Рентшлер см. Боро, Габриель, Рентшлер.

Гевиртсман (Gewirtzman L.)
[67] Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of torsion-free modules, *Math. Z.*, 98 (1967), 391—400.

Гёльдер (Hölder O.)
[1889] Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, 34 (1889), 26—56.

Гилл (Gill D. T.)
[71] Almost maximal valuation rings, *J. Lond. Math. Soc.*, (2), 4 (1971), 140—146.

Глюк, Коэн см. Коэн, Глюк.

Голан (Golan J. S.)
[70, 72] Characterisation of rings using quasiprojective modules I, *Israel. J. Math.*, 8 (1970), 34—38; II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 337—343; III ibid 31 (1971, 1972), 401—408.
[71] Quasiperfect modules, *Quart. J. Math. Oxford*, (2), 22 (1971), 173—182.
[75] Localization of Noncommutative Rings, New York, Dekker, 1975.

Голди (Goldie A. W.)
[58] The structure of prime rings under ascending chain conditions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 8 (1958), 589—608.
[60] Semi-prime rings with maximum condition, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10 (1960), 201—220.

[61] Rings with maximum condition (Lecture Notes), Yale U. Math. Dept., 1961.
[62] Non-commutative principal ideal rings, *Arch. Math.*, 13 (1962), 213—221.
[64] Torsionfree modules and rings, *J. Algebra*, 1 (1964), 268—287.
[67] Localization in non-commutative Noetherian rings, *J. Algebra*, 5 (1967), 89—105.
[69] Some aspects of ring theory, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1 (1969), 129—154.
[74] Lectures on quotient rings and rings with polynomial identity, Math. Inst. Giessen, 1974.

Голди, Смолл (Goldie A. W., Small L. W.)
[73] A note on rings of endomorphisms, *J. Algebra*, 24 (1973), 392—395.

Голдман (Goldman O.)
[46] Semisimple extensions of rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1946), 1028—1032.
[51] Hilbert rings, and the Hilbert Nullstellensatz, *Math. Z.*, 54 (1951), 136—140.
[69] Rings and modules of quotients, *J. Algebra*, 13 (1969), 10—47.

Голдман, Ауслендер см. Ауслендер, Голдман.

Гопкинс (Hopkins C.)
[39] Rings with minimal condition for left ideals, *Ann. of Math.*, 40 (1939), 712—730.

Горенштейн (Gorenstein D.)
[68] Finite Groups, Harper and Row, New York, 1968.

Гордон, Робсон (Gordon R., Robson J. C.)
[73] Krull dimension, Memoirs of the Amer. Math. Soc. № 133, Providence, 1973.

Гринберг (Greenberg B.)
[74] Global dimension of cartesian squares, *J. Algebra*, 32 (1974), 31—43.

Гриффитс (Griffith P.)
[70] On the decomposition of modules and generalized left unserial rings, *Math. Ann.*, 184 (1970), 300—308.

Гриффитс, Айзенбуд см. Айзенбуд, Гриффитс.

Гриффитс, Робсон (Griffith P., Robson J. C.)
[70] A theorem of Asano and Michler, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 837—838.

Гротендик (Grothendieck A.)
[57] Sur quelques points d'algebre homlogique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119—221. [Русский перевод: О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1971.]
[65] Le groupe de Brauer I, Seminaire Bourbaki, Exposé 290, 1965.

Гудёрл (Goodearl K. R.)
[70] Some representation theorems for involution rings, *J. Algebra*, 14 (1970), 299—311.
[71] Embedding non-singular modules in free modules, *J. Pure and Applied Algebra*, 1 (1971), 275—279.
[72] Singular Torsion and the Splitting Properties, Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. 124, Providence, 1972.
[73a] Triangular representations of splitting rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 185 (1973), 271—285.

[73b] Prime ideals in regular selfinjective rings, *Canad. J. Math.*, 25 (1973), 829—839.
[73c] Idealizers and nonsingular rings, *Pacif. J. Math.*, 48 (1973), 395—402.
[73d] Prime ideals in regular self-injective rings II, *J. Pure and Applied Algebra*, 3 (1973), 357—373.
[74a] Simple self-injective rings need not be Artinian, *Comm. Algebra*, 2 (1974), 83—89.
[74b] Localization and splitting in hereditary Noetherian prime rings, *Pacif. J. Math.*, 53 (1974), 137—151.
[75] Simple regular rings and rank functions, *Math. Ann.*, 214 (1975), 267—287.

Гудёрл, Бойл (Goodearl K. R., Boyle A. K.)
[76] Dimension theory for nonsingular injective modules, Memoirs of the Amer. Math. Soc., № 177, Providence, 1976.

Гудёрл, Бойл см. Бойл, Гудёрл.

Гудёрл, Хендельмен (Goodearl K. R., Handelman D.)
[75] Simple self-injective rings, *Comm. Algebra*, 3 (1975), 797—834.

Гупта (Gupta R. N.)
[68] Self-injective quotient and injective quotient modules, *Osaka J. Math.*, 5 (1968), 69—87.
[70] Characterization of rings whose classical quotient rings are perfect rings, *Publs. math.*, 17 (1970), 215—222.

Гурсо (Goursaud J. M.)
[70] Une caracterisation des anneux uniseriels, *C.R. Acad. Sci Paris*, 270 (1970), 364—367.
[73] Sur les anneax de groupes semi-parfaits, *Canad. J. Math.*, 25 (1973), 922—928.

Гурсо, Валетт (Goursaud J. M., Valette J.)
[75] Sur l'enveloppe injective des anneaux des groupes reguliers, *Bull. Math. Soc. France*, 103 (1975), 91—102.

Гурсо, Жереми (Goursaud J. M., Jeremy L.)
[75] L'enveloppe injective des anneaux reguliers, *Comm. Algebra*, 3 (1975), 763—779.

Дайсон (Dyson F. J.)
[72] Quaternion determinants, *Helv. Phys. Acta*, 45 (1972), 289—302.

Дедекинд (Dedekind R.)
[1897, 1900] Über Zerlegungen von Zahlen, durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, Festschrift Techn. Hoch. Braunschweig, 1897, and Ges. Werke, vol. 2,1900, pp. 103—148.
[1900] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Ann.*, 53 (1900), 371—403, and Ges. Werke, vol. 2,1900, pp. 236—271.

Дейд (Dade E. C.)
[71] Deux groupes finis distincts ayant la meme algebre de groupe sur tout corps, *Math. Z.*, 119 (1971), 345—348.

Дейринг (Deuring M.)
[35, 68] Algebren, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. 74, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1935, 1968.

Деляну, Букур см. Букур, Деляну.

ДеМейер, Ингрехем (DeMeyer F., Ingraham E.)
[71] Separable Algebras Over Commutative Rings, Lecture Notes in Mathematics, vol. 81, Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1971.

Деспанд (Deshpande M. G.)
[71] Structure of right subdirectly irreducible rings I, *J. Algebra*, **17** (1971), 317—325.

Джанс (Jans J. P.)
[57] On the indecompsable representations of an algebra, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 418—429.
[59a] Projective injective modules, *Pacif. J. Math.*, 9 (1959), 1103—1108.
[59b] On Frobenius algebras, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 392—407.
[60] Some remarks on symmetric and Frobenius algebras, *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 65—71.
[61] Duality in Noetherian rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 829—835.
[63a] On finitely generated modules over Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 330—340.
[63b] Module classes of finite type, *Pacif. J. Math.*, 13 (1963), 603—609.
[67] On orders in quasi-Frobenius rings, *J. Algebra*, 7 (1967), 35—43.
[68] A note on injectives, *Math. Ann.*, **175** (1968), 239—242.
[69] Note on QF-1-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 225—228.
[70] On the double centralizer property, *Math. Ann.*, 188 (1970), 85—89.

Джанс, By (Jans J.P., Wu L.)
[67] On quasi-projectives, *Ill. J. Math.*, **11** (1967), 439—448.

Джанс, Кэртис см. Кэртис, Джанс.

Джанс, Накаяма (Jans J. P., Nakayama T.)
[57] Algebras with finite-dimensional residualgebras, *Nagoya Math. J.*, **11** (1957), 67—76.

Джейн (Jain S.)
[73a] Flat and FP-injectivity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**, (1973), 437—442.
[73b] Flat injective modules and FP-injectivity, Rutgers Ph. D. Thesis, Putgers, The State University, New Brunswick, N. J., 1973.

Джейн, Мохамед, Сингх (Jain S. K., Mohamed S. H., Singh S.)
[69] Rings in which every right ideal is quasi-injective, *Pacif. J. Math.*, **31** (1969), 73—79.

Джейн, Сингх см. Сингх, Джейн.

Джекобсон (Jacobson N.)
[45a] The radiacal and semisimplicity for arbitary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 300—342.
[45b] The structure of simple rings without finiteness assumptions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 228—245.
[45c] Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 695—707.
[47] Теория колец, ИЛ, М., 1947.
[50] Some remarks on one-sidede inverses, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 352—355.
[51, 53, 64] Lectures in Abstract Algebra, vol. I—III, Van Nostrand, New York and Princeton, (1951) 1965, 1953, 1964.
[56, 64] Structure of Rings, Revised, Colloquium Publication, vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, 1956, 1964.
[61] Строение колец, ИЛ, М., 1961 [Русский перевод I изд. [56, 64] 1956 г.]

[75] PI-Algebras, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 441, New York-Heidelberg-Berlin, Springer, 1975.

Дженнингс (Jennings S. A.)
[41] The structure of the group ring of a p-group over a modular field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 175—185.

Джилмер (Gilmer R. W.)
[68] Multiplicative Ideal Theory, Part I and II, Queens Papers on Pure and Applied Math., vol. 12, Queen's U., Kingston, Ontario, 1968.
[73] Semigroup rings as Prüfer rings, *Duke Math. J.*, **41** (1973), 219—230.
[75] Polynomial rings over a commutative regular ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49** (1975), 294—296.

Джилмер, Баттс см. Баттс, Джилмер.

Джин, Мосс (Ginn S. M., Moss P. B.)
[75] Finitely embeddinged modules over Notherian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 (1975), 709—710.

Джонсон (Johnson R. E.)
[51a] The extended centralizer of a ring over a module, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 891—895.
[51b] Prime rings, *Duke Math. J.*, 18 (1951), 799—809.
[53] Representations of prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74 (1953), 351—357.
[61] Quotient rings with zero singular ideal, *Pacif. J. Math.*, **11** (1961), 1385—1392.
[63] Principal right ideal rings, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 297—301.
[65a] Rings with zero right and left singular ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 150—157.
[65b] Unique factorization in principal right ideal domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 526—528.
[69] Extended Mal'cev domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 211—213.

Джонсон, Коззенс см. Коззенс, Джонсон.

Джонсон, Уонг (Johnson R. E., Wong E. T.)
[61] Quasi-injective modules and irreducible rings, *J. Lond. Math. Soc.*, **36** (1961), 260—268.

Джонсон, Уонг см. Уонг, Джонсон

Диксмье (Dixmier J.)
[68] Sur les algebres de Weyl, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 209—242. [Русский перевод: Математика, **13** : 4 (1969), 16—44.]

Диксон Л. (Dickson L. E.)
[23] Algebras and their Arithmetics, U. of Chicago, 1923 and Stechert and Co. (reprint), 1938.

Диксон С. (Dickson S. E.)
[66] A torsion theory for Abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 223—235.
[69] Algebras of finite representation type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135** (1969), 127—141.

Диксон С., Келли (Dickson S. E., Kelly G. M.)
[70] Interlacing methods and large indecomposables, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **3** (1970), 337—348.

Диксон С., Фуллер (Dickson S. E., Fuller K. R.)
[69] Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope, *Pacif. J. Math.*, **31** (1969), 655—658.

[70] Commutative QF-1 Artinian rings are QF, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 667—670.

Длаб (Dlab V.)
[69] Rank theory of modules, *Fund. Math.*, 64 (1969), 313—324.
[70a] Structure of perfect rings, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2 (1970), 117—124.
[70b] A characterization of perfect rings, *Pacif. J. Math.*, 33 (1970), 79—88.
[70c] On a class of perfect rings, *Canad. J. Math.* 22 (1970), 822—826.

Длаб, Рингель (Dlab V., Ringel C. M.)
[71] Exceptional rings, *Colloquia Math. Soc. Janos, Bolyai*, 6 (1971), 167—171.
[72a] Rings with the double centralizer property, *J. Algebra*, 22 (1972), 480—501.
[72b] Balances rings, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 246, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972, pp. 74—143.
[72c] Decompositions of modules over right uniserial rings, *Math. Z.*, 129 (1972), 207—230.
[72d] A class of balanced non-uniserial rings, *Math. Ann.*, 195 (1972), 279—291.
[73a] Représentations indécomposables des algèbras, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 276 (1973), 1393—1396.
[73b] Sur la conjecture de Brauer-Thrall, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 276 (1973), 1441—1442.

Дьёдонне (Dieudonne J.)
[43] Les determinants sur un corps non-commutatif, *Bull. Soc. Math. France*, 71 (1943), 27—45.
[58] Remarks on quasi-Frobenius rings, *Ill. J. Math.*, 2 (1958), 346—354.

Дэвис (Davis E. D.)
[62] Overrings of commutative rings I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1962), 52—61.
[64] Overrings of commutative rings II, Integrally closed overrings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 (1964), 196—212.

Дюбуа (Dubois D.)
[66] Modules of sequences of elements of a ring, *J. Lond. Math. Soc.*, 41 (1966), 177—180.

Елизаров В. П.
[69] Кольца частных, *Алгебра и логика*, 8 (1969), 381—424.

Жантиль (Gentile E.)
[60] On rings with one-sided fields of quotients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1960), 380—384.

Жаффар (Jaffard P.)
[60] Les systemes d'Ideaux, Dunod, Paris, 1960.

Жереми, Гурсо см. Гурсо, Жереми.

Жордан (Jordan C.)
[1872] Recherches sur les substitutions, *J. Math. Pures Appl.*, (2), 17 (1872), 351—363.

Закс (Zaks A.)
[68] Semiprimary rings of generalized triangular type, *J. Algebra*, 9 (1968), 54—78.
[69] Injective dimension of semiprimary rings, *J. Algebra*, 13 (1969), 73—86.

[71a] Dedekind subrings of $k[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials, *Israel J. Math.*, 9 (1971), 285—289.
[71b] Some rings are hereditary, *Israel J. Math.*, 10 (1971), 442—450.
[72] Restricted left principal ideal rings, *Israel J. Math*, 11 (1972), 190—215.
[74] Hereditary Noetherian rings, *J. Algebra*, 30 (1974), 513—526.

Залесский А. Е., Нерославский О. М.
[75] О простых нётеровых кольцах, *Изв. АН СССР*, сер. физ.-мат. (1975), № 5, 38—42.

Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
[63] Коммутативная алгебра, т. 1, 2, ИЛ, М., 1963.

Зелинский (Zelinsky D.)
[53] Linearly compact modules and rings, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 79—90.
[54] Raising idempotents, *Duke Math. J.*, 21 (1954), 315—322.

Зелинский, Розенберг см. Розенберг, Зелинский.

Зелинский, Эйленберг, Розенберг см. Эйленберг, Розенберг, Зелинский.

Зельманович (Zelmanowitz J. M.)
[67] Endomorphism rings of torsion-less modules, *J. Algebra*, 5 (1967), 325—341.
[71] Injective hulls of torsion free modules, *Canad. J. Math.*, 23 (1971), 1094—1101.
[72] Regular modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163 (1972), 341—355.
[73] Semiprime modules with maximum conditions, *J. Algebra*, 25 (1973), 554—574.

Иванов (Ivanov G.)
[70] Rings with zero singular ideal, *J. Algebra*, 16 (1970), 340—346.
[72] Ph. D. Theisis Australian National University, Canberra, 1972.
[74] Left generalized uniserial rings, *J. Algebra*, 31 (1974), 166—181.
[75] Decomposition of modules over uniserial rings, *Comm. Algebra*, 3 (1975), 1031—1036.

Икеда (Ikeda M.)
[51] Some generalizations of quasi-Frobenius rings, *Osaka J. Math.*, 3 (1951), 227—239.
[52] A characterization of quasi-Frobenius rings, *Osaka J. Math.*, 4 (1952), 203—210.
[66] Über die einstufigen nichtkommutativen Ringe, *Nagoya Math. J.*, 27 (1966), 371—379.

Икеда, Накаяма (Ikeda M., Nakayama T.)
[54] On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 15—19.

Икеда, Эйленберг, Накаяма см. Эйленберг, Икеда, Накаяма

Икин (Eakin P. M.)
[68] The converse to a well-known theorem on Noetherian rings, *Math. Ann.*, 177 (1968), 278—282.
[72] A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31 (1972), 75—80.

Икин, Абьянкар, Хейнзер см. Абьянкар, Хейнзер, Икин

Икин, Хейнзер (Eakin P., Heinzer W.)
[70] Non finiteness in finite dimensional Krull domains, *J. Algebra*, 14 (1970), 333—340.

[72] A cancellation problem for rings, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 311, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972, pp. 333—341.

Ингрехем, ДеМейер см. ДеМейер, Ингрехем.

Инокс, Коулмен см. Коулмен, Инокс.

Исии, Харада см. Харада, Исии.

Йенсен (Jensen Ch. U.)
[63] On characterization of Prüfer rings, *Math. Scand.*, **13** (1963), 90—98.
[66a] A remark on flat and projective modules, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 943—949.
[66b] A remark on semi-hereditary local rings, *J. Lond. Math. Soc.*, **41** (1966), 479—482.
[66c] Arithmetical rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **17** (1966), 115—123.

Йонах (Jonah D.)
[70] Rings with minimum condition for principal right ideals have the maximum condition for principal left ideals, *Math. Z.*, **113** (1970), 106—112.

Йондруп (Jøndrup S.)
[71] PP-rings and finitely generated flat ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **28** (1971), 431—435.

Йонссон, Кроули см. Кроули, Йонссон.

Йосии (Yoshii T.)
[56] On algebras of bounded representation type, *Osaka Math. J.*, **8** (1956), 51—105.

Кавада (Kawada Y).
[57] On similarities and isomorphisms of ideals in a ring, *J. Math. Soc. Japan*, 9 (1957), 374—380.
[62, 63, 64] On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic I, II, and III, *Sci. Reps. Tokyo Kyoiku Daigaku*, **7**, 8 and 9 (1962, 1963 and 1964), 154—230, 1—62, and 166—250.

Кавада, Морита, Тахикава см. Морита, Кавада, Тахикава.

Кайо (Cailleau A.)
[69] Une caractérisation des modules $\sum$-injectifs, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269** (1969), 997—999.

Кайо, Рено (Cailleau A., Renault G.)
[70] Etude des modules $\sum$-injective, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **270** (1970), 1391—1394.

Камилло (Camillo V. P.)
[70a] Balanced rings and a problem of Thrall, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 143—153.
[70b] A note on commutative injective rings, *Pacif. J. Math.*, **35** (1970), 59—64.
[73] A note on hereditary rings, *Pacif. J. Math.*, 45 (1973), 35—41.
[75a] Commutative rings whose quotients are Goldie, *Glasgow Math. J.*, **16** (1975), 32—33.
[75b] Distributive modules, *J. Algebra*, **36** (1975), 16—25.

Камилло, Коззенс (Camillo V. P., Cozzens J. H.)
[73] A theorem on hereditary rings, *Pacif. J. Math.*, 45 (1973), 35—41.

Камилло, Фуллер (Camillo V. P., Fuller K. R.)
[72] Balanced and QF-1 algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34** (1972), 373—378.
[74] On Loewy length of rings, *Pacif. J. Math.*, **53** (1974), 347—354.

Канзаки (Kanzaki T.)
[66] On Galois extensions of rings, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 43—49.

Канзаки, Харада см. Харада, Канзаки.

Капланский (Kaplansky I.)
[42] Maximal fields with valuation, *Duke Math. J.*, 9 (1942), 303—321.
[46] On a problem of Kurosch and Jacobson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 496—500.
[47] Semi-automorphisms of rings, *Duke Math. J.*, **14** (1974).
[48] Rings with polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 575—580.
[49] Elementary divisors and modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 464—491.
[50] Topological representations of algebras II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 62—75.
[51] A theorem on division rings, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 290—292.
[52] Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340.
[53] Dual modules over a valuation ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 213—219.
[58a] Projective modules, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 372—377. [Русский перевод: Математика, 4 : 1 (1960), 3—8.]
[58b] On the dimension of modules and algebras X, A right hereditary ring which is not left hereditary, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 85—88.
[59] Homological dimension of rings and modules, Mimeographed notes, U. of Chicago, 1969.
[60] A characterization of Prüfer rings, *J. Indian Math. Soc.*, 24 (1960), 279—281.
[62] The splitting of modules over integral domains, *Arch. Math.*, **13** (1962), 341—343.
[66] The homological dimensional of a quotient field, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 139—142.
[68] Commutative rings, Proceedings of the Canadian Mathematical Congress, Manitoba, 1968.
[69a] Fields and Rings, Chicago Lectures in Math., U. of Chicago Press, Chicago and London, 1969.
[69b] Infinite Abelian Groups (Second Edition), U. of Michigan Press, Ann Arbor, 1969.
[70a] Problems in the theory of rings, *Amer. Math. Monthly*, **77** (1970), 445—454.
[70b] Commutative Rings, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.

Капланский, Аренс см. Аренс, Капланский.

Капланский, Коэн см. Коэн, Капланский.

Карсон (Carson A. B.)
[72] Coherence of polynomial rings over semisimple algebraic algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 34 (1972), 20—24.

Картан, Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)
[60] Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.

Катефорис (Cateforis V. C.)
[69a] Flat regular quotient rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138 (1969), 241—249.
[69b] On regular selfinjective rings, *Pacif. J. Math.*, **30** (1969) 39—45.
[70] Two-sided semisimple maximal quotient rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 339—349.

Като (Kato T.)
[67] Self-injective rings, *Tohoku Math. J.*, **19** (1967), 485—494.
[68a] Some generalizations of QF-rings, *Proc. Japan Acad.*, *44* (1968), 114—119.
[68b] Torsionless modules, *Tohoku Math. J.*, **20** (1968), 234—243.
[72] Structure of left QF-3 rings, *Proc. Japan Acad.*, **48** (1972), 479—483.

Каш (Kasch F.)
[54] Grundlagen einer Theorie der Frobenius-Erweiterungen, *Math. Ann.*, **127** (1954), 453—474.
[60/61] Projective Frobenius-Erweiterungen, *Sitzungsber. Heidelbergere Akad.*, 4 (1960/61), 89—109.
[61] Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen, *Math. Z.*, **77** (1961), 229—237.

Каш, Кнезер, Куппиш (Kasch F., Kneser M., Kuppisch H.)
[57] Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow Gruppe, *Arch. Math.*, 8 (1957), 320—321.

Каш, Марес (Kasch F., Mares E. A.)
[66] Eine Kennzeichnung semi-perfercter Moduln, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 525—529.

Келли, Диксон С. см. Диксон, Келли.

Кертес, редактор (Kertesz A., Editor)
[73] Associative Rings, Modules, and Radicals (Proceedings of the Colloquium at Keszthely, 1971), Janos Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London and Budapest, 1973.

Кёлер (Koehler A.)
[70] Quasi-projective covers and direct sums, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 655—658.

Кёте (Köthe G.)
[30a] Die Struktur der Ringe deren Restklassenring nach dem Radical vollständig reduzibel ist, *Math. Z.*, **32** (1930), 161—186.
[30b] Über maximale nilpotente Unterringe und Nilringe, *Math. Ann.*, **103** (1930), 359—363.
[31] Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum, *Math. Ann.*, **105** (1931), 15—39.
[35] Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit Hyperkomplexem Operatorenring, *Math. Z.*, **39** (1935), 31—44.

Кларк (Clark W. E.)
[67] Algebras of global dimension one with a finite ideal lattice, *Pacif. J. Math.*, (23), 3 (1967), 463—471.
[68] Murase's quasi-matrix rings and generalizations, *Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., U. Tokyo*, **18** (1968), 99—109.

Кларк, Бергман см. Бергман, Кларк.

Клатт, Леви (Klatt G. B., Levy L. S.)
[69] Pre-self-injective rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1969), 407—419.

Клейн (Klein A. A.)
[67] Rings nonembeddable in fields with multiplicative semigroups embeddable in groups, *J. Algebra*, **7** (1967), 100—125.
[69] Necessary conditions for embedding rings into fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **137** (1969), 141—151.
[72] A remark concerning embeddability of rings in fields, *J. Algebra*, **21** (1972), 271—274.

Клиффорд, Престон (Clifford A. H., Preston G. B.)
[72] Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, «Мир», М., 1972.

Кнезер, Каш, Куппиш см. Каш, Кнезер, Куппиш.

Кнус (Knus M. A.)
[70] Algèbres d'Azumaya et modules projectifs, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 372—383.

Коззенс (Cozzens J. H.)
[70] Homological properties of the ring of differential polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 75—79.
[72] Simple principal left ideal rings, *J. Algebra*, **23** (1972), 66—75.
[73] Twisted group rings and a problem of Faith, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 9 (1973), 11—19.

Коззенс, Джонсон (Cozzens J. H., Johnson J.)
[72] Some applications of differential algebra to ring theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31** (1972), 354—356.

Коззенс, Камилло см. Камилло, Коззенс.

Коззенс, Фейс (Cozzens J. H., Faith C.)
[75] Simple Noetherian Rings, Cambridge Tracts in Mathematics and Physics, Cambridge U. Press, Cambridge, 1975.

Колби (Colby R. R.)
[66] On indecomposable modules over rings with minimum conditions, *Pacif. J. Math.*, **19** (1966), 23—33.

Колби, Раттер (Colby R. R., Rutter E. A., Jr.)
[68] The structure of certain Artinian rings with zero singular ideal, *J. Algebra*, 8 (1968), 156—164.
[71] П-Flat and П-Projective modules, *Arch. Math.*, **22** (1971), 246—251.
[73] Generalizations of QF-3 algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1973), 371—385.

Колдуэлл (Caldwell W.)
[68] Hypercyclic rings, *Pacif. J. Math.*, **24** (1967), 29—44.

Колчин (Kolchin E.)
[48a] Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations, *Ann. of Math.*, (2), **49** (1948), 1—42.
[48b] On certain subgroups in the theory of algebraic matric groups, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 774—789.

Кон (Cohn P. M.)
[58] On a class of simple rings, *Mathematika*, 5 (1958), 103—117.
[61] On the embedding of rings in skew fields, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11** (1961), 511—530.
[66] Morita Equivalence and Duality, University of London, Queen Mary College, Mile End Road, London, Bookstore, 1966.
[67] Torsion modules over free ideal rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **17** (1967), 577—599.

[68] Универсальная алгебра, «Мир», М., 1968.
[71] Free ideal rings, Academic Press, New York, 1971.

Кон, Бергман см. Бергман, Кон.

Кон, Сонсяда (Cohn P. M., Saciada E.)
[67] An example of a simple radical ring, *J. Algebra*, 5 (1967), 373—377.

Коннел (Connell I.)
[63] On the group ring, *Canad, J. Math.*, 15 (1963), 650—685.

Корнер (Corner A. L. S.)
[63] Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3), 13 (1963), 687—710.
[69] Additive categories and a theorem of W. G. Leavitt, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 78—92.

Коулмен (Coleman D. B.)
[70] On group rings, *Canad. J. Math.*, 22 (1970), 249—254.

Коулмен, Инокс (Coleman D. B., Enochs E. E.)
[71] Polynomial invariance of rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27 (1971), 247—252.

Кох (Koh K.)
[65] A note on a self-injective ring, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), 29—32.

Кох, Лух (Koh K., Luh J.)
[70] On a finite dimensional quasi-simple module, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 (1970), 801—807.

Кошон (Cauchon G.)
[76] Les *T*-anneaux, la condition (*H*) de Gabriel et ses conséquences, *Comm. Algebra*, 4 (1976), 1—10.

Коэн Дж., Глюк (Cohen J. M., Gluck H.)
[70] Stacked bases for modules over principal ideal rings domains, *J. Algebra*, 14 (1970), 493—505.

Коэн И. (Cohen I. S.)
[50] Commutative rings with restructed minimum condition, *Duke Math. J.*, 17 (1950), 27—42.

Коэн И., Капланский (Cohen I. S., Kaplansky I.)
[51] Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules, *Math. Z.*, 54 (1951), 97—101.

Кронекер (Kronecker L.)
[1870] Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzhl idealer complexer Zahlen, Monatsber. Berl. Akad. 881—889 (1870) (see also Werke, Teubner, Leipzig, 1895, pp. 273—282).

Кроули, Йонссон (Crawley P., Jonsson B.)
[63] Direct decomposition of algebraic systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 541—547.
[64] Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems, *Pacif. J. Math.*, 14 (1964), 797—855.

Круазо, Лезьё см. Лезьё, Круазо.

Крузе, Прайс (Kruse R. L., Price D. T.)
[69] Nilpotent rings, Gordon and Breach, New York, 1969.

Крулль (Krull W.)
[24] Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe, *Sitzzungsber. Heidelberger Akad.*, 6 (1924).

[25] Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Z.*, 23 (1925), 161—196.
[26] Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, *Sitzungsber. Heidelberger Akad.*, 7 (1926), 1—32.
[28a] Zur Theorie der Allgemeinen Zahlringe, *Math. Ann.*, 99 (1928), 51—70.
[28b] Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen, *Math. Z.*, 28 (1928), 481—503.
[38] Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. reine u. angew. Math.*, 179 (1938), 204—226.
[48] Idealtheorie, Chelsea, New York, 1948.
[50] Jacobsonscher Radical und Hilbertscher Nullstellensatz, International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1950, Conference oin Algebra, pp. 56—64.
[51] Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, *Math. Z.*, 54 (1951), 354—387.

Кузманович (Kuzmanovitch J.)
[72] Localizations of Dedekind prime rings, *J. Algebra*, 21 (1972), 378—393

Кузманович, Фулберт см. Фулберт, Кузманович.

Куппиш (Kuppisch H.)
[59] Beiträge zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung, *J. reine u. angew. Math.*, 201 (1959), 100—112.
[75] Quasi-frobenius algebras of finite representation type Lecture Notes in Math., № 488, 1975, pp. 184—199.

Куппиш, Каш, Кнезер см. Каш, Кнезер, Куппиш.

Курош А. Г.
[35] Durchschnittsdartellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und sogenannten Dualgruppen, *Матем. сб.*, 42 (1935), 613—616.
[43] Изоморфизмы прямых разложений, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 7 (1943), 185—202.
[53] Радикалы колец и алгебр, *Матем. сб.*, нов. сер., 33 (1953), 13—26.

Куртер (Courter R. C.)
[65] The dimension of a maximal commutative subalgebra of K_n, *Duke Math. J.*, 32 (1965), 225—232.
[69] Finite direct sims of complete matrix rings over perfect completely primary rings, *Canad. J. Math.*, 21 (1969), 430—446.

Куршан (Kurshan R. P.)
[70] Rings whose cyclic modules have finitely generated socles, *J. Algebra*, 15 (1970), 376—386.

Кэртис (Curtis C. W.)
[54] The structure of non-semisimple algebras, *Duke Math. J.*, 21 (1954), 79—85.
[59] Quasi-Frobenius rings and Galois theory, *Ill. J. Math.*, 3 (1959), 134—144.

Кэртис, Джанс (Curtis C. W., Jans J. P.)
[65] On algebras with a finite number of indecomposable modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 122—132.

Кэртис Ч., Райнер И. (Curtis C. W., Reiner I.)
[69] Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.

Лабкин (Lubkin S.)
[60] Imbedding of abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 410—417.

Лазар (Lazard D.)
[64] Sur les modules plats, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 273—280.

Ламбек (Lambek J.)
[51] The immersibility of a semigroup into a group, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 34—43.
[63] On Utimi's ring of a quotients, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 363—370.
[65] On the ring of quotients of a noetherian ring, *Canad. Math. Bull.*, **8** (1965), 279—290.
[71a] Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, № 177, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
[71b] Кольца и модули, «Мир», М., 1971.
[72] Localization and completion, *J. Pure and Applied Algebra*, **1** (1972), 343—370.
[76] Localization at epimorphisms and quasi-injectives, *J. Algebra*, **38** (1976), 163—181

Ламбек, Михлер (Lambek J., Michler G. O.)
[73] The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring, *J. Algebra*, **25** (1973), 364—389.
[74] Localization of right Noetherian rings at semiprime ideals, *Canad. J. Math.*, **26** (1974), 1069—1084.
[76] On products of full linear rings, *Pub. Math. Debrecen*, (1976).

Ламбек, Раттрей (Lambek J., Rattray B.)
[73] Localization at injectives complete categories, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41** (1973), 1—9.
[75] Localizations and duality in additive categories, *Houston J. Math.*, **1** (1975), 87—100.

Ламбек, Финдлей см. Финдлей, Ламбек.

Ланский (Lanski C.)
[69] Nil subrings of Goldie rings are nilpotent, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 904—907.

Ларсен (Larsen M. D.)
[67] Equivalent conditions for a ring to be a *P*-ring and a note on flat overrings, *Duke Math. J.*, **34** (1967), 273—280.

Ларсен, Бойсен см. Бойсен, Ларсен.

Ларсен, Маккарти (Larsen M. D., McCarthy P. J.)
[71] Multiplicative Theory of Ideals, Academic Press, New York, 1971.

Лафон (Lafon J. P.)
[71a] Anneaux locaux commutatifs sur lesquels tout module de type fini est somme directe de modules monogenes, *J. Algebra*, **17** (1971), 575—591.
[71b] Sur les anneaux commutatifs d'Hermite et a diviseurs elementaires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **273** (1971), 964—966.
[73] Modules de présentation finie et de type fini sur un anneau arithmétique, *Symposia Math*, **11** (1973), 121—141.

Леви (Levy R. S.)
[63a] Unique direct sums of prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 64—76.
[63b] Torsionfree and divisible modules over non-integral domains, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 132—151.
[66a] Commutative rings whose homomorphic images are selfinjective, *Pacif. J. Math.*, **18** (1966), 149—153.

[66b] Decomposing pairs of modules, *Trans. Amer. Math. Soc*, **122** (1966), 64—80.
[72] Almost diagonal matrices over Dedekind domains, *Math. Z.*, **124** (1972), 89—99.

Леви, Клатт см. Клатт, Леви.

Левин (Levine J.)
[71] On the injective hulls of semisimple modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **155** (1971), 115—126.

Левицкий (Levitzki J.)
[31] Über nilpotente Unterringe, *Math. Ann.*, **105** (1931), 620—627.
[38] The equivalence of nilpotent elements of a semisimple ring, *Compositio Math.*, 5 (1938), 392—402.
[39] On rings which satisfy the minimum condition for right-hand ideals, *Compositio Math.*, **7** (1939), 214—222.
[43] On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 462—466.
[44] A characteristic condition for semiprimary rings, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 267—368.
[45a] Solution of a problem of G. Koethe, *Amer. A. Math.*, 67 (1945), 437—442.
[45b] On three problems concerning nil-rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 913—919.
[46] On a problem of A. Kurosch, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1946), 1033—1035.
[50] On multiplicative systems, *Compositio Math.*, 8 (1950), 76—80.
[51] Prime ideals and the lower radical, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 25—29.
[63] On nil subrings (Posthumous paper edited by S. A. Amitsur), *Israel J. Math.*, **1** (1963), 215—216.

Лезье, Круазо (Lesieur L., Croisot R.)
[59] Sur les anneaux premiers noetheriens à gauche, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **76** (1959), 161—183.

Ленаган (Lenagan T. H.)
[71] Bounded Asano orders are hereditary, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **3** (1971), 67—69.
[73] Nil radical of rings with Krull dimension, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **5** (1973), 307—311.
[74] Nil ideals in rings with finite Krull dimension, *J. Algebra*, 29 (1974), 77—87.

Ленг (Lang S.)
[68] Алгебра, «Мир», М., 1968.

Ленцинг (Lenzing H.)
[69] Endlich Präsentierbare Moduln, *Arch. Math.*, **20** (1969), 262—266.

Лёви (Loewy A.)
[05] Über die vollstädig reduciblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1905), 504—533.
[17] Über Matrizen und Differentialkomplexe I, II, and III, *Math. Ann.*, **78** (1917), 1—51, 343—368.

Лисснер (Lissener D.)
[61] Matrices over polynomial rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961), 285—301.

Литтлвуд (Littlewood D. E.)
[33] On the classification of algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), **35** (1933), 200—240.

Лоуренс (Lawrence J.)
[74] A singular primitive ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 (1974), 59—62.
[75a] The coefficient ring of a primitive group ring, *Canad. J. Math.*, **27** (1975), 489—494.
[75b] Infinite group rings, Ph. D. Thesis, Carleton U., Ottawa, 1975.

Лоуренс, Хендельмен см. Хендельмен, Лоуренс

Лунстра, Фукс см. Фукс, Лунстра

Лух, Кох см. Кох, Лух.

Маккарти (McCarthy P. J.)
[73] The ring of polynomials over a von Neumann regular ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 39 (1973), 253—254.

Маккарти, Ларсен см. Ларсен, Маккарти.

Маккой (McCoy N. H.)
[49] Prime ideals in general rings, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 823—833.
[55] Subdirect sum representations of prime rings, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 357—364.
[56] The prime radical of a polynomial ring, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 161—162.
[57a] A note on finite unions of ideals and subgroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 633—637.
[57b] Annihilators in polynomial rings, *Amer. Math. Monthly*, **64** (1957), 28—29.
[64] Theory of Rings, McMillan, New York, 1964.

Маккой, Браун см. Браун, Маккой.

Маккой, Монтгомери (McCoy N. H., Montgomery D.)
[37] A representation of generalized Boolean rings, *Duke Math. J*, 3 (1937), 455—459.

Макконнелл (McConnell J. C.)
[69] The Noetherian property in complete rings and modules, *J. Algebra*, **12** (1969), 143—153.
[74] Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **29** (1974), 453—484.
[75] Representations of solvable Lie Algebras: Twisted group rings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4), **2** (1975), 157—178.

Маклейн (MacLané S.)
[50] Duality in groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485—516,
[66] Гомология, «Мир», М., 1966.

Мальцев А. И.
[36] On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.*, **113** (1936), 686—691. (См. также: Мальцев А. И., Избранные труды, т. I, «Наука», М., 1970.)
[42] О представлении алгебры в виде прямой суммы радикала и полупростой подалгебры, *ДАН СССР*, **36** (1942), 42—45.
[49] О бесконечных разрешимых группах, *ДАН СССР*, **67** (1949), 23—25.
[51] О некоторых классах бесконечных разрешимых групп, *Матем. сб.* (н. с.), **28** (1951), 567—588.

Марес (Mares E. A.)
[63] Semiperfect modules, *Math. Z.*, 82 (1963), 347—360.

Марес, Каш см. Каш, Марес.

Масаикэ (Masaike K.)
[70a] Endomorphism rings of modules over orders in Artinian rings, *Proc. Japan Acad.*, **46** (1970), 89—93.
[70b] Remarks on results of Zelmanowitz, *Sci. Rpts. Tokyo Kyoiku Daigaku*, Sec. A, **10** (1970), 47—48.
[71a] On quotient rings and torsionless modules, *Sci. Rpts. Tokyo Kyoiku Daigaku*, Sec. A, **11** (1971), 26—31.
[71b] Quasi-Friebenius maximal guotient rings, *Sci. Rpts. Tokyo Kyoiku Daigaku*, **11** (1971), 1—5.

Матлис (Matlis E.)
[58] Injective modules over noetherian rings, *Pacif. J. Math.*, 8 (1958), 514—528.
[59] Injective modules over Prüfer rings, *Nagoya Math. J.*, **15** (1959), 57—69.
[60a] Divisible modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 385—392.
[60b] Modules with descending chain condition, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 495—508.
[66] Decomposable modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966), 147—179.

Митчелл (Mitchell B.)
[65] Theory of Categories, Academic Press, New York, 1965.
[68a] On the dimension of objects and categories I. Monoids, *J. Algebra*, **9** (1968), 314—340.
[68b] On the dimension of objects and categories II. Finite oredered sets, *J. Algebra*, 9 (1968), 341—368.
[72] Rings with several objects, *Advances in Math.*, 8 (1972) 1—161.

Михлер (Michler G. O.)
[66] On maximal nilpotent subrings of right Noetherian rings, *Glasgow Math. J.*, 8 (1966), 89—101.
[69a] On quasi-local noethirian rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 222—224.
[69b] Structure of semiperfect hereditary Noetherian rings, *J. Algebra*, **13** (1969), 327—344.
[69c] Idempotent ideals in perfect rings, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 301—309.
[69d] Asano orders, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **19** (1969), 421—443.

Михлер, Вильямайор (Michler G. O., Villamayor O. E.)
[73] On rings whose simple modules are injective, *J. Algebra*, **25** (1973), 185—201.

Михлер, Ламбек см. Ламбек, Михлер.

Миясита (Miyashita Y.)
[65] On quasi-injective modules, A generalization of the theory of completely reducible modules, *J. Fac. Sci. Hokkaido U.*, 18 (1965), 158—187.

Монк (Monk G. S.)
[72] A characterization of exchange rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 349—353.

Монтгомери, Маккой см. Маккой, Монтгомери.

Морита (Morita K.)
[56] On group rings over a modular field which possess radicals experiment expressible as a principal ideals, *Sci. Rpts. Tokyo Kyoiku Daigaku*, 4 (1956), 155—172.

[58] Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rpts. Tokyo Kyoiku Daigaku*, 6 (1958), 83—142.
[62] Category-isomorphisms and endomorphism rings of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 451—469.
[66] On S-rings in the sense of F. Kasch, *Nagoya Math. J.*, 27 (1966), 688—695.
[67] The endomorphism ring theorem for Frobenius extensions, *Math. Z.*, **102** (1967), 385—404.
[69] Duality in QF-3 rings, *Math. Z.*, **108** (1969), 237—252.
[70, 71a] Localizations in categories of modules I, III, *Math. Z.*, **114** (1970), 121—144; **119** (1971), 313—320.
[71b] Flat modules, injective modules, and quotient rings, *Math. Z.*, **120** (1971), 25—40.

Морита, Кавада, Тахикава (Morita K., Kawada Y., Tachikawa H.)
[57] On injective modules, *Math. Z.*, 68 (1957), 217—218.

Морита, Тахикава (Morita K., Tachikawa H.)
[56] Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings, *Math. Z.*, **65** (1956), 414—418.

Мосс, Джин см. Джин, Мосс.

Мостов (Mostow G. D.)
[56] Fully reducible subgroups of algebraic groups, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 200—221.

Мохамед (Mohamed S. H.)
[69] A study of q-rings, Ph. D. Thesis, U. of Delhi, 1969.
[70a] q-rings with chain conditions, *J. Lond. Math. Soc.*, (2), 2 (1970), 455—460.
[70b] Semilocal q-rings, *Indian J. pure and appl. math.*, **1** (1970), 419—424.

Мохамед, Джейн, Сингх см. Джейн, Мохамед, Сингх.

Мурасэ (Murase I.)
[62] On the extension of Wedderburn's structure theorem, *Scientific Papers of the College of General Education U. of Tokyo*, 12 (1962), 1—16.
[63, 64] On the structure of generalized uniserial rings I, *Scientific Papers of the College of General Education U. of Tokyo*, 13 (1963), 1—22; II, ibid., 13 (1963), 131—158; III, ibid., 14 (1964), 12—25.
[65] Generalized uniserial group rings I, *Scientific Papers of the College of General Education U. of Tokyo*, **15** (1965), 15—28; II, ibid., **15** (1965), 111—128.

Мьюборн, Уинтон (Mewborn A. C., Winton C. N.)
[69] Orders in self-injective semiperfect rings, *J. Algebra*, 13 (1969), 5—9.

Мюллер (Müller B. J.)
[64, 65] Quasi-Frobenius-Erweiterungen I, II, *Math. Z.*, 85 (1964), 345—368; 88 (1965), 380—409.
[70a] On semiperfect rings, *Ill. J. Math.*, 14 (1970), 464—467.
[70b] Linear compactness and Morita duality, *J. Algebra*, **16** (1970), 60—66.
[71] Duality theory for linearly topologized modules, *Math. Z.*, 119 (1971), 63—74.
[74] The quotient category of a Morita context, *J. Algebra*, 28 (1974), 389—407.

Нагао, Накаяма (Nagao H., Nakayama T.)
[53] On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules, *Math. Z.*, 59 (1953), 164—170.

Нагао, Эйленберг, Накаяма см. Эйленберг, Нагао, Накаяма.

Нагата (Nagata M.)
[50] On the theory of semilocal rings, *Proc. Japan Acad.*, 26 (1950), 131—140.
[51a] Note some studies on semilocal rings, *Nagoya Math. J.*, 2 (1951), 23—30.
[51b] Note on subdirect sums of rings, *Nagoya Math. J.*, 2 (1951), 49—53.
[52] Nilpotency of nil-algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 4 (1952), 296—301.
[60] On the fourteenth problem of Hilbert, Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge U. Press, 1960, pp. 459—462.
[62] Local Rings, Interscience, New York, 1962.

Накаяма (Nakayama T.)
[39, 41] On Frobeniusean algebras I, II, *Ann. of Math.*, 40 (1939), 611—633; 42 (1941), 1—21.
[40a] Note on uniserial and generalized uniserial rings, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 16 (1940), 285—289.
[40b] Algebras with antiisomorphic left and right ideal lattices, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1940), 53—56.
[42] On Frobeniusean algebras III, *Japan J. Math.*, 18 (1942), 49—65.
[50a] Supplementary remarks on Frobeniusean algebras II, *Osaka Math. J.*, 2 (1950), 7—12.
[50b] On two topics in the structural theory of rings (Galois theory and Frobenius algebras), Proc. ICM, Vol. II, 1950, pp. 49—54.

Накаяма, Джанс см. Джанс, Накаяма.

Накаяма, Икеда см. Икеда, Накаяма.

Накаяма, Нагао см. Нагао, Накаяма.

Накаяма, Эйленберг см. Эйленберг, Накаяма.

Накаяма, Эйленберг, Нагао см. Эйленберг, Нагао, Накаяма.

Наркиевич (Narkiewicz W.)
[74] Algebraic Numbers, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1974.

Настасеску (Năstăsescu C.)
[71] Quelques remarques sur la dimension homologique des anneaux, Elements reguliers, *J. Algebra*, 19 (1971), 470—485.

Настасеску, Попеску (Năstăsescu C., Popescu N.)
[70] On the localization ring of a ring, *J. Algebra*, 15 (1970), 41—56.

фон Нейман (von Neumann J.)
[36a] On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), 22 (1936), 707—713.
[36b] Examples of continuous geometries, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (USA), 22 (1936), 101—108.
[60] Continuous Geometry, Princeton Mathematical Series, N 25, Princeton U., Princeton, N.J., 1960.

Нерославский, Залесский см. Залесский, Нерославский.

Несбитт, Артин Э., Тролл см. Артин Э., Несбитт, Тролл.

Несбитт, Брауэр см. Брауэр, Несбитт.

Несбитт, Тролл (Nesbitt C. J., Thrall R. M.)
[46] Some ring theorems with applications to modular representations, *Ann. of Math.* 47 (1946), 551—567.

Нёбелинг (Nobeling G.)
[68] Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker, *Invent. Math.*, 6 (1968), 41—55.

Нётер (Noether E.)
[21] Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, **83** (1921), 24—66.
[29] Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Z.*, **30** (1929), 641—692.

Норскотт (Northcott D. G.)
[60] Homological Algebra, Cambridge U. Press, Cambridge, England, 1960.
[62] The centre of a hereditary local ring, *Glasgow Math. Assoc.*, 5 (1962), 101—102.

Оберст (Obesrt U.)
[70] Duality theory for Grothendieck categories and linearly compact rings, *J. Algebra*, **15** (1970), 473—542.

Олес (Oles F. J.)
[70] Charaсterizations of bounded hereditary Noetherian prime rings, Ph. D. Theisis, Cornell U., Ithaca, 1970.

О'Мира (O'Meara K. C.)
[73] Primeness of right orders in full linear rings, *J. Algebra*, **26** (1973), 172—184.
[74] Intrinsic extensions of prime rings, *Pacif. J. Math.*, **51** (1974), 257—269.
[75] Right orders in full linear rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **203** (1975), 299—318.

Онодера (Onodera T.)
[68] Über Kogeneratoren, *Arch. Math.*, **19** (1968), 402—410.
[71] Eine Bemerkung über Kogeneratoren, *Proc. Japan Acad.*, **47** (1971), 140—141.
[72] Linearly compact modules and cogenerators, *J. Fac. Sci. Hokkaido* U. Ser. I, **22** (1972), 116—125.
[73a] Linearly compact modules and cogenerators II, *Hokkaido Math. J.*, 2 (1973), 243—251.
[73b] Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren, *Hokkaido Math. J.*, 2 (1973), 69—83.

Оре (Ore O.)
[31] Linear equations in non-commutative fields, *Ann. of Math.*, **32** (1931), 463—477.
[33a] Theory of non-commutative polynomilas, *Ann. of Math.*, **34** (1933), 480—508.
[33b] On a special class of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 559—584.
[35, 36] On the foundations of abstract algebra I, II, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 406—437; ibid., **37** (1936), 265—292.
[36] Direct decompositions, *Duke Math. J.*, 2 (1936), 581—596.

Орнстейн (Ornstein A. J.)
[67] Rings with restricted minimum condition, Rutgers Ph. D. Thesis, 1967.
[68] Rings with restricted minimum condition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 1145—1150.

Ософская (Osofsky B. L.)
[64a] On ring properties of injective hulls, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 405—413.

[64b] Rings all of whose finitely generated modules are injective, *Pacif. J. Math.*, **14** (1964), 646—650.
[65] A counter-example to a lemma of Skorhjakov, *Pacif. J. Math.*, **15** (1965), 985—987.
[66a] Cyclic injective modules of full linear rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 247—253.
[66b] A generalization of quasi-Frobenius rings, *J. Algebra*, 4 (1966), 373—387; Erratum, 9 (1968), 120.
[68a] Endomorphism rings of quasi-injective modules, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 895—903.
[68b] Noncommutative rings whose cyclic modules have cyclic injective hulls, *Pacif. J. Math.*, **25** (1968), 331—340.
[68c] Homological dimension and the continuum hypothesis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 217—230.
[68d] Upper bounds on homological dimensions, *Nagoya Math. J.*, **32** (1968), 315—322.
[68e] Erratum, *J. Algebra*, 9 (1968), 120 (see Osofsky [66b]).
[69] A commutative local ring with finite divisors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 377—385.
[70] Homological dimension and cardinality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **151** (1970), 641—649.
[71a] Homological Dimensions of Modules, Amer. Math. Soc., Providence, 1971.
[71b] Loewy length of perfect rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 352—354.
[71c] On twisted polynomial rings, *J. Algebra*, 18 (1971), 597—607.
[74] The subscript of $\aleph_n$ projective dimension, and the vanishing of $\underleftarrow{\lim}^{(n)}$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 8—26.

Папп (Papp Z.)
[59] On algebraically closed modules, *Pub. Math. Debrecen*, (1959), 311—327.

Парайгис (Pareigis B.)
[66] Radikale und kleine Moduln, Sitzungsber, Bayer. Akad. Wiss. München, math.-naturwiss. K1, 1965, München, 1966, pp. 185—199.
[71] When Hopf algebras are Frobenius algebras, *J. Algebra*, 18 (1971), 588—596.

Пассман (Passman D. S.)
[62] Nil ideals in group rings, *Mich. Math. J.*, 9 (1962), 375—384.
[71] Infinite group rings, Marcel Dekker, New York, 1971.
[72] On the ring of quotients of a group ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33** (1972), 221—225.
[73] Primitive group rings, *Pacif. J. Math.*, **47** (1973), 499—506.
[74] Advances in group rings, *Israel. J. Math.*, 19 (1974), 67—107.
[77] The algebraic structure of group rings, N. Y., 1977.

Пассман, Хэмптон см. Хэмптон, Пассман.

Паттерсон (Patterson E. M.)
[61—62] On the radicals of rings of row-finite matrices, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, **A66** (1961—1962), 42—46.

Перлис (Perlis S.)
[42] A characterization of the radical of an algebra, *Bull, Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 128—132.

Пирс, Бьюмонт см. Бьюмонт, Пирс.

Познер (Posner E. C.)
[60a] Prime rings satisfying a polynomial identity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 180—183
[60b] Differentiably simple rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 337—343.

Понтрягин Л.
[72] Непрерывные группы, «Наука», М., 1972.

Попеску, Настасеску см. Настасеску, Попеску.

Прайс, Крузе см. Крузе, Прайс.

Престон, Клиффорд см. Клиффорд, Престон.

Прочези (Procesi C.)
[63] On a theorem of Goldie concerning the structure of prime rings with maximal condition, *Acad. Naz. Lincei Rend.*, **34** (1963), 372—377 (in Italian).
[64] Sugli anelli principali ed un teorema di Goldie, *Acad. Naz. Lincei Rend.*, **36** (1964), 804—808.
[65] On a theorem of Faith and Utumi, *Rend. Math. e. Appl.*, **24** (1965), 346—347 (in Italian).
[66] The Burnside problem, *J. Algebra*, **4** (1966), 421—425.
[67a] Non commutative Jacobson rings, *Scuola Norm. Sup. Pisa*, **21** (1967), 381—390.
[67b] Non commutative affine rings, *Atti Acad. Naz. Lincei* VII (1967), 239—255.

Прочези, Амицур см. Амицур, Прочези.

Прочези, Смолл (Procesi C., Small L. W.)
[65] On a theorem of Goldie, *J. Algebra*, **2** (1965), 80—84.
[68] Endomorphism rings of modules over PI-algebras, *Math. Z.*, **106** (1968), 178—180.

Прюфер (Prüfer H.)
[23] Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen, *Math. Z.*, **17** (1923) 35—61.
[25] Theorie der Abelschen Gruppen II, Ideale Gruppen, *Math. Z.*, **22** (1925), 222—249.

Райли (Riley J. A.)
[62] Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 177—201.
[65] Reflexive ideals in maximal orders, *J. Algebra*, **2** (1965), 451—465.

Райнер (Reiner I.)
[61] The Krull-Schmidt theorem for integral representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 365—367.
[62] Failure of the Krull-Schmidt theorem for integral representations, *Mich. Math. J.*, **9** (1962), 225—231.
[70] A survey of integral representation theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 159—227.
[75] Maximal orderes, London, Acad. Press, 1975.

Райнер, Кэртис см. Кэртис, Райнер.

Райнхарт (Rinehart G. S.)
[62] Note on the global dimension of a certain ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 341—346.

Райтен, Ауслендер см. Ауслендер, Райтен.

Райтен, Фуллер см. Фуллер, Райтен.

Рангасвами (Rangaswamy K. M.)
[73] Abelian groups with self-injective endomorphism ring. Proc. Second Internat. Conference, Theory of Groups, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, pp. 595—604.

Рангасвами, Фукс см. Фукс, Рангасвами

Рант (Rant W. H.)
[72] Left perfect rings that are right perfect and a characterization of Steinitz rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (1972), 81—84.

Рао (Rao M. L. R.)
[72] Azumaya, semisimple, and ideal algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972).
[73] Semisimple algebras and a cancellation law, Preprint, E. T. H. Zürich, 1973.

Ратрей, Ламбек см. Ламбек, Ратрей.

Раттер, Колби см. Колби, Раттер.

Рафаэль (Raphael R.)
[74] Rings which are generated by their units, *J. Algebra*, **28** (1974), 199—205.

Ремак (Remak R.)
[11] Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *J. reine u. angew. Math.* (*Crelle's Journal*), **139** (1911), 293—308.

Рено (Renault G.)
[70] Sur les anneaux de groupes, Preprint, Faculté des Sciences, 86-Poitiers, Vienne, 1970.

Рено, Кайо см. Кайо, Рено.

Рентшлер (Rentschler R.)
[66] Eine Bemerkung zu Ringen mit Minimalbedingung für Hauptideale, *Arch. Math.*, **17** (1966), 298—301.

Рентшлер, Боро, Габриель см. Боро, Габриель, Рентшлер

Рингдал, Амдал см. Амдал, Рингдал.

Рингель (Ringel C. M.)
[74] Commutative QF-1 rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42** (1974), 365—368.

Рингель, Длаб см. Длаб, Рингель

Рингель, Тахикава (Ringel C. M., Tachikawa H.)
[75] QF-3 rings, *J. reine u. angew. Math.*, **272** (1975), 49—72

Риффель (Rieffel M. A.)
[65] A general Wedderburn theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **54** (1965), 1513.

Ричман (Richman F.)
[65] Generalized quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 794—799.

Ричман, Уокер Э. (Richman F., Walker E. A.)
[72] Modules over PID's that are injective over their endomorphism rings, Ring Theory, Academic Press, 1972.

Робсон (Robson J. C.)
[67a] Artinian quotient rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **17** (1967), 600—616.
[67b] Pri-rings, and Ipri-rings, *Quaterly J. Math.*, **18** (1967), 125—145.
[68] Non-commutative Dedekind rings, *J. Algebra*, 9 (1968), 249—265.
[71] A note on Dedekind rings, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 3 (1971), 42—46.
[72a] Idealizers and hereditary Noetherian prime rings, *J. Algebra*, **22** (1972), 45—81.
[72b] Idealizer Rings, in: Ring Theory, Academic Press, New York, 1972, pp. 309—317.
[74] Decompositions of Noetherian rings, *Comm. Algebra*, 4 (1974), 345—349.

Робсон, Айзенбуд см. Айзенбуд, Робсон.

Робсон, Гордон см. Гордон, Робсон.

Робсон, Гриффитс см. Гриффитс, Робсон.

Роггенкамп (Roggenkamp K. W.)
[72] An extension of the Noether-Deuring theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31** (1972), 423—426.

Розенберг (Rosenberg A.)
[52] Subrings of simple rings with minimal ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 115—138.
[54] Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linaer transformations, *Math. Z.*, **61** (1954), 150—159.
[58] The structure of the infinite general linear group, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 278—294.
[61] Blocks and centres of group algebras, *Math. Z.*, **76** (1961), 209—216.

Розенберг, Зелинский (Rosenberg A., Zelinsky D.)
[59] On the finiteness of the injective hull, *Math. Z.*, **70** (1959) 372—380.
[61] Annihilators, *Portugalia Math.*, **20** (1961), 53—65.

Розенберг, Чейз, Харрисон см. Чейз, Харрисон, Розенберг.

Розенберг, Эйленберг, Зелинский см. Эйленберг, Розенберг, Зелинский.

Розенблад (Rosenblade J. E.)
[73] Group rings of polycyclic groups, *J. Pure and Applied Algebra*, **3** (1973), 307—328.

Ройтер А. В.
[68] Неограниченность размерности неразрешимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений, *Изв. АН СССР*, сер. мат., **32** (1968), 1275—1282.

Роуен (Rowen L. H.)
[74] Maximal quotient rings of semiprime PI-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **196** (1974), 127—135.

Ру (Roux B.)
[72] Sur les anneaux de Köthe, Preprint, Dept. Math., Montpelier U., Montpelier, 1972.

Саи, Харада см. Харада, Саи.

Самюэль (Samuel P.)
[60] Un exemple d'anneau factoriel, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, **15** (1960), 1—4.

Сандерсон (Sanderson D. F.)
[65] A generalization of divisibility and injectivity in modules, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), 505—513.

Сандомирский (Sandomierski F.)
[64] Relative injectivity and projectivity, Ph. D. Thesis, Penna, State U., U. Park, 1964.
[67] Semisimple maximal quotient rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **128** (1967), 112—120.
[68] Nonsingular rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 225—230.
[70] Some examples of right self-injective rings which are not left self-injective, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26 (1970), 244—245.
[72a] Modules over the endomorphism rings of a finitely generated projective module, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31** (1972), 27—31.
[72b] Linearly compact modules and local Morita duality, Ring Theory, Academic Press, New York, 1972.

Сас (Szász F.)
[60, 61, 63] Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I, *Publ. Math.*, 7 (1960), 54—64; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 417—440; III, ibid., **14** (1963), 447—461.
[61a] Remerkungen zu assoziativen Hauptidealringen, *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.*, 64 (1961), 577—583.
[61b] Die abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtideale erfüllen, *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 150—153.

Своковский, Феллер см. Феллер, Своковский

Серр (Serre J.-P.)
[55] Sur la dimension homologique des anneaux et des modules Noethériens, Proc. Internat. Sympos. Algebraic Number Theory, Tokyo, 1955.
[68] Corps Locaux (Second Edition), A.S.I. № 1296, Hermann, Paris, 1968.

Сешадри (Seshadri C.)
[58] Triviality of vector bundles over the affine space K^2, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 44 (1958), 456—458.

Силвер (Silver L.)
[67] Noncommutative localizations and applications, *J. Algebra*, 7 (1967), 44—76.

Сингх (Singh S.)
[74] Quasi-injective and quasi-projective modules hereditary Noetherian prime rings, *Canad. J. Math.*, **26** (1974), 1173—1185.
[75] Modules over hereditary Noetherian prime rings, *Canad. J. Math.*, **27** (1975), 867—883.

Сингх, Вазан (Singh S., Wasan K.)
[70] Pseudo-injective modules over commutative rings, *J. Indian Math. Soc.*, 34 (1970), 61—66.

Сингх, Джейн (Singh S., Jain S. K.)
[67] On pseudo-injective modules and self-pseudo-injective rings, *J. Math. Sci. India*, 2 (1967), 23—31.

Сингх, Джейн, Мохамед см. Джейн, Мохамед, Сингх.

Слоувер (Slover R.)
[69] The radical of row finite matrices, *J. Algebra*, **12** (1969), 345—359.

Смит (Smith M.)
[71] Group algebras, *J. Algebra*, **18** (1971), 477—499.

Смолл (Small L. W.)
[65] An example in Noetherian rings, *Proc. Nat. Sci. USA*, **54** (1965), 1035—1036.
[66a] Hereditary rings, *Proc. Acad. Nat. Sci. USA*, **55** (1966), 25—27.
[66b] Orders in Artinian rings, *J. Algebra*, **4** (1966), 13—41; corrections and addendum, *ibid.*, **4** (1966), 505—507.
[66c] One some questions in Noethreian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 853—857.
[67] Semihereditary rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 656—658.
[68a] Orders in Artinian rings II, *J. Algebra*, **9** (1968), 266—273.
[68b] A change of rings theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 661—666.
[69] The embedding problem for Noethreian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 147—148.
[71] Localization in PI-rings, *J. Algebra*, **18** (1971), 269—270.
[73] Prime ideals in Noethreain PI-rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 421—422.

Смолл, Голди см. Голди, Смолл

Смолл, Прочези К. см. Прочези, Смолл.

Смолл, Херстейн см. Херстейн, Смолл.

Снайдер (Snider R. L.)
[74] Group algebras whose simple modules are finite dimensional over the commuting rings, *Comm. Algebra*, **2** (1974), 15—25.

Снайдер, Фишер см. Фишер, Снайдер.

Снайдер, Форманек см. Форманек, Снайдер.

Снаппер (Snapper E.)
[50, 51, 52] Completely primary rings I—IV, *Ann. of Math.*, **52, 53, 55** (1950, 1951, 1952), 25—42, 207—234, 46—64.

Сонсяда, Кон см. Кон, Сонсяда.

Сринивасан (Srinivasan B.)
[60] On the indecomposable representations of certain class of groups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **10** (1960), 497—513.

Сторрер (Storrer H. H.)
[69a] A characterization of Prüfer domains, *Canad. Bull. Math.*, **12** (1969), 809—812.
[69b] A note on quasi-Frobenius rings and ring epimorphisms, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 287—292.
[71a] Rational extensions of modules, *Pacif. J. Math.*, **38** (1971), 785—794.
[71b] Rings of quotients of perfect rings, *Math. Z.*, **122** (1971), 151—165.
[73] Epimorphic extensions of non-commutative rings, *Comment. Math. Helv.*, **48** (1973), 72—86.

Стоун (Stone M. H.)
[36] The theory of representations for Boolean algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 37—111.

Стринголл (Stringall R. W.)
[71] The categories of p-rings are equivalent, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29** (1971), 229—235.

Струкер (Strooker J. R.)
[66] Lifting projectives, *Nagoya Math., J.*, **27** (1966), 747—751.

Суон (Swan R.)
[59] Projective modules over finite groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 365—367.
[60] Induced representations and projective modules, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 552—578.
[62] Projective modules over rings and maximal orders, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 55—61.
[63] The Grothendieck ring of a finite group, *Topology*, **2** (1963), 85—110.
[68] Algebraic K-Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 76, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

Супруненко Д. А.
[58] Разрешимые нильпотентные линейные группы, Минск, 1958.
[72] Группы матриц, «Наука», М., 1972.

Талинтайр (Talintyre T. D.)
[63] Quotient rings of rings with maximal condition for right ideals, *J. Lond. Math. Soc.*, **38** (1963), 439—450.
[66] Quotient rings with minimum condition on right ideals, *J. Lond. Math. Soc.*, **41** (1966), 141—144.

Тафт (Taft E. J.)
[57] Invariant Wedderbuirn factors, *Ill. J. Math.*, **1** (1957), 565—573.
[64] Orthogonal conjugacies in associative and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 18—29.
[68] Cohomology of groups of algebra automorphisms, *J. Algebra*, **10** (1968), 400—410.

Тахикава (Tachikawa H.)
[58] Duality theirem of character modules for rings with minimum condition, *Math. Z.*, **68** (1958), 479—487.
[59] On rings for which every indecomposable right module has a unique maximal submodule, *Math. Z.*, **71** (1959), 200—222.
[60] A note on algebras of unbounded representation type, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960).
[61] On algebras of which every indecomposable representation has an irreducible one, as the top or bottom Loewy constituent, *Math. Z.*, **75** (1961), 215—227.
[62] A characterization of QF-3 algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 101—103.
[69a] On splitting of module categories, *Math. Z.*, **111** (1969), 145—150.
[69b] A generalization of quasi-Frobenius rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 471—476.
[70a] Double centarlizers and dominant dimensions, *Math. Z.*, **116** (1970), 79—88.
[70b] On left QF-3 rings, *Pacif. J. Math.*, **32** (1970), 255—268.
[71] Localization and Artinian quotient rings, *Math. Z.*, **119** (1971), 239—253.
[73] Quasi-Frobenius Rings and Generalizations of QF-3 and QF-1 Rings, Lectures Notes in Mathematics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

Тахикава, Морита см. Морита, Тахикава.

Тахикава, Морита, Кавада см. Морита, Кавада, Тахикава.

Тахикава, Рингель см. Рингель, Тахикава.

Тейхмюллер (Teichmüller O.)
[37] Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper, *J. reine u. angew. Math.*, **176** (1937) 140—152.

Тепли (Teply M. L.)
[70] Homological dimension and splitting torsion theories, *Pacif. J. Math.*, **34** (1970), 193—205.
[71] Torsionfree projective modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 29—34.

Тепли, Фулберт см. Фулберт, Тепли.

Титс (Tits J.)
[72] Free subgroups in linear groups, *J. Algebra*, **20** (1972), 250—270.

Тольская Т. С.
[70] Когда все циклические модули существенно вкладываются в свободные? *Матем. исслед.*, **5** (1970), 187—182.

Тролл (Thrall R. M.)
[48] Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 173—183.

Тролл, Артин Э., Несбитт см. Артин Э., Несбитт, Тролл.

Тролл, Несбитт см. Несбитт, Тролл.

Узков А. И.
[63] О разложимости модулей над коммутативными кольцами в прямые суммы циклических подмодулей, *Матем. сб.*, **62** (1963), 469—475.

Уинтон, Мьюборн см. Мьюборн, Уинтон.

Уокер К. (Walker C. L.)
[66] Relative homological algebra and abelian groups, *Ill. J. Math.*, **10** (1966), 186—209.

Уокер Э., Ричман см. Ричман, Уокер Э.

Уокер Э., Фейс см. Фейс, Уокер Э.

Уонг, Джонсон (Wong E. T., Johnson R. E.)
[59] Self-injective rings, *Canad. Math. Bull.*, **2** (1959), 167—173.

Уонг, Джонсон см. Джонсон, Уонг

Уорфилд (Warfield R. B., Jr.)
[69a] Purity and algebraic compactness for modules, *Pacif. J. Math.*, **28** (1969), 699—719.
[69b] Decompositions of injective modules, *Pacif. J. Math.*, **31** (1969), 263—276.
[69c] A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969), 460—465.
[70] Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25** (1970), 167—172.
[72a] Rings whose modules have nice decompositions, *Math. Z.*, **125** (1972), 187—192.
[72b] Exchange rings and decompositions of modules, *Math. Ann.*, **199** (1972), 31—36.
[75] Serial rings and finitely presented modules, *J. Algebra*, **37** (1975), 187—222.

Утуми (Utumi Y.)
[56] On quotient rings, *Osaka Math. J.*, **8** (1956), 1—18.
[60a] On continuous regular rings and semi-simple selfinjective rings, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 597—605.
[60b] A remark on quasi-Frobenius rings, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 15—17.
[61] On continuous regular rings, *Canad. Math. Bull.*, **4** (1961), 63—69.
[63a] A theorem of Levitzki, *Math. Assoc. of Amer. Monthly*, **70** (1963), 286.
[63b] On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 141—147.
[63c] A note on rings of which any one-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 287—288.
[63d] Prime J-rings with uniform one-sided ideals, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 583—596.
[65] On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 158—173.
[66] On the continuity and self-injectivity of a complete regular ring, *Canad. J. Math.*, **18** (1966), 404—412.
[67] Self-injective rings, *J. Algebra*, **6** (1967), 56—64.

Утуми, Фейс см. Фейс, Утуми.

Уэплс, Артин Э. см. Артин Э., Уэплс.

Фаркас (Farkas D.)
[73] Self-injective group rings, *J. Algebra*, **25** (1973), 313—315.

Фейс (Faith C.)
[59, 61] Rings with minimum condition on principal ideals I, II, *Arch. Math.*, **10** (1959), 327—330; **12** (1961), 179—181.
[60] Algebraic division ring extensions, *Proc. Amer. Math.* Soc., **11** (1960), 43—53.
[61] Radical extensions of rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 274—283.
[62] Strongly regular extensions of rings, *Nagoya Math. J.*, **20** (1962), 169—183.
[64] Noetherian simple rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 730—731.
[65] Orders in simple Artinian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 61—64.
[66a] Rings with ascending condition on annihilators, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 179—191.
[66b] On Köthe rings, *Math. Ann.*, **164** (1966), 207—212.
[67a] Lectures on injective modules and quotient rings, Lecture Notes in Mathematics, vol, 49, Springer, New York-Heidelberg-Betlin, 1967.
[67b] A general Wedderburn theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 65—67.
[71a] The correspondence theorem and the structure of Noetherian simple rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 338—343.
[71b] Orders in semilocal rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 960—962.
[71c] Big decompositions of modules, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, **18** (1971), 400.
[72a] A correspondence theorem for projective modules, and the structure of simple Noetherian rings, *Symposium Matematica*, **8** (1972), 309—345.
[72b] Modules finite over endomorphism ring, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 246, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
[72c] Galois subrings of Ore domains are Ore domains, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 1077—1082.

[73] When are proper cyclics injective? *Pacif. J. Math.*, 45 (1973), 97—112.
[74] On the structure of indecomposable injective modules, *Comm. Algebra*, 2 (1974), 559—574.
[75a] On a theorem of Chatters, *Comm. Algebra*, 3 (1975), 169—184.
[75b] Projective ideals in Cohen rings, *Archiv Math.*, 26 (1975), 588—594.
[75c] Embedding modules in projectives, Preprint, Rutgers U., New Brunswick, N.J., 08903, 1975.
[76a] On hereditary rings and Boyle's conjecture, Archiv Math., 27 (1976), 113—119.
[76b] Injective cogenerator rings, and Tachikawa's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 60 (1976), 25—30.
[76c] Semiperfect Prüfer rings and FPF rings, *Isarel J. Math.*, 27 (1976), 113—119.
[76d] Characterizations of rings by faithful modules, Lecture Notes, Math. Dept. Israel Institute of Technology (TECHNION), Haifa, 1976.

Фейс, Коззенс см. Коззенс, Фейс.

Фейс, Уокер Э. (Faith C., Walker E. A.)
[67] Direct sum representations of injective modules, *J. Algebra*, 5 (1967), 203—221.

Фейс, Утуми (Faith C., Utumi Y.)
[64a] Quasi-injective modules and their endomorphism rings, *Arch. Math.*, 15 (1964), 166—174.
[64b] Intrinsic extensions of rings, *Pacif J. Math.*, 14 (1964), 505—512.
[65a] On Noetherian prime trings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 53—60.
[65b] Maximal quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), 1084—1089.

Фейс, Чейз см. Чейз, Фейс.

Феллер, Своковский (Feller E. H., Swokowski E. W.)
[61a] Reflective N-prime rings with the ascending condition, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 99 (1961), 264—271; corrections *ibid.*, p. 555.
[61b] Reflective rings with the ascending chain condition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 651—653.
[64] The ring of endomorphisms of tosionfree module, *J. Lond. Math. Soc.*, 39 (1964), 41—42.

Филдс (Fields K. L.)
[70] On the global dimension of skew polynomial rings, *J. Algebra*, 14 (1970), 528—530.

Финдлей, Ламбек (Findley G. D., Lambek J.)
[58] A generalized ring of quotients I, II, *Canad. Math. Bull.*, 1 (1958), 77—85, 155—167.

Фиттинг (Fitting H.)
[33] Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen iund ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, *Math. Ann.*, 107 (1933), 514—542.
[35a] Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren, *Math. Z.*, 39 (1935), 19—41.
[35b] Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, *Math. Ann.*, 111 (1935), 19—41.

Фишер Дж. Л. (Fisher J. L.)
[71] Embedding free algebras in skew fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30 (1971), 453—458.

Фишер Дж. В. (Fisher J. W.)
[70] On the nilpotency of nil subrings, *Canad. J. Math.*, 22 (1970), 1211—1216.
[72] Nil subrings of endomorphism rings of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 34 (1972), 75—78.

Фишер Дж. В., Снайдер (Fisher J. W., Snider R. L.)
[74] Prime von Neumann regular rings and primitive group algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44 (1974), 244—250.

Флюх (Fluch W.)
[65] Gruppen ohne endlich-dimensionale Darstellungen, *Math. Scand.*, 16 (1965), 164—168.

Флойд (Floyd D. R.)
[68] On OF-1 algebras, *Pacif. J. Math.*, 27 (1968), 81—94.

Форманек (Formanek E.)
[70] A short proof of a theorem of Jennings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26 (1970), 406—407.
[72a] Central polinomials and orders, Carleton University preprint, Ottawa, 1972.
[72b] A problem of Passman on semisimplicity, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 4 (1972), 375—376.
[72c] Central polynomials for matrix rings, *J. Algebra*, 23 (1972), 129—132.
[73a] Group rings of free products are primitive, *J. Algebra*, 26 (1973), 508—511.
[73b] Idempotents in Noetherian group rings, *Canad. J. Math.*, 25 (1973), 366—369.

Форманек, Снайдер (Formanek E., Snider R. L.)
[72] Primitive group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36 (1972), 375—376.

Форманек, Ятегаонкар А. (Formanek E., Jategaonkar A. V.)
[74] Subrings of Noetherian rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 46 (1974), 181—186.

Фоссум (Fossum R. M.)
[71] Injective modules over Krull orders, *Math. Scand.*, 28 (1971), 233—246.
[73] The Divisor Class Group of A Krull Domain, Ergebnisse der Math. und ihree Grenzgebiete, Bd. 74, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

Фрейд (Freyd P.)
[60] Functor Theory (Dissertation), Ph. Thesis, Princeton U., 1960.
[64] Abelian Categories, Harper and Row, New York, 1964.

Френкель, Бар-Хиллел (Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y.)
[66] Основания теории множеств, «Мир», М., 1966.

Фукс (Fuchs L.)
[67a] Algebraically compact modules over Noetherian rings, *Indian J. Math.*, 9 (1967), 357—374.
[67b] Note on purity and algebraic compactness for modules, Studies on Abelian Groups, Dunod, Paris, 1967.
[69a] On quasi-injective modules, *Scuola Norm. Sup. Pisa*, 23 (1969), 541—546.
[69b] Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules, *J. reine u. angew. Math.*, 239 (1969), 169—179.
[71] On the substitution property of modules, *Monatshefte für Math.*, 75 (1971), 198—204.

[72] The cancellation problem for modules, Lectures on Rings and Modules, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
[74] On torsion abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42** (1974), 13—15.

[74, 77] Бесконечные абелевы группы, тт. 1, 2, «Мир», М., 1974, 1977.

Фукс, Лунстра (Fuchs L., Loonstra F.)
[71] On the cancellation property of modules in direct sums over Dedekind domains, *Indagationes Math.*, **33** (1971), 163—169.

Фукс, Рангасвами (Fuchs L., Rangaswamy K. M.)
[70] Quasi-projective abelian groups, *Bull. Soc. Math. France*, **98** (1970), 5—8.

Фулберт, Кузманович (Fuelberth J. D., Kuzmanowitz J.)
[75a] On the structure of splitting rings, *Comm. Algebra*, **3** (1975), 913—949.
[75b] The structure of semiprimary and Noetherain hereditary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **212** (1975), 83—111.

Фулберт, Тепли (Fuelberth J. D., Teply M. L.)
[72] A splitting ring of global dimension two, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 317—324.

Фуллер (Fuller K. R.)
[68a] Generalized uniserial rings and their Kuppisch series, *Math. Z.*, **106** (1968), 248—260.
[68b] Structure of QF-3 rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134** (1968), 343—354.
[69a] On indecomposable injectives over Artinian rings, *Pacif. J. Math.*, **29** (1969), 115—135.
[69b] On direct represenatations of quasi-projectives, *Arch. Math.*, **20** (1969), 495—502; corrections, **21** (1970), 478.
[70a] Double centralizers of injectives and projectives over Artinian rings, *Ill. J. Math.*, **14** (1970), 658—664.
[70b] Primary rings and double centralizers, *Pacif. J. Math.*, **34** (1970), 379—383.
[72] Relative projectivity and injectivity classes determined by simple modules, *J. Lond. Math. Soc.*, **5** (1972), 423—431.
[73] On generalized uniserial rings and decompositions that complement direct summands, *Math. Ann.*, **200** (1973), 175—178.
[74] Density and equivalence, *J. Algebra*, **29**, (1974), 528—580.
[76] On rings whose (*sic*!) left modules are direct sums of finitely generated modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 39—44.

Фуллер, Андерсон см. Андерсон, Фуллер.
Фуллер, Диксон С. см. Диксон, Фуллер.
Фуллер, Камилло см. Камилло, Фуллер.
Фуллер, Райтен (Fuller K. R., Reiten I.)
[75] Note on rings of finite represenatations type, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **50** (1975), 92—94.

Фуллер, Хилл (Fuller K. R., Hill D. A.)
[70] On quasi-projective modules via relative projectivity, *Arch. Math.*, **21** (1970), 369—373.

Фуллер, Шаттерс (Fuller K. R., Shutters W. A.)
[75] Projective modules over non-commutative semilocal rings, *Tohoku Math. J.*, **27** (1975), 303—311.

Ханнула (Hannula T. A.)
[73] On the construction of QF-rings, *J. Algebra*, **25** (1973) 403—414.

Харада (Harada M.)
[56] Note on the dimension of modules and algebras, *J. Inst. Polytechnics, Osaka City U.*, **7** (1956), 17—28.
[63a] Hereditary orders, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **107** (1963), 273—290.
[63b] Multiplicative ideal theory in hereditary orders, *J. Math. Osaka City U.*, **14** (1963), 83—106.
[65a] Note on quasi-injective modules, *Osaka J. Math.*, **2** (1965), 351—356.
[65b] QF-3 and semiprimary PP-rings, *Osaka J. Math.*, **2** (1965), 357—368.
[66a] QF-3 and semiprimary PP-rings, *Osaka J. Math.*, **8** (1966), 21—27.
[66b] Hereditary semiprimary rings and triangular matrix rings, *Nagoya J. Math.*, **27** (1966), 463—484.
[71] On categories of indecomposable modules II, *Osaka J. Math.*, **8** (1971), 309—321.
[72] On quasi-injective modules with a chain condition over a commutative ring, *Osaka J. Math.*, **9** (1972), 421—426.
[73] Perfect categories I—IV, *Osaka J. Math.*, **10** (1973), 329—367.

Харада, Исии (Harada M., Ishii T.)
[72] On endomorphism rings of Noetherian quasi-injective modules, *Osaka J. Math.*, **9** (1972), 217—223.

Харада, Канзаки (Harada M., Kanzaki T.)
[58] On Kronecker products of primitive algebras, *J. Inst. Polytech. Osaka City U.*, **9** (1958), 19—28.

Харада, Саи (Harada M., Sai Y.)
[70] On categories of indecomposable modules I, *Osaka J. Math.*, **7** (1970), 323—344.

Харрис (Harris B.)
[58] Commutators in division rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 628—630.

Харрисон, Чейз, Розенберг см. Чейз, Харрисон, Розенберг.

Хаттори (Hattoru A.)
[63] Semisimple algebras over a commutative ring, *J. Math. Soc. Japan*, **15** (1963), 404—419.

Хатчинсон (Hutchinson J. J.)
[69] Intrinsic extensions of rings, *Pacif. J. Math.*, **30** (1969), 669—677.

Хейнз (Haines J. S.)
[67] A note on direct product of free modules, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 1079—1080.

Хейнзер, Абьянкар, Икин см. Абьянкар, Хейнзер, Икин

Хейнзер, Икин см. Икин, Хейнзер

Хендельмен (Handelman D.)
[75] When is the maximal ring of quotients projective? *Proc. Amer. Math. Soc.*, **52** (1975), 125—130.

Хендельмен, Гудёрл см. Гудёрл, Хендельмен.
Хендельмен, Лоуренс (Handelman D., Lawrence J.)
[75] Strongly prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **211** (1975), 209—223.
Херстейн (Herstein I. N.)
[53] Finite multiplicative subgroups in division rings, *Pacif. J. Math.*, **1** (1953), 121—126.

[70] On the Lie structure of an associative ring, *J. Algebra*, **14** (1970), 561—571.
[71] Notes from a ring theory conference, Conference Board of the Mathematical Science, Regional Conference Board in Math. No. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.
[72] Некоммутативные кольца, «Мир», М., 1972.

Херстейн, Смолл (Herstein I. N., Small L.)
[62] Nil rings satisfying certain chain conditions, *Canad. J. Math.*, **11** (1962), 180—184, addendum, *ibid.*, **14** (1965), 300—302.
[64] Nil rings satisfying certain chain conditions, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 771—776.

Хигман Г. (Higman G.)
[56] On a conjecture of Nagata, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **52** (1956), 1—4.

Хигман Д. (Higman D. G.)
[54] Indecomposable representations at characteristic p, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 377—381.

Хилл, Фуллер см. Фуллер, Хилл.

Хинохара (Hinohara Yu)
[63] Projective modules over weakly noetherian rings, *J. Math. Soc. Japan*, **15** (1963), 75—88, supplement 474—475.

Холл (Hall M. H., Jr.)
[39] A type of algebraic closure, *Ann. of Math.*, **40** (1939) 360—369.
[40] The position of the radical in an algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 391—404.

Хоффман (Hoffman K. H.)
[70] The duality of compact semigroups and C*-bigebras, Lecture Notes in Mathematics, vol. 129, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

Хохшильд (Hochschild G.)
[56] Relative homological algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 246—269.
[58] Note on relative homological algebra, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 89—94.
[65] The structure of Lie groups, San Francisco, London, Amsterdam, Holden Day, 1965.

Ху (Hsu C. S.)
[62] Theorems on direct sums of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 540—542.

Хупперт (Huppert B.)
[67] Endliche Gruppen I, Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Bd. 134, Springer, Berlin-Heideblerg-New York, 1967.

Хэмптон, Пассман (Hampton C. R., Passman D. S.)
[72] On the semisimplicity of group rings of solvable groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **173** (1972), 289—301.

Цассенхауз (Zassenhaus H.)
[38] Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, *Abh. Math. Sem. Hansische U.*, **12** (1938), 289—312.
[67] Orders as endomorphism rings of modules of the same rank, *J. Lond. Math. Soc.*, **42** (1967), 180—182.

Цермелло (Zermelo E.)
[04] Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, **59** (1904), 514—516.
[08a] Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **65** (1908), 107—128.
[08b] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Math. Ann.*, **65** (1908), 261—281.

Цёшингер (Zöschinger H.)
[73] Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben, Algebra-Berichte-Seminar Kash und Pareigis, *Math. Inst. München*, **15** (1973), 1—22.

Чаттерс (Chatters A. W.)
[71] The restricted minimum condition in Noetherian hereditary rings, *J. London, Math. Soc.*, **4** (1971), 83—87.
[72] A decomposition theorem for Noetherian hereditary rings, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **4** (1972), 125—126.

Чейз (Chase S. U.)
[60] Direct products of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 457-473.
[61] A generalization of the ring of triangular matrices, *Nagoya Math. J.*, **18** (1961), 13—25.
[62a] On direct products and sums of modules, *Pacif. J. Math.*, **12** (1962), 847—854.
[62b] A remark on direct products of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 214—216.

Чейз, Фейс (Chase S. U., Faith C.)
[65] Quotient rings and direct products of full linear rings, *Math. Z.*, **88** (1965), 250—264.

Чейз, Харрисон, Розенберг (Chase S. U., Harrison D. Rosenberg A.)
[65] Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, **52** (1965), 15—33

Шарп, Вамош (Sharpe D. W., Vámos P.)
[71] Injective Modules, Cambridge U. Press, Cambridge, 1971.

Шаттерс, Фуллер см. Фуллер, Шаттерс.

Шевалле (Chevalley C.)
[51] Algebraic Functions of a Single Variable, Surveys of the Amer. Math. Soc., Providence, 1951.

Шефердсон (Shepherdson J. C.)
[51] Inverse and zero divisors in matrix rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **61** (1951), 71—85.

Шмидт О. Ю.
[28] Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, *Math. Z.*, **29** (1928), 34—41.

Шок (Shock R. C.)
[71a] Injectivity, annihilators, and orders, *J. Algebra*, **19** (1971), 96—103.
[71b] Nil subrings in finiteness conditions, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 741—748.
[71c] Essentially nilpotent rings, *Israel J. Math.*, **9** (1971), 180—185.
[72a] Orders in self-injective cogenerator rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 393—398.
[72b] Polynomial rings over finite dimensional rings, *Pacif. J. Math.*, **42** (1972), 251—258.

[72c] A note on the prime radical, *J. Math. Soc. of Japan*, **24** (1972), 374—376.
[72d] The ring of endomorphisms of a finite dimensional module, *Israel J. Math.*, **11** (1972), 309—314.
[74] Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions, *Pacif. J. Math.*, 54 (1974), 227—235.

Шопф, Экман см. Экман, Шопф

Шорес (Shores T. S.)
[71] Decompositions of finitely generated modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30 (1971), 445—450.
[72] The structure of Loewy modules, *J. reine und angew. Math.*, 254 (1972), 204—220.
[74] Loewy series of modules, *J. reine u. angew. Math.*, 265 (1974), 183—200.

Шорес, Виганд (Shores T. S., Wiegand R.)
[73] Decompositions of modules and matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 1277—1280.
[74] Rings whose finitely generated modules are direct sums of cyclics, *J. Algebra*, **32** (1974), 57—72.

Шпекер (Specker E.)
[50] Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, *Portugalic Math.*, 9 (1950), 131—140.

Шрейер (Schreier O.)
[28] Über den Jordan-Höderschen Satz, *Abh. Math. Sem. U. Hamburg*, 6 (1928), 300—302.

Штейниц (Steinitz E.)
[48] Algebraische Theorie der Körper, Chelsea, New York, 1948.

Штенштрём (Stenström B.)
[70] Coherent rings, and FP-injective modules, *J. Lond. Math. Soc.*, 2 (1970), 323—329.
[71] Rings and modules of quotients, Lecture Notes in Mathematics, vol. 237, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

Эйленберг (Eilenberg S.)
[56] Homological dimension and syzygies, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 328—336.

Эйленберг, Икеда, Накаяма (Eilenberg S., Ikeda M., Nakayama T.)
[55] On the dimension of modules and algebras I, *Nagoya Math. J.*, 8 (1955), 49—57.

Эйленберг, Картан см. Картан, Эйленберг.

Эйленберг, Нагао, Накаяма (Eilenberg S., Nagao H., Nakayama T.)
[56] On the dimension of modules and algebras IV, Dimension of residue rings of hereditary rings, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 87—95.

Эйленберг, Накаяма (Eilenberg S., Nakayama T.)
[55, 57] On the dimension of modules and algebras II (Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings), *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 1—16; IV (dimension of residue rings), *loc. cit.*, **11** (1957), 9—12.

Эйленберг, Розенберг, Зелинский (Eilenberg S., Rosenberg A., Zelinsky D.)
[57] On the dimension of modules and algebras VIII, Dimension of tensor products, *Nagoya Math. J.*, **12** (1957), 71—93.

Экман, Шопф (Eckmann B., Schopf A.)
[53] Über injective Moduln, *Arch. Math.*, 4 (1953), 75—78.

Экштейн (Eckstein F.)
[69] On the Mal'cev theorem, *J. Algebra*, **12** (1969), 372—385.

Эндо (Endo S.)
[60] Note on PP-rings (a supplement to Hattori's paper), *Nagoya Math. J.*, **17** (1960), 167—170.
[62] On flat modules over commutative rings, *J. Math. Soc. Jpan*, **14** (1962), 284—291.
[63] Projective modules over polynomial rings, *J. Math. Soc. Jpan*, **15** (1963), 339—352.
[67] Completely faithful modules and quasi-Frobenius algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1967), 437—456.

Эндо, Ватанабе (Endo S., Watanabe Y.)
[67a] On separable algebras over a commutative ring, *Osaka J. Math.*, 4 (1967), 233—242.
[67b, 70] The centres of semosimple algebras over a commutative ring I, II, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 285—293; **39** (1970), 1—6.

Якобинский (Jacobinski H.)
[71] Two remarks about hereditary orders, *Proc. Amer. Math., Soc.*, 28 (1971), 1—8.

Ямагата (Yamagata K.)
[73] A note on a problem of Matlis, *Proc. Japan Acad.*, 49 (1973), 145—147.

Янус (Janusz G. J.)
[69] Indecomposable modukles for finite groups, *Ann. of Math.*, 89 (1969), 209—241.
[70] Faithful represenatations of p-groups at characteristic p I, *J. Algebra*, 15 (1970), 335—351.
[72a] Faithful representations of p-groups at characteristic p II, *J. Algebra*, 22 (1972), 137—160.
[72b] Some left serial algebras of finite type, *J. Algebra*, **23** (1972), 404—411.

Ятегаонкар А. (Jategaonkar A. V.)
[69] A contrexample in ring theory and homological algebra, *J. Algebra*, 12 (1969), 418—440.
[70a] Left principal ideal rings, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
[70b] Orders in artinian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1970), 1258—1259.
[72] Structure and classification of hereditary noetherian prime rings, Proceedings of Ring Theory Conference, Academic Press New York, 1972, pp. 171—229.
[74a] Jacobson's conjecture and modules over fully bounded noetherian rings, *J. Algebra*, **30** (1974), 103—121.
[74b] Injective modules and localization in non-commutative noetherian rings, *Trans. Amer. Math Soc.*, **190** (1974), 109—123.
[74c] Relative Krull dimension and prime ideals in right Noetheriam rings, *Comm. Algebra*, 2 (1974), 429—468.
[74d] Integral group rings of polycyclic-by-finite groups, *J. Pure and Appl. Algebra*, 4 (1974), 337—343.
[75] Principal ideal theorem for Noetherian P. I. rings.

Ятегаонкар В. (Jategaonkar V. A.) [sic!]
[74] Global dimension of tiled orders over commutative Noetherian domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **190** (1974), 357—374.

Ятегаонкар, Форманек см. Форманек, Ятегаонкар.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Фейс

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

том 2

Научный редактор Г. Цукерман. Младший научный редактор Э. Иванова
Художник Е. Самойлов. Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Толстякова
Корректор В. Киселева

ИБ № 1289

Сдано в набор 25.10.78. Подписано к печати 23.04.79. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Объем 14,50 бум. л. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 28,91. Изд. № 1/9549. Тираж 8000 экз. Зак. 0964. Цена 2 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 103001, Трехпрудный пер., 9