447

К. ФЕЙС

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

1

DIE GRUNDLEHREN
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN EINZELDARSTELLUNGEN
MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER ANWENDUNGSGEBIETE

Band 190

CARL FAITH

ALGEBRA: RINGS, MODULES AND CATEGORIES I

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

К. ФЕЙС

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

1

Перевод с английского
Л. А. КОЙФМАНА
А. В. МИХАЛЕВА
Т. С. ТОЛЬСКОЙ
Г. М. ЦУКЕРМАН

Под редакцией
Л. А. СКОРНЯКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1977

УДК 519.4

В т. 1 двухтомной монографии известного американского алгебраиста освещено современное состояние развития отдельных разделов алгебры. Автор широко использует аппарат теории модулей, категорий и гомологий. Наряду с классическими изложены результаты, полученные в недавнее время. Многочисленные упражнения разной трудности способствуют более глубокому усвоению материала. От читателя не требуется специальных знаний, хотя и предполагается достаточно высокая математическая культура.

Книга полезна всем алгебраистам, интересующимся кольцами, модулями и категориями. Она может служить учебным пособием для студентов-старшекурсников и аспирантов, изучающих современную алгебру.

Редакция литературы по математическим наукам

Ф $\frac{20203-009}{041(01)-77}$ 9—77

© Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 1973
© Перевод на русский язык, «Мир», 1977

Предисловие редактора перевода

В развитии теории колец (в этой книге, и в частности в настоящем предисловии, под кольцом всегда понимается ассоциативное кольцо с единицей) до настоящего времени усматриваются четыре этапа. Первый из них связан с исследованием конечномерных алгебр и подытожен книгой Диксона (L. E. Dickson, «Algebras and their arithmetics», 1923).

На следующем этапе исследования пошли по линии перехода от алгебр к кольцам, удовлетворяющим условиям обрыва убывающих цепей односторонних идеалов. Итоговая монография принадлежит Артину, Несбиту и Троллу (E. Artin, E. Nesbitt, R. Thrall, «Rings with minimum condition», 1944). Третий этап прошел под знаменем радикала. Кроме того, в этот период уже началось привлечение к исследованию колец модулей над ними (напомним, что одно из определений радикала было связано с рассмотрением неприводимых модулей). И снова можно назвать подытоживающую монографию — N. Jacobson, «Structure of rings», 1956 (русский перевод: Н. Джекобсон, «Строение колец», 1961).

В дальнейшем модули начинают играть в теории ассоциативных колец все бóльшую и бóльшую роль. Появляется значительное число результатов, относящихся к гомологической классификации колец, т. е. к исследованию связей между свойствами кольца и категории модулей над ним. Выясняется также, что кольца частных естественно рассматривать с гомологической точки зрения. Наблюдается значительное продвижение в исследовании колец с условием обрыва возрастающих цепей односторонних идеалов. Отдельные аспекты этого развития отражены в известных монографиях Ламбека [71a], Херстейна [72], Кона [75].

Монография Фейса — очередная итоговая монография, доведенная до последних дней. Я не рискнул бы предложить эту книгу для первоначального ознакомления с предметом; но для лиц, уже немного знакомых с теорией колец и модулей, монография Фейса будет безусловно полезной. Прежде всего она избавит от необходимости чтения многих журнальных статей, содержащих интересные новые результаты самых последних лет. Кроме того, алгебраисты, ведущие исследования в области колец и модулей, найдут в ней немало полезных идей и четко сформулированных интересных проблем. Таким образом, монография Фейса окажется полезной и нужной достаточно широкому кругу читателей.

Необходимо отметить, что в тексте не нашли отражения работы советских авторов, достаточно тесно примыкающие к рассматривавшимся вопросам.

Обнаруженные в ходе работы над переводом неточности и опечатки устранены при любезном участии автора. В некоторых случаях слишком лаконичные доказательства снабжены разъясняющими примечаниями.

Распределение работы между переводчиками было следующим: Л. А. Койфман — вторая половина гл. 4, гл. 6, 11—16, А. В. Михалёв — гл. 1, 7—10, Т. С. Тольская — гл. 2 и 5, Г. М. Цукерман — гл. 3 и первая половина гл. 4. Теоретико-множественное введение переведено М. П. Дорофеевой.

Л. А. Скорняков

Моим трем музам:
Микки, Хайди и Синди

К русскому изданию

Мне хочется поблагодарить профессора Л. А. Скорнякова и переводчиков за их самоотверженную работу над переводом моей книги. В процессе этой работы они нашли и исправили множество опечаток, сомнительных утверждений, а в некоторых случаях и прямых ошибок. Такое тщательное чтение, несомненно, оказалось очень полезным для книги. Более того, благодаря этому изданию мои труды вознаграждаются богатым урожаем: они станут доступными советским студентам и математикам. Это — большая честь для меня.

Декабрь 1976

Карл Фейс

Предисловие

Цель этой книги — сначала ввести студентов в круг основных идей и методов теории колец, модулей и категорий (настолько постепенно и основательно, насколько позволяет время и объем), а затем подвести их к современным границам исследований (настолько быстро и широко, насколько позволяют их способности). Поэтому элементарность начала, включающего теоретико-множественное введение и первую главу с элементарными сведениями по теории групп и теории категорий, не должна вводить читателя в заблуждение.

В книге освещен ряд аспектов теории колец в их развитии начиная со времени опубликования монографии Джекобсона в 1956 г. (переработанное издание вышло в 1964 г.). Весь второй том нашей книги посвящен теории колец. Многие из глав основаны на статьях из тех областей, в которых сейчас интенсивно ведутся научные исследования. Авторы этих работ упоминаются в конце предисловия, а их содержание обсуждается во введении. Поэтому студенты получают широкие возможности найти отправные точки в текущей литературе, если у них возникнет желание продолжить изучение предмета.

Хотя быстрый рост объема знаний обучающихся и желателен, но именно период роста больше всего волнует преподавателя.

Поэтому не следует слишком бегло сообщать новые идеи, если мы хотим добиться их серьезного усвоения. По этой причине многие теоремы представлены в тексте в различных видах: включены три независимых доказательства теорем Голди, Лезьё и Круазо о кольцах с классически полупростыми кольцами частных, два независимых доказательства теоремы Джонсона и Утуми о максимальных правых кольцах частных, три доказательства одной из наиболее важных теорем Мориты, в которой тензорные произведения рассматриваются одновременно и как сопряженные функторы и как традиционная конструкция (это же относится и к теории локализации Габриеля и к локализациям в коммутативных кольцах). Во многих других местах из педагогических соображений дается материал, который уже предлагался ранее читателю в качестве, так сказать, предварительного просмотра. Это объясняет переплетение чисто кольцевых и чисто категорных частей и отражается на размерах книги: два тома в пяти частях. Вся теория категорий появляется в первом томе. Второй том, как уже отмечалось, посвящен почти целиком теории колец.

Видимо, первое систематическое изучение категории правых модулей над кольцом A было предпринято Моритой в 1958 г. В Орегонских лекциях в 1962 г. Басс упростил доказательства ряда «теорем Мориты», при этом были учтены идеи Чейза и Шануэля. Одна из теорем Мориты выясняет условия, при которых существует эквивалентность категорий mod-A и mod-B. Решение Мориты построено так эффективно, что, например, классическая теорема Веддербёрна — Артина является простым его следствием. Более того, класс подобия $[A]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(k)$ алгебр над коммутативным кольцом k состоит из всех алгебр B, таких, что соответствующие категории mod-A и mod-B, состоящие из k-линейных морфизмов, эквивалентны, причем эквивалентность осуществляется с помощью k-линейных функторов. (В случае поля k группа Брауэра $\mathrm{Br}(k)$ состоит из классов подобия простых центральных алгебр, а в случае произвольного коммутативного кольца k группа Брауэра понимается в смысле Адзумаи [51] [1]) и Ауслендера — Голдмана [60b].) Различные другие примеры, связанные с брачным союзом (увы, вынужденным!) теории колец и теории категорий, приводятся в тексте. Кроме того, стремясь к дальнейшему упрощению доказательств, в частности желая избежать применения тензорных произведений, использованных Бассом, я обнаружил круг новых идей и теорем, целиком лежащих в рамках теории колец. Это занимает большую часть гл. 4

[1]) Ссылка вида «Адзумая [51]» относится к статье в списке литературы, опубликованной Адзумаей в 1951 г. Если в этом году автор опубликовал более чем одну работу, то они различаются малыми буквами. Например, Джекобсон [45a], [45b] и [45c].

(теорема Мориты — это лишь теорема 4.29). Основной здесь является теорема о соответствии для проективных модулей (теорема 4.7), подсказываемая ситуацией Мориты. В качестве побочного продукта это создает базу для весьма полной теории простых нётеровых колец. Подробнее об этом будет сказано во введении.

Теория категорий медленно перерастала рамки «теории». Сейчас она является одним из фундаментальных математических средств, объединяющим многие дисциплины (подобно теории групп). Универсальность понятий морфизма, функтора и естественного преобразования изменила идейный базис математических знаний, думаю, безвозвратно: от 19 века с его полной зависимостью от множеств и функций к 20 веку. (Поразительно, что категории и функторы были введены лишь в середине 20 века [1]).)

Тем не менее я воздержался от функториального обоснования теории множеств и, в основном, я думаю, потому, что не мыслю о кольцах и модулях функториально. Теория категорий скорее поднимает интересные вопросы, углубляющие наше понимание предмета [2]), чем решает какие-либо проблемы теории колец. Таким образом, различные теоремы Веддербёрна — Артина, Джекобсона, Джонсона, Голди, Лезьё, Круазо, Утуми, Мориты и Адзумаи могут быть введены в рамки теории Гротендика — Габриеля абелевых категорий частных и локализующих функторов (из диссертации Габриеля). Более подробно об этом говорится во введении.

Практика перечислять авторов, работы которых отражены в тексте, порочна не только потому, что некоторые авторы неизбежно будут пропущены (просто из-за того, что важность их работы не была осознана автором монографии), но и потому, что авторы могут быть представлены не лучшими из их работ. Тем не менее должны быть воспеты следующие бессмертные: Э. Артин, Г. Бернсайд, Дж. Веддербёрн, Р. Дедекинд, К. Гаусс, Д. Гильберт, О. Гёльдер, К. Жордан, Л. Кронекер, В. Крулль, Дж. Левицкий, Э. Машке, Т. Накаяма, Дж. фон Нейман, Э. Нётер, О. Оре, Р. Ремак, Г. Фиттинг, Г. Фробениус, О. Ю. Шмидт, О. Шрейер, И. Шур.

Основной вклад в ту часть теории колец и модулей, которая представлена в тексте, внесли: Д. Айзенбуд, Ш. Амицур, Г. Адзумая, К. Асано, М. Ауслендер, Х. Басс, Р. Брауэр, Н. Бурбаки, Я.-Э. Бьёрк, Р. Бэр, П. Вамош, Д. Веббер, Д. Гилл, О. Голдман, Ф. Гриффитс, К. Гудёрл, Н. Джекобсон, Р.Джонсон, Ж. Дьёдонне, М. Икеда, И. Капланский, А. Картан, Г. Кёте, Дж. Коззенс,

[1]) В 1945 г. Эйленбергом и Маклейном, см. Маклейн [66, стр. 52].

[2]) «Понятия категории и функтора обеспечивают не глубокие теоремы, а удобный способ выражения», там же, стр. 50. (Однако одна из теорем в недавней работе Митчелла [72] может сделать эту цитату устаревшей!)

П. Кон, И. Коннел, Э. Колчин, Й. Коэн, Р. Круазо, И. Ламбек, Ч. Ланский, Ж. Лафон, Л. Леви, Л. Лезьё, Н. Маккой, Э. Матлис, Ю. Миясита, К. Морита, Б.Ософская, З. Папп, С. Перлис, Г. Прюфер, Дж. Робсон, Ф. Сандомирский, Э. Своковский, Л. Смолл, Р. Суон, Х. Тахикава, Э. Уонг, Р. Уорфилд, Ю. Утуми, К. и Э. Уокеры, Э. Феллер, Дж. Финдлей, К. Фуллер, М. Харада, И. Херстейн, А. Чаттерс, С. Чейз, К. Шевалле, Р. Шок, А. Шопф, С. Эйленберг, Б. Экман, а в теорию категорий — Д. Буксбаум, П. Габриель, А. Гротендик, Н. Йонеда, Д. Кан, С. Лабкин, С. Маклейн, Б. Митчелл, Н. Попеску, К. Уотс, Р. Фрейд, С. Эйленберг.

Мы спешим заметить, что это разделение едва ли точно! Мы комментировали категорные аспекты работы Мориты, но можно было бы также проследить и влияние теории колец на теорию категорий. Здесь можно назвать теорему Джекобсона о строении колец без условий на цепи идеалов или инъективную оболочку, изобретенную Бэром, Экманом и Шопфом. Неоценим и вклад Эйленберга и Маклейна в теорию колец.

Принстон, февраль 1973 г.

Карл Фейс

Благодарности

Ни одна книга не была написана усилиями лишь одного человека. Мне хочется поблагодарить мою жену за это замечание и за помощь, которую она мне оказала (отсюда это замечание и возникло). Я должен выразить благодарность моим тинейджерам [1]— дочерям Хайди и Синди за то, что они терпеливо переносили мое состояние отчаяния, прощали мою невнимательность и не считали меня страдальцем. Все это помогло мне справиться с работой.

Я с удовольствием выражаю благодарность и за другого рода поддержку. Исследования, которые в конечном счете вошли как часть в текст книги, субсидировались рядом стипендий. В 1959—1960 гг. я получал последокторскую стипендию НАТО в Хайдельберге, в 1960—1961 гг.— последокторскую стипендию Национального научного фонда в Институте высших исследований, за которой в 1961—1962 гг. последовала дотация. Во время основной работы над текстом мне была оказана помощь в виде двух стипендий Ратгерского университета — одна в 1965—1966 гг. для работы в университете Калифорнии в Беркли, другая — в 1969—1970 гг. для работы в Принстоне. Я благодарен за них Ратгерскому Совету по исследованиям.

[1]) teen-age — в возрасте от 13 до 19 лет.— *Прим. перев.*

Я отдаю себе полный отчет в преимуществах, созданных такой щедрой помощью, и в сопутствующих ей и налагаемых ею обязательствах.

Написание этой книги, любовь и труд, вложенные в нее, являются моей искренней попыткой выполнить эти обязательства и доказательством мой признательности. Я в долгу перед факультетами и персоналом Института высших исследований и Математическим институтом в Хайдельберге. Я не могу перечислить всех поименно — слишком многие относились ко мне с расположением. Но я вечно буду благодарен Дину Монтгомери и Фридриху Кашу за помощь.

Помимо моих бывших студентов Энн К. Бойл, Джона Х. Коззенса и Барбары Л.Ософской я обязан многим математикам, прочитавшим те или иные части рукописи в различных вариантах. За многочисленные предложения, включенные в текст без особых оговорок, я хочу поблагодарить Поля М. Кона, Кента Р. Фуллера, Натана Джекобсона, Аруна Ятегаонкара, Сержа Ленга, Уильяма Р. Скотта и Уолмера Васконселоса. Я хочу поблагодарить Хаймена Басса за любезно предоставленную мне возможность использовать части его записок в Тата-институте [67]. Материал гл. 12 о теоремах Мориты и группе Пикара почти без изменения взят из этой работы. Я благодарен Рихарду Брауэру за присланный по моей просьбе экземпляр его главы о фробениусовых алгебрах и за стимулирующую переписку из Бэйлстренда. Сандерс Маклейн задал вопрос в связи с моим определением категорий. Я надеюсь, что я разрешил его корректно. Что касается другой помощи по категориям, то я полагался на моих коллег Майлса Тирни и Барри Митчелла. Особенно мне помогла прекрасная книга Митчелла [65]. Мой друг Джо Розенштейн нашел и исправил столько логических ошибок в теоретико-множественном введении, сколько я ему позволил! Я также хочу поблагодарить Билла Скотта за один искренний совет, основанный на его собственном опыте написания книг (которым я и воспользовался).

Я признателен за сердечное сотрудничество моим студентам, коллегам и друзьям-математикам в Ратгерсе и в других местах, но, конечно, они не несут ответственности за мои ошибки! Нельзя перехвалить Джона Х. Коззенса и Джона Кёля за усердие, с которым они вылавливали бесчисленные опечатки. Большое им спасибо!

Печатание математического текста требует опыта особого типа, не говоря уже об интеллекте или мужестве. За отвагу, за работу «не за страх, а за совесть», я хочу восхвалить мисс «Таффи» Гриффитс, мисс «Юти» Антони и мисс Кэролин Ундервуд. Мисс Ундервуд оказала помощь легионам приглашенных в Институт высших исследований, но что мне помогло больше всего — это ее жизнерадостность и доброта.

Задача аккуратного подбора библиографии по сотням карточек была быстро решена моим другом и соседом Френком Кроуфордом, президентом Принстонской компании микрофильмирования. Он — обладатель моего лучшего «Кордон Руж-66».

У математиков есть на все свои теории. У меня — теория о математиках. Мы так сосредоточены на наших рукописях и уравнениях, что нас принято считать слишком отрешенными и, следовательно, слишком холодными и неэмоциональными. Моя теория заключается в том, что именно потому, что математики так эмоциональны, они могут стать математиками. Им по крайней мере присуща способность увлечься аскетической красотой, которой обладает математика —«белая богиня», как поэт Роберт Грейвс назвал музу поэзии — музу всех нас.

Введение

Работа Гротендика [57] перенесла гомологическую алгебру в абелевы категории с точными прямыми пределами (гл. 14). В большей части текста требуется лишь незначительная подготовка по теории категорий и почти не нужны сведения об абелевых категориях. Однако далеко идущая теорема Попеску — Габриеля [64] опирается не только на основы теории абелевых категорий (гл. 5 и 6), но и весьма существенно использует диссертацию Габриеля [62]. Об этом будет рассказано в гл. 15 и 16, которым предшествуют теорема Фрейда о сопряженных функторах (гл. 5) и сведения об абелевых категориях (гл. 6) и категориях Гротендика, включая теоремы о вложении Фрейда и Митчелла (гл. 14). Сопряженность функторов $\mathrm{Hom}_R(M, \ )$ и $\otimes_R M$ для любого R-модуля M (Кан [58]) доказывается в гл. 5, а также еще раз в гл. 11, где традиционным образом устанавливаются основные свойства тензорных произведений и вводятся плоские модули.

Эти пять глав о категориях занимают тем не менее лишь шестую часть текста. Несмотря на то что теоремы Мориты и теоремы о кольцах частных являются частными случаями результатов о локализующих функторах Габриеля, мы доказываем их теоретико-кольцевыми методами. Так, например, теорема Мориты [58] (см. также Фрейд [60]) описывает подобие колец A и B, т. е. выясняет, когда $\mathrm{mod}\text{-}A \approx \mathrm{mod}\text{-}B$ (теорема 29 гл. 4). Оказывается, это имеет место тогда и только тогда, когда существуют конечно порожденный проективный образующий P в категории $\mathrm{mod}\text{-}B$ и кольцевой изоморфизм $A \approx \mathrm{End}P_B = \mathrm{Hom}_B(P, P)$. Это условие право-лево симметрично, и мы используем обозначение $A \sim B$. (Наиболее знакомый пример: $B \sim B_n$, где B_n — кольцо $(n \times n)$-матриц над кольцом B.) Этому в гл. 4 предшествует теорема о соответствии для проективных модулей, обобщающая соответствие Мориты на тот случай, когда U — конечно порожденный проективный точный левый модуль над кольцом B и $A = \mathrm{End}_B U$. Оказывается, что в данной ситуации существует структурный изоморфизм между структурой (правых) A-подмодулей модуля U и структурой правых идеалов из B вида $I = IT$, где T — идеал следа модуля U в кольце B. При этом изоморфизме $I = IT$ переходит в IU, причем двусторонним идеалам вида $I = IT$ соответствуют (B, A)-подмодули бимодуля U. Кроме того, отображение $S \mapsto S'$ множества идеалов кольца A в множество идеалов кольца B вида $S' = TS'T$

является изоморфизмом структур и полугрупп, при котором $S'U = US$. Основные применения относятся к тем случаям, когда A полупервично, первично, просто, артиново или нётерово справа, обладает однородным или латеральным правым идеалом. Затем простые нётеровы кольца охарактеризованы как кольца эндоморфизмов $A = \mathrm{End}_B U$ в приведенной выше ситуации, где B — правая область Ope [1]), содержащая хотя бы один нетривиальный идеал T, удовлетворяющий условию обрыва возрастающих цепей правых идеалов вида $I = IT$.

Глава 3 содержит более шестидесяти разрозненных предложений, которые я рассматриваю как введение к более глубокому пониманию строения колец и модулей. В какой степени эта часть является вводной, можно пояснить, например, следующим замечанием: теорема плотности Шевалле — Джекобсона излагается не здесь, а получается в гл. 19 как следствие более общей теоремы Джекобсона и Джонсона — Уонга об условии на вторые аннуляторы для квазиинъективных модулей. Для полупростых модулей эта теорема дает теорему Тейта (см. Артин [50]). Вторая половина гл. 3 посвящена инъективным модулям, критерию инъективности Бэра, понятию инъективной оболочки модуля, которое было введено Экманом и Шопфом. Все это — основные орудия для изучения модулей, и, как мне кажется, важно, что они помещены в начале, а не в конце изложения предмета. Более подробный перечень тем предлагается во введении к этой главе. Мы откладываем какие-либо ссылки на гл. 1 и 2 до введения к тому 1.

Часть II в большой степени посвящена элементарному изложению теорем Веддербёрна — Артина о строении полупервичных колец (т. е. колец без нетривиальных нильпотентных идеалов), удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей правых идеалов (т. е. артиновых справа колец). Это классически полупростые кольца, т. е. кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой простых модулей, а если кольцо этого класса простое, то оно изоморфно кольцу $(n \times n)$-матриц над телом (гл. 7 и 8). Далее исследуется строение колец с классически полупростым правым кольцом частных. Сюда включены теоремы Голди, Лезьё — Круазо, а также теорема Левицкого (гл. 9) и теорема Фейса — Утуми о порядках в полулокальных кольцах матриц (гл. 10).

В гл. 7 требуется минимальное количество сведений из части I, перечисляемых во введении к части II. В ней содержится ряд теорем о простых кольцах, в частности теоремы Харта и Коззенса.

[1]) Правая область Ope — область целостности, обладающая правым телом частных D (Ope [31]). В рассматриваемом случае из теоремы Голди и теоремы Лезьё — Круазо, о которых пойдет речь ниже, следует, что A имеет (классическое) правое кольцо частных, изоморфное полному кольцу $(n \times n)$-матриц над D для некоторого (единственного) n.

Вводятся кольца многочленов и кольца дифференциальных многочленов. Доказывается теорема Гильберта о базисе. Устанавливается теорема Амицура о простоте кольца дифференциальных многочленов $A[y, D]$ над простым кольцом A нулевой характеристики с внешним дифференцированием D. Включены примеры Коззенса простых областей целостности с единственным простым модулем, который инъективен. (Для построения одной из областей Коззенса требуется существование универсального дифференциального поля относительно дифференцирования D, оно было получено Колчином [53], но его построение здесь не приводится.) Источником всех этих примеров (простых) областей целостности служат работы Ope [31], [33], Литтлвуда [33] и Джекобсона [47].

Часть II начинается (гл. 7) с элементарного доказательства важной теоремы Мориты о сбалансированных модулях, использующего лишь линейную и матричную алгебру. (Более идейное доказательство предлагается в гл. 4, в нем используются соображения, вытекающие из теоремы о соответствии.)

Правый R-модуль M называется сбалансированным, если канонический гомоморфизм кольца R в кольцо биэндоморфизмов (его называют также бицентрализатором или бикоммутатором [1])) модуля M является сюръективным. Классическая теорема Веддербёрна — Артина утверждает, что каждый минимальный правый идеал M простого артинова справа кольца R является сбалансированным модулем, и в этом случае кольцо R можно представить в виде кольца всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства над (вообще говоря, некоммутативным) телом $D = \mathrm{End}\, M_R$. Теорема Мориты (4.13, 7.1 и 7.3) применяется к произвольному кольцу R: *любой образующий M в категории* mod-R *сбалансирован, и, более того, M — конечно порожденный проективный левый B-модуль, где $B = \mathrm{End}\, M_R$* (M превращается в B-модуль каноническим образом). Если теперь R — простое кольцо, то легко проверяется, что любой ненулевой правый идеал M является образующим в категории mod-R и поэтому отображение $R \to \mathrm{End}_B M$ сюръективно. Кроме того, из простоты кольца R вытекает, что ядро этого отображения равно нулю, $R \approx \approx \mathrm{End}_B M$. Поэтому из теоремы Мориты следует общая теорема Веддербёрна — Артина (Риффель [65]). Если M — конечно порожденный проективный R-модуль, то при подходящем числе n в кольце $(n \times n)$-матриц B_n существует идемпотент e и имеет место кольцевой изоморфизм $R \approx eB_ne$. Кроме того, $B_neB_n = B_n$. Поэтому из теоремы Мориты вытекает результат Харта [67]. Если M — минимальный правый идеал кольца R, то в силу леммы Шура кольцо B является телом и потому M — конечномерное (в силу конечнопорожденности R-модуля M) векторное пространство над телом B. В этом случае M — свободный B-модуль, скажем

[1]) А иногда и вторым централизатором.— *Прим. перев.*

$M \approx B^n$. Тогда кольцо R изоморфно кольцу $(n \times n)$-матриц B_n. Таким образом, из теоремы Мориты следуют результаты Веддербёрна [08] и Артина [27]. Кроме того, если M — однородный правый идеал (т. е. каждый ненулевой подмодуль в нем неразложим в прямую сумму), то B — правая область Ope с телом частных D, а R обладает правым кольцом частных $Q(R) \approx D_m$ для некоторого числа m (теорема Голди [58], Лезьё — Круазо [59]).

Теорема о кольце эндоморфизмов для нётерова справа простого кольца R утверждает, что кольцо R изоморфно кольцу эндоморфизмов модуля без кручения U конечного ранга над правой областью Ope K, где в качестве U можно взять любой однородный правый идеал (Фейс [64]). [На самом деле R может быть любым простым кольцом с однородным правым идеалом U.] Из теорем Голди, Харта и Мориты, цитированных выше, следует, что U — конечно порожденный проективный модуль над правой областью Ope $B = \mathrm{End}\, U_R$. Обратная задача о том, когда кольцо A эндоморфизмов конечно порожденного проективного точного модуля U над правой областью Ope B является простым (нётеровым) кольцом, обсуждается в гл. 4 с использованием теоремы о соответствии. В этом случае центр C кольца B является полем, которое изоморфно центру кольца A, а подкольцо $B_0 = C + T$ содержит не более одного нетривиального идеала, а именно $T = \mathrm{tr}_B U$, и U —также конечно порожденный проективный модуль над кольцом B_0. Более того, имеется канонический изоморфизм $A \approx \mathrm{End}_{B_0} U$. *Это показывает, что значительная часть структурной теории простых нётеровых колец может быть сведена к выяснению строения правых областей Ope, содержащих не более одного нетривиального идеала.* Неизвестно, можно ли выбрать в качестве B_0 (и B) простую область целостности (см. гипотезы о простых кольцах, стр. 467—469 [1]). Однако возникающее таким образом кольцо B является простым, только когда кольцо R наследственно справа (предложение 4.40).

Глава 8 посвящена классически полупростым кольцам и полупростым модулям, а также теоремам Веддербёрна — Артина и результатам о глобальной размерности колец. Доказываются теоремы Ауслендера о глобальной размерности, а именно: правая глобальная размерность совпадает с точной верхней гранью проективных размерностей циклических правых модулей; если кольцо не является классически полупростым, то глобальная размерность равна точной верхней грани проективных размерностей правых идеалов, увеличенной на 1. Таким образом, $\mathrm{gl.dim}\, R \leqslant 1$, если каждый правый идеал кольца R проективен. (Такие кольца называются наследственными справа.) Доказывается теорема Гильберта о сизигиях в форме, предложенной Эйленбергом, Розенбергом и Зелинским, а именно: глобальная размерность кольца многочленов над кольцом R от n переменных равна глобальной размерности кольца R, увеличенной на n. Глава 8 завершается теоремой, утверждающей, что любое простое нётерово кольцо глобальной размерности $n \leqslant 2$ подобно правой области Ope. Заметим, что классическая теорема Веддербёрна — Артина для артиновых справа классически полупростых колец содержится здесь при $n = 0$.

[1]) А также прим. перев. к ним.— *Прим. перев.*

В гл. 9 доказываются теоремы Голди [58, 60] и Лезьё — Круазо [59], описывающие кольцо R, классическое правое кольцо частных $Q(R)$ которого — полупростое артиново кольцо. Под классическим правым кольцом частных Q понимается кольцо Q, содержащее кольцо R и такое, что: (1) каждый регулярный элемент (т. е. неделитель нуля) кольца R обратим в R; (2) каждый элемент $q \in Q$ можно записать в виде $q = ab^{-1}$, где $a, b \in R$. В этом случае говорят, что R — правый порядок кольца Q. Существование кольца Q влечет за собой условие Ope: для заданных элементов $a, b \in R$, где b — регулярный элемент, существуют $a_1, b_1 \in R$, b_1 — регулярный элемент, такие, что $ab_1 = ba_1$. Условие Ope необходимо и достаточно для того, чтобы существовало правое кольцо частных, и тогда кольцо частных можно построить из пар (a, b), где $a, b \in R$ и b — регулярный элемент (во многом эта конструкция похожа на построение рациональных чисел, исходя из целых чисел). Необходимое и достаточное условие Голди и Лезьё — Круазо для существования классически полупростого кольца частных $Q(R)$ заключается в следующем: R — кольцо без ненулевых нильпотентных идеалов (т. е. полупервичное кольцо), удовлетворяющее двум условиям обрыва возрастающих цепей идеалов, а именно условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных правых идеалов кольца R и условию обрыва возрастающих цепей прямых сумм правых идеалов кольца R. (Последнее условие равносильно тому, что инъективная оболочка $\hat{R}$ модуля R_R является конечной прямой суммой неразложимых модулей.) Кольцо R, удовлетворяющее двум последним условиям, называется правым кольцом Голди.

В том случае, когда $Q(R)$ — простое артиново кольцо, эта теорема приводит к (исторически первой) теории конечного представления произвольных первичных нётеровых справа колец: именно, кольцо R обладает правым кольцом частных $Q(R)$, которое изоморфно кольцу $(n \times n)$-матриц D_n над телом D, тогда и только тогда, когда R — первичное кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для правых аннуляторных идеалов и для прямых сумм правых идеалов. Таким образом, элементы кольца R представляются в этом случае как $(n \times n)$-матрицы над D. Это было доказано Голди [58] в том случае, когда $Q(R)$ — левое и правое кольцо частных, Лезьё и Круазо для случая, когда $Q(R)$ —

правое кольцо частных, но R — первичное кольцо, и Голди [60] для полупервичного кольца R. Мы приводим три независимых доказательства этой важной теоремы: одно в гл. 9 (Голди [69]), другое в гл. 16 (Габриель [62]) и, наконец, в гл. 19 (Фейс [72]). Доказательство Голди использует сингулярный идеал кольца в смысле Джонсона, который связан с вопросом существования максимального правого кольца частных Джонсона [51] и Утуми [56] (см. ниже). Доказательство Габриеля использует принадлежащее Гротендику и Габриелю понятие факторкатегории абелевой категории и локализующие функторы. Метод Габриеля также приводит к максимальному правому кольцу частных кольца с нулевым сингулярным идеалом. Последний вопрос рассматривается вновь с чисто теоретико-кольцевой точки зрения в гл. 19.

Третье доказательство явно использует максимальное правое кольцо частных в духе первоначального доказательства теоремы Голди, предложенного автором в 1961—1962 гг. (опубликовано в [67]), кроме того, первичные правые кольца Голди характеризуются как кольца, у которых существует неразложимый инъективный точный модуль E, не содержащий нетривиальных вполне инвариантных подмодулей и конечно порожденный над своим кольцом эндоморфизмов. В этом случае $D = \operatorname{End} E_R$ — тело и $Q = \operatorname{End}_D E$ — классическое правое кольцо частных кольца R. Полупервичное правое кольцо Голди обладает точным инъективным модулем F, являющимся прямой суммой конечного числа модулей, аналогичных описанному выше модулю E. При этом $B = \operatorname{End} F_R$ оказывается конечным произведением тел и $\operatorname{End}_B F$ — классическое правое кольцо частных.

Модуль M называется рациональным расширением подмодуля N (Финдлей — Ламбек [58]), если $\operatorname{Hom}_R(P/N, M) = 0$ для любого подмодуля P, такого, что $N \subseteq P \subseteq M$. Это равносильно тому, что для любого элемента $x \in M$ и ненулевого элемента $y \in M$ существует элемент $r \in R$, такой, что $xr \in N$ и $yr \neq 0$. Таким образом, любое рациональное расширение является существенным расширением. Каждый модуль N обладает максимальным рациональным расширением $\overline{N}$, определенным однозначно с точностью до изоморфизма над N. На самом деле $\operatorname{ann}_E \operatorname{ann}_S N$ — максимальное рациональное расширение, где E — инъективная оболочка модуля N и $S = \operatorname{End} E_R$. Максимальное рациональное расширение $\overline{R}$ модуля R_R является кольцом, содержащим R в качестве подкольца, которое называют (Джонсон [51], Утуми [56]) максимальным правым кольцом частных кольца R.

Правый сингулярный идеал кольца R определяется как множество всех элементов, правые аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами. Кольцо R называется антисингулярным, если этот идеал равен нулю. В этом случае $\overline{R}$ —

самоинъективное справа регулярное (в смысле Неймана) кольцо (Джонсон [51a], Джонсон и Уонг [59]). Кроме того, кольцо $\overline{R}$ классически полупросто тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей прямых сумм правых идеалов (тогда R удовлетворяет и условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторных идеалов). В этом случае $\overline{R}$ является (классическим) правым кольцом частных кольца R тогда и только тогда, когда кольцо R полупервично. Итак, для полупервичного правого кольца Голди максимальное правое кольцо частных $\overline{R}$ совпадает с кольцом $Q(R)$. (См. гл. 19.)

Глава 10 содержит обобщение Фейса [71b] теоремы Фейса — Утуми [65a]. Эта теорема выясняет, когда кольцо R обладает правым кольцом частных D_n, где соответственно D — классически полупростое кольцо или полулокальное кольцо. Последнее означает, что факторкольцо кольца D по радикалу классически полупросто. Теорема звучит одинаково во всех трех случаях. Именно, меняя, если это необходимо, матричные единицы кольца D_n, можно утверждать, что кольцо R содержит кольцо $(n \times n)$-матриц F_n над правым порядком F кольца D. (Если D_n является также и левым кольцом частных кольца R, то изменения матричных единиц не требуется.) Как было отмечено в уже упоминавшейся статье Фейса — Утуми [65a], в доказательстве теоремы не используется теорема Голди — Лезьё — Круазо. В качестве следствия получается теорема Голди [62]: *любое первичное кольцо главных правых идеалов является кольцом $(n \times n)$-матриц F_n над правой областью Оре F.*

Я уже дал очень краткие введения к частям I, II, и IV. Сейчас я проделаю то же самое для остальных частей книги. Часть III начинается с изложения классических свойств тензорных произведений, хотя в одном или двух местах сделаны ссылки на более общие свойства сопряженных слева функторов (гл. 5). В наиболее важной части гл. 11 излагаются основные свойства плоских модулей. Сюда входят: характеризация Лазара [64] [1]) плоского модуля как прямого предела конечно порожденных проективных модулей; характеризация регулярных (в смысле Неймана) колец Ауслендера [57] и Харады [56] как колец нулевой слабой глобальной размерности, т. е. колец, над которыми все модули плоские; характеризация Чейза [60] колец, которые сейчас называются когерентными слева кольцами (т. е. колец, в которых конечно порожденные левые идеалы конечно представимы).

Теоремы Мориты и их применения к группе Пикара появляются в гл. 12 с использованием тензорных произведений. В гл. 13

[1]) Эта теорема была независимо (и раньше) доказана В. Е. Говоровым (Говоров В. Е., *ДАН СССР*, 144, № 2 (1962), 965—967; *Алгебра и логика* (семинар) 2, № 6 (1963), 21—50).— *Прим. ред.*

даны приложения теоремы Веддербёрна — Артина к конечномерным алгебрам над полем (включая алгебраически замкнутые поля). Доказывается теорема Веддербёрна о сепарабельных алгебрах и, следовательно, теорема Машке о полупростоте групповых алгебр конечных групп над полями нулевой характеристики. Доказательства теорем Сколема — Нётер и Брауэра намечены в упражнениях гл. 13.

Часть V «Теория колец» [1]) (наибольшая часть текста) уже настолько велика, что трудно дать набросок ее содержания. Она включает широкое многообразие теорем о строении модулей над неполупростыми кольцами. Глава 17 посвящена модулям конечной длины, теоремам Куроша — Оре (для модулярных структур), Жордана — Гёльдера, Шрайера и Фиттинга.

В гл. 18 вводится радикал Джекобсона кольца и модуля (как пересечение максимальных подмодулей). Радикал характеризуется в духе Перлиса [42] и Джекобсона [45] как максимальный квазирегулярный идеал (идеал J называется квазирегулярным, если $1 + x$ — обратимый элемент для любого элемента $x \in J$). Кольцо R называется полулокальным, если $R/\mathrm{rad}R$ — классически полупростое кольцо, и локальным, если $R/\mathrm{rad}\,R$ — тело. Объект M абелевой категории C разлагается в прямую сумму конечного числа объектов с локальными кольцами эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_C M$ обладает аналогичным свойством. Это бывает тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{End}_C M$ полулокально и идемпотенты можно поднимать по модулю радикала. Среди других теорем упомянем теорему Гопкинса и Левицкого (утверждающую, что артиновы справа кольца являются нётеровыми справа), теорему Асано о примарных разложениях колец и китайскую теорему об остатках для взаимно простых идеалов.

В гл. 19 изучаются квазиинъективные модули (QI-модули) и их кольца эндоморфизмов. Основные результаты здесь следующие: теорема Уонга — Джонсона, описывающая QI-модули как вполне инвариантные подмодули своей инъективной оболочки, и теорема Утуми о том, что радикал кольца эндоморфизмов QI-модуля совпадает с множеством эндоморфизмов, ядра которых — существенные подмодули. (Кроме того, по модулю радикала кольцо эндоморфизмов такого модуля регулярно в смысле Неймана.) Это дает характеризацию радикала самоинъективного справа кольца. Приведен ряд теорем о модулях, конечно порожденных над их кольцом эндоморфизмов. Таким образом, каждый правый QI-модуль, конечно порожденный как модуль над своим кольцом эндоморфизмов, инъективен по модулю своего аннулятора. Кроме того, каждый правый QI-модуль конечно порожден над своим кольцом эндоморфизмов тогда и только тогда, когда исходное кольцо R артиново справа.

[1]) Составляющая содержание второго тома.— *Прим. ред.*

В гл. 19 также включены правые кольца частных Джонсона — Утуми и теорема Бернсайда. Глава 20 посвящена разложениям модулей в прямые суммы. Сюда включены теорема Фейса о Σ-инъективных модулях, теорема Матлиса — Паппа о разложимости инъективных модулей в прямую сумму неразложимых модулей, теорема Фейса — Уокера о разложимости модулей в прямую сумму модулей из некоторого множества. Мы откладываем теорему Чейза, выясняющую, когда прямое произведение проективных модулей проективно, до гл. 22, но предварительные леммы появляются уже здесь. В частности, замечание Басса о том, что прямое произведение бесконечного множества экземпляров абелевой группы $\mathbb{Z}$ не является свободным, выводится из лемм Чейза.

В гл. 22 классическая теория артиновых неполупростых колец рассматривается как часть теории совершенных колец в смысле Басса. Суть этой теории — достижение двойственности с инъективными оболочками в предположении о том, что правые R-модули обладают проективными накрытиями. Басс [60] установил, что такие кольца удовлетворяют условию минимальности для главных левых идеалов (и обратно). Название «совершенные кольца» отражает обилие хороших свойств у этих колец. Например, каждый проективный модуль (с той же стороны, что и проективные накрытия) изоморфен прямой сумме неразложимых модулей, а каждый неразложимый проективный модуль устроен наиболее простым из возможных способов: он изоморфен главному неразложимому правому идеалу. Базисный модуль полусовершенного кольца является прямым слагаемым каждого образующего. Доказывается теорема Бьёрка, утверждающая, что из условия минимальности для циклических подмодулей модуля вытекает условие минимальности для конечно порожденных подмодулей. Глава завершается изложением теории Брауэра блоков, которая обобщена на случай совершенных колец.

В гл. 23 и 24 изучается теория двойственности Мориты для категории mod-A правых A-модулей. Дуальным вариантом эквивалентности является двойственность $C \rightsquigarrow D$ между категориями: именно, пара контравариантных функторов $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$, для которых $TS \approx 1_D$ и $ST \approx 1_C$. В теореме Мориты выясняется, что двойственность между классом Серра $\mathscr{S}_A$ в категории mod-A, содержащим модуль A_A, и классом Серра ${}_B\mathscr{S}$ в B-mod, содержащим ${}_BB$, оказывается U-двойственностью, т. е. индуцируется функторами $T = \mathrm{Hom}_A(\ ,\ U)$ и $S = \mathrm{Hom}_B(\ ,\ U)$ для выбранного подходящим образом (B, A)-бимодуля U. Оказывается, что (B, A)-бимодуль U определяет U-двойственность тогда и только тогда, когда U — инъективный кообразующий как в mod-A, так и в B-mod, причем имеют место канонические изоморфизмы

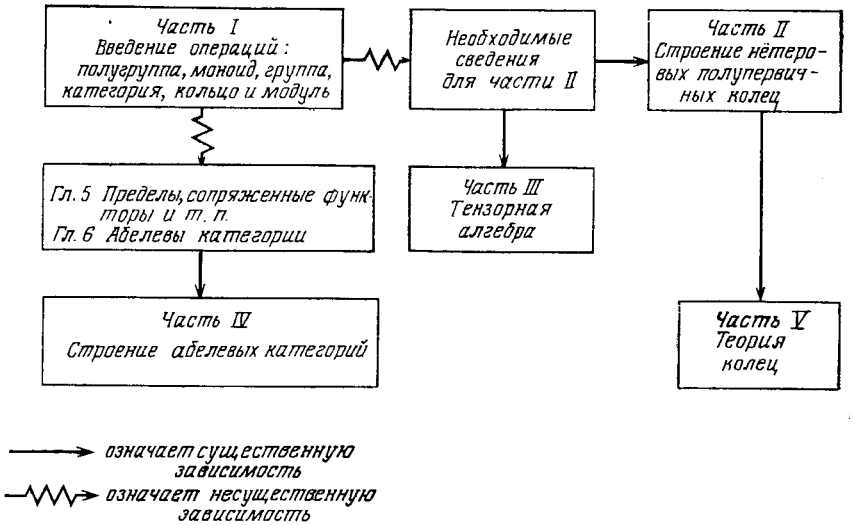
$A \approx \mathrm{End}_B U$ и $B \approx \mathrm{End}\, U_A$. В этом случае кольцо A должно быть полусовершенным, а если кольцо A артиново справа, то модуль U_A должен быть конечно порожденным. Обратно, если кольцо A артиново справа и U_A — конечно порожденный инъективный кообразующий, то U определяет U-двойственность $\mathscr{S}_A \rightsquigarrow {}_B\mathscr{S}$, где $B = \mathrm{End}\, U_A$. Квазифробениусовы кольца, изучаемые в гл. 24, обладают A-двойственностью из категории конечно порожденных правых A-модулей в категорию конечно порожденных левых A-модулей, а также рядом других интересных характеризаций.

Глава 25 посвящена цепным кольцам и более общему классу колец, над которыми каждый модуль является прямой суммой циклических модулей (эти кольца называются Σ-циклическими кольцами).

Глава 26 посвящена полупримитивным кольцам, т. е. кольцам, радикал Джекобсона которых равен нулю. Кольцо A называется примитивным (справа), если оно обладает простым точным правым модулем V. В этом случае кольцо A оказывается изоморфным плотному подкольцу кольца L всех линейных преобразований векторного пространства V над телом (в силу леммы Шура) его эндоморфизмов. [Плотность понимается в конечной топологии в кольце L (теорема плотности Шевалле — Джекобсона 19.22).] Кольцо R полупримитивно тогда и только тогда, когда оно изоморфно подпрямому произведению примитивных колец (Джекобсон [45]). Доказывается теорема Амицура о полупримитивности групповых алгебр над несчетными полями. Это требует в свою очередь теорем Амицура о радикале колец многочленов. Первичный радикал (Брауна — Маккоя) описывается в духе Левицкого.

Но об этом будет сказано больше в томе 2.

Приблизительная схема логической зависимости глав



Рекомендации читателю

Во-первых, надо отметить, что часть II зависит далеко не от всей части I. Часть II состоит из ряда разделов классической теории колец, изложенных с весьма традиционных точек зрения, хотя имеются и некоторые нововведения в гл. 7. Многое из материала части I включено либо в качестве общих сведений, либо для использования в какой-то мере в тексте следующей далее части II. Поэтому читатель, который хочет получить лишь отдельные сведения о кольцах из части II, может не обременять себя чтением всей части I.

Не нужно строго следовать за ходом изложения и в других случаях. Хорошее правило при чтении любой книги: пропускать

не интересующие Вас части и чередовать более трудные главы с более легкими.

Некоторые указания на связи между результатами различных глав разбросаны по тексту в виде перекрестных ссылок. Кроме того, трудные упражнения в конце каждой из глав часто приводят решившего их к доказательствам, имеющимся в следующих главах. Упражнения служат также и для того, чтобы привлечь внимание к примыкающим результатам, отраженным в литературе. В этих случаях я попытался дать полную библиографическую справку. Но в отличие от других авторов я не пытался включать в упражнения важные теоремы, такие, как теорема Кона и Хохшильда о том, что правые идеалы свободной алгебры над полем свободны (приведенная в гл. 8). Вместо этого я поощрял читателя к размышлениям о примыкающих теоремах, выходящих за рамки текста. [Я думаю, что некоторые студенты смогут сделать многие упражнения, но, например, в случае теоремы о подгруппе (гл. 2) это маловероятно!]

ПРЕДИСЛОВИЕ К Т. 1

В теоретико-множественном введении изложены необходимые основные сведения из теории множеств и кардинальных (ординальных) чисел. Понятия группы (и теоремы Нётер о гомоморфизмах), моноида, категории, функтора вводятся в гл. 1. Произведения, копроизведения и функтор свободы в различных категориях составляют предмет гл. 2. Кольца, модули, идеалы, а также возникшие в работах Бэра, Экмана и Шопфа понятия инъективности, существенного расширения и инъективной оболочки появляются в гл. 3. Глава 4 содержит элементарное (без тензорных произведений) изложение теорем Мориты о эквивалентности категорий модулей над двумя кольцами. Основой для него служит теорема о соответствии для проективных модулей, из которой выводится бóльшая часть построенной к настоящему времени структурной теории некоммутативных нётеровых простых колец. В гл. 5 и 6 рассматриваются пределы, функторы, сохраняющие пределы, аддитивные и абелевы категории, свободные алгебры, (полу)-групповые алгебры и алгебры многочленов, а также теоремы о сопряженных функторах, принадлежащие Эйленбергу, Фрейду, Габриелю, Кану, Митчеллу и Уотсу. Эти шесть глав составляют часть I.

Часть II, в основном независимая от части I, состоит из четырех глав, которые посвящены структурной теории полупервичных колец Голди, развитой в работах Веддербёрна — Артина, Гопкинса, Левицкого, Голди, Лезьё — Круазо, Фейса — Утуми, Харта и Робсона, причем здесь центральную роль играют области Оре [1]).

Часть III: тензорная алгебра в духе Кронекера, Уитни, Мориты и ее приложения к теоремам Мориты, к группе Пикара категории модулей и к теореме Веддербёрна о конечномерных алгебрах над

[1]) Принадлежащие Амицуру, Коззенсу и Литтлвуду примеры простых областей Оре приведены в гл. 7.

телом. Группа Брауэра и теоремы Сколема — Нётер включены только в упражнения (к гл. 13). Основные результаты о плоских модулях содержатся в гл. 11.

В часть IV, которая завершает т. 1, вошли категории Гротендика, теоремы Габриеля о локализующих функторах, категориях частных и радикальных фильтрах идеалов, теоремы о вложении Фрейда — Митчелла — Габриеля и теорема Габриеля — Попеску. Кольца частных Голди (о которых шла речь в части II) и максимальные кольца частных Джонсона — Утуми (которые с теоретико-кольцевых позиций изучаются в т. 2) возникают здесь как примеры локализации Габриеля.

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ВВЕДЕНИЕ

Основным строительным материалом математики являются множества, однако никто не может сказать, что это такое. Аксиоматическая трактовка теории множеств постулирует существование некоторых неопределяемых, или примитивных, объектов, называемых множествами, вместе с символами и аксиомами, регулирующими их использование. Можно провести наглядную аналогию с геометрией, где задаются неопределяемые объекты, называемые точками, прямыми и плоскостями, вместе с системой аксиом, связывающих эти объекты друг с другом. Аксиомой проективной геометрии является

$\mathcal{P}$. *Если* L_1 *и* L_2 *— различные прямые, то существует единственная точка* P, *лежащая на обеих прямых* L_1 *и* L_2.

Здесь отношение «P лежит на L_1» не определяется. Другая аксиома:

$\mathcal{P}^*$. *Если* P_1 *и* P_2 *— различные точки, то существует единственная прямая* L, *проходящая через обе точки* P_1 *и* P_2.

Любая совокупность объектов, которая, если подходящим образом назвать входящие в нее объекты «точками» и «прямыми», удовлетворяет аксиомам геометрии, годится в качестве точек и прямых, так же как и любая другая такая совокупность. *Должно быть возможным заменить во всех геометрических утверждениях слова* «точка», «прямая», «плоскость» словами «стол», «стул», «кружка» (Д. Гильберт, цитируется по Вейлю [44, стр. 635]). Тем не менее, рассматривая аксиомы, мы скоро обнаруживаем, что некоторые геометрические объекты не являются «точками», а некоторые не являются «прямыми». Аналогичным образом, в теории множеств, после того как мы назвали наших кандидатов на роль множеств и перечислили неопределяемые символы и аксиомы, ими управляющие, мы обнаруживаем, что не все рассматриваемые нами объекты являются множествами. Например, как заметил Кантор, не существует такого множества, как «множество всех множеств».

Мы не собираемся давать здесь полный обзор теории множеств. Существует много превосходных работ по этому вопросу, часть из которых перечислена в приведенном нами списке литературы, и требуется значительное количество времени, чтобы овладеть теми частями теории множеств, которые должен знать каждый математик. С другой стороны, мы не хотели бы обсуждать теорию множеств только с утилитарной точки зрения. Это было бы несправедливо по отношению к этой прекрасной и признанной

части математики. Кроме того, такие вопросы, как аксиома выбора, теорема о полном упорядочивании и континуум-гипотеза, всегда вызывают споры и тем самым стимулируют развитие математики. В результате этих споров студент узнает, что математика не является «островом спокойствия», как ему показалось при изучении дифференциального и интегрального исчисления и теории функций комплексного переменного. Я считаю, что ему важно это узнать.

Минимальная цель этого введения — снабдить читателя удобными справками о терминологии, обозначениях и теоремах теории множеств, используемых в этой книге. Предполагается, что многие читатели пропустят его; некоторые, однако, могут найти этот краткий обзор полезным.

Основные понятия теории множеств

В математике используются следующие символы:

$\sim$	$\&$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
не	*и*	*или*	*влечет за собой*	*тогда и только тогда*

$\forall$	$\exists$	$=$	$(\ ,\ )$	$\{\ ,\ \}$
для всех	*существует*	*равняется*	*круглые скобки*	*фигурные скобки*

Символы из первого ряда называются пропозициональными связками. Символ $\forall$ называется квантором *всеобщности*, а $\exists$ — квантором *существования*. Круглые и фигурные скобки группируют выражения для того, чтобы ограничить область действия кванторов и образовать грамматически правильные высказывания математического языка. Правила для образования верных высказываний известны как исчисление высказываний или пропозициональное исчисление. Эти правила, подобные правилам обычной грамматики, чаще всего употребляются неосознанно. Формальный язык, как подчеркивается в превосходной книге Коэна [69] (стр. 22—26), особенно ясно показывает, что исчисление высказываний является подсистемой исчисления предикатов. Однако большей частью мы используем традиционные неформальные, или «наивные», математический язык и теорию множеств.

Натуральные числа

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

и целые числа

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots$$

— хорошо известные примеры множеств. Обычные дроби a/b, где a и b — целые числа, называются рациональными числами.

Вот стандартные обозначения для этих и других множеств:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
натуральные числа	*целые*	*рациональные*	*действительные*	*комплексные*

Символ

$$\in$$

знак принадлежности

употребляется, чтобы связать множества x и y следующим образом:

$$x \in y,$$

что означает

$$x \text{ — } \textit{элемент из } y$$

(x *принадлежит* y, x *лежит в* y, x *содержится в* y — все это одно и то же).

Аксиомы теории множеств Цермело—Френкеля

Аксиомы теории множеств, предложенные Цермело [08] и видоизмененные Френкелем [22], обычно упоминаются как теория множеств ZF. (Мы следуем Коэну [69, стр. 88 и далее].) Они перенумерованы как аксиомы ZF_1 — ZF_9. Неопределяемые основные понятия в ZF — множество, $\in$ и $=$.

ZF_1. Аксиома экстенсиональности

$$\forall A,\ B\,(\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B).$$

Другими словами, два множества A и B **равны**, если они имеют в точности одни и те же элементы, или, эквивалентно, множество определяется своими элементами. Интуитивно ясно, что если A и B имеют одни и те же элементы, то одно можно заменять другим в любом высказывании независимо от его истинности или ложности. Символ $A \neq B$ обозначает отрицание того факта, что $A = B$, т. е. $\sim (A = B)$; символ

$$a \notin B$$

обозначает отрицание того факта, что $a \in B$, т. е. $\sim (a \in B)$.

Символ

$$A \subseteq B$$

определяется так:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этом случае мы говорим, что A является **подмножеством** множества B (A *содержится в* B, A *включается в* B или B *содержит* A, все это означает одно и то же). Если $A \subseteq B$, но $A \neq B$, то A

является **собственным** подмножеством множества B. Если множество A не является подмножеством в B, то мы пишем $A \not\subseteq B$ или $B \not\supseteq A$.

ZF_2. Аксиома пустого множества

$$\exists x \forall y\ (y \notin x).$$

Эта аксиома утверждает существование по меньшей мере одного множества. Определенное таким образом множество x называется **пустым** множеством. Из ZF_1 следует, что существует единственное пустое множество, и мы его обозначим через $\varnothing$.

ZF_3. Аксиома неупорядоченных пар

$$\forall A, B\, \exists C\, \forall x\ (x \in C \Leftrightarrow x = A \vee x = B).$$

Так определенное множество C называется **неупорядоченной парой** $\{A, B\}$. Это множество, состоящее из элементов A и B, где A и B — множества. Символ $\{A\}$ обозначает $\{A, A\}$ для любого множества A и называется **одиночкой** A.

Упорядоченная пара $\langle A, B\rangle$ определяется как

$$\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}.$$

Легко вывести, что

$$\langle A, B\rangle = \langle C, D\rangle \Rightarrow A = C \,\&\, B = D.$$

(Эта импликация часто используется для определения упорядоченной пары.)

Теперь мы используем понятие упорядоченной пары для определения функции. Пусть A и B — множества. **Функцией** f называется множество, состоящее из упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, где $x \in A$, $y \in B$, по одной для каждого $x \in A$, т. е.

$$\langle x, y\rangle \in f \,\&\, \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z.$$

Синонимом функции является **отображение**. Множество A называется **областью определения** функции f, множество B — **областью значений**, а множество [1]) всех $y \in B$, таких, что существует $x \in A$, для которого $\langle x, y\rangle \in f$, называется **образом** функции f и обозначается через $\operatorname{im} f$. Через $f\colon A \to B$ обозначается функция f с областью определения A и областью значений B.

Символ

$$f \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y \end{cases}$$

[1]) Для существования множества, обладающего этим свойством, требуется некоторая аксиома. См. аксиому ZF_{6_n}. Термины «область определения» и «область значений» будут употребляться в более общем категорном смысле, определяемом в гл. 1, стр. 88.

означает ту же функцию и, кроме того, что $\langle x, y\rangle \in f$. То же самое можно высказать, говоря, что $f\colon A \to B$ является функцией, определяемой правилом $f\colon x \mapsto y$. Символ $y = f(x)$ используется как синоним выражения $\langle x, y\rangle \in f$, и тогда мы говорим, что *y является образом, или значением, функции f на элементе* (или *в точке*) x.

Функция $f : A \to B$ называется также **семейством элементов** (или **множеств**), **индексированных множеством** A. Интуитивно мы можем представлять себе его как множество элементов из B вида $f(a)$ для некоторого $a \in A$. Символ $\{x_a\}_{a\in A}$, или $\{x_a \mid a \in A\}$, будет обозначать семейство элементов из B, где $x_a = f(a) \in B$ для всех $a \in A$. **Последовательность элементов из** B — это функция $f\colon \mathbb{N} \to B$. Таким образом, полагая $x_i = f(i)$, получаем

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots.$$

Если $b \in B$, а A — произвольное множество, то существует отображение

$$b_{\text{const}} \begin{cases} A \to B \\ a \to b, \end{cases}$$

называемое **константой** (или **постоянным** отображением), определяемой элементом b.

ZF_4. Аксиомы объединения

$$\forall A \exists B \forall x\ (x \in B \Leftrightarrow \exists X\ (x \in X \,\&\, X \in A)).$$

Если A — множество, то B — множество, элементы которого являются элементами множеств, принадлежащих A. Множество B называется **объединением** множеств из A. Это множество обозначается через $\bigcup\limits_{X\in A} X$, или если A является семейством множеств, индексированных множеством I, то то же самое означает символ

$$\bigcup_{i\in I} X_i.$$

Символ

$$Z = X \cup Y$$

используется для обозначения объединения X и Y в случае, когда $A = \{X, Y\}$. Таким образом, $t \in Z$ тогда и только тогда, когда $t \in X$ или $t \in Y$.

Пересечение определяется следующим образом:

$$\forall A \exists B \forall x\ (x \in B \Leftrightarrow \forall X \in A\ (x \in X)).$$

Множество B состоит из тех элементов, которые являются элементами каждого множества из A. Существование пересечения заданных множеств следует из аксиомы $ZF_{6_n'}$. Это множество

обозначается через

$$\bigcap_{X \in A} X$$

и называется **пересечением семейства множеств** A. Если $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство множеств, индексированных множеством I, то пересечение обозначается через

$$\bigcap_{i \in I} X_i.$$

В случае когда $A = \{X, Y\}$, используется обозначение $Z = X \cap Y$. Таким образом, $t \in Z$ тогда и только тогда, когда $t \in X$ и $t \in Y$. Заметим, что

$$\forall X \forall Y (X = X \cap Y \Leftrightarrow X \subseteq Y).$$

Семейство множеств $\{X_i\}_{i \in I}$ называется **свободным**, когда $X_i \cap X_j$ пусто для любых $i, j \in I$, $i \neq j$.

Пересечение дуально объединению в смысле, формулируемом принципом двойственности (теорема 10).

Пусть P — свойство, которым могут обладать или не обладать некоторые элементы множества A и такое, что можно определить, обладает ли данный элемент $x \in A$ свойством P. (Свойство определено аксиомой ZF_{6_n} и обсуждается после аксиом ZF.) Тогда множество, состоящее из всех элементов множества A, обладающих свойством P, обозначается символом

$$\{x \in A \mid x \text{ обладает свойством } P\}.$$

Другими словами, символ | читается «такой, что». Например, если B — подмножество в A, то

$$\{x \in A \mid x \notin B\}$$

— подмножество в A, называемое **дополнением подмножества** B **в** A (или **относительным дополнением множества** B). Это подмножество обозначается через $A - B$. В действительности $A - B$ имеет смысл, даже если B не содержится в A. Таким образом,

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Формулы де Моргана для семейства $\{X_i\}_{i \in I}$ подмножеств множества U устанавливают, что

$$U - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (U - X_i)$$

и

$$U - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (U - X_i).$$

Это легко проверяемая иллюстрация дуальности пересечения и объединения.

ZF_5. Аксиома бесконечности

$$\exists x (\varnothing \in x \,\&\, \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Этот влечет за собой существование множества, имеющего бесконечно много элементов. (Бесконечное множество может быть определено как множество, эквивалентное некоторому своему собственному подмножеству. Эквивалентность понимается в смысле теоремы 3. Счетное бесконечное множество в этом смысле эквивалентно $\mathbb{N}$.) Кроме того, из ZF_2 и ZF_3 следует существование бесконечного множества множеств.

Для описания следующей аксиомы отсылаем читателя к Коэну [69, стр. 21] за определением «свободных переменных» с тем, чтобы занумеровать счетную совокупность формул $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ с по меньшей мере двумя свободными переменными, где k зависит от n. Восклицательный знак «!» употребляется для обозначения единственности.

ZF_{6_n}. Аксиома подстановки

$$\forall t_1, \ldots, t_k (\forall x \exists! y (A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow \forall u \exists v B(u, v))),$$

где

$$B(u, v) \equiv \forall r (r \in v \Leftrightarrow \exists s (s \in u \,\&\, A_n(s, r; t_1, \ldots, t_k)))$$

и формула $B(u, v)$ не содержит свободных вхождений переменной y.

Эту аксиому можно выразить следующим образом. Если для фиксированных $t_1, \ldots, t_k$ справедливо, что $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ однозначно определяет y как функцию от x, скажем $y = f(x)$, то для каждого u значение функции f на элементе u является множеством. (Заметим, что $t_1, \ldots, t_k$ играют лишь роль «параметров» в определении функции f.) Аксиома ZF_{6_n} — сильная аксиома, так как она позволяет образовывать новые множества, если уже имеются множества, выбранные из всего мира множеств (определяемого непосредственно).

Более слабой является следующая аксиома.

$\mathrm{ZF}_{6'_n}$. Аксиома выделения

$$\forall t_1, \ldots, t_k \forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \,\&\, A_n(z; t_1, \ldots, t_k)).$$

Эту аксиому можно выразить утверждением, что для любого x и свойства, определяемого формулами $A_n(z; t_1, \ldots, t_k)$, пробегающими все формулы, имеющие хотя бы одну свободную переменную и не содержащие свободных вхождений переменной y, существует

множество y, состоящее из всех тех z в x, которые обладают данным свойством. (Как мы отмечали после ZF_4, эта аксиома позволяет образовывать пересечение любого семейства подмножеств данного множества.)

ZF_7. Аксиома степени

$$\forall A \exists X \forall B\,(B \in X \Leftrightarrow B \subseteq A).$$

Определенное таким образом множество X является множеством всех подмножеств множества A и обозначается через $\mathrm{Pow}\,A$. Оно называется **булеаном или степенью множества A**. Из аксиомы степени следует существование несчетных множеств, поскольку, согласно теореме Кантора (теорема 5), $\mathrm{Pow}\,A$ «больше», чем A. Таким образом, если A — произвольное бесконечное счетное множество (например, $\mathbb{N}$), то $\mathrm{Pow}\,A$ несчетно. (См. теорему 43, которая сравнивает $\mathrm{Pow}\,\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$.)

ZF_6. Аксиома выбора

Пусть I — непустое множество и $\{X_i\}_{i \in I}$ — непустое семейство непустых множеств. Тогда аксиома выбора представляет собой утверждение, что существует отображение

$$f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i,$$

такое, что

$$f(i) \in X_i$$

для всех $i \in I$. Другими словами, если задано отображение непустого множества I, скажем $\{\langle i, X_i\rangle\}_{i \in I}$, такое, что X_i — непустое множество при любом $i \in I$, то существует другое отображение $\{\langle i, f(i)\rangle\}_{i \in I}$, такое, что $f(i) \in X_i$ для любого $i \in I$. Из этой аксиомы следует, что для всех $i \in I$ можно одновременно выбрать по одному элементу $x_i \in X_i$.

Декартово произведение $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i \in I} X_i$ семейства множеств $\{X_i\}_{i \in I}$ определяется как множество всех отображений

$$f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i,$$

таких, что

$$\forall i \in I\,(f(i) \in X_i).$$

Иначе говоря, *аксиома выбора утверждает, что декартово произведение непустого семейства непустых множеств непусто.*

Если $X_i = X_j = X$ для всех $i, j \in I$, то обозначим $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i \in I} X_i$ через X^I. В этом случае $X^I \neq \varnothing$ без аксиомы выбора, поскольку X^I содержит x_{const}, где $x \in X$.

ZF_9. Аксиома регулярности

$$\forall x \exists y\,(x = \varnothing \vee (y \in x \,\&\, \forall z\,(z \in x \Rightarrow \sim z \in y))).$$

Эта аксиома запрещает существование бесконечных убывающих последовательностей $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, таких, что $x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и из нее следует, что $x \notin x$ для любого x.

Этим завершается список аксиом теории множеств ZF. Аксиома бесконечности необходима для классической математики, так как существует модель M теории множеств, которая удовлетворяет другим аксиомам, но содержит только конечные множества. Таким примером является множество M конечных множеств, состоящее из пустого множества $\varnothing$, «непосредственно следующего» [1]) за ним множества $\varnothing \cup \{\varnothing\}$ и т. д.

На первый взгляд в ZF конечное число аксиом. В действительности, аксиома подстановки требует бесконечного числа высказываний. По существу в аксиоме подстановки утверждается, что если $y = f(x)$ — функция, определяемая свойством A, то область значений f на любом множестве u является множеством. Однако, чтобы аксиоматизировать понятие «свойство», необходимо бесконечное число высказываний. Тем не менее мы можем конечным образом аксиоматизировать классы с помощью аксиом GB_1 — GB_{18}, приводимых далее.

Аксиомы Гёделя—Бернайса

Будем называть это GB-системой (или теорией классов). Примитивные объекты здесь называются классами.

GB. Аксиомы для множеств

GB_1. $Y \in X \Rightarrow Y$ — *множество*.

Эта аксиома утверждает, что каждый элемент класса является множеством. Если понятие класса является единственным неопределяемым понятием, то эта аксиома определяет «множество».

Далее идут аксиомы GB_2 — GB_7, повторяющие аксиомы ZF_1 — ZF_5 и ZF_7 в теории множеств ZF с заменой слова «множество» словом «класс».

[1]) В оригинале «succesor». Множество M есть не что иное, как обычный натуральный ряд.— *Прим. перев.*

GB_8. Аксиома подстановки

$\forall X\,(\forall u \exists!\, v\,\langle u, v\rangle \in X \Rightarrow \forall u \exists v$ (v — образ функции, определенной классом X, на u).

Эта аксиома устанавливает, что если $y = \varphi(x)$ является функцией, определенной некоторым свойством, т. е. классом, то для любого множества u существует значение φ на u.

GB. Аксиомы для образования классов

GB_9. $\exists X \forall a\,(a \in X \Leftrightarrow \exists b \exists c\,(a = \langle b, c\rangle \,\&\, b \in c))$.

GB_{10}. $\forall X \forall Y \exists Z \forall u\,(u \in Z \Leftrightarrow u \in X \,\&\, u \in Y)$.

GB_{11}. $\forall X \exists Y \forall u\,(u \in Y \Leftrightarrow u \notin X)$.

GB_{12}. $\forall X \exists Y \forall u\,(u \in Y \Leftrightarrow \forall v\,(\langle v, u\rangle \in X))$.

GB_{13}. $\forall X \exists Y \forall u\,(u \in Y \Leftrightarrow \exists r \exists s\,(u = \langle r, s\rangle \,\&\, s \in X))$.

GB_{14}. $\forall X \exists Y \forall a\,(a \in Y \Leftrightarrow \exists b, c\,(\langle b, c\rangle = a \,\&\, \langle c, b\rangle \in X))$.

GB_{15}. $\forall X \exists Y \forall u\,(u \in Y \Leftrightarrow \exists a, b, c\,(\langle a, b, c\rangle \in X \,\&\, \langle b, c, a\rangle \in Y \,\&\, \&\, \langle b, c, a\rangle = u))$.

GB_{16}. $\forall X \exists Y \forall u\,(u \in Y \Leftrightarrow \exists a, b, c\,(\langle a, b, c\rangle \in X \,\&\, \langle a, c, b\rangle \in \in Y \,\&\, \langle a, c, b\rangle = u))$.

Естественно называть аксиому GB_9 аксиомой $\in$-отношения, аксиому GB_{12} — аксиомой области значений и аксиому GB_{13} — аксиомой декартова произведения. Аксиомы GB_{14} — GB_{16} являются аксиомами «перестановки».

GB_{17}. Аксиома выбора

$$\exists X \forall a\,(a \neq \varnothing \Rightarrow \exists!\, u\,(u \in a \,\&\, \langle a, u\rangle \in X)).$$

Таким образом, существует класс, содержащий по одному элементу из каждого множества.

GB_{18}. Аксиома регулярности

$$\forall X\,(X \neq \varnothing \Rightarrow \exists u\,(u \in X \,\&\, \forall y\,(y \in X \Rightarrow y \notin u))).$$

Замечания.

1. Каждая теорема теории ZF является теоремой в GB и каждая теорема из GB, в которой говорится только о множествах, является теоремой в ZF (см. Коэн [69, стр. 149]).

2. Из-за аксиомы подстановки число аксиом в ZF бесконечно, в то время как в GB число аксиом конечно (см. Коэн [69, стр. 163]).

3. Гёдель [40] доказал, что аксиома выбора (AC) (а также обобщенная континуум-гипотеза (GCH), которая формулируется далее в теореме 39) совместима с GB-аксиомами для классов.

4. Коэн [63, 64] доказал, что аксиома выбора (а также и GCH) независима от остальных аксиом теории GB.

5. Серпинский [47] доказал, что из GCH следует AC.

Множества и классы

Математика длительное время развивалась, не различая множество и класс; однако парадокс Рассела (стр. 44) изменил положение. Теорема о вложении абелевых категорий в категорию абелевых групп 14.21, теорема Фрейда о сопряженном функторе 5.50 и теорема Уокера и автора 20.8 различают множество и класс [1]).

Универсум

Универсум — непустое множество U, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если $X \in U$, то $X \subseteq U$.

2. Если $X \in U$, то $\operatorname{Pow} X \in U$.

3. Если $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство множеств, где $I \in U$ и $X_i \in U$ для любого $i \in I$, то $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \in U$.

4. Если $X, Y \in U$, то упорядоченная пара $\langle X, Y\rangle$ принадлежит U.

Аксиома, утверждающая, что каждое множество является элементом некоторого универсума, приводит к существованию бесконечных множеств (ср. Коэн [68, стр. 18]).

Упражнения. Пусть U — универсум.

1. Если $X \in U$ и Y — множество, содержащееся в X, то $Y \in U$.

2. Если $X \in U$ и $Y \in U$, то $X \cup Y \in U$, $\{X, Y\} \in U$ и $X \times \times Y \in U$.

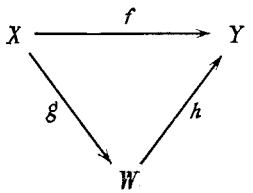
3. Если $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство множеств, такое, что $I \in U$ и $X_i \in U$ для любого $i \in I$, то $\bigtimes\limits_{i \in I} X_i \in U$.

---

[1]) Обозначение 20.8 отсылает к теореме 8 гл. 20.

Диаграммы

Диаграмма

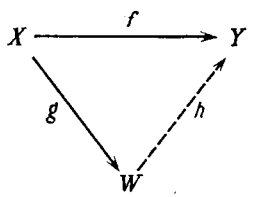


означает, что X, Y и W — множества и что f: $X \to Y$, g: $X \to W$ и h: $W \to Y$ — отображения. Такая диаграмма называется **коммутативной**, если $hg = f$. Произвольная многоугольная диаграмма коммутативна, если коммутативен каждый ее треугольник [1]).

Дополнение диаграммы

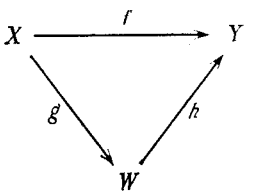
Следующие высказывания I и II по определению имеют одно и то же значение:

I. Диаграмма

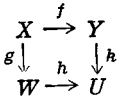


может быть дополнена (с помощью отображения h: $W \to Y$).

II. Существует отображение h: $W \to Y$ и коммутативная диаграмма

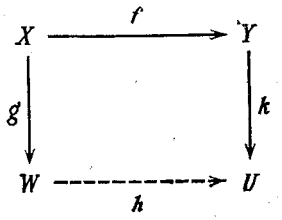


[1]) Это определение автора не достаточно точно. Под коммутативной диаграммой понимают такую сеть изображающих отображения стрелок между множествами, что любые два пути (идущие в направлении стрелок) из одного множества в другое определяют одно и то же отображение между этими множествами. На практике большинство диаграмм составляется из треугольников или квадратов. Коммутативность квадратной диаграммы



означает, что $hg = kf$. — *Прим. перев.*

Аналогично, утверждение, что диаграмму



можно дополнить, означает по определению, что существует отображение h: $W \to U$, такое, что эта диаграмма коммутативна.

Введенная терминология будет использоваться в дальнейшем без дополнительных пояснений для диаграмм, состоящих из объектов и морфизмов, в абстрактных категориях.

Произведение и ограничение

Пусть X, Y, U и V — множества, а

$$f\colon X \to Y,\quad g\colon Y \to U,\quad h\colon U \to V$$

— отображения. Тогда отображение

$$gf \begin{cases} X \to U \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

называется **произведением** (или **композицией**) отображений f и g, обозначаемым через gf или $g \circ f$ [1]). (Доказательство существования произведения?) [2]) Умножение отображений **ассоциативно** в том смысле, что

$$(hg)\,f = h\,(gf).$$

(Множество отображений $X \to X$ дает пример моноида, определяемого в гл. 1.)

Только что введенное обозначение gf для произведения двух отображений может привести к недоразумениям, поскольку пер-

[1]) Термин «произведение» используется также и в смысле «прямое произведение» (см. стр. 59). Мы, как правило, воздерживаемся от использования реже употребляемого в русской литературе термина «композиция», поскольку из контекста всегда ясно, о каком понятии идет речь. — *Прим. ред.*

[2]) Фразами такого рода автор призывает читателя самостоятельно провести соответствующее доказательство. — *Прим. ред.*

вое отображение f следует за g в gf. Однако написание сомножителей в другом порядке тоже приводит к путанице. Например, $fg(x)$ должно было бы равняться $g(f(x))$. Из соображений симметрии мы иногда употребляем запись $(x)f$ для значения f на элементе $x \in X$ вместо введенного ранее символа $f(x)$. При этом более удобным для произведения является символ fg. Таким образом, в этом случае $(x)fg = ((x)f)g$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, а U — подмножество в X. Тогда существует отображение

$$\begin{cases} U \to Y \\ u \mapsto f(u), \end{cases}$$

называемое **ограничением** f на U и обозначаемое через $f \mid U$. (Доказательство существования ограничения ?) Если $h\colon U \to Y$ и $f : X \to Y$ — такие отображения, что $h = f \mid U$, то f называется **продолжением** h на X, и мы говорим, что f **продолжает или индуцирует** h. Отображение

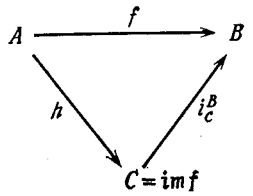
$$1_X \begin{cases} X \to X \\ x \mapsto x \end{cases}$$

— **тождественное** отображение. Таким образом, $1_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Отображение $i_U^X\colon U \to X$, индуцированное тождественным отображением $1_X : X \to X$, называется **включением** U в X. Мы обозначаем это включение также через 1_U^X. Заметим, что любое отображение $h : U \to Y$ можно продолжить до отображения $f\colon X \to Y$, например, взяв произвольный элемент $y \in Y$ и определив f так, что $f \mid U = h$ и $f \mid (X - U) = y_{\text{const}}$. Вообще говоря, h может быть продолжено многими способами.

Если $f\colon A \to B$ — отображение, то $\operatorname{im} f$ — подмножество в B, состоящее из всех $b \in B$, таких, что $b = f(a)$ для некоторого $a \in A$. Если $\operatorname{im} f \neq B$, то существует другая функция $h\colon A \to \operatorname{im} f$, определяемая равенством $h(a) = f(a)$ для всех $a \in A$. Мы будем различать отображения f и h. На самом деле, если $C = \operatorname{im} f$, то

$$f = i_C^B h,$$

где $i_C^B : C \to B$ — включение, диаграмма



коммутативна, и мы говорим, что $h\colon A \to \operatorname{im} f$ **индуцировано** f.

Отображение $f : X \to Y$ называется **наложением или сюръективным отображением**, если $\operatorname{im} f = Y$, **вложением или инъективным отображением**, если $f(x) = f(x')$ влечет за собой $x = x'$ для любых $x, x' \in X$, **взаимно однозначным или биективным отображением**, если f — вложение и наложение одновременно. Биективное отображение $X \to X$ называется **перестановкой** [1]). Символ $f : X \leftrightarrow Y$ будет означать, что f биективно. Заметим, что если $f\colon X \to Y$ — вложение, то существует единственное отображение $h\colon \operatorname{im} f \to X$, такое, что $h(f(x)) = x$ для всех $x \in X$ (на самом деле, если $g\colon Y \to X$ — произвольное отображение, индуцирующее h, то $gf = 1_X$). Таким образом, вложение $f\colon X \to Y$ индуцирует взаимно однозначное отображение $X \to \operatorname{im} f$.

1. **Предложение.** *Пусть $f\colon A \to B$ — отображение непустых множеств. Тогда*

1.1. *Отображение f инъективно в том и только том случае, когда существует отображение $g\colon B \to A$, такое, что $gf = 1_A$.*

1.2. *Отображение f сюръективно в том и только том случае, когда существует отображение $g\colon B \to A$, такое, что $fg = 1_B$.*

1.3. *Отображение f биективно в том и только в том случае, когда существует отображение $g\colon B \to A$, такое, что $gf = 1_A$ и $fg = 1_B$.*

Доказательство 1.1. Предположим, что $gf = 1_A$ для некоторого $g\colon B \to A$. Если $a, a' \in A$ и $f(a) = f(a')$, то

$$a = 1_A(a) = gf(a) = gf(a') = 1_A(a') = a'.$$

Таким образом, f — вложение. Обратно, если f — вложение и $C = \operatorname{im} f$, то существует отображение $h\colon C \to A$, определяемое формулой $f(a) \mapsto a$ для любого $a \in A$. Если $g\colon B \to A$ — любое отображение, продолжающее h, то $gf = 1_A$.

Доказательство 1.2. Если $g\colon B \to A$ удовлетворяет заданным условиям и $b \in B$, то

$$b = 1_B(b) = f(g(b)) \in \operatorname{im} f,$$

таким образом, f — наложение. (Это показывает, что отображение g в 1.1 является наложением, а 1.1 показывает, что g в 1.2 — вложение.) Для любого $b \in B$ пусть $A_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Каждое множество A_b непусто, и в каждом A_b выберем по одному элементу b'. Таким образом, существует отображение $g\colon B \to A$, где $g(b) = b'$ для любого $b \in B$. Очевидно, $fg = 1_B$.

Доказательство 1.3. Согласно 1.1 и 1.2, f биективно тогда и только тогда, когда существуют отображения $g\colon B \to A$ и $h\colon B \to A$, такие, что $gf = 1_A$ и $fh = 1_B$. В этом случае для

[1]) Точнее, перестановкой множества X.— *Прим. ред.*

любого $b \in B$ имеем

$$g(b) = g(fh(b)) = gf(h(b)) = h(b),$$

следовательно, $g = h$. Вместе с 1.1 и 1.2 это доказывает 1.3. □

Требуется ли в доказательстве аксиома выбора?

Обратные

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение. **Левое обратное** к f — это отображение $g\colon B \to A$, такое, что $gf = 1_A$, а **правое обратное** к f — отображение $h\colon B \to A$, такое, что $fh = 1_B$. **Обратное** к f — это отображение $B \to A$, которое является левым и правым обратным одновременно. Доказательство 1.3 показывает, что отображение f имеет не более одного обратного. Если f имеет обратное, то обозначаем его через f^{-1}. Пусть C — произвольное подмножество в B. Независимо от того, имеет ли отображение $f\colon A \to B$ обратное, определяем

$$f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}.$$

В этой терминологии можно переформулировать предложение 1.

2. Предложение. *Пусть $f\colon A \to B$ — отображение непустых множеств. Тогда*

2.1. *f инъективно в том и только в том случае, когда f имеет левое обратное.*

2.2. *f сюръективно в том и только в том случае, когда f имеет правое обратное.*

2.3. *f биективно в том и только в том случае, когда f имеет обратное.*

Это предложение устанавливает, что множество взаимно однозначных отображений $X \to X$ непустого множества X является примером группы (это понятие определяется в гл. 1) относительно операции умножения отображений. Если X — множество, содержащее не менее трех элементов, то эта группа не коммутативна в том смысле, что существуют взаимно однозначные отображения f и g, для которых $fg \neq gf$. (Докажите это и покажите, что для некоммутативности этой группы X должно иметь по меньшей мере три элемента.)

Эквивалентные множества

Два множества A и B **эквивалентны**, если существуют отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, такие, что $gf = 1_A$ и $fg = 1_B$ [1]. Тогда мы пишем $A \approx B$; в противном случае A и B называются **неэквивалентными**. Из предыдущего предложения сразу следует,

[1] Отображения f и g называются *эквивалентностями.— Прим. перев.*

что $A \approx B$ тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение $h\colon A \to B$.

Следующая теорема приписывается Хаусдорфом [37] Бернштейну, а Халмошем [60] — Шрёдеру — Бернштейну; она иногда называется теоремой Кантора — Шрёдера — Бернштейна.

3. Теорема. *Если A и B — множества и существуют вложения $g\colon A \to B$ и $h\colon B \to A$, то $A \approx B$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $B \subseteq A$, т. е. $h = 1_B^A$. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — подмножества в A, то по определению символ $X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots$ обозначает их теоретико-множественное объединение в том и только том случае, когда они попарно не пересекаются, т. е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Например, $A = B + C$, где C — дополнение множества B в A. Пусть Q обозначает объединение множеств $g(C)$, $g(g(C)), \ldots$. Так как g — вложение, множества $g(C)$, $g(g(C)),\ldots$ попарно не пересекаются; поэтому $Q = g(C) + g(g(C)) + \ldots$. Пусть $P = g(g(C)) + g(g(g(C))) + \ldots$. Тогда $Q = g(C) + P$ и $P = g(Q)$. Поскольку g — вложение, то $g \mid Q$ — взаимно однозначное отображение множества Q на P. Аналогично, $f = g \mid C$ — взаимно однозначное отображение множества C на $g(C)$. Таким образом, $C \approx g(C)$ и $Q \approx P$. Поскольку $Q = g(C) + P$ (объединение попарно непересекающихся множеств), то отсюда следует, что $C + Q \approx Q$. (На самом деле, взаимно однозначное отображение $k\colon C + Q \to Q$ есть просто $k = g \mid (C + Q)$.) Далее, $B = Q + K$, где K — дополнение подмножества Q в B, и тогда $A = Q + K + C$. Поскольку $Q + K \approx (C + Q) + K$, то $B \approx A$. (В явном виде взаимно однозначное отображение $p\colon A \to B$ задается такими формулами: $p(a) = k(a) = g(a)$, если $a \in A$ и $a \in Q + C$, и $p(a) = a$, если $a \in K$.)

Доказательство в общем случае. Пусть $B' = h(B)$. Тогда существует вложение $q\colon A \to B'$, где $q = h'g$, а $h' = h \mid g(A)$. По доказанному выше $A \approx B'$. Но отображение $h'\colon B \to B'$ является взаимно однозначным, поэтому $B \approx B'$ и, следовательно, $A \approx B$, что завершает доказательство. □

Характеристические функции

Пусть символ 2 обозначает множество $\{0,1\}$, состоящее из двух элементов. Для любого множества A обозначим тогда через 2^A совокупность отображений множества A в множество $\{0,1\}$. Если X — произвольное непустое подмножество в A, то **характеристическая функция** $\chi_A(X)$ множества X (относительно A) — это отображение $\chi\colon A \to \{0,1\}$, определяемое так:

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in X, \\ 0, & \text{если } a \notin X. \end{cases}$$

Таким образом, каждое непустое подмножество X в A определяе элемент $\chi_A(X) \in 2^A$. Обратно, если $f \in 2^A$ и $Y = \{a \in A \mid f(a) = = 1\}$, то f — характеристическая функция подмножества Y. Поскольку различные подмножества множества A имеют различ ные характеристические функции, то нами доказана следующа теорема.

4. Теорема. *Для произвольного множества A множество* Pow A *эквивалентно* 2^A. □

Если A — конечное множество, состоящее из n элементов то Pow A состоит из 2^n элементов. (Доказательство?) Так ка $2^n > n$, то Pow A неэквивалентно A. Это частный случай следую щей теоремы.

5. Теорема Кантора. *Если A — произвольное непустое множ ство, то A неэквивалентно* Pow A.

Доказательство. Предположим, что существует вз имно однозначное отображение $f: A \to \text{Pow } A$. Нужно показат что это предположение ведет к противоречию. Для этого положи $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Поскольку $X \in \text{Pow } A$ и f сюръективн то существует элемент $a \in A$, такой, что $f(a) = X$. Если $a \in X$, $a \notin f(a) = X$ по определению множества X. Это противореч вынуждает a находиться вне X. Но, опять-таки по определени X имеем $a \in f(a) = X$. В итоге $a \in X$ и $a \notin X$ — противореч которое доказывает теорему Кантора.

Парадокс Рассела

Существуют множества, которые не являются элементами сам себя. Пусть A обозначает множество всех тех множеств, котор не являются элементами самих себя, т. е. $A = \{B \mid B$ — множес во и $B \notin B\}$. Верно ли, что $A \in A$? Предположим, что да. И определения A выводим, что $A \notin A$ — противоречие. Тог естественно предположить, что $A \notin A$. Но если это справедлив то из определения A следует, что $A \in A$ — снова противореч Этот пример «множества» и противоречие, с ним связанное, извес ны как парадокс Рассела (по имени открывшего его Бертра Рассела).

Парадокс Кантора

Теорема Кантора приводит к следующему утверждению.

6. Парадокс Кантора. *Не существует множества A, обладающего тем свойством, что для любого множества B существует инъективное отображение $f: B \to A$*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существует вложение f: Pow $A \to A$. С другой стороны, существует вложение

$$g \begin{cases} A \to \text{Pow } A \\ x \mapsto \{x\}. \end{cases}$$

Из теоремы (Кантора —) Шрёдера — Бернштейна выводим, что Pow $A \approx A$, что противоречит теореме Кантора. □

Это утверждение показывает, что не существует «предмета», который можно было бы назвать «наибольшим» множеством, т. е. не существует множества, в которое каждое другое множество могло бы быть вложено. Противоречие, которое возникает из предположения существования такого наибольшего множества, известно как парадокс Кантора.

Этот парадокс также можно интерпретировать следующим образом. Для данной «совокупности» множеств мы можем образовать их объединение. Поэтому рассмотрим множество A, которое является объединением «совокупности» всех множеств. Тогда A является «наибольшим» множеством в только что сформулированном смысле, поскольку каждое множество является подмножеством в A, и все же мы показали, что A не может быть множеством.

Из этого и других парадоксов, таких, как парадокс Рассела, вытекает, что некоторые «предметы» не являются множествами или, вернее, что некоторые высказывания, преследующие цель определить множества, фактически этого не делают. Это лишь кажущийся парадокс, поскольку нет аксиом, позволяющих образовывать, например, «множество всех множеств».

Эти парадоксы привели к такой перестройке аксиом теории множеств, что примитивными понятиями становятся «классы», «множества» и «принадлежность», и можно говорить о «классе всех множеств» (см. аксиомы Гёделя — Бернайса).

Интересно заметить, что из парадокса Рассела следует парадокс Кантора: Пусть A — такое множество, что если X — множество, то $X \in A$. Тогда по аксиомам степени и выделения существует множество B, состоящее из всех тех множеств, которые не являются элементами самих себя. Но парадокс Рассела показывает, что B не может быть множеством; значит, A не является множеством.

Иногда бывает удобно обходиться без индексов и писать $A \times B$, $A \times B \times C$ и т. д. для непустых множеств $A, B, C, \ldots$. Мы определяем $A \times B = \bigtimes_{i \in I} X_i$, где $I = \{1, 2\}$, $X_1 = A$ и $X_2 = B$. (Заметим, что, вообще, $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.) Если $I = \{1, \ldots, n\}$, то для краткости пишем

$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i$ вместо $\bigtimes_{i\in I} X_i$. Таким образом, $A \times B = \bigtimes_{i=1}^{2} X_i$. Определи

$A \times B \times C = \bigtimes_{i=1}^{3} X_i$, где $X_1 = A$, $X_2 = B$ и $X_3 = C$. Замети

что $(A \times B) \times C \neq A \times B \times C$, поскольку $f \in (A \times B) \times C$ является отображением, область определения которого имеет д элемента, тогда как $g \in A \times B \times C$ — отображение, область опр деления которого имеет три элемента.

7. Упражнения.

7.1. Доказать, что $(A \times B) \times C \approx A \times B \times C$ и $A \times (B \times C) \approx A \times B \times C$ для любых множеств A, B и C. Обобщить э утверждение. Сравнить $A \times B$ с множеством всех упорядоченны пар $\langle a, b\rangle$, $a \in A$, $b \in B$.

7.2. Отображение $f\colon X \to Y$ называется **эпиморфизмом**, ес для любой пары отображений $g_i\colon Y \to Z$, $i = 1, 2$, выполняет следующая импликация: $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$. Показать, что от бражение множеств является эпиморфизмом тогда и только тогд когда оно сюръективно. Отображение $f\colon X \to Y$ называет **мономорфизмом**, если для любой пары отображений $h_i : U \to X$, $i = 1, 2$, выполняется следующая импликация: $fh_1 = fh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$. Показать, что отображение является мономорфизм тогда и только тогда, когда оно инъективно. (Ср. параграф «Эп морфизмы и мономорфизмы» в гл. 2.)

Бинарные отношения

Пусть A — множество. **Бинарное отношение на** A — это по множество $\mathscr{R}$ декартова произведения $A \times A$. Если $(a, b) \in A \times A$ то мы пишем $a\mathscr{R}b$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \mathscr{R}$. Если $\mathscr{R}$ обозначает дополнение $A \times A - \mathscr{R}$ множества $\mathscr{R}$ в $A \times A$, $\mathscr{R}'$ — тоже бинарное отношение. Существует также обратно бинарное отношение $\mathscr{R}^{-1}$, определяемое следующим условие $a\mathscr{R}^{-1}b$ тогда и только тогда, когда $(b, a) \in \mathscr{R}$. (Какое подмножест в $A \times A$ соответствует отношению $\mathscr{R}^{-1}$? Почему это бинарно отношение обозначается через $\mathscr{R}^{-1}$?)

Если B — произвольное подмножество в A и $\mathscr{R}$ — бинарно отношение на A, то $\mathscr{R}$ индуцирует бинарное отношение на B. Э отношение на B, соответствующее подмножеству $\mathscr{R} \cap (B \times B)$ множества $B \times B$.

Одним из важнейших понятий математики является понят отношения эквивалентности. **Отношение эквивалентности** на мн жестве A — это бинарное отношение $\mathscr{R}$ на A, удовлетворяющ для любых a, b, $c \in A$ следующим трем условиям:

Рефлексивность: $a\mathscr{R}a$.

Транзитивность: если $a\mathscr{R}b$ и $b\mathscr{R}c$, то $a\mathscr{R}c$.
Симметричность: если $a\mathscr{R}b$, то $b\mathscr{R}a$.

Если $\mathscr{R}$ — отношение эквивалентности на A, то для $a \in A$ множество $\mathscr{R}_a = \{b \in A \mid b\mathscr{R}a\}$ называется **классом эквивалентности, определяемым** (или **содержащим**) a. Класс всех классов эквивалентности множества A относительно $\mathscr{R}$ является множеством, обозначаемым через $\mathscr{R}_A$, и существует наложение

$$\begin{cases} A \to \mathscr{R}_A \\ a \mapsto \mathscr{R}_a, \end{cases}$$

называемое **каноническим**. Обратно, всякое отображение множества A определяет отношение эквивалентности, согласно следующему утверждению.

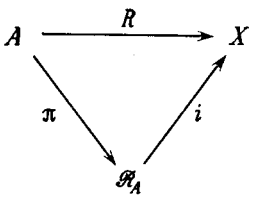
8. **Утверждение.** *Если $R\colon A \to X$ — некоторое отображение, то существует отношение эквивалентности $\mathscr{R}$ на A, определяемое следующим образом:*

$$b\mathscr{R}a \Leftrightarrow R(a) = R(b).$$

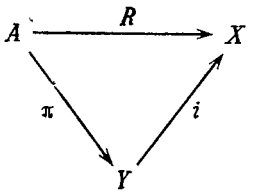
Отображение

$$\begin{cases} \mathscr{R}_A \to X \\ \mathscr{R}_a \mapsto R(a) \end{cases}$$

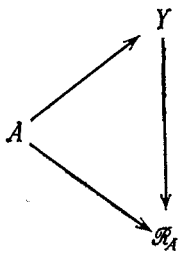
инъективно (говорят, что оно ***индуцировано отображением*** *R), и существует коммутативная диаграмма*



где π — каноническое наложение, а i — индуцированное вложение. Если Y — такое множество, что диаграмма



где π *— наложение, а* i *— вложение, коммутативна, то существует единственная эквивалентность множества* Y *на* $\mathscr{R}_A$, *такая, что диаграмма*



коммутативна. □

Частично упорядоченные множества

Отношение, определенное на множестве A, называется **антисимметричным**, если оно удовлетворяет следующему закону:

А. **Антисимметричность**: из $a\mathscr{R}b$ и $b\mathscr{R}a$ следует $a = b$.

Порядок на множестве A — рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение. Множество A, на котором зафиксирован некоторый порядок, называется **частично упорядоченным множеством**. Если $\mathscr{R}$ — порядок на множестве A, то обычно отношение $\mathscr{R}$ обозначается символом $\geqslant$. Таким образом, если A упорядочено отношением $\geqslant$, то оно удовлетворяет условиям

(1) $a \geqslant a$,
(2) $a \geqslant b$ и $b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c$
(3) $a \geqslant b$ и $b \geqslant a \Rightarrow a = b$.

Символ $a \geqslant b$ читается «a больше или равен b». Положим по определению, что $b \leqslant a$ означает $a \geqslant b$ и читается «b меньше или равен a».

Обозначение $(A, \geqslant)$ указывает, что A — множество, упорядоченное отношением, обозначаемым через $\geqslant$. Это обозначение удобно, когда нужно различить несколько порядков на одном и том же множестве.

Основным (и в некотором смысле единственным — см. следующее предложение) примером порядка является порядок, который определяется в Pow X для любого множества X следующим правилом:

$$A \geqslant B \Leftrightarrow A \supseteq B.$$

Это называется **упорядочиванием по включению**. Этот порядок определен для всех множеств, т. е. нам нет необходимости ограничивать упорядочивание по включению множеством подмножеств некоторого конкретного множества.

Если A и B — частично упорядоченные множества, то отображение $f: A \to B$ называется **гомоморфизмом частично упорядоченных множеств**, если

$$a \geqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

для любых $a, b \in A$. При этом f является **вложением** (соотв. **наложением, взаимно однозначным отображением**) **частично упорядоченных множеств**, если f — гомоморфизм частично упорядоченных множеств и инъективное (соотв. сюръективное, биективное) отображение.

Изоморфизм частично упорядоченных множеств $f: A \to B$ — это такое взаимно однозначное отображение, что f и f^{-1} являются гомоморфизмами частично упорядоченных множеств.

9. Предложение. *Если* A *— частично упорядоченное множество, то существует вложение частично упорядоченных множеств* $A \to \mathrm{Pow}\, A$, *где* Pow A *упорядочено по включению.*

Доказательство. Функция

$$f\begin{cases} A \to \mathrm{Pow}\, A \\ a \mapsto \{b \in A \mid b \leqslant a\} \end{cases}$$

является гомоморфизмом частично упорядоченных множеств. Если $f(a) = f(b)$, то $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ и, значит, $a = b$. Таким образом, f — вложение. □

Интуитивно это предложение показывает, что любой порядок на произвольном множестве «индуцирован» порядком относительно включения на некотором множестве. Каждое отображение множеств $f: X \to Y$ индуцирует гомоморфизм упорядоченных множеств φ: Pow $X \to$ Pow Y, при котором $\varphi(A) = f(A)$ для любого $A \in \mathrm{Pow}\, X$.

Двойственность

Отображение $f: A \to B$ частично упорядоченных множеств A и B **обращает** порядок или является **антигомоморфизмом** частично упорядоченных множеств, если $a \geqslant b$ в A влечет за собой $f(b) \geqslant f(a)$ в B.

Двойственность или **антиизоморфизм** частично упорядоченных множеств — это такое взаимно однозначное отображение $f: A \to B$, что f и f^{-1} являются антигомоморфизмами частично упорядоченных множеств. Для любого частично упорядоченного множества A существует частично упорядоченное множество A^* и двойственность $A \to A^*$. Действительно, если $(A, \geqslant)$ — частично упо-

рядоченное множество, то существует новый порядок $\geqslant^*$, опр
деляемый так:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow b \geqslant^* a.$$

Этот порядок называется **обратным** или **дуальным** порядком. Ча
тично упорядоченное множество $(A, \geqslant^*)$ называется частичн
упорядоченным множеством, **дуальным к** A, и обозначается чере
A^*. Таким образом, тождественное отображение $1_A : A \to$
является двойственностью $A \to A^*$. Очень простой фа
существования множества A^* для каждого частично уп
рядоченного множества A имеет полезные следствия, котор
создают впечатление, что этот факт не так уж тривиален. Наибол
важным из них является принцип двойственности, которы
утверждает, что для любой теоремы о частично упорядоченных мн
жествах существует дуальная теорема, получающаяся из не
просто обращением порядка.

Пусть U — универсум множеств. Тогда U упорядочено по вкл
чению. Назовем обратный к этому порядок на U **исключение**
Тогда существует двойственность

$$d \begin{cases} U \to U \\ X \mapsto U - X, \end{cases}$$

которая отображает пересечения в объединения и объединен
в пересечения. Таким образом, для любого семейства множес
$\{X_i\}_{i \in I}$ из U

$$U - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (U - X_i)$$

и

$$U - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (U - X_i).$$

Для любого утверждения S о частично упорядоченных множ
ствах существует **дуальное утверждение** S^*, полученное из
обращением порядка, т. е. изменением всюду $\geqslant$ на $\leqslant$. Утвержд
ние S является **автодуальным**, если $S = S^*$. Множество $\{S_i\}_i$
утверждений о частично упорядоченных множествах называет
автодуальным, если существует перестановка p множества
такая, что $S_i^* = S_{p(i)}$ для любого $i \in I$. Множество утвержден
$\{S_i\}_{i \in I}$ называется **системой аксиом** для класса C частично упор
доченных множеств, если $A \in C$ тогда и только тогда, когда
удовлетворяет S_i для всех $i \in I$. (Здесь предполагается, что мо
но определить, удовлетворяет ли данное частично упорядочен
множество A заданной аксиоме, или условию, S_i).

Та же терминология применяется к классам множеств. Класс
частично упорядоченных множеств, *замкнутый относитель*
изоморфизмов частично упорядоченных множеств, называется **за**

кнутым. Пусть

$$C^* = \{A^* \mid A \in C\}.$$

Тогда C^* называется классом, **дуальным к** C. Поскольку C замкнут относительно изоморфизмов частично упорядоченных множеств и A как частично упорядоченное множество изоморфно множеству $(A^*)^*$ для любого $A \in C$, то $C = C^{**}$, где X^{**} обозначает $(X^*)^*$. Скажем, что класс C **автодуален**, если $C = C^*$. Таким образом, C автодуален, когда из $A \in C$ следует $A^* \in C$.

10. Принцип двойственности.

10.1. *Если S — теорема о частично упорядоченных множествах, то и S^* — теорема о частично упорядоченных множествах, называемая теоремой, дуальной к S.*

10.2. *Пусть C — замкнутый класс частично упорядоченных множеств, аксиоматизированный множеством утверждений S. Если S автодуально, то и класс C автодуален.*

10.3. *Пусть C — замкнутый класс частично упорядоченных множеств. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(a) *C автодуален.*

(b) *Утверждение S является теоремой о классе C тогда и только тогда, когда дуальное утверждение является теоремой о классе C.*

Доказательство.

10.1. Первое утверждение является частным случаем второго, поскольку каждая из трех аксиом порядка (рефлексивности, транзитивности и антисимметричности) автодуальна.

10.2. Ясно, что частично упорядоченное множество A принадлежит C тогда и только тогда, когда A^* принадлежит C^*, т. е. $A \in C$ тогда и только тогда, когда A^* удовлетворяет аксиомам S^*, но поскольку S автодуально, то это эквивалентно требованию, чтобы A^* удовлетворяло аксиомам S, т. е. $A^* \in C$.

10.3. Предположим, что класс C автодуален, а S — некоторая теорема. Если $A \in C$, то $A^* \in C$, следовательно, A^* удовлетворяет S или, эквивалентно, A удовлетворяет S^*. Таким образом, S^* — теорема о классе C. Обратно, пусть S — такое утверждение:

S. Если $A \in C$ и существует двойственность $A \to B$, то $B \in C^*$.

Поскольку мы предполагаем, что C и, следовательно, C^* замкнуты относительно изоморфизмов частично упорядоченных множеств, то S является верным утверждением о C, т. е. теоремой. Дуальным утверждением является утверждение:

S^*: Если $A \in C$ и существует изоморфизм частично упорядоченных множеств $A \to B$, то $B \in C^*$.

По условию (b) утверждение S^* должно быть справедливо. Таким образом, $A \in C$ влечет за собой $A \in C^*$. Записывая $A = B^*$, где $B \in C$, мы видим, что $A^* = (B^*)^*$ изоморфно как частично упоря-

доченное множество множеству $B \in C$, значит, $A^* \in C$. Таким образом, класс C автодуален. □

Цепи или линейно упорядоченные множества

Цепью называется частично упорядоченное множество $(A, \geqslant)$, такое, что для любых $a, b \in A$ имеет место либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. (Цепь называется иногда **линейно упорядоченным** множеством.) Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является цепью относительно естественного порядка (по величине). Если $(A, \geqslant)$ — произвольное частично упорядоченное множество, то **цепь** в A — это такое подмножество C множества A, что если $a, b \in C$, то либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$.

Элемент a частично упорядоченного множества $(A, \geqslant)$ называется **минимальным** элементом в A, если $b \leqslant a$ влечет за собой $b = a$ для любого $b \in A$. (**Максимальные** элементы определяются двойственным образом.) Говорят, что A имеет **наименьший** (соотв. **наибольший**) элемент, если существует элемент $a \in A$, удовлетворяющий условию $a \leqslant b$ (соотв. $b \leqslant a$) для любого $b \in A$. Из определения порядка следует, что в частично упорядоченном множестве A может быть самое большее один наименьший элемент, но в общем случае существует много минимальных элементов. Если B — подмножество частично упорядоченного множества A, то наименьший элемент в B — это элемент b, удовлетворяющий условию $b \leqslant c$ для всех $c \in B$. Такой элемент может существовать или не существовать. Например, не существует наименьшего положительного действительного числа.

Вполне упорядоченные множества

Вполне упорядоченное множество — это цепь $(A, \geqslant)$, всякое непустое подмножество которой содержит наименьший элемент. Тогда мы говорим, что A **вполне упорядочено относительно** $\geqslant$. Например, $\mathbb{N}$ вполне упорядочено относительно естественного порядка (по величине).

Говорим, что *множество A может быть вполне упорядочено, если существует порядок $\geqslant$, определенный на A, такой, что полученное частично упорядоченное множество $(A, \geqslant)$ является вполне упорядоченным.*

Поскольку порядок $\geqslant$ на множестве A индуцирует порядок на любом подмножестве из A, то всякое подмножество вполне упорядоченного множества может быть вполне упорядочено. Более того, если A — вполне упорядоченное множество, $f: B \to A$ — вложение, то B может быть вполне упорядочено, причем $b \geqslant c$ тогда и только тогда, когда $f(b) \geqslant f(c)$. Следовательно, любое счетное множество (множество, эквивалентное по множеству множества $\mathbb{N}$) может быть вполне упорядочено.

Следующие множества не являются вполне упорядоченными относительно их естественного (по величине) порядка: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, рациональные и действительные числа на отрезке $[0, 1]$ (ср. с теоремой о полном упорядочивании, обсуждаемой ниже).

11. Упражнения.

11.1. Если $(A, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество, каждое непустое подмножество которого имеет наименьший элемент, то A вполне упорядочено.

11.2. Показать, что если A и B — вполне упорядоченные множества, то $A \cup B$ и $A \times B$ могут быть вполне упорядочены «естественным» образом.

Условия минимальности и максимальности

Частично упорядоченное множество A удовлетворяет условию **максимальности** (соотв. **минимальности**), если каждое непустое подмножество X в A содержит элемент, являющийся максимальным (соотв. минимальным) в X.

Любое вполне упорядоченное множество A удовлетворяет условию минимальности, а A^* (т. е. A с обратным порядком) удовлетворяет условию максимальности. Примером такого множества является $\mathbb{N}$, которое удовлетворяет условию минимальности, но не максимальности относительно естественного порядка. Для дуального порядка справедливо дуальное утверждение.

Упорядоченное множество удовлетворяет **условию обрыва возрастающих цепей** (соотв. **условию обрыва убывающих цепей**), если для произвольной счетной последовательности $\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ элементов из A, такой, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ (соотв. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$), существует число k, такое, что $a_n = a_k$ для всех $n \geqslant k$.

12. Предложение. *B частично упорядоченном множестве A условие максимальности* (соотв. *минимальности*) *эквивалентно условию обрыва возрастающих* (соотв. *убывающих*) *цепей.*

Доказательство. Предположим, что выполняется условие максимальности и $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ — счетная цепь элементов из A. Пусть a — максимальный элемент в подмножестве $\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ множества A. Тогда $a = a_k$ для некоторого k и, следовательно, $a_n = a = a_k$ для всех $n \geqslant k$.

Обратно, пусть выполняется условие обрыва возрастающих цепей и X — непустое подмножество множества A. Тогда X содержит элемент a_1, и если a_1 не является максимальным в X, то существует элемент $a_2 \in X$, такой, что $a_1 < a_2$. Предположим, что существуют $a_1, \ldots, a_n \in X$, такие, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда либо a_n является максимальным в X, либо существует

элемент $a_{n+1} \in X$, такой, что $a_n < a_{n+1}$. Мы заключаем [1]), что либо X имеет максимальный элемент, либо существует бесконечная цепь $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ элементов из X. По предположению возможен только первый случай. Из принципа двойственности 10 следует справедливость части теоремы, стоящей в скобках. □

Структуры

Пусть $(A, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество и X — непустое подмножество в A. Если a — элемент из A, такой, что $a \geqslant x$ (соотв. $a \leqslant x$) для всех $x \in X$, то a называется **верхней гранью** (соотв. **нижней**) **гранью множества** X **в** A; a является **точной верхней гранью множества** X ($\sup X$), если a — наименьший элемент множества верхних граней множества X в A. Таким образом, если X имеет в A точную верхнюю грань, то она единственна. Существует дуальное понятие **точной нижней грани** (inf). **Структура** (или **решетка**) — это частично упорядоченное множество A, в котором каждое подмножество $\{a, b\}$, состоящее из двух элементов $a, b \in A$, имеет точную верхнюю грань $\sup\{a, b\} = a \vee b$ и точную нижнюю грань $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ в A. Класс всех структур является замкнутым и автодуальным; см. п. 10.

13. Примеры и упражнения

13.1. Пусть $A = \operatorname{Pow} Y$, где $Y \neq \varnothing$. Тогда A упорядочено по включению и для $a, b \in A$ имеем $a \vee b = a \cup b$ (теоретико-множественное объединение) и $a \wedge b = a \cap b$ (теоретико-множественное пересечение). Следовательно, $\operatorname{Pow} Y$ является структурой. Кроме того, для любого множества A существует двойственность

$$d\begin{cases} \operatorname{Pow} A \to \operatorname{Pow} A \\ X \mapsto A - X. \end{cases}$$

Эта двойственность отображает пересечения подмножеств из A в объединения, а объединения — в пересечения:

$$d\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} dX_i,$$

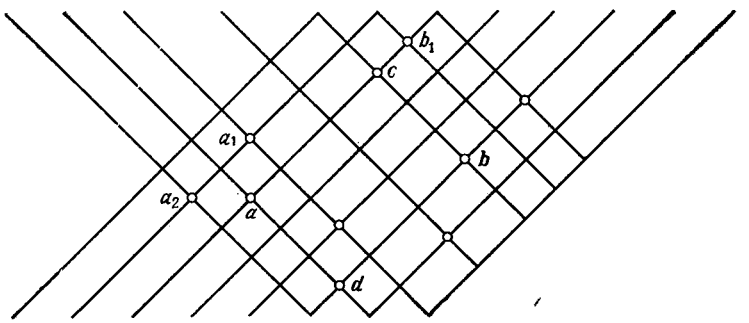
$$d\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} dX_i.$$

13.2. Пусть $\mathbb{Z}$, как обычно, обозначает множество целых чисел. Для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ пишем $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \mid b$ (a делит b). Пусть (a, b) — наибольший общий делитель a и b, а $[a, b]$ — их наименьшее общее кратное. Тогда $\mathbb{Z}$ — структура, поскольку $a \vee b = [a, b]$ и $a \wedge b = (a, b)$.

13.3. Любая цепь A является структурой, так как для данных $a, b \in A$ либо $a \geqslant b$, либо $b \geqslant a$. В первом случае $a = a \vee b$ и $b = a \wedge b$.

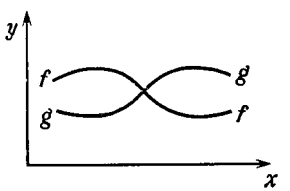
[1]) Здесь по существу используется математическая индукция, см. с. 65.— *Прим. ред.*

13.4. Любая «геометрическая» решетка является структурой. Под геометрической решеткой мы понимаем конфигурацию, состоящую из двух пересекающих друг друга классов параллельных прямых. Точки пересечения называются точками решетки. Множество A точек решетки является частично упорядоченным множеством, если положить $a_1 \geqslant a$, когда a можно соединить с a_1 ломаной, отрезки которой поднимаются, начиная с a. Таким образом, на приведенном рисунке $b_1 \geqslant b$, но a, b и a_2 несравнимы. Аналогично, несравнимы a_2 и b_1, но $b_1 \geqslant a$. Частично упорядоченное множество A является структурой: для любых $a, b \in A$, $a \neq b$, прямые, содержащие a, и прямые, содержащие b, пересекаются в точности в двух точках c и d, которые являются сравнимыми. Если $c \geqslant d$, то $c = a \vee b$ и $d = a \wedge b$.



13.5. Множество подгрупп (соотв. множество нормальных подгрупп) произвольной группы G является структурой. Здесь $G_1 \wedge G_2 = G_1 \cap G_2$, а $G_1 \vee G_2$ — групповое объединение [1]) для любых двух (нормальных) подгрупп G_1, G_2.

13.6. Множество A всех действительных функций, определенных на единичном интервале $[0,1]$, является частично упорядоченным множеством, где $f \geqslant g$ означает, что $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Множество A также является структурой, в которой $f \vee g$ и $f \wedge g$ — такие функции: $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ и $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ для всех $x \in [0,1]$.



[1]) То есть наименьшая подгруппа группы G, содержащая как G_1, так и G_2.— *Прим. ред.*

13.7. Частично упорядоченное множество называется **полным сверху**, если любое его подмножество имеет точную верхнюю грань, и **условно полным сверху**, если точную верхнюю грань имеет любое его непустое ограниченное сверху подмножество. Доказать, что частично упорядоченное множество A является условно полным сверху тогда и только тогда, когда каждое его непустое ограниченное снизу подмножество имеет точную нижнюю грань. Структуры в примерах 13.1 и 13.5 являются полными сверху и снизу.

13.8. Если A — условно полное сверху частично упорядоченное множество, $f\colon A \to A$ — неубывающая функция [в том смысле, что $x \leqslant y$ влечет за собой $f(x) \leqslant f(y)$ для всех $x, y \in A$] и существуют a и b в A, такие, что

$$a \leqslant f(a) \leqslant f(b) \leqslant b,$$

то существует элемент $c \in A$, такой, что $a \leqslant c \leqslant b$ и $f(c) = c$ (c называется **неподвижной точкой** функции f.)

13.9. Любая неубывающая функция $f\colon A \to A$, где A — полное сверху частично упорядоченное множество, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

13.10. Если A — частично упорядоченное множество, множество подмножеств которого удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, то всякое сюръективное отображение $f\colon A \to$ является биективным. Дуальное утверждение справедливо для инъективных отображений [2]).

13.11. (a) Существуют в точности два неизоморфных двухэлементных частично упорядоченных множества, каждое из которых автодуально.

(b) Существуют пять неизоморфных трехэлементных частично упорядоченных множеств, три из которых самодуальны.

(c) Число неизоморфных частично упорядоченных четырехэлементных множеств равно 16, но существует 219 различных возможных порядков (см. Биркгоф [52, стр. 20]).

13.12. (a) Существуют в точности пять неизоморфных пятиэлементных структур, три из которых автодуальны.

(b) Существуют ровно пять неизоморфных структур, содержащих менее пяти элементов.

(c) Существует в точности 15 шестиэлементных структур, семь из которых автодуальны (см. Биркгоф [52, стр. 38]).

---

[1]) Подмножество частично упорядоченного множества называется ограниченным сверху (снизу), если оно имеет верхнюю (нижнюю) грань.— *Прим. ред.*

[2]) Тот факт, что A — частично упорядоченное множество, не существует. Очевидно, что если множество подмножеств множества A удовлетворяет условию обрыва возрастающих или убывающих цепей, то A конечно.— *Прим. перев.*

13.13. (a) (Капланский) Любая структура, имеющая более шести элементов, содержит подструктуру, состоящую ровно из шести элементов.

(b) Для семи элементов аналогичное утверждение неверно.

Индуктивные множества

Существует одно следствие аксиомы выбора, чаще всего используемое в алгебре, а именно лемма Цорна. Пусть M — множество. Напомним, что цепь в M — это совокупность C подмножеств из M, такая, что для любой пары $X, Y \in C$ либо $X \supseteq Y$, либо $Y \supseteq X$ [1]). Совокупность P подмножеств из M называется **индуктивной**, если она обладает следующим свойством: *если C — произвольная цепь в M, такая, что каждый элемент $X \in C$ принадлежит P, то объединение множеств цепи C принадлежит P.* Теперь мы можем сформулировать лемму Цорна.

14. Лемма Цорна. *Если совокупность P непустых подмножеств множества M индуктивна, то она содержит максимальный элемент S, т. е. P содержит элемент S, который не содержится ни в каком другом элементе из P, отличном от S.*

Для более подробного знакомства с леммой Цорна и ее связью с аксиомой выбора см. Келли [68, стр. 55—59], А. Г. Курош [73, стр. 28—32] или Халмош [60, стр. 59 и далее]. (У Куроша лемма Цорна в эквивалентной форме называется теоремой Куратовского — Цорна.)

Теорема о полном упорядочивании

Теорема о полном упорядочивании утверждает, что любое множество A может быть вполне упорядочено. Эта теорема вызывает много споров. Полемика возникает в связи со следующим вопросом: если $\mathbb{R}$ *может* быть вполне упорядочено, то что это за порядок? Дело в том, что полный порядок на $\mathbb{R}$ трудно, если не невозможно, представить наглядно. Иначе говоря, если $\mathbb{R}$ вполне упорядочено, то неизвестен эффективный метод, позволяющий для любой пары $a, b \in \mathbb{R}$ определить, имеет ли место $a \geqslant b$. По этой причине некоторая часть (меньшинство) математиков предпочитает не использовать эту теорему. Поскольку теорема о полном упорядочивании эквивалентна аксиоме выбора, то это равносильно игнорированию этой аксиомы, что приводит к потере ряда теорем и ликвидации многих направлений в математике, которые большинство математиков считают интересными. Во всяком случае, математическая «экономика» могла бы потребовать, чтобы

---

[1]) Точнее было бы говорить о цепи в Pow M.— *Прим. ред.*

эта аксиома использовалась только тогда, когда это необходимо. (Аксиома необходимости?) Это поднимает важный вопрос (часто игнорируемый): когда употребление этой аксиомы необходимо?

Исследования Гёделя и Коэна показали, что аксиома выбора не зависит от других аксиом теории множеств. Большинство математиков принимают аксиому выбора без оговорок и часто используют ее саму или ее эквиваленты без комментариев. В дальнейшем мы бóльшей частью будем поступать так же.

Математическая школа, которая отвергает аксиому выбора, — это так называемая интуиционистская математика. По иронии судьбы, главой этой школы является Л. Э. Дж. Брауер, автор теоремы о неподвижной точке в топологии, которая доказана с использованием аксиомы выбора.

15. Теорема о полном упорядочивании. *Любое множество A может быть вполне упорядочено.*

Доказательство. Доказательство использует лемму Цорна. Пусть W обозначает совокупность всех вполне упорядоченных подмножеств данного множества A. Упорядочим W следующим образом: если $(X, \geqslant_1)$ и $(Y, \geqslant_2)$ — вполне упорядоченные подмножества из A, то $(X, \geqslant_1) \geqslant (Y, \geqslant_2)$ тогда и только тогда, когда (1) $X \supseteq Y$; (2) порядок $\geqslant_1$ индуцирует порядок $\geqslant_2$ и (3) если $x \in X$ и $y \in Y$ и если $y \geqslant_1 x$, то $x \in Y$. Совокупность W содержит пустое множество и поэтому не пуста. Если $C = \{(X_i, \geqslant_i) \mid i \in I\}$ — произвольная цепь в W, то W содержит $(X, \geqslant)$, где $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, а $\geqslant$ — порядок на X, индуцированный $\geqslant_i$ для всех $i \in I$. Точнее, если $x, y \in X$, то $x, y \in X_j$ для некоторого $j \in I$, и полагаем по определению $x \geqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant_j y$. Если при этом $x, y \in X_k$, то $x \geqslant_j y$ в том и только в том случае, когда $x \geqslant_k y$. Поскольку каждое множество X_i является цепью, то $(X, \geqslant)$ — тоже цепь. Кроме того, если Y — произвольное непустое подмножество в X, то $Y \cap X_i$ непусто для некоторого i. Пусть a — наименьший элемент в $Y \cap X_i$ относительно порядка $\geqslant_i$. Если $b \in Y$, то $b \in Y \cap X_j$ для некоторого j. Предположим, что $b \leqslant a$. Тогда $b \leqslant_i a$ и, согласно (3), $b \in X_i$. Значит, $b \in Y \cap X_i$ и $b \geqslant_i a$, поэтому $b = a$ по выбору a. Это показывает, что a — наименьший элемент в Y, следовательно, X вполне упорядочено, т. е. $(X, \geqslant) \in W$. Таким образом W индуктивно и по лемме Цорна имеет максимальный элемент, который мы обозначим через $(X, \geqslant)$. Допустим, что $A \neq X$. Если $a \in A$ и $a \notin X$, то пусть $X' = X \cup \{a\}$. Определим порядок $\geqslant'$ на X' следующим образом: если $x, y \in X'$ и $x = a$, то $x \geqslant' y$; оставшаяся возможность — это когда оба элемента x, y лежат в X, и здесь полагаем $x \geqslant' y$ в том и только том случае, когда $x \geqslant y$. Тогда $(X', \geqslant') > (X, \geqslant)$ вполне упорядочено и $(X', \geqslant')$ относительно

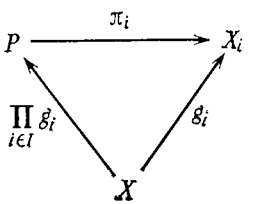
порядка в W. Это противоречие показывает, что $X = A$. Следовательно, A может быть вполне упорядочено. □

16. Теорема. *Из теоремы о полном упорядочивании следует аксиома выбора.*

Доказательство. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — непустое семейство непустых множеств. Допустим, что каждое из них вполне упорядочено, тогда существует наименьший элемент $x_i \in X_i$ для любого $i \in I$. Таким образом, $\bigtimes_{i \in I} X_i \neq \varnothing$. □

Произведение множеств

Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ обозначает семейство множеств, индексированных множеством I. Множество P называется **произведением** семейства $\{X_i \mid i \in I\}$, если существует совокупность отображений $\{\pi_i\colon P \to X_i\}$, обладающая следующим свойством: если X — произвольное множество и $\{g_i\colon X \to X_i\}$ — совокупность отображений, то существует единственное отображение $\prod_{i \in I} g_i\colon X \to P$, такое, что диаграмма



коммутативна при всех $i \in I$. Если это так, то обозначаем P через $\prod_{i \in I} X_i$.

Отображение $\prod_{i \in I} g_i\colon X \to P$ называется **произведением семейства отображений** $\{g_i\}_{i \in I}$. Отображение $\pi_i\colon P \to X_i$ называется i-й **проекцией** этого произведения.

17. Предложение. *Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство множеств.*

17.1. *Декартово произведение $\bigtimes_{i \in I} X_i$ является произведением с проекциями*

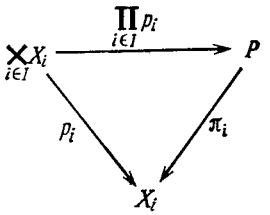
$$p_i \begin{cases} \bigtimes_{i \in I} X_i \to X_i \\ f \mapsto f(i) \end{cases}$$

$\forall i \in I$, $f \in \bigtimes_{i \in I} X_i$.

17.2. *Если* $\{\pi_i\colon P \to X_i\}$ — *произведение семейства* $\{X_i\}_{i\in}$ *то*

$$\prod_{i\in I} p_i\colon \bigtimes_{i\in I} X_i \to P$$

является единственной эквивалентностью, такой, что диаграмм

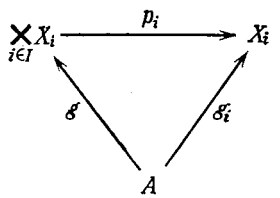


коммутативна для всех $i \in I$.

Доказательство. Декартово произведение $\bigtimes_{I\in i} X_i$ я ляется произведением, поскольку если заданы $\{g_i\colon A \to X_i$ то

$$g = \prod_{i\in I} g_i \begin{cases} A \to \bigtimes_{i\in I} X_i \\ a \mapsto g(a), \end{cases}$$

где $g(a)\colon i \to g_i(a)$ для всех $i \in I$, является единственным таки отображением, что диаграмма



коммутативна. Пусть $F = \prod_{i\in I} p_i$ обозначает такое (единственно отображение, что диаграмма, приведенная в формулировке пре ложения, коммутативна, и пусть $G\colon P \to \bigtimes_{i\in I} X_i$ обозначает соо ветствующее отображение, такое, что $p_i G = \pi_i$ для всех $i \in$ оно существует, поскольку $\bigtimes_{i\in I} X_i$ — произведение. Тогда

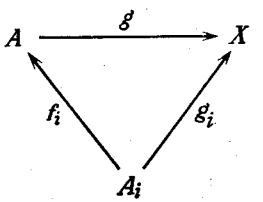
$$p_i GF = \pi_i F = p_i$$

для всех $i \in I$. Но по определению произведения тождественн отображение 1_X является единственным отображением $H\colon X \to X$, где $X = \bigtimes_{i\in I} X_i$, для которого $p_i H = p_i$ для всех $i \in$

Таким образом, $GF = 1_X$. В силу симметрии $FG = 1_P$. Поэтому $F = \prod_{i\in I} p_i$ является эквивалентностью, причем единственной, как и утверждалось. □

Копроизведение и свободное объединение

Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ обозначает семейство множеств, индексированных множеством I. Множество A называется **копроизведением семейства** $\{A_i \mid i \in I\}$, если существует совокупность отображений $\{f_i\colon A_i \to A\}_{i\in I}$, обладающая следующим свойством: если X — произвольное множество и $\{g_i\colon A_i \to X\}_{i\in I}$ — совокупность отображений, то существует единственное отображение $g\colon A \to X$, такое, что диаграмма



коммутативна при всех $i \in I$.

Предложение о существовании копроизведений (предложение 19) утверждает, что любые два копроизведения семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ эквивалентны. Обозначим копроизведение через $\coprod_{i\in I} A_i$, а отображение g, называемое **копроизведением семейства отображений** $\{g_i\}_{i\in I}$, — через $\coprod_{i\in I} g_i$.

Помимо принципа двойственности для упорядоченных множеств существует принцип двойственности для отображений. Его точная формулировка для категорий дается в гл. 1 (1.6) и здесь приводиться не будет. Интуитивно этот принцип можно применять к любому утверждению об отображениях множеств для того, чтобы получить другое утверждение, обратив стрелки и поменяв местами область определения и область значений. В этом смысле копроизведение двойственно произведению, а вложение — наложению.

По определению **свободное объединение** семейства множеств $\{A_i \mid i \in I\}$ — это множество B вместе с семейством вложений $\{f_i\colon A_i \to B\}$, таких, что

(1) $\operatorname{im} f_i \cap \operatorname{im} f_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I$, таких, что $i \neq j$;

(2) $$B = \bigcup_{i\in I} \operatorname{im} f_i.$$

18. Лемма. *Если $\{A_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство множест то существует его свободное объединение.*

Доказательство. Пусть B — объединение семейств множеств $\{C_i \mid i \in I\}$, где $C_i = \{\{a\} \times \{i\} \mid a \in A_i\}$ для все $i \in I$. Таким образом, множества $\{C_i \mid i \in I\}$ попарно не пересе каются и вложения

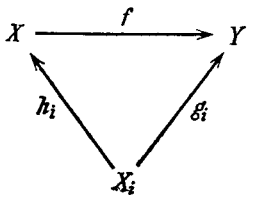
$$f_i \begin{cases} A_i \to B \\ a \mapsto \{a\} \times \{i\} \end{cases}$$

показывают, что B является свободным объединением. □

19. Предложение.

19.1. *Свободное объединение $\{f_i\colon A_i \to B\}$ является копроизве дением семейства множеств $\{A_i\}_{i\in I}$.*

19.2. *Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство множеств и $\{h_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$ и $\{g_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ — копроизведения, то существует единственная эквивалентность $f\colon X \to Y$, такая, что диаграмм*



коммутативна при любом $i \in I$. В частности, отображени $\{h_i\colon X_i \to X\}$ являются вложениями. Кроме того, если $\{k_i\colon X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство эквивалентностей мно жеств, то копроизведение $\coprod_{i\in I} k_i$ этого семейства отображени является эквивалентностью $\coprod_{i\in I} X_i \approx \coprod_{i\in I} Y_i$.

Доказательство оставляем читателю в качестве уп ражнения. □

20. Упражнения.

20.1. Если $\{X_i \mid i \in I\}$ и $\{Y_j \mid j \in J\}$ — два семейства мно жеств и существуют эквивалентность $p\colon I \to J$ и эквивалентност $X_i \approx Y_{p(i)}$ для каждого $i \in I$, то $\prod_{i\in I} X_i$ эквивалентно $\prod_{j\in J} Y_j$. Аналогично, $\coprod_{i\in I} X_i \approx \coprod_{j\in J} Y_j$.

20.2. Для любых множеств X, I и J из эквивалентности $I \approx$ следует эквивалентность $X^I \approx X^J$. Верно и обратное утвержде ние.

20.3. Проекция $\coprod_{i\in I} X_i \to X_j$ является наложением для лю бого $j \in I$. Указать вложение $X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$. Установить двойствен ные утверждения для копроизведения.

20.4. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство упорядоченных множеств и I вполне упорядочено; тогда **лексикографический порядок** на $\bigtimes_{i\in I} X_i$ определяется следующим образом: если f и g принадлежат произведению, а a — наименьший элемент множества I, для которого $f(a) \neq g(a)$, то $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(a) \leqslant g(a)$.

(a) Показать, что если каждое множество X_i вполне упорядочено, то произведение является вполне упорядоченным множеством относительно лексикографического порядка.

(b) Превратить копроизведение семейства вполне упорядоченных множеств $\{X_i\}_{i\in I}$, индексированных вполне упорядоченным множеством I, во вполне упорядоченное множество так, чтобы введенный порядок индуцировал данный порядок на каждом из X_i.

20.5. Доказать, что лемма Цорна следует из теоремы о полном упорядочивании.

20.6. Доказать, что из аксиомы выбора следует лемма Цорна.

20.7. Дать точную формулировку и доказательство утверждения о том, что понятия вложения и наложения двойственны.

20.8. Доказать предложение 19, «дуализируя» предложение 17.

Ординальные числа

Остальная часть введения посвящена ординальным и кардинальным числам, и здесь наше изложение следует Коэну [69]. Мы опускаем доказательства, которые можно найти в этой книге.

Пусть A — вполне упорядоченное множество. **Сегментом** множества A называется его подмножество B, такое, что если $a \in A$ и существуют $b_1, b_2 \in B$, такие, что $b_1 \leqslant a \leqslant b_2$, то $a \in B$. Сегмент в A, содержащий наименьший элемент множества A, называется **начальным сегментом**. Так, для любого $c \in A$ множество $\{a \in A \mid a \leqslant c\}$ является начальным сегментом, обозначаемым через A_c.

Если A вполне упорядочено и $C \subseteq A$, то $\sup C$ обозначает наименьший элемент $a \in A$, такой, что $c \leqslant a$ для всех $c \in C$.

Вложение вполне упорядоченных множеств $f\colon A \to B$ называется **начальным вложением**, если $\operatorname{im} f$ — начальный сегмент в B, а f — гомоморфизм частично упорядоченных множеств.

21. Лемма. *Пусть A и B — вполне упорядоченные множества. Тогда существует не более одного начального вложения $f\colon A \to B$.*

22. Теорема. *Если A и B — вполне упорядоченные множества, то существует единственное начальное вложение одного из этих множеств в другое.*

23. Следствие (сравнимость множеств). *Если A и B — два множества, то существует либо вложение A в B, либо вложение B в A.*

Если A и B — вполне упорядоченные множества, то полагаем по определению:

23.1. $\widetilde{A} \leqslant \widetilde{B}$, если существует начальное вложение A в B.

23.2. $\widetilde{A} = \widetilde{B}$, если существует изоморфизм частично упорядоченных множеств $A \to B$.

23.3. $\widetilde{A} < \widetilde{B}$, если $\widetilde{A} \leqslant \widetilde{B}$, но $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$.

24. Предложение. *Если A и B — вполне упорядоченные множества, то имеет место одно и только одно из следующих соотношений: $\widetilde{A} < \widetilde{B}$, $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ или $\widetilde{B} < \widetilde{A}$.*

Множество A является **транзитивным**, если

$$\forall x,\ y,\ z \in A\,(y \in x \,\&\, z \in y \Rightarrow z \in x).$$

Отношение $\mathscr{R}$, определенное на A следующим образом:

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow (y \in x) \vee (y = x),$$

называется **$\in$-отношением**. Таким образом, если A транзитивно, то

$$y < x \Leftrightarrow y \in x$$

и

$$y \leqslant x \Leftrightarrow (y < x) \vee (y = x).$$

Другими словами, если A транзитивно, то $\in$-отношение частично упорядочивает A. **Ординал (порядковое или ординальное число)** — это транзитивное множество, которое вполне упорядочено $\in$-отношением.

25. Предложение. *Ординалы обладают следующими свойствами:*

25.1. *Любой начальный сегмент ординала — ординал.*

25.2. *Если α — ординал и $x \in \alpha$, то $x = \{y \in \alpha \mid y < x\}$ и x — ординал.*

25.3. *Если α — ординал, то $\alpha \cup \{\alpha\}$ — ординал, «непосредственно следующий» за α.*

26. Примеры. Из 25.3 вытекают следующие примеры ординалов:

$$\varnothing,$$
$$\{\varnothing\} = \varnothing \cup \{\varnothing\},$$
$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}$$

и т. д.

27. Упражнение. Единственным ординалом, содержащим только один элемент, является $\{\varnothing\}$.

28. Теорема. *Если A — произвольное вполне упорядоченное множество, то существует единственный ординал α и изоморфизм упорядоченных множеств $f\colon A \to \alpha$.*

29. Следствие. *Если α и β — ординалы, то*

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \Rightarrow \alpha = \beta$$

и

$$\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta} \Rightarrow \alpha \in \beta.$$

30. Следствие. *Если α — ординал, то*

$$\alpha = \{\beta \mid \widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}\}. \ \square$$

Следствие 30 выражает тот факт, что *ординал является множеством всех ординалов, предшествующих ему.*

31. Следствие. *Если α — ординал, то $\alpha \cup \{\alpha\}$ является наименьшим ординалом, большим, чем α, и обозначается через $\alpha + 1$.*

32. Следствие. *Если S — непустое множество ординалов, то в нем существует наименьший ординал.*

33. Теорема. *Если S — множество ординалов, то существует наименьший ординал α, такой, что $\beta \leqslant \alpha$ для всех $\beta \in S$; в этом случае пишем $\alpha = \sup S$.*

Ординал α называется **непредельным**, если существует ординал β, такой, что $\alpha = \beta + 1$. Ординал α называется **предельным**, если $\alpha \neq 0$ (0 — наименьший ординал) и α не является непредельным.

Ординал α называется **целым** (или натуральным числом), если из $\beta \leqslant \alpha$ следует, что β — либо 0, либо непредельный ординал.

34. Теорема. *Существуют предельные ординалы.*

35. Теорема. *Пусть x — произвольный предельный ординал. Наименьшим предельным ординалом $\omega \leqslant x$ является множество всех целых (натуральных чисел).*

36. Теорема (математическая индукция). *Пусть $x \subseteq \omega$ и $\varnothing \in x$. Предположим, что*

$$\forall n\,(n \in x \Rightarrow n + 1 \in x).$$

Тогда $x = \omega$. $\square$

37. Теорема о трансфинитной индукции. *Пусть $A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ пробегает все формулы в* ZF, *имеющие хотя бы две свобод-*

ные переменные, скажем x и y, и пусть заданы $t_1, \ldots, t_k$; допустим, что

$$\forall x \exists! y (A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)),$$

так что A_n определяет функцию $y = \varphi(x)$. Тогда для любого ординала α и множества z существует единственная функция f, определенная на множестве $\alpha + 1 = \{\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$, такая, что $f(0) = z$ и для всех $\beta \leqslant \alpha$ имеет место равенство $f(\beta) = \varphi(h)$, где h — ограничение функции f на ординал β.

Простейшим следствием теоремы о трансфинитной индукции является такое: *пусть A — класс ординалов, содержащий 0, содержащий $\alpha + 1$, если $\alpha \in A$, и содержащий $\sup X$, если X — подмножество в A. Тогда A содержит все ординалы.* В качестве иллюстраций трансфинитной индукции можно определить ординальную сумму, произведение и степень.

38. **Ординальная сумма.** Для фиксированного α полагаем $\alpha + 0 = \alpha$ и $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$, если β — предельный ординал. Полагаем $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.

Ординальное произведение. Для фиксированного α полагаем $\alpha \cdot 0 = 0$ и $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$, и если β — предельный ординал, то полагаем $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

Степень. Для фиксированного α полагаем $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ и, если β — предельный ординал, то

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}.$$

Кардинальные числа

Пусть A и B — множества. Будем писать, что $|A| \leqslant |B|$, если существует вложение A в B, и $|A| = |B|$, если существует взаимно однозначное отображение множества A на B. Из следствия 23 о сравнимости множеств вытекает, что если A и B — множества, то либо $|A| \leqslant |B|$, либо $|B| \leqslant |A|$. Согласно теореме Кантора — Шрёдера — Бернштейна, справедлива импликация

$$|A| \leqslant |B| \,\&\, |B| \leqslant |A| \Rightarrow |A| = |B|.$$

Скажем, что множества A и B имеют одну и ту же **мощность**, если $|A| = |B|$.

Кардинальным числом (кардиналом) является по определению такое ординальное число α, что для любых ординальных чисел β имеет место следующая импликация:

$$\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|.$$

Это определяет кардинал как наименьший ординал данной мощности.

Поскольку, согласно теореме 15 о полном упорядочивании, каждое множество можно вполне упорядочить и каждое вполне упорядоченное множество по теореме 28 изоморфно как частично упорядоченное множество некоторому ординалу, то каждое множество A эквивалентно единственному кардиналу $|A|$. В этом случае мы говорим, что A **имеет кардинал** $|A|$ и, следовательно, множества A и B эквивалентны, если они имеют один и тот же кардинал, т. е. тогда и только тогда, когда $|A| = |B|$. (Поэтому обозначение $|A|$ для кардинала не противоречит использованию этого обозначения для мощности.) Из теоремы Кантора (теоремы 5) следует, что $|\mathrm{Pow}\, A| > |A|$ для любого множества A и, значит, существуют сколь угодно большие кардиналы (и ординалы).

39. **Теорема.** *Существует взаимно однозначное отображение*

$$\begin{cases} \text{ординалы} \to \text{кардиналы} \\ \alpha \mapsto \aleph_\alpha \end{cases}$$

где $\aleph_\alpha$ — наименьший бесконечный кардинал, больший чем $\aleph_\beta$ для всех $\beta < \alpha$.

Мощность множества ω равна $\aleph_0$. Ординал является **счетным**, если его кардинал есть $\aleph_0$. Значит, ω — наименьший счетный ординал, т. е. $\omega = \aleph_0$. Ординал α называется **конечным**, если $\alpha \in \omega$. Таким образом, конечные ординалы являются кардиналами (целыми).

Поскольку $|\mathrm{Pow}\, \omega| > \omega = \aleph_0$, возникает вопрос, каким из кардиналов $\aleph_\alpha$ является $|\mathrm{Pow}\, \omega|$. **Континуум-гипотеза** утверждает, что

$$c = |\mathrm{Pow}\, \omega| = \aleph_1,$$

т. е. что мощность множества $\mathrm{Pow}\, \omega$ является первым несчетным кардиналом. **Обобщенная континуум-гипотеза** утверждает, что для любого ординала α

$$|\mathrm{Pow}\, \aleph_\alpha| = \aleph_{\alpha+1}.$$

Множество действительных чисел на отрезке $[0, 1]$ является по определению **континуумом**. Континуум-гипотеза (CH) получила свое название в связи с тем фактом, что континуум имеет мощность $|\mathrm{Pow}\, \omega|$ (теорема 43). В теории множеств ZF из обобщенной континуум-гипотезы следует аксиома выбора (Серпинский [47]), но аксиома выбора не влечет за собой обобщенную континуум-гипотезу (Коэн [63, 64]). Более того, ни из континуум-гипотезы не следует аксиома выбора, ни из аксиомы выбора и континуум-гипотезы не следует обобщенная континуум-гипотеза (Соловэй [63]).

Если α и β — счетные ординалы, то $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ и α^β — тоже счетные ординалы, например $|\, 2^\omega \,| = \omega$. Это иллюстрирует тот очевидный факт, что ординальная степень связана с декартовым произведением лишь обозначением. Выше A^B обозначало декартово произведение, т. е. множество всех отображений множества B в A. Например, степень множества Pow ω эквивалентна декартову произведению 2^ω (теорема 4), и Pow ω не эквивалентно ω по теореме Кантора. Таким образом, $|\, 2^\omega \,| \neq \omega$. Но ординальная степень используется так редко, что недоразумений возникнуть не должно.

Кардинальная арифметика

Ординальная сумма $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ двух ординалов уже были определены. Кардиналы являются ординалами, однако ни ординальная сумма, ни ординальное произведение двух кардиналов не обязаны быть кардиналами. Например, $\omega + 1 > \omega$, однако $|\, \omega + 1 \,| = |\, \omega \,|$. Таким образом, поскольку кардинал — это наименьший ординал данной мощности, то $\omega + 1$ не является кардиналом.

40. Теорема и определение.

40.1. *Для любых двух ординалов* α *и* β

$$||\, \alpha| + |\, \beta|| = |\, \alpha + \beta \,| = |\, \alpha \coprod \beta \,| = \max \{|\, \alpha \,|, |\, \beta \,|\}$$

и

$$|\, \alpha \,|\, |\, \beta \,| = |\, \alpha\beta \,| = |\, \alpha \times \beta \,| = \max \{|\, \alpha \,|, |\, \beta \,|\},$$

где $\alpha \times \beta$ *обозначает декартово произведение, а* $\alpha \coprod \beta$ *— свободное объединение (или копроизведение) множеств* α *и* β.

40.2. ***Кардинальная сумма*** *и* ***произведение*** *определяются для семейства ординалов* $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ *так*:

$$\sum_{i \in I} |\, \alpha_i \,| = |\, \coprod_{i \in I} \alpha_i \,|$$

и

$$\prod_{i \in I} |\, \alpha_i \,| = |\, \bigtimes_{i \in I} \alpha_i \,|.$$

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения. □

41. Упражнения.

41.1. Доказать, что для произвольного предельного ординала α имеют место равенства $1 + \alpha = \alpha \neq \alpha + 1$ и $n\alpha \neq \alpha n$ для любого целого $n \neq 0$.

41.2. Доказать, что для любого множества A множество всех отображений A в себя эквивалентно Pow A, т. е. $A^A \approx 2^A$.

41.3. Доказать, что континуум эквивалентен множеству $\mathbb{R}$ действительных чисел, т. е. $c = |\, \mathbb{R} \,|$.

41.4. Показать, что для любых множеств A и B множество взаимно однозначных отображений множества A на себя эквивалентно множеству взаимно однозначных отображений множества B на себя тогда и только тогда, когда A эквивалентно B. Показать, что если A имеет бесконечную мощность α, то множество всех его перестановок имеет мощность α^α. Доказать, что множество всех перестановок множества A имеет мощность 2^α, где α — мощность множества A.

41.5. Доказать, что $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ и α^β счетны, если α и β счетны.

41.6. Показать, что кардинальная сумма и произведение коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны (см. определение в гл. 1).

41.7. *Пусть* $\{a_i \mid i \in I\}$ *— семейство кардинальных чисел, где* $a_i = a$ *при любом* $i \in I$. *Тогда* $\sum_{i \in I} a_i = a\, |\, I \,| = \max \{a, |\, I \,|\}$.

41.8. *Для любого бесконечного кардинального числа* a *и натурального числа* n

$$a^n = a \text{ и } na = a.$$

41.9. *Пусть* X *и* Y *— бесконечные множества и* $f\colon X \to Y$ *— наложение. Для любого* $y \in Y$ *пусть* $a_y = |\, f^{-1}(y) \,|$. *Тогда*

$$|\, X \,| = (\sum_{y \in Y} a_y) \cdot |\, Y \,|.$$

Кроме того, если $|\, f^{-1}(y) \,| \leqslant |\, Y \,|$ *для любого* $y \in Y$, *то*

$$|\, X \,| = |\, Y \,|.$$

(*В частности,* $|\, X \,| = |\, Y \,|$, *если* $|\, f^{-1}(y) \,| < \aleph_0$ *при любом* $y \in Y$.)

41.10. Рассмотрим счетную последовательность $\{F_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ конечных множеств и предположим, что для каждого n существует отображение Φ_n множества F_n в Pow F_{n+1}. Для простоты обозначим Φ_n через Φ при любом n, а объединение данного семейства конечных множеств — через $\mathscr{F}$. **Путем** (в упорядоченной паре) $(\mathscr{F}, \Phi)$ называется конечная или бесконечная последовательность элементов $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathscr{F}$, такая, что $b_i \in F_i$ и $b_{i+1} \in \Phi(b_i)$, $i = 1, 2 \ldots$. Длина конечного пути $b_1, \ldots, b_m$ равна m; длина бесконечного пути $b_1, b_2, \ldots$ бесконечна. Доказать **лемму Кёнига о графах**: *если пара* $(\mathscr{F}, \Phi)$ *имеет пути сколь угодно большой длины, то она имеет путь бесконечной длины.*

Из континуум-гипотезы следует, что c несчетно. Это можно доказать, и не обращаясь к континуум-гипотезе.

42 **Теорема** *Кардинал с несчетен*

Доказательство. Любое действительное число из [0, имеет по существу единственное десятичное представлен 0, $a_1a_2 \ldots a_n \ldots$, где a_i — натуральное число между 0 и 9: « существу» единственное, поскольку, например,

0,1575999...

имеет также представление в виде

0,1576000...

Этой неоднозначности можно избежать, например, выбирая всег первое представление, т. е. не разрешая десятичной дроби з канчиваться нулями.

Если кардинал c счетен, то можно расположить десятичн дроби $0, a_1a_2 \ldots$ в виде счетной последовательности:

$$\begin{array}{l} 0, a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n}\ \ldots \\ 0, a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n}\ \ldots \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ 0, a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots a_{mn}\ . \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \ \vdots \end{array}$$

Пусть $b = 0,b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ — десятичная дробь, n-й знак кот рой b_n является натуральным числом (от 0 до 9), не равным a_{nn}, ни 0. Тогда b не входит в выписанную последовательност поскольку ее n-й знак отличен от n-го знака любой десятичн дроби последовательности. Но мы предположили, что в этой сче ной последовательности перечислены все десятичные дроби. Э противоречие доказывает несчетность кардинала c. □

Метод, использованный в доказательстве, называется кант ровым диагональным методом и распространен в бесконечн математике. (Доказательство теоремы Кантора, теоремы использует теорему Кантора о диагонали. Ср. Абиан [65, стр. 25 См. также Коэн [69, стр. 67] о диагональном методе Гёделя.)

43. Теорема. $2^{\aleph_0} = c = |\mathbb{R}|$.

44. Следствие. *Для любого натурального числа* n

$$c = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots = n^{\aleph_0} = \ldots$$

45. Упражнения.

45.1. Если a и b — кардинальные числа и n — натуральн число, то

(a) $a + n = b + n \Rightarrow a = b$

и

(b) $na = nb \Rightarrow a = b$

45.2. Используя равенство $c = 2^{\aleph_0}$, показать, что $c = c^2 = c^3 = \ldots = c^{\aleph_0}$. Показать, что все действительные векторные пространства конечной или счетной размерности имеют одну и ту же мощность.

45.3. Доказать, что $c^c = 2^c$.

45.4. Доказать, что $\aleph_0^c = 2^c$.

45.5. Доказать теорему Кёнига: *сумма бесконечного ряда кардинальных чисел, отличных от нуля, меньше, чем их произведение.*

45.6. Если a, b, c и d — кардиналы и $a \leqslant c$, $b \leqslant d$, то $a^b \leqslant c^d$.

45.7. Если a — кардинал, $a = 2a'$ и $a = 3a''$, то $a = 6a'''$ (здесь a', a'', a''' — кардиналы).

Ссылки

Абиан [65], Биркгоф [52], [67], Бурбаки [65], Гёдель [40, 58], Камке [50], Кантор [42], Келли [68], Кон [68], Коэн [63, 64], [69], Курош [67], [73], Лоувер [64], [65], Серпинский [47], [58], Соловэй [69], Френкель [22], Френкель — Бар-Хиллел [66], Халмош [60], Хаусдорф [37], Цермело [04].

Часть I

ВВЕДЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ: ПОЛУГРУППА, МОНОИД, ГРУППА, КАТЕГОРИЯ, КОЛЬЦО И МОДУЛЬ

Глава 1

ОПЕРАЦИИ: ПОЛУГРУППА, МОНОИД, ГРУППА И КАТЕГОРИЯ

Помимо перечисленного в заглавии, в этой главе рассматриваются такие темы и понятия: определение операций прямого произведения и прямой суммы, понятие факторгруппы, теорема Нётер о гомоморфизмах, лемма Цассенхауза о бабочке, упражнения, относящиеся к группам подстановок и знакопеременным группам, понятие разрешимых и нильпотентных групп, простых групп, теоремы Силова и основные теоремы об абелевых группах.

Операция

Понятие операции является основным в определениях полугруппы, моноида, группы, категории, кольца и модуля, появляющихся в первых двух главах, которые в свою очередь являются основными объектами изучения в этой книге. Если G и S — непустые множества, то говорят, что G **действует** на S, если существует отображение $f\colon G \times S \to S$. Отображение f называется (бинарной) **операцией**, а элементы множества G — **операторами.** Если отображение f фиксировано, то через gx обозначим элемент $f(g, x)$ (если имеются две операции, то в некоторых случаях $g \cdot x$, $g \circ x$ или $g + x$ будет обозначать образ элемента (g, x) при второй операции). Если $x \in S$, то множество $\{gx \mid g \in G\}$ называется **орбитой** элемента x при действии множества G. Подмножество T в S называется **инвариантным** относительно G, если оно содержит орбиту любого своего элемента.

Полугруппы и моноиды

В частности, рассматриваются операции, где множество S действует на S. Операция $S \times S \to S$ называется **ассоциативной, если**

$$(xy)z = x(yz)$$

для всех x, y и z из S. **Полугруппа** определяется как упорядоченная пара, состоящая из множества S и ассоциативной операции $S \times S \to S$. **Единицей** полугруппы S называется элемент $1 \in S$, для которого

$$1x = x1 = x$$

при всех $x \in S$. Полугруппа может иметь лишь одну единицу, так как если e — другая единица, то $1 = e1 = e$. Полугруппа с единицей называется **моноидом** [1]). Под **мультипликативным (аддитивным)** моноидом или полугруппой понимаются такие моноид или полугруппа, в которых образ элемента (x, y) при операции обозначается через xy (соотв. $x + y$); в этом случае операция называется **умножением (сложением)**. В аддитивном моноиде символ 0 обозначает единичный элемент, называемый **нулем**, и в этом случае $0 + x = x + 0 = x$ для всех x.

Подоперация

Если $S \times S \to S$ — операция, то **подоперацией** называется индуцированная операция $T \times T \to T$, где T — подмножество в S [2]). Если S — полугруппа, то T — также полугруппа, называемая **подполугруппой** полугруппы S. Однако если S — моноид, то подполугруппа T в S может не быть моноидом, так как может не обладать единицей. Если S — моноид с единицей 1, то **подмоноидом** T называется подполугруппа с единицей e. Итак, подмоноидом является моноид с единицей e, которая, возможно, отлична от 1 [3]). Пересечение [4]) любого числа подполугрупп является подполугруппой, а пересечение любого числа подмоноидов с одной и той же единицей также является подмоноидом.

Обратимым элементом в моноиде S называется элемент x, для которого существует элемент $y \in S$, такой, что $xy = yx = e$, где e — единица. Элемент y определен однозначно, обозначается через x^{-1} и называется **обратным элементом** к x. Если полугруппа S аддитивна, то обратный элемент к x обозначается через $-x$ и называется **противоположным элементом** для x. В этом случае $0 = x + (-x) = -x + x$. Для любого $y \in S$ положим $y - x = y + (-x)$.

---

[1]) Следуя терминологии, принятой в учебниках А. Г. Куроша и А. И. Мальцева, а также в ряде других монографий, авторский термин «semigroup» мы переводили как «моноид», а «monoid» — как «полугруппа». Заметим, однако, что встречается и противоположное словоупотребление.— *Прим. ред.*

[2]) Разумеется, предполагается, что $t't'' \in T$ для всех t', $t'' \in T$.— *Прим. ред.*

[3]) С точки зрения общей теории универсальных алгебр это означает, что единица «не входит в сигнатуру».— *Прим. ред.*

[4]) Имеется в виду непустое пересечение.— *Прим. ред.*

Группа

Группой называется моноид, в котором каждый элемент обр
тим. Для любого моноида S через $\mathcal{U}(S)$ обозначим множест
всех обратимых элементов в S, которое, конечно, является по
моноидом в S. Более того, подмоноид $\mathcal{U}(S)$ является группо
Ее называют **группой обратимых элементов** моноида S [1]).

Подгруппой T группы S называется подоперация, являющая
группой [2]). Если $T = \{1\}$, то T называется **единичной подгруппо**

Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы полугруппы S, то **произведен** $x_1 \ldots x_n$ определяется по индукции:

$$x_1 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = (x_1 \ldots x_{n-1})\, x_n.$$

Если моноид S аддитивный, то под **суммой** понимается

$$x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 + \ldots + x_{n-1}) + x_n$$

(Эти формулы не содержат двусмысленности, поскольку операц
в S ассоциативна [3]). Если $x = x_1 = \ldots = x_n$, то через x^n об
значим произведение $x_1 \ldots x_n$ (а через nx — сумму $x_1 + \ldots + x_n$). Если x — обратимый элемент, то x^{-n} определим к
$(x^{-1})^n$. В моноиде S с единицей 1 положим $x^0 = 1$. Тогда выпо
няется равенство $x^n x^m = x^{n+m}$, которое справедливо для любы
целых чисел, если элемент x обратим [4]).

Абелевы полугруппы

Полугруппа (группа) S называется **коммутативной (или абел
вой)** [5]), если $xy = yx$ для всех $x, y \in S$. Если S — моноид, то це
трализатор любого непустого подмножества X в S

$$\mathcal{C}_S(X) = \{a \in S \mid ax = xa \forall x \in X\}$$

[1]) Иногда ее называют «группой единиц», однако мы воздержались употребления этого термина, желая избежать нежелательных ассоциац с понятием единицы полугруппы.— *Прим. перев.*

[2]) То есть такое множество T группы S, что $1 \in T$, а $t_1, t_2 \in T$ влечет собой $t_1 t_2 \in T$ и $t^{-1} \in T$.— *Прим. ред.*

[3]) По индукции следует показать, что результат ассоциативной операц не зависит от расстановки скобок (в произвольной расстановке скобок следу взять последнее применение операции и использовать последовательно пре положение индукции и аксиому ассоциативности для доказательства раве ства с так определенным элементом $x_1 \ldots x_n$).— *Прим. перев.*

[4]) Следует рассмотреть четыре случая в зависимости от того, положите ны или отрицательны числа m и n.— *Прим. перев.*

[5]) Абелевы группы названы в честь Нильса Хенрика Абеля, норвежско математика, установившего, что не каждое уравнение вида $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет решение, которое может быть получено применен к «коэффициентам» $a_0, \ldots, a_n$ рациональных операций и операции извле

является подмоноидом в S с той же единицей. **Центр** $\mathcal{C}(S)$ полугруппы S определяется как $\mathcal{C}_S(S)$. Итак, центр полугруппы (моноида) S является абелевой полугруппой (моноидом) [1]).

Если полугруппа коммутативна, то для полугрупповой операции обычно используется аддитивная запись $x + y$. Конечно, этого соглашения придерживаются не всегда. Например, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел 1, 2, 3, ... с операцией умножения является коммутативным моноидом.

Относительно операции сложения $\mathbb{N}$ является коммутативной полугруппой. Аналогично, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ являются аддитивными и мультипликативными моноидами.

Map (X)

Через Map (X) обозначим множество всех отображений $X \to X$, где X — непустое множество. (Конечно, это множество совпадает с декартовым произведением X^X, но это обозначение зарезервировано для прямого произведения, которое вскоре будет определено.) Множество Map (X) оказывается моноидом относительно операции $(f, g) \mapsto fg$, где fg — произведение отображений

$$fg(x) = f(g(x))$$

для всех $x \in X$. Тождественное отображение 1_X является единицей в Map (X). Если X и Y — произвольные множества и $y \in Y$, то отображение

$$y_{\text{const}} \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto y \end{cases}$$

называется **константой, определенной элементом** y. Это отображение удовлетворяет соотношениям

$$f y_{\text{const}} = f(y)_{\text{const}}$$

и

$$y_{\text{const}} f = y_{\text{const}}$$

для всех $y \in X$, $f \in$ Map (X). Отсюда следует, что моноид Map (X) абелев тогда и только тогда, когда множество X состоит из одного элемента. **Идемпотентом** в некоторой полугруппе называется такой элемент e этой полугруппы, что $e^2 = e$. В группе единственным идемпотентом является единица. В моноиде Map (X) эле-

ния m-го корня. Однако уравнения с абелевой группой Галуа разрешимы в этом смысле. Изложение этого вопроса можно найти у Артина [59], Джекобсона [64] или у Капланского [69a]. (См. также Постников М. М., Теория Галуа, Физматгиз, М., 1963 — *перев.*)

[1]) Если полугруппа не содержит единицы, то ее центр может оказаться пустым.— *Прим. перев.*

мент y_{const} является идемпотентом при любом $y \in X$. Следовательно, Map (X) — группа тогда и только тогда, когда множество X состоит из одного элемента. Если e — идемпотент в полугруппе S, то подмножество

$$eSe = \{eae \mid a \in S\}$$

является полугруппой, которая оказывается моноидом с единицей e. Обратно, если T — подмоноид моноида S, то единица e в T является идемпотентом и $T \subseteq eSe$.

Симметрическая группа

Если X — множество, то через $\mathscr{S}(X)$ будем обозначать множество биективных отображений $X \to X$. В силу предложения 2 из теоретико-множественного введения $\mathscr{S}(X) = \mathscr{U}(\text{Map}(X))$ является группой относительно умножения отображений. Если $f\colon X \to Y$ — эквивалентность множеств, то отображение

$$\begin{cases} Y^Y \to X^X \\ h \mapsto f^{-1}hf \end{cases}$$

является эквивалентностью, индуцирующей эквивалентность

$$\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(X).$$

Если $n > 0$ — целое число, то множество S_n биективных отображений множества из n элементов называется **симметрической группой степени** n.

1.1. Упражнения.

1.1.1. Число элементов в S_n равно $n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$.

1.1.2. Группа S_n при $n > 2$ некоммутативна.

1.1.3. Найти мощность множества биективных отображений множества X.

1.1.4. Доказать, что из $\mathscr{S}(X) \approx \mathscr{S}(Y)$ следует $X \approx Y$.

1.1.5. Если S — полугруппа, а A и B — ее подполугруппы, то положим $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$. Если полугруппа S абелева, то множество подполугрупп в S является полугруппой относительно так определенного произведения AB.

1.1.6. Пусть S — полугруппа, A и B — ее подполугруппы и $A \circ B$ — наименьшая подполугруппа, содержащая A и B. Показать, что множество подполугрупп из S является полугруппой относительно операции $A \circ B$, в которой каждый элемент оказывается идемпотентом. Рассмотреть дуальный вариант с операцией $A \circ B = A \cap B$.

Прямые произведения и сумма

Если $\{X_i\}_{i \in I}$ — непустое семейство полугрупп, то (декартово) произведение $\prod_{i \in I} X_i$ оказывается полугруппой [1]) относительно операции $(f, g) \mapsto fg$, определенной для любого $i \in I$ равенством

$$fg(i) = f(i)\, g(i).$$

Эта полугруппа называется (**прямым**) **произведением** семейства $\{X_i\}$ полугрупп. Рассмотренная операция называется **поточечным умножением** функций. Если используется аддитивное обозначение, то эта операция определяется равенством

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i)$$

и называется **поточечным сложением** функций. (Синонимы: **покоординатное** или **покомпонентное** сложение.) В этом случае множество X_i называется **компонентой** (именно, i-й **компонентой**) произведения. Ассоциативность умножения $(fg)h = f(gh)$ немедленно следует из ассоциативности умножения в каждой компоненте. В мультипликативном варианте компоненты называются (прямыми) **сомножителями** произведения, а в аддитивном варианте — (прямыми) **слагаемыми**. Произведение $\prod_{i \in I} X_i$ является моноидом тогда и только тогда, когда каждая компонента — моноид. В этом случае если 1_i — единица моноида X_i, то функция

$$\begin{cases} I \to \prod_{i \in I} X_i \\ i \mapsto 1_i \end{cases}$$

является единицей произведения. **Носитель** элемента f из произведения моноидов определяется как множество всех тех $i \in I$, для которых $f(i) \neq 1_i$. Носитель элемента f называется **конечным**, если он — конечное подмножество в I. Множество всех функций из произведения, имеющих конечные носители, является полугруппой относительно поточечного умножения (или сложения) функций. Эта полугруппа обозначается через $\sum_{i \in I} \oplus X_i$ или $\bigoplus_{i \in I} X_i$ и называется **прямой суммой** семейства $\{X_i\}_{i \in I}$ моноидов. Если множество I конечно, то прямое произведение совпадает с прямой суммой. Прямое произведение или прямая сумма являются группой тогда и только тогда, когда каждая компонента — группа. Прямое произведение или прямая сумма абелевы тогда и только тогда, когда абелева каждая компонента. Многие свойства прямого произведения или суммы наследуются или сводятся к соот-

[1]) См. произведение множеств, теоретико-множественное введение, предложение 17.

ветствующим свойствам компонент X_i. Другими словами, часто оказывается, что прямое произведение или сумма принадлежат некоторому классу полугрупп тогда и только тогда, когда этому классу принадлежит каждая компонента.

Важным примером прямого произведения является множество X^I всех отображений $I \to X$ непустого множества I в моноид X. В этом случае прямая сумма [1]) обозначается через $X^{(I)}$. Единицей в моноиде X^I (а также и в моноиде $X^{(I)}$) является отображение 1_{const}, где через 1 обозначена единица моноида X. (В случае аддитивной записи операции в моноиде X единицей является отображение 0_{const}.) Заметим, что если X — моноид, то на множестве X^X можно определить два моноида: прямое произведение и Map (X).

1.2. Упражнение. Показать, что для любого кардинального числа A существует группа G, такая, что множество G имеет мощность A.

Гомоморфизмы

Отображение $f\colon A \to B$ полугрупп называется **гомоморфизмом**, если

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b) \tag{1}$$

для всех $a, b \in A$ [2]). Грубо говоря, гомоморфизм любой алгебраической системы — это отображение, сохраняющее операцию системы. Если операция в полугруппе A записана аддитивно, $a+b$, а в полугруппе B мультипликативно, $x \circ y$, то каждый гомоморфизм $f\colon A \to B$ удовлетворяет соотношению

$$f(a+b) = f(a) \circ f(b) \tag{2}$$

для всех $a, b \in A$. Множество $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел является группой относительно обычной операции умножения. Каждое действительное число r, большее нуля и не равное 1, определяет гомоморфизм

$$\exp \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ a \mapsto r^a \end{cases}$$

аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел в группу $\mathbb{R}^+$. Отображение exp удовлетворяет соотношению (2), поскольку в этом случае оно выражает экспоненциальный закон $r^{a+b} = r^a \cdot r^b$. Одно

[1]) Некоторые авторы для обозначения прямой суммы используют символ $\coprod X$. Мы отказались от такого обозначения по чисто зрительным соображениям.

[2]) Обычно, говоря о гомоморфизме моноидов, дополнительно предполагают, что $f(1) = 1$.— *Прим. ред.*

из свойств действительных чисел состоит в том, что отображение exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ обладает обратным отображением log: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. (Для $r = 10$ это обычный логарифм, а для $r = e$ — натуральный логарифм.) Таким образом,

$$\log xy = \log x + \log y$$

и

$$\log(\exp a) = a,$$
$$\exp(\log x) = x$$

для всех $a \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^+$.

Другим примером гомоморфизма является степенное отображение $x \mapsto x^n$ (или $x \mapsto nx$ в аддитивной записи), определенное для любой абелевой полугруппы A и фиксированного положительного целого числа n. Если A — абелева группа, то степенное отображение можно определить и для отрицательных целых чисел, если положить a^{-n} равным $(a^{-1})^n$ (или $(-nx) = n(-x)$ в аддитивной записи). В частности, в случае абелевой группы отображение, переводящее каждый элемент a в его обратный a^{-1}, является биективным гомоморфизмом. Кроме того, каждая подгруппа N абелевой группы A определяет группу A/N и гомоморфизм $A \to A/N$ (об этом будет рассказано позже). Короче, абелевы группы насыщены гомоморфизмами!

Hom (X,Y)

Если X и Y — полугруппы, причем полугруппа Y абелева, то множество Hom (X, Y), состоящее из всех гомоморфизмов $X \to Y$, является подполугруппой полугруппы Y^X, т. е. для всех $f, g \in \text{Hom}(X, Y)$ и $a, b \in X$ имеем

$$fg(ab) = f(ab)\,g(ab) = f(a)\,f(b)\,g(a)\,g(b) =$$
$$= f(a)\,g(a)\,f(b)\,g(b) =$$
$$= fg(a)\,fg(b).$$

Если к тому же Y — абелева группа (абелев моноид), то полугруппа Y^X, а следовательно и Hom (X, Y), является абелевой группой (абелевым моноидом).

Для любой полугруппы X, если $f, g \in \text{Hom}(X, X)$ и $a, b \in X$, то

$$fg(ab) = f(g(a)\,g(b)) = fg(a)\,fg(b),$$

и поэтому множество Hom (X, X) — моноид. Этот моноид является подмоноидом моноида Map (X) с той же самой единицей. Он называется **моноидом эндоморфизмов** полугруппы X и обозначается через End X. Элементы моноида End X называются **эндоморфизмами.**

Образ и ядро

Если $f\colon A \to A'$ — гомоморфизм группы A в группу A', то множество

$$\{b \in A' \mid \exists\, a \in A \;\&\; b = f(a)\}$$

является подгруппой в A', называемой **образом** гомоморфизма f и обозначаемой через $\operatorname{im} f$. Если e — единица группы A, e' — единица группы A', то, поскольку гомоморфизм сохраняет идемпотенты и e' — единственный идемпотент в группе A', получаем, что $f(e) = e'$. Итак, единица e' лежит в образе каждого гомоморфизма $f\colon A \to A'$. Применяя это утверждение в частном случае, когда A — подгруппа группы A' и $f\colon A \to A'$ — включение, получаем, что единица e' лежит в каждой подгруппе группы A'. Отметим также, что $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ для каждого $a \in A$. Отсюда следует, что $\operatorname{im} f$ — подгруппа в A'.

Ядро гомоморфизма f определяется как множество

$$\ker f = \{a \in A \mid f(a) = e'\}.$$

Это множество является подгруппой в A, причем $x^{-1}ax \in \ker f$ для всех $x \in A$ и $a \in \ker f$. Любая подгруппа N группы A, такая, что $x^{-1}ax \in N$ для всех $x \in A$ и $a \in N$, называется **нормальной подгруппой** [1]) в A. В абелевой группе каждая подгруппа нормальна [2]).

Факторгруппа

Если N — подгруппа группы A и $x \in A$, то **левым смежным классом** по подгруппе N, содержащим элемент x, назовем множество

$$xN = \{xa \mid a \in N\}.$$

Таким образом,

$$y \in xN \iff x^{-1}y \in N.$$

Правый смежный класс Nx определяется симметрично. Из определения следует, что подгруппа N нормальна тогда и только тогда, когда $xN = Nx$ для каждого $x \in A$. Для любой подгруппы N группы A отношение

$$x \mathcal{R} y \iff xN = yN$$

является отношением эквивалентности. Если $xN = yN$, то мы пишем $x \equiv y \pmod N$ и говорим, что x **конгруэнтно (сравнимо с)** y **по модулю** N.

[1]) Часто нормальная подгруппа называется нормальным делителем.— *Прим. ред.*

[2]) Существуют и неабелевы группы с этим свойством, они называются гамильтоновыми. См. гл. 1, упр. 19.

Обозначим множество $\{xN \mid x \in A\}$ через A/N. Если N — нормальная подгруппа (и только в этом случае), множество A/N оказывается группой относительно операции

$$(xN)\,(yN) = xyN$$

Группу A/N называют **факторгруппой** группы A по нормальной подгруппе N, а отображение

$$\begin{cases} A \to A/N \\ x \mapsto xN, \end{cases}$$

являющееся гомоморфизмом, называется **каноническим**. Отметим, что N оказывается ядром канонического гомоморфизма.

Если A — абелева группа, то в аддитивной записи смежный класс, определенный элементом x, обозначается через $x + N$. Таким образом, операция в группе A/N принимает вид

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N.$$

Например, если n — любое целое число и $n\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, делящихся на n, то множество $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является группой, которая обозначается через $\mathbb{Z}_n$. Другие примеры факторгрупп: группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ **рациональных чисел по модулю целых** и группа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ **действительных чисел по модулю целых**.

Вложения и наложения

Гомоморфизм $f\colon A \to A'$ полугрупп, являющийся наложением, называется **гомоморфным наложением** или **наложением полугруппы** A **на** A' (а также **сюръективным гомоморфизмом** этих полугрупп). В этом случае говорят, что полугруппа A' является гомоморфным образом полугруппы A. Таким образом, для любой нормальной подгруппы N группы A каноническое отображение $A \to A/N$ — гомоморфное наложение (ср. с первой теоремой Нётер об изоморфизме 1.10). Гомоморфизм $f\colon A \to A'$ полугрупп, являющийся вложением, называется **гомоморфным вложением** или просто **вложением моноида** A **в** A' (а также **инъективным гомоморфизмом**). Если A — группа, а A' — моноид, то гомоморфизм f оказывается вложением тогда и только тогда, когда его ядро содержит лишь единицу e группы A, т. е. когда $\ker f = e$ (или $\ker f = 0$, если группа A аддитивна). Включение $1^A_B\colon B \to A$ любой подполугруппы B полугруппы A в полугруппу A является вложением, которое обозначается также через $\operatorname{in}\colon B \to A$, $B \xrightarrow{\text{in}} A$, или $B \subseteq A$.

Проекции и инъекции

Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство полугрупп, то j-й **проекцией для** каждого $j \in I$ называется отображение

$$p_j\left\{\begin{array}{l}\prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j\\ \quad f \mapsto f(j),\end{array}\right.$$

которое оказывается гомоморфным наложением прямого произведения на j-ю компоненту и индуцирует наложение полугрупп

$$\sum_{i\in I}\oplus X_i \to X_j,$$

называемое *j-й проекцией прямой суммы.*

Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство моноидов, то для каждого $j \in I$ существует гомоморфное вложение

$$u_j\colon X_j \to \prod_{i\in I} X_i,$$

определенное следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l}u_j(x)(j) = x \quad \forall x \in X_j\\ u_j(x)(i) = \text{единица, если } i \neq j.\end{array}\right.$$

Это вложение называется **канонической инъекцией** (или **вложением**) моноида X_j в указанное произведение. Так как для всех $x \in X_j$ носитель элемента $u_j(x)$ конечен, то $\operatorname{im} u_j$ содержится в прямой сумме, и индуцированное отображение $X_j \to \sum\limits_{i\in I}\oplus X_i$ называется *канонической инъекцией моноида X_j в прямую сумму.* В обоих случаях

$$u_i(x)\,u_j(y) = u_j(y)\,u_i(x)$$

для всех $i \neq j \in I$ и всех $x \in X_i$ и $y \in X_j$.

Точные последовательности

Если M, N и P — группы, то последовательность

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

означает, что $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to P$ — гомоморфизмы. Говорят, что эта последовательность **точна**, если $\operatorname{im} f = \ker g$. В этой терминологии гомоморфизм $f\colon M \to N$ инъективен тогда и только тогда, когда последовательность

$$0 \to M \xrightarrow{f} N$$

точна, и f сюръективен тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$M \xrightarrow{f} N \to 0.$$

Здесь через 0 обозначена единичная группа.

Если $\{M_i\}$ — семейство групп, то последовательность

$$\ldots \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-2} \to \ldots$$

точна в том случае, когда $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$ для каждого i.

Образующие

Если N — подполугруппа полугруппы M, то говорят, что подмножество S в M **порождает** N или является ее **системой образующих** (и пишут $N = (S)$), если выполнены следующие два эквивалентных условия:

(1) N является пересечением всех подполугрупп в M, содержащих множество S;

(2) S — подмножество в N, и каждый элемент $x \in N$ есть произведение элементов из S.

Здесь по определению предполагается, что каждый элемент $s \in S$ является «произведением элементов из S». Итак, для любого непустого подмножества T множество всех конечных произведений элементов из T является подполугруппой $(T) \supseteq T$. В частности, подполугруппа N порождается всеми своими элементами. Если M — моноид и N — его подмоноид с той же единицей, то подмножество S в M порождает N, если N — подполугруппа, порожденная множеством $S \cup \{1\}$. Если M — группа и N — ее подгруппа, то говорят, что подмножество S порождает N (и обозначают $N = (S)$), если выполнены два эквивалентных условия:

(S-1) N является пересечением всех подгрупп в M, содержащих множество S;

(S-2) S — подмножество в N и N — подполугруппа в M, порожденная множеством $S \cup S^{-1}$, где $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

Подгруппа, подмоноид или подполугруппа N **конечно** (соотв. **счетно**) **порождена**, если N порождается конечным (соотв. счетным) подмножеством. Полугруппа (моноид или группа) G называется **циклической**, если она порождается одним элементом a, т. е. $G = (a)$ [1]).

[1]) Циклическую полугруппу называют также **моногенной**.— *Прим. ред.*

Индекс и порядок

Порядок полугруппы M — это ее мощность $|M|$. **Порядком элемента** $a \in M$ называется порядок подполугруппы (a), порожденной этим элементом. Если порядок элемента a конечен, то существуют целые числа $0 < k < n$, такие, что $a^n = a^k$ (ср. с бициклической полугруппой в упр. 1.8). Если n — наименьшее число с таким свойством, то порядок элемента a равен $n - 1$. Если порядок элемента a бесконечен, то отображение

$$\begin{cases} \mathbb{N} \to (a) \\ n \mapsto a^n \end{cases}$$

является биективным гомоморфизмом. С другой стороны, если G — группа и элемент $a \in G$ имеет бесконечный порядок, то отображение

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \to (a) \\ i \mapsto a^i \end{cases}$$

является биективным гомоморфизмом. Полугруппа S называется полугруппой **с сокращением**, если

$$ax = ay \Rightarrow x = y,$$
$$x'b = y'b \Rightarrow x' = y'$$

для всех $a, x, y, b, x', y' \in S$. В моноиде с сокращением $a^n = a^k$ влечет за собой $a^t = 1$, где $t = n - k$, и, таким образом, a — обратимый элемент с обратным a^{t-1}.

1.3. Предложение. *Если H — подгруппа группы G, то система всех левых смежных классов по подгруппе H образует разбиение множества G. Множество левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначается через $G : H$. Мощность $|G : H|$ совпадает с мощностью множества всех правых смежных классов группы G по подгруппе H и называется* ***индексом*** *подгруппы H в группе G. Таким образом,*

$$|G| = |G : 1| = |G : H|\,|H : 1|,$$

т. е. порядок подгруппы делит порядок группы (теорема Лагранжа).

Доказательство. Каждый элемент $g \in G$ принадлежит некоторому смежному классу, именно классу gH. Кроме того, два смежных левых класса aH и bH равны тогда и только тогда, когда $b^{-1}a \in H$ (или, эквивалентно, $a^{-1}b \in H$) [1]. Следовательно, если существует $g = ah_1 = bh_2 \in aH \cap bH$, где $h_1 \in H$ и $h_2 \in H$, то $b^{-1}a = h_2h_1^{-1} \in H$, откуда $aH = bH$. Итак, различные смежные классы не пересекаются, а это доказывает, что они образуют разбиение группы G, что и требуется [1]. Отображение

$$\begin{cases} (G : H) \to \text{множество правых смежных классов} \\ aH \mapsto Ha^{-1} \end{cases}$$

является биективным, откуда следует, что $|G : H|$ — мощность множества правых смежных классов. □

В этих обозначениях, если N — нормальная подгруппа группы G, то $|G/H| = |G : H|$.

[1] Действительно, если $aH = bH$, то $a = bh$, где $h \in H$, т. е. $h = b^{-1}a \in H$. Если $h = b^{-1}a \in H$, то $a = bh$, $b = ah^{-1}$ и, следовательно, $ah' = b(hh')$, $bh'' = a(h^{-1}h'')$, т. е. $aH = bH$. — *Прим. перев.*

Делимые группы

Для каждой аддитивной абелевой группы G и целого числа $n \geqslant 0$ множество $nG = \{na \mid a \in G\}$ является подгруппой. Говорят, что абелева группа G **делима**, если $nG = G$ для всех $n > 0$. Примерами делимых групп служат группы $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ и мультипликативная группа всех комплексных корней из единицы. Любой гомоморфный образ делимой группы делим. Например, факторгруппы $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ делимы. Делимая группа обязательно либо бесконечна, либо нулевая.

Если $\{X_i\}_{i \in I}$ — цепь полугрупп, то теоретико-множественное объединение $\bigcup_{i \in I} X_i$ — полугруппа, являющаяся группой при условии, что все X_i — группы. Для каждого простого числа p и целого числа $n > 1$ существует вложение $f_n\colon \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (доказательство?), и группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ содержит цепь

$$\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2} \subset \ldots \subset \mathbb{Z}_{p^n} \subset \ldots .$$

Объединение выписанной цепи обозначается через $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (см. упр. 1.8.13). Заметим, что если какая-либо группа G содержит такую цепь подгрупп, то их объединение в G изоморфно $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (доказательство?).

Периодические группы и группы без кручения

Группа G называется **периодической**, если каждый ее элемент имеет конечный порядок. Если существует такое простое число p, что порядок каждого элемента $x \in G$ равен некоторой степени числа p, то группа G называется p-**группой**. Таким образом, $\mathbb{Z}_{p^r}$ — конечная p-группа, а $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — бесконечная p-группа. Мультипли-

[1] Заметим, что для завершения доказательства следует установить, что $|aH| = |H| = |H : 1|$. Последнее устанавливает биективное отображение $ah \mapsto h$. — *Прим. ред. и перев.*

кативная группа всех комплексных корней из единицы, группа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и прямая сумма семейства $\{\mathbb{Z}_n\}_{n\in N}$ являются примерами бесконечных периодических групп. (Отметим, что прямое произведение семейства $\{\mathbb{Z}_n\}_{n\in N}$ не является периодической группой.)

Группа G называется **ограниченной**, если существует такое целое число $m > 0$, что $mG = 0$. Наименьшее из этих чисел m называется **экспонентой** группы G. Ограниченная группа может быть и бесконечной, как показывает пример бесконечной прямой суммы счетного семейства групп, каждая из которых равна группе $\mathbb{Z}_2$. (В этом случае прямое произведение также является ограниченной группой.) Любая подгруппа или факторгруппа периодической (ограниченной) группы является периодической (ограниченной).

Периодической частью $T(G)$ абелевой группы G называется подгруппа, состоящая из всех элементов группы G, имеющих конечный порядок. Периодическая часть группы G, очевидно, является периодической группой. Группа называется **группой без кручения**, если единица является ее единственным периодическим элементом. Факторгруппа $G/T(G)$ — группа без кручения. **Свободной абелевой группой** называется группа, изоморфная группе $\mathbb{Z}^{(A)}$ для некоторого множества A. Любая подгруппа свободной абелевой группы — группа без кручения (в действительности, свободная группа; см. упр. 27 в конце главы).

1.4. Упражнения.

1.4.1. (a) Пусть A — моноид. Для каждого $a \in A$ через a_s обозначим отображение

$$a_s \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto ax, \end{cases}$$

а через a_d — отображение

$$a_d \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto xa. \end{cases}$$

Тогда $a_d b_s = b_s a_d$ для всех $a, b \in A$.

(b) Рассмотрим отображения

$$s_A \begin{cases} A \to \mathrm{Map}(A) \\ a \mapsto a_s, \end{cases} \qquad d_A \begin{cases} A \to \mathrm{Map}(A) \\ a \mapsto a_d. \end{cases}$$

Тогда $s_A\colon A \to \mathrm{Map}(A)$ является гомоморфным вложением (а $d_A\colon A \to \mathrm{Map}(A)$ — антигомоморфным вложением, т. е. таким вложением f, что $f(xy) = f(y)\cdot f(x)$ для всех x, y).

(c) Если A — группа, то $\mathrm{im}\, s_A \subseteq \mathscr{S}(A) = \mathscr{U}(\mathrm{Map}(A))$ и также $\mathrm{im}\, d_A \subseteq \mathscr{S}(A)$.

(d) Если A — группа конечного порядка n, то существует вложение $A \to S_n$ группы A в симметрическую группу S_n.

1.4.2. Показать, что собственные подгруппы группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ исчерпываются циклическими группами порядка p^n по одной для каждого целого числа n.

1.4.3. Показать, что любая абелева полугруппа S с сокращением вложима в группу G, такую, что $G = \{st^{-1} \mid s, t \in S\}$.

1.4.4. Каждая подгруппа циклической группы циклическая, при этом циклическая группа содержит в точности одну подгруппу порядка d для каждого делителя d порядка группы.

1.4.5. Доказать обратное утверждение к 1.4.4, а именно что если G — конечная группа порядка n, такая, что отображение множества подгрупп в множество делителей числа n

$$S \mapsto |S|$$

является биективным, то группа G циклическая.

1.4.6. Порядки циклических групп A и B равны тогда и только тогда, когда существует биективный гомоморфизм $A \to B$.

1.4.7. Если H — подгруппа группы G, то существует подмножество элементов $\{a_i\}_{i\in I}$ в G, такое, что $G:H = \{a_iH\}_{i\in I}$ и отображение

$$\begin{cases} (G:H) \to \text{множество правых смежных классов по } H \\ a_iH \mapsto Ha_i \end{cases}$$

биективно.

1.4.8. Если H — подгруппа (конечного индекса) группы G, то

$$\bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$$

— нормальная подгруппа (конечного индекса).

1.4.9. **Нормализатором** $\mathscr{N}_G(A)$ подгруппы A группы G назовем пересечение всех подгрупп B группы G, таких, что A — нормальная подгруппа в B. Таким образом, $\mathscr{N}_G(A) = \{x \in G \mid x^{-1}Ax = A\}$. Подгруппа группы G вида $x^{-1}Ax$ называется **сопряженной** с подгруппой A. Показать, что число подгрупп в G, сопряженных с A, равно индексу нормализатора подгруппы A в G.

1.4.10. Пусть f — элемент порядка 2 симметрической группы S_n и r — число элементов x, таких, что $f(x) = x$. Проверить, что число $n - r$ четное. Показать, что каждая конечная группа G четного порядка содержит элемент порядка 2.

1.4.11. Если порядок каждого элемента группы G не превосходит 2, то группа G абелева.

1.4.12. Если N — подгруппа индекса 2 группы G, то N — нормальная группа.

1.4.13. Показать, что группа S_3 содержит точно шесть подгрупп, из которых три нормальные, а три не являются нормальными.

1.4.14. Пусть H и K — различные собственные подгруппы группы G, каждая из которых содержит по крайней мере два элемента. Показать, что G не совпадает с теоретико-множественным объединением H и K.

*1.4.15. [1]) (a) Любая конечно порожденная абелева группа без кручения вложима в свободную абелеву группу (и, следовательно, является свободной абелевой группой, см. гл. 1, упр. 27).

(b) Любая абелева группа N является гомоморфным образом свободной абелевой группы. [*Указание*: пусть A — множество образующих группы N; существует единственный гомоморфизм $h\colon \mathbb{Z}^{(A)} \to N$, такой, что каждый элемент $u_a(1)$, где $a \in A$ и $u_a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{(A)}$ — каноническая инъекция, переходит в a. При этом $h\left(\sum_{i=1}^{t} n_i u_{a_i}(1)\right) = \sum_{i=1}^{t} n_i a_i$ для любых $n_i \in \mathbb{Z}$ и $a_i \in A$.]

Категория

Категория C состоит из класса $\operatorname{Obj} C$, элементы которого называются **объектами**, и класса $\operatorname{Mor} C$, состоящего из упорядоченных троек $f\colon A \to B$, где A и B — объекты. Элемент $f\colon A \to B$ из $\operatorname{Mor} C$ называется **морфизмом** (с **областью определения** A и **областью значений** B). Для каждой упорядоченной пары $\langle A, B\rangle$ требуется, чтобы класс $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ всех морфизмов $A \to B$ был множеством [2]). Кроме того, для каждой упорядоченной тройки $\langle A, B, C\rangle$ объектов определена операция

$$\begin{cases} \operatorname{Mor}_C(B, C) \times \operatorname{Mor}_C(A, B) \to \operatorname{Mor}_C(A, C) \\ (g, f) \mapsto gf, \end{cases}$$

которая ассоциативна (в том смысле, что $h(gf) = (hg)f$, как только hg и gf определены).

(Заметим, что произведение hg определено, если область значений морфизма g совпадает с областью определения морфизма h.) Наконец, для каждого объекта A множество $\operatorname{Mor}_C(A, A)$ является моноидом с **единицей** 1_A, для которой $f1_A = f$ и $1_A g = g$ для всех морфизмов $f\colon A \to B$ и $g\colon C \to A$.

Для каждого объекта A категории C моноид $\operatorname{Mor}_C(A, A)$ называется **моноидом эндоморфизмов** объекта A и обозначается

[1]) См. примечание на стр. 108.— *Прим. ред.*

[2]) Для $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ используются и другие обозначения: $\operatorname{Hom}_C(A, B)$ и $\mathfrak{Mor}(A, B)$ (поскольку Габриель и Циссман [71] и Маклейн [72] называют морфизмы стрелками (arrow)). Не всегда предполагается, что $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ — множество. Например, можно было бы определить моноид как класс, а не множество, с ассоциативной операцией. Однако все интересные примеры — множества. Употребляются также обозначения $C(A, B)$ и $H_C(A, B)$.— *Прим. ред.*

через $\operatorname{End}_C A$. Элемент моноида $\operatorname{End}_C A$ называется **эндоморфизмом** объекта A.

Если C и D — категории, $\operatorname{Obj} D \subseteq \operatorname{Obj} C$, $\operatorname{Mor} D \subseteq \operatorname{Mor} C$, а операция $\operatorname{Mor} D \times \operatorname{Mor} D \to \operatorname{Mor} D$ индуцирована операцией, определенной на $\operatorname{Mor} C$, то D называется **подкатегорией** категории C. Любой подкласс S объектов категории C определяет подкатегорию S', в которой морфизмы $A \to B$ между объектами те же самые, что и в C, и перемножаются морфизмы в S' так же, как и в C. Тогда S' — категория, являющаяся подкатегорией в C. Она называется **полной подкатегорией категории** C **на подклассе** S или **полной подкатегорией, порожденной подклассом** S.

Функторы

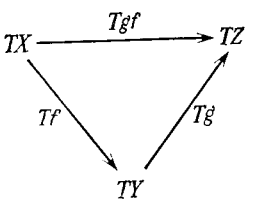
Если C и D — категории, то под **ковариантным функтором** $T\colon C \rightsquigarrow D$ понимается пара отображений

$$T\begin{cases} \operatorname{Obj} C \to \operatorname{Obj} D \\ X \mapsto TX, \end{cases} \qquad T\begin{cases} \operatorname{Mor} C \to \operatorname{Mor} D \\ f \mapsto Tf, \end{cases}$$

которые сохраняют композицию морфизмов и тождественные отображения:

$$Tfg = TfTg \quad \forall f,\ g \in \operatorname{Mor} C,$$
$$T1_A = 1_{TA} \quad \forall A \in \operatorname{Obj} C.$$

Таким образом, если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — морфизмы в C, то диаграмма



коммутативна.

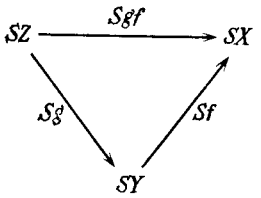
Контравариантный функтор $S\colon C \rightsquigarrow D$ является парой отображений

$$S\begin{cases} \operatorname{Obj} C \to \operatorname{Obj} D \\ A \mapsto SA, \end{cases} \qquad S\begin{cases} \operatorname{Mor} C \to \operatorname{Mor} D \\ f \mapsto Sf, \end{cases}$$

сохраняющих тождественные морфизмы, но обращающих произведение морфизмов:

$$Sgf = SfSg,$$
$$S1_A = 1_{SA}.$$

Таким образом, если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ в C, то для контравариантного функтора S диаграмма



коммутативна.

Термин **функтор** будет означать ковариантный функтор. Если функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ ковариантен и X, Y — объекты из C, то будем говорить, что отображение

$$T_{X,Y}\begin{cases}\mathrm{Mor}_C(X,Y) \to \mathrm{Mor}_D(TX,TY)\\ f \mapsto Tf\end{cases}$$

индуцировано функтором T. В частности, для каждого объекта X категории C функтор T индуцирует гомоморфизм моноидов $\mathrm{End}_C X \to \mathrm{End}_D TX$. Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ называется **унивалентным**, если индуцированные отображения $T_{X,Y}$ инъективны для всех $X, Y \in \mathrm{Obj}\, C$. В этом случае индуцированный гомоморфизм $\mathrm{End}_C X \to \mathrm{End}_D TX$ является инъективным для любого X. Если, с другой стороны, индуцированное отображение $T_{X,Y}$ сюръективно для всех $X, Y \in \mathrm{Obj}\, C$, то функтор T называется **полным**. В частности, в этом случае индуцированные гомоморфизмы $\mathrm{End}_C X \to \mathrm{End}_D TX$ являются сюръективными для всех $X \in \mathrm{Obj}\, C$.

Двойственность

Если C — категория, то существует категория C^*, называемая **дуальной** или **противоположной категорией**, или **кокатегорией**, которая определяется таким образом: объекты у нее те же самые, что и в C, а морфизмы те же, что и в C, но у каждого морфизма меняются местами область определения и область значений, а кроме того, обращается порядок морфизмов в произведении. Мы иногда будем обозначать такую категорию символом C^{op}. Желая отличить объект A и морфизм f категории C от соответствующих объекта и морфизма в C^*, мы будем обозначать последние через A^* и f^*. Таким образом, $\mathrm{Mor}_{C^*}(A^*, B^*) = \mathrm{Mor}_C(B, A)$ и $f^*g^* = (gf)^*$ для объектов A^*, B^* и морфизмов f^*, g^*. Итак, произведение f^*g^* определено тогда и только тогда, когда определено произведение gf, а функтор

$$\begin{cases} C \rightsquigarrow C^*\\ A \mapsto A^*\\ f \mapsto f^*\end{cases}$$

является контравариантным функтором, называемым **функтором двойственности.**

Если P — любое свойство, описываемое с помощью диаграмм, морфизмов и дополняемости диаграмм, то существует дуальное свойство (или косвойство) P^*, описываемое с помощью дуальных диаграмм, получаемых применением функтора двойственности. В этом смысле дуальный вариант одной из аксиом категории является одной из аксиом категории (это другой способ доказательства существования дуальной категории C^*). Принцип двойственности для упорядоченного множества (п. 10 из теоретико-множественного введения) таким же образом применяется к категориям, а именно, дуальное утверждение S^* к любой теореме S о категориях является теоремой о категориях. Более того, если $\mathscr{C}$ — класс категорий, аксиоматизируемый с помощью автодуального множества аксиом, и если этот класс замкнут относительно эквивалентностей категории, то дуальное утверждение S^* к любой теореме S о классе $\mathscr{C}$ является теоремой о классе $\mathscr{C}$. (Эквивалентность категорий будет вскоре определена, см. стр. 96.)

1.5. Примеры.

1.5.1. **Составные функторы.** Если $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow E$ — функторы, то **составной функтор** — это функтор

$$ST\begin{cases} C \rightsquigarrow E\\ A \mapsto S(TA)\\ f \mapsto S(Tf).\end{cases}$$

Если функторы S и T оба ковариантны или оба контравариантны, то ST — ковариантный функтор. Иногда функтор ST обозначают и через $S \circ T$.

1.5.2. **Тождественный функтор. Тождественный функтор** 1_C: $C \rightsquigarrow C$ категории C переводит каждый объект и каждый морфизм этой категории в себя.

1.5.3. **Функтор включения.** Если D — подкатегория категории C, то **функтор включения** $1_D^C\colon D \rightsquigarrow C$ — это функтор, индуцированный тождественным функтором 1_C. Таким образом, 1_D^C — унивалентный функтор (при этом он полон тогда и только тогда, когда D — полная подкатегория в C).

1.5.4. **Категория множеств** SETS. Категория C, у которой $\mathrm{Obj}\, C$ — класс всех множеств, а $\mathrm{Mor}\, C$ — класс всех отображений множеств, обозначается через SETS [1]).

[1]) Употребляются также обозначения $\mathfrak{S}$, $\mathscr{E}ns$ и др.— *Прим. ред. и перев.*

1.5.5. **Забывающий функтор.** Подкатегория категории SETS называется **конкретной**, а функтор включения $C \rightsquigarrow$ SETS — **забывающим функтором** [1]).

1.5.6. **Моноиды.** Имеется подкатегория C в категории SETS, такая, что Obj C — класс всех моноидов, а $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ для любой пары моноидов X, Y является множеством всех гомоморфизмов $X \to Y$. Эту категорию будем обозначать через MONOIDS, а образ объекта при забывающем функторе называется **несущим множеством.**

Любой моноид S является категорией C с одним объектом S, причем Mor C — это моноид S. Если C и D — категории с единственными объектами X и Y соответственно, то любой ковариантный функтор T: $C \rightsquigarrow D$ индуцирует гомоморфизм

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}\, C \to \mathrm{Mor}\, D \\ f \mapsto Tf \end{cases}$$

и, обратно, любой гомоморфизм Mor $C \to$ Mor D определяет ковариантный функтор. *Таким образом, теория категорий с одним объектом совпадает с теорией моноидов* [2]). Часто один и тот же символ S употребляется для обозначения моноида, соответствующей категории, ее единственного объекта, а также множества ее морфизмов, т. е. $\mathrm{Mor}\, S = \mathrm{Mor}_S(S, S) = \mathrm{End}_S S$.

1.5.7. **Группы.** Полная подкатегория категории моноидов, объекты которой составляют класс всех групп, обозначается через GROUPS.

1.5.8. **Абелевы группы.** Полная подкатегория в категории GROUPS, объекты которой составляют класс всех абелевых групп, обозначается через mod-$\mathbb{Z}$ (здесь мы несколько опережаем терминологию, вводимую в гл. 3, согласно которой абелевы группы являются $\mathbb{Z}$-модулями).

1.5.9. **Делимые группы.** Категория DIV mod-$\mathbb{Z}$ — полная подкатегория в mod-$\mathbb{Z}$, объектами которой служат делимые абелевы группы.

1.5.10. **Категория высказываний.** Объекты — предложения, а морфизм f: $A \to B$ — импликация «из A следует B».

1.5.11. **Категория частично упорядоченных множеств.** Объекты — частично упорядоченные множества, а морфизмы — отображения, сохраняющие отношение порядка.

1.5.12. **Основные функторы** (или **представления**). Если A — объект категории C, то **первым представлением** (или **ковариантным основным функтором**) называется функтор, определяемый следующим образом:

$$h^A \begin{cases} C \rightsquigarrow \mathrm{SETS} \\ X \mapsto \mathrm{Mor}_C(A, X) \quad \text{(на объектах)}, \end{cases}$$

а для любого морфизма f: $X \to Y$ из C

$$h^A f \begin{cases} \mathrm{Mor}_C(A, X) \to \mathrm{Mor}_C(A, Y) \\ g \mapsto fg. \end{cases}$$

Таким образом, $(h^A f)\, g = fg$ (как только произведение fg определено). Функтор h^A также обозначают через $\mathrm{Mor}_C(A, \ )$, а иногда через $(A, \ )$. Если объекты $h^A X = \mathrm{Mor}_C(A, X)$ являются объектами категории GROUPS (MONOIDS) для всех X, то индуцированный функтор $C \rightsquigarrow$ GROUPS (MONOIDS) также обозначается через h^A и называется **основным функтором со значениями в группах (моноидах).** Аналогично, если D — подкатегория категории SETS (т. е. D — конкретная категория), такая, что $h^A X \in \mathrm{Obj}\, D$ для всех $X \in \mathrm{Obj}\, C$, то индуцированный функтор называется **основным функтором со значениями в категории D** или **основным D-значным функтором** [1]). (В главах, следующих за гл. 2, мы сталкиваемся с основными функторами со значениями в категории mod-$\mathbb{Z}$.)

Второе представление (или **контравариантный основной функтор**) h_A: $C \rightsquigarrow$ SETS определяется так: для любого морфизма f: $X \to Y$ категории C

$$h_A f \begin{cases} \mathrm{Mor}_C(Y, A) \to \mathrm{Mor}_C(X, A) \\ g \mapsto gf. \end{cases}$$

Другие обозначения для этого функтора: $\mathrm{Mor}_C(\ , A)$ и $(\ , A)$.

1.5.13. **Категория последовательностей над C, индексированных множеством I.** Если C — категория, то можно рассмотреть другую категорию, объекты которой суть последовательности $\{X_i\}_{i \in I}$ объектов из C, индексированные множеством I. Эта категория обозначается через C^I. Морфизм в категории C^I — это последовательность $\{g_i\}_{i \in I}$ морфизмов категории C. Произведение этого морфизма на другой морфизм $\{h_i\}_{i \in I}$ определено тогда и только тогда, когда произведение $h_i g_i$ определено для всех $i \in I$, и в этом случае $\{h_i\}\,\{g_i\} = \{h_i g_i\}$.

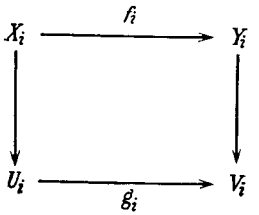
1.5.14. **Категория коммутативных последовательностей над C, индексированных множеством I.** Объекты — это последовательности $\{f_i: X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ морфизмов категории C (т. е. объекты — морфизмы категории C^I). Морфизм такого объекта в объект $\{g_i: U_i \to V_i\}_{i \in I}$ — это упорядоченная пара $\{X_i \to U_i\}$, $\{Y_i \to$

[1]) Употребляются также термины: «пренебрегающий» или «стирающий».— *Прим. перев.*

[2]) Это традиционный (неопределенный) способ высказать нечто вполне точно. См. эквивалентные категории, стр. 97.

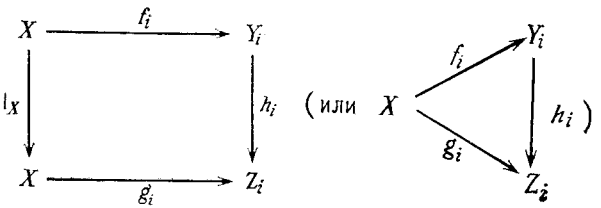
[1]) Предполагается, что h^A индуцирует функтор $C \rightsquigarrow D$.

$\to V_i\}$ морфизмов из C^I, таких, что диаграмма



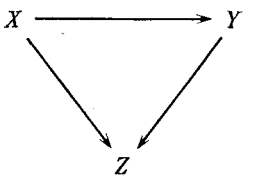
коммутативна для любого $i \in I$. Произведение морфизмов определяется как в C^I.

1.5.15. **Коммутативные последовательности над C с областью определения X, индексированные множеством I.** Это подкатегория категории коммутативных последовательностей над C, индексированных множеством I, объекты которой — последовательности морфизмов $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ с областью определения X, где X — данный объект категории C. Если $\{g_i\colon X \to Z_i\}$ — другой объект, то морфизм — это последовательность $\{h_i\colon Y_i \to Z_i\}_{i \in I}$, такая, что диаграмма



коммутативна. Таким образом, упорядоченная пара $\{1_{X_i}\colon X_i \to X_i\}$, $\{h_i\colon Y_i \to Z_i\}$, индексированная множеством I, где $X_i = X$ для всех $i \in I$, является морфизмом в категории коммутативных последовательностей.

1.5.16. **Source X.** Если X — объект категории C, то source X — категория коммутативных последовательностей над C с областью определения X, индексированных одноэлементным множеством, т. е. объектами этой категории служат морфизмы $X \to Y$ категории C, а морфизм из объекта $X \to Y$ в объект $X \to Z$ — это морфизм $Y \to Z$, такой, что диаграмма



коммутативна.

1.5.17. **Target X.** Эта категория дуальна к категории из примера 1.5.16. Именно, ее объектами являются морфизмы $Y \to X$. Категория примера 1.5.15 имеет аналогичную дуальную категорию.

Эквивалентности и автоморфизмы

Морфизм $f\colon A \to B$ в категории C называется **эквивалентностью**, если существует морфизм $g\colon B \to A$, такой, что $gf = 1_A$ и $fg = 1_B$. Может существовать только один морфизм g с этим свойством, и он обозначается через f^{-1}. Объект A **эквивалентен** объекту B, если существует эквивалентность $f\colon A \to B$. Эквивалентность — рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на классе объектов категории C. Символ $A \approx B$ обозначает эквивалентность $A \to B$.

Эквивалентность $A \to A$ называется **автоморфизмом** объекта A. Множество всех эквивалентностей $A \to A$ совпадает с группой обратимых элементов в моноиде $\mathrm{End}_C A$ и обозначается через $\mathrm{Aut}\, A$.

Эквивалентность в категории MONOIDS называется **изоморфизмом.** В этой категории в силу предположения 1 из теоретико-множественного введения изоморфизм $A \approx B$ обязательно является биекцией.

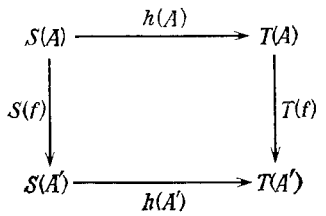
Два объекта называются **неэквивалентными**, если они не являются эквивалентными. Если D — класс объектов категории C, то **класс эквивалентности** объектов из D, определяемый объектом $A \in D$, определяется как подкласс в D, состоящий из всех объектов в D, эквивалентных объекту A. Тогда существует подкласс $\mathrm{Equiv}\, D$ класса D с тем свойством, что каждый объект из D эквивалентен какому-либо объекту из $\mathrm{Equiv}\, D$, а два различных объекта в $\mathrm{Equiv}\, D$ неэквивалентны. Если $\mathrm{Equiv}\, D$ — множество, то его мощность называется **числом неэквивалентных объектов** в классе D.

Если C является категорией MONOIDS, то класс эквивалентности называется **классом (множеством) изоморфных объектов** (см. стр. 47).

Естественное преобразование функторов

Пусть $S\colon C \rightsquigarrow D$ и $T\colon C \rightsquigarrow D$ — два ковариантных функтора. **Естественное преобразование** $S \to T$ — это функция h, сопоставляющая каждому объекту $A \in C$ морфизм $h(A)\colon S(A) \to T(A)$ таким образом, что для каждого морфизма $f\colon A \to A'$ категории C

диаграмма



коммутативна, т. е.

$$T(f)\,h(A) = h(A')\,S(f).$$

Естественное преобразование $h\colon S \to T$ между функторами S и T называется **естественной эквивалентностью** функторов S и T, если $h(A)$ является эквивалентностью для всех $A \in \mathrm{Obj}\,C$. В этом случае используем обозначение $S \approx T$. Естественным образом определяемое отношение эквивалентности функторов рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если $g\colon R \to S$ и $h\colon S \to T$ — естественные преобразования функторов, то произведение $hg\colon R \to T$ является естественным преобразованием (оно определяется произведением морфизмов: $hg(A) = h(A)\,g(A)$).

Фраза «несмотря на размеры, C является категорией» означает, что мы отказываемся от требования, чтобы $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ было множеством. «Несмотря на размеры», существует категория CAT категорий, объекты которой — категории [1]), морфизмы — функторы $C \rightsquigarrow D$, а операция — произведение функторов. Тождественный функтор обозначается через 1_C.

Опять же, «несмотря на размеры», можно для двух категорий C и D рассмотреть категорию Funct (C, D), объекты которой составляют класс всех функторов $C \rightsquigarrow D$, а морфизм между двумя функторами S и T — это естественное преобразование функторов. Операция в этой категории — произведение естественных преобразований. Термин **морфизм функторов** используется как синоним естественного преобразования, а **эквивалентность** функторов означает естественную эквивалентность функторов. Часто Funct (C, D) обозначают и через D^C.

Эквивалентные категории

Эквивалентность $C \rightsquigarrow D$ между двумя категориями состоит из упорядоченной пары (T, S) **(пара эквивалентности)** ковариантных функторов $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$ и пары естественных эквивалентностей

$$ST \approx 1_C \text{ и } TS \approx 1_D$$

функторов. В этом случае мы говорим, что C и D — **эквивалентные категории** (обозначение $C \approx D$), а $T\colon C \rightsquigarrow D$ — эквивалентность. Отношение $C \approx D$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентность $C \rightsquigarrow C$ называется **автоэквивалентностью**. Покажем теперь, что эквивалентность $C \rightsquigarrow D$ определена с точностью до автоэквивалентности категории C (или D). Если (T_1, S_1) и (T_2, S_2) — две пары эквивалентности $C \rightsquigarrow D$, то $T_1S_2T_2S_1 \approx T_1S_1 \approx 1_D$, а также $T_2S_1T_1S_2 \approx 1_D$, поэтому $T_1S_2 : D \rightsquigarrow D$ — автоэквивалентность H категории D. Следовательно,

$$T_1 \approx T_1(S_2T_2) = (T_1S_2)T_2 = HT_2 \approx T_2,$$

и, симметрично, $S_1 \approx S_2$. Для каждой упорядоченной пары (C, D) эквивалентных категорий C и D выбирается одна пара эквивалентности (T, T^{-1}), при этом T^{-1} называется **обратной** эквивалентностью. Класс автоэквивалентностей $C \rightsquigarrow C$ обозначается через Aut C (если он является множеством, то это группа). В том случае когда $ST = 1_C$ и $TS = 1_D$, T называют **изоморфизмом** категорий $C \rightsquigarrow D$.

Сейчас мы можем сформулировать более точно то, что было несколько неопределенно высказано в 1.5.6: *полная подкатегория категории* CAT *на подклассе категорий с одним объектом эквивалентна категории* MONOIDS.

Примеры.

1. Функтор перехода к факторгруппе по коммутанту. Если G — группа, то **коммутант или производная подгруппа** группы G является ее подгруппой $[G, G]$, порожденной коммутаторами $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$, и совпадает с пересечением всех нормальных подгрупп N группы G, таких, что факторгруппа G/N абелева. **Функтор перехода к факторгруппе по коммутанту**

$$\begin{cases} \text{GROUPS} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ G \mapsto G/[G, G] \text{ (на объектах)} \end{cases}$$

отображает каждый гомоморфизм $h : G \to H$ групп в гомоморфизм

$$\begin{cases} G/[G, G] \to H/[H, H] \\ g\,[G, G] \mapsto h(g)\,[H, H] \end{cases}$$

абелевых групп. Канонический гомоморфизм

$$\mathrm{can}\,(G) : G \to G/[G, G]$$

определяет естественное преобразование тождественного функтора категории GROUPS в функтор перехода к факторгруппе по коммутанту.

[1] Здесь «несмотря на размеры» означает и то, что автор игнорирует связанные с этим определением теоретико-множественные трудности.— *Прим. ред. и перев.*

2. Основной функтор

$$h^{\mathbb{Z}} \begin{cases} \text{mod-}\mathbb{Z} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ A \mapsto \text{Hom}(\mathbb{Z}, A), \end{cases}$$

естественно эквивалентен тождественному функтору I категории mod-$\mathbb{Z}$ при естественном преобразовании $g^{-1} : I \to h^{\mathbb{Z}}$, где для любого $A \in \text{mod-}\mathbb{Z}$

$$g_A \begin{cases} \text{Hom}(\mathbb{Z}, A) \to A \\ f \mapsto f(1). \end{cases}$$

Для проверки этого заметим сначала, что все g_A сюръективны. Действительно, если $a \in A$, то существует отображение

$$a_s \begin{cases} \mathbb{Z} \to A \\ n \mapsto na, \end{cases}$$

и $g_A(a_s) = a_s(1) = 1a = a$. Далее, если $f(1) = 0$, то $f(a) = af(1) = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Таким образом, $\ker g_A = 0$. Это доказывает, что g_A — изоморфизм. Естественность проверяется непосредственно.

Это же доказательство годится и для категории mod-R всех правых R-модулей над кольцом R, определяемой в гл. 3, т. е. основной функтор h^R : mod-$R \rightsquigarrow$ SETS индуцирует автоэквивалентность категории mod-R.

Функтор $T : C \rightsquigarrow D$ называется **двойственностью** или **антиэквивалентностью**, если он контравариантен и существует контравариантный функтор $S : D \rightsquigarrow C$ и естественные эквивалентности функторов

$$TS \approx 1_D \text{ и } ST \approx 1_C.$$

Упорядоченная пара (T, S) называется **парой двойственности**. Двойственность $C \rightsquigarrow C$ называется **инволюцией**.

1.6. Предложение и определение.

1.6.1. *Если (T_1, S_1) и (T_2, S_2) — пары двойственности $C \rightsquigarrow D$, то $T_1 \approx T_2$ и $S_1 \approx S_2$. Для каждой двойственности $C \rightsquigarrow D$ выбирается одна пара двойственности (T, T^{-1}), называемая канонической, а T^{-1} называется обратной двойственностью. Канонический функтор $C \rightsquigarrow C^*$ называется* ***функтором двойственности.***

1.6.2. *Каждому функтору $T : C \rightsquigarrow D$ сопоставляется произведение функтора обратной двойственности $C^* \rightsquigarrow C$ на функтор T, обозначаемое через T^* и называемое* ***первым функтором, дуальным к*** *T. Произведение функтора T на функтор двойственности $D \rightsquigarrow D^*$ обозначается через T_* и называется* ***вторым функтором, дуальным к*** *T. Таким образом, функтор T ковариантен (контравариантен) тогда и только тогда, когда дуальный функтор, первый или второй, контравариантен (ковариантен),*

и T является двойственностью (эквивалентностью) тогда и только тогда, когда дуальный функтор является эквивалентностью (двойственностью).

1.6.3. *Для любой категории C и объекта A первый функтор, дуальный к функтору h^A (соотв. к h_A), совпадает с h_{A^*} (соотв. с h^{A^*}).*

Доказательство. Утверждение 1.6.1 доказывается в точности так же, как утверждение о парах эквивалентности. Доказательства остальных утверждений очевидны. □

Если S — моноид, то дуальная категория является моноидом, называемым **моноидом, противоположным к** S, и обозначается через S^{op}. Если S и S' — моноиды, то отображение $f : S \to S'$ называется **антигомоморфизмом**, если оно является контравариантным функтором [1]). Наконец, f называется **антиизоморфизмом**, если оно является двойственностью. Инволюция $S \to S$ является поэтому антиизоморфизмом. Каждая группа G обладает антиизоморфизмом, осуществляемым, например, переходом к обратному:

$$\begin{cases} G \to G \\ x \mapsto x^{-1}. \end{cases}$$

Из этого следует, что существует изоморфизм $G \approx G^{\text{op}}$ (см. 1.6.2).

Вообще говоря, группа может иметь довольно много автоморфизмов. Если группа G абелева, то отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом, который совпадает с тождественным отображением тогда и только тогда, когда $x + x = 0$ для всех x. Впрочем, и в этом случае группа обладает нетождественным автоморфизмом, если только она не изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [2]).

Допустим, что группа G неабелева, и примем мультипликативную форму записи. **Центр** $\mathscr{C}(G)$ группы G — нормальная подгруппа, состоящая из всех элементов $x \in G$, таких, что $xy = yx$ для всех $y \in G$. Для любого $y \in G$ отображение I_y, такое, что $I_y(x) = yxy^{-1}$ для любого $x \in G$, называется **внутренним автоморфизмом** группы G, определяемым элементом y. Множество In Aut G всех внутренних автоморфизмов группы G является нормальной подгруппой группы Aut G, что вытекает из формулы

$$fI_yf^{-1} = I_{f(y)}$$

для всех $y \in G$ и $f \in \text{Aut } G$. Более того, отображение

$$\begin{cases} \text{In Aut } G \to G/\mathscr{C}(G) \\ I_y \mapsto y\mathscr{C}(G) \end{cases}$$

является изоморфизмом групп.

[1]) То есть $f(ab) = f(b)f(a)$ для всех $a, b \in S$. — *Прим. перев.*

[2]) Это замечание Капланского.

1.7. Предложение (Келли).

1.7.1. *Для любой группы A и любого элемента $a \in A$ имеет место биективное отображение*

$$a_s \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto ax. \end{cases}$$

Отображение

$$s_A \begin{cases} A \to \mathscr{S}(A) \\ a \mapsto a_s \end{cases}$$

является гомоморфным вложением. Таким образом, если A — конечная группа порядка n, то существует вложение $A \to S_n$ группы A в симметрическую группу S_n.

1.7.2. *Группа* Aut A *является подгруппой группы* $\mathscr{S}(A)$, *и*

$$fa_sf^{-1} = (fa)_s$$

для всех $f \in \mathrm{Aut}\, A$ *и* $a \in A$.

1.7.3. *Каждый автоморфизм f' группы* $\mathrm{im}\, s_A$ *индуцируется внутренним автоморфизмом группы* $\mathscr{S}(A)$; *именно,* $f'(a_s) = f(a)_s = fa_sf^{-1}$ *для некоторого* $f \in \mathrm{Aut}\, A$, *а тогда* I_f *индуцирует автоморфизм* f'.

1.7.4. *Отображение*

$$d_A \begin{cases} A \to \mathscr{S}(A) \\ a \mapsto a_d, \end{cases}$$

где $a_d(x) = xa$ *для всех* $x \in A$, *является антигомоморфным вложением.*

1.7.5. *Вложения* $s_A: A \to \mathscr{S}(A)$ *и* $d_A: A \to \mathscr{S}(A)$ *перестановочны, т. е.* $a_sb_d = b_da_s$ *для всех* $a, b \in A$. □

1.8. Упражнения.

1.8.1. Найти число неизоморфных моноидов, состоящих ровно из четырех элементов.

1.8.2. Пусть n — положительное целое число, а k — такое целое число, что $0 \leqslant k < n$. Доказать существование циклического аддитивного моноида $A_{n,k}$, такого, что $A_{n,k} = (a)$ и $pa = ka$. Если A' — любой циклический моноид, то либо A' — бесконечный моноид (в этом случае A' изоморфен аддитивному моноиду $\mathbb{Z}^+$ неотрицательных целых чисел), либо существует единственная упорядоченная пара (n, k) и изоморфизм $A' \approx A_{n,k}$. Моноид $A_{n,k}$ называется **бициклическим моноидом.**

1.8.3. Число неизоморфных конечных моноидов счетно, но существует счетный моноид M с несчетным множеством неизоморфных гомоморфных образов.

1.8.4. Если моноид M конечно порожден, то множество его неизоморфных гомоморфных образов счетно.

1.8.5. Показать, что мультипликативный моноид $\mathbf{N}$ натуральных чисел изоморфен прямой сумме счетного числа экземпляров аддитивного моноида $\mathbb{Z}^+$ неотрицательных целых чисел.

1.8.6. Будет ли циклической группа Aut G, если группа G циклическая?

1.8.7. Показать, что $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/(p-1)\,\mathbb{Z}$, где p — простое число. Описать Aut $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ для любого $n \geqslant 0$ из $\mathbb{Z}$.

1.8.8. Найти условие на положительные целые числа $n_1, \ldots, n_k$, необходимое и достаточное для того, чтобы прямое произведение циклических групп $\mathbb{Z}_{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, было циклической группой.

1.8.9. Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство моноидов и $J \subseteq I$, то существует точная последовательность

$$0 \to \prod_{i\in I-J} X_i \to \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in J} X_j \to 0.$$

Установить изоморфизм

$$\prod_{i\in I} X_i \approx \Big(\prod_{i\in I-J} X_i\Big) \times \Big(\prod_{j\in J} X_j\Big).$$

1.8.10. Прямая сумма семейства групп является нормальной подгруппой их прямого произведения.

1.8.11. (a) Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство подмоноидов моноида G. Показать, что гомоморфизм прямой суммы $h: \sum_{i\in I} \oplus X_i \to G$, такой, что $h: (\ldots, x_i, \ldots) \mapsto \prod_{i\in I} x_i$ (конечное произведение), существует тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие перестановочности: каждый элемент x_i из X_i перестановочен с каждым элементом x_j из X_j при $i \neq j$.

(b) Пусть $\{Y_i \mid i \in I\}$ — семейство моноидов. Показать, что $G \approx \sum_{i\in I} \oplus Y_i$ тогда и только тогда, когда G содержит семейство $\{X_i \mid i \in I\}$ подмоноидов, удовлетворяющее следующим четырем условиям: (1) существует семейство $\{f_i\}_{i\in I}$ изоморфизмов $f_i: Y_i \approx X_i$; (2) выполнено условие перестановочности (a); (3) G как моноид порождается множеством $\bigcup_{i\in I} X_i$; (4) для каждого $i \in I$ пересечение множества X_i с подмоноидом, порожденным множеством $\bigcup_{j\in I-\{i\}} X_j$, является единичным моноидом. [Из этого следует, что каждый подмоноид X_i содержит единичный элемент моноида G.]

В этом случае каждый элемент $x \in G$ обладает единственным представлением в виде конечного произведения $x = \prod_{i\in I} x_i$, где $x_i \in X_i$. Кроме того, если G — группа, то отсюда следует, что X_i — нормальная подгруппа для каждого $i \in I$.

1.8.12. Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство групп и $X = \prod_{i \in I} X_i$. Показать, что если мощность множества I отлична от 1, то в Map (X) имеются идемпотенты, отличные от тождественного отображения. Если $J \subseteq I$, то существует идемпотентное отображение

$$\prod_{i \in I} X_i \to \prod_{j \in J} X_j \to \prod_{i \in I} X_i,$$

называемое **проектирующим идемпотентом.** В случае произвольной абелевой группы X обсудить, в какой мере верно, что каждый идемпотент e из End X является проектирующим идемпотентом. [*Указание*: показать, что группа X изоморфна произведению $(\operatorname{im} e) \times (\ker e)$.]

1.8.13. Показать, что группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ изоморфна прямой сумме p-групп Z_{p^∞} по одной для каждого простого числа. Показать, что каждая конечная подгруппа в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является циклической.

Три теоремы об изоморфизме

Имеются три основные теоремы об изоморфизме. Первая аналогична формуле $(A/K)/(B/K) = A/B$ для обычных числовых дробей. Вторая является законом сокращения для групп:

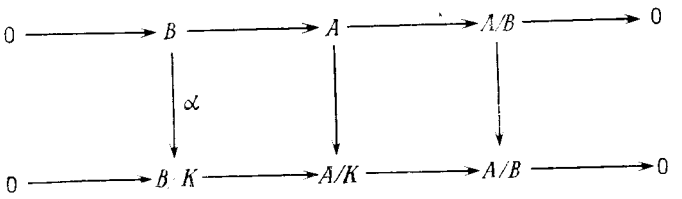
$$(AB)/B \approx (A \cap AB)/(A \cap B) = A/(A \cap B),$$

где A и B — подгруппы данной группы, а AB — групповое произведение $\{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$. Если группа некоммутативна, то предполагается, что подгруппа B нормальна. Если группа коммутативна, то используется аддитивная форма записи: $(A + B)/B \approx A/A \cap B$. Третья теорема об изоморфизме — лемма Цассенхауза 1.12 (или лемма о бабочке).

1.9. Теорема о соответствии. *Пусть $f\colon A \to A'$ — гомоморфное наложение групп. Пусть B — подгруппа группы A, и пусть $f(B) = \{f(b) \mid b \in B\}$. Тогда соответствие $B \mapsto f(B)$ является биективным отображением множества подгрупп группы A, содержащих ядро гомоморфизма f, на множество подгрупп группы A'. Пусть B и K — нормальные подгруппы группы A и $B \supseteq K$. Тогда отображение*

$$\begin{cases} A/K \to A/B \\ aK \mapsto aB \end{cases}$$

является гомоморфизмом групп с ядром $\{aK \mid a \in B\}$, и следующая диаграмма с точными строками, где α — канонический гомоморфизм, коммутативна:

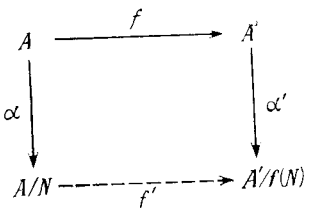


Доказательство. Пусть S — множество подгрупп группы A, содержащих $\ker f$, S' — множество подгрупп группы A', и пусть

$$f' \begin{cases} S \to S' \\ B \mapsto B' = f(B). \end{cases}$$

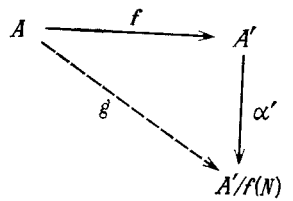
Напомним, что если Y — подмножество в A', то $f^{-1}Y = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$. Ясно, что $ff^{-1}Y = Y$ для любой подгруппы Y в A'. Поэтому отображение f' сюръективно. Более того, $f^{-1}fB \subseteq B$ для всех $B \in S$. Но если $b \in B$, то $f(b) = f(f^{-1}fb)$. Если $K = \ker f$, то это доказывает, что $f^{-1}fbK = bK \subseteq B$. Таким образом, $f^{-1}fb \in B$ для любого $b \in B$. Следовательно, $f^{-1}fB = B$, что доказывает инъективность отображения f'. Коммутативность диаграммы очевидна. □

1.10. Первая теорема Нётер об изоморфизме. *Если $f : A \twoheadrightarrow A'$ — гомоморфное наложение групп и N — нормальная подгруппа группы A, содержащая ядро гомоморфизма f, то существует единственный изоморфизм $f' : A/N \to A'/f(N)$, называемый* ***изоморфизмом, индуцированным наложением*** *f, который дополняет диаграмму*

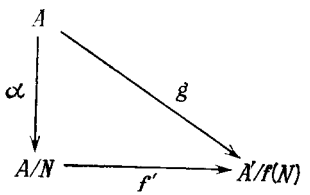


где α и α' — канонические гомоморфизмы. В частности, f индуцирует изоморфизм $A/\ker f \approx A'$. Таким образом, множество факторгрупп совпадает с множеством классов изоморфных объектов из класса гомоморфных образов группы A.

Доказательство. Заметим, во-первых, что имеет место коммутативная диаграмма



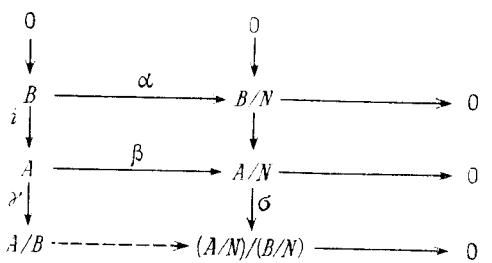
где α' — канонический гомоморфизм. Во-вторых, поскольку в силу теоремы о соответствии $N = f^{-1}f(N)$, то следующие утверждения эквивалентны: (1) $a \in \ker g$; (2) $f(a) \in f(N)$; (3) $a \in N$. Итак, $\ker g = N$. В силу теоремы о соответствии, имеет место коммутативная диаграмма



где f' — изоморфизм, а α — канонический гомоморфизм. Эти две диаграммы вместе и дают нужную нам диаграмму. □

Первая теорема Нётер об изоморфизме для точных категорий появится в гл. 5, стр. 330.

1.11. Следствие. *Пусть $A \supseteq B \supseteq N$ — группы, а B и N — нормальные подгруппы в A. Тогда существует изоморфизм $A/B \to (A/N)/(B/N)$, дополняющий диаграмму*

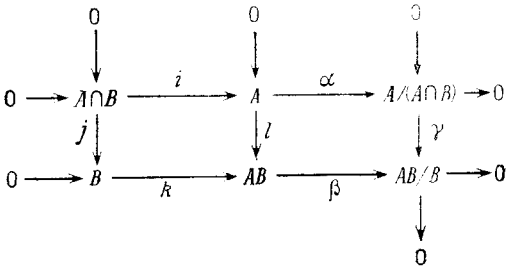


где i — гомоморфное вложение, а α, β, γ, σ — канонические гомоморфизмы.

Вторая теорема Нётер об изоморфизме. *Если A и B — подгруппы группы G, причем B нормальна, то $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ — подгруппа группы G и $A \cap B$ — нормальная подгруппа в A. Отображение $A \to AB/B$, индуцированное каноническим отображением $G \to G/B$, называется каноническим, а его ядро равно $A \cap B$. Таким образом,*

$$\gamma \begin{cases} A/(A \cap B) \to AB/B \\ a(A \cap B) \mapsto ab \end{cases}$$

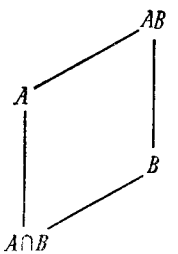
является изоморфизмом, и существует коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами



где i, j, l и k — гомоморфные вложения, а α и β — канонические гомоморфизмы.

Доказательство. Каждый элемент в AB/B имеет вид aB для некоторого $a \in A$. Поэтому отображение $A \to AB/B$, состоящее в переходе к смежному классу, является гомоморфным наложением, а его ядро совпадает с $A \cap B$. Тогда аналогично определяемое отображение $A/(A \cap B) \to AB/B$ дополняет диаграмму. □

Мнемоническое правило-диаграмма (Хассе):



Или, иначе, $AB/B \approx (A \cap AB)/(A \cap B) = A/(A \cap B)$, т. е. AB/B изоморфна пересечению «числителя» и «знаменателя» дроби AB/B с A. В аддитивных обозначениях:

$$(A + B)/B \approx (A \cap (A + B))/(A \cap B).$$

1.12. Лемма о бабочке для групп (Цассенхауз). *Пусть a, A, b и B — подгруппы группы G, причем a — нормальная подгруппа в A, а b — нормальная подгруппа в B. Тогда $a(A \cap b)$ — нор-*

мальная подгруппа группы $a\ (A \cap B)$ *и*

$$\frac{a(A\cap B)}{a(A\cap b)} \approx \frac{b(A\cap B)}{b(a\cap B)},$$

или

$$\frac{a+(A\cap B)}{a+(A\cap b)} \approx \frac{b+(A\cap B)}{b+(a\cap B)}$$

в аддитивных обозначениях.

Доказательство. Вторая теорема об изоморфизме для аддитивных групп утверждает, что $C/(C \cap D) \approx (C + D)/D$ для любых подгруппы C и нормальной подгруппы D. Пусть $C = A \cap B$ и $D = a$. Тогда $C \cap D = a \cap B$, и поэтому

(i) $$\frac{A\cap B}{a\cap B} \approx \frac{a+(A\cap B)}{a}.$$

Симметрично,

(ii) $$\frac{A\cap B}{b\cap A} \approx \frac{b+(A\cap B)}{b}.$$

Если обозначить через h гомоморфизм $h : A \cap B \to (a + (A \cap B))/a$, определенный изоморфизмом (i), то

$$h((a\cap B)+(b\cap A)) = \frac{a+(a\cap B)+(b\cap A)}{a} = \frac{a+(b\cap A)}{a}.$$

В силу первой теоремы об изоморфизме, утверждающей, что $A/N \approx f(A)/f(N)$, имеем

$$\frac{A\cap B}{(a\cap B)+(b\cap A)} \approx \left(\frac{a+(A\cap B)}{a}\right)\Big/\left(\frac{a+(b\cap A)}{a}\right).$$

В силу следствия к этой теореме, утверждающего, что $(M/K)/(L/K) \approx M/L$, правая часть может быть заменена на $(a + (A \cap B))/(a + (b \cap A))$. Следовательно,

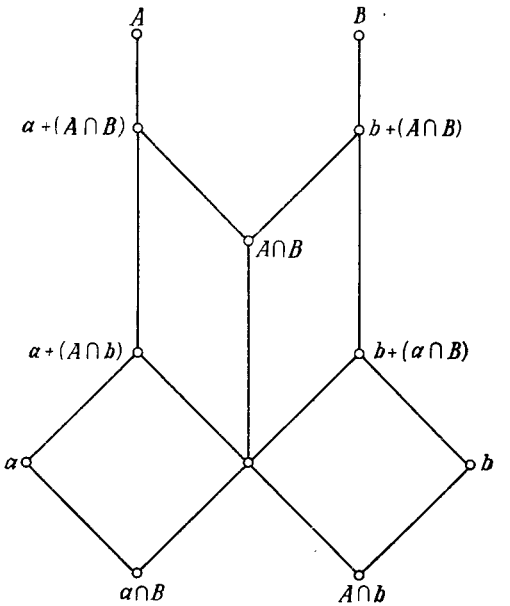
(iii) $$\frac{A\cap B}{(a\cap B)+(b\cap A)} \approx \frac{a+(A\cap B)}{a+(b\cap A)}.$$

Симметрично,

(iv) $$\frac{A\cap B}{(b\cap A)+(a\cap B)} \approx \frac{b+(A\cap B)}{b+(a\cap B)}.$$

Так как левая часть в (iii) совпадает с левой частью в (iv), то это доказывает лемму. □

Название леммы о бабочке происходит от диаграммы Хассе:



Упражнения к гл. 1

1. Каждая группа, порядок которой не превосходит 5, абелева. Сколько неабелевых групп порядка 6? Показать, что существуют всего две неабелевы группы порядка 8. А именно группа кватернионов

$$H = \{\pm 1;\ \pm i;\ \pm j;\ \pm k\},$$

где $+x = x$, $+1x = x$, $-1x = x$, $(-x)\,(-x) = x^2$ для всех $x \in H$ и

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k,$$
$$ki = -ik = j,$$
$$jk = -kj = i,$$

и диэдральная группа

$$D = \{a^i b^j \mid i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ j = 0,\ 1\},$$

где $a^0 = b^0 = a^0 b^0 = 1$ (единичный элемент) и

$$a^4 = b^2 = 1,$$
$$bab^{-1} = a^3.$$

(Так как $b^{-1} = b$, то последнее условие равносильно равенству $bab = a^3$. См. упр. 17.)

2. Каждая группа порядка 15 циклическая.

3. Если индекс подгруппы H конечной группы — простое число, которое меньше любого другого простого делителя числа $|G|$, то H — нормальная подгруппа. Указать группу G, содержащую подгруппу H простого индекса, не являющуюся нормальной.

4. Показать, что группа S_n содержит элементы порядка n.

5. Группа порядка p^2, где p — простое число, абелева; при этом она либо циклическая, либо является прямой суммой двух циклических групп.

6. Если p, q — простые числа и $p \neq q$, то абелева группа порядка pq циклическая.

*7 [1]). Доказать теорему Жордана — Гёльдера для групп. (См. 17.7 и 17.9.4.)

*8. Для группы G определим по индукции ряд коммутантов

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supset \ldots,$$

где $G^{(n)}$ — коммутант группы $G^{(n-1)}$ для каждого натурального числа n (называемый n-й **производной** группой группы G). Группа G называется **разрешимой**, если n-я производная подгруппа для некоторого n совпадает с единичной подгруппой. Показать, что любая подгруппа или факторгруппа разрешимой группы разрешима. Если конечная группа G не является разрешимой, то она содержит неединичную нормальную подгруппу N, которая совпадает со своей производной группой. Неединичная разрешимая группа содержит неединичную абелеву нормальную подгруппу. Показать, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность

$G = N_0 \supseteq \ldots \supseteq N_i \supseteq N_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq N_t = e$ (единица группы),

такая, что N_{i+1} — нормальная подгруппа в N_i, а группа N_i/N_{i+1} — абелева, $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Доказать, что симметрические группы S_3 и S_4 разрешимы. Известно, что при $n > 4$ группа S_n не является разрешимой.

[1]) Звездочкой отмечены упражнения следующих категорий: (1) представляющие несколько больший интерес, чем обычные упражнения; (2) представляющие большую трудность; (3) результаты, примыкающие к изложенным и имеющиеся в литературе. Последняя категория приведена в большей мере для удобства ссылок, чем в качестве упражнений, например, теоремы Силова (и их доказательства, намеченные в упр. 15) и теоремы Бэра — Шпекера, упр. 21. Отсутствие звездочки, однако, не означает отрицание какого-либо из этих свойств!

*9. Пусть G — группа. Определим **возрастающий центральный ряд:**

$$Z_0 = e \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \ldots,$$

где Z_i — нормальная подгруппа в Z_{i+1} и Z_{i+1}/Z_i — центр группы G/Z_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Определим **убывающий центральный ряд:**

$$N_0 = G \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_i \supseteq N_{i+1} \supseteq \ldots,$$

где N_i — нормальная подгруппа в G и $N_{i+1} = [G, N_i]$ для каждого i. Группа G называется **нильпотентной**, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий: (a) $Z_n = G$ для некоторого $n > 0$; (b) $N_t = e$ для некоторого $t > 0$. (Если группа G нильпотентна, то $n = t$.) Каждая подгруппа или факторгруппа нильпотентной группы нильпотентна. Показать, что группа S_3 не является нильпотентной. Вывести отсюда, что группа G может содержать нильпотентную нормальную подгруппу N, такую, что факторгруппа G/N нильпотентна, но не быть нильпотентной. Каждая нильпотентная группа разрешима. Каждая p-группа нильпотентна. (Ср. упр. 15).

10. Взаимно однозначное отображение f двумерной плоскости $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на себя называется **изометрией**, если f сохраняет расстояние P_1P_2 между любыми двумя точками P_1 и P_2. Если $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, то

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Перенос на плоскости P, определяемый двумя действительными числами h и k, является отображением $(x, y) \mapsto (x + h, y + k)$. Показать, что множество T переносов плоскости P является нормальной подгруппой группы G всех изометрий плоскости P. Показать, что G/T содержит нормальную подгруппу индекса 2, которая изоморфна группе вращений плоскости P вокруг некоторой фиксированной точки. Вывести из этого, что группа G разрешима.

11. Перестановка $f \in S_n$ называется r-**циклом** (или циклом длины r), если существуют числа $i_1, \ldots, i_r$, такие, что $f(x_j) = x_j$ для чисел j, не совпадающих ни с одним из i_k, и

$$f(x_{i_1}) = x_{i_2}, \quad f(x_{i_2}) = x_{i_3}, \quad \ldots, \quad f(x_{i_{r-1}}) = x_{i_r}, \quad f(x_{i_r}) = x_{i_1}.$$

Порядок r-цикла (как элемента группы S_n) равен r. **Транспозицией** называется 2-цикл. Показать, что каждый цикл является произведением транспозиций. Будем говорить, что две перестановки f и g **не пересекаются**, если каждый элемент, перемещаемый одной, остается неподвижным при действии другой (т. е.

$f(x) \neq x \Rightarrow g(x) = x$ и $g(y) \neq y \Rightarrow f(y) = y$). Если перестановки f и g не пересекаются, то $fg = gf$. Доказать, что при $n \geqslant 2$ каждая перестановка в S_n является произведением непересекающихся циклов длины $\geqslant 2$ и что это разложение единственно с точностью до порядка, в котором записаны циклы. Вывести из этого, что порядок каждого элемента группы S_n не превосходит n и что экспонента группы S_n равна n. Кроме того, поскольку каждый цикл — произведение транспозиций, то каждая перестановка является произведением транспозиций.

12. Моноид S называется **простым** [1]), если каждый гомоморфизм $f : S \to S'$, не являющийся константой (точнее, отличный от 1_{const}), будет вложением. Если S — группа, то это равносильно отсутствию нормальных делителей, отличных от единичной подгруппы и всей группы. Доказать, что абелева группа G проста тогда и только тогда, когда она изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_p$ из p элементов, где p — простое число [2]).

13. Рассмотрим многочлен от n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

Перестановка f в симметрической группе S_n, действующей на множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$, называется **четной** или **нечетной** в соответствии с тем, будет строчка $(fx_1, \ldots, fx_n)$ давать $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ с плюсом или с минусом. Доказать, что множество A_n четных подстановок — нормальная подгруппа в S_n индекса 2 (называемая **знакопеременной группой**). (Известно, что A_n—простая группа, за исключением случая $n = 4$. См. Холл [62, стр. 73] или Ротман [65, стр. 45] [3]). Это утверждение остается верным и для подгруппы A_ω симметрической группы S_ω над ω, состоящей из всех перестановок, которые можно записать в виде конечного произведения четного числа транспозиций.)

14. Показать, что число различных вложений группы S_n в S_{n+1} равно $n + 1$. Показать, что S_n можно вложить в нормальную подгруппу группы S_{n+2} [на самом деле S_n вкладывается в A_{n+2}].

15. Пусть группа G действует на конечном множестве X, и O_x — орбита элемента x. Стабилизатор элемента x, Stab x,—

[1]) Чаще под простым моноидом понимают моноид, который не содержит нетривиальных идеалов.— *Прим. ред.*

[2]) Фейт и Томпсон [63] доказали, что каждая конечная группа нечетного порядка разрешима. По теореме Жордана — Гёльдера (см. упр. 7) из этого следует, что порядок каждой конечной некоммутативной простой группы является четным числом.— *Прим. перев.*

[3]) См. также монографии А. Г. Куроша [67] и М. И. Каргаполова, Ю. И. Мерзлякова [76].— *Прим. перев.*

это группа всех элементов g из G, оставляющих элемент x неподвижным. Тогда

$$|O_x| = |G : \text{Stab } x|.$$

Поэтому $|O_x|$ — делитель порядка группы G. Представим X как разбиение на орбиты:

$$X = \coprod_{i=1}^{t} O_{x_i}.$$

Таким образом, x_i принадлежит одной и только одной орбите, и

$$|X| = \sum_{i=1}^{t} |G : \text{Stab } x_i|.$$

Это равенство называется **формулой разложения на орбиты.** Пусть fix g — множество всех элементов x, неподвижных при действии g. Тогда

$$t = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$

Пусть теперь G — произвольная группа, и пусть она действует на множестве G по формуле $g \cdot h = ghg^{-1}$. Эта операция называется **сопряжением**, а орбита элемента группы G при этом действии — **классом сопряженных элементов.** В этом случае Stab x — нормализатор элемента x (централизатор элемента x), а формула разложения на орбиты превращается в равенство

$$(*) \qquad |G| = \sum_{i=1}^{t} |G : \mathscr{N}_G(x_i)|.$$

Элемент x лежит в центре группы G тогда и только тогда, когда его нормализатор совпадает с G. Таким образом, если элементы $\{x_i\}_{i \leqslant t}$ занумерованы так, что $\mathscr{C}(G) = \{x_i \mid i = 1, \ldots, c\}$, где $c = |\mathscr{C}(G)|$, то формула (*) означает, что

$$|G| = |\mathscr{C}(G)| + \sum_{x_i \notin \mathscr{C}(G)} |G : \mathscr{C}_G(x_i)|.$$

Использовать эту формулу для доказательства следующего утверждения: центр неединичной конечной p-группы отличен от единицы. Вывести отсюда, что конечная p-группа нильпотентна. Доказать, что конечная абелева группа G для любого простого делителя p числа $|G|$ содержит элемент порядка p. Используя это замечание и формулу (*), доказать, что каждая конечная группа содержит подгруппу порядка p^n для любого делителя вида p^n числа $|G|$, где p — простое число. Назовем максимальную p-под-

группу группы G **силовской** p**-подгруппой**. Доказать **теоремы Силова:**

(S-1) Каждая p-подгруппа конечной группы содержится в некоторой силовской p-подгруппе.

(S-2) Любые две силовские p-подгруппы (для одного и того же p) сопряжены.

(S-3). Число силовских p-подгрупп для простого числа p сравнимо с 1 по модулю p.

16. Доказать, что конечная группа G изоморфна прямому произведению своих силовских p-подгрупп (где p пробегает множество всех простых делителей числа $|G|$) тогда и только тогда, когда каждая силовская p-подгруппа группы G нормальна.

17. Пусть P — правильный многоугольник с вершинами $x_1, \ldots, x_n$. **Диэдральная группа** D_{2n} определяется как группа симметрий многоугольника P, т. е. как группа перестановок многоугольника P, которые являются «жесткими» движениями действительной плоскости, переводящими вершины в вершины. Пусть S — вращение по часовой стрелке, переводящее каждую вершину в соседнюю, а T — отражение относительно оси симметрии, проходящей через x_1 и центр многоугольника P. Показать, что

$$S^n = 1, \quad T^2 = 1 \text{ и } TST = S^{-1}.$$

Применить теоремы Силова и доказать, что каждая группа порядка $2p$, где p — нечетное простое число, либо циклическая, либо диэдральная.

18. Если G — группа порядка pq, где p, q — простые числа и $p > q$, то G — либо циклическая группа, либо порождается элементами s и t, такими, что

$$s^p = 1, \; t^q = 1 \text{ и } t^{-1}st = s^r,$$

где $r \not\equiv 1 \pmod{p}$ и $r^q \equiv 1 \pmod{p}$. Вывести из этого, что G — разрешимая группа, а ее силовская p-подгруппа нормальна [1]).

19. Конечная неабелева группа G **гамильтонова** (т. е. каждая подгруппа в ней нормальна) тогда и только тогда, когда

$$G \simeq H \times A \times \mathbb{Z}_2,$$

где H — группа кватернионов, а A — абелева группа, в которой порядок любого элемента нечетен (сомножитель $\mathbb{Z}_2$ может отсутствовать).

[1]) Теорема Бернсайда утверждает, что любая группа порядка p^aq^b, где p и q — простые числа, разрешима (см. М. Холл [62, стр. 317, теорема 16.8.7], а также монографии А. Г. Куроша [67] и М. И. Каргаполова, Ю. И. Мерзлякова [76]).

20. Функция Эйлера сопоставляет каждому целому числу n число $\varphi(n)$ чисел, меньших чем n и взаимно простых с n. Кроме того, если $a < n$ и a взаимно просто с n, то существует наименьшее число e (**экспонента** числа a по mod n), такое, что $a^e \equiv 1 \pmod{n}$. Если эта экспонента равна $\varphi(n)$, то a называется **примитивным корнем степени** n. Показать, что группа $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_n$ является циклической тогда и только тогда, когда n обладает примитивным корнем. Показать, что это возможно тогда и только тогда, когда n равно 2, 4, p^n или $2p^n$, где p — нечетное простое число.

***21.** Показать, что прямое произведение $\mathbb{Z}^\omega$ не является свободной абелевой группой (Бэр). Доказать, что любая счетная подгруппа в $\mathbb{Z}^\omega$ является свободной абелевой группой (Шпекер [50]). Более того, в группе ограниченных функций $\omega \to \mathbb{Z}$ любая подгруппа мощности $\leqslant \aleph$ свободна. [См. т. 2, гл. 20, замечание перед теоремой 20.23, по поводу дальнейших ссылок.]

22. Подгруппа A называется (прямым) **сомножителем** группы G, если существует подгруппа B в G, такая, что прямая сумма включений $A \to G$ и $B \to G$ есть изоморфизм. Показать, что необходимым и достаточным условием для этого является следующее: A и B — нормальные подгруппы в G, такие, что $G = AB = \{ab \mid a \in A, \; b \in B\}$ и $A \cap B = \{e\}$. В этом случае $ab = ba$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Если группа G аддитивна, то будем говорить, что A — (прямое) **слагаемое** группы G.

23. Гомоморфизм $f\colon A \to B$ называется **ретракцией**, если существует гомоморфизм $g\colon B \to A$, такой, что $fg = 1_B$. Двойственным образом определяется **коретракция**. (Заметим, что отображение g в определении ретракции является коретракцией.) Ретракция оказывается гомоморфным наложением, а коретракция — гомоморфным вложением. Говорят, что гомоморфное наложение $f\colon A \to B$ **расщепляется,** если оно является ретракцией. Двойственным образом определяется расщепляемость для гомоморфных вложений. Доказать, что в категории MONOIDS канонические инъекции $X_i \to \bigoplus_{i \in I} X_i$ являются коретракциями, а канонические проекции $\prod_{i \in I} X_i \to X_i$ — ретракциями. Показать, что для каждой ретракции (коретракции) $f\colon A \to B$ в mod-$\mathbb{Z}$ ядро $\ker f$ (соотв. $\operatorname{im} f$) является прямым слагаемым в A (соотв. в B), и обратно.

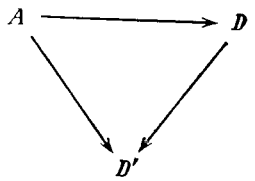
24. Показать, что для любой абелевой группы B существует делимая абелева группа D и гомоморфное вложение $0 \to B \to D$. Абелева группа **инъективна**, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(D-1) образ каждого гомоморфного вложения $A \to B$ в категории mod-$\mathbb{Z}$ является прямым слагаемым;

(D-2) если последовательность $0 \to K \to L$ точна в mod-$\mathbb{Z}$, то последовательность $h_A(L) \to h_A(K) \to 0$ точна в mod-$\mathbb{Z}$ (это равносильно тому, что отображение $h_A(L) \to h_A(K)$ сюръективно);

(D-3) каждое гомоморфное вложение $f\colon A \to B$ в категории mod-$\mathbb{Z}$ является коретракцией.

Доказать эквивалентность условий (D-1), (D-2) и (D-3). Показать, что абелева группа инъективна тогда и только тогда, когда она делима. [*Указание*: использовать гомоморфное вложение группы A в делимую группу.] Введем отношение порядка в mod-$\mathbb{Z}$: $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда существует вложение групп $A \to B$. Доказать, что в категории делимых абелевых групп это отношение порядка индуцирует порядок, для которого $A \leqslant B$, $B \leqslant A \Rightarrow A \approx B$. Показать, что каждая абелева группа A может быть вложена в инъективную абелеву группу D, минимальную в классе всех делимых групп D', для которых существует вложение $A \to D'$. Доказать, что любые две минимальные инъективные абелевы группы D и D', в которые вкладывается группа A, изоморфны, причем изоморфизм $D \to D'$ может быть выбран так, что диаграмма



коммутативна. В этом случае назовем вложение $A \to D$ инъективной оболочкой [1]). Показать, что включения $\mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ являются инъективными оболочками. Показать, что любая инъективная абелева группа является прямой суммой групп, изоморфных либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для подходящих простых чисел p.

25. Абелева группа A **проективна**, если A удовлетворяет любому из трех условий, дуальных к (D-1), (D-2) и (D-3) из упражнения 24, например, если ядро каждого наложения $B \to A$ — прямое слагаемое. Показать, что абелева группа A проективна тогда и только тогда, когда она свободна, т. е. изоморфна группе $\mathbb{Z}^{(S)}$ для некоторого множества S. Показать, что любая подгруппа B свободной абелевой группы $A \approx \mathbb{Z}^{(S)}$ — свободная абелева группа, изоморфная группе $\mathbb{Z}^{(S')}$ для некоторого множества S', такого, что $|S'| \leqslant |S|$. Понятие, дуальное понятию инъективной оболочки в mod-$\mathbb{Z}$, называется **проективным накрытием** (предмет рассмотрения гл. 22). Показать, что абелева группа A в mod-$\mathbb{Z}$ обладает проективным накрытием тогда и только тогда, когда она — свободная абелева группа.

[1]) Под инъективной оболочкой группы A часто понимают и саму группу D. — *Прим. ред.*

26. Рассмотреть аналог понятия инъективной группы для случая полной подкатегории mod-$\mathbb{Z}_n$ категории mod-$\mathbb{Z}$, состоящей из всех периодических групп, экспонента которых делит число n [т. е. заменяя mod-$\mathbb{Z}$ на mod-$\mathbb{Z}_n$ в (D-1)]. Показать, что кольцо $\mathbb{Z}_n$ **самоинъективно** (т. е. что $\mathbb{Z}_n$ — инъективный объект в mod-$\mathbb{Z}_n$). Если $n = mm'$ и m, m' взаимно просты, то показать, что $\mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_m \oplus Z_{m'}$. Это сводит задачу к случаю $n = p^e$, где p — простое число. Используя самоинъективность кольца $\mathbb{Z}_n$, доказать, что любая ограниченная абелева группа изоморфна прямой сумме циклических групп. Если $n = p_1^{e_1} \ldots p_t^{e_t}$ — разложение n в произведение степеней различных простых чисел $p_1, \ldots, p_t$, то показать, что любая группа из mod-$\mathbb{Z}_n$ изоморфна прямой сумме циклических p_i-групп, $i = 1, \ldots, t$. (Свести рассмотрение к случаю $t = 1$, показав, что любая ограниченная группа является прямой суммой p-групп. Любая группа A экспоненты p^e содержит подгруппу B, изоморфную группе $\mathbb{Z}_{p^e}$; при этом B — прямое слагаемое в A, поскольку $\mathbb{Z}_{p^e}$, а следовательно и B,— инъективный объект в mod-$\mathbb{Z}_{p^e}$. Пусть $A = Z_{p^e} \oplus A'$. Завершить доказательство проведением индукции по числу образующих группы A, если группа A конечна. С другой стороны, показать, что прямая сумма инъективных объектов в mod-$\mathbb{Z}_n$ инъективна. Если B — подгруппа в A, которая максимальна относительно следующего свойства: B — прямая сумма групп, изоморфных циклическим группам $\mathbb{Z}_{p^i}$ для подходящих $i \leqslant e$, то B — прямое слагаемое в A. Пусть $A = B \oplus C$. Но если $C \neq 0$, то в C найдется прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}_{p^j}$, что противоречит максимальности подгруппы B. Итак, $A = B$, что доказывает существование требуемого прямого разложения.)

27. Основная теорема об абелевых группах. Любая конечно порожденная абелева группа G является прямой суммой циклических групп, при этом периодическая часть $T(G)$ выделяется прямым слагаемым. Следовательно,

$$G \approx (G/T(G)) \oplus T(G).$$

[*Указание*: любая конечно порожденная абелева группа без кручения — свободная абелева группа. Показать сначала, что такая группа может быть вложена в $\mathbb{Z}^n$, а затем рассмотреть действие на ней проекций $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.]

Ссылки

Артин [55], [69], Артин — Несбит — Тролл [44], Басс [73], Биркгоф [52], [67], Букур — Деляну [72], Ван-дер-Варден [48], Вейль [46], Виланд [64], Горенштейн [68], Джанс [64], Джекобсон [51, 53, 64], Капланский [69b], Картан — Эйленберг [60], Клиффорд — Престон [72], Кон [66a], Курош [67], [73], Ленг [68], Маклейн [66], [71], Биркгоф — Маклейн [67], Митчелл [65], Норскотт [60], Понтрягин [72], Ротман [65], Фейт [67], Фрейд [64], Фукс [74,77], Херстейн [64], Холл [62], Цассенхауз [58], Шевалле [56].

Глава 2

ПРОИЗВЕДЕНИЕ И КОПРОИЗВЕДЕНИЕ

Понятия, вводимые и исследуемые в этой главе, настолько фундаментальны, что вряд ли в дальнейшем возможно обойтись без какого-либо из них.

Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ называется унивалентным (соотв. полным), если для любой пары X, Y объектов категории C он индуцирует вложение (наложение)

$$\mathrm{Mor}_C(X, Y) \to \mathrm{Mor}_D(TX, TY).$$

Объект $A \in C$ называется образующим, если основной ковариантный функтор

$$h^A : C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$$

унивалентен. Объект A категории mod-$\mathbb{Z}$ является образующим в том и только том случае, если каждый объект этой категории является гомоморфным образом прямой суммы некоторого количества экземпляров объекта A или, что то же самое, если A имеет прямое слагаемое, изоморфное группе $\mathbb{Z}$. Объект A называют проективным, если функтор h^A со значениями в категории множеств сохраняет эпиморфизмы; объект A категории mod-$\mathbb{Z}$ проективен в том и только том случае, когда он является свободной абелевой группой. (См. упр. 2.6.) Дуальным к понятию проективного объекта является понятие инъективного объекта. Абелева группа A инъективна тогда и только тогда, когда она делима (2.6.5).

Для каждой конкретной категории C определяется функтор свободы

$$F\colon \mathrm{SETS} \rightsquigarrow C.$$

Когда этот функтор существует, то он унивалентен, если только категория C содержит объекты сколь угодно большой мощности. (В терминологии гл. 5 функтор свободы является сопряженным слева к забывающему функтору $C \rightsquigarrow$ SETS.) Мы построим функтор F для трех категорий: mod-$\mathbb{Z}$, MONOIDS и GROUPS.

В этой главе произведение и копроизведение определяются в произвольных категориях и реализуются в нескольких конкретных категориях. Во всех рассмотренных случаях произведение совпадает с прямым произведением. Копроизведение в категории множеств совпадает со свободным объединением, а в категории mod-$\mathbb{Z}$ — с прямой суммой. В категории mod-$\mathbb{Z}$ копроизведение любого семейства гомоморфизмов $\{\mathbb{Z} \to A\}$, индексированного множеством S, есть прямая сумма $\mathbb{Z}^{(S)} \to A$, т. е. семейство вло-

жений $\{\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{(S)}\}$ [1]) является копроизведением в категории mod-$\mathbb{Z}$, называемым свободной абелевой группой над множеством S. Аналогично, в категории групп существует семейство $\{\mathbb{Z} \to F(S)\}$ гомоморфных вложений в свободную группу $F(S)$ над множеством S, которое также является копроизведением.

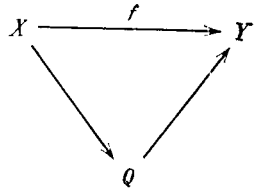
Определяются функции Йонеды. Они демонстрируют естественность функторов представления.

Нуль

Объект T называется **левым нулем** (а также **начальным** или **инициальным** объектом) категории C, если для каждого объекта X существует единственный морфизм $T \to X$. Объект F называется **правым нулем** (или **конечным**, или **финальным** объектом), если он обладает дуальным свойством, т. е. если для каждого объекта X существует единственный морфизм $X \to F$. Категория может иметь несколько левых (или правых) нулей, но если объекты T_1 и T_2 являются левыми нулями, то произведение единственных морфизмов $T_1 \to T_2$ и $T_2 \to T_1$ должно совпадать с единственным морфизмом $T_1 \to T_1$, т. е. является тождественным морфизмом 1_{T_1}. По симметрии произведение морфизмов $T_2 \to T_1$ и $T_1 \to T_2$ совпадает с 1_{T_2}. Это доказывает следующее предложение.

2.1. Предложение и определение. *Если T_1 и T_2 — левые нули категории C, то существует единственная эквивалентность $T_1 \to T_2$. Объект категории C называется* ***нулевым объектом,*** *если он является левым и правым нулем одновременно. Нулевой объект единствен с точностью до эквивалентности и обозначается символом* 0.

Формула $X = 0$ означает, что X — нулевой объект, но из того, что $X = 0$ и $Y = 0$, не следует, что $X = Y$. (Возможно, лучше было бы писать $X \approx 0$ и $Y \approx 0$, в этом случае $X \approx Y$.) Говорят, что морфизм $f\colon X \to Y$ **пропускается через** объект Q, если имеется коммутативная диаграмма



В этом случае говорят также, что морфизм f **разлагается** на (**пропускается** через) морфизмы $X \to Q$ и $Q \to Y$ или что эти морфизмы **составляют** f. В частности, в категории групп морфизм $f\colon X \to Y$ пропускается через каноническое наложение $X \to X/K$ в том и только том случае, когда ядро морфизма f содержит K.

[1]) Имеется в виду объект $\mathbb{Z}^{(S)}$ вместе с этим семейством вложений.— *Прим. ред.*

Морфизм называется **нулевым**, если он пропускается через нулевой объект. Хотя множества $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ и $\mathrm{Mor}_C(X', Y')$ не имеют общих элементов, если $\langle X, Y\rangle \neq \langle X', Y'\rangle$, мы обозначаем нулевой морфизм в каждом из них одним и тем же символом 0. [Таким образом, $f = 0$ в $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ и $f' = 0$ в $\mathrm{Mor}_C(X', Y')$ не означает непременно, что

$$\mathrm{Mor}_C(X, Y) \cap \mathrm{Mor}_C(X', Y') \neq \varnothing.]$$

Если $f = 0$, то $fg = 0$ и $hf = 0$ для любых морфизмов h и g, таких, что fg и hf определены. В категории групп для каждой группы G ее единичная подгруппа, т. е. единственная подгруппа, состоящая в точности из одного элемента e, является нулевым объектом, а гомоморфизм $f : H \to G$ является нулевым морфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{im}\, f = e$. Таким образом, нулевой морфизм отображает все в единичный элемент. В категории моноидов это неверно, так как если f — идемпотент, не совпадающий с единичным элементом e моноида S, и если (e) и (f) означают моноиды, состоящие из e и f соответственно, то $(e) \approx (f)$. Значит, существуют по крайней мере два различных морфизма $(e) \to S$, т. е. (e) не является левым нулем.

Сохранение свойств

Пусть P — свойство категорий, определенное для морфизмов, объектов или диаграмм объектов и морфизмов. Тогда говорят, что функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ **сохраняет** свойство P, если для любого морфизма, объекта или диаграммы Q из того, что Q обладает свойством P, следует, что $T(Q)$ также им обладает. Очевидно, каждый функтор, ковариантный или контравариантный, сохраняет эквивалентности. (Если бы это было не так, то от одного из двух понятий — эквивалентности или функтора — пришлось бы отказаться.) Изучение любой алгебраической системы неизбежно приводит к вопросу о том, какие свойства сохраняются заданными классами морфизмов или функторов, и к двойственной проблеме — какие классы морфизмов или функторов сохраняют данный класс свойств. (Этот принцип был впервые сформулирован Клейном для геометрии и известен как *Эрлангенская программа* Клейна. В этой программе в качестве морфизмов выступали элементы групп, содержащих группу движений плоскости.) Свойство категорий называется **категорным**, если оно сохраняется при категорных эквивалентностях (см. 2.4).

Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ **дуализирует** свойство P, если дуальный функтор $T_*\colon C^* \rightsquigarrow D$ (или, что то же самое, $T^* : C \rightsquigarrow D^*$) сохра-

няет это свойство. Будем говорить также, что T **превращает** P в P^*. Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ **отражает** свойство P, если для любого объекта, морфизма или диаграммы Q из того, что $T(Q)$ обладает свойством P, следует, что им обладает и Q. Функтор, сохраняющий нулевые объекты, называется функтором, **сохраняющим нуль.** Так как нулевой объект A характеризуется тем, что 1_A — нулевой морфизм, то любой функтор, сохраняющий нуль, сохраняет также и нулевые морфизмы.

Ретракции

Морфизм $f\colon A \to B$ называют **ретракцией**, если существует морфизм $g\colon B \to A$, такой, что $fg = 1_B$. Дуальное свойство определяет **коретракцию**. Таким образом, указанный выше морфизм $g\colon B \to A$ является коретракцией, так как $g^* : A^* \to B^*$ есть ретракция в дуальной категории. Из предложения 1 теоретико-множественного введения вытекает, что наложение (вложение) в категории множеств является ретракцией (коретракцией). В любой категории C морфизм f есть эквивалентность в том и только том случае, когда он является ретракцией и коретракцией одновременно. Если в точной последовательности

$$0 \to A \to B \to A' \to 0$$

морфизм $B \to A'$ является ретракцией, то говорят, что эта последовательность **расщепляется** и называют ее **расщепляющейся последовательностью**. Ретракции и коретракции сохраняются ковариантными функторами и дуализируются контравариантными. Таким образом, быть ретракцией — категорное свойство. Если $A \to B$ — коретракция, то A называют **ретрактом** объекта B.

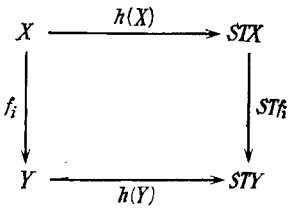
Та же терминология используется и для функторов: функтор $T\colon A \rightsquigarrow B$ — **ретракция**, если существуют функтор $S\colon B \rightsquigarrow A$ и эквивалентность функторов $TS \approx 1_B$. Функтор $T\colon A \rightsquigarrow B$ называется **представительным**, если для любого объекта Y категории B существуют объект X категории A и эквивалентность $Y \approx TX$ в категории B. Таким образом, любая ретракция $T\colon A \rightsquigarrow B$ представительна, так как из того, что $TS \approx 1_B$, следует, что $Y \approx TSY$.

Полные и унивалентные функторы

Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ называется **унивалентным** (соотв. **полным или вполне унивалентным**), если для любых объектов X, Y категории C индуцированное отображение

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_C(X, Y) \to \mathrm{Mor}_D(TX, TY) \\ f \mapsto Tf \end{cases}$$

инъективно (соотв. сюръективно или биективно). Любая коретракция $T\colon A \rightsquigarrow B$ унивалентна, так как если функтор $S\colon B \rightsquigarrow A$ таков, что $ST \approx 1_A$, и если $Tf_1 = Tf_2$ для каких-либо морфизмов $f_i\colon X \to Y$, $i = 1, 2$, то из коммутативности диаграммы



где $h\colon 1_C \to ST$ — естественная эквивалентность функторов, следует, что $h(Y) f_1 = h(Y) f_2$ и, значит, $f_1 = f_2$, поскольку $h(Y)$ — эквивалентность. (Отсюда легко получается, что коретракция T отражает каждое свойство, которое можно определить как предел или копредел в терминологии гл. 5; в частности, T отражает точные последовательности, ядра и коядра, произведения и копроизведения.) Аналогичное рассуждение показывает, что ретракция $S\colon D \rightsquigarrow C$ индуцирует наложения

$$\mathrm{Mor}_D(TX, TY) \to \mathrm{Mor}_C(STX, STY),$$

а значит, и наложения

$$\mathrm{Mor}_D(TX, TY) \to \mathrm{Mor}_C(X, Y)\ ^{1}).$$

Отметим, что любой унивалентный функтор отражает ненулевые морфизмы и, следовательно, ненулевые объекты. [Будет показано, что для абелевых категорий унивалентный функтор отражает неточные последовательности (см. 3.49, а также гл. 5).]

Унивалентный функтор $C \rightsquigarrow D$, инъективный на объектах, называют **вложением** категорий. Если C — подкатегория категории D, то функтор включения оказывается вложением категорий, обозначаемым через 1_C^D. (Тождественный функтор 1_D^D обозначается просто 1_D.) Подкатегория C категории D полна тогда и только тогда, когда функтор включения является полным.

2.2. Критерий эквивалентности. *Ковариантный функтор $T\colon A \rightsquigarrow B$ является эквивалентностью в том и только том случае, когда он вполне унивалентен и представителен.*

Доказательство. Любая ретракция представительна, любая коретракция унивалентна, а эквивалентность $T\colon A \rightsquigarrow B$

[1]) Если $\varphi \in \mathrm{Mor}_C(STX, STY)$ и $h\colon TS \to 1_D$ — эквивалентность, то, положив $\psi = h(TY)T(\varphi)(h(TX))^{-1}$, получим $h(TY)T(\varphi) = \psi h(TX)$, причем $\psi \in \mathrm{Mor}_D(TX, TY)$. Поэтому $h(TY) \cdot TS(\psi) = \psi h(TX) = h(TY)T(\varphi)$, откуда $TS(\psi) = T(\varphi)$ и в силу доказанного выше $\varphi = S(\psi)$.— *Прим. ред.*

полна, поскольку, как только что было отмечено, функтор T^{-1}: $B \rightsquigarrow A$ индуцирует наложения

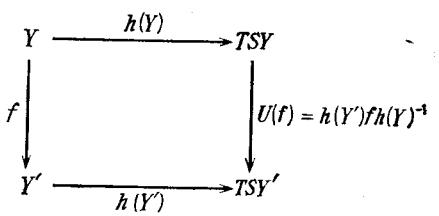
$$\mathrm{Mor}_B(TX, TY) \to \mathrm{Mor}_A(T^{-1}TX, T^{-1}TY).$$

(На самом деле это показывает, что функтор T^{-1} полон.)

Обратно, пусть T: $A \rightsquigarrow B$ — вполне унивалентный и представительный ковариантный функтор. Тогда каждому $Y \in \mathrm{Obj}\, B$ соответствуют объект $SY \in \mathrm{Obj}\, A$ и эквивалентность $h(Y)$: $Y \to T(SY)$. Это определяет ковариантный функтор

$$U \begin{cases} B \rightsquigarrow B \\ Y \mapsto TSY \text{ (на объектах)} \\ f \mapsto h(Y')\, f\, h(Y)^{-1} \text{ (на морфизмах } f\text{: } Y \to Y'). \end{cases}$$

Диаграмма



показывает, что h: $1_B \to U$ — естественная эквивалентность функторов, т. е. что $U \approx 1_B$.

Поскольку T индуцирует биективное отображение

$$\mathrm{Mor}_A(X, Y) \to \mathrm{Mor}_B(TX, TY),$$

то для любой пары X, $Y \in \mathrm{Obj}\, A$ на множестве $\mathrm{Mor}(TX, TY)$ определено отображение T^{-1}. Определим теперь ковариантный функтор

$$S \begin{cases} B \rightsquigarrow A \\ Y \mapsto SY \text{ (объекты)} \\ f \mapsto T^{-1}U(f) \text{ (морфизмы)}, \end{cases}$$

который, очевидно, удовлетворяет условию

$$TS = U \approx 1_B.$$

Таким образом, чтобы доказать, что T — эквивалентность, нам осталось только проверить, что $ST \approx 1_A$. Пусть X, $X' \in \mathrm{Obj}\, A$ и предположим, что в категории B существует эквивалентность

$$t\text{: } TX \approx TX'.$$

Это означает, что существует морфизм t': $TX' \to TX$, такой, что $t't = 1_{TX}$ и $tt' = 1_{TX'}$. Так как T биективен на морфизмах, можно применить T^{-1}:

$$T^{-1}(t')\, T^{-1}(t) = T^{-1}(t't) = T^{-1}(1_{TX}) = 1_X.$$

Аналогично, $T^{-1}(t)\, T^{-1}(t') = 1_{X'}$. Таким образом, из того, что t — эквивалентность, следует, что

$$T^{-1}(t) : X \approx X'$$

— также эквивалентность. Далее, для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, B$ мы имеем эквивалентность $h(Y)$: $Y \approx TSY$. Если $Y = TX$, положим

$$g(X) = T^{-1}h(TX).$$

Тогда

$$g(X)\text{: } X \approx STX$$

является эквивалентностью, так как

$$h(TX)\text{: } TX \approx TS(TX).$$

Для краткости положим $h = h(TX)$, $h' = h(TX')$, $g = g(X)$ и $g' = g(X')$. Тогда

$$g = T^{-1}h \quad \text{и} \quad g' = T^{-1}h'.$$

Вычислим теперь функтор ST на морфизме f: $X \to X'$. Используя приведенную выше диаграмму, мы можем вычислить TS от Tf: $TX \to TX'$; именно:

$$TS(Tf) = U(Tf) = h' \cdot Tf \cdot h^{-1}$$

или

$$(TSTf)\, h = h' \cdot Tf,$$

или

$$T(STf \cdot T^{-1}h) = T(T^{-1}h' \cdot f),$$

или

$$STf \cdot T^{-1}h = T^{-1}h' \cdot f,$$

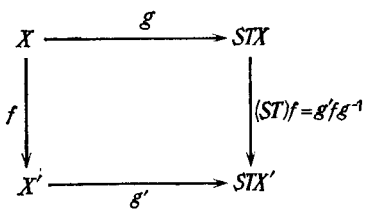
или

$$STf \cdot g = g' \cdot f.$$

Таким образом, мы установили равенство

$$STf = g' \cdot f \cdot g^{-1}$$

и, значит, коммутативность диаграммы



откуда следует, что $g\colon 1_A \rightsquigarrow ST$ — естественная эквивалентность функторов, т. е.

$$ST \approx 1_A. \square$$

2.3. Предложение (Йонеда [54]).

2.3.1. *Пусть C — категория, $A \in \mathrm{Obj}\, C$ и $T\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$ — ковариантный функтор. Тогда функция Йонеды*

$$(1) \qquad y_{A,T}\begin{cases} [h^A, T] \to TA \\ \eta \mapsto \eta(A)(1_A), \end{cases}$$

определенная на множестве $[h^A, T]$ всех естественных преобразований $h^A \to T$, биективна и естественна как по A, так и по T.

2.3.2. *Функтор*

$$\begin{cases} C^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathrm{Funct}\,(C, \mathrm{SETS}) \\ A^* \mapsto h^A \end{cases}$$

вполне унивалентен, он называется ***функтором представления.***

2.3.3. *Если A и B — объекты категории C, то функция Йонеды*

$$[h^A, h^B] \to \mathrm{Mor}_C(B, A)$$

биективна. Основные ковариантные функторы h^A и h^B со значениями в категории множеств естественно эквивалентны в том и только том случае, когда объекты A и B эквивалентны в категории C.

Доказательство. Определим функцию

$$y'\colon TA \to [h^A, T],$$

положив

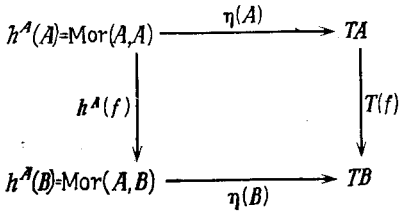
$$(2) \qquad y'(x)(B)(f) = T(f)(x),$$

где $B \in \mathrm{Obj}\, C$, $x \in TA$ и $f \in h^A(B) = \mathrm{Mor}_C(A, B)$. Таким образом, $y'(x)\colon h^A \to T$ — естественное преобразование функторов, которое каждому $B \in \mathrm{Obj}\, C$ ставит в соответствие функцию

$$y'(x)(B)\colon h^A(B) \to TB,$$

отображающую $f \in h^A(B)$ в $T(f)(x)$. Тот факт, что $y'(x)$ действительно является естественным преобразованием, вытекает из того, что функтор T ковариантен и, значит, $T(gf) = T(g) \cdot T(f)$. Для любого естественного преобразования $\eta \in [h^A, T]$ имеем коммутативную диаграмму

I.



Для $1_A \in h^A(A)$, идя по часовой стрелке, получим

$$(3) \qquad T(f)\,\eta(A)(1_A) = T(f)(y(\eta)) = y'(y(\eta))(B))(f),$$

а идя против часовой стрелки —

$$(4) \qquad \eta(B)\,h^A(f)(1_A) = \eta(B)(f).$$

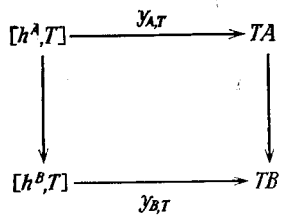
Следовательно, из коммутативности этой диаграммы вытекает, что $y'y(\eta) = \eta$ для любого $\eta \in [h^A, T]$, т. е. что $y'y$ — тождественная функция. Если $x \in TA$, то

$$y(y'(x)) = y'(x)(A)(1_A) = T(1_A)(x) = x,$$

т. е. функция yy' тоже тождественна. Это доказывает, как и требовалось, биективность функции y. [Если C — аддитивная категория и T — аддитивный функтор (см. стр. 195—197), то определение (2) функции y' показывает, что $y'(x)(B)$ — групповой гомоморфизм. Так как, ввиду (1), очевидно, что y — групповой гомоморфизм, то из предыдущего результата вытекает, что y — изоморфизм. (Позже это будет использовано.)]

Чтобы показать, что функция y естественна по A, мы должны установить, что для любого морфизма $f\colon A \to B$ диаграмма

II.

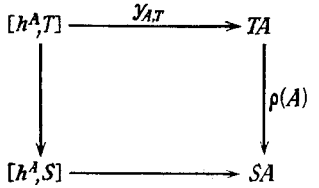


коммутативна. Начиная с $\eta \in [h^A, T]$ и идя по часовой стрелке, мы получим $T(f)\,\eta(A)(1_A)$, а идя против часовой стрелки $y_{B,T}(\eta') = \eta(B)(f)$, где $\eta'(X)(g) = \eta(X)(gf)$ для каждого $g \in h^B(X)$. Значит, коммутативность диаграммы II следует из коммутативности диаграммы I, повлекшей за собой равенство выражений (3) и (4).

Чтобы доказать естественность функции y по T, нам нужно проверить, что для любого естественного преобразования функто-

ров $\rho\colon T \to S$ диаграмма

III



коммутативна. Для $\eta \in [h^A, T]$, идя по часовой стрелке, мы получаем $\rho(A)(\eta(A)(1_A))$, а идя против часовой стрелки — $(\rho\eta)(A)(1_A)$. В силу определения произведения естественных преобразований эти выражения равны, т. е. диаграмма III коммутативна. Это доказывает 2.3.1.

Для любого объекта X категории C положим теперь $T = h^X$. В силу доказанного в первой части $(y_{A,\,T})^{-1}$ существует и определяется правилом (2). Введем обозначение $y'_{X,\,A} = (y_{A,\,T})^{-1}$. Тогда функтор представления определяется следующим образом:

$$H\begin{cases} C^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathrm{Funct}\,(C, \mathrm{SETS}) \\ A^* \mapsto h^A \text{ (на объектах)} \\ t^* \mapsto y'_{X,\,A}(t) \text{ (на морфизмах } t\colon X \to A). \end{cases}$$

Таким образом, для любого $B \in \mathrm{Obj}\,C$ имеем

$$H(t^*)\begin{cases} h^A(B) \to h^X(B) \\ f \mapsto h^X(f)\,t = ft. \end{cases}$$

Если $s\colon Y \to X$, то

$$H(s^*t^*) = H((ts)^*) = y'_{Y,\,A}(ts) = h^Y(ts) = h^Y(s)\,h^X(t) = y'_{Y,\,X}(s)\,y'_{X,\,A}(t) = H(s^*)\cdot H(t^*),$$

т. е. функтор представления ковариантен. Из доказательства 2.3.1 вытекает, что он вполне унивалентен. Этим доказано 2.3.2, а 2.3.3 является следствием 2.3.1. □

Образующие и кообразующие

Объект A категории C называется **образующим**, если основной ковариантный функтор $h^A = \mathrm{Mor}_C(A, \quad)$ со значениями в категории множеств унивалентен. Объект A называется **кообразующим** категории C, если A^* — образующий объект категории C^* или, что эквивалентно, если дуальный функтор

$$(h^A)^* = h_{A^*}\colon C^* \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$$

унивалентен. Таким образом, объект A является образующим (кообразующим) в том и только том случае, когда для любой пары различных морфизмов $f_i\colon X \to Y$ $(i = 1, 2)$ категории C существует морфизм $g\colon A \to X$ (соотв. $g\colon Y \to A$), такой, что $f_1 g \neq f_2 g$ (соотв. $g f_1 \neq g f_2$). Справедливость этого утверждения совершенно очевидна, если заметить, что

$$h^A(f)(g) = fg \text{ и } h_A(f)(g) = gf$$

для всех морфизмов f, g категории C, для которых определено произведение fg или gf. Короче говоря, объект A является образующим, если для любого объекта X существует достаточно много морфизмов $A \to X$ для того, чтобы отличить друг от друга разные морфизмы $X \to Y$ для любого объекта Y. Для кообразующего справедливо дуальное утверждение. В категории множеств эти понятия тривиальны, так как любое непустое множество является образующим и любое множество, содержащее не менее двух элементов,— кообразующим. Если объект A является образующим (кообразующим) и $B \to A$ — эпиморфизм (соотв. $A \to B$ — мономорфизм), то B — тоже образующий (кообразующий).

2.4. Предложение и определение. *Пусть C — категория. Следующие свойства в каждой из групп разд. I или II категорны и эквивалентны между собой. Они служат определениями терминов, входящих в п.* (a).

I. Категорные свойства морфизма f.

(1) (a) f — ***мономорфизм.***

(b) *Для всех объектов A категории C, т. е. для всех функторов $h^A = \mathrm{Mor}_C(A, \quad)$ отображение $h^A(f)$ инъективно.*

(c) $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ *для любых морфизмов g_1, g_2 категории C.*

(d) *На f можно сокращать слева.*

(2) (a) f — ***эпиморфизм.***

(b) *Для всех $A \in \mathrm{Obj}\,C$ отображение $h_A(f)$ сюръективно; здесь $h_A = \mathrm{Mor}_C(\ ,\ A)$.*

(c) $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.

(d) *На f можно сокращать справа.*

(3) (a) f — ***собственный мономорфизм.***

(b) f — *мономорфизм, не являющийся эквивалентностью.*

(4) (a) $f \leqslant g$.

(b) *f и g — мономорфизмы, такие, что $f = gh$ для некоторого морфизма h.*

(5) *Дуализация свойств* (3) *и* (4) *для эпиморфизмов.*

II. Категорные свойства объекта A.

(1) (a) *Объект A* ***проективен.***

(b) *Основной ковариантный функтор h^A со значениями в категории множеств сохраняет эпиморфизмы.*

(c) *Если* $f\colon X \to Y$ *— эпиморфизм, то отображение* $h^A(f)\colon h^A(X) \to h^A(Y)$ *сюръективно.*

(2) (a) *Объект* A ***инъективен.***

(b) *Основной контравариантный функтор* h_A *со значениями в категории множеств превращает мономорфизмы в эпиморфизмы.*

(c) *Если* $f\colon X \to Y$ *— мономорфизм, то отображение* $h_A(f)\colon h_A(Y) \to h_A(X)$ *сюръективно.*

(3) (a) A *—* ***образующий*** *категории* C.

(b) *Функтор* h^A *унивалентен.*

(c) *Если* $g_i\colon X \to Y$ $(i = 1, 2)$ *— различные морфизмы категории* C, *то существует морфизм* $f\colon A \to X$, *такой, что* $g_1 f \neq g_2 f$.

(4) (a) A *—* ***кообразующий*** *категории* C.

(b) *Функтор* h_A *унивалентен.*

(c) *Дуализация свойства* 3 (c). □

2.5. Примеры.

2.5.1. В категории множеств понятия наложения, ретракции и эпиморфизма совпадают (см. предложение 1 теоретико-множественного введения). Двойственно, в категории множеств совпадают понятия вложения, коретракции и мономорфизма. Это объясняет эквивалентность свойств (b) и (c) в каждой из групп (1) и (2) разд. II.

2.5.2. В любой категории ретракция является эпиморфизмом, а коретракция — мономорфизмом.

2.5.3. В категории моноидов вложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ мультипликативного моноида $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Q}$ является эпиморфизмом, но не сюръективно. Это следует из того, что любое отображение $f\colon \mathbb{Q} \to A$ определяется его значениями на $\mathbb{Z}$, так как

$$f(ab^{-1}) = f(a)\,f(b)^{-1}$$

для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, таких, что $b \neq 0$.

Вообще, пусть $f\colon B \to A$ — морфизм в категории моноидов, причем A является группой и как группа порождается образом морфизма f. Тогда f — эпиморфизм в категории моноидов.

2.5.4. Вложение любого всюду плотного подпространства топологического пространства является эпиморфизмом в категории C, объектами которой служат топологические пространства, а морфизмами — непрерывные функции; таково, например, включение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ как топологических пространств.

2.5.5. В категории mod-$\mathbb{Z}$ гомоморфизм $f\colon A \to B$ является эпиморфизмом (соотв. мономорфизмом) тогда и только тогда, когда f — наложение (соотв. вложение).

Тот факт, что наложения (соотв. вложения) являются эпиморфизмами (соотв. мономорфизмами), следует из примера 1. Обратно, пусть $f\colon A \to B$ не является наложением, т. е. $\operatorname{im} f = C \neq B$.

Если $g\colon B \to B/C$ — канонический гомоморфизм, то $g \neq 0$, в то время как $gf\colon B \to B/C$ — нулевой гомоморфизм. Тогда

$$gf = 0 = 0f,$$

т. е. на f нельзя сократить справа, значит, f — не эпиморфизм. Доказательство для мономорфизмов дуально.

2.5.6. Если f и g — эпиморфизмы (мономорфизмы) в категории C и произведение fg определено, то fg — также эпиморфизм (мономорфизм). Очевидно, что на fg можно сокращать справа (слева).

2.5.7. Унивалентный функтор $F\colon A \rightsquigarrow B$ является мономорфизмом в категории категорий, а полный функтор — эпиморфизмом.

2.5.8. **Порядковой категорией** называют такую категорию C, в которой $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ либо пусто, либо состоит из единственного морфизма $A \to B$, причем, если $A \neq B$, $\operatorname{Mor}_C(B, A)$ пусто. В последнем случае пишут $A \leqslant B$. Отношение $A \leqslant B$ является отношением порядка. Обратно, любое частично упорядоченное множество, очевидно, можно рассматривать как порядковую категорию. В порядковой категории каждый морфизм является и эпиморфизмом, и мономорфизмом, но, разумеется, $A \to B$ — эквивалентность тогда и только тогда, когда $A = B$. Таким образом, морфизм, являющийся эпиморфизмом и мономорфизмом одновременно, не обязан быть эквивалентностью. Кроме того, если C — подкатегория категории SETS, объектами которой служат все множества, а морфизмами — включения, то морфизм $A \to B$ будет эпиморфизмом, который является наложением тогда и только тогда, когда $A = B$. Таким образом, в конкретных категориях эпиморфизмы быть наложениями не обязаны. □

2.6. Упражнения.

2.6.1. Пусть D — категория всех делимых абелевых групп, U — (мультипликативная) группа всех корней из единицы, и пусть отображение $f\colon U \to U$ определяется так: $f(u) = u^2$ для любого $u \in U$. Показать, что f — мономорфизм, не являющийся вложением.

2.6.2. Показать, что в категории моноидов включение аддитивных моноидов $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ — эпиморфизм, не являющийся наложением.

2.6.3. Если A — инъективный объект категории C, то любой мономорфизм $A \to B$ является коретракцией. Двойственное утверждение справедливо для проективного объекта.

*2.6.4. В категории mod-$\mathbb{Z}$ для любого множества I прямая сумма $\mathbb{Z}^{(I)}$, а значит, и любая подгруппа группы $\mathbb{Z}^{(I)}$ проективны (см. гл. 1, упр. 25).

*2.6.5. (a) Абелева группа G является образующим категории mod-$\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $G \approx \mathbb{Z} \oplus A$ для некоторой

группы $A \in \text{mod-}\mathbb{Z}$. (Это утверждение, высказанное во введении к настоящей главе, об образующих в категории mod-$\mathbb{Z}$.)

(b) Абелева группа A инъективна в категории mod-Z тогда и только тогда, когда она делима. Показать, что $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является инъективным кообразующим категории mod-$\mathbb{Z}$.

(c) Показать, что объект E категории mod-$\mathbb{Z}$ является кообразующим в том и только том случае, когда $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ вкладывается в E.

2.6.6. Для любой абелевой группы A группа $A' = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ называется **группой характеров** группы A. **Функтор бихарактеров** определяется как функтор

$$h^2_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \begin{cases} \text{mod-}\mathbb{Z} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ A \mapsto A'', \end{cases}$$

являющийся произведением функтора $h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ на себя. Таким образом, $A'' = (A')'$. Преобразование

$$\pi \begin{cases} 1_{\text{mod-}\mathbb{Z}} \to h^2_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \\ A \mapsto A'', \end{cases}$$

такое, что $\pi_A(a) f = f(a)$ для любых $a \in A$, $f \in A'$, естественно. Кроме того, $\pi_A\colon A \to A''$ для любого $A \in \text{mod-}\mathbb{Z}$ является мономорфизмом, а

$$h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(\pi_A)\colon (A'')' \to A'$$

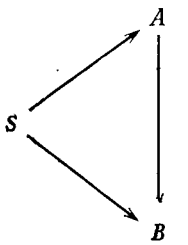
— расщепляющимся эпиморфизмом. Убедиться, что каждая конечная абелева группа A изоморфна своей группе характеров A'. [*Указание*: каждая конечная абелева группа A есть прямая сумма p-групп (гл. 1, упр. 25). Пусть A есть p-группа порядка p^n. Показать, что A' является p-группой порядка $\leqslant p^n$. Тогда $|A''| \leqslant |A'| \leqslant |A|$. Но A вкладывается в A'', значит, $|A| = |A'|$ и т. д.]

*2.6.7. В категории групп мономорфизмы являются вложениями, так как мономорфизм должен иметь нулевое ядро. Показать, что эпиморфизмы являются наложениями.

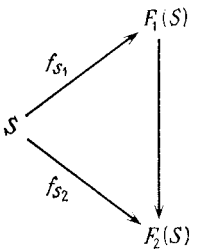
2.6.8. Исследовать все понятия, введенные в этой главе, для порядковой категории C, а также для категории множеств.

Функтор свободы

Пусть C — конкретная категория. Для произвольного множества S рассмотрим категорию (S, C), объектами которой являются отображения $f : S \to A$, где A — объект категории C. Морфизмы категории (S, C) определяются как такие морфизмы $A \to B$ категории C, что для данных объектов $S \to A$ и $S \to B$ категории (S, C) диаграмма



коммутативна. Произведение морфизмов определяется естественным образом. Левый нуль $f_S\colon S \to F(S)$ категории (S, C) называется **свободным объектом категории** C **над множеством** S. Из единственности левого нуля в категории вытекает, что если $F_1(S)$ и $F_2(S)$ — два объекта категории C, свободные над S, то существует единственная эквивалентность $F_1(S) \to F_2(S)$ в категории C, для которой диаграмма



коммутативна.

Функтор свободы

$$F \begin{cases} \text{SETS} \rightsquigarrow C \\ S \mapsto F(S) \end{cases}$$

определяется как ковариантный функтор, переводящий каждое множество S в объект $F(S)$ категории C, свободный над S, а каждое отображение $h : S \to T$ множеств в единственный морфизм

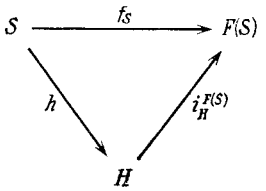
$$F(h)\colon F(S) \to F(T),$$

определенный свободным объектом $f_S\colon S \to F(S)$ и условием $F(h) f_S = f_T h$. Это определение предполагает существование свободных объектов для каждого множества S.

2.7. Предложение о функторе свободы. *Пусть C — категория, для которой функтор свободы F: SETS $\rightsquigarrow C$ существует.*

2.7.1. *Тогда для любого ординального числа α функтор F индуцирует унивалентный функтор на подкатегории категории* SETS, *состоящей из всех множеств мощности $\leqslant \aleph_\alpha$, в том и только в том случае, когда C содержит объект мощности, не меньшей чем $\aleph_\alpha$. В частности, $f_S : S \to F(S)$ является вложением в том и только том случае, когда $|S| \leqslant |X|$ для некоторого объекта X категории C. Таким образом, функтор F: SETS $\rightsquigarrow C$ унивалентен, если категория C содержит объекты сколь угодно большой мощности.*

2.7.2. *Если диаграмма*



где H — объект категории C и $i_H^{F(S)}$ — отображение включения множеств, коммутативна, то $H = F(S)$, т. е. f_S: $S \to F(S)$ не пропускается через вложение $H \to F(S)$ ни для какого объекта $H \neq F(S)$.

Доказательство 2.7.1. Покажем сначала, что отображение f_S: $S \to F(S)$ является вложением тогда и только тогда, когда мощность множества S меньше мощности некоторого объекта X категории C. В одну сторону это утверждение очевидно, так как если f_S — вложение, то $|S| \leqslant |F(S)|$. Пусть категория C содержит объект X мощности $\geqslant |S|$. Тогда если h: $S \to X$ — вложение, то существует морфизм t: $F(S) \to X$, такой, что $tf_S = h$. Из того что h — вложение, следует, что f_S — вложение.

Пусть теперь категория C содержит объект мощности, не меньшей чем $\aleph_\alpha$, а S и T — множества мощности $\leqslant \aleph_\alpha$. Пусть, далее, h_1, h_2: $S \to T$ — такие отображения, что $F(h_1) = F(h_2)$. Тогда

$$f_T h_1 = F(h_1) f_S = F(h_2) f_S = f_T h_2.$$

Так как f_T — вложение, то $h_1 = h_2$.

Если же категория C не содержит объектов мощности $\geqslant \aleph_\alpha$, а T — множество мощности $\aleph_\alpha$, то f_T: $T \to F(T)$ по доказанному не может быть вложением. Значит, существуют такие различные отображения h_1, h_2: $S \to T$, что $f_T h_1 = f_T h_2$. При этом, очевидно, можно считать, что $|S| \leqslant \aleph_\alpha$. По определению свободного объекта существует единственный морфизм g: $F(S) \to F(T)$, такой, что $gf_S = f_T h_1$. Значит, $F(h_1) = F(h_2)$, т. е. функтор F не унивалентен. Этим доказано 2.7.1.

Доказательство 2.7.2. Существует морфизм g: $F(S) \to H$, такой, что $gf_S = h$. Поэтому

$$i_H^{F(S)} g f_S = i_H^{F(S)} h = f_S.$$

Отсюда следует, что $i_H^{F(S)} g = 1_{F(S)}$, поскольку $1_{F(S)}$ — единственный морфизм p: $F(S) \to F(S)$, для которого $pf_S = f_S$. Следовательно, отображение $i_H^{F(S)}$ сюръективно и, значит, $H = F(S)$. □

2.8. Теорема. *Если S — непустое множество, то существует свободный моноид*

$$f_S \begin{cases} S \to F(S) \\ s \mapsto (s), \end{cases}$$

где $F(S)$ — множество всех конечных последовательностей $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов множества S, (s) — последовательность длины 1, умножение в $F(S)$ определяется условием

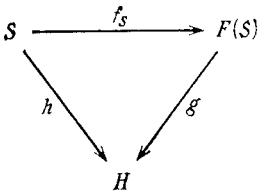
$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m),$$

а пустая последовательность E служит единицей моноида $F(S)$. Отображение $f_S : S \to F(S)$ инъективно, и $\operatorname{im} f_S$ порождает $F(S)$.

Доказательство. Если $h : S \to H$ — отображение множества S в моноид H, то

$$g \begin{cases} F(S) \to H \\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto h(a_1) \ldots h(a_n) \end{cases}$$

— единственный гомоморфизм, такой, что диаграмма



коммутативна. Последнее утверждение есть следствие предложения 2.7.2 о функторе свободы. □

2.9. Теорема о свободной группе. *Для каждого множества S существует свободная группа f_S: $S \to F(S)$, называемая* ***свободной группой над множеством*** *S. Отображение f_S инъективно, и $\operatorname{im} f_S$ порождает группу $F(S)$.* ***Ранг*** *свободной группы $F(S)$ определяется* [1]) *как мощность множества S.*

[1]) Ранг единствен. См. упр. 8 в конце главы.

Доказательство (Шевалле [56, стр. 40]). Пусть S' — множество, эквивалентное множеству S при отображении $a \mapsto a'$, и f_0: $S \coprod S' \to M$ — свободный моноид над свободным объединением множеств S и S'. Обозначим через X множество всех гомоморфных наложений p_Q: $M \to Q$, где Q — моноид, такой, что для всех $a \in S$ элемент $p_Q(f_0(a))$ обратим в Q и

$$(p_Q(f_0(a)))^{-1} = p_Q(f_0(a')). \tag{1}$$

Так как M — подполугруппа, порожденная образом отображения f_0 (теорема 2.8) (это означает, что каждый элемент из M представляется в виде произведения элементов из $\operatorname{im} f_0$), то каждый элемент из Q представляется в виде произведения элементов из образа отображения $p_Q f_0$. Из условия (1) тогда следует, что Q — группа. Но тогда и прямое произведение $P = \prod_{p_Q \in X} Q$ также является группой. Обозначим через g: $M \to P$ произведение семейства эпиморфизмов $\{p_Q\}$, через w_Q — каноническую проекцию $P \to Q$, где p_Q пробегает множество X, через F — образ отображения g и через $f : S \to F$ — отображение, индуцированное ограничением отображения gf_0 на S. Так как элемент

$$w_Q(g(f_0(a)) = p_Q(f_0(a))$$

является обратным для элемента, полученного заменой a на a' в этом выражении, то

$$g(f_0(a')) = g(f_0(a))^{-1}.$$

Поскольку образ отображения $f = gf_0$ порождает F, то это показывает, что F — тоже группа. Пусть H — любая группа и s: $S \to H$ — отображение. Тогда s можно продолжить до отображения s_0: $S \coprod S' \to H$, положив

$$s_0(a') = s_0(a)^{-1} = s(a)^{-1}.$$

Значит, существует единственный гомоморфизм h: $M \to H$ свободного над $S \coprod S'$ моноида M, такой, что $hf_0 = s_0$. Обозначим через Q образ гомоморфизма h, и пусть p_Q: $M \to Q$ — индуцированное наложение моноидов. Так как $s_0(a') = s_0(a)^{-1}$ для любого $a \in S$, то

$$p_Q(f_0(a')) = p_Q(f_0(a))^{-1}$$

и, значит, $Q \in X$. Кроме того, если t означает ограничение отображения $1_Q w_Q$ на F, то t: $F \to H$ — единственный такой гомоморфизм, что $tf = s$. □

2.10. Теорема о свободной абелевой группе. *Функтор свободы*

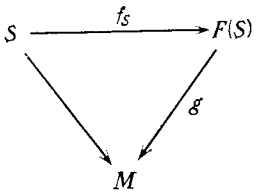
$$\begin{cases} \text{SETS} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ S \longmapsto \mathbb{Z}^{(S)} \end{cases}$$

существует, и для каждого $t \in S$ функция $f_S(t)$ переводит t в 1, а $s \neq t$ — в 0.

Доказательство. Если f: $S \to A$ — отображение множества S в абелеву группу A, то существует единственный гомоморфизм g: $\mathbb{Z}^{(S)} \to A$, такой, что $gf_S = f$. □

2.11. Предложение и определение.

2.11.1. *Если S — множество образующих группы (моноида) M, то существует единственное наложение g: $F(S) \to M$ свободной группы (свободного моноида) $F(S)$, такое, что диаграмма*



где $S \to M$ — естественное вложение, коммутативна.

2.11.2. *Если M — группа и ядро K наложения g является нормальной подгруппой, порожденной множеством $\{r_i\}_{i \in I}$, то говорят, что M — группа с* ***системой образующих*** *S и* ***определяющими соотношениями*** *$\{r_i = 1\}_{i \in I}$. Если в этом случае обозначить через Δ множество определяющих соотношений, то пару $(S \mid \Delta)$ называют* ***представлением*** *группы M* [1]). *Если $K = 1$, то говорят, что группа M* ***свободно порождена*** *множеством S.* □

2.12. Упражнения.

2.12.1. Циклическая группа порядка 6 имеет образующие x, y и определяющие соотношения $x^2 = 1$, $y^3 = 1$ и $x^{-1}y^{-1}xy = 1$. Группа с представлением $\{x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1\}$ бесконечна.

2.12.2. Найти множество образующих свободной абелевой группы над множеством S.

2.12.3. Найти множество образующих и определяющих соотношений для группы диэдра D_n, группы кватернионов и каждой из групп, встречавшихся в тексте до сих пор (см. упр. к гл. 1).

[1]) В теории групп термин «представление» обычно употребляется в другом смысле.— *Прим. ред.*

2.12.4. Бесконечная циклическая группа является образующим категории групп. Найти образующие для других категорий.

2.12.5. Группа M изоморфна свободной группе над множеством S в том и только том случае, когда M — группа, свободно порожденная множеством S.

2.12.6. (**Группа слов.**) Пусть S — множество, которое для удобства мы будем считать конечным: $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, а $S' = \{a_1', \ldots, a_n'\}$ — множество, не пересекающееся с S. Через X обозначим их свободное объединение, $X = S \coprod S'$. Образуем множество F всех **слов** (в алфавите X), т. е. всех конечных последовательностей $b_1 b_2 \ldots b_t$, где $b_i \in X$, $i = 1, \ldots, t$. Пустое слово обозначим через 1. Слово называется **редуцированным**, если ни равенство $b_{i+1} = b_i'$ ни $b_i = b_{i+1}'$ не выполняется ни для какой пары рядом стоящих букв $b_i b_{i+1}$. Два слова w_1 и w_2 будем называть **родственными**, если они имеют следующий вид: w_1 равно $ua_ja_j'v$ или $ua_j'a_jv$, а $w_2 = uv$ для некоторого j и слов $u, v \in F$. Наконец, два слова u и v будем называть **эквивалентными**, если существует последовательность слов $w_1, \ldots, w_m$, такая, что w_i, w_{i+1} — родственные слова для любого $i \leqslant m - 1$, $w_1 = u$, а $w_m = v$. Доказать, что класс $[w]$ слов, эквивалентных данному слову w, содержит в точности одно редуцированное слово. Доказать, что множество W классов эквивалентных слов образует группу относительно операции $[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$. Группа W называется **группой слов** в алфавите S. Доказать, что отображение $S \to W$, переводящее s в $[s]$ для любого $s \in S$, является свободной группой над множеством S.

Другие упражнения о свободных группах приведены в конце этой главы.

Произведение и копроизведение

Пусть C — любая категория, I — подмножество универсума, $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство объектов категории C. Рассмотрим категорию, объектами которой являются семейства $\{p_i: A \to A_i\}_{i \in I}$ морфизмов категории C. Морфизм из $\{p_i: A \to A_i\}_{i \in I}$ в $\{f_i: B \to A_i\}_{i \in I}$ определим как такой морфизм $h: A \to B$ категории C, для которого $f_i h = p_i$ для всех $i \in I$. Правый нуль $\{p_i: A \to A_i\}_{i \in I}$ этой категории называется **произведением** семейства $\{p_i: A \to A_i\}_{i \in I}$ морфизмов и обозначается через $\prod\limits_{i \in I} A_i$. Когда мы пишем $\prod\limits_{i \in I} A_i$, то имеется в виду семейство морфизмов $p_i: \prod\limits_{i \in I} A_i \to A_i$ [1]). Морфизм p_i называется i-й **проекцией произведения**. Иногда мы будем называть произведением семейства

[1]) Точнее, имеется в виду объект $\prod A_i$ и семейство морфизмов p_i. — *Прим. ред.*

объектов $\{A_i \mid i \in I\}$ объект $\prod\limits_{i \in I} A_i$, имея в виду фиксированные проекции. Для любого семейства морфизмов $\{f_i: B \to A_i\}$ единственный морфизм $h: B \to \prod\limits_{i \in I} A_i$, такой, что $f_i = p_i h$, обозначается через $\prod\limits_{i \in I} f_i$ и называется **произведением морфизмов** $\{f_i\}_{i \in I}$. Если $A_i = A$ для всех $i \in I$, то такое произведение $\coprod\limits_{i \in I} A_i$ будем обозначать через A^I. Тогда морфизм $f^I: B \to A^I$ означает произведение морфизмов $\prod\limits_{i \in I} f_i$, где через $f_i: B \to A$ для всех i обозначен один и тот же морфизм f. В этом случае определяется **диагональный морфизм**

$$\Delta: A \to A^I$$

как такой морфизм, что $p_i \Delta = 1_A$ для всех $i \in I$ [1]). Диагональный морфизм является мономорфизмом.

Копроизведение $\coprod\limits_{i \in I} A_i$ определяется дуально. Если копроизведение существует и $\{g_i: A_i \to B\}$ — любое семейство морфизмов, то единственный морфизм $k: \coprod\limits_i A_i \to B$, такой, что $k u_i = g_i$ для всех i [2]), называется **копроизведением морфизмов** $\{g_i\}$. Если $A_i = A$ для всех $i \in I$, то копроизведение обозначается через $A^{(I)}$, а копроизведение морфизмов $\coprod\limits_{i \in I} g_i$, где $g_i = g$ для любого $i \in I$, — через $g^{(I)}: A^{(I)} \to B$. Дуально диагональному морфизму вводится **кодиагональный морфизм** $\nabla: A^{(I)} \to A$, определяемый как копроизведение $1_A^{(I)}$, т. е. $\nabla u_i = 1_A$ для всех $i \in I$. Кодиагональный морфизм является эпиморфизмом.

Произведение конечного семейства $A_1, \ldots, A_n$ обозначается через

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{или} \quad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

в то время как

$$\coprod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{или} \quad A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

означает копроизведение. В этом случае для морфизмов $f_i: B \to A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ через

$$(f_1, \ldots, f_n): B \to A_1 \times \ldots \times A_n$$

[1]) То есть $\Delta = 1_A^I$. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь $u_i: A_i \to \coprod\limits_{i \in I} A_i$. — *Прим. ред.*

будем обозначать произведение морфизмов, а для $g_i\colon A_i \to B$ $(i = 1, \ldots, n)$ через

$$(g_1 \oplus \ldots \oplus g_n)\colon A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \to B$$

их копроизведение (или прямую сумму). Если в первом случае $A_i = A$ и $f_i = f$ $(i = 1, \ldots, n)$, то A^n или $A \times \ldots \times A$ будет означать произведение; аналогично, $A^{(n)}$ или $A \oplus \ldots \oplus A$ будет означать копроизведение. Если $f_i = f$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $f^n : B \to A^n$ означает произведение морфизмов. Аналогично, $g^n\colon A^n \to B$ означает копроизведение морфизмов, когда $g_i = g$ $(i = 1, \ldots, n)$. Термин **конечное произведение** (или копроизведение) означает произведение (или копроизведение) конечного семейства морфизмов [1]).

$I \times J$-**матрицей** над множеством S называют отображение $f\colon I \times J \to S$. Если положить $f(i, j) = f_{ij}$, то (f_{ij}) также будет обозначать матрицу f. Таким образом, матрица есть просто элемент множества $S^{I \times J}$. Если S содержит два различных элемента 0 и 1, то **дельта Кронекера** — матрица $\delta\colon I \times I \to S$, такая, что $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

2.13. Предложение и определение. *Пусть C — категория с нулем.*

2.13.1. *Если $\{p_i\colon A \to A_i\}$ — произведение в категории C, то $p_i\colon A \to A_i$ — ретракция и существуют коретракции $u_i\colon A_i \to A$, которые однозначно определяются соотношениями*

$$p_i u_j = \delta_{ij} 1_{A_i}$$

для любых $i, j \in I$ [2]).

2.13.2. *Дуально, если $\{u_i\colon A_i \to A\}$ — копроизведение, то u_i — коретракция и существуют однозначно определенные ретракции $p_i\colon A \to A_i$, такие, что*

$$p_i u_j = \delta_{ij} 1_{A_i}$$

для любых $i, j \in I$.

В любом из этих случаев мы будем говорить, что A — ***произведение (копроизведение) с каноническими инъекциями u_i и проекциями p_i***, *$i \in I$, и что $A_i \xrightarrow{u_i} A \xrightarrow{p_j} A_j$ есть* ***представление объекта A в виде произведения (копроизведения)***.

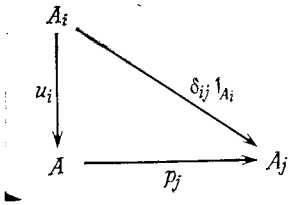
[1]) Пожалуй, нагляднее говорить о произведении (или копроизведении) конечного семейства объектов.— *Прим. ред.*

[2]) Точнее,

$$p_i u_j = \begin{cases} 0 \in \mathrm{Mor}_C(A_j, A_i), & \text{если } i \neq j, \\ 1_{A_i}, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

То же относится к п. 2.13.2.— *Прим. ред.*

Доказательство. Для каждого $i \in I$ существует единственный морфизм $u_i\colon A_i \to A$, такой, что для любого $j \in I$ диаграмма



коммутативна. Так как $p_i u_i = 1_{A_i}$, то p_i (u_i) является (ко)ретракцией. Утверждение 2.13.2 доказывается двойственным образом. □

2.14. Предложение о матрице. *Пусть $\{A_j\}_{j \in J}$ и $\{B_i\}_{i \in I}$ — семейства объектов категории C. Если $f\colon \coprod_{j \in J} A_j \to \prod_{i \in I} B_i$, то для любых $i \in I$, $j \in J$ морфизм*

$$p_i f u_j\colon A_j \to B_i,$$

определяемый инъекциями u_j объектов в копроизведение и проекциями p_i произведения на объекты B_i, называется ***координатным морфизмом*** *и представляет собой элемент множества $\mathrm{Mor}_C(A_j, B_i)$, обозначаемый через f_{ij}. Матрица (f_{ij}), представляющая собой отображение $I \times J \to \bigcup_{(i, j) \in I \times J} \mathrm{Mor}_C(A_j, B_i)$, есть элемент декартова произведения*

$$\bigtimes_{(i, j) \in I \times J} \mathrm{Mor}_C(A_j, B_i).$$

Отображение

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Mor}_C\left(\coprod_{j \in J} A_j, \prod_{i \in I} B_i\right) \to \bigtimes_{(i, j) \in I \times J} \mathrm{Mor}_C(A_j, B_i) \\ f \mapsto (f_{ij}) \end{array} \right.$$

биективно. Если C содержит нуль, то существует морфизм

$$\delta\colon \coprod_{j \in I} A_j \to \prod_{i \in I} A_i,$$

такой, что δ есть дельта Кронекера, т. е. $\delta_{ii} = 1_{A_i}$ и $\delta_{ij} = 0$, когда $i \neq j$. Копроизведение называется ***бипроизведением***, *если δ — эквивалентность.*

Доказательство. Два морфизма f и g равны в том и только в том случае, когда для любых $i, j \in I$ они имеют равные координатные морфизмы $f_{ij} = g_{ij}$. Остальное оставляем в качестве упражнения. □

Матрица $f: I \times J \to S$ в аддитивный моноид S называется **конечно-строчной**, если подмножество множества I, состоящее из всех i, для которых существует j, такое, что $f_{ij} \neq 0$, конечно, т. е. если существует только конечное число $i \in I$, для которых (i, j) лежит в носителе отображения f. **Конечно-столбцовая** матрица определяется дуально. (См. 2.17.4.)

Если S — моноид, то каждый элемент $a \in S$ определяет матрицу

$$\operatorname{diag}(a): I \times I \to S,$$

такую, что $\operatorname{diag}(a) = (a\delta_{ij})$, называемую **диагональной матрицей.** Отображение $S \to S^{I \times I}$, переводящее $a \mapsto \operatorname{diag}(a)$, является гомоморфным вложением.

2.15. Предложение и определение. *Пусть C — категория с нулем, $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство объектов категории C и $I = \coprod_{k\in K} I_k$ — свободное объединение множеств.*

2.15.1. *Для каждого $k \in K$ пусть $\{p_{kj}: B_k \to A_j\}_{j\in I_k}$ — произведение и $\{t_k: B \to B_k\}_{k\in K}$ — тоже произведение. Тогда $\{p_{kj}t_k: B \to A_j\}_{j\in I_k,\, k\in K}$ — произведение семейства $\{A_i\}_{i\in I}$. Следовательно, если $\prod_{i\in I} A_i$ — любое произведение этого семейства, то существует эквивалентность*

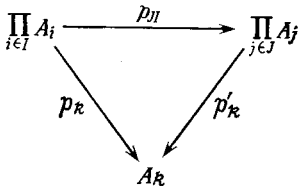
$$\coprod_{i\in I} A_i \approx \coprod_{k\in K} \Big(\coprod_{j\in I_k} A_j\Big).$$

2.15.2. *Двойственным образом,*

$$\prod_{i\in I} A_i \approx \prod_{k\in K} \Big(\prod_{j\in I_k} A_j\Big).$$

2.15.3. *Если J — подмножество множества I и если написанные ниже произведения существуют, то существует эпиморфизм p_{JI}, называемый* ***канонической проекцией****, такой, что диаграмма*

(1)



коммутативна для каждого $k \in J$, где p'_k и p_k — проекции. Двойственным образом, существует мономорфизм

$$u_{IJ}: \coprod_{j\in J} A_j \to \coprod_{i\in I} A_i,$$

называемый ***канонической инъекцией.***

Доказательство 2.15.1. Если $j \in I$, то $j \in I_k$ для некоторого k. Положим $p'_j = p_{kj} \cdot t_k$. Если $\{f_i: X \to A_i\}_{i\in I}$ — семейство морфизмов, то для каждого $k \in K$ существует произведение морфизмов $F_k = \coprod_{j\in I_k} f_j$. Здесь $F_k: X \to B_k$, и тогда существует произведение морфизмов $F = \coprod_{k\in K} F_k$, причем $F: X \to B$. Ясно, что $\{p'_i: B \to A_i\}_{i\in I}$ есть произведение $\coprod_{i\in I} A_i$, а $F = \coprod_{i\in I} f_i$. Так как любые два произведения одного и того же семейства эквивалентны, то

$$\coprod_{i\in I} A_i \approx \coprod_{k\in K} \Big(\coprod_{j\in I_k} A_j\Big),$$

что и требовалось.

Доказательство 2.15.3. Пусть $p_k: \coprod_{i\in I} A_i \to A_k$ и $p'_k: \coprod_{j\in J} A_j \to A_k$ — проекции. Тогда существуют морфизмы $p_{JI}: \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{j\in J} A_j$ и $q: \coprod_{j\in J} A_j \to \coprod_{i\in I} A_i$, такие, что $p'_k p_{JI} = p_k$ и $p_k q = p'_k$ для всех $k \in J$. Отсюда $p'_k p_{JI} q = p'_k = p'_k 1_{\prod A_j}$ и, следовательно, $p_{JI} q = 1_{\prod A_j}$. Таким образом, p_{JI} — ретракция и, согласно 2.5.2, эпиморфизм. □

2.16. Примеры произведений и копроизведений.

2.16.1. В категории множеств семейство проекций $\{\prod_{i\in I} X_i \to X_i\}_{i\in I}$ декартова произведения семейства множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ является произведением, а семейство инъекций $\{X_i \to \coprod_{i\in I} X_i\}_{i\in I}$ в свободное объединение множеств — копроизведением. (См. предложения 17 и 19 теоретико-множественного введения.)

2.16.2. В категории групп семейство проекций $\{\prod_{i\in I} X_i \to X_i\}_{i\in I}$ прямого произведения семейства групп является произведением. В категории групп существует и копроизведение $\{X_i \to \coprod_{i\in I} X_i\}$. (В математической литературе оно также называется свободным произведением.) Если $f_S: S \to F(S)$ — свободная группа над множеством S, то $\{(f_S(t)) \to F(S)\}_{t\in S}$ — копроизведение. Здесь $(f_S(t))$ — циклическая группа, порожденная элементом $f_S(t)$ в группе $F(S)$. Таким образом, в другой терминологии, если F — группа, свободно порожденная множеством S, то семейство вложений $\{(t) \to F\}_{t\in S}$ — копроизведение в категории групп. [Это часто выражают следующим образом: свободная группа есть копро-

изведение бесконечных циклических групп. Доказательство существования произвольных копроизведений аналогично доказательству существования произвольных свободных групп; его мы оставляем любознательному читателю (см. 2.17.1).]

2.16.3. В категории mod-$\mathbb{Z}$ семейство инъекций в прямую сумму является копроизведением.

2.17. Упражнения.

2.17.1. Если $\{S_i\}_{i\in I}$ — семейство групп, где S_i порождается множеством X_i с определяющими соотношениями Δ_i, а F — группа, порожденная множеством $X = \coprod_{i\in I} X_i$ с определяющими соотношениями $\coprod_{i\in I} \Delta_i$, где знак $\coprod$ означает свободное объединение множеств, то для любого $i \in I$ группа $S_i = (X_i)$ есть подгруппа группы F, а семейство вложений $\{S_i \to F\}_{i\in I}$ является копроизведением в категории GROUPS. Более общим образом: когда копроизведение «циклических» объектов (s), каждый из которых порожден элементом $s \in S$, будет свободным над S объектом $F(S)$?

2.17.2. Показать, что $\mathbb{Z}$ — образующий в категории GROUPS.

2.17.3. Показать, что в категории моноидов существуют произвольные копроизведения.

2.17.4. Если $(f_{ij})\colon I \times J \to S$ — матрица над аддитивной полугруппой, то $S^{I\times J}$ — аддитивная полугруппа относительно сложения матриц $S^{I\times J} \times S^{I\times J} \to S^{I\times J}$:

$$(f_{ij}) + (g_{ij}) = (f_{ij} + g_{ij}).$$

(Это операция в прямом произведении $S^{I\times J}$. Таким образом, $S^{I\times J}$ является абелевой полугруппой или группой, или моноидом, если S такова.) Если S — к тому же мультипликативная полугруппа, а K — другое множество, определим умножение матриц

$$S^{I\times J} \times S^{J\times K} \to S^{I\times K},$$

положив $(f_{ij})(g_{ij}) = (h_{ij})$ в том случае, когда сумма

$$h_{ik} = \sum_{j\in J} f_{ij} g_{jk}$$

определена или конечна [например, когда (f_{ij}) — конечно-строчная или (g_{ij}) — конечно-столбцевая матрица]. При каких условиях на S множество $S^{I\times J}$ или множество конечно-строчных, или конечно-столбцевых матриц является (полугруппой) моноидом относительно матричного умножения?

2.17.5. (a) Для любых категорий C и L постоянный функтор

$$c_{C,L}\begin{cases} C \rightsquigarrow \mathrm{Funct}(L, C) \\ A \mapsto c(A) \end{cases}$$

вполне унивалентен. Здесь $c(A)(B) = A$ и $c(A)(f) = 1_A$ для любого объекта $B \in L$ и любого морфизма $f : B \to B'$ категории L.

(b) Если F — объект категории $\mathrm{Funct}(L, C)$, а $\overleftarrow{F}$ — объект категории C, такой, что для каждого A существует вложение $\mathrm{Mor}_C(A, \overleftarrow{F}) \to [c(A), F]$, естественное по переменным A и F, то $\overleftarrow{F}$ называется **пределом** функтора F. Объект Y категории C называется **пределом**, если $Y \approx \overleftarrow{F}$ для некоторого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$. Двойственным образом определяется **копредел**. Показать, что в любой категории произведение $\coprod_{i\in L} X_i$ является пределом функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$, такого, что $F(i) = X_i$. Показать, что правый нуль есть предел пустого функтора. Показать, что в категории модулей mod-R над произвольным кольцом R ядра и пересечения являются пределами. Изучить функторы, «сохраняющие пределы», и доказать, что

$$h^A\colon \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$$

сохраняет пределы для каждого объекта A категории mod-R.

(c) Показать, что в порядковой категории C для любого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$ имеет место равенство

$$\overleftarrow{F} = \inf_{X\in \mathrm{Obj}\, L} \{F(X)\}.$$

Вывести отсюда, что в порядковой категории C пределы, пересечения и произведения совпадают, т. е. что семейство морфизмов

$$\{\inf\{A_i\}_{i\in I} \to A_i\}_{i\in I}$$

является произведением в категории C.

За определениями сопряженных слева и справа функторов в следующих упражнениях обратитесь к гл. 5.

2.17.6. Сопряженный справа (слева) к постоянному функтору $C \rightsquigarrow \mathrm{Funct}(L, C)$ называется **предельным функтором или функтором предела**

$$\lim\colon \mathrm{Funct}(L, C) \rightsquigarrow C$$

(соотв. **копредельным функтором или функтором копредела**). Показать, что

$$\lim\colon \mathrm{Funct}(L, C) \rightsquigarrow C$$

существует в том и только том случае, когда для каждого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$ существует $\overleftarrow{F}$, и что тогда существует эквивалентность $\lim F \approx \overleftarrow{F}$, естественная по F.

*2.17.7. Доказать, что функтор предела

$$\lim\colon \mathrm{Funct}(L, C) \rightsquigarrow C$$

сохраняет пределы.

*2.17.8. Функтор свободы SETS $\rightsquigarrow C$ сопряжен слева к забывающему функтору (или функтору включения) $C \rightsquigarrow$ SETS.

*2.17.9. Функтор свободы SETS $\rightsquigarrow C$ сохраняет копределы, в частности копроизведения [ср. 2.17.5(а) и 2.17.7].

Коммутирующие гомоморфизмы и строение прямой суммы

Два гомоморфизма $h\colon X \to S$ и $g\colon Y \to S$ в моноид S называются **коммутирующими**, если

$$h(x)\, g(y) = g(y)\, h(x)$$

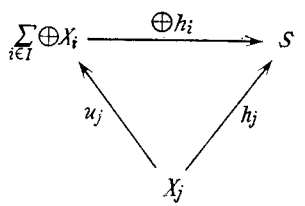
для любых $x \in X$, $y \in Y$. Семейство гомоморфизмов $\{h_i\colon X_i \to S\}_{i\in I}$ в моноид S называется коммутирующим, если для всех $i \neq j$ гомоморфизмы h_i и h_j коммутируют. Таким образом, канонические инъекции

$$u_k\colon X_k \to \sum_{i\in I} \oplus X_i$$

являются коммутирующими. Если каждое X_i — подмоноид моноида S и если вложения $\{X_i \to S\}_{i\in I}$ коммутируют, то $\{X_i\}_{i\in I}$ образуют множество **коммутирующих подмоноидов.** (Это ничего не говорит об умножении в каждом из X_i, которое может быть и некоммутативным.) **Прямая сумма** семейства $\{h_i\colon X_i \to S\}$ коммутирующих гомоморфизмов определяется как единственное отображение

$$\sum_{i\in I} \oplus X_i \xrightarrow{\oplus h_i} S,$$

такое, что диаграмма



коммутативна для любого $j \in I$.

2.18. Предложение. *Если $\{X_i\}$ — семейство коммутирующих подмоноидов аддитивного моноида S, то множество $\sum_{i\in I} X_i$, состоящее из всех элементов моноида S, которые могут быть записаны*

в виде (конечной) суммы

$$s = \sum_{j=1}^{t} s_{i_j} = s_{i_1} + \ldots + s_{i_t},$$

где t зависит от s, $i_j \in I$, а $s_{i_j} \in X_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$, является подмоноидом моноида S, называемым суммой подмоноидов $\{X_i\}_{i\in I}$. Если S — группа и $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство ее коммутирующих подгрупп, то $\sum_{i\in I} X_i$ является образом прямой суммы включений $\{X_i \to S\}_{i\in I}$ и представляет собой подмоноид группы S, порожденный множеством $\bigcup_{i\in I} X_i$.

Если S — группа и $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство ее коммутирующих подгрупп, то $\sum_{i\in I} X_i$ — тоже группа.

Доказательство. Ясно, что $\sum_{i\in I} X_i$ — моноид, порожденный объединением множеств X_i. В частности, $\sum_{i\in I} X_i$ содержится в образе T прямой суммы включений $\{X_i \to S\}_{i\in I}$. С другой стороны, каждый элемент из T представляет собой конечную сумму элементов из различных X_i. Значит, $T = \sum_{i\in I} X_i$. В том случае, когда S и все X_i являются группами, прямая сумма $\sum_{i\in I} \oplus X_i$ — тоже группа, и тогда образ $T = \sum_{i\in I} X_i$ прямой суммы указанных включений также будет группой. □

2.19. Предложение о строении прямой суммы.

2.19.1. *Следующие условия* (А) *и* (В) *для множества $\{X_i\}_{i\in I}$ подмоноидов аддитивного моноида S эквивалентны:*

(А) *$\{X_i\}_{i\in I}$ — коммутирующее семейство, и прямая сумма включений $\{X_i \to S\}_{i\in I}$ является изоморфизмом.*

(В) *$\{X_i\}_{i\in I}$ — коммутирующее семейство подмоноидов, каждый из которых содержит 0, и каждый элемент $s \in S$ единственным образом представляется в виде конечной суммы*

$$s = s_{i_1} + s_{i_2} + \ldots + s_{i_t},$$

где t зависит от s, $i_j \in I$ и $s_{i_j} \in X_{i_j}$ для всех $j = 1, \ldots, t$.

2.19.2. *Если условия* (А) *и* (В) *выполнены, то*

(С) *$\{X_i\}_{i\in I}$ — коммутирующие моноиды, такие, что $S = \sum_{i\in I} X_i$ и для любого $i \in I$*

$$X_i \cap \sum_{j\in I-\{i\}} X_j = 0.$$

2.19.3. *Если S и все X_i являются группами, то и, обратно, из условия* (С) *вытекают условия* (А) *и* (В).

Доказательство 2.19.1. (A) $\Rightarrow$ (B). Поскольку указанная прямая сумма отображений является по условию изоморфизмом, достаточно доказать утверждение (B) для прямой суммы и семейства $\{X_i'\}_{i\in I}$, где X_i' — образ моноида X_i при канонической инъекции u_i. Ясно, что u_i переводит единицу моноида X_i в 0. Значит, 0 является единицей моноида X_i' для каждого $i \in I$. Далее, если f — элемент прямой суммы, то

$$f = \sum_{i\in I} u_i (f(i)) = \sum_{i\in I} u_i p_i f,$$

где для любого $i \in I$ через p_i обозначена каноническая проекция прямой суммы. (Ср. с 2.14.) Сумма конечна, поскольку f имеет конечный носитель. Функции, стоящие в левой и правой частях равенства, совпадают, поскольку на произвольном элементе $k \in I$ каждая из них равна $f(k)$. Отсюда также следует единственность представления f в виде конечной суммы

$$f = \sum_{i\in I} f_i',$$

где $f_i' \in X_i'$ для любого $i \in I$, так как $f_i' = u_i (f(i))$ для любого $i \in I$.

(B) $\Rightarrow$ (A). Для любого $i \in I$ через $h_i\colon X_i \to S$ обозначим включение. Пусть f и g — элементы прямой суммы, такие, что

$$\bigoplus_{i\in I} h_i (f) = \sum_{i\in I} f(i) = \sum_{i\in I} g(i) = \bigoplus_{i\in I} h_i (g).$$

Так как $f(i)$ и $g(i)$ — элементы полугруппы X_i, то из единственности представления элемента

$$\bigoplus_{i\in I} h_i (f) = \bigoplus_{i\in I} h_i (g)$$

в виде конечной суммы элементов из X_i (по одному из каждого X_i) вытекает, что $f(i) = g(i)$ для любого $i \in I$, т. е. что $f = g$. Этим доказано, что прямая сумма отображений $\bigoplus_{i\in I} h_i$ является изоморфизмом.

Доказательство 2.19.2. (B) $\Rightarrow$ (C). Равенство $S = \sum_{i\in I} X_i$ следует из того, что каждый элемент $s \in S$ представляется в виде конечной суммы, указанной в (B). Если элемент $s \in S$ принадлежит пересечению какого-то X_{i_j} с суммой X_{i_k}, где $k \neq j$, то s есть сумма элементов, каждый из которых принадлежит одному из X_{i_k}, $k \neq j$. Для краткости предположим, что $j = 1$, и запишем $s = s_{i_2} + \ldots + s_{i_t}$. Тогда

$$s = 0 + s_{i_2} + \ldots + s_{i_t} = s + 0 + \ldots + 0,$$

что нарушает единственность представления s в виде суммы элементов из X_{i_q}, по одному из каждого X_{i_q}, $q = 1, 2, \ldots, t$, если $s \neq 0$. Это доказывает, что (B) $\Rightarrow$ (C).

Доказательство 2.19.3. (C) $\Rightarrow$ (A). Предположим теперь, что S и все X_i являются группами. Тогда сумма $\sum_{i\in I} X_i$ тоже является группой. Будем применять обозначения из доказательства (B) $\Rightarrow$ (A), и пусть f — элемент из ядра отображения $\bigoplus_{I\in i} h_i$. Тогда для любого $j \in I$ элемент

$$f(j) = -\sum_{k\neq j} f(k)$$

лежит в пересечении группы X_j с суммой групп X_k, $k \neq j$. Из (C) тогда следует, что $f(j) = 0$ для любого $j \in I$, т. е. $f = 0$. Таким образом, ядро прямой суммы отображений равно нулю. Это доказывает, что (C) $\Rightarrow$ (A). □

2.20 Следствие о строении прямой суммы. *Пусть* $\{Y_i\}_{i\in I}$ — *множество моноидов,* $\{u_i\colon Y_i \to \sum_{i\in I}\oplus Y_i\}$ — *канонические инъекции в прямую сумму и* $X_i = \operatorname{im} u_i$ *для всех* $i \in I$. *Тогда прямая сумма включений* $\{X_i \to \sum_{i\in I}\oplus Y_i\}$ *является изоморфизмом.* □

Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ подгрупп абелевой группы называется **независимым**, если каноническое отображение

$$\sum_{i\in I}\oplus X_i \to \sum_{i\in I} X_i$$

является изоморфизмом.

Упражнения к гл. 2

1. В любой категории C, если $\{X \to X_i\}_{i\in I}$ — произведение и если каждый объект X_i инъективен, то и X инъективен. Если C — категория с нулем, то верно и обратное. (Это выражается утверждением: в любой категории с нулем произведение объектов инъективно тогда и только тогда, когда каждый объект инъективен. Дуальное утверждение имеет место для проективных объектов.)

2. Изучить понятие инъективных, проективных, кообразующих объектов и другие категорные понятия для категорий GROUPS и mod-$\mathbb{Z}$ (а также mod-$\mathbb{Z}_n$) и сравнить. (Например, содержит ли GROUPS проективные и инъективные объекты?)

3. Изучить строение $\operatorname{End}_C M$ для фиксированного объекта M для различных категорий C = mod-$\mathbb{Z}$, GROUPS, MONOIDS, насколько это возможно по изложенному в тексте.

4.1. Если K — нормальная подгруппа группы G, а A — групп изоморфная группе G/K, то G называется **расширением** группы при помощи группы A. Если Q — подгруппа группы G, такая, ч $G = KQ$ и $K \cap Q = 1$, то G называется **полупрямым произвед нием** группы K на группу Q. (Тогда G — расширение группы при помощи Q.) Следующие условия эквивалентны:

(a) G — полупрямое произведение группы K на некотору подгруппу.

(b) Канонический гомоморфизм $p\colon G \to G/K$ расщепляется.

(c) Существует идемпотентный эндоморфизм $f\colon G \to G$, тако что K — нормальная подгруппа, порожденная множество $\{gf(g^{-1}) \mid g \in G\}$.

Если указанные условия выполнены и отображение $q\colon G/K \to$ таково, что $pq = 1_{G/K}$, то:

(a′) G — полупрямое произведение группы K на $\mathrm{im}\, q$.

(c′) Эндоморфизм $qp\colon G \to G$ обладает свойством, указанны в (c) для гомоморфизма f.

4.2. Группа G порядка pq, где p, q — простые числа и $p >$ является расширением своей силовской p-подгруппы при помощ группы порядка q (гл. 1, упр. 18.)

5. Группа F является свободной группой над некоторым мн жеством S в том и только в том случае, когда каждый эпиморфиз групп $G \to F$ расщепляется, или, что то же самое, если кажд расширение группы K с помощью группы F есть полупрямое пр изведение группы K на некоторую подгруппу.

6. Каждая подгруппа свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^{(S)}$ изо морфна свободной абелевой группе $\mathbb{Z}^{(S')}$, где $|S'| \leqslant |S|$. Вывест отсюда, что $\mathbb{Z}^{(S)} \approx \mathbb{Z}^{(T)}$ тогда и только тогда, когда $|S| = |T|$ т. е. что свободная абелева группа имеет однозначно определенны ранг $|S|$, а каждая ее подгруппа есть свободная группа ранг $\leqslant |S|$. (Ср. упр. 13.)

***7.** (Теорема Нильсона — Шрайера о подгруппе.) Каждая под группа свободной группы изоморфна свободной группе над нек торым множеством S'. Если свободная группа имеет конечный ран n, то подгруппа индекса j является свободной группой ранг $nj - j + 1$.

8. Свободная группа $F(S)$ имеет однозначно определенный ран (Ср. упр. 6 и 11.)

9. Свободная группа над одноэлементным множеством из морфна $\mathbb{Z}$.

10. Центр свободной группы над множеством S мощности, большей 1, совпадает с ее единицей, которая является единственным элементом конечного порядка.

11. Если $f_S\colon S \to F(S)$ — свободная группа, то включение множества $\bar{S}$ левых смежных классов группы $F(S)$ по коммутанту $[F(S), F(S)]$, содержащих элементы из S, в факторгруппу $F(S)/[F(S), F(S)]$ есть свободная абелева группа над этим множеством $\bar{S}$, изоморфная группе $\mathbb{Z}^{(S)}$. Кроме того, для любого подмножества T множества S группа, порожденная множеством S с определяющими соотношениями $\{t = 1\}_{t \in T}$, есть свободная группа над множеством содержащих элементы из S левых смежных классов группы $F(S)$ по нормальной подгруппе, порожденной множеством T.

***12.** Если F — свободная группа ранга >1, то коммутант $[F, F]$ — свободная группа бесконечного ранга.

***13.** Если S — нормальная подгруппа свободной группы F конечного ранга, а факторгруппа F/S конечная, но не циклическая группа, то ранг S больше ранга F.

14. Теорема о подгруппе (упр. 7) утверждает, что любая подгруппа $\neq 1$ свободной группы свободна. Показать, что для подмоноида свободного моноида такая теорема не имеет места. (См. Кон [62].)

Ссылки

См. ссылки в гл. 1, в особенности Басс [73], Букур — Деляну [72], Курош [73], Ленг [68], Митчелл [65], Ротман [65], Фрейд [64], Фукс [74,77], Шевалле [56].

Глава 3

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

В список понятий и тем, которых мы коснемся в этой главе, входят: кольцо, модуль, кольцо эндоморфизмов, кольцо биэндоморфизмов (бицентрализатор) модуля, левый идеал, нильпотентность, простота в категориях (т. е. простые группы, простые модули, простые кольца), представления простых колец полными кольцами линейных преобразований (прелюдия к теореме плотности Шевалле — Джекобсона, доказанной в гл. 19), кольца матриц, дуальные модули, лемма о дуальном базисе для проективных модулей, теорема двойственности для образующих категории mod-R всех правых R-модулей, след модуля, аддитивные категории и функторы, точные последовательности, точные (полуточные) слева (справа) функторы, точность слева основных (hom) функторов h^A: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ и h_A: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ для произвольного объекта A категории mod-R, критерий инъективности Бэра, утверждение, что категория mod-R инъективно богата, существование в ней инъективных кообразующих, вполне унивалентные функторы, идеализаторы, ортогональные идемпотенты и разложения модулей в прямые суммы, вполне инвариантные подмодули, в частности радикал и цоколь.

Вот некоторые из введенных в этой главе понятий: категория RINGS колец, категория R-модулей mod-R для произвольного кольца R, кольцо эндоморфизмов End M_R произвольного R-модуля M и кольцо его биэндоморфизмов[1]) Biend M_R. Объект M категории mod-R сбалансирован, если каноническое отображение $R \to$ Biend M_R сюръективно. [Любой образующий категории mod-R сбалансирован (теорема Мориты 4.1.3).] Категория mod-R содержит произведения, копроизведения и свободные объекты. Свободный объект над множеством I — это прямая сумма (копроизведение) $R^{(I)}$ (предложение 4.9). Кольцо R_n всех $(n \times n)$-матриц канонически изоморфно кольцу эндоморфизмов модуля R^n для любого целого $n > 0$ (ср. 3.33.3). Соответствие идеалов 3.12.2 есть биективное соответствие $I \mapsto \boldsymbol{C}(I)$ между множеством всех идеалов кольца R и множеством классов модулей в категории mod-R, замкнутых относительно фактормодулей, подмодулей и произведений. Следствием этого является тот факт, что эквивалентность категорий mod-R и mod-S для колец R и S влечет за собой изоморфизм структур идеалов колец R и S (ср. инвариант Мориты, 4.31 и далее).

[1]) Во введении к гл. 4 намечены некоторые связи между различными категориями: mod-R, mod-End M_R и mod-Biend M_R.

Здесь же определено понятие абелевой категории и выведен в пп. 3.32—3.38 ряд ее элементарных свойств (см. также гл. 6). Доказывается точность слева основных функторов h_A и h^A для любого объекта A категории mod-R (3.39, ср. соответствующий результат 6.11 для точных аддитивных категорий).

Кроме того, приведен ряд свойств унивалентных функторов (3.49) и доказано существование инъективных кообразующих категории mod-R (3.53). Так, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является инъективным кообразующим в mod-$\mathbb{Z}$, более общо, если K — тело частных области главных правых идеалов R, то K/R — инъективный кообразующий категории mod-R (3.45). Кроме того, модуль характеров $R' = \mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ модуля R является инъективным кообразующим категории mod-R (3.53). Каждый объект M категории mod-R вложим в единственный (с точностью до изоморфизма) минимальный инъективный модуль $\hat{M}$, инъективную оболочку модуля M, причем $\hat{M}$ одновременно является существенным расширением модуля M (3.59). (Соответствующие теоремы для категорий Гротендика установлены в гл. 14.)

Многочисленные упражнения иллюстрируют и обобщают теоремы, доказанные в основном тексте. Некоторые из них в свою очередь являются теоремами, доказанными в других главах, например теорема Веддербёрна — Артина и теорема плотности Джекобсона и Уонга — Джонсона для (квази)инъективных модулей. (Ср. гл. 7 и 8 по поводу первой и гл. 19, особенно п. 19.10, по поводу второй.)

Кольца

Кольцом называется упорядоченная тройка, состоящая из непустого множества R и двух операций, относительно которых R является аддитивной группой и мультипликативным моноидом, удовлетворяющих **законам дистрибутивности**

$$(x + y)\, z = xz + yz,$$
$$z'(x + y) = z'x + z'y,$$

где x, y, z, z' — любые элементы из R. Пусть 0 — нулевой элемент аддитивной группы, а 1 — единичный элемент мультипликативного моноида кольца R. Если R состоит из одного элемента, то $0 = 1$, и в этом случае R называют **нулевым кольцом**. Если R содержит не менее двух элементов, то $0 \neq 1$, так как в силу закона дистрибутивности $0x = x0 = 0$ для всех $x \in R$. Можно проверить такие тождества: **1.** $0x = x0 = 0$; **2.** $(-x)\, y = -(xy) = x\, (-y)$; **3.** $(-x)\, (-y) = xy$.

Кольцо **коммутативно**, если коммутативен его мультипликативный моноид. **Подкольцо** кольца R — это подмножество T, одновременно являющееся подгруппой аддитивной группы и подмоноидом мультипликативного моноида кольца R и такое, что или $T = \{0\}$, или $1 \in T$. Во втором случае T имеет тот же единичный элемент, что и R. В первом случае мы будем писать $T = 0$. Таким образом, подкольцо является кольцом. Группа обратимых элементов мультипликативного моноида кольца R обозначается через $\mathcal{U}(R)$ и называется **группой обратимых элементов** кольца R. **Тело** — это кольцо F, содержащее не менее двух элементов и такое, что любой ненулевой элемент из F обратим. (Таким образом, мы не предполагаем, что тело коммутативно[1]).)

Примеры.

$\mathbb{N}$ — коммутативная полугруппа как относительно сложения, так и относительно умножения, состоящая из всех натуральных чисел.

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ — множество целых чисел — коммутативное кольцо относительно операций сложения и умножения.

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел $a + bi$, где a и b — действительные числа и $i^2 = -1$, относительно операций

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i,$$
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i.$$

$\mathbb{H}$ — тело кватернионов $a + bi + cj + dk$, где a, b, c и d — действительные числа и $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — группа кватернионов. Умножение и сложение определяется аналогично тому, как это делалось для комплексных чисел. (Иначе говоря, в терминологии гл. 5 $\mathbb{H}$ — алгебра над $\mathbb{R}$, порожденная множеством $\{1, i, j, k\}$ с соотношениями группы кватернионов. (См. 5.75.) Аналогично, $\mathbb{C}$ — алгебра над R, порожденная элементами 1, i, удовлетворяющими соотношению $i^2 = -1$.

Центр

Центр кольца R, определяемый как множество

$$\mathscr{C}(R) = \{x \in R \mid xy = yx \forall y \in R\},$$

является подкольцом кольца R. Более общо, если X — непустое подмножество в R, то его централизатор

$$\mathscr{C}_R(X) = \{y \in R \mid xy = yx \ \forall x \in X\}$$

является подкольцом в R.

[1]) Коммутативное тело называется **полем**.— *Прим. перев.*

Гомоморфизм

Отображение колец $f\colon R \to R'$ называется (**кольцевым**) **гомоморфизмом**, если оно является гомоморфизмом как аддитивной группы кольца R, так и его мультипликативного моноида[1]). Таким образом, $\operatorname{im} f$ есть подкольцо кольца R'. Для аддитивных групп R и R' нулевое отображение $R \to R'$ — это такое отображение h, что $h(x) = 0$ для всех $x \in R$. Этот же термин употребляется, когда R и R' — кольца. Таким образом, нулевое отображение колец $R \to R'$ есть кольцевой гомоморфизм, а $f(1) = 1$ для любого ненулевого гомоморфизма $f\colon R \to R'$.

Термины «образ», «ядро», «вложение» и «наложение» для гомоморфизмов колец $f\colon R \to R'$ будут означать то же, что и для гомоморфизмов соответствующих аддитивных групп. **Идеал** кольца R определяется как ядро какого-либо гомоморфизма $f\colon R \to R'$ для некоторого кольца R'. Если $I = \ker f$, то для любых $a, b \in I$, $r \in R$ выполняются условия

(I-1) $$a - b \in I,$$

(I-2) $$ra \in I \text{ и } br \in I.$$

Обратно, пусть I — непустое подмножество в R, удовлетворяющее условиям (I-1) и (I-2). Тогда I — аддитивная подгруппа в R и факторгруппа R/I оказывается кольцом, называемым **факторкольцом кольца R по I**, относительно своей групповой операции и умножения, задаваемого формулой

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Таким образом, канонический групповой гомоморфизм $R \to R/I$ оказывается кольцевым гомоморфизмом, также называемым **каноническим**, и I — его ядро. Тем самым показано, что непустое подмножество I в R есть идеал в том и только том случае, когда выполняются условия (I-1) и (I-2).

Группа $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является коммутативным кольцом, состоящим из n элементов, где $n \in \mathbb{N}$. (Отметим, что $n\mathbb{Z}$ — идеал кольца $\mathbb{Z}$.) Если R — ненулевое кольцо, то отображение, заданное условиями

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \to R \\ n \mapsto n1 = 1 + \ldots + 1 \ (n \text{ слагаемых}), \end{cases}$$

оказывается каноническим кольцевым гомоморфизмом, и его ядром служит идеал $m\mathbb{Z}$ кольца $\mathbb{Z}$, где $m \geqslant 0$ определено однозначно и называется **характеристикой** кольца R. Таким образом, кольцо нулевой характеристики содержит подкольцо, канонически изоморфное кольцу $\mathbb{Z}$. Обычно мы пишем n вместо $n1$, даже когда характеристика кольца не равна нулю.

[1]) См. примечание на стр. 78.— *Прим. ред.*

Кольцо эндоморфизмов

3.1. Предложение и определение. *Если A — аддитивная абелева группа, то* End A *является кольцом относительно умножения и поточечного сложения гомоморфизмов.*

Доказательство. Пусть A — произвольная полугруппа. Тогда

$$(f + g)\,h = fh + gh$$

для любых $f, g, h \in A^A$. Кроме того,

$$f\,(g + h) = fg + fh$$

для любых $f, g, h \in$ End A. Таким образом, End A удовлетворяет законам дистрибутивности, а если A — абелева группа, то абелева и группа A^A, следовательно, End A — аддитивная абелева группа, откуда вытекает, что End A — кольцо[1]). □

3.2. Упражнения.

3.2.1. Показать, что множество всех **гауссовых целых чисел** $a + bi$, где a и b — элементы из $\mathbb{Z}$, образует подкольцо в $\mathbb{C}$. Множество всех выражений $a + bi$, где a и b — элементы из $\mathbb{Q}$, составляет подполе в $\mathbb{C}$. Обобщить на подкольца и подтела тела кватернионов $\mathbb{H}$.

3.2.2. Показать, что если $A \neq 0$ — абелева группа, то End A^2 — некоммутативное кольцо. Найти наименьшее конечное некоммутативное кольцо. Для любой пары целых чисел n и m определить инъективный кольцевой гомоморфизм End $A^m \to$ End A^{mn}.

3.2.3. Показать, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое число. Доказать, что характеристика любого тела равна либо нулю, либо простому числу.

3.2.4. Запишем $n = p_1^{e_1} \ldots p_t^{e_t}$ в виде произведения степеней различных простых чисел. Доказать, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфно произведению $\prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_{p^{l_i}}$и, следовательно, является произведением колец характеристик $p_1^{e_1}, \ldots, p_t^{e_t}$. Обобщить на любое коммутативное кольцо характеристики n.

3.2.5. Элемент x кольца R называется **делителем нуля**, если $xy = 0$ или $yx = 0$ для некоторого ненулевого $y \in R$. **Областью целостности или целостным кольцом** называется кольцо без ненулевых делителей нуля. Доказать, что любая конечная область целостности является телом. Показать, что характеристика целостного кольца равна 0 или простому числу.

[1]) Напомним, что End A — всегда мультипликативный моноид, см. стр. 88—89.—*Прим. перев.*

3.2.6. **Булево кольцо** — это коммутативное кольцо R, такое, что $a^2 = a$ для любого $a \in R$. Показать, что $a + a = 0$ для любого $a \in R$. Показать, что следующие два условия необходимы и достаточны для того, чтобы коммутативное кольцо было булевым:

(a) Если $a^n = 0$ для некоторого $a \in R$ и некоторого натурального числа n, то $a = 0$.

(b) $(a + b)\,ab = 0$ для всех $a, b \in R$.

3.2.7. Если X — непустое множество, то множество Pow X всех подмножеств из X является кольцом относительно следующих операций:

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B), \tag{1}$$

$$AB = A \cap B. \tag{2}$$

Кольцо Pow X коммутативно (X — кольцевая единица, а пустое множество $\varnothing$ — нулевой элемент) и называется **булевым кольцом подмножеств** множества X. Любой его элемент A является идемпотентом.

3.2.8. Если каждый элемент кольца R является идемпотентом, то R коммутативно[1]).

3.2.9. Пусть R — булево кольцо, определенное в упражнении 3.2.6. Показать, что R «изоморфно» подкольцу булева кольца подмножеств некоторого множества S. (Пусть S — множество всех максимальных семейств $P = \{x_\alpha\}$ элементов x_α из R, таких, что произведение любого конечного множества элементов из P отлично от нуля в R. Используя лемму Цорна, показать, что каждый элемент $x \neq 0$ из R входит в некоторое такое P. Пусть $\langle x \rangle$ обозначает подмножество в S, состоящее из всех таких P, что $x \in P$. Рассмотреть отображение $x \mapsto \langle x \rangle$.)

3.2.10. Коммутатор в кольце R — это элемент вида $ab - ba$, где $a, b \in R$. Показать, что если x и y — элементы из R, а p — простое число, то $(x + y)^p = x^p + y^p + z + pt$, где z — сумма коммутаторов и t — элемент кольца R. Показать также, что это неверно, если число p не простое.

3.2.11. Не обязательно ассоциативное кольцо L называется **кольцом Ли**, если

$$ab = -ba,\quad a\,(bc) + b\,(ca) + c(ab) = 0$$

для всех $a, b, c \in L$. (В случае, когда $2a = 0$, дополнительно предполагается, что $a^2 = 0$ для всех $a \in L$.) Показать, что если A — произвольное (ассоциативное) кольцо, то, определив в нем новое

[1]) Теорема Джекобсона устанавливает, что если R — кольцо, в котором каждому элементу a можно поставить в соответствие целое число n (a) так, чтобы $a^{n(a)} = a$, то R коммутативно (см. Джекобсон [61, теорема 1, стр. 314]). В отличие от нашего упражнения доказательство этой теоремы требует сложного математического аппарата.

произведение $a \times b$ элементов a и b из A по формуле

$$a \times b = ab - ba,$$

мы превратим его в кольцо Ли. Показать, что кольцо Ли L содержит единичный элемент тогда и только тогда, когда $L = 0$.

3.2.12. Кольцо целых чисел можно построить как кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$. Указать аналогичный способ построения поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. (Рассмотреть множество T всех гомоморфизмов всевозможных ненулевых подгрупп группы $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Показать прежде всего, что для каждого элемента $t \in T$ существует единственное максимальное продолжение $[t] \in T$. Пусть Q — множество всех максимальных элементов из T и на нем определено подходящее сложение; рациональные числа a/b соответствуют отображениям $x \mapsto ax/b$ подходящих подгрупп из $\mathbb{Z}$.)

3.2.13. Если e — идемпотент кольца R, то множество $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ — кольцо относительно операции умножения, индуцированной соответствующей операцией кольца R, но подкольцом оно будет тогда и только тогда, когда или $e = 0$, или $e = 1$.

Категория колец

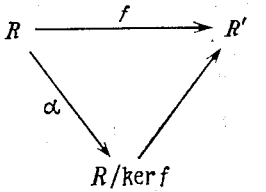
Объектами категории RINGS служат кольца, а морфизмами — кольцевые гомоморфизмы. Как отмечалось в гл. 1, эквивалентности в конкретных категориях называются изоморфизмами. Кольцевой гомоморфизм $A \to A'$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда он является вложением, т. е. инъективен. Однако каноническое вложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ колец, которое не является наложением, будет эпиморфизмом в категории RINGS.

Кольцо A является категорией с одним объектом A, морфизмами служат элементы из A. Дуальная категория также является кольцом, обозначаемым A^{op} [1]). Кольцевой гомоморфизм $A \to A'$ определяет, как и в случае моноидов, ковариантный функтор. Верно и обратное утверждение. Контравариантный функтор $A \to A'$ индуцирует отображение колец $A \to A'$, которое называется антигомоморфизмом. **Инволюция** есть двойственность $A \to A$.

3.3.(a) Предложение. *Если R — кольцо и K — его идеал, то R/K является кольцом, а каноническое отображение $\alpha\colon R \to R/K$ — кольцевым гомоморфизмом. Если $f\colon R \to R'$ — произвольный кольцевой гомоморфизм, то существует единственный инъективный*

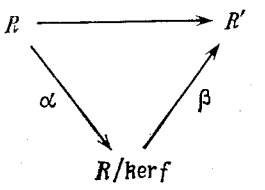
[1]) При этом по определению считается, что сложение сохраняется.— *Прим. ред.*

гомоморфизм $h\colon R/\ker f \to R'$, такой, что диаграмма



где α — канонический гомоморфизм, коммутативна. Кроме того, f индуцирует кольцевой изоморфизм $R/\ker f \to \operatorname{im} f$.

Если $f\colon R \to R'$ — антигомоморфизм, то $\ker f = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ есть идеал, и имеет место коммутативная диаграмма



где β — инъективный антигомоморфизм. □

Декартово произведение $\prod_{i \in I} X_i$ семейства колец есть кольцо относительно обычных операций в прямом произведении аддитивных групп и мультипликативных моноидов колец этого семейства соответственно и называется (**прямым**) **произведением** колец этого семейства. Проекция такого произведения на X_j является кольцевым гомоморфизмом для любого $j \in I$, но, когда $|I| > 1$, каноническая инъекция $u_j\colon X_j \to \prod_{i \in I} X_i$ не будет кольцевым гомоморфизмом, так как образ этого отображения не есть подкольцо в указанном произведении. Если 1_i — кольцевая единица из X_i, то $u_j(1_j) = e_j$ — идемпотент, содержащийся в центре произведения $X = \prod_{i \in I} X_i$ и $\operatorname{im} u_j = e_j X e_j$ для любого $j \in I$. В частности, $\operatorname{im} u_j$ является идеалом X_j' в X и $X_j' X_k' = 0$ для любых $j \neq k \in I$. Копроизведения колец рассматриваются в гл. 5.

3.3. (b) Упражнения.

1. (Кольца многочленов.) Для любого кольца R существует кольцо $R[x]$, содержащее R в качестве подкольца и характеризуемое следующими свойствами: в центре кольца $R[x]$ существует элемент x, такой, что если R — произвольное подкольцо некоторого кольца S и если t — любой элемент из централизатора R в S, то существует единственный гомоморфизм $h\colon R[x] \to S$, такой,

что $h(x) = t$ и $h(r) = r$ для любого $r \in R$. Если $R[x]$ — только что описанное кольцо, то любой элемент $f \in R[x]$ имеет единственное представление $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, где $a_i \in R$, $i = 0, \ldots, n$, и $a_n \neq 0$. Таким образом, если, кроме того, $f = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, где $b_j \in R$, $j = 0, \ldots, m$, и $b_m \neq 0$, то $n = m$ и $a_i = b_i$, $i = 0, \ldots, n$. (Тогда n называется **степенью** элемента f.) Кольцо $R[x]$ называется **кольцом многочленов** (или **полиномов**) **над** R **от переменной** x, а элементы этого кольца — **многочленами** (**или полиномами**). Если $R[x']$ — также кольцо многочленов над R, но от переменной x', то существует кольцевой изоморфизм $g\colon R[x] \to R[x']$, такой, что $g(x) = x'$ и $g(r) = r$ для любого $r \in R$.

2. Для произвольного кольца R обозначим через $P(R)$ кольцо полиномиальных функций $R \to R$. Таким образом, элемент из $P(R)$ определяется элементом $f \in R[x]$, если положить $r \mapsto f(r)$ для любого $r \in R$. Кроме того, $P(R)$ является подкольцом произведения R^R, и только что определенное отображение есть кольцевой гомоморфизм $R[x] \to P(R)$. Найти необходимое и достаточное условие на кольцо R для того, чтобы этот гомоморфизм был изоморфизмом.

3. Показать, что $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, где (x^2+1) обозначает идеал кольца $\mathbb{R}[x]$, состоящий из кратных элемента x^2+1.

Модуль

Пусть R — кольцо. Тогда аддитивная абелева группа M является **левым** R**-модулем**, если R действует на M, причем выполняются следующие условия:

(М 1) $$r(x + y) = rx + ry,$$

(М 2) $$(r + s)x = rx + sx,$$

(М 3) $$(rs)x = r(sx),$$

(М 4) $$1x = x$$

для любых $r, s \in R$ и $x, y \in M$. Если отображение $u\colon R \times M \to M$ задает это действие, то (R, M, u) или, проще, ${}_RM$ обозначает соответствующий модуль. Понятие **правого** R**-модуля** (M, R, u) вводится симметрично. В обоих случаях R называется **кольцом скаляров**, а его элементы — **скалярами**.

3.4. Предложение. *Пусть R — кольцо, а M — аддитивная абелева группа.*

3.4.1. *Если (R, M, u) — левый R-модуль, то отображение $f\colon R \to \operatorname{End} M$, такое, что $f(r)(x) = rx$ для любых $x \in M$, $r \in R$, является кольцевым гомоморфизмом. Обратно, если $h\colon R \to \operatorname{End} M$ — кольцевой гомоморфизм, то существует левый R-модуль (R, M, v), такой, что $v(r, x) = rx = h(r)(x)$ для любых $r \in R$, $x \in M$. Символ $[R, M, h]$ обозначает этот же модуль.*

3.4.2. *Утверждение* 3.4.1 *выполняется для правых модулей (M, R, u), если заменить «левый» на «правый» и присоединить приставку «анти» к слову «гомоморфизм». Символ $[M, R, h]$, где $h\colon R \to \operatorname{End} M$ — кольцевой антигомоморфизм, обозначает тот же самый модуль.*

Доказательство. Если задано отображение $f\colon R \to \operatorname{End} M$ с указанным в формулировке свойством, то (М 1) выполняется тогда и только тогда, когда $f(r)$ есть эндоморфизм группы M, (М 2) [соотв. (М 3)] выполняется тогда и только тогда, когда f есть гомоморфизм аддитивной группы (соотв. мультипликативного моноида) кольца R и (М 4) выполняется тогда и только тогда, когда $f(1)$ является кольцевой единицей в $\operatorname{End} M$. Таким образом, f будет кольцевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда действие кольца R на M, заданное отображением f, превращает M в левый R-модуль. □

Каждый антигомоморфизм коммутативного кольца является гомоморфизмом, так что для этих колец понятия левого и правого модулей совпадают.

Категория mod-R правых R-модулей

Объектами категории mod-R, обозначаемой также через $\mathscr{M}_R$, служат все правые R-модули, а морфизмы $f\colon M \to N$ задаются как гомоморфизмы соответствующих абелевых групп, удовлетворяющие соотношению

$$f(xr) = f(x)r$$

для любых $x \in M$, $r \in R$. Как обычно, через $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ обозначается $\operatorname{Mor}_{\text{mod-}R}(M, N)$. Категорной операцией является произведение гомоморфизмов. Моноид эндоморфизмов объекта M категории mod-R обозначается через $\operatorname{End} M_R$ и является подкольцом кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} M$ абелевой группы M. Он называется **кольцом эндоморфизмов модуля** M_R. В этих обозначениях $\operatorname{End} M = \operatorname{End} M_{\mathbb{Z}}$, где мы рассматриваем M как $\mathbb{Z}$-модуль с каноническим отображением $\mathbb{Z} \to \operatorname{End} M$. Включение $\operatorname{End} M_R \to \operatorname{End} M$ превращает M в левый $\operatorname{End} M_R$-модуль.

Объекты категории R-mod — это все левые R-модули, а ее морфизмы — групповые гомоморфизмы $f\colon M \to N$, такие, что $f(rx) = rf(x)$ для всех $r \in R$, $x \in M$.

Если $[M, R, g]$ (соотв. $[R, M, g]$) — правый (соотв. левый) R-модуль и $f\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм, то правый

(соотв. левый) S-модуль $[M, S, gf]$ (соотв. $[S, M, gf]$) называется **притягивающим** S-модулем и

$$\text{mod-}f \begin{cases} \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}S \\ [M, R, g] \mapsto [M, S, gf] & \text{(на объектах)} \\ h \mapsto h & \text{(на морфизмах)} \end{cases}$$

— унивалентный функтор, т. е. вложение mod-$R \rightsquigarrow$ mod-S. Среди частных случаев отметим случаи, когда $f\colon S \to R$ — вложение, например когда S — подкольцо в R, или наложение, например когда $R = S/I$ и $S \to R$ — каноническое отображение.

Если $f\colon S \to R$ — антигомоморфизм, то

$$\text{mod-}f \begin{cases} \text{mod-}R \rightsquigarrow S\text{-mod} \\ [M, R, g] \mapsto [S, M, gf] & \text{(на объектах)} \\ h \mapsto h & \text{(на морфизмах)} \end{cases}$$

— ковариантный унивалентный функтор, и если $d^{-1}\colon R^{\mathrm{op}} \to R$ — отображение, обратное к канонической двойственности, то получаем каноническую эквивалентность mod-$R \rightsquigarrow R^{\mathrm{op}}$-mod.

3.5. Следствие. *Канонический антигомоморфизм* $d\colon R \to R^{\mathrm{op}}$ *индуцирует эквивалентность*

$$\text{mod-}d^{-1}\colon \text{mod-}R \approx R^{\mathrm{op}}\text{-mod}.$$

Следовательно, имеет место двойственность $(\text{mod-}R)^{\mathrm{op}} \approx R^{\mathrm{op}}$-mod. □

Гомоморфизмы с противоположной от скаляров стороны

Впредь мы будем следовать соглашению, что гомоморфизмы левых R-модулей записываются справа. Итак, если заданы морфизмы $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to P$ в категории R-mod, то xf или $(x)f$ — это значение, которое принимает f на элементе x, а

$$(x)(fg) = (xf)g$$

— значение произведения fg морфизмов f и g в категории R-mod. Пусть кольцо T задано так:

$$T = \{f \in \operatorname{End} M \mid f(rx) = rf(x) \ \forall\, r \in R, x \in M\}.$$

Включение $T \to \operatorname{End} M$ естественным образом превращает M в левый T-модуль и правый T^{op}-модуль. Соглашение записывать

гомоморфизмы левых модулей справа устанавливает симметрию с ситуацией для правых модулей, у которых гомоморфизмы записываются с противоположной стороны от скаляров. Это соглашение эквивалентно использованию обозначения $(\operatorname{Mor} R\text{-mod})^{\mathrm{op}}$ для морфизмов категории R-mod, и как следствие мы получаем, что $\operatorname{End}_R M = T^{\mathrm{op}}$ — кольцо, антиизоморфное T, для любого левого R-модуля M. Однако в этом случае эквивалентность 3.5 между mod-R и R^{op}-mod не сохраняется, так как mod-d^{-1} тогда переводит произведение gf морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$ в категории mod-R в fg в R^{op}-mod, поскольку в последней мы записываем морфизмы справа.

Для того чтобы принять соглашение записывать гомоморфизмы с противоположной стороны от скаляров и чтобы при этом осталось в силе следствие 3.5, необходимо несколько изменить определение ковариантного функтора. Для этого наряду с категориями, определенными на стр. 88, которые мы будем называть **категориями с левой записью морфизмов**, рассмотрим **категории с правой записью морфизмов**, определение которых совпадает с определением категории за исключением того, что на сей раз для любых трех объектов A, B, C определена операция

$$\begin{cases} \operatorname{Mor}_C(A, B) \times \operatorname{Mor}_C(B, C) \to \operatorname{Mor}_C(A, C) \\ (f, g) \mapsto fg. \end{cases}$$

Если теперь C и D — категории с противоположными записями морфизмов и $T\colon C \rightsquigarrow D$ — пара отображений

$$\operatorname{Obj} C \to \operatorname{Obj} D,$$

$$\operatorname{Mor} C \to \operatorname{Mor} D,$$

таких, что $T(1_A) = 1_{TA}$ для любого объекта A категории C и $T(fg) = Tg \cdot Tf$ для всех морфизмов $f, g \in \operatorname{Mor} C$, то T называется **реверсивным** ковариантным функтором. Например, если записывать гомоморфизмы и скаляры с противоположных сторон, то категория R-mod левых R-модулей будет категорией с правой записью морфизмов и если $f\colon S \to R$ — любой кольцевой антигомоморфизм, то mod-f: mod-$R \to S$-mod — реверсивный ковариантный функтор. Если заданы реверсивные функторы $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$, такие, что $TS \approx 1_D$ и $ST \approx 1_C$, то T — **реверсивная эквивалентность**, а C и D называются **реверсивно эквивалентными** категориями. Таким образом, mod-d^{-1} в следствии 3.5 — реверсивная эквивалентность, а категории mod-R и R^{op}-mod являются реверсивно эквивалентными. Аналогично определяется реверсивная двойственность.

Кольцо биэндоморфизмов

Кольцо **биэндоморфизмов** Biend M_R произвольного R-модуля M определяется как кольцо эндоморфизмов этого модуля, рассматриваемого как модуль над $S = \operatorname{End} M_R$. Таким образом, $\operatorname{Biend} M_R = \operatorname{End}_{\operatorname{End} M_R} M$, а

$$\text{каноническое отображение} \begin{cases} R \to \operatorname{Biend} M_R \\ a \mapsto a_d(M) \end{cases}$$

— кольцевой гомоморфизм, где $a_d(M)$ — **правое умножение модуля M на a**, или **гомотетия модуля M с коэффициентом a**, которое определяется так:

$$a_d(M) \begin{cases} M \to M \\ m \mapsto ma. \end{cases}$$

Когда в рассуждениях участвует лишь один модуль, то вместо $a_d(M)$ пишут a_d. Аналогичным образом для левого R-модуля M определяется $a_s(M)$. Модуль M называется **точным** (соотв. **сбалансированным**), если каноническое отображение $R \to \operatorname{Biend} M_R$ инъективно (соотв. сюръективно). Любой образующий и любой кообразующий категории mod-R точен. (Доказательство?) Кроме того, любой образующий сбалансирован (ср. упр. 3.16.3, 3.19.1 и предложение 4.1). Вопрос о том, когда кообразующие являются сбалансированными модулями, поднимается в гл. 23.

3.6. Примеры.

3.6.1. Абелева группа M является левым модулем $[R, M, 1_R]$ над $R = \operatorname{End} M$.

3.6.2. Канонический гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \operatorname{End} M$ превращает M в левый и правый $\mathbb{Z}$-модуль.

3.6.3. Пусть R — кольцо. Тогда для любого $a \in R$ определено отображение

$$a_d \begin{cases} R \to R \\ \lambda \mapsto \lambda a. \end{cases}$$

Ясно, что $a_d \in \operatorname{Hom}(R, R) = \operatorname{End} R$ и что отображение

$$d = d_R \begin{cases} R \to \operatorname{End} R \\ a \mapsto a_d \end{cases}$$

является кольцевым антиизоморфизмом. Следовательно, R — правый R-модуль $[R, R, d]$, обозначаемый через R_d или R_R. Аналогично, отображения

$$a_s \begin{cases} R \to R \\ x \mapsto ax, \end{cases} \qquad s = s_R \begin{cases} R \to \operatorname{End} R \\ a \mapsto a_s \end{cases}$$

определяют левый R-модуль $[R, R, s]$, обозначаемый через ${}_sR$ или ${}_RR$.

Пусть M — правый R-модуль, тогда элемент $m \in M$ определяет отображения

$$m_s \begin{cases} R_R \to M \\ r \mapsto mr, \end{cases} \qquad \text{каноническое отображение} \begin{cases} M \to \operatorname{Hom}_R(R, M) \\ m \mapsto m_s. \end{cases}$$

Правое из них есть изоморфизм $M \to \operatorname{Hom}_R(R, M)$ в категории mod-R, называемый **каноническим**. Ковариантный основной функтор h^R индуцирует автоэквивалентность категории mod-R (ср. раздел «Эквивалентность категорий» из гл. 1). Это влечет за собой канонический кольцевой изоморфизм $R \to \operatorname{End} R_R = \operatorname{Hom}_R(R, R)$. Таким образом, если A — идеал кольца R, то существуют канонические кольцевые изоморфизмы $R/A \to \operatorname{End} R/A_{R/A}$ и $R/A \to \operatorname{End}_{R/A} R/A$, т. е. R/A — сбалансированный R-модуль, если A — идеал. Это, вообще говоря, неверно, если рассматривать R/I, где I — правый идеал. (Доказательство?)

3.6.4. Если R — тело, то правый R-модуль V называется **векторным пространством**, а морфизм $V \to W$ категории mod-R — линейным преобразованием (л. п.). Кольцо $\operatorname{End} V_R$ называется **кольцом всех линейных преобразований пространства V над R**.

3.6.5. Пусть $\{M_i, R, u_i\}_{i \in I}$ — семейство правых R-модулей. Тогда теоретико-множественное произведение [1]) семейства $\{u_i\colon M_i \times R \to M_i\}_{i \in I}$ — это отображение $\prod\limits_{i \in I} M_i \times R \to \coprod\limits_{i \in I} M_i$, и его композиция с биективным отображением $(\prod\limits_{i \in I} M_i) \times R \to \coprod\limits_{i \in I} M_i \times R$ превращает декартово произведение $\coprod\limits_{i \in I} M_i$ в правый R-модуль и индуцирует отображение $(\sum\limits_{i \in I} \oplus M_i) \times R \to \prod\limits_{i \in I} M_i$, которое превращает $\sum\limits_{i \in I} \oplus M_i$ в правый R-модуль. Короче говоря, если $f \in \coprod\limits_{i \in I} M_i$, то модульная операция (в любом случае) определяется формулой $fr(i) = f(i)\, r$ для любых $i \in I$, $r \in R$. Ясно, что семейство проекций $\{\coprod\limits_{i \in I} M_i \to M_i\}_{i \in I}$ является произведением в категории mod-R, во-первых, потому что проекции суть морфизмы этой категории, и, во-вторых, потому что это семейство является произведением в категории mod-$\mathbb{Z}$. Аналогично, в силу 2.19 *семейство инъекций*

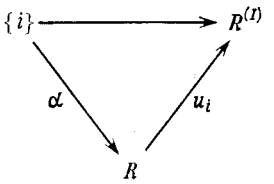
$$\{M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i\}_{i \in I}$$

[1]) Имеется в виду прямое произведение в категории SETS. — *Прим. ред.*

является копроизведением в mod-R. Отсюда следует существование функтора свободы

$$F\begin{cases} \text{SETS} \rightsquigarrow \text{mod-}R \\ I \mapsto R^{(I)} \quad \text{(прямая сумма)} \\ i \mapsto f_I(i), \end{cases}$$

где отображение $f_I\colon I \to R^{(I)}$ таково, что для каждого $i \in I$ диаграмма



где α отображает i в 1, а $u_i\colon R \to R^{(I)}$ — каноническая инъекция, коммутативна, т. е. $R^{(I)}$ — свободный объект над множеством $\{u_i(1)\}_{i\in I}$ при отображении включения.

Бимодуль

Модуль M, который является левым T-модулем и правым R-модулем одновременно, причем выполняется закон ассоциативности $(tx)\,r = t\,(xr)$ для любых $t \in T$, $x \in M$, $r \in R$, называется (T, R)-**бимодулем**. Таким образом, M — всегда (A, B)-бимодуль для любого подкольца A из End M_R и подкольца B из Biend M_R. Для (A, B)-бимодуля употребляется обозначение ${}_AM_B$.

3.7. Примеры. Пусть M — правый R-модуль.

3.7.1. (a) Если M есть (S, R)-бимодуль, а N — правый R-модуль, то $F = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ является правым S-модулем относительно операции $(f, s) \mapsto fs, f \in F, s \in S$, где fs определяется формулой $fs\,(x) = f\,(s, x)$ для любого $x \in M$.

(b) Аналогично, если N есть (T, R)-бимодуль, а M — правый R-модуль, то $F = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ является левым T-модулем относительно операции $(t, f) \mapsto tf, t \in T, f \in F$, где tf определяется формулой $tf\,(x) = t\,(f\,(x))$ для любого $x \in M$.

3.7.2. $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ является левым R-модулем по 3.7.1 (b).

3.7.3. Если R коммутативно, то M является (R, R)-бимодулем, а $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ есть (R, R)-бимодуль, согласно 3.7.1 (a) и (b).

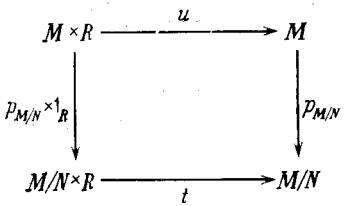
3.7.4. Пусть E — произвольное непустое множество. Тогда произведение R^E есть (R, R)-бимодуль, а прямая сумма $R^{(E)}$ — его (R, R)-подбимодуль, где $(rf)\,(x) = rf\,(x)$ определяет на R^E структуру левого R-модуля.

3.7.5. Пусть $M, N \in$ mod-R, $S = \mathrm{End}\, M_R$, и пусть $T = \mathrm{End}\, N_R$. Тогда $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ является (T, S)-бимодулем.

Подмодули

Модуль (N, R, p) есть **подмодуль** модуля (M, R, u), если N — подгруппа в M и u: $M \times R \to M$ индуцирует операцию p: $N \times R \to N$, или, что то же самое, N — подгруппа в M, инвариантная относительно R. **Собственный** подмодуль — это подмодуль, отличный от M.

Фактормодулем модуля (M, R, u) по подмодулю N называется модуль $(M/N, R, t)$, где t — единственное отображение $M/N \times R \to M/N$, такое, что диаграмма



коммутативна. Короче говоря, модульная операция в M/N определяется формулой $(a + N)\,r = ar + N$ для любых $r \in R$, $a \in M$.

Подмодуль модуля R_R называется **правым идеалом**, а подмодуль модуля ${}_RR$ — **левым идеалом**. Отсюда следует, что подмножество I кольца R является идеалом тогда и только тогда, когда I — правый и левый идеал.

Пусть C — конкретная категория. Если B и A — ее объекты и $B \subseteq A$[1]), то B — **подобъект** в A. Если S — подмножество, а N — подобъект в A, то S **порождает** N, если N является пересечением всех подобъектов объекта A, содержащих S. В этом случае мы употребляем обозначение $N = (S)$. Подобъект M объекта A называется **конечно порожденным, счетно порожденным** или **порожденным a элементами**, если $M = (T)$, где $|\,T\,| < \aleph_0$ и $|\,T\,| \leqslant \aleph_0$ или $|\,T\,| \leqslant a$ соответственно. Если A — абелева группа (абелев моноид), то сумма $\sum_{i\in I} X_i$ семейства подгрупп (подмоноидов) является подгруппой (подмоноидом), порожденной теоретико-множественным объединением $\bigcup_{i\in I} X_i$ (см. 2.19). Когда A является R-модулем, а каждая из групп X_i — подмодулем, то и сумма оказывается подмодулем. Модуль M называется **циклическим**, если он порожда-

[1]) То есть B — подмножество в A и включение $B \to A$ — морфизм этой категории — *Прим. перев.*

ется одним элементом. Циклический правый идеал называется **главным**. Если A — правый идеал кольца R и M — правый R-модуль, то через MA обозначается подмодуль, порожденный множеством $\{ma \mid m \in M, a \in A\}$. Для любого $x \in M$ положим $xA = \{xa \mid a \in A\}$. Таким образом, xR — циклический подмодуль, порожденный элементом x, и $MA = \sum_{m \in M} mA$. Это определяет произведение AB любых двух правых идеалов A и B. Если C — третий идеал, то, разумеется, определено и $(AB)C$, и в силу ассоциативности кольцевой операции умножения $(AB)C = A(BC)$. Отсюда следует, что множество всех правых идеалов кольца образует полугруппу, а множество всех идеалов — моноид, единицей которого является R. Произведение $A_1 \ldots A_n$ любого конечного числа правых идеалов $A_1, \ldots, A_n$ определяется по индукции как $(A_1 \ldots A_{n-1})A_n$ и

$$A_1 \ldots A_n = \{ \sum_{\substack{\text{конечные} \\ \text{суммы}}} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A_{i_j},\ j = 1, \ldots, n \}.$$

Идеал A называется **нильпотентным (индекса нильпотентности k)**, если произведение $A^n = A \ldots A$ (n сомножителей) равно нулю (и k есть точная нижняя грань всех таких n). Таким образом, идеал $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ кольца $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ является нильпотентным идеалом индекса нильпотентности n для любого целого числа $p > 0$. Более общим образом, если A — произвольный идеал кольца R, то A/A^n — нильпотентный идеал кольца R/A^n индекса нильпотентности $\leqslant n$. Множество всех нильпотентных правых идеалов (индекса нильпотентности $\leqslant n$) образует подполугруппу полугруппы всех правых идеалов. Если A и B — нильпотентные идеалы индекса нильпотентности n и m соответственно, то $A + B$ — нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leqslant n + m$, как показывает включение

$$(A + B)^t \subseteq A^t + B^t,$$

где $t = n + m$.

Кольцо R называется **полупервичным**, если 0 — его единственный нильпотентный идеал. В этом случае говорят также, что кольцо R *не имеет нильпотентных идеалов*. Кольцо R называется **первичным**, если произведение ненулевых идеалов является ненулевым идеалом. Таким образом, первичное кольцо полупервично.

Делителем нуля в кольце называется такой элемент x этого кольца, что $xy = 0$ или $yx = 0$ для некоторого элемента $y \neq 0$ этого кольца. Кольцо R называется **областью целостности** или **целостным кольцом**, если в нем нет отличных от нуля делителей нуля. В этом случае говорят также, что R не имеет делителей нуля. Тело есть область целостности, и любая область целостности первична. Коммутативное кольцо является областью целостности тогда и только тогда, когда оно первично.

Элемент $x \in R$ **нильпотентен**, если $x^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Его **индексом нильпотентности** называется наименьшее из таких n, что $x^n = 0$. Односторонний идеал называется **ниль-идеалом**, если каждый из его элементов нильпотентен. Таким образом, любой односторонний нильпотентный идеал является ниль-идеалом. Обратное неверно. (Пример?) Если R коммутативно, то $x \in R$ — нильпотентный элемент индекса нильпотентности n тогда и только тогда, когда xR — нильпотентный идеал индекса нильпотентности n. Кольцо может не иметь максимального нильпотентного правого идеала, однако сумма всех нильпотентных правых идеалов является ниль-идеалом, содержащим любой нильпотентный левый идеал. (Доказательство?) Пока не известен ответ на вопрос, существует ли кольцо R, не содержащее двусторонних ниль-идеалов (кроме 0), но обладающее ненулевым правым ниль-идеалом.

Следующее предложение представляет интерес в связи с вопросами конечной порожденности.

3.8. Предложение. *Пусть R — кольцо, а M — некоторый R-модуль. Тогда M конечно порожден в том и только том случае, когда множество собственных подмодулей модуля M индуктивно.*

Доказательство. Пусть M порожден элементами $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ — некоторая цепь подмодулей, объединением которой служит M. Каждому $j = 1, \ldots, n$ соответствует номер $i_j \in I$, такой, что $x_j \in M_{i_j}$. Тогда существует k, для которого $x_j \in M_{i_k}$, $j = 1, \ldots, n$, откуда следует, что $M = M_{i_k}$. Обратно, среди множеств, порождающих модуль M, выберем имеющее наименьшую мощность, скажем c, и превратим его во вполне упорядоченное множество, например $\{x_i \mid i < \alpha\}$, где α — первое ординальное число мощности c. Пусть далее M_i обозначает подмодуль, порожденный множеством $\{x_j \mid j \leqslant i\}$. Если c бесконечна, то α — предельное ординальное число, и подмодуль M_i является собственным, так как порожден менее, чем c, элементами. Но тогда $M = \bigcup M_i$ также собственный. Противоречие. □

Базис

Семейство $\{x_i\}_{i \in I}$, которое порождает подмодуль N модуля M, называется **системой образующих** подмодуля N. Если же прямая сумма включений $\{x_i R \to N\}_{i \in I}$ является изоморфизмом $\bigoplus_{i \in I} x_i R \to N$, то $\{x_i\}_{i \in I}$ называют **базисом** модуля N, а мощность множества I — **базисным числом** этого модуля. Согласно 2.19, предыдущее условие эквивалентно независимости семейства $\{x_i R\}_{i \in I}$ подмодулей модуля N, поэтому семейство $\{x_i\}_{i \in I}$ называется **линейно независимым над R**.

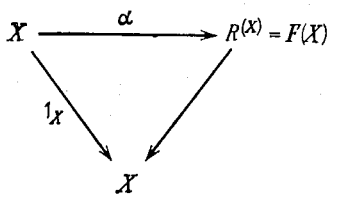
3.9. Предложение.

3.9.1. *Если R — кольцо, а X — объект категории* mod-R, *то существуют множество индексов I и некоторый эпиморфизм $R^{(I)} \to X$, т. е. любой объект X категории* mod-R *изоморфен фактормодулю свободного R-модуля.*

3.9.2. *Если $\{u_i\colon R \to R^{(I)}\}_{i\in I}$ суть инъекции в прямую сумму (копроизведение), то $\{u_i(1)\}_{i\in I}$ — базис свободного модуля $R^{(I)}$.*

3.9.3. *Объект R является образующим в категории* mod-R.

Доказательство 3.9.1. Воспользуемся предложением 2.7 о функторе свободы, утверждающим, что существует единственный морфизм $R^{(X)} \to X$, для которого коммутативна диаграмма



где α — каноническое отображение. Так как очевидно, что X порождает X как модуль, т. е. так как $(X) = X$, то $R^{(X)} \to X$ — наложение.

Доказательство 3.9.2. Прежде всего, множество $\{u_i(1)\}_{i\in I}$ порождает R^I в силу части 2.7.2 предложения о функторе свободы, и, далее, прямая сумма канонических вложений $\{u_i\colon R \to R^I\}_{i\in I}$ является изоморфизмом, согласно следствию 2.20 о строении прямой суммы.

Доказательство 3.9.3. Наконец, в силу эквивалентности функторов $\mathrm{Hom}_R(R, \ ) \approx 1_{\text{mod-}R}$ объект R является образующим (ср. 3.26). □

Базисное число, вообще говоря, зависит от выбора базиса и, следовательно, не может служить инвариантом модуля $F = R^{(I)}$. Оно, однако, не зависит от выбора базиса, если F — свободный модуль над бесконечным множеством I. Это можно вывести из того, что операции в R финитарны, используя элементарную арифметику кардинальных чисел. Базисное число однозначно определено также для векторного пространства V и называется в этом случае его **размерностью**, обозначаемой через $\dim_R V$, где R — тело скаляров. Кольцо R, такое, что базисное число любого свободного R-модуля определено однозначно, называется **IBN-кольцом** или **кольцом с инвариантным базисным числом**. Любое тело является

IBN-кольцом; IBN-кольцом будет также любое кольцо R, обладающее ненулевым кольцевым гомоморфизмом $f\colon R \to S$ в IBN-кольцо S (11.14). Любое кольцо с условием обрыва возрастающих цепей правых идеалов есть IBN-кольцо (см. 3.10.3 и упр. к гл. 17).

3.10. Упражнения.

3.10.1. R-модуль M называется **простым**, если он содержит лишь два подмодуля, а именно 0 и M.

(a) (**лемма Шура**) Если U и V — простые R-модули и $f \in \mathrm{Hom}_R(U, V)$, то или $f = 0$, или f — изоморфизм.

(b) Кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом.

(c) Если U_i, $i = 1, \ldots, n$, — конечное множество попарно неизоморфных простых R-модулей, то кольцо эндоморфизмов их прямой суммы изоморфно кольцевому прямому произведению тел $D_i = \mathrm{End}_R U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

3.10.2. Пусть I — произвольный правый идеал кольца R. Назовем его **идеализатором** множество $\mathcal{J}(I) = \{a \in R \mid ax \in I \ \forall\, x \in I\}$. Это наименьшее подкольцо кольца R, содержащее I в качестве идеала.

(a) Доказать, что

$$\begin{cases} \mathrm{End}\,(R/I)_R \to \mathcal{J}(I)/I \\ \qquad f \mapsto f(1+I) \end{cases}$$

— кольцевой изоморфизм.

(b) (Кох) Доказать, что если I — максимальный аннуляторный правый идеал, то $\mathrm{End}\,(R/I)_R$ — область целостности.

3.10.3. Кольцо R является телом тогда и только тогда, когда оно содержит не менее двух элементов и только два левых идеала. Любой R-модуль над телом R свободен. [*Указание*: применить лемму Цорна.] Доказать, что ненулевое подкольцо любого тела есть IBN-кольцо. Любое коммутативное кольцо является IBN-кольцом.

3.10.4. Главный правый идеал кольца R — это идеал вида xR, где $x \in R$. Кольцо R называется **кольцом главных правых идеалов**, если любой его правый идеал является главным. **Область главных правых идеалов** — это область целостности, которая является кольцом главных правых идеалов. Доказать, что над областью главных правых идеалов любой проективный модуль свободен. Тело R является областью главных правых и левых идеалов, кольцо многочленов $R[x]$ тоже будет областью главных правых и левых идеалов. Показать, что кольцо многочленов $R[x, y]$ этим свойством не обладает.

3.10.5. Пусть G — аддитивная группа бесконечных последовательностей $v = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ с компонентами из заданного тела.

Определим четыре отображения группы G в себя:

$$g\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, x_3, x_5, \ldots),$$
$$h\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_4, x_6, \ldots),$$
$$q\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots),$$
$$r\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots).$$

Показать, что q, h, q и r лежат в кольце E эндоморфизмов группы G и что выполняются следующие соотношения:

$$gq = hr = I,\ hq = gr = 0,\ qg + rh = I,\ I = 1_G.$$

3.10.6. Пусть G — неабелева группа порядка 6. Найти два ее эндоморфизма, сумма которых не является эндоморфизмом.

3.10.7. Построить кольцо без максимальных нильпотентных идеалов.

3.11. Упражнения.

3.11.1. (a) Для любого A из категории mod-R функтор h^A со значениями в категории групп сохраняет произведения и ядра, в то время как h_A переводит копроизведения в произведения и коядра в ядра. (Отметим, что **коядром** гомоморфизма $f\colon A \to B$ называется $B/\mathrm{im}\, f$ — понятие, определяемое дуализацией понятия ядра.)

(b) Функтор mod-$R \rightsquigarrow$ mod $\mathbb{Z}$ **точен слева**, если он сохраняет ядра, **точен справа**, если он сохраняет коядра, и **точен**, если он точен и слева и справа. Показать, что объект A категории mod-R проективен (инъективен) тогда и только тогда, когда функтор h^A (соотв. h_A) со значениями в категории групп точен.

3.11.2. R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного R-модуля;

(b) каждая точная последовательность $M \to P \to 0$ расщепляется.

Вывести отсюда, что любой свободный модуль проективен. Показать, что P конечно порожден и проективен тогда и только тогда, когда $R^n \approx P \oplus X$ для некоторого целого числа $n > 0$ и модуля X.

3.11.3. Если A — делимая абелева группа и P — произвольный проективный левый R-модуль, то Hom (P, A) — инъективный правый R-модуль. (Напомним, что если для произвольного гомоморфизма $f\colon P \to A$ и $r \in R$ положить $(fr)(p) = f(rp)$ для любого $p \in P$, то Hom (P, A) превращается в правый R-модуль.)

3.11.4. Показать, что любая абелева группа A вкладывается в делимую абелеву группу.

3.11.5. С помощью упр. 3.11.3. и 3.11.4 показать, что каждый левый R-модуль M вкладывается в инъективный левый R-модуль.

3.11.6. Объект G категории mod-R является образующим тогда и только тогда, когда существуют целое число $n > 0$ и изоморфизм $G^n \approx R \oplus X$ для некоторого объекта X категории mod-R. Если R — область главных правых идеалов, то каждый образующий содержит прямое слагаемое, изоморфное R.

3.12. Предложение об идеальности. *Пусть R — кольцо. Подкатегория C категории* mod-R *называется* ***идеальной****, если выполняются следующие эквивалентные условия:*

3.12.1. *Существует идеал A кольца R, такой, что каноническое вложение* mod-$R/A \rightsquigarrow$ mod-R *индуцирует категорную эквивалентность* mod-$R/A \rightsquigarrow C$.

3.12.2. (a) *Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство объектов из C и если $\{\prod_{i\in I} X_i \to X_i\}$ — произведение в* mod-R, *то $\coprod_{i\in I} X_i$ — объект категории C.*

(b) *Если X — объект категории C и*

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

— точная последовательность в категории mod-R, *то X' и X'' — объекты из C.*

Класс C, удовлетворяющий условиям 3.12.2 (a) *и* (b), *называется* ***идеальным классом***[1]).

Отображение

$$\boldsymbol{C}\begin{cases} \{\text{идеалы из } R\} \to \{\text{идеальные классы из mod-}R\} \\ A \mapsto \{M \in \mathrm{Obj}\ \text{mod-}R \mid \mathrm{ann}_R M \supseteq A\} = \text{mod-}R/A \end{cases}$$ [2])

биективно, и для любого идеального класса C'

$$\boldsymbol{C}^{-1}(C') = \bigcap \{\text{правые идеалы } A \mid R/A \in \mathrm{Obj}\ C'\}.$$

Доказательство. Для любого идеала A канонический функтор mod-$R/A \rightsquigarrow$ mod-R — это просто функтор включения. Следовательно, если выполняется условие 3.12.1, то категория $C =$ mod-R/A удовлетворяет условию 3.12.2. Обратно, предположим, что справедливо 3.12.2. Тогда в качестве A можно взять пересечение всех таких правых идеалов K, что циклические модули R/K принадлежат C. Чтобы в этом убедиться, отметим, прежде всего, что для любого $M \in \mathrm{Obj}$ mod-R имеет место равенство $\mathrm{ann}_R M = \bigcap_{a\in M} \mathrm{ann}_R a$. Левая гомотетия $a_s(R)$ индуцирует точную последовательность

$$0 \to \mathrm{ann}_R a \to R \to aR \to 0.$$

[1]) Иными словами, класс модулей называется идеальным, если он замкнут относительно подмодулей, фактормодулей и прямых произведений. В другой терминологии это многообразие.— *Прим. ред.*

[2]) По поводу обозначений $\mathrm{ann}_R M$, $\mathrm{ann}_R a$ см. стр. 187.— *Прим. перев.*

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{ann}_R M = \bigcap_{\substack{0\to R/K\to M \\ \& \\ 0\to K\to R}\ \text{точны}} K \in \operatorname{Obj} \operatorname{mod}\text{-}R,$$

т. е. $\operatorname{ann}_R M$ оказывается пересечением всех правых идеалов K кольца R, для которых R/K вкладывается в M. Следовательно, существует такое семейство $\{K_j\}_{j\in J}$ правых идеалов кольца R, что $R/K_j \in \operatorname{Obj} C$ для любого $j \in J$ и $A = \bigcap_{j\in J} K_j$. Пусть

$$0 \to K_j/A \to R/A \to R/K_j \to 0$$

— каноническая точная последовательность для любого $j \in J$. Тогда произведение $R/A \to \prod_{j\in J} R/K_i$ канонических проекций $\{R/A \to R/K_j\}_{j\in J}$ является вложением. Таким образом, $R/A \in C$ по 3.12.2 (a) и (b). Значит, в силу 3.12.2 (a) категория C содержит прямое произведение $(R/A)^X$ для любого множества индексов, а следовательно, согласно 3.12.2 (b),— прямую сумму $(R/A)^{(X)}$. Поскольку R/A свободен в категории $\operatorname{mod}\text{-}R/A$, любой объект Y последней можно включить в точную последовательность $(R/A)^{(X)} \to Y \to 0$, а тогда $C = \operatorname{mod}\text{-}R/A$ в силу 3.12.2 (b). Последнее утверждение теоремы теперь получается непосредственно. □

Вопрос о том, что произойдет, если 3.12.2 (a) заменить более слабым требованием, чтобы класс C содержал копроизведение $\coprod_{i\in I} X_i$ любого семейства своих объектов, поставлен в гл. 15 в связи с вопросом о локализующих подкатегориях. С другой стороны, как в гл. 23, так и в гл. 15 рассматривается вопрос, что будет, если заменить условие 3.12.2 (b) более сильным, а именно потребовать, чтобы $X \in \operatorname{Obj} C$ тогда и только тогда, когда X' и X'' являются объектами из C. (Такой класс называется **классом Серра.**)

Произведение $\boldsymbol{C}(I)\,\boldsymbol{C}(J)$ двух идеальных классов определяется так: X принадлежит произведению тогда и только тогда, когда существует точная последовательность

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0,$$

где $X' \in \boldsymbol{C}(J)$ и $X'' \in \boldsymbol{C}(I)$. Очевидно, что $\boldsymbol{C}(I)\,\boldsymbol{C}(J) = \boldsymbol{C}(IJ)$. Таким образом, множество идеальных классов составляет моноид, изоморфный моноиду идеалов кольца R. Кроме того, модуль M из $\operatorname{mod}\text{-}R$ точен тогда и только тогда, когда класс, который он порождает, совпадает со всей категорией $\operatorname{mod}\text{-}R$. Идеал I нильпотентен тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{C}(I)^n = \operatorname{mod}\text{-}R$ для некоторого $n > 0$.

Радикал (правый) кольца R определяется как пересечение всех его максимальных правых идеалов и обозначается через $\operatorname{rad} R$.

Таким образом, $\operatorname{rad} R$ соответствует классу $\boldsymbol{C}(\operatorname{rad} R)$, порожденному простыми правыми R-модулями, т. е. пересечению всех классов, содержащих все простые правые R-модули. Следовательно,

$$\operatorname{rad} R = \bigcap_{\substack{\text{простые} \\ \text{модули } V \in \\ \in \operatorname{Obj} \operatorname{mod}\text{-}R}} \operatorname{ann}_R V$$

является идеалом кольца R. Радикал содержит как все левые, так и все правые ниль-идеалы, а также все правые и все левые нильпотентные идеалы. Для любого $x \in \operatorname{rad} R$ элемент $1 + x$ обратим. Левый радикал кольца R определяется симметричным образом и совпадает с радикалом кольца R. (См. 18.5 и далее.) В математической литературе $\operatorname{rad} R$ называют **радикалом Джекобсона.**

3.13. Упражнения.

3.13.1. Доказать утверждения, содержащиеся в последних фразах.

3.13.2. Проверить, что $\operatorname{rad}(R/\operatorname{rad} R) = 0$.

3.13.3. Показать на примерах, что возможна ситуация, когда $\operatorname{rad} R = 0$, но $\operatorname{rad}(R/I) \neq 0$ для некоторого идеала I.

3.13.4. Доказать все теоремы из гл. 18 и 26.

3.13.5. Пусть A и B — идеалы кольца R. Показать, что канонический гомоморфизм $R/(A \cap B) \to (R/A) \times (R/B)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда A и B комаксимальны в том смысле, что $R = A + B$. (Этот канонический гомоморфизм определяется как прямое произведение канонических гомоморфизмов $R/(A \cap B) \to R/A$ и $R/(A \cap B) \to R/B$.) Обобщить это утверждение на множество из n идеалов $A_1, \ldots, A_n$. [*Указание*: потребовать, чтобы идеалы A_i и A_j при $i \neq j$ были комаксимальны, т. е. $A_i + A_j = R$.]

Простые объекты

Ненулевой объект A категории C с нулем называется **простым,** если каждый морфизм $A \to B$ категории C является либо нулевым, либо мономорфизмом.

3.14. Примеры.

3.14.1. Группа A в категории GROUPS **проста** тогда и только тогда, когда A имеет ровно две нормальные подгруппы, а именно A и единичную подгруппу. Знакопеременная группа A_n при $n > 4$ является простой. Абелева группа проста тогда и только тогда, когда $A \approx \mathbb{Z}_p$ для какого-либо простого p (см. упр. к гл. 1).

3.14.2. Кольцо A в категории RINGS **просто** тогда и только тогда, когда оно имеет ровно два идеала. Так как любое кольцо A

содержит 1, то оно обладает максимальным идеалом[1]). Если M — максимальный идеал, то A/M — простое кольцо. Обратно, если I — идеал и A/I — простое кольцо, то I — максимальный идеал. Любое тело просто, поскольку имеет лишь два идеала. Кроме того, простым будет кольцо эндоморфизмов любого конечно порожденного модуля (векторного пространства) над телом k (см. упр. 3.16.6). Согласно предложению об идеальности 3.12, если mod-$A \approx$ mod-B для двух колец A и B, то A просто тогда и только тогда, когда просто B.

3.14.3. Объект M категории mod-R прост тогда и только тогда, когда он имеет ровно два подмодуля. Таким образом, если M — некоторый модуль, а S — его подмодуль, то M/S прост тогда и только тогда, когда S — максимальный подмодуль. (Согласно 3.8, любой конечно порожденный модуль M имеет максимальные подмодули. На самом деле любой собственный подмодуль такого модуля вкладывается в максимальный подмодуль.) Отсюда следует, что M прост тогда и только тогда, когда он порождается любым своим ненулевым элементом. Если $x \in M$ — ненулевой элемент, то имеет место точная последовательность

$$0 \to K \to R \xrightarrow{f} M \to 0,$$

где $f(a) = xa$ для любого $a \in R$ и $K = \ker f$. Отсюда вытекает, что K — максимальный правый идеал кольца R (максимальный в множестве всех собственных правых идеалов, упорядоченных по включению). Обратно, если K — максимальный правый идеал, то R/K — простой модуль. Любой минимальный подмодуль произвольного модуля (минимальный в частично упорядоченном множестве ненулевых подмодулей) прост, и, обратно, простой модуль является минимальным подмодулем в любом модуле, в котором он содержится. Если V — простой R-модуль, то End V_R — тело, так как его ненулевые элементы обратимы. Таким образом, любой простой правый R-модуль V является левым векторным пространством над кольцом эндоморфизмов $k = \mathrm{End}\ V_R$ и, следовательно, каноническое отображение

$$d(V)\begin{cases} R \to \mathrm{End}_k V = \mathrm{Biend}\, V_R \\ r \mapsto r_d(V) \end{cases}$$

является кольцевым гомоморфизмом кольца R в кольцо всех линейных преобразований левого векторного пространства. В некоторых случаях это каноническое отображение оказывается вложением.

[1]) Для доказательства достаточно рассмотреть множество идеалов, не содержащих 1, убедиться, что, оно индуктивно, и применить лемму Цорна (ср. 3.8).— *Прим. перев.*

3.15. Теорема. *Любое простое кольцо можно вложить в кольцо всех линейных преобразований левого (или правого) векторного пространства над некоторым телом. Если R — простое кольцо, а V — произвольный простой правый R-модуль, то канонический гомоморфизм*

$$R \to \mathrm{End}_{\mathrm{End}\, V_R} V$$

осуществляет такое вложение.

Доказательство. Любое кольцо R содержит максимальные правые идеалы, поскольку оно конечно порождено как правый R-модуль (3.8). Следовательно, над ним существует простой правый R-модуль V. По соображениям симметрии существуют и простые левые R-модули. Но если R — простое кольцо, то ядро канонического отображения $R \to \mathrm{End}_k V$ должно равняться нулю, где $k = \mathrm{End}\ V_R$. (Это ядро не может совпадать с R, так как $x1 = x$ для любого $x \in V$.) □

[Вложение, которое указано в этой теореме, является плотным в **конечной топологии** кольца $\mathrm{End}_k V$, базис которой составляют подмножества кольца $\mathrm{End}_k V$ вида

$$U(a, x_1, \ldots, x_n) = \{b \in \mathrm{End}_k V \mid x_i a = x_i b,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $a \in \mathrm{End}_k V$, $x_1 \ldots, x_n \in V$ и $n \in \mathbb{Z}^+$ (ср. теорему плотности Джекобсона — Шевалле 19.22).]

3.16. Упражнения.

3.16.1. (a) Пусть R — простое кольцо. Показать, что любой ненулевой подмодуль произведения R^I, в частности любой правый идеал кольца R, является образующим в категории mod-R.

(b) Центр простого кольца является полем.

3.16.2. Для произвольного кольца R любой образующий U категории mod-R конечно порожден и проективен над End U_R.

*3.16.3 (Морита [58]). Для произвольного кольца R модуль U категории mod-R является образующим тогда и только тогда, когда он сбалансирован в этой категории, а также конечно порожден и проективен в категории End U_R-mod.

3.16.4 (Риффель [65]). Любой ненулевой правый идеал простого кольца R сбалансирован в категории mod-R.

3.16.5. Любой минимальный правый идеал I полупервичного кольца R проективен. На самом деле он порожден идемпотентом кольца R, т. е. $I = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$.

*3.16.6 (Веддербёрн — Артин). Простое кольцо R обладает минимальным правым идеалом тогда и только тогда, когда оно является кольцом эндоморфизмов конечномерного векторного пространства над телом k. В этом случае mod-$R \approx$ mod-k.

Кольца матриц

Пусть A — произвольное множество. Тогда $(m \times n)$-матрицу (a_{ij}): $m \times n \to A$ над A для положительных m и n можно изобразить в виде прямоугольной таблицы:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная к ней матрица — это $(n \times m)$-матрица:

$$(a_{ji}) = (a_{ij})^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для случая, когда A — аддитивная полугруппа, **сумма** двух матриц была определена в 2.17.4:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij}),$$

где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых i, j. Множество A_{mn} всех $(m \times n)$-матриц над полугруппой A образует полугруппу относительно операции сложения матриц, причем она будет абелевой полугруппой или моноидом, или группой, если соответствующим свойством обладает A. **Нулевая матрица** (0) — это функция, $m \times n \to A$, тождественно равная нулю. Кроме того, если A — мультипликативная полугруппа, то **произведением** $(c_{iq}) = (a_{ij})(b_{pq})$ произвольной $(m \times n)$-матрицы (a_{ij}) и произвольной $(n \times s)$-матрицы (b_{pq}) называется $(m \times s)$-матрица, в которой $c_{iq} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kq}$. Это определяет операцию $A_{mn} \times A_{ns} \to A_{ms}$, называемую **умножением матриц**. Если A — моноид, то определена дельта Кронекера

$$\begin{cases} n \times n \to A \\ (i, j) \mapsto \delta_{ij}, \end{cases}$$

где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ для всех i и $j \neq i$. Если $a \in A$, то diag (a) есть $(n \times n)$-матрица $(a\delta_{ij})$. В случае когда $0a = a0$ для всех $a \in A$, $(n \times n)$-матрица diag (1) удовлетворяет условиям M diag $(1) = M$ и diag $(1)\, N = N$ для любых $(m \times n)$-матрицы M и $(n \times m)$-матрицы N и называется **единичной матрицей.**

3.17. Предложение.

3.17.1. *Если A — аддитивная полугруппа, то множество A_{mn} всех $(m \times n)$-матриц над A образует аддитивную полугруппу относительно сложения матриц, причем если A абелева или является моноидом или группой, то соответствующим свойством обладает и A_{mn}.*

3.17.2. *Если A — кольцо, то множество всех квадратных $(n \times n)$-матриц над ним является кольцом относительно сложения и умножения матриц. Оно называется* ***полным кольцом матриц над A порядка*** *n и обозначается через A_n или $M_n(A)$.*

Доказательство. Часть 3.17.1 очевидна. Чтобы доказать 3.17.2, рассмотрим три $(n \times n)$-матрицы (a_{ij}), (b_{pq}) и (c_{uv}) над A. Используя законы ассоциативности и дистрибутивности, мы можем установить закон ассоциативности для квадратных матриц:

$$\begin{aligned} \sum_q \Big(\sum_k a_{ik} b_{kq}\Big) c_{qv} &= \sum_q \sum_k (a_{ik} b_{kq}) c_{qv} = \\ &= \sum_q \sum_k a_{ik} (b_{kq} c_{qv}) = \\ &= \sum_k a_{ik} \Big(\sum_q b_{kq} c_{qv}\Big). \end{aligned}$$

Доказательство закона дистрибутивности проводится аналогично. Единичная матрица diag (1) служит мультипликативной единицей [нулевая матрица (0) является аддитивной единицей или, лучше сказать, нулем], так что A_n — мультипликативный моноид и, следовательно, кольцо. □

Кольцо матриц A_n служит простым примером некоммутативного кольца. Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j \in n}$ — семейство таких матриц $e_{ij} = (e'_{pq})$ из A_n, что $e'_{ij} = 1$ и $e'_{pq} = 0$, когда $p \neq i$ или $q \neq j$. Тогда для него выполняются условия

$$e_{ij} e_{pq} = \delta_{jp} e_{iq}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = 1.$$

Любое множество элементов $\{e_{ij}\}_{i,j \in n}$ в кольце R, удовлетворяющее этим двум условиям, называется множеством $(n \times n)$-**матричных единиц** кольца R. Если R обладает множеством $(n \times n)$-матричных единиц, то при $n > 1$ оно должно быть некоммутативным, так как $e_{11} e_{12} = e_{12}$, в то время как $e_{12} e_{11} = 0$. Таким образом, для $A = \mathbb{Z}_2$ кольцо $M_2(\mathbb{Z}_2)$ всех (2×2)-матриц над $\mathbb{Z}_2$ некоммутативно и состоит из 16 элементов.

3.18. Предложение. *Кольцо A содержит множество $(n \times n)$-матричных единиц тогда и только тогда, когда оно изоморфно полному кольцу матриц B_n порядка n над некоторым кольцом B. Если $M = \{e_{ij}\}_{i,\, j \in n}$ — множество $(n \times n)$-матричных единиц из A, а B — его централизатор в A, то каждый элемент $a \in A$ единственным образом представляется в виде*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} a_{ij},$$

где $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki} a e_{jk} \in B$ *для любых* $i, j \in n$, *и отображение*

$$\begin{cases} A \to B_n \\ a \mapsto (a_{ij}) \end{cases}$$

является кольцевым изоморфизмом. Кроме того, для каждого $i \in n$

$$\begin{cases} B \to e_{ii} A e_{ii} \\ b \mapsto e_{ii} b e_{ii} \end{cases}$$

— кольцевой изоморфизм, а ***диагональное отображение***

$$\begin{cases} B \to B_n \\ b \mapsto \operatorname{diag}(b) \end{cases}$$

— вложение колец.

Доказательство. Если $a \in A$, положим

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki} a e_{jk},$$

$i, j = 1, \ldots, n$. Тогда

$$a_{ij} e_{pq} = e_{pi} a e_{jq} = e_{pq} a_{ij},$$

$i, j = 1, \ldots, n$. Таким образом, $a_{ij} \in B$ для любого $a \in A$, $i, j = 1, \ldots, n$; в частности, $a_{ij} e_{ij} = e_{ii} a e_{jj}$. Следовательно, используя равенство $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = 1$, получаем

$$a = \sum_{i,\, j=1}^{n} e_{ii} a e_{jj} = \sum_{i,\, j=1}^{n} e_{ij} a_{ij}.$$

Если, кроме того, $a = \sum_{i,\, j=1}^{n} e_{ij} b_{ij}$, где $b_{ij} \in B$, $i, j = 1, \ldots, n$, то

$$a_{pq} = \sum_{k=1}^{n} e_{kp} a e_{qk} = \sum_{k=1}^{n} e_{kp} \Big(\sum_{i,\, j=1}^{n} e_{ij} b_{ij} \Big) e_{qk} =$$

$$= \Big(\sum_{k,\, j=1}^{n} e_{kj} b_{pj} e_{qk} \Big) = \sum_{k,\, j=1}^{n} e_{kk} b_{pq} = b_{pq},$$

$p, q = 1, \ldots, n$. Это доказывает единственность представления элемента a. Остальные утверждения теоремы очевидны. □

3.19. Упражнения.

3.19.1. Пусть A и B — объекты категории mod-R.

(a) Если $M = A \oplus B$ и $T = \operatorname{Biend} M_R$, то A и B являются T-подмодулями модуля M_T.

(b) Если $M = R \oplus B$ и $S = \operatorname{End} M_R$, то ${}_S M$ — циклический модуль, порожденный элементом (1, 0), где 1 — единица кольца R, а (a, b) обозначает произвольный элемент из M, $a \in R$, $b \in B$.

(c) Любой модуль, изоморфный прямой сумме $R \oplus A$, где A — некоторый правый R-модуль, сбалансирован.

(d) Если $A \in \text{mod-}R$, то для любого положительного целого числа n модуль A^n сбалансирован тогда и только тогда, когда сбалансирован модуль A.

(e) Показать, что G является образующим категории mod-R тогда и только тогда, когда $G^n \approx R \oplus A$ для некоторого целого числа n и R-модуля A. Вывести отсюда, что любой образующий категории mod-R сбалансирован.

(f) Пусть R — кольцо, n — целое число, большее нуля, и R^n — левый R_n-модуль, определяемый с помощью канонического кольцевого изоморфизма $R_n \to \operatorname{End} R_R^n$. Тогда функтор

$$h^{R^n} \begin{cases} \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}R_n \\ X \mapsto \operatorname{Hom}_R(R^n, X) \approx X^n \end{cases}$$

(индуцированный основным ковариантным функтором со значениями в категории множеств, определенным модулем R^n) является эквивалентностью и называется **функтором возведения в (n-ю) степень.** Вывести отсюда, что категория mod-R_n обладает всеми категорными свойствами, которыми обладает категория mod-R.

(g) Показать, что любой идеал кольца R_n имеет вид I_n, где I — идеал кольца R. Проделать это двумя способами: во-первых, прямыми вычислениями, во-вторых, с использованием упр. (f). Доказать, что $\operatorname{rad} R_n = (\operatorname{rad} R)_n$.

(h) Показать, что кольцо R_n удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (соотв. убывающих цепей) правых идеалов тогда и только тогда, когда R ему удовлетворяет. Показать, что это категорное свойство категории mod-R. Будет ли категорным свойство инвариантности базисного числа? [*Указание*: показать, что R есть IBN-кольцо тогда и только тогда, когда R_n является IBN-кольцом. Вывести отсюда, что R_n является IBN-кольцом, если R — тело или коммутативное кольцо.]

(i) Установить взаимно однозначное соответствие между правыми идеалами кольца R_n и R-подмодулями модуля R^n так, чтобы идеалы соответствовали (R_n, R)-бимодулям [ср. (f)].

3.19.2. (a) Любой модуль M_R — сбалансированный $(\operatorname{End} M_R)$-модуль.

(b) Циклический модуль R/A сбалансирован для любого идеала A.

3.19.3. Пусть D — инволюция кольца R. Показать, что D единственным образом продолжается до инволюции D' полного кольца матриц R_n, так что $D'(a_{ij}) = (Da_{ij})^t$ для любой матрицы (a_{ij}) кольца R_n. Обратно, показать, что каждая инволюция кольца R_n получается таким образом. Вывести отсюда, что если R — коммутативное кольцо, то отображение транспонирования $A \to A^t$ для матриц из R_n является инволюцией.

3.19.4. Пусть A — множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где a и b — комплексные числа, а $\bar{a}$, $\bar{b}$ — их комплексно сопряженные. Показать, что A — тело (относительно обычных операций сложения и умножения матриц), изоморфное *телу кватернионов* $\mathbb{H}$.

*3.19.5. Любое тело F является векторным пространством над любым своим подтелом. Показать, что если центр тела F содержит поле $\mathbb{R}$ действительных чисел и $\dim_{\mathbb{R}} F$ конечна, то $F \approx \mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ [1]).

3.19.6. Пусть B — произвольное кольцо. Тогда центром кольца B_n служит $\{\operatorname{diag}(c) \mid c \in \mathcal{C}(B)\}$.

3.19.7. Пусть D — тело.

(a) Показать, что D_n содержит нильпотентный элемент индекса нильпотентности n, но не содержит ни одного нильпотентного элемента с большим индексом нильпотентности.

(b) Доказать, что если D и H — такие тела, что $D_n \approx H_m$, то $m = n$ и $D \approx H$.

3.19.8. Пусть R — кольцо, содержащее множество матричных единиц $M = \{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$, $n > 1$, и пусть B — централизатор множества M в R. Проверить следующие формулы:

(a) $x_j = x_j^{-1}$, где $x_j = 1 - e_{11} - e_{jj} + e_{1j} + e_{j1}$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) $e_{jj} = x_j^{-1} e_{11} x_j$, $j = 1, \ldots, n$.

(c) $be_{ij} = t_{ij}(b) - e_{jj}$ для любых $b \in B$, где
$t_{ij}(b) = (1 + be_{ij})\, e_{jj}\, (1 - be_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$.

(d) $e_{jj} = e_{ij} - (1 - e_{ji})\, e_{ij}\, (1 + e_{ji})\, e_{ij}$ при $i \neq j$.

Пусть $e = e_{ij}$ — элемент из M, $n > 1$. Показать, что если S — подкольцо кольца R, содержащее каждый сопряженный к e элемент $x^{-1}ex$, где x пробегает все обратимые элементы из R, то $S = R$.

[1]) Это утверждение известно как теорема Фробениуса.— *Прим. ред.*

Другими словами, если $n > 1$, то $R = B_n$ порождается как кольцо всеми сопряженными к произвольной матричной единице из R элементами.

3.19.9. Пусть A — счетная бесконечная матрица

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} & \ldots \\ x_{31} & x_{32} & \ldots & x_{3n} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

с элементами x_{ij} из кольца R. Она называется конечно-строчной, если каждая строка содержит лишь конечное множество ненулевых элементов. Обозначим через R_ω множество всех конечно-строчных матриц над R. Если (x_{ij}) и $(y_{pq}) \in R_\omega$, то $c_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ik} y_{kj}$ для любых i, j является элементом кольца R, так как существует целое число K_i, такое, что $x_{ik} = 0$ для любого $k \geqslant K_i$.

(a) Показать, что R_ω образует кольцо относительно операций

$$(x_{ij}) + (y_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij}),$$
$$(x_{ij})\,(y_{pq}) = (c_{ij}),$$

где c_{ij} определен выше.

(b) Показать, что если $R^{(\omega)}$ — свободный правый R-модуль со счетным бесконечным базисом, то его кольцо эндоморфизмов изоморфно R_ω.

(c) Обобщить (b) на случай $R^{(I)}$, где I — произвольное вполне упорядоченное множество.

* 3.19.10 (Дьёдонне [42]). Пусть K — тело, M_n — группа обратимых элементов мультипликативного моноида кольца K_n, а C_n — ее коммутант. Тогда $M_n/C_n \approx K^*/C$, где K^* — мультипликативная группа ненулевых элементов тела K, а C — ее коммутант. (Может ли быть $C = K^*$?) Если K — поле, то C состоит из одной единицы и функция взятия определителя устанавливает искомый изоморфизм.

Дуальные модули

$\operatorname{Hom}_R(R, M)$ состоит из всех гомоморфизмов $R_R \to M$, а $\operatorname{Hom}_R(M, R)$ — из всех гомоморфизмов $M \to R_R$. Мы уже отмечали, что $\operatorname{Hom}_R(M, R)$ является левым R-модулем, который мы обозначаем через M^*. Так как определение $\operatorname{Hom}_R(M, R)$ дуально определению $\operatorname{Hom}_R(R, M)$, то, как показывает естественный изо-

морфизм $M \approx \mathrm{Hom}_R(R, M)$, модуль $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ разумно назвать **дуальным** к модулю M. Аналогично, если N — левый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(N, R)$ — правый R-модуль, также обозначаемый через N^*. Таким образом, для любого правого R-модуля M определен правый R-модуль $(M^*)^*$, обозначаемый через M^{**}, который называется **бидуальным** к M.

Далее, $D = \mathrm{Hom}(\ , R)$ — контравариантный функтор mod-$R \rightsquigarrow R$-mod и, значит, для каждого гомоморфизма $f\colon A \to B$ правых R-модулей определен гомоморфизм $D(f)\colon B^* \to A^*$. Иногда мы используем для этого функтора обозначение $(\ )^*$, и тогда $D(f)$ обозначается через f^*. Если D^2 обозначает функтор mod-$R \rightsquigarrow$ mod-R, являющийся произведением функтора D: mod-$R \rightsquigarrow R$-mod и функтора D: R-mod $\rightsquigarrow$ mod-R, то полагаем

$$f^{**} = D(D(f)) = (f^*)^*.$$

Если $x \in M$, то существует элемент $x^{**} \in M^{**}$, определенный соотношением

$$(f)\ x^{**} = f(x).$$

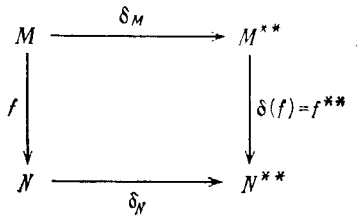
для всех $f \in M^*$.

Так как для любых $x, y \in M$, $a, b \in R$

$$(xa + yb)^{**} = x^{**}a + y^{**}b,$$

то имеет место R-модульный гомоморфизм $\delta_M\colon M \to M^{**}$, где $\delta_M(x) = x^{**}$ для любого $x \in M$. Этот гомоморфизм называется **каноническим**. Модуль M называется **полурефлексивным** [1]) (соотв. **рефлексивным**) модулем, если канонический гомоморфизм $M \to M^{**}$ инъективен (является изоморфизмом).

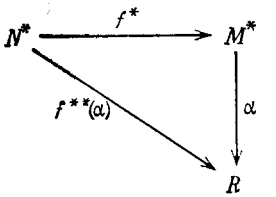
3.20. Пример. *Существует естественное преобразование* $\delta\colon I \rightsquigarrow D^2$, *где* I — *тождественный функтор* mod-$R \rightsquigarrow$ mod-R, *определяемое с помощью диаграммы*



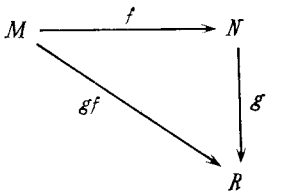
где $\delta_M(x) = x^{**}$ *для любого* $x \in M$ *и* $\delta(M) = M^{**}$.

[1]) В советской литературе принят также термин «модуль без кручения в смысле Басса».— *Прим. перев.*

Доказательство. Для простоты будем писать все морфизмы слева. Если $\alpha \in M^{**}$, то f^{**} отображает α в αf^*:



Если $\alpha = x^{**}$ и $g \in N^*$, то



Следовательно, $gf \in M^*$ и

$$x^{**}f^*\colon g \longmapsto x^{**}(gf).$$

Но

$$(1) \qquad x^{**}(gf) = gf(x)$$

для любого $x \in M$. Это показывает, что f^{**} отображает x^{**} в ту функцию из N^{**}, которая переводит $g \in N^*$ в $gf(x)$. Но $\delta_N f(x) \in N^{**}$ ведет себя точно таким же образом:

$$\delta_N f(x) = f(x)^{**}$$

и, следовательно,

$$(2) \qquad \delta_N f(x)\colon g \longmapsto f(x)^{**}(g) = g(f(x)) = gf(x).$$

Таким образом, (1) и (2) показывают, что первая диаграмма коммутативна, что завершает рассмотрение примера.

3.21. Дуальные базисы. *Пусть* k — *произвольное кольцо и* V — *свободный левый* k-*модуль с конечным базисом* $v_1, \ldots, v_n$. *Тогда дуальный модуль* $D(V)$ — *это свободный правый* k-*модуль, базис которого состоит из* n *проекций*

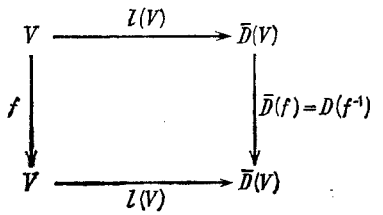
$$e_i \begin{cases} V \to k \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \longmapsto \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Доказательство. Чтобы доказать, что эти элементы образуют базис модуля $D(V)$, мы прежде всего должны доказать их линейную независимость над k. Это так, поскольку $f = \sum_{j=1}^{n} e_j\beta_j = 0$ влечет за собой $f(v_i) = \beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, если $g \in D(V)$, то $g = \sum_{i=1}^{n} e_i g(v_i)$, так как $g(v_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i g(v_i)(v_j)$, $j = 1, \ldots, n$, или, иначе говоря, так как $\sum_{i=1}^{n} e_i g(v_i)$ совпадает с g на $v_1, \ldots, v_n$. Это доказывает, что система $e_1, \ldots, e_n$ — базис модуля $D(V)$. Она называется **базисом модуля** $D(V)$, **дуальным к базису** $v_1, \ldots, v_n$, или **дуальным базисом**. (См. 3.22.1 ниже.)

Преобразование, не являющееся естественным. Пусть k — поле. Тогда $V \approx D(V)$, причем изоморфизм осуществляется отображением

$$h\begin{cases} V \to D(V) \\ v_i \mapsto e_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Пусть C обозначает категорию всех конечномерных векторных пространств над k с изоморфизмами в качестве морфизмов. Так как h: $V \to D(V)$ определено для всех $V \in \mathrm{Obj}\, C$ и так как $D(V) \in \mathrm{Obj}\, C$, то мы получаем преобразование l: $I \to D$, переводящее ковариантный функтор I (тождественный функтор) в контравариантный функтор D, где $l(V)$: $V \to D(V)$ для каждого V — это указанный выше изоморфизм. Теперь пусть $\overline{D}$ — функтор, который каждому $V \in \mathrm{Obj}\, C$ ставит в соответствие объект $D(V)$, а каждому изоморфизму f: $V \to V'$ — изоморфизм $D(f^{-1})$. Тогда преобразование l, где $l(V)$: $V \to \overline{D}(V)$, не будет естественным, так как если V одномерно и f: $V \to V$ — изоморфизм умножения на скаляр, $f(v_1) = \alpha v_1$ для некоторого $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0, 1$, то $\overline{D}(f)\, l(V)(v_1) = \alpha^{-1}e_1$, в то время как $l(V)\, f(v_1) = \alpha e_1$. Таким образом, диаграмма



коммутативной *не* является. Этот пример приведен в книге Маклейна [66].

3.22. Упражнения.

3.22.1. Пусть k — тело, C — полная подкатегория категории mod-k, состоящая из конечномерных правых векторных пространств а D — аналогичная подкатегория категории k-mod.

(a) Функтор h_k со значениями в категории k-модулей индуцирует функтор T: $C \rightsquigarrow D$. Аналогично определяется функтор S: $D \rightsquigarrow C$. Показать, что (T, S) — пара двойственности.

(b) Далее, для произвольного поля k и фиксированного целого числа $n > 0$ пусть C' — полная подкатегория категории mod-k, состоящая из правых векторных пространств конечной размерности $\leqslant n$, и пусть E' — аналогичная подкатегория левых векторных пространств. **Прямая** в C' (соотв. E') определяется как 1-мерное векторное пространство. **Гиперплоскость** — это $(n-1)$-мерное векторное пространство. (Плоскость 2-мерна.) Показать, что h_k индуцирует двойственность $C' \rightsquigarrow E'$, отображающую

$$\begin{cases} \text{прямые} \to \text{гиперплоскости} \\ \text{гиперплоскости} \to \text{прямые}. \end{cases}$$

(c) Более общим образом, показать, что для любого конечномерного правого векторного пространства V функтор двойственности индуцирует структурный антиизоморфизм между структурой векторных подпространств пространства V и аналогичной структурой для пространства $V' = \mathrm{Hom}_k(V, k)$.

3.22.2. Каждому правому векторному пространству V над k соответствует **проективное пространство** $\overline{V}$, определяемое как структура подпространств пространства V. Для каждого элемента $X \in \overline{V}$ определим **проективную размерность** $d_p X = \dim_k X - 1$. Элемент X называется «точкой» пространства $\overline{V}$, если он имеет нулевую проективную размерность, «прямой», если он имеет проективную размерность 1, и т. д. Таким образом, прямые пространства V становятся точками в $\overline{V}$, плоскости в V — это «прямые» в $\overline{V}$ и т. д. (0-подпространство пространства V можно представлять себе как пустой элемент проективного пространства $\overline{V}$.)

(a) Пусть V и W — конечномерные векторные пространства над k. **Коллинеацией** проективного пространства $\overline{V}$ называется структурный изоморфизм $\overline{V} \to \overline{W}$, а **корреляцией** — структурный антиизоморфизм. Показать, что для каждого правого векторного пространства V найдется коллинеация (соотв. корреляция) в левое векторное пространство W.

(b) Пусть θ — автоморфизм тела k и f: $V \to W$ — гомоморфизм аддитивных групп векторных пространств над k, такой, что

$$f(x\alpha) = f(x)\,\theta(\alpha)$$

для любых $x \in V$, $\alpha \in k$. Тогда f называется **полулинейным преобразованием** (см. также гл. 23), и оно индуцирует коллинеацию

$\bar{f}\colon \bar{V} \to \bar{W}$, где

$$\bar{f}(X) = f(X)$$

для любого $X \in \bar{V}$.

* (c) **Основная теорема проективной геометрии.** При $\dim_k V \geqslant 3$ любая коллинеация $\bar{V} \to \bar{W}$ индуцируется полулинейным преобразованием. (По поводу этой и других теорем проективной геометрии см. Артин [69, гл. II, § 10, стр. 119 и далее] [1].)

3.23. Лемма о дуальном базисе. *Правый R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда в P существует семейство элементов $\{x_i\}_{i\in I}$, а в $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$ — семейство морфизмов $\{f_i\}_{i\in I}$, такие, что любой элемент $p \in P$ представим в виде конечной суммы*

$$p = \sum_{i\in I} x_i f_i(p),$$

где $f_i(p) = 0$ почти для всех $i \in I$. Если P проективен, то в качестве $\{x_i\}_{i\in I}$ можно взять любую систему образующих.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — произвольная система образующих модуля P, $F = R^{(I)}$ — свободный модуль с базисом $\{y_i\}_{i\in I}$, и пусть $h\colon F \to P$ — гомоморфное наложение, переводящее y_i в x_i для любого i. Тогда P проективен в том и только том случае, когда h расщепляется, т. е. в том и только том случае, когда существует гомоморфизм $g\colon P \to F$, такой, что $hg = 1_P$ [2]).

Необходимость. Если P проективен, а $g\colon P \to F$ — такой гомоморфизм, что $hg = 1_P$, то для любого $p \in P$ можно записать

$$g(p) = \sum_{i\in I} y_i r_i(p),$$

где $r_i(p) \in R$ и $r_i(p) = 0$ почти для всех i. Семейство $\{f_i\}_{i\in I}$, где

$$f_i \begin{cases} P \to R \\ p \mapsto r_i(p), \end{cases}$$

удовлетворяет соотношению

$$p = hg(p) = \sum_{i\in I} x_i f_i(p).$$

Достаточность. Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ и $\{f_i\}_{i\in I}$ — указанные в формулировке теоремы семейства. Тогда $\{x_i\}_{i\in I}$ порождает P и существуют эпиморфизм $h\colon F \to P$ и гомоморфизм $g\colon P \to F$, где $p = \sum_{i\in I} x_i f_i(p) \in P$ и

$$g(p) = \sum_{i\in I} y_i f_i(p).$$

Так как $hg = 1_P$, то P проективен. □

[1]) См. также Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, М, 1955, в особенности гл. III—V.— *Прим. ред.*

[2]) Этим доказано, что модуль проективен тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым из некоторого свободного.— *Прим. ред.*

Аннуляторы

Спаривание — это отображение множеств

$$\begin{cases} A \times B \to R \\ (a, b) \mapsto ab. \end{cases}$$

Тогда A и B **спарены относительно** R. Если множества A и B спарены относительно моноида R с нулем, то **аннулятор** в B элемента $a \in A$ есть подмножество

$$a^{\perp} = \mathrm{ann}_B a = \{b \in B \mid ab = 0\}.$$

Если X — подмножество из A, то $\mathrm{ann}_B X = \bigcap_{a\in X} \mathrm{ann}_B a$ также обозначается через $X^{\perp}$. Далее, $Xb = 0$ означает, что $b \in \mathrm{ann}_B X$. Аналогичные обозначения употребляются для $\mathrm{ann}_A Y$, где Y — произвольное подмножество из B, но индекс $^{\perp}$ ставится с другой стороны. Таким образом, ${}^{\perp}Y = \mathrm{ann}_A Y$. Отображение

$$\begin{cases} \mathrm{Pow}\, A \to \mathrm{Pow}\, B \\ X \mapsto X^{\perp} \end{cases}$$

является структурным антигомоморфизмом, который индуцирует структурный антиизоморфизм подструктур, состоящих из аннуляторных подмножеств. Иными словами,

$$X^{\perp} = \mathrm{ann}_B X = \mathrm{ann}_B(\mathrm{ann}_A(\mathrm{ann}_B X)) = ({}^{\perp}(X^{\perp}))^{\perp}$$

для любого подмножества X из A. Аннуляторные подмножества множества A (соотв. B) образуют полную подструктуру структуры Pow A (соотв. Pow B).

Это определяет аннулятор $\mathrm{ann}_R X$ произвольного подмножества X правого R-модуля $M \times R \to R$. Ясно, что это правый идеал, он называется **правым аннулятором множества** X. Если X — подмножество из R_R, то его аннулятор $\mathrm{ann}_R X$ в R_R называется **правым аннуляторным идеалом**. Кроме того, для правого модуля M и подмножества X из R определен аннулятор $\mathrm{ann}_M X$, он является End M_R-подмодулем [1]) в M. Левые аннуляторные идеалы определяются симметричным образом.

[1]) Это не значит, что $\mathrm{ann}_M X$ является R-подмодулем в M. Однако $\mathrm{ann}_M X$ будет R-подмодулем в M, если X — левый идеал кольца R.

Если $X \subseteq M_R$, а N — некоторый подмодуль в M_R, то определим

$$\operatorname{ann}_R(X/N) = \{r \in R \mid Xr \subseteq N\}.$$

Если X — подмодуль, содержащий N, то $\operatorname{ann}_R(X/N)$ совпадает с аннулятором фактормодуля X/N и, таким образом, мы последовательны в выборе обозначений.

Если R — подкольцо кольца A, то для любого подмножества X из R имеет место равенство $\operatorname{ann}_R X = R \cap \operatorname{ann}_A X$, которое показывает, что R удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей правых аннуляторных идеалов, если A обладает соответствующим свойством.

Два канонических гомоморфизма

Пусть M и G — правые R-модули. Рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\coprod_{f \in \operatorname{Hom}_R(G, M)} f \begin{cases} G^{(\operatorname{Hom}_R(G, M))} \to M \\ x = (\ldots, x_f, \ldots) \mapsto \sum\limits_{f \in \operatorname{Hom}_R(G, M)} f(x_f), \end{cases}$$

где $x \mapsto x_f$ — проекция $G^{(\operatorname{Hom}_R(G, M))} \to G$, определяемая элементом $f \in \operatorname{Hom}_R(G, M)$. Образ этого гомоморфизма называется **следом модуля** G **в** M и обозначается через $\operatorname{tr}_M G$. Если $a \in \operatorname{End} M_R$ и $f: G \to M$, то $af: G \to M$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{tr}_M G$ есть $(\operatorname{End} M_R, R)$-бимодуль и канонический гомоморфизм индуцирует точную последовательность

$$G^{(\operatorname{Hom}_R(G, M))} \to \operatorname{tr}_M G \to 0.$$

Если $B = \operatorname{End} M_R$ и $x \in G$, то

$$O_G^M(x) = \{f(x) \mid f \in \operatorname{Hom}_R(G, M)\}$$

оказывается B-модулем и $\operatorname{tr}_M G = \sum\limits_{x \in G} O_G^M(x)$. Если $M = R$, то $\operatorname{tr}_R G$ является идеалом в R, называемым **идеалом следа**. В этом случае $O_G(x)$ обозначает левый идеал $O_G^R(x)$ кольца R и $\operatorname{tr}_R G$ сокращается до $\operatorname{tr} G$.

Двойственным образом, существует канонический гомоморфизм

$$\coprod_{f \in \operatorname{Hom}_R(M, G)} \begin{cases} M \to G^{\operatorname{Hom}_R(M, G)} \\ x \mapsto \langle\ ,\ x\rangle, \end{cases}$$

где $\langle\ ,\ x\rangle(g) = g(x)$ для любого $g \in \operatorname{Hom}_R(M, G)$. Ядро этого гомоморфизма совпадает с аннулятором $\operatorname{ann}_M \operatorname{Hom}_R(M, G)$ группы $\operatorname{Hom}_R(M, G)$ в M относительно спаривания

$$\begin{cases} \operatorname{Hom}_R(M, G) \times M \to G \\ (g, x) \mapsto g(x). \end{cases}$$

Таким образом,

$$0 \to \operatorname{ann}_M \operatorname{Hom}_R(M, G) \to M \to G^{\operatorname{Hom}_R(M, G)}$$

— точная последовательность, которая при $M = R$ с помощью канонического изоморфизма $G \approx \operatorname{Hom}_R(R, G)$ превращается в точную последовательность

$$0 \to \operatorname{ann}_R G \to R \to G^R.$$

Значит, канонический гомоморфизм $R \to G^R$ оказывается вложением тогда и только тогда, когда G — точный модуль (ср. 3.28). Дуальным к этому свойству служит такое: последовательность $G^{(\operatorname{Hom}_R(G, R))} \to R \to 0$ точна. Это бывает тогда и только тогда, когда G — образующий (см. далее 3.26), и по этой причине в литературе образующий называют также **коточным** модулем.

3.24. Упражнения.

3.24.1. Пусть e — идемпотент кольца A. Тогда $\operatorname{Hom}_A(eA, A) \approx \operatorname{Hom}_A(A/(1-e)A, A) \approx Ae = \operatorname{ann}_A(1-e)A$. Кроме того, модуль $\operatorname{End}_A eA$ канонически изоморфен eAe. (Если eA — образующий в mod-A, то A канонически изоморфно $\operatorname{End}_{eAe} eA$. Ср. 4.1. Заметим, что eA — образующий тогда и только тогда, когда $AeA = A$. См. 3.24.4.)

3.24.2. Если $\{e_{ij}\}_{i,j \in n}$ — матричные единицы кольца матриц A_n порядка n, то правый идеал $e_{ii}A_n$ кольца A_n служат образующим в категории mod-A_n и является конечно порожденным проективным модулем над своим кольцом эндоморфизмов, которое канонически изоморфно кольцу $e_{ii}Ae_{ii}$ для любого $i \in n$.

*3.24.3. Пусть A — произвольное кольцо. Тогда mod-$A \approx$ $\approx$ mod-B для некоторого кольца B в том и только том случае, когда существует целое число n и идемпотент e полного кольца матриц B_n порядка n, такие, что $B_n e B_n = B_n$ и что кольцо A изоморфно кольцу $eB_n e$.

3.24.4. (a) Пусть R — кольцо. Если G — некоторый его правый идеал, то $\operatorname{tr} G$ содержит идеал RG, порожденный G.

(b) Если $G = eR$, где e — идемпотент, то $\operatorname{tr} G = ReR$.

3.24.5. Доказать все утверждения из упр. 7.22 и 7.23.

3.24.6. Если R — тело, то кольцо матриц R_n — кольцо главных правых (левых) идеалов и каждый его односторонний идеал порождается идемпотентом. Вывести отсюда, что любой односторонний идеал кольца R_n является аннуляторным идеалом.

3.25. Предложение. *Если C — категория с копроизведениями, то для каждого объекта X этой категории и каждого объекта U копроизведение всех морфизмов $f\colon U \to X$ является морфизмом*

$$(1)\qquad U^{(\mathrm{Mor}_C(U,\,X))} \to X,$$

называемым ***каноническим****. Кроме того, U будет образующим категории C тогда и только тогда, когда выполняются следующие эквивалентные условия* (a) *и* (b):

(a) *Для каждого объекта X категории C канонический морфизм* (1) *является эпиморфизмом.*

(b) *Для каждого объекта X категории C существует множество I, зависящее от X, и эпиморфизм $U^{(I)} \to X$.*

Дуальное утверждение имеет место для кообразующего U категории C с произведениями.

Доказательство. Если U — образующий, то (a) выполняется, и ясно, что (a) $\Leftrightarrow$ (b). Покажем, что из условия (a) вытекает, что U — образующий. Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ — морфизмы. Если для всех $h\colon U \to X$ справедливо равенство $fh = gh$, то $fp = gp$ и для канонического морфизма p, указанного в формулировке теоремы. Так как p — эпиморфизм по (a), то $f = g$. Таким образом, из того, что $f \neq g$, следует, что $fh \neq gh$ для некоторого $h\colon U \to X$. Значит, U — образующий. □

3.26. Предложение. *Следующие утверждения об объекте G категории* mod-R *эквивалентны:*

3.26.1. *Для каждого объекта X существует множество I и эпиморфизм $G^{(I)} \to X$.*

3.26.2. *$G^n \approx R \oplus Q$ для некоторого целого числа n и объекта Q.*

3.26.3. *G — образующий, т. е. функтор h^G со значениями в категории множеств унивалентен.*

3.26.4. *Для каждого правого R-модуля M канонический гомоморфизм $G^{(F)} \to M$, где $F = \mathrm{Hom}_R(G, M)$, сюръективен.*

3.26.5. $\mathrm{tr}\, G = R$.

3.26.6. *Существует конечное множество элементов $f_1 \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(G, R)$ и $g_1, \ldots, g_n \in G$, таких, что*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(g_i) = 1.$$

Доказательство. 3.26.1 $\Leftrightarrow$ 3.26.3 $\Leftrightarrow$ 3.26.4 $\Leftrightarrow$ 3.26.5, согласно предложению 3.25, а 3.26.5 $\Leftrightarrow$ 3.26.6 очевидно.

3.26.1 $\Rightarrow$ 3.26.2, если положить $X = R$, так как если $f\colon G^{(I)} \to R$ сюръективен и если J — носитель множества $f^{-1}(1)$, то f индуцирует наложение $f'\colon G^{(J)} \to R$. Следовательно, $G^n \to R \to 0$ — точная последовательность, где n — мощность множества J.

3.26.2 $\Rightarrow$ 3.26.1. Утверждение 3.26.1 справедливо для $G = R$ в силу 3.9 и, следовательно, выполняется для любого образующего G, так как существует эпиморфизм $G^{(J)} \to R$ и, следовательно, эпиморфизм $G^{(I\times J)} \to R^{(I)}$ для любого множества индексов I. Таким образом, если $R^{(I)} \to X$ — эпиморфизм, то композиция $G^{(I\times J)} \to R^{(I)} \to X$ — эпиморфизм. □

3.27. (a) Следствие. *Пусть R — подкольцо кольца S (следовательно, единицей кольца S является единица из R). Тогда R-модуль S служит образующим в категории* mod-R *в том и только том случае, когда R_R выделяется прямым слагаемым в S.*

Доказательство. Любой R-модуль вида $R \oplus A$ является образующим. Обратно, предположим, что S — образующий, и пусть $f_i \in \mathrm{Hom}_R(S, R)$, $x_i \in S$ таковы, что $\sum_1^n f_i(x_i) = 1$ (см. 3.26.6). Отображение

$$\varphi\colon y \to \sum_1^n f_i(x_i y),$$

$y \in S$, есть R-гомоморфизм $\varphi\colon S \to R$. Далее, $\varphi(a) = \varphi(1)\, a = 1\, a = a$ для любого $a \in R$. Более того, для любого $y \in S$ имеем $\varphi(y) = y$ тогда и только тогда, когда $y \in R$. Таким образом, $S = \ker\varphi \oplus R$ [1]). □

3.27. (b) Пример. Пусть G — такая группа автоморфизмов кольца R, что для каждого $x \in R$ множество $Gx = \{g(x)\}_{g\in G}$ конечно и $|Gx|$ обратимо в R. «Отображение усреднения» переводит произвольный элемент x в элемент $\sum_{y\in Gx} y\,|Gx|^{-1}$. Пусть A обозначает множество неподвижных относительно G элементов $\mathrm{fix}\, G$, $A = \{y \in R \mid g(y) = y\ \forall g \in G\}$. Оно называется **подкольцом Галуа** кольца R, и отображение усреднения $R \to A$ расщепляется [2]) в mod-A (а также в A-mod). Отсюда видно, что A выделяется прямым слагаемым в R, если на R задать каноническую структуру A-модуля. Группа G обладает нужными свойствами, если, например, она конечна и либо $|G|$ обратимо в R, либо, более общим образом, существует элемент $x \in R$, такой, что $\sum_{g\in G} g(x)$ обратим в R. (См. теорему Машке 13.21, а также доказательство теоремы 13.23.)

Другие примеры дает упражнение 3.30 (b).

---

[1]) Достаточно записать $s = (s - \varphi(s)) + \varphi(s)$ и заметить, что $s - \varphi(s)$ лежит в $\ker\varphi$.— *Прим. ред.*

[2]) Определение см. на стр. 200.— *Прим. перев.*

Подобъекты и факторобъекты

Два морфизма $f_i\colon X_i \to Y$, $i = 1, 2$, категории C с областью значений Y называются **эквивалентными**, если они являются эквивалентными объектами в категории target Y. В этом случае мы пишем $f_1 \approx f_2$. Таким образом, $f_1 \approx f_2$ тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2 h$ для некоторой эквивалентности $h\colon X_1 \to X_2$. В случае когда $f_i\colon X_i \to Y$ — мономорфизмы ($i = 1, 2$), мы пишем $f_2 \leqslant f_1$, если f_1 пропускается через f_2. Тогда $f_1 \leqslant f_2$ и $f_2 \leqslant f_1$ в том и только том случае, когда $f_1 \approx f_2$. Это показывает, что отношение $\leqslant$ задает частичный порядок на классах эквивалентности мономорфизмов категории target Y для любого объекта Y. Если $k\colon K \to X$ — мономорфизм, то K называется **подобъектом**, а k — **вложением или включением** K в X. Выражение $K \subseteq X$ означает, что K — подобъект объекта X, а через i_K^X мы обозначим вложение K в X. Двойственным образом, если $q\colon Y \to Q$ — эпиморфизм, то Q — **факторобъект**.

Объект X категории C **нетёров (артинов)**, если класс его подобъектов удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей Таким образом, если для любой последовательности

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$$

подобъектов X_i объекта X существуют целое число n и эквивалентности $X_i \approx X_j$ (как подобъектов) для всех $i \geqslant j \geqslant n$, то X нётеров. Дуальное утверждение справедливо для артиновых объектов. Нётеровость объекта эквивалентна условию максимальности, а именно условию, что любой непустой класс его подобъектов содержит подобъект, который максимален в этом классе подобъектов, упорядоченном по включению.

Кольцо R называется **артиновым (нётеровым) справа**, если оно является артиновым (нётеровым) объектом категории mod-R. Любое тело является артиновым и нётеровым как справа, так и слева, и тем же свойством обладает полное кольцо матриц R_n над телом. (Доказательство?) Такие кольца образуют очень важный класс колец, который будет подробно исследоваться в других главах, а здесь вводится для характеризации конечно порожденных точных модулей над артиновыми кольцами, содержащейся в следующем предложении.

3.28. Предложение. *Пусть M — некоторый модуль над кольцом R, причем или* (a) *R коммутативно и M конечно порожден, или* (b) *R артиново справа. Тогда M точен в том и только том случае, когда существует вложение $R \to M^n$ R-модуля R в произведение конечного числа экземпляров модуля M.*

Доказательство. Если $R \to M^n$ — вложение, то M^n, а следовательно, и M точен, поскольку R_R точен. Предположим теперь, что M точен. Пусть $F = \mathrm{Hom}_R(R, M)$ и допустим, что

(*) *существует конечное множество* $\{f_i \in F \mid i = 1, \ldots, n\}$, *для которого* $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = 0$.

Тогда, если положить $F' = \{f_1, \ldots, f_n\}$, то включение $F' \to F$ и канонический гомоморфизм $R \to M^F$ (предложение 3.25) индуцируют мономорфизм $R \to M^{F'} \approx M^n$. Теперь если R коммутативно и если $\{f_1(1), \ldots, f_n(1)\}$ порождает M, где $f_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$, то $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяют условию (*). Если же R артиново, то найдутся $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющие (*) для некоторого конечного n. Действительно, пусть $A = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$ минимален в множестве всех правых идеалов кольца R, представимых в виде конечных пересечений ядер элементов из F; тогда $A \cap \ker f = A$ для всех $f \in F$, т. е. (в силу точности модуля M) $0 = \bigcap_{f \in F} \ker f = A$. Морфизмы $f_1, \ldots, f_n$ и являются искомыми. □

3.29. Упражнения.

3.29.1. Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда каждый правый идеал конечно порожден. В этом случае кольцо многочленов $R[x]$ также нётерово справа (теорема Гильберта о базисе 7.13).

3.29.2. Если R — нётерово справа, то любой конечно порожденный модуль из категории mod-R нётеров и полная подкатегория категории mod-R, состоящая из конечно порожденных модулей, нётерова. Дуальное утверждение справедливо для артинова случая.

* 3.29.3 (Хопкинс — Левицкий). Любое артиново справа кольцо нётерово справа.

3.29.4. Если R вкладывается в правый R-модуль M^n для некоторого целого $n > 0$, то существует канонический морфизм $B^n \to M$, где $B = \mathrm{End}\, M_R$; если M квазиинъективен (стр. 222), то последовательность $B^n \to M \to 0$ точна. Вывести из 3.28, что любой квазиинъективный модуль над артиновым справа кольцом R конечно порожден над своим кольцом эндоморфизмов (ср. 19.5).

3.30 (a). Предложение. *Если P — проективный R-модуль, то*

$$(\mathrm{tr}\, P)^2 = \mathrm{tr}\, P$$

и

$$P(\mathrm{tr}\, P) = P.$$

Кроме того, в этом случае для произвольного левого идеала I кольца R эквивалентны следующие условия: (1) $I \supseteq \mathrm{tr}\, P$; (2) $(\mathrm{tr}\, P)\, I = \mathrm{tr}\, P$; (3) $PI = P$.

Доказательство. Согласно лемме 3.23 о дуальном базисе, существуют множества $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$ и $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq P^*$, такие, что любой элемент $x \in P$ можно представить в виде конечной суммы

$$x = \sum x_i f_i(x).$$

Так как $f_i(x) \in O_P(x) \subseteq \operatorname{tr} P$, то $P = P(\operatorname{tr} P)$.

Если I — левый идеал кольца R, такой, что $PI = P$, то

$$T = \operatorname{tr}_R P = \operatorname{tr}_R(PI) = (\operatorname{tr}_R P) I = TI \subseteq I.$$

Таким образом, (3)⇒(2) доказано, а импликация (2)⇒(1) очевидна, так как I — левый идеал. Поскольку $PT = P$, то ясно, что (1)⇒⇒(3). Таким образом, (1), (2) и (3) эквивалентны, откуда $T^2 = T$. □

3.30 (b). Упражнения. 1. Если R — коммутативное кольцо, то любой идемпотентный конечно порожденный идеал $I = I^2$ порождается идемпотентным элементом. Вывести отсюда, что аннулятор проективного модуля порождается идемпотентом тогда и только тогда, когда его след конечно порожден.

2. Любой конечно порожденный точный проективный модуль над коммутативным кольцом R является образующим.

3. Пусть кольцо S является конечно порожденным и проективным модулем над своим коммутативным подкольцом R. Тогда R_R выделяется в S_R прямым слагаемым и, следовательно, S_R — образующий в mod-R.

Предобразующие

Модуль M является **предобразующим**, если каждый простой модуль является гомоморфным образом модуля M. Двойственным образом определяется **предкообразующий.** Любой образующий оказывается предобразующим, а любой кообразующий — предкообразующим. Если N — предобразующий (соотв. образующий) и $M \to N$ — эпиморфизм, то M — предобразующий (соотв. образующий). Дуальное утверждение справедливо для предкообразующих и кообразующих.

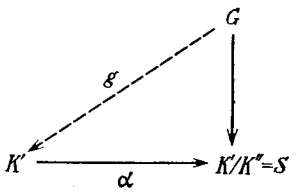
3.31. Предложение.

3.31.1. *Проективный модуль G является образующим тогда и только тогда, когда он — предобразующий.*

3.31.2. *Инъективный модуль C является кообразующим тогда и только тогда, когда он — предкообразующий.*

Доказательство 3.31.1. Необходимость очевидна. Обратно, пусть G — проективный предобразующий, и пусть $f: M \to N$ — ненулевой гомоморфизм модулей. Так как $\ker f \neq M$,

то существует элемент $x \in M$, такой, что $x \notin \ker f$. Пусть $K = \ker f$ и $K' = K + xR$. Поскольку K'/K — циклический модуль, то в нем существует максимальный подмодуль K''/K. Так как $S = K'/K''$ — простой модуль, то существует эпиморфизм $G \to S$.



В силу проективности модуля G существует гомоморфизм $g: G \to K'$, пополняющий приведенную выше диаграмму, где α — канонический гомоморфизм. Так как $K' \subseteq M$, g индуцирует гомоморфизм $G \to M$, и $\operatorname{im} g \not\subseteq \ker f$. Согласно 3.26.3, G — образующий. Это доказывает 3.31.1. Доказательство 3.31.2 проводится двойственным образом. □

Аксиомы аддитивной категории

Категория C называется **аддитивной**, если для каждой пары X, Y ее объектов $\operatorname{Mor}_C(X, Y)$ является абелевой группой, удовлетворяющей следующим аксиомам:

(Ad 1) *Умножение морфизмов*

$$\operatorname{Mor}_C(Y, Z) \times \operatorname{Mor}_C(X, Y) \to \operatorname{Mor}_C(X, Z)$$

билинейно, т. е.

$$f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2,$$
$$(f_1 + f_2) g = f_1 g + f_2 g,$$

когда произведения определены.

(Ad 2) *C имеет нулевой объект* 0.

(Ad 3) *Существует копроизведение любого конечного семейства объектов категории C* [1]).

Нулевой элемент 0 группы $\operatorname{Mor}_C(X, Y)$, т. е. ее аддитивная единица, удовлетворяет условию

$$0 = f0$$

для всех морфизмов f, так как (Ad 1) влечет за собой $f0 = f(0 + 0) = f0 + f0$, и, прибавив $-(f0)$, получаем $0 = f0$. Кроме того,

$$f(-g) + fg = f((-g) + g) = f0 = 0,$$

[1]) Обычно выполнение этой аксиомы не предполагается.

так что

$$f(-g) = -(fg).$$

Аналогично,

$$(-f)\,g = -(fg) \text{ и } (-f)(-g) = fg.$$

Категория C называется категорией с **(ко)произведениями**, если в ней существует (ко)произведение любого семейства морфизмов. Если (как, например, в аддитивных категориях) существует (ко)произведение любого конечного семейства морфизмов, то C называется **категорией с конечными (ко)произведениями.**

Аддитивные функторы

Если C — аддитивная категория и $X \in \mathrm{Obj}\, C$, то $\mathrm{End}_C X$ — кольцо относительно операции сложения в абелевой группе и произведения морфизмов. Его называют **кольцом эндоморфизмов объекта** X. Для любого объекта Y группа $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ является левым модулем над $\mathrm{End}_C Y$ относительно индуцированной операции

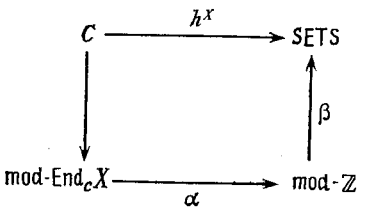
$$\mathrm{Mor}_C(Y, Y) \times \mathrm{Mor}_C(X, Y) \to \mathrm{Mor}_C(X, Y).$$

Таким образом, если $a \in \mathrm{End}_C Y$ и $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$, то $af \in \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$. Аналогично, $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ — правый модуль над $\mathrm{End}_C X$.

Пусть C и D — аддитивные категории. Тогда функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ **аддитивен,** если индуцированные морфизмы $\mathrm{Mor}_C(X, Y) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_D(TX, TY)$ являются групповыми гомоморфизмами, т. е.

$$T(f + g) = Tf + Tg$$

для любых $f, g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ и любых объектов X и Y категории C. Тогда, если T ковариантен (соотв. контравариантен), он индуцирует кольцевые гомоморфизмы (соотв. антигомоморфизмы) $\mathrm{End}_C X \to \mathrm{End}_C TX$ для каждого объекта X. Билинейность операции в $\mathrm{Mor}\, C$ влечет за собой аддитивность основных функторов h^X и h_X для любого X (и наоборот). Таким образом, h^X пропускается через $\mathrm{mod}\text{-}\mathrm{End}_C X$ и $\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$:



где α и β — забывающие функторы. Аналогично, h_X пр пускается через $\mathrm{End}_C X$-mod.

Категория аддитивных категорий содержит аддитивные категории в качестве объектов, а морфизмами служат аддитивные ковариантные функторы. Однообъектная полная подкатегория любой аддитивной категории эквивалентна категории RINGS.

Мы обозначим через $\mathrm{Adfunct}(C, D)$ категорию аддитивных функторов $C \rightsquigarrow D$, где C и D — аддитивные категории.

3.32. Предложение. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечный набор объектов некоторой аддитивной категории C.*

3.32.1. *Семейство $\{u_i\colon A_i \to A \mid i = 1, \ldots, n\}$ морфизмов является копроизведением семейства $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ тогда и только тогда, когда существуют морфизмы $\{p_i\colon A \to A_i\}$, такие, что*

$$p_i u_j = \delta_{ij} 1_{A_i}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} u_k p_k = 1_A.$$

3.32.2. *Если* 3.32.1 *выполняется, то $\{p_i\colon A \to A_i\}$ — произведение семейства $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.*

3.32.3. *В категории C конечные произведения $\prod_{i=1}^{n} A_i$ существуют для любого конечного семейства объектов $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.*

3.32.4. *Дуальная категория C^* аддитивна.*

3.32.5. *Каждое конечное произведение является бипроизведением.*

Доказательство 3.32.1. Если $\{u_i\colon A_i \to A \mid i = 1, \ldots, n\}$ — копроизведение, то существуют морфизмы $p_i\colon A \to A_i$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие соотношениям $p_i u_j = \delta_{ij 1_{A_i}}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда для каждого i имеем

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k p_k\Big) u_i = \sum_{k=1}^{n} (u_k p_k u_i) = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta_{ki} 1_{A_i} = u_i = 1_A u_i.$$

Следовательно, по определению копроизведения $\sum_{k=1}^{n} u_k p_k = 1_A$.

Обратно, если морфизмы $\{p_i\}$ удовлетворяют заданным условиям и если $f_i\colon A_i \to A'$ — морфизмы категории C, $i = 1, \ldots, n$, то морфизм $f = \sum_{k=1}^{n} f_k p_k$ удовлетворяет условию

$$f u_i = \sum_{k=1}^{n} f_k p_k u_i = f_i.$$

Кроме того, если f' — другой морфизм, такой, что $f'u_i = f_i$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$f' = f'1_A = f' \sum_{k=1}^{n} u_k p_k = \sum_{k=1}^{n} (f'u_k)\, p_k = \sum_{k=1}^{n} f_k p_k = f.$$

Значит, f единствен, и, следовательно, A — копроизведение.

Если в дуальной категории C^* мы определим $f^* + g^* = (f + g)^*$ для морфизмов f, g категории C, то $\mathrm{Mor}_{C^*}(X^*, Y^*)$ станет абелевой группой для любых $X, Y \in \mathrm{Obj}\, C$ и C^* удовлетворяет (Ad 1) и (Ad 2). В обозначениях 3.32.1, если $\{u_i\colon A_i \to A\}$ — конечное копроизведение в категории C, то $\{u_i^*\colon A^* \to A_i^*\}$ — конечное произведение в C^*, такое, что

$$u_j^* p_i^* = \delta_{ij} 1_{A_i^*},$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^* u_k^* = 1_{A^*}$$

для некоторых морфизмов $p_i\colon A \to A_i$. Тогда из доказательства утверждения 3.32.1 вытекает, что $\{p_i^*\colon A_i^* \to A^*\}$ является копроизведением семейства $\{A_i^* \mid i = 1, \ldots, n\}$ в C^*. (Следовательно, C^* удовлетворяет (Ad 3).) Отсюда получаем, что $\{p_i\colon A \to A_i\}$ — произведение в C. Это доказывает 3.32.2 и 3.32.3. Так как C^* удовлетворяет (Ad 3), то она аддитивна, т. е. доказано 3.32.4. Морфизм $\delta = (\delta_{ij} 1_{A_i})$, отображающий копроизведение $A = \coprod A_i$ в произведение $A = \prod A_i$, — это просто 1_A, и тем самым доказано 3.32.5. □

Таким образом, теорема, дуальная к некоторой теореме об аддитивных категориях, есть теорема об аддитивных категориях. Категория, эквивалентная категории mod-A для некоторого кольца A, называется категорией **модульного типа** и является аддитивной. Категория, дуальная к такой категории, несмотря на аддитивность, не обязана быть категорией модульного типа. (Упражнение 14.3.4.)

3.33. Предложение.

3.33.1. *Пусть C — аддитивная категория, и пусть $\{A_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ и $\{B_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ — два конечных семейства объектов. Биективное отображение*

$$\Phi \left\{ \begin{array}{c} G = \mathrm{Mor}_C\left(\coprod_{j=1}^{n} A_j,\ \coprod_{i=1}^{m} B_i\right) \to \bigtimes_{(j,\, i) \in n \times m} \mathrm{Mor}_C(A_j, B_i) \\ f \longmapsto (f_{ij}) \end{array} \right.$$

(установленное в предложении 2.14 о матрице) — это изоморфизм абелевых групп. (Правая группа есть абелева группа всех матриц (f_{ij}), где $f_{ij}\colon A_j \to B_i$ в C для любых $i \in m$, $j \in n$. В случае когда $C = \mathrm{mod}\text{-}R$, элемент $\Phi^{-1}(T)$ группы G, соответствующий заданной матрице $T = (f_{ij})$, действует следующим образом:

$$\Phi^{-1}(f_{ij})\,(a_1, \ldots, a_n)^t \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \ldots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} f_{1j} a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} f_{mj} a_j \end{pmatrix},$$

где $(a_1, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$, $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$).

3.33.2. *В частности, группа $\mathrm{Mor}_C(A^n, B^m)$ изоморфна абелевой группе всех $(m \times n)$-матриц (f_{ij}) с элементами из $\mathrm{Mor}_C(A, B)$.*

3.33.3. *Наконец, $\Phi\colon \mathrm{End}_C A^n \to (\mathrm{End}_C A)_n$ — кольцевой изоморфизм между кольцом эндоморфизмов объекта A^n и полным кольцом матриц порядка n над $\mathrm{End}_C A$. Для любого кольца R он устанавливает канонический кольцевой изоморфизм $R_n \to \mathrm{End}\, R_R^n$, т. е. кольцо эндоморфизмов свободного R-модуля R^n с базисным числом n канонически изоморфно полному кольцу матриц R_n порядка n над R.* □

3.34. Предложение об аддитивной категориии C.

3.34.1. *Если $\{u_i\colon A_i \to A \mid i = 1, 2\}$ и $\{p_i\colon A \to A_i \mid i = 1, 2\}$ — такие морфизмы, что*

$$u_1 p_1 + u_2 p_2 = 1_A \text{ и } p_i u_i = 1_{A_i},\ i = 1, 2,$$

то A является копроизведением морфизмов u_1 и u_2.

3.34.2. *Если $u_1\colon A_1 \to A$ — коретракция, $p_1 u_1 = 1_{A_1}$ для $p_1\colon A \to A_1$, то $e_1 = u_1 p_1$ — идемпотент, а u_1 является ядром морфизма* [1] *$1_A - e_1$.*

3.34.3. *Если $e_1 \in \mathrm{End}_C A$ — идемпотент, $u_1\colon A_1 \to A$ — ядро морфизма e_1, а $u_2\colon A_2 \to A$ — ядро морфизма $1_A - e_1$, то A — копроизведение морфизмов u_1 и u_2,*

$$A = \ker e_1 \oplus \ker (1 - e_1).$$

Доказательство 3.34.1. Из данных соотношений следует, что $p_1 u_2 = p_2 u_1 = 0$, так что 3.34.1 вытекает из 3.32.

Доказательство 3.34.2. Очевидно, что e_1 — идемпотент. Далее, $(1_A - e_1) u_1 = 0$, значит, $u_1 \leqslant \ker (1_A - e_1)$; однако если $(1_A - e_1) f = 0$, то $u_1 (p_1 f) = e_1 f = f$. Так как u_1 — мономорфизм, то u_1 — ядро морфизма $1_A - e_1$.

[1] Мономорфизм $\mu\colon K \to A$ называется **ядром** морфизма $\alpha\colon A \to B$ (в обозначениях $\ker \alpha$), если $\alpha\mu = 0$ и соотношение $\alpha\xi = 0$, где $\xi\colon K' \to A$, влечет за собой существование единственного морфизма $\eta\colon K' \to K$, такого, что $\mu\eta = \xi$. **Коядро** определяется двойственно.—*Прим. ред.*

Доказательство 3.34.3. Так как u_2 — ядро $1_A - e_1$ и $(1_A - e_1)\,e_1 = 0$, то существует морфизм p_2: $A \to A_2$, такой, что $u_2 p_2 = e_1$. Поэтому $u_2 p_2 u_2 = e_1 u_2 = u_2$, т. е. $u_2 (p_2 u_2 - 1_{A_2}) = 0$, значит, $p_2 u_2 = 1_{A_2}$, поскольку u_2 — мономорфизм. Аналогично, существует p_1: $A \to A_2$, такой, что

$$u_1 p_1 = 1_A - e_1 \text{ и } p_1 u_1 = 1_{A_1}.$$

Таким образом, $u_1 p_1 + u_2 p_2 = e_1 + (1_A - e_1) = 1_A$, следовательно, 3.34.3 вытекает из 3.34.1.

3.35. Предложение и определение. *Пусть C — категория модульного типа (или, более общим образом, аддитивная категория, которая точна в смысле* 5.24). *Тогда мономорфизм u_1: $A_1 \to A$ называется* ***расщепляющимся*** [1]), *если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

3.35.1. *u_1 — коретракция.*

3.35.2. $\operatorname{coker} u_1$ — *ретракция.*

3.35.3. $0 \to A_1 \xrightarrow{u_1} A \xrightarrow{p_2} A_2 \to 0$ — *расщепляющаяся точная последовательность для некоторого p_2: $A \to A_2$.*

3.35.4. *A является копроизведением u_1 и u_2 для некоторого мономорфизма u_2: $A_2 \to A$.*

Доказательство. Импликация 3.35.1 $\Rightarrow$ 3.35.4 следует из 3.34.2 и 3.34.3, а 3.35.4 $\Rightarrow$ 3.35.3 — это утверждение 2.13, что проекции копроизведения являются ретракциями. Докажем, что 3.35.3 $\Rightarrow$ 3.35.2. Если выполняется 3.35.3, то u_1 — ядро морфизма p_2, согласно 3.34. Так как вложения в копроизведение являются коретракциями, то 3.35.2 выполняется [2]). Остается установить импликацию 3.35.2 $\Rightarrow$ 3.35.1. Предположим, что p_2: $A \to A_2$ — коядро морфизма u_1. Поскольку все коядра являются ретракциями в том и только том случае, когда хотя бы одно из них является ретракцией, то мы можем записать $p_2 u_2 = 1_{A_2}$ для некоторого u_2: $A_2 \to A$. Тогда $e = u_2 p_2 \in \operatorname{End}_C A$ — идемпотент, так что 3.35.1 вытекает из 3.34.3 и того факта, что инъекции в копроизведение являются коретракциями. □

Образ функтора

Пусть T: $C \rightsquigarrow D$ — функтор, инъективный на объектах, и пусть I — класс всех объектов из D вида TA с морфизмами $T(f)$: $TA \to TB$, где f: $A \to B$ — любой морфизм. Тогда I — подкатегория категории D, ее обозначают через $\operatorname{im} T$.

[1]) **Расщепляющийся** эпиморфизм определяеется двойственным образом. —*Прим. перев.*

[2]) Пусть ν: $A \to C$ есть $\operatorname{coker} u_1$. Тогда $\eta\nu = p_2$, где η: $C \to A_2$. Отсюда, в частности, следует, что η — эпиморфизм. Так как p_2 — ретракция, то $1_{A_2} = p_2 q$ для некоторого q: $A_2 \to A$. Следовательно, $(\nu q\eta)\nu q = \nu q p_2 q = \nu q\, 1_{A_2} = \nu q = 1_C \nu q$, откуда $\nu q \eta = 1_C$, т. е. ν — ретракция.— *Прим. ред.*

3.36. Предложение. *Пусть T: $C \rightsquigarrow \mathbf{mod}\text{-}\mathbb{Z}$ — аддитивный функтор. Тогда T естественно эквивалентен некоторому инъективному на объектах функтору.*

Доказательство. Пусть $T'A$ — группа, состоящая из всех упорядоченных пар (A, x), где $x \in TA$, причем сложение определено формулой $(A, x) + (A, y) = (A, x + y)$. Если f: $A \to B$ — морфизм из категории C, то $T'(f)(A, x) = (B, T(f)x)$. Тогда h: $T \to T'$, где $h_A(x) = (A, x)$, есть эквивалентность функторов. □

3.37. Упражнения. Пусть C — произвольная категория с нулем, и пусть $A \coprod B$ и $A \coprod B$ существуют для любых двух объектов категории C. Согласно 2.14, морфизм f: $A \coprod B \to A \coprod B$ единственным образом представляется матрицей

$$f = (f_{AB}),$$

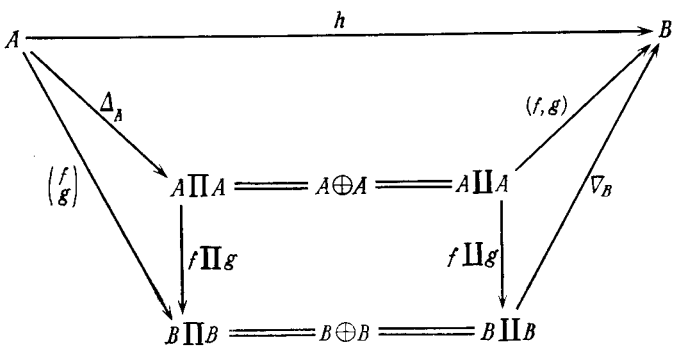
где $f_{AB} = p_A f u_B$ и p_A и p_B (соотв. u_A и u_B) — проекции (инъекции) произведения (в копроизведение).

3.37.1. Показать, что

$$\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} : A \coprod B \to A \coprod B$$

— изоморфизм. В силу этого изоморфизма в дальнейшем $A \oplus B$ будет обозначать произведение и копроизведение.

3.37.2. Если f и g — элементы из $\operatorname{Mor}_C(A, B)$, то единственный такой морфизм h, что диаграмма



коммутативна, можно назвать их суммой, $h = f + g$, и относительно такого сложения $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ будет абелевым моноидом (Басс [73, стр. 27 и далее]). Вывести отсюда, что в категории C с нулем и конечными произведениями и копроизведениями суще-

ствует не более одного способа определить сложение, превращающее C в аддитивную категорию.

3.37.3. Если A и B — объекты аддитивной категории C, то сумма $f+g$ для $f, g \in \mathrm{Mor}_C(A, B)$ задается любым из следующих произведений:

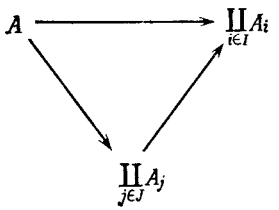
$$A \xrightarrow{\Delta} A \times A \xrightarrow{(f,\,g)} B,$$

$$A \xrightarrow{\binom{f}{g}} B \oplus B \xrightarrow{\nabla} B,$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\nabla} B,$$

где Δ — диагональный, а ∇ — кодиагональный морфизмы.

3.37.4. Объект A категории C называется **малым**, если каждый его морфизм $A \to \coprod_{i \in I} A_i$ в копроизведение пропускается через конечное копроизведение в том смысле, что существует конечное подмножество J множества I и коммутативная диаграмма



где $\coprod_{j \in J} A_j \to \coprod_{i \in I} A_i$ — канонический гомоморфизм. Таким образом, малость объекта — категорное свойство.

(a) Показать, что любой конечно порожденный объект категории mod-R мал.

(b) Показать, что любой малый проективный объект P категории C с копроизведениями и с образующим U **конечно порожден относительно** U, т. е. существуют целое число $n > 0$ и некоторый эпиморфизм $U^{(n)} \to P$. Вывести отсюда, что любой малый проективный объект категории mod-R конечно порожден.

3.37.5. Пусть C — аддитивная категория. Следующие утверждения об ее объекте A эквивалентны:

(a) Объект A мал.

(b) Функтор h^A со значениями в категории групп сохраняет копроизведения.

(c) Функтор $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathrm{End}_C A$, индуцированный функтором h^A, сохраняет копроизведения.

3.37.6. Если T: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-S — эквивалентность, то X в mod-R конечно порожден тогда и только тогда, когда TX конечно порожден в mod-S.

3.38. Предложение об аддитивных категориях. *Пусть* T: $C \rightsquigarrow D$ — *ковариантный функтор аддитивных категорий. Следующие условия эквивалентны*:

3.38.1. *Функтор* T *аддитивен.*

3.38.2. T *сохраняет конечные* (ко)*произведения.*

3.38.3. T *сохраняет* (ко)*произведения* $A \coprod B$ ($A \prod B$) *для любой пары* $A, B \in \mathrm{Obj}\, C$.

Доказательство. Импликация 3.38.1 $\Rightarrow$ 3.38.2 вытекает непосредственно из характеризации конечных копроизведений в аддитивных категориях (см. 3.32.1). Импликация 3.38.2 $\Rightarrow$ 3.38.3 очевидна.

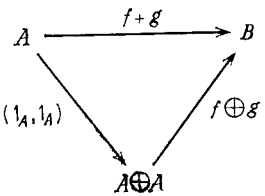
3.38.3 $\Rightarrow$ 3.38.1. Пусть

$$A_i \xrightarrow{u_i} A \xrightarrow{p_j} A_j,$$

$i, j = 1, 2$, — (ко)произведение в C. Тогда из 3.38.3 следует, что

$$T(A_i) \xrightarrow{T(u_i)} T(A) \xrightarrow{T(p_j)} T(A_j)$$

— (ко)произведение в D. Пусть l: $A \to B$ и g: $A \to B$ — морфизмы из категории C. Тогда морфизм $f+g$: $A \to B$ можно разложить следующим образом:



т. е. $f+g = (f \oplus g)(1_A, 1_A)$. Следовательно,

$$T(f+g) = T(f \oplus g) \cdot T(1_A, 1_A) = (T(f) \oplus T(g)) \cdot (1_{T(A)}, 1_{T(A)}).$$

Так как $T(f) + T(g)$ — это единственный морфизм $T(A) \to T(B)$, обладающий указанным разложением (см. упр. 3.37.2, 3.37.3), то $T(f+g) = T(f) + T(g)$ и функтор T аддитивен. □

Точные последовательности

Последовательность морфизмов

$$\ldots \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to \ldots$$

называется **точной**, если для каждого i

$$\mathrm{im}\,(A_{i-1} \to A_i) = \ker (A_i \to A_{i+1}).$$

В противном случае она **неточна.**

Короткая точная последовательность — это точная последовательность вида

$$0 \to A \to B \to X \to 0.$$

Точная последовательность $A \to B \to X$ называется **средней** точной последовательностью. **Левая** точная последовательность — это точная последовательность вида

$$0 \to A \to B \to X.$$

Аналогично определяется **правая** точная последовательность.

Ковариантный функтор T: $C \rightsquigarrow D$ **точен слева** (**справа**), если он сохраняет левые (правые) точные последовательности. **Точный** функтор — это функтор, который точен и слева, и справа. **Полуточным** называется функтор, который короткую точную последовательность переводит в среднюю точную последовательность.

3.39. Предложение. *Пусть A — некоторое кольцо. Функторы h^U и h_U со значениями в категории групп точны слева для любого объекта U категории* mod-A. *Более того, функтор h^U точен тогда и только тогда, когда U — проективный объект категории* mod-A, *а h_U точен тогда и только тогда, когда U — инъективный объект категории* mod-A. (Аналогом этого предложения в точных аддитивных категориях служит теорема 5.8.2. Ср. также 6.11.)

Доказательство. Пусть

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$$

— точная последовательность в категории mod-A. Для любого объекта U функтор h^U со значениями в категории множеств сохраняет мономорфизмы, согласно 2.4. Следовательно, отображение $h^U k$: $h^U K \to h^U X$ инъективно и, очевидно, $\operatorname{im} h^U k \subseteq \ker h^U f$. Если $g \in \ker h^U f$, то g: $U \to X$ и $fg = 0$, так что существует канонический морфизм h: $U \to K$, для которого $g = kh$. Таким образом, $g = h^U k\,(h) \in \operatorname{im} h^U k$, а это доказывает, что последовательность

$$0 \longrightarrow h^U K \xrightarrow{h^U k} h^U X \xrightarrow{h^U f} h^U Y$$

точна. Значит, функтор h^U точен слева. Доказательство точности слева функтора h_U проводится двойственным образом. Согласно 2.4, модуль U проективен тогда и только тогда, когда функтор h^U со значениями в категории множеств сохраняет эпиморфизмы, а это равносильно требованию, чтобы функтор h^U со значениями в категории групп сохранял «коядра», т. е. правые точные последовательности. Двойственным образом устанавливается точность справа функтора h_U в случае, когда U инъективен. □

3.40. Упражнение.

3.40.1. Любой полуточный функтор T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ аддитивен.

3.40.2. Функтор T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ точен тогда и только тогда, когда он сохраняет точные последовательности.

Инъективные модули

Проективные модули легко выделить: это прямые слагаемые свободных модулей. Аналогичного простого описания для инъективных модулей не существует, но тем не менее можно привести следующий простой критерий инъективности:

3.41. Теорема (критерий Бэра). *Правый R-модуль M инъективен тогда и только тогда, когда для каждого гомоморфизма f: $I \to M$ правого идеала I кольца R в M можно найти элемент $m \in M$, такой, что $f(x) = mx$ для любого $x \in I$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если M инъективен и если f: $I \to M$, где I — правый идеал, то f продолжается до гомоморфизма g: $R \to M$ и тогда $m = g(1)$ будет искомым элементом.

Достаточность. Рассмотрим модуль A, его подмодуль B и гомоморфизм f: $B \to M$. Мы хотим показать, что существует гомоморфизм g: $A \to M$, продолжающий f. Пусть P — совокупность пар (A', f'), где A' — подмодуль модуля A, содержащий B, а f': $A' \to M$ — гомоморфизм, продолжающий f. Эта совокупность непуста, так как $(B, f) \in P$. На P можно естественным образом ввести частичный порядок, положив $(A', f') \geqslant (A'', f'')$ тогда и только тогда, когда $A' \supseteq A''$ и $f' \mid A'' = f''$. Если $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ — произвольная цепь в P и $C = \bigcup A_i$, то существует гомоморфизм h: $C \to M$, определенный следующим образом: если $a \in C$, то $a \in A_i$ для некоторого i, и тогда положим $h(a) = f_i(a)$; если a принадлежит также A_j, то $f_i(a) = f_j(a)$, т. е. $h(a)$ не зависит от i. Далее, пара (C, h) принадлежит P, откуда следует, что P индуктивно. Теперь применяем лемму Цорна и получаем, что в P существует максимальный элемент, обозначим его снова через (C, h). Если $C = A$, то доказательство завершено. Мы предположим, что $C \neq A$, и придем к противоречию.

Если $x \in A$ и $x \notin C$, то $D = C + xR$ — подмодуль, строго содержащий C. Далее, $J = \{r \in R \mid xr \in C\}$ — правый идеал кольца R и соответствие $r \mapsto h(xr)$, заданное для любого $r \in J$, — это гомоморфизм θ: $J \to M$. (Отметим, что $\theta = h \circ x_s$, где x_s — умножения слева элементов из J на x, а следовательно, является гомоморфизмом.) По предположению существует $m \in M$, такой, что $\theta(r) = h(xr) = mr$ для любого $r \in J$.

Далее, рассмотрим отображение

$$h'\colon c + xr \mapsto h(c) + mr,$$

определенное для любых $c \in C$, $r \in R$. Если $c_1 + xr_1 = c_2 + xr_2$, где $c_1, c_2 \in C$, $r_1, r_2 \in R$, то $x(r_1 - r_2) = c_2 - c_1 \in C$, значит, $r_1 - r_2 \in J$, откуда следует, что

$$m(r_1 - r_2) = \theta(r_1 - r_2) = h(x(r_1 - r_2)) = h(c_2 - c_1) = \\ = h(c_2) - h(c_1),$$

т. е.

$$h(c_1) + m_1 r = h(c_2) + m_2 r.$$

Это показывает, что h' отображает $D = C + xR$ в M. На самом деле h' является гомоморфизмом модуля D в M, продолжающим f. Так как $D \supset C$, то $(D, h') > (C, h)$ в противоречие с максимальностью пары (C, h). Это завершает доказательство. □

Таким образом, M инъективен (что, согласно 3.39, равносильно точности функтора h_M) тогда и только тогда, когда для каждого правого идеала I кольца R функтор h_M индуцирует сюръективное отображение $\mathrm{Hom}_R(R, M) \to \mathrm{Hom}_R(I, M)$.

Регулярные элементы

Элемент x некоторого кольца называется **регулярным справа (слева)**, если он не является левым (соотв. правым) делителем нуля, т. е. если для него из равенства $xy = 0$ следует, что $y = 0$ для любого $y \in R$ (соотв. $yx = 0 \Rightarrow y = 0$ для любого $y \in R$). Элемент называется **регулярным**, если он регулярен и справа и слева.

3.42. Пример. Пусть L — кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного правого векторного пространства V над полем K. Пусть $\{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — базис пространства V, а f — такое линейное преобразование, что $f(x_{2n}) = x_n$ и $f(x_{2n-1}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как V — проективный объект категории mod-K, то существует линейное преобразование g, такое, что $fg = 1$. Следовательно, f регулярно слева, поскольку $hf = 0$ влечет за собой $h = 0$ для любого $h \in L$. Если бы f было регулярно, то из инъективности пространства V в категории mod-K следовало бы существование преобразования $g' \in L$, такого, что $g'f = 1$ (и тогда g' совпадало бы с g), но это невозможно, так как f не является автоморфизмом пространства V. □

Делимые группы

Как уже установлено, правый идеал I кольца R является главным (**циклическим**), если $I = xR$ для некоторого $x \in R$. Кольцо R называется **кольцом главных правых идеалов, если каждый правый идеал в R главный. Область главных правых идеалов** — это кольцо главных правых идеалов, являющееся областью целостности. Правый R-модуль M называется **делимым**, если $M = Mx$ для каждого регулярного элемента $x \in R$. Здесь $Mx = \{mx \mid m \in M\}$.

Критерий Бэра инъективности модуля M состоит в следующем: *если I — правый идеал кольца R и $f\colon I \to M$ — гомоморфизм, то существует элемент $m \in M$, такой, что $f(x) = mx$ для любого $x \in I$.* Если это выполняется для фиксированного правого идеала I, то мы назовем M I-**полным**. Тогда критерий Бэра примет вид: *M инъективен тогда и только тогда, когда он I-полон для каждого правого идеала I кольца R.* Первый из приведенных ниже результатов описывает I-полные модули M, когда I — главный правый идеал. Напомним, что если X — подмножество из M, то $\mathrm{ann}_R X = \{a \in R \mid xa = 0\} = X^\perp$, а если $X \subseteq R$, то

$$\mathrm{ann}_M X = \{m \in M \mid mX = 0\} = {}^\perp X.$$

3.43. Предложение. *Если $I = xR$ — главный правый идеал кольца R, то правый R-модуль M является I-полным тогда и только тогда, когда ${}^\perp(\mathrm{ann}_R x) \subseteq Mx$.*

Доказательство. Для краткости обозначим $\mathrm{ann}_R x$ через $x^\perp$. Предположим сначала, что M является I-полным. Пусть $y \in {}^\perp(x^\perp)$, и рассмотрим соответствие $f\colon xr \mapsto yr$, определенное для любого $r \in R$. Если $xr = xr'$, где $r, r' \in R$, то $r - r' \in x^\perp$, и так как $y \in {}^\perp(x^\perp)$, должно быть $yr = yr'$, т. е. f — гомоморфизм идеала I в M. В силу I-полноты модуля M существует $m \in M$, такой, что $f(w) = mw$ для любого $w \in I$; в частности, $y = f(x) = mx$. Это доказывает, что ${}^\perp(x^\perp) \subseteq Mx$.

Обратно, предположим, что ${}^\perp(x^\perp) \subseteq Mx$. Если $f\colon I \to M$ — произвольный гомоморфизм, то

$$f(x)\, a = f(xa) = f(0) = 0$$

для любого $a \in x^\perp$, значит, $f(x) \in {}^\perp(x^\perp)$. Следовательно, $f(x) = mx$ для некоторого $m \in M$, и тогда $f(w) = mw$ для любого $w \in I = xR$. □

Если R — область целостности, то $x^\perp = 0$ для любого ненулевого $x \in R$, и тогда ${}^\perp(x^\perp) = {}^\perp 0 = M$. Применяя предложение 3.43 к этому случаю, получаем такое следствие:

3.44. Следствие. *Пусть R — область целостности, а M — некоторый R-модуль.*

3.44.1. *Если M инъективен, то он делим.*

3.44.2. *Если M делим, то он xR-полон для любого $x \in R$.* □

3.45. Следствие. *Если R — область главных идеалов, то правый R-модуль инъективен тогда и только тогда, когда он делим.* □

Это следствие не является наилучшим из возможных. (Любой делимый модуль над дедекиндовой областью инъективен! См. гл. 4, упр. 9.)

Пусть M — некоторый R-модуль. Он называется **модулем без кручения**, если для любого регулярного элемента $a \in R$ из равенства $xa = 0$, где $x \in M$, следует, что $x = 0$. Кольцо R обладает **(классическим) правым кольцом частных** Q, если в категории RINGS существует такое вложение h: $R \to Q$, что $h(x)$ обратим в Q для всех регулярных элементов $x \in R$ и что

$$Q = \{h(a)\, h(x)^{-1} \mid a \in R,\ x \text{ регулярен в } R\}.$$

Впредь мы будем предполагать, что если Q — кольцо частных кольца R, то $R \subseteq Q$. Таким образом, $Q = \{ab^{-1} \mid a \in R,\ b$ регулярен в $R\}$. Для того чтобы кольцо R обладало правым кольцом частных, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов a, b, второй из которых регулярен, существовали элементы c, $d \in R$, где c — регулярный элемент, такие, что

$$ac = bd \quad \textbf{(условие Ope)}$$

(Или, удобнее для запоминания, $b^{-1}a = dc^{-1}$.) Любое коммутативное кольцо удовлетворяет этому условию. Любая область целостности, обладающая правым кольцом частных D, называется **правой областью Ope**, и тогда D обязательно будет телом, называемым ее **правым телом частных.** Детали его построения приведены в гл. 9.

3.46. Упражнения.

3.46.1. (a) Любые два правых кольца частных Q_i кольца R, h_i: $R \to Q_i$, $i = 1, 2$, изоморфны, причем соответствующий изоморфизм g: $Q_1 \to Q_2$ удовлетворяет условию $gh_1 = h_2$.

(b) Если Q — правое кольцо частных кольца R, то Q является своим левым и правым кольцом частных.

(c) Если Q — правое кольцо частных кольца R, то оно является его левым кольцом частных в том и только том случае, когда R обладает левым кольцом частных.

3.46.2. (a) Если R — область целостности, то R-модуль без кручения инъективен тогда и только тогда, когда он делим. Если K — тело частных кольца R, то любой делимый R-модуль без кручения является векторным пространством над K. Далее, R-модуль K/R делим, но не обязательно инъективен.

(b) Если R — правая область Ope, то ее правое тело частных K является инъективным R-модулем.

3.46.3. Если R — область главных правых идеалов или, более общим образом, любая нётерова справа область, то она является правой областью Ope. Область целостности будет правой областью Ope тогда и только тогда, когда она не содержит ни одного правого идеала, являющегося бесконечной прямой суммой ненулевых подмодулей. (Теорема Голди [58].)

3.46.4. Абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{R}$ служит инъективным кообразующим категории mod-$\mathbb{Z}$.

3.47. Следствие. *Если R — область главных правых идеалов, то ее правое тело частных K существует и K/R оказывается инъективным кообразующим категории* mod-R.

Доказательство. Тот факт, что R имеет правое тело частных K, вытекает из того, что $aR \cap bR = xR$ для заданных элементов a, b и некоторого x. Таким образом, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = ac = bd$ для некоторых элементов c и d кольца R. Тогда R удовлетворяет условию Ope, равносильному существованию правого тела частных K. Так как K, а также K/R — делимые R-модули, то оба они инъективны по 3.45. Остается показать, что K/R — инъективный кообразующий. Согласно 3.31, для этого достаточно установить, что каждый простой модуль V вкладывается в K/R. Однако $V \approx R/pR$ для некоторого максимального правого идеала pR кольца R, и тогда $(p^{-1}R + R)/R$ — подмодуль модуля K/R, изоморфный модулю R/pR, причем этот изоморфизм осуществляется отображением, переводящим смежный класс $p^{-1}a + R$ из K/R в смежный класс $[a + pR]$ из R/pR. □

Для некоторых из приведенных ниже упражнений отметим, что любое произведение инъективных модулей инъективно (гл. 2, упр. 1), но прямая сумма инъективных модулей быть инъективной не обязана.

3.48. Упражнения.

* 3.48.1. Если Q — инъективный модуль и если прямая сумма любой счетной совокупности экземпляров модуля Q инъективна, то прямая сумма любой совокупности экземпляров модуля Q инъективна. Верно ли дуальное утверждение? (Ср. Фейс [66].)

* 3.48.2. Показать, что если над кольцом R каждая прямая сумма изоморфных инъективных правых R-модулей инъективна, то любая прямая сумма инъективных правых R-модулей инъективна. Верно ли дуальное утверждение? (Ср. Фейс — Уокер [67].)

* 3.48.3 (Картан — Эйленберг — Басс — Папп). Показать, что условия упражнения 3.48.2 выполняются тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей пра-

вых идеалов. [*Указание*: пусть $I_1 < \ldots < I_n < \ldots$ — цепь правых идеалов кольца R. Вложить фактормодуль R/I_n в некоторый инъективный модуль E_n. Рассмотреть модуль $E = \coprod_n^{\infty} E_n$ и естественное отображение идеала $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ в E и использовать критерий Бэра. При доказательстве обратного утверждения заметить, что каждый правый идеал I конечно порожден.]

3.48.4 (Фейс — Уокер). Каждый инъективный проективный неразложимый модуль изоморфен прямому слагаемому модуля R_R (а следовательно, цикличен).

3.48.5. Пусть R — коммутативная область целостности с полем частных K. Доказать эквивалентность следующих утверждений для произвольного ненулевого идеала I кольца R:

(a) I проективен.

(b) Существует конечное число элементов $k_i \in K$ и $x_i \in I$, таких, что $k_i x_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = 1$.

(c) I — образующий.

[*Указание*: использовать лемму о дуальном базисе 3.23. Использовать также тот факт, что K инъективен в mod-R, и с его помощью показать, что гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}_R(I, R)$ индуцируются умножениями на элементы из K.]

Вывести отсюда, что любой проективный идеал области целостности R конечно порожден. Однако, кольцо R не обязательно удовлетворяет условию максимальности для проективных идеалов.

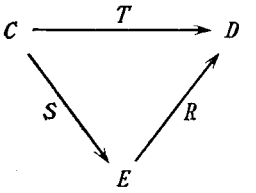
3.48.6. Модулем характеров произвольного левого R-модуля M называется естественным образом определенный правый R-модуль $M' = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Для любого $f: M \to N$ пусть $f' = h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(f)$. Тогда f является мономорфизмом в том и только том случае, когда f' — эпиморфизм.

3.48.7. Показать, что модуль характеров $P' = \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ произвольного проективного модуля P категории R-mod инъективен в категории mod-R.

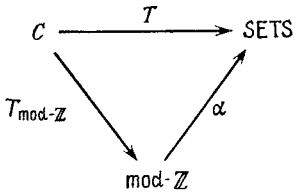
Используя тот факт (2.6.6), что каждая конечная абелева группа изоморфна своей группе характеров, установить самоинъективность кольца $\mathbb{Z}_n$, т. е. его инъективность в категории mod-$\mathbb{Z}_n$, для каждого $n \neq 0$. С помощью модулей характеров и бихарактеров доказать, что любой идеал кольца $\mathbb{Z}_n$ является аннуляторным.

Унивалентные точные функторы

Диаграмма



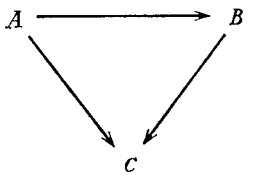
где T, S, R — функторы, называется **коммутативной**, если существует эквивалентность функторов $T \approx RS$. Для любого аддитивного унивалентного функтора $T: C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$ найдется функтор $T_{\text{mod-}\mathbb{Z}}: C \rightsquigarrow \text{mod-}Z$, такой, что диаграмма



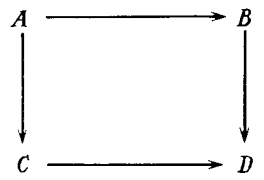
где α — забывающий функтор, коммутативна, т. е. T *пропускается через* mod-$\mathbb{Z}$. В следующем предложении устанавливается, что если C и D — категории, точные в смысле 5.24, то любой унивалентный функтор $T: C \rightsquigarrow D$ отражает коммутативные диаграммы и точные последовательности. Таким образом, для этих категорий из существования унивалентного точного функтора $T: C \rightsquigarrow D$ следует, что диаграмма или последовательность S коммутативна или точна в C тогда и только тогда, когда коммутативна или точна соответствующая диаграмма или последовательность TS в D.

Если U — проективный образующий аддитивной категории C, то h^U индуцирует точный унивалентный функтор $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$. Двойственным образом, если U — инъективный кообразующий, то h_U индуцирует контравариантное точное вложение $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$. (Ср. теорему о точном вложении 14.21.)

Некоммутативная диаграмма — это диаграмма, содержащая треугольник



или квадрат



который не является коммутативным. **Неточная** последовательность — это последовательность, которая не является точной.

3.49. Предложение. *Пусть C и D — категории.*

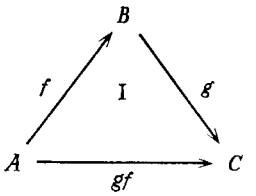
3.49.1. *Унивалентный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ сохраняет ненулевые объекты, ненулевые морфизмы и некоммутативные диаграммы, т. е. отражает нулевые объекты, мономорфизмы, эпиморфизмы и коммутативные диаграммы.*

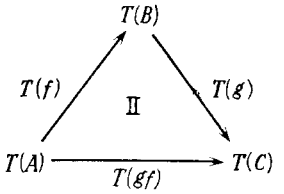
3.49.2. *Пусть $C = \mathrm{mod}\text{-}R$ и $D = \mathrm{mod}\text{-}S$, где R и S — кольца (или, более общим образом, C и D могут быть категориями, точными в смысле 5.24). Тогда унивалентный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ отражает точные последовательности. Таким образом, унивалентный точный функтор отражает и сохраняет точные последовательности.*

Эти утверждения верны также для контравариантного функтора T, если проделать очевидные изменения в связи с переходом эпиморфизмов в мономорфизмы и наоборот.

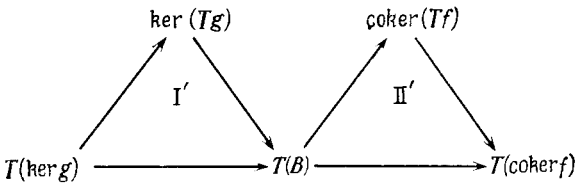
Доказательство 3.49.1. Сначала предположим, что C и D — категории с нулем. Нулевой объект характеризуется тем, что его единичный морфизм является нулевым морфизмом. Таким образом, если $A \in \mathrm{Obj}\, C$ и $TA \neq 0$, то $T(1_A) \neq T(0_A)$ и, поскольку T — отображение, $1_A \neq 0_A$. Это показывает, что T отражает нулевые объекты. Для остального нет необходимости предполагать существование нулевых объектов. Если f, g и h — морфизмы и $f = gh$, то T сохраняет произведение, значит, $T(f) = T(g)\,T(h)$. Таким образом, T сохраняет коммутативные диаграммы, а следовательно, отражает некоммутативные. Пусть теперь $fh = fg$ и $T(f)$ — мономорфизм. Тогда $T(f)\,T(h) = T(f)\,T(g)$, $T(h) = T(g)$ и, значит, $h = g$. Таким образом, f — мономорфизм, значит, T отражает мономорфизмы; двойственным образом получается аналогичное утверждение для эпиморфизмов, а следовательно, и для эквивалентностей. Для контравариантных функторов это предложение также справедливо, поскольку функтор $T^*\colon D^* \to C^*$ ковариантен и все рассматриваемые свойства при $C \rightsquigarrow C^*$, где C^* — дуальная категория, сохраняются (за исключением того, что эпиморфизмы переходят в мономорфизмы и наоборот).

Доказательство 3.49.2. Предположим, что





и диаграмма II точна в члене $T(B)$. Пусть $K \xrightarrow{h} B$ — ядро морфизма g. Тогда $gk = 0$ и $T(g)\,T(k) = T(gk) = 0$. Таким образом, существует морфизм $T(\ker g) \to \ker(Tg)$, при котором треугольная диаграмма I′ коммутативна.



Треугольник II′ коммутативен по двойственности. Так как диаграмма II точна в $T(B)$, то

$$(\ker(Tg) \to T(B) \to \mathrm{coker}\,(Tf)) = 0$$

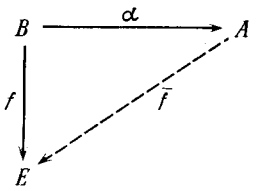
и, следовательно,

$$(T(\ker g) \to T(B) \to T(\mathrm{coker}\, f)) = 0.$$

Так как T унивалентен, то $(\ker g \to B \to \mathrm{coker}\, f) = 0$, откуда следует, что I точна в B. □

3.50. Лемма (Экман — Шопф [53]). *Пусть R — кольцо, а G — делимая абелева группа. Тогда $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ — инъективный правый R-модуль.*

Доказательство. Пусть $E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Прежде всего если $f \in E$, $x \in R$ и $r \in R$, то $fr(x) = f(rx)$. Рассмотрим диаграмму



где B — подмодуль некоторого R-модуля A, а α — включение. Если $h \in E$ и $x \in R$, то $h[x]$ обозначает образ элемента x при h. Пусть, далее, π обозначает $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $E \to G$, который переводит $h \in E$ в $h[1] \in G$. Тогда $\psi = \pi \circ f$ является $\mathbb{Z}$-гомоморфизмом модуля B в G. Поскольку G — инъективный $\mathbb{Z}$-модуль по 3.15, то существует $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $\bar{\psi}\colon A \to G$, продолжающий ψ. Если $a \in A$, то a_s обозначает левое умножение R на a. Тогда $\bar{\psi} \circ a_s$ является $\mathbb{Z}$-гомоморфизмом R в G, т. е. $\bar{\psi} \circ a_s \in E$ для любого $a \in A$. Далее, рассмотрим отображение $\bar{f}\colon A \to E$, где $\bar{f}(a) = \bar{\psi} \circ a_s$ для любого $a \in A$. Если $r \in R$ и $x \in R$, то

$$\bar{f}(ar)[x] = \bar{\psi} \circ (ar)_s[x] = \bar{\psi}(ar \cdot x) = \bar{\psi}(a \cdot rx) = \bar{\psi} \circ a_s[rx] = \bar{f}(a) r[x],$$

т. е. $\bar{f}(ar) = \bar{f}(a)\, r$ для любых $r \in R$, $a \in A$. Значит, $\bar{f}$ есть R-гомоморфизм $A \to E$. Так как $\bar{\psi}$ индуцирует ψ, ясно, что $\bar{f}$ индуцирует f. Таким образом, $\bar{f}$ пополняет приведенную выше диаграмму. □

3.51. Упражнения.

3.51.1. Показать, что если P — проективный левый R-модуль и $G_{\mathbb{Z}}$ делим, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, G)$ — инъективный правый R-модуль. [*Указание*: если $P = R^{(I)}$, то $E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, G)$ — левый R-модуль, изоморфный F^I (прямое произведение), где $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}} = (R, G)$. В общем случае использовать изоморфизм левых R-модулей

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P \oplus Q, G) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, G) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, G).]$$

3.51.2. Пусть A и B — кольца и M — произвольный (B, A)-бимодуль. Если M — проективный левый B-модуль, то $\mathrm{Hom}_A(M, U)$ — инъективный правый B-модуль для любого инъективного правого A-модуля U. Вывести отсюда, что функтор

mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B, индуцированный функтором h^M, сохраняет инъективные объекты. Ср. упр. 3.51.1.

Для следующих двух упражнений нужно понятие функтора, сопряженного к ковариантному основному функтору. Если M есть (B, A)-бимодуль, то левый сопряженный к функтору h^M: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B обозначается через $\underset{B}{\otimes} M$ (ср. тензорное произведение в гл. 5 и 11). Таким образом, для любого правого B-модуля X существуют естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A(M, U)) \approx \mathrm{Hom}_A(X \underset{B}{\otimes} M, U).$$

*3.51.3. Показать, что в условиях упражнения 3.51.2 контравариантный основной функтор со значениями в категории групп, индуцированный правым B-модулем $\mathrm{Hom}_A(M, U)$, естественно эквивалентен произведению точных функторов $\underset{B}{\otimes} M$ и $\mathrm{Hom}_A(\ , U)$ и, следовательно, точен. Отсюда вытекает инъективность модуля $\mathrm{Hom}_A(M, U)$ в категории mod-B, и, значит, h^M сохраняет инъективные объекты. (Ср. 6.28.)

3.51.4. Применить упр. 3.51.3 для уточнения леммы 3.50. Именно, для любого объекта X категории R-mod

$$\mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X \underset{R}{\otimes} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

а это показывает, что контравариантный основной функтор, индуцированный модулем $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, естественно изоморфен основному функтору, индуцированному $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, и отсюда следует, что $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ — кообразующий в mod-R. (Ср. 3.53.)

Модуль характеров

По 3.47 аддитивный функтор со значениями в категории групп

$$h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \begin{cases} \text{mod-}\mathbb{Z} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} & \\ A \mapsto A' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \text{(на объектах)} \\ f \mapsto f' = h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(f) & \text{(на морфизмах)} \end{cases}$$

унивалентен и точен.

Группа A' называется **группой характеров** группы A для любой абелевой группы A, а $A'' = (A')'$ — **группой бихарактеров.** Аналогичное обозначение употребляется для группы характеров M' левого R-модуля M. В этом случае M' каноническим образом наделяется структурой правого R-модуля (3.7.1) и называется **модулем характеров** модуля M.

3.52. Предложение. *Каноническое отображение*

$$\pi_A \begin{cases} A \to A'' \\ a \mapsto \langle\ ,\ a\rangle, \end{cases}$$

где

$$\langle\ ,\ a\rangle \begin{cases} A' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ f \mapsto \langle f, a\rangle = f(a), \end{cases}$$

инъективно. Если A — левый R-модуль, то A'' каноническим образом наделяется структурой левого R-модуля и π_A: $A \to A''$ — мономорфизм в категории R-mod.

Доказательство. Следующие утверждения эквивалентны:

1. π_A: $A \to A''$ — мономорфизм (гомоморфное вложение).
2. Для каждого $a \neq 0$ из A существует $f \neq 0$ из A', такое, что $\langle f, a\rangle = f(a) \neq 0$.
3. Канонический морфизм (дуальный к морфизму из 3.25) $A \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{A'}$ — мономорфизм (гомоморфное вложение).

Так как $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — инъективный кообразующий в категории mod-$\mathbb{Z}$ по 3.47, то условие 3 выполняется как дуальное к 3.25, следовательно, выполняется и 1. Если A — левый R-модуль, то формула $fr(a) = f(ra)$, которая справедлива для любых $a \in A$, $f \in A'$, $r \in R$, показывает, что π_A: $A \to A''$ — мономорфизм категории R-mod. □

3.53. Теорема. *Категория* mod-R *для любого кольца R обладает инъективным кообразующим. Им является, например, модуль характеров модуля R.*

Доказательство. В силу 3.50 модуль характеров R' левого R-модуля R инъективен в mod-R, и, согласно 3.31, R' является кообразующим тогда и только тогда, когда каждый объект M из mod-R вкладывается в произведение R'^I для некоторого множества I. Чтобы доказать существование такого вложения, возьмем точную последовательность $R^{(I)} \to M' \to 0$ в R-mod. Тогда $0 \to M'' \to R^{(I)'}$ точна в mod-R по 3.49. Поскольку $0 \to M \to M''$ точна по 3.52, а $h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ превращает копроизведения в произведения, то $R^{(I)'} \approx R'^I$ и, следовательно, имеет место точная последовательность $0 \to M \to R'^I$, а это и требовалось получить. □

3.54. Следствие (Бэр [40]). *Для любого кольца R категория* mod-R ***инъективно богата***, *т. е. для каждого модуля M из* mod-R *существует мономорфизм $M \to E$ модуля M в некоторый инъективный модуль E.* □

Наименьший кообразующий

Если C — кообразующий категории D и $C \to M$ — мономорфизм этой категории, то M — кообразующий. Кообразующий C категории D называется **наименьшим**, если для любого кообразующего M этой категории найдется мономорфизм $C \to M$.

3.55. Предложение. *Пусть R — кольцо, a $\{S_i \mid i \in I\}$ — множество всех представителей классов изоморфных простых R-модулей. Для каждого $i \in I$ пусть E_i обозначает инъективную оболочку модуля S_i* (см. стр. 218—220). *Тогда*

3.55.1. $C = \coprod_{i \in I} E_i$ — *наименьший кообразующий в* mod-R.

3.55.2. *Каждый наименьший кообразующий изоморфен C.*

3.55.3. *Каждый эндоморфизм модуля C, являющийся мономорфизмом, будет автоморфизмом.*

Доказательство 3.55.1 и 3.55.2. Пусть M — кообразующий, а f_i: $E_i \to M$ — мономорфизмы, дуальные к указанным в 3.26.1 эпиморфизмам, и пусть

$$f\colon \coprod_{i \in I} E_i \to M$$

— их копроизведение. Так как S_i попарно неизоморфны, семейство подмодулей $\{f(S_i)\}$ независимо и, следовательно, независимо семейство $\{f(E_i)\}$. Отсюда получается, что f — мономорфизм. Действительно, если $x_i \in E_i$ и $\sum_i x_i$ — конечная сумма в $C = \coprod_{i \in I} E_i$, то из равенства $f(\sum_i x_i) = 0$ вытекает, что

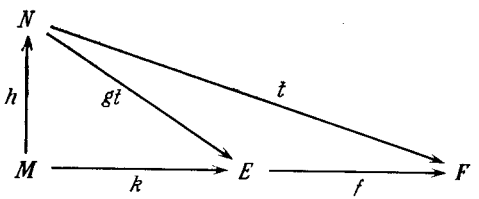
$$\sum_i f(x_i) = f\left(\sum_i x_i\right) = 0.$$

Значит, $f(x_i) = 0$, откуда $x_i = 0$ для любого $i \in I$. Этим доказано, что C — наименьший кообразующий.

Доказательство 3.55.3. Сумма $S = \sum_{i \in I} S_i$ прямая, поскольку каждый S_i прост (упражнение). Кроме того, S — существенный подмодуль модуля C, так как каждый S_i существенен в E_i. Если h: $C \to C$ — мономорфизм, то $V_i = h(S_i)$ — простой модуль, изоморфный S_i, следовательно $V_i = S_i$ для всех $i \in I$. Это доказывает, что $H = \operatorname{im} h$ содержит существенный подмодуль модуля C, а именно S. С другой стороны, H инъективен, так как $H \approx C$. Поэтому, ввиду следующего предложения, H — прямое слагаемое модуля C. Это доказывает, что $H = C$ и, следовательно, h — изоморфизм. □

3.56. Предложение. *Объект E категории* mod-R *инъективен тогда и только тогда, когда каждый мономорфизм $E \to F$ в* mod-R *расщепляется.*

Доказательство. Если $f\colon E \to F$ — мономорфизм в какой-либо категории, а E — инъективный объект, то отображение $h_E f\colon h_E(F) \to h_E(E)$ сюръективно. Значит, существует морфизм $g\colon F \to E$, такой, что $h_E(f)\, g = gf = 1_E$, т. е. f — коретракция. Обратно, если $f\colon E \to F$ — вложение произвольного объекта в инъективный, то из его расщепляемости следует инъективность E. Действительно, если $gf = 1_E$ для некоторого $g\colon F \to E$, то для любого мономорфизма $h\colon M \to N$ и морфизма $k\colon M \to E$ имеет место коммутативный внешний треугольник



где $t\colon N \to F$ существует в силу инъективности объекта F. □

3.57. Следствие. *Объект P категории* mod-R *проективен тогда и только тогда, когда любой эпиморфизм $X \to P$ в* mod-R *расщепляется.* □

Существенные расширения

Подмодуль N модуля M называется **существенным**, если $A \cap N \neq 0$ для любого подмодуля $A \neq 0$. В этом случае также говорят, что M — **существенное расширение** [1]) модуля N. Это условие равносильно требованию, чтобы любой подмодуль aR, порожденный элементом $0 \neq a \in M$, пересекался с N, т. е. $aR \cap N \neq 0$, или чтобы для каждого $a \in M$ существовал $r \in R$, такой, что $ar \neq 0$ и $ar \in N$.

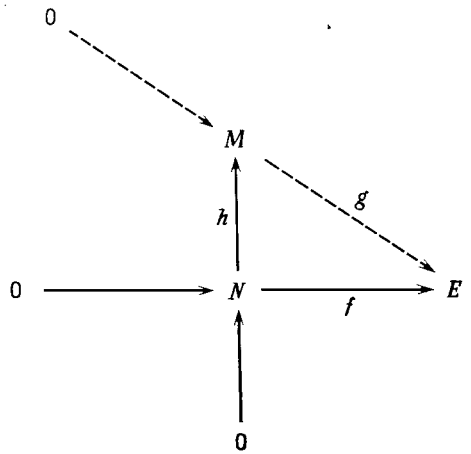
Пусть M, N — некоторые R-модули, причем $M \supseteq N$. Тогда $(M \rhd N)_R$, или просто $M \rhd N$, обозначает, что N — существенный подмодуль в M. Очевидно, что если $M \rhd N$ и $N \rhd P$, то $M \rhd P$.

Гомоморфизм $f\colon A \to B$ называется **существенным**, если $\operatorname{im} f$ — существенный подмодуль.

Отметим, что если $f\colon A \to B$ — гомоморфизм и $B \rhd C$, то $A \rhd f^{-1}C$.

[1]) Есть мнение, что его следует называть несущественным.

3.58А. Лемма. *Любая диаграмма вида*



с точными строкой и столбцом, где модуль E инъективен, а гомоморфизм $N \to M$ существен, может быть пополнена точной последовательностью $0 \to M \xrightarrow{g} E$. Иными словами, любое вложение некоторого модуля в инъективный может быть продолжено до вложения любого существенного расширения этого модуля в тот же инъективный модуль.

Доказательство. Из инъективности E следует существование такого гомоморфизма g, что $gh = f$. Так как f — мономорфизм, то $\ker g \cap \operatorname{im} h = 0$ и $M \rhd \operatorname{im} h$ влечет за собой $\ker g = 0$. □

3.58 В. Предложение. *Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда каждый существенный мономорфизм $f\colon M \to A$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Доказательство в одну сторону содержится в доказательстве следствия 3.56 [1]). Обратно, пусть $h\colon M \to E$ — мономорфизм, где E — инъективный модуль. Так как $M \approx \operatorname{im} h$, то $\operatorname{im} h$ обладает всеми теми свойствами, которыми обладает M. Таким образом, можно положить $M = \operatorname{im} h \subseteq E$. Пусть S — полученный по лемме Цорна подмодуль из E, максимальный в множестве таких подмодулей K, что $K \cap M = 0$. Пусть $f\colon E \to E/S$ — канонический гомоморфизм, и пусть g:

[1]) Точнее, если M инъективен и $f\colon M \to N$ — существенный мономорфизм, то, согласно (3.35) и (2.19.2), $N = \operatorname{im} f + M'$ и $\operatorname{im} f \cap M' = 0$, что возможно лишь при $M' = 0$. — *Прим. ред.*

$M \to E/S$ — индуцированное им отображение. Так как g — мономорфизм и $(E/S) \rhd M$ [1]), то g — существенный мономорфизм, а значит, g — изоморфизм по предположению. Так как $\operatorname{im} g = (M + S)/S$, то $E = M + S$, а значит, $E = M \oplus S$ [2]). Прямое же слагаемое инъективного модуля инъективно. □

Инъективная оболочка R-модуля M определяется как существенный мономорфизм $M \to \hat{M}$ в инъективный модуль $\hat{M}$. *В следующей теореме устанавливается, что любой модуль имеет хотя бы одну инъективную оболочку, а тогда из* 3.58 В *следует, что любые две различные инъективные оболочки являются эквивалентными мономорфизмами.*

Максимальное существенное расширение модуля M определяется как правый нуль в полной подкатегории категории source M, состоящей из всех существенных мономорфизмов $M \to F$.

3.59. Теорема (Бэр [40]), Экман — Шопф [53]. *Для любого объекта M категории* mod-R *существует инъективная оболочка, а также максимальное существенное расширение, и оба эти объекта совпадают* [2]). *Таким образом, $M \to E$ — инъективная оболочка модуля M тогда и только тогда, когда $M \to E$ является максимальным существенным расширением. Кроме того, любое гомоморфное вложение $M \to F$, где F инъективен, продолжается до вложения $E \to F$ инъективной оболочки E модуля M.*

Доказательство. Пусть F — инъективный модуль, содержащий M, существование которого доказано в 3.54. По лемме Цорна среди всех подмодулей E из F, таких, что $E \rhd M$, существует максимальный. Если $f\colon E \to A$ — существенный мономорфизм, то по 2.4 (II) (2) мономорфизм $f^{-1}\colon B \to F$, где $B = \operatorname{im} f$, можно продолжить до мономорфизма $g\colon A \to F$. Тогда M — существенный подмодуль модуля $\operatorname{im} g$, $M \subseteq E \subseteq \operatorname{im} g$, и в силу максимальности расширения E имеем $E = \operatorname{im} g$. Таким образом, $B = A$ и $f^{-1} = g$. Значит, каждый существенный мономорфизм $E \to A$ является изоморфизмом и E инъективен по предыдущему предложению. □

Последнее высказывание в этой теореме вытекает из 3.58А и имеет такое следствие:

любой инъективный модуль F, содержащий модуль M, содержит и его инъективную оболочку.

---

[1]) Если $X + S \neq S$, то $(X + S) \cap M \ni a$, $a \notin S$. Следовательно, $a \in S + (X + S) \cap M = (X + S) \cap (M + S)$, отсюда $(E/S) \rhd M$.— *Прим. перев.*

[2]) Учесть 2.19.2.— *Прим. ред.*

[3]) См. замечания к гл. 3 (стр. 236—237).

Модули, каждый из которых изоморфен подмодулю другого

Может быть так, что каждый из двух модулей A и B изоморфен подмодулю другого и тем не менее эти модули не изоморфны. Например, пусть A — область целостности, не являющаяся кольцом главных идеалов, а B — правый идеал, не являющийся главным. Если x — произвольный ненулевой элемент из B, то правый A-модуль A изоморфен правому идеалу $C = xA$, но B не изоморфен A, так как он не порождается одним элементом. Другой пример: пусть B — прямая сумма бесконечной совокупности экземпляров циклической группы $\mathbb{Z}_4$ порядка 4, и пусть $A = \mathbb{Z}_2 \oplus B$. Тогда каждая из групп A и B изоморфна подгруппе другой, но A и B не изоморфны, так как B не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}_2$. Однако в каждом из рассмотренных примеров A и B имеют изоморфные инъективные оболочки. Этот факт является следствием приводимого ниже предложения 3.60. Доказательство повторяет и в действительности влечет за собой соответствующий результат для множеств. (Теоретико-множественное введение, теорема 3.)

3.60. Предложение [1]). *Пусть A и B — инъективные модули. Если существуют мономорфизмы $A \to B$ и $B \to A$, то $A \approx B$.*

Доказательство. Достаточно предположить, что B — подмодуль модуля A и что есть мономорфизм $f\colon A \to B$. Так как B инъективен, то он выделяется в A прямым слагаемым, значит, $A = H \oplus B$. Пусть

$$P = H \oplus f(H) \oplus f(f(H)) \oplus \dots .$$

Так как

$$A = H \oplus B \supseteq H \oplus f(A) \supseteq H \oplus f(H) \oplus f(B) \supseteq \dots ,$$

то

$$P \cap B = f(H) \oplus f(f(H)) \oplus \dots ,$$

т. е. $P \cap B = f(P)$.

Далее, пусть Q — максимальное существенное расширение модуля $P \cap B$ в B. Поскольку B инъективен, то Q инъективен, а значит, $B = Q \oplus K$ для некоторого подмодуля K. Тогда

$$A = H \oplus B = H \oplus (Q \oplus K) = (H \oplus Q) \oplus K,$$

следовательно, $H \oplus Q$ также инъективен. Определение модуля P показывает, что $P \subseteq H + Q$, а из тождества $P \cap B = f(P)$

---

[1]) Вопрос о справедливости этой теоремы возник в семинаре по инъективным модулям и кольцам частных, который я вел в Ратгере в 1962—1963 гг. На следующей же неделе я получил два независимых решения от Бамби и отОсофской. Здесь приведено доказательство Бамби [65].

следует, что f индуцирует гомоморфизм $g\colon P \to Q$, который в силу инъективности модуля Q можно продолжить до гомоморфизма $g'\colon H \oplus Q \to Q$. Из определения модуля Q вытекает, что g' — изоморфизм и тогда прямая сумма гомоморфизмов

$$g' \oplus 1_K : (H \oplus Q) \oplus K \to Q \oplus K$$

и есть нужный изоморфизм $A \to B$. □

Понятия, примыкающие к инъективности

Есть очень много связанных с инъективностью понятий, которые следовало бы на этом этапе ввести в любой курс, касающийся инъективных модулей. В особенности это относится к неразложимым (инъективным) модулям и их кольцам эндоморфизмов, прямым суммам инъективных модулей (когда они инъективны?), вполне инвариантным подмодулям, квазиинъективным модулям и таким понятиям, как проективное накрытие, дуальное к понятию инъективной оболочки, а также дуальное к понятию конечно порожденного модуля, и ко многим другим. Но, включив уже в эту главу около шестидесяти результатов, мы вынуждены удовольствоваться некоторым количеством упражнений, приведенных здесь и в конце главы. В них формулируется ряд важных результатов, на которые я буду ссылаться. Более полно об этом будет сказано в томе 2, особенно в гл. 17—22.

Вкратце, модуль M называется **неразложимым**, если в нем прямыми слагаемыми выделяются лишь 0 и сам M. Далее, модуль U **однороден**, если каждый подмодуль из U неразложим. **Вполне инвариантный** подмодуль некоторое модуля — это подмодуль, который отображается в себя при любом эндоморфизме этого модуля. Модуль **квазиинъективен**, если любой гомоморфизм любого его подмодуля в сам модуль индуцируется некоторым эндоморфизмом всего модуля.

Кольцо R называется **локальным**, если его необратимые элементы составляют идеал. (Можно показать, что R локально тогда и только тогда, когда $R/\operatorname{rad} R$ — тело (18.10).) Локальных колец очень много. С каждой коммутативной областью целостности R связано ее поле частных K, которое с точностью до изоморфизма характеризуется тем свойством, что $K = \{ab^{-1} \mid a,\ b \neq 0 \in R\}$. Тогда для любого простого идеала P кольца R подкольцо RS^{-1} поля K, состоящее из всех элементов as^{-1}, где $a \in R$, а s принадлежит дополнению $S = R - P$ идеала P в R, является локальным кольцом, называемым **локальным кольцом кольца R относительно простого идеала P**. [Построение поля частных K как множества всех пар (a, b), $a,\ b \neq 0 \in R$, с очевидным определением сложения и умножения проводится аналогично построению поля $\mathbb{Q}$ по кольцу $\mathbb{Z}$. Более того, подобным же образом строится кольцо

частных K *произвольного* коммутативного кольца R, характеризуемое с точностью до изоморфизма следующими двумя свойствами: K — кольцо, содержащее R и такое, что каждый регулярный элемент из R обратим в K и $K = \{ab^{-1} \mid a \in R,\ b \in R$ регулярен$\}$. И здесь также по любому простому идеалу P находится локальное кольцо RS^{-1}.]

3.61. Упражнения.

3.61.1. Модуль **однороден** тогда и только тогда, когда он является существенным расширением каждого своего ненулевого подмодуля.

(a) Показать, что M однороден тогда и только тогда, когда его инъективная оболочка неразложима.

* (b) Показать, что кольцо эндоморфизмов неразложимого инъективного модуля является локальным кольцом.

(c) (лемма Фиттинга). Кольцо эндоморфизмов любого неразложимого модуля, который одновременно артинов и нётеров, является локальным кольцом.

3.61.2. Кольцо A нётерово справа тогда и только тогда, когда в категории mod-A любая прямая сумма инъективных модулей инъективна. В этом случае любой инъективный модуль будет прямой суммой неразложимых модулей. (Ср. 3.48.3.)

3.61.3. Пусть модуль M инъективен в категории mod-A. Тогда любая прямая сумма $M^{(J)}$ инъективна в том и только том случае, когда A удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых идеалов вида $I = \operatorname{ann}_A X$, где X — подмножество из M. В этом случае модуль M называется **Σ-инъективным.** Каждый Σ-инъективный модуль является прямой суммой неразложимых модулей. Следующие утверждения равносильны: (a) все A-модули Σ-инъективны; (b) любая прямая сумма инъективных A-модулей инъективна: (c) A нётерово справа. (Ср. 3.48.2—3.48.3.)

3.61.4. Дуальным к понятию существенного подмодуля является понятие косущественного подмодуля. А именно подмодуль N модуля M называется **косущественным**, если из того, что $N + A = M$, следует, что $A = M$, где A — произвольный подмодуль модуля M. Мы записываем это так: $M \circ\!\!- N$. (Это понятие будет вновь обсуждаться в гл. 18 и 22.) Эпиморфизм $f\colon P \to M$ называется **минимальным**, если $\ker f$ косущественен. Таким образом, минимальные эпиморфизмы двойственны существенным мономорфизмам. **Проективное накрытие** модуля M определяется как минимальный эпиморфизм $f\colon P \to M$, где P — проективный модуль. Когда M обладает проективным накрытием, оно единственно в смысле, двойственном к единственности инъективной оболочки. Однако в отличие от инъективной оболочки проективное накрытие существует не всегда (даже для модулей над $\mathbb{Z}$). (Доказать это.)

* 3.61.5. Показать, что класс $\mathrm{Inj}\, A$ инъективных R-модулей, содержащих данный R-модуль A, можно упорядочить. (Для $E, F \in \mathrm{Inj}\, A$ положить $E \leqslant F$, если существует мономорфизм $f: E \to F$, который на A индуцирует тождественный гомоморфизм.)

* 3.61.6. (a) Модуль M квазиинъективен тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным подмодулем своей инъективной оболочки E, т. е. тогда и только тогда, когда $\lambda M \subseteq M$ для любого $\lambda \in \mathrm{End}_R E$ (Уонг — Джонсон [61]).

(b) Для любого модуля M существует единственный минимальный существенный мономорфизм $M \to Q$, где Q — квазиинъективный модуль (Уонг — Джонсон [61]). Любое минимальное квазиинъективное расширение модуля M является существенным (Фейс — Утуми).

(c) Перенести теорему 3.60 на квазиинъективные модули.

(d) Если $M = A \oplus B$ — квазиинъективный модуль, то квазиинъективны и модули A и B.

Прямая сумма $R \oplus M$ квазиинъективна тогда и только тогда, когда R и M инъективны в категории mod-R.

(e) Прямая сумма двух квазиинъективных модулей может не быть квазиинъективной.

(f) Если M квазиинъективен, то квазиинъективен и модуль M^n для любого целого числа $n > 0$.

(g) Пусть M — квазиинъективный модуль, и пусть $S = \mathrm{End}\, M_R$. Тогда ${}^{\perp}(N^{\perp}) = N$ для каждого конечно порожденного S-подмодуля N (Артин — Тейт (Артин [50]), Джекобсон [61, стр. 47] и Уонг — Джонсон [61]).

Идеализатор

Пусть S — некоторое кольцо, а A — его подкольцо. Определим тогда **идеализатор** $\mathcal{J}_S(A)$ **подкольца** A **в** S следующим образом:

$$\mathcal{J}_S(A) = \{s \in S \mid sA \subseteq A \text{ и } As \subseteq A\}.$$

Это подкольцо кольца S, содержащее A, и A является в нем идеалом. На самом деле идеализатор A в S является наибольшим подкольцом кольца S, содержащим A в качестве идеала.

3.62. Предложение. *Пусть P — произвольный R-модуль и $S = \mathrm{End}\, P_R$.*

3.62.1. *Если Q — подмодуль в P, то множество*

$$(P : Q) = \{f \in S \mid f(P) \subseteq Q\}$$

является подкольцом кольца S, а множество

$$(Q : Q) = \{f \in S \mid f(Q) \subseteq Q\}$$

содержится в идеализаторе подкольца $(P : Q)$ в S. Кроме того, имеет место точная последовательность колец

$$0 \to (P : Q) \to (Q : Q) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}\, (P/Q)_R,$$

где φ — такой кольцевой гомоморфизм, что

$$\varphi(f): x + Q \mapsto f(x) + Q$$

для всех $f \in (Q : Q)$, т. е. $\varphi(f)(x + Q) = f(x) + Q$, где $x \in P$.

3.62.2. *Если модуль P проективен, то φ — наложение и, значит,*

$$(Q : Q)/(P : Q) \approx \mathrm{End}\, (P/Q)_R.$$

3.62.3. *Если $P = R$, то R/Q — циклический правый R-модуль и последовательность*

$$0 \to Q \to \mathcal{J}_R(Q) \xrightarrow{\psi} \mathrm{End}\, (R/Q)_R \to 0,$$

где

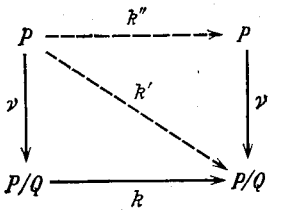
$$\psi(a): x + Q \to ax + Q$$

для каждого a из идеализатора подмодуля Q, точна. Окончательно:

$$\mathcal{J}_R(Q)/Q \approx \mathrm{End}\, (R/Q)_R.$$

Доказательство 3.62.1. Если $f \in (Q : Q)$, $x, y \in P$ и $x + Q = y + Q$, то $x - y \in Q$ и $f(x - y) = f(x) - f(y) \in Q$, откуда $f(x) + Q = f(y) + Q$. Таким образом, соответствие $x + Q \mapsto f(x) + Q$ задает отображение $P/Q \to P/Q$, которое мы обозначим через $\varphi(f)$. Ясно, что $\varphi(f) \in \mathrm{End}\, (P/Q)_R$ и $f \mapsto \varphi(f)$ определяет кольцевой гомоморфизм $\varphi: (Q : Q) \to \mathrm{End}\, (P/Q)_R$ с ядром $\ker \varphi = (P : Q)$. Этим установлено, что указанная в формулировке последовательность точна, и показано, что $(P : Q)$ является идеалом в $(Q : Q)$. Тогда очевидно, что $(Q : Q) \subseteq \mathcal{J}_S(P : Q)$, как и утверждалось.

Доказательство 3.62.2. Если модуль P проективен и $k \in \mathrm{End}\, (P/Q)_R$, то диаграмму



где ν — канонический гомоморфизм, можно дополнить (сначала гомоморфизмом $k' = k\nu$, а затем гомоморфизмом k'' в силу проективности модуля P). Если $x \in Q$, то $\nu(x) = 0$ и $\nu k''(x) = k\nu(x) = 0$. Следовательно, $k''(x) \in \ker \nu = Q$. Таким образом, $k'' \in (Q : Q)$. Ясно, что $\varphi(k'') = k$, значит, φ — наложение.

Доказательство 3.62.3. Это частный случай 3.62. при $P = R$. Действительно, здесь кольцо $S = \operatorname{End} R_R$ изоморфн R, причем изоморфизм осуществляется отображением $f \mapsto f(1)$. Это отображение, конечно, является вложением, так как равен ство $f(1) = g(1)$ влечет за собой $f(r) = f(1)\, r = g(1)\, r = g(r)$ для любого $r \in R$, откуда $f = g$. Оно — наложение, так как дл каждого $a \in R$ существует гомоморфизм $h \in \operatorname{End} R_R$, определенны формулой $h(r) = ar$ для любого $r \in R$, и ясно, что $h(1) = a$. Следовательно, если мы заменим в 3.62.1 и 3.62.2 кольцо S коль цом R, то получим доказываемый результат, так как $(Q : Q) = \mathcal{J}_R(Q)$. □

Ортогональное представление единицы идемпотентами

Элементы множества $\{e_i \mid i \in I\}$ идемпотентов кольца S **орто гональны**, если $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ для всех $i, j \in I$. Если $I = \{1, \ldots, n\}$ конечное множество и

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

то это семейство идемпотентов называется **ортогональным пред ставлением единицы**. **Центральный** элемент кольца — это элемен из его центра. Таким образом, **центральный идемпотент** — эт идемпотент, который коммутирует с каждым из элементов исход ного кольца.

3.63. Предложение. *Пусть M — некоторый R-модуль, и пусть $S = \operatorname{End} M_R$.*

3.63.1. *Если $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ — ортогональное представле ние единицы, $e_i \in S$, то $M = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, e_i M$ и $\ker e_j = \sum_{i \neq j} e_i M$.*

3.63.2. *Если $M = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, M_i$, то существует ортогональное представление единицы $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_1, \ldots, e_n \in S$, такое, что $e_i M = M_i$ и $\ker e_j = \sum_{i \neq j} M_i$.*

3.63.3. *Подмодуль N модуля M выделяется в нем прямым слагаемым тогда и только тогда, когда $N = eM$ для некоторого идемпотента $e \in S$. Каждый элемент $t \in eSe$ индуцирует эндоморфизм $t' \in \operatorname{End}_R eM$, где $t'(x) = tx$ для любого $x \in eM$. Отображение φ: $t \mapsto t'$ является кольцевым изоморфизмом $eSe \to \operatorname{End}_R eM$.*

Доказательство 3.63.3. Отображение φ сюръективно, поскольку N выделяется прямым слагаемым, и инъективно, так

как

$$eSe \cap \ker \varphi \subseteq \operatorname{Se} \cap S(1 - e) = 0.$$

Доказательство 3.63.1 получается теперь индукцией по n. Случай $n = 2$ тривиален. (Ср. 3.34.) Пусть $e = e_1 + \ldots + e_{n-1}$. Тогда $e_n = 1 - e$ и $M = eM \oplus e_n M$, поскольку здесь лишь два слагаемых. Так как e — сумма $n - 1$ ортогональных идемпотентов и так как e лежит в кольце eSe, изоморфном кольцу $\operatorname{End}_R eM$, предположение индукции показывает, что

$$eM = e_1(eM) \oplus \ldots \oplus e_{n-1}(eM) = e_1 M \oplus \ldots \oplus e_{n-1} M,$$

откуда

$$M = e_1 M \oplus \ldots \oplus e_n M,$$

как и утверждалось.

Доказательство 3.63.2. Если $M = M_1 \oplus M_2$, то 1_{M_1} можно продолжить до элемента $e \in S$, такого, что $\ker e = M_2$. Тогда $M_1 = eM$ и $M_2 = (1 - e)M$. Это доказывает наше утверждение для случая $n = 2$, а дальше доказательство, как и в 3.63.1, проводится просто по индукции. □

3.64. Следствие. *Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональные идемпотенты из R, то следующие утверждения эквивалентны:*

3.64.1. *$\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортогональное представление единицы.*

3.64.2. $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, e_i R$.

3.64.3. $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus\, R e_i$.

Доказательство 3.64.1 $\Leftrightarrow$ 3.64.2 следует из предложения 3.63 при $M = R$ и по симметричным соображениям 3.64.1 $\Leftrightarrow$ 3.64.3.

3.65. Предложение. *Пусть R — кольцо.*

3.65.1. *Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортогональное представление единицы в R с центральными идемпотентами e_i, то $S_i = e_i R = R e_i = e_i R e_i$ — кольцо, являющееся идеалом в R, $i = 1, \ldots, n$, и*

$$R = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \quad [1]).$$

3.65.2 *Пусть*

$$R_i \xrightarrow{u_i} \prod R_i \xrightarrow{p_j} R_j$$

[1]) Имеется в виду групповая прямая сумма (см. 2.19.1 и 2.20).— *Прим. ред.*

— представление кольца R в виде прямого произведения конечного семейства колец $R_1, \ldots, R_n$. Тогда $S_i = u_i(R_i)$ — кольцо, являющееся идеалом в R, $i = 1, \ldots, n$. Если e_i — кольцевая единица в S_i, то $e_iR = Re_i = e_iRe_i = S_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ — ортогональное представление единицы, причем идемпотенты e_i центральные и $R = S_i \oplus \ldots \oplus S_n$.

Доказательство 3.65.1. Согласно 3.64, $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus S_i$, где $S_i = e_iR$. Так как e_i — центральный идемпотент, $e_iRe_i = e_iR = S_i$, значит, S_i — кольцо с единицей e_i, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $RS_i = Re_iR = e_iR = S_i$, правый идеал S_i является левым идеалом, т. е. идеалом в R.

Доказательство 3.65.2. Ясно, что $S_i = u_i(R_i)$, $i = 1, \ldots, n$,— идеалы кольца $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, такие, что $S_iS_j = S_jS_i = 0$, когда $i \neq j$, и $R = \sum_{i=1}^{n} \oplus S_i$ [1]). Так как R_i — кольцо, то кольцом будет и $S_i = u_i(R_i)$; пусть e_i — единица кольца S_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из равенства $S_iS_j = 0$ следует, что $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ — ортогональное представление единицы. Ясно, что $S_i = e_iR = Re_i = e_iRe_i$. Так как e_i перестановочен со всеми элементами из S_i и аннулирует (слева и справа) все элементы из S_j, $j \neq i$, то, значит, e_i перестановочен со всеми элементами из R, т. е. лежит в центре кольца R, $i = 1, \ldots, n$. □

3.66. Предложение.

3.66.1. *Пусть $R = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ — прямое произведение конечного числа простых колец. Если A — идеал в R, то A совпадает с суммой некоторого подмножества из $\{0, S_1, \ldots, S_n\}$ и существует центральный идемпотент e, такой, что $A = eR = Re = eRe$.*

3.66.2. *Если, кроме того, $R = S'_1 \oplus \ldots \oplus S'_m$, где S'_i — простые кольца, $i = 1, \ldots, m$, то $n = m$ и найдется такая перестановка π множества $\{1, \ldots, n\}$, что $S'_i = S_{\pi(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство 3.66.1. Если $n = 1$, то утверждение тривиально. Допустим, что оно верно для $R' = S_1 \oplus \ldots \oplus S_{n-1}$. Если I — идеал в $R = R' \oplus S_n$ и если $x \in I$, $x = a + b$, где $a \in R'$, $b \in S_n$, то $ex = ea = a$ и $e_nx = e_nb = b$, где e — единица кольца R', а e_n — единица кольца S_n. Таким образом, $a \in I \cap R'$ и $b \in I \cap S_n$. Это показывает, что $I = (I \cap R') \oplus (I \cap S_n)$. По предположению индукции $I \cap R'$ — сумма подмножества из $\{0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$. Кроме того, $I \cap S_n = 0$ или $I \cap S_n = S_n$. Таким образом, I имеет нужный вид. Если $I = S_{i_1} \oplus \ldots \oplus S_{i_r}$ и если e_{ij} — единица кольца S_{ij}, то $e = e_{i_1} + \ldots + e_{i_r}$ — центральный идемпотент и $I = eR = Re = eRe$.

[1]) Действительно, ввиду 2.13.1

$$p_k(u_i(x) \cdot u_j(y)) = p_k u_i(x) \cdot p_k u_j(y) = 0,$$

и остается принять во внимание 2.19.1.— *Прим. перев.*

Доказательство 3.66.2. Доказательство вытекает из 3.66.1, где установлено строение идеалов кольца R, если учесть, что идеалы S'_j кольца R являются его минимальными идеалами. Действительно, S'_j является суммой некоторых из S_i, только когда $S'_j = S_k$ для некоторого k. □

3.67. Упражнения.

3.67.1. Пусть $E_1(A)$ — частично упорядоченное (по включению) множество левых идеалов кольца A вида Af, где f — идемпотент из A, и пусть $E(A)$ — аналогично определенное множество правых идеалов. Для произвольного R-модуля N обозначим через S кольцо его эндоморфизмов $\operatorname{End} M_R$. Отображение $N \mapsto \operatorname{ann}_S N$ задает антиизоморфизм частично упорядоченного множества прямых слагаемых модуля M на частично упорядоченное множество $E_1(S)$ ($I \mapsto \operatorname{ann}_M I$ — обратное отображение). Таким образом, модуль M неразложим тогда и только тогда, когда неразложим ${}_SS$.

(a) R_R неразложим тогда и только тогда, когда единственными его идемпотентами являются 0 и 1 (и тогда ${}_RR$ неразложим).

(b) Пусть M — произвольный модуль и $S = \operatorname{End} M_R$. Пусть e — идемпотент из S. Следующие пять утверждений эквивалентны: (i) подмодуль eM модуля M неразложим; (ii) Se — неразложимый левый идеал кольца S; (iii) eS — неразложимый правый идеал кольца S; (iv) e не представим в виде суммы $u + v$ ненулевых ортогональных идемпотентов u, v; (v) eSe неразложим.

3.67.2. Перенести 3.63 на аддитивные категории.

3.67.3. Следующие свойства ортогонального представления единицы $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ в кольце R эквивалентны: (1) каждый из идемпотентов e_i, $i = 1, \ldots, n$, централен; (2) $e_iR(1 - e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$; (3) $e_iRe_j = 0$, $j \neq i = 1, \ldots, n$; (4) e_iR — идеал, $i = 1, \ldots, n$; (5) $e_iR = Re_i$, $i = 1, \ldots, n$; (6) $(e_iR)^{\perp} = R(1 - e_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

3.67.4. Если эквивалентные условия из упражнения 3.67.3 выполнены, то $e_iR = e_iRe_i$, $i = 1, \ldots, n$, и R канонически изоморфно произведению колец $\prod_{i=1}^{n} e_iRe_i$. (Ср. 18.30 и далее.)

Вполне инвариантные подмодули

Любой R-модуль M является (S, R)-бимодулем, где $S = \operatorname{End} M_R$. Если N — вполне инвариантный подмодуль модуля M, то каждый эндоморфизм f последнего индуцирует эндоморфизм f' модуля N и соответствие $f \mapsto f'$ есть кольцевой гомоморфизм φ: $\operatorname{End} M_R \to \operatorname{End} N_R$. Если, кроме того, N выделяется в M прямым слагаемым, то φ — наложение.

3.68. Предложение. *Пусть M — некоторый R-модуль, являющийся (внутренней) прямой суммой $\sum_{i\in I} \oplus M_i$, где $\{M_i\}_{i\in I}$ — семейство вполне инвариантных подмодулей модуля M_R. Пусть $S = \operatorname{End} M_R$, $S_i = \operatorname{End}(M_i)_R$ и $p_i\colon S \to S_i$ — гомоморфное наложение колец, получаемое ограничением элементов кольца S на M_i, где $i \in I$. Тогда произведение $S \to \prod_{i\in I} S_i$ семейства $\{p_i\colon S \to S_i\}$ кольцевых морфизмов является кольцевым изоморфизмом.* □

3.69. Примеры вполне инвариантных подмодулей.

3.69.1. (a) Подмодуль модуля M, порожденный всеми минимальными подмодулями, называется **цоколем модуля** M и обозначается через $\operatorname{soc} M$.

(a) * [дуальный к п. (a)]. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M называется его **радикалом** и обозначается через $\operatorname{rad} M$.

Если M не имеет минимальных подмодулей, то $\operatorname{soc} M = 0$, и, двойственным образом, $\operatorname{rad} M = M$, когда у M нет максимальных подмодулей. (Например, в $\mathbb{Z}$ нет минимальных подгрупп, а в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — максимальных.)

(b) Подмодуль $H(N)$, порожденный всеми подмодулями, изоморфными данному минимальному подмодулю N.

(c) Если A — (левый) идеал кольца R, то ${}^{\perp}A = \operatorname{ann}_M A$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M. Любой идеал A кольца R является в R вполне инвариантным подмодулем.

3.69.2. Если $\{N_i \mid i \in I\}$ — семейство вполне инвариантных подмодулей модуля M_R, то $\sum_{i\in I} N_i$ и $\bigcap_{i\in I} N_i$ — вполне инвариантные подмодули. (Множество вполне инвариантных подмодулей составляет полную структуру.)

Упражнения к гл. 3

1. (Мазур — Эйленберг). Если P — проективный модуль, не являющийся конечно порожденным, то существует такой проективный модуль Q, что $P \oplus Q \approx Q$.

2. Если I и J — проективные подмодули модуля M, то модуль $I + J$ проективен тогда и только тогда, когда $I \oplus J \approx (I + J) \oplus (I \cap J)$.

3. Пусть I — идеал кольца R. Если P — проективный R-модуль, то P/PI — проективный R/I-модуль.

4. Пусть P — проективный R-модуль, а $S = \operatorname{End} P_R$.

(a) Элемент $f \in S$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда он имеет в S правый обратный.

(b) Привести пример, показывающий, что элемент f из п. (a) может не иметь левого обратного.

(c) Если или модуль P удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей подмодулей, или кольцо R коммутативно, то элемент f из п. (a) обратим.

* (d) (Васконселос). Если M — конечно порожденный модуль над коммутативным кольцом R, то любой эпиморфный эндоморфизм f является автоморфизмом.

5. (Бэр [40]). Пусть M содержится в инъективном модуле E.

(a) Показать, что существует подмодуль $I(M)$ модуля E, содержащий M и удовлетворяющий такому условию: каждое вложение модуля M в некоторый инъективный модуль можно продолжить до вложения в него модуля $I(M)$.

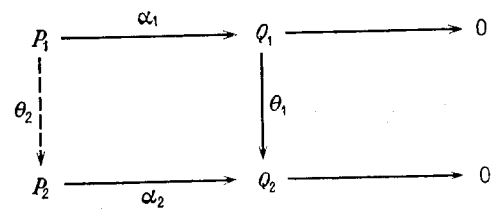
(b) Доказать, что $I(M)$ — максимальное существенное расширение модуля M (соотв. его инъективная оболочка).

6. Сумма всех косущественных подмодулей модуля M является подмодулем, обозначаемым через $\operatorname{superfl} M$. Элемент $x \in M$ называется **необразующим**, если порожденный им подмодуль является косущественным. (Ср. 3.61.4.)

(a) Показать, что $\operatorname{superfl} M$ совпадает с множеством всех необразующих модуля M.

(b) Показать, что $\operatorname{superfl} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Обобщить этот результат.

7. Любая диаграмма



с точными строками, где P_1 и P_2 — проективные модули, может быть дополнена гомоморфизмом θ_2, как указано выше. Доказать следующие утверждения:

(a) Если $P_2 \circ\!\!-\ker \alpha_2$, то θ_2 будет эпиморфизмом, если θ_1 является эпиморфизмом (ср. 3.61.4).

(b) Если $P_2 \circ\!\!-\ker \alpha_2$ и $P_1 \circ\!\!-\ker \alpha_1$ и θ_1 — изоморфизм, то θ_2 — также изоморфизм.

8. Доказать, что *если модуль P проективен, то* $\operatorname{rad} P = P \cdot \operatorname{rad} R$. [*Указание*: показать, что взятие радикала перестановочно со взятием прямой суммы, т. е. $\operatorname{rad}(\sum_i \oplus A_i) = \sum_i \oplus \operatorname{rad} A_i$.]

9. Пусть P_1 и P_2 — конечно порожденные проективные правые R-модули. Тогда $P_1/\operatorname{rad} P_1 \approx P_2/\operatorname{rad} P_2$ в том и только том случае, когда $P_1 \approx P_2$.

10. Если P — конечно порожденный проективный правый R-модуль с кольцом эндоморфизмов S, то факторкольцо $S/\operatorname{rad} S$ изоморфно кольцу $\operatorname{End}_R(P/P \cdot \operatorname{rad} R)$.

11 (лемма об унимодулярных строках). Пусть F — свободный правый R-модуль с базисом $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $x = \sum_1^n x_i r_i \in F$, $r_i \in R$ для любого $i \in I$. Обозначим через A левый идеал, порожденный элементами $r_1, \ldots, r_n$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

(a) $A = Re$ для некоторого элемента $e \in R$.

(b) Подмодуль xR выделяется в F прямым слагаемым, причем он изоморфен модулю eR при гомоморфизме, переводящем x в e.

Вывести из этого, что если R — **регулярное кольцо** (т. е. кольцо, в котором каждый правый или левый конечно порожденный идеал выделяется прямым слагаемым), то каждый циклический (а также конечно порожденный) подмодуль свободного R-модуля выделяется в нем прямым слагаемым.

* **12** (Капланский). Любой проективный модуль является прямой суммой счетно порожденных модулей.

13. Доказать эквивалентность следующих утверждений относительно правого идеала I кольца R:

(a) $I = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$.

(b) I изоморфен прямому слагаемому правого R-модуля R.

(c) R/I — проективный правый R-модуль.

14. Пусть I — множество правых идеалов кольца R вида eR, где e — идемпотент кольца R. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

(a) Каждое подмножество множества I содержит максимальный элемент.

(b) Каждое подмножество множества I содержит минимальный элемент.

(c) I не содержит ни одного бесконечного независимого подмножества.

(d) R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов.

Показать, что если эти условия выполняются, то R является прямой суммой (конечного числа) неразложимых правых идеалов.

15. Категория C колец называется **центрально замкнутой**, если для каждого объекта R из C центр кольца R изоморфен некоторому объекту категории C. Аналогично, скажем, что C **(конечно) замкнута по Галуа**, если для любого $R \in C$ и (конечной) группы G автоморфизмов кольца R имеем $\operatorname{fix} G \in C$. (Ср. 3.27 (b).) Выяснить, какие из категорий колец, которые уже рассматривались выше или будут рассматриваться в дальнейшем, являются центрально замкнутыми или замкнутыми по Галуа.

* **16.** Доказать, что объект E категории mod-R является кообразующим тогда и только тогда, когда для любого объекта X и его подобъекта X_0 выполняется равенство $X_0 = \operatorname{ann}_X \operatorname{ann}_E X_0$. Если R — кообразующий, то каждый правый идеал является аннуляторным правым идеалом. Ср. упр. 20.

17. Пусть A — правый идеал кольца R, и пусть аннуляторный левый идеал ${}^{\perp}A$ порождается элементами $\{x_i \mid i \in I\}$.

(a) Показать, что соответствие h: $a + A \mapsto (\ldots, x_i a, \ldots)$, определенное для всех $a \in R$, является гомоморфизмом правых R-модулей $R/A \to R^I$.

(b) Доказать, что в п. (a) гомоморфизм h является мономорфизмом тогда и только тогда, когда A — аннуляторный правый идеал.

(c) Доказать, что R/A можно вложить в прямое произведение экземпляров кольца R тогда и только тогда, когда A — аннуляторный правый идеал.

(d) Доказать, что R/A можно вложить в свободный R-модуль тогда и только тогда, когда A является аннулятором конечного подмножества кольца R.

(e) Вывести отсюда, что если каждый правый R-модуль содержится в свободном R-модуле, то каждый правый идеал кольца R является аннулятором конечного подмножества кольца R.

18. Показать, что следующие условия на кольцо R эквивалентны:

(a) R удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных правых идеалов.

(b) R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных правых идеалов.

(c) Каждому правому идеалу A соответствует такой конечно порожденный правый идеал $A_1 \subseteq A$, что ${}^{\perp}A = {}^{\perp}A_1$.

19. Показать, что кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов и условию обрыва убывающих цепей левых идеалов при условии, что каждый правый идеал является аннулятором конечного подмножества кольца R и каждый левый идеал является аннулятором конечного подмножества кольца R. Вывести отсюда, что коммутативное кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов, если каждый его идеал является аннулятором конечного подмножества кольца R. (В этом случае кольцо R самоинъективно. Ср. гл. 12, упр. 6.)

20. (a) Доказать эквивалентность следующих двух условий: (i) M полурефлексивен; (ii) M изоморфен подмодулю прямого произведения экземпляров R-модуля R. Вывести отсюда, что над областью целостности любой полурефлексивный модуль является модулем без кручения.

(b) Показать, что для любого R-модуля M левый модуль M^* полурефлексивен.

(c) Пусть A — правый идеал кольца R. Доказать, что циклический модуль R/A полурефлексивен тогда и только тогда, когда A является аннуляторным правым идеалом.

(d) Все правые R-модули полурефлексивны тогда и только тогда, когда R — кообразующий категории mod-R. (Ср. упр. 16.)

21. Пусть R — кольцо, а A и B — его правые идеалы.

(a) Мономорфизм модуля R/A в модуль R/B, где A и B — правые идеалы, существует тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{ann}_R(x/B)$ для некоторого элемента $x \in R$.

(b) Таким образом, мономорфизм $h\colon R/A \to R$ существует тогда и только тогда, когда $A = x^{\perp}$ для некоторого $x \in R$. В этом случае $\operatorname{im} h = xR$ и ${}^{\perp}A \supseteq Rx$.

(c) Если A и B — идеалы, то $R/A \approx R/B$ как R-модули тогда и только тогда, когда $A = B$.

(d) Пусть $\{R_i\}_{i\in I}$ — семейство колец и $R = \prod_{i\in I} R_i$ — произведение колец. Тогда, превращая R_i в R-модуль при помощи проекции (в категории колец) $R \to R_i$, $i = 1, \ldots, n$, доказать, что $R_i \approx R_j$ как R-модули тогда и только тогда, когда $i = j$. Вывести отсюда, что даже если R_1 и R_2 — изоморфные кольца, получающиеся при этом $R_1 \times R_2$-модули R_1 и R_2 неизоморфны. Пусть $R = R_1 \times R_2$. Тогда $R_i \approx \operatorname{End}(R_i)_R$, $i = 1, 2$. Получить из этого, что неизоморфные модули могут иметь изоморфные кольца эндоморфизмов.

22. Пусть A — правый идеал кольца R. Показать, что

$$\operatorname{Hom}_R(R/A, R) \to R$$
$$f \mapsto f(1 + A)$$

— мономорфизм левых R-модулей и что образ этого отображения является левым аннулятором идеала A в R. Вывести отсюда, что $\operatorname{Hom}_R(R/A, R) \approx {}^{\perp}A$. Обобщить этот результат на произвольный подмодуль проективного правого R-модуля P, т. е. доказать, что

$$\operatorname{Hom}_R(P/A, R) \approx \operatorname{ann}_{\operatorname{Hom}_R(P, R)} A.$$

23. Если G — абелева группа, а $\operatorname{End} G$ — тело характеристики 0, то G изоморфна аддитивной группе рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

24. (a) Любой гомоморфизм структур $\operatorname{Pow} A \to \operatorname{Pow} B$ является кольцевым гомоморфизмом соответствующих булевых колец.

(b) Множество $E(R)$ идемпотентов коммутативного кольца R является булевым кольцом относительно обычных операций сложения и умножения кольца R.

25. Если R-модуль M удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей подмодулей, то любой его эндоморфизм, являющийся эпиморфизмом, обратим. Сформулировать дуальное утверждение. Вывести отсюда, что если R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов, то любой неделитель нуля $x \in R$ обратим.

*** 26.** Если C — конечно порожденный и проективный кообразующий категории mod-A и если $A/\operatorname{rad} A$ полупрост, то C и A инъективны в категории mod-A.

27. Любой неразложимый проективный инъективный объект M категории mod-A изоморфен прямому слагаемому объекта A, т. е. существует $e = e^2 \in A$, такой, что $M = eA$.

*** 28.** (Матлис — Папп). Кольцо A нётерово справа тогда и только тогда, когда каждый инъективный объект категории mod-A изоморфен прямой сумме неразложимых модулей.

29. Кольцо эндоморфизмов неразложимого (квази)инъективного модуля, не имеющего нетривиальных вполне инвариантных подмодулей, является телом.

30. Каждая периодическая абелева группа вкладывается в прямую сумму некоторого множества экземпляров группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. [*Указание*: свести к случаю p-примарной группы. Затем рассмотреть подгруппу S, состоящую из всех элементов порядка $\leqslant p$. Использовать тот факт, что S является векторным пространством над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и применить 3.58.]

31. Ограниченная [1]) абелева группа A является прямой суммой циклических групп. [*Указание*: свести к случаю p-примарной группы. Применить упр. 30 и вложить A в $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(a)}$ для подходящего кардинального числа a. Показать, что A пересекается с каждой из групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ по циклической группе и что она является прямой суммой этих своих пересечений.

32. Доказать основную теорему о конечно порожденных абелевых группах. (См. гл. 1, упр. 27.)

33. (Селе). Абелева группа H вкладывается в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда никакие две ее различные подгруппы не изоморфны.

Замечания к гл. 3

В вопросах истории математики большинство математиков стоит на нетвердой, хотя и освященной земле. За пределами устных преданий и собственных ограниченных познаний лежит малоизвестный мир действительности, вымысла и фантазии. Однако если сами теоремы составляют основу блюда, то непременные указания авторства, устные или нет, добавляют необходимую острую приправу. Лишь малодушные или очень благоразумные люди способны отказаться внести свою долю в царящую здесь всеобщую неразбериху. Крайне эмоциональные «Исторические очерки» в конце книг трактата Бурбаки по математике в большинстве случаев носят отчетливый (и преднамеренный) французский привкус. В частности, в своем «Историческом очерке» к гл. «Полупростые модули и кольца» Бурбаки [66] приписывает введение понятия факторалгебры, идеала и гомоморфизма Молину и Картану и дает набросок истории исследований колец и алгебр, которые не полностью отражены в книге Джекобсона [56], переизданной в 1964 г. [2]). По вопросам приоритета мы отсылаем читателя к этим двум трудам.

Большинству книг, выходящих в свет, авторы придают остроту, приписывая результаты конкретным людям целиком в соответствии со своими вкусами и прихотями.

Настоящая книга в этом плане не составляет исключения, но, как и в других книгах, я ставил перед собой цель указать автора статьи, в которой тот или иной результат появился впервые, а не воздавать почести. В случаях когда авторство не указывалось, я был не уверен в источнике, особенно это относится к вопросам теории категорий. Здесь читатель может насладиться,

[1]) Напомним, что абелева группа A называется ограниченной, если $mA = 0$ для некоторого натурального m.— *Прим. ред.*

[2]) См. Джекобсон [61].— *Прим. перев.*

как это делал я, чтением стимулирующего сообщения Питера Фрейда [60] (я не могу, конечно, ручаться за его точность!). Картан — Эйленберг [60], Маклейн [66], Митчелл [65], а также Кэртис — Райнер [69] и Басс [73] сообщают некоторые исторические данные по теории категории и гомологической алгебре. См. также Маклейн [72].

Бэр [40] ввел понятие инъективного модуля над произвольным кольцом (но не сам термин, терминология восходит к Экману — Шопфу [53]) и показал, что любая категория модульного типа «инъективно богата». Экману и Шопфу обычно приписывается понятие инъективной оболочки модуля, но Бэр на самом деле тоже говорил о «наименьшей полной группе», содержащей данную группу. Существование такой группы утверждалось некоторыми теоремами из его статьи, но это была только «наименьшая существенная», а не «действительно наименьшая» группа. Слова в кавычках принадлежат Бэру (цитированная выше статья). Бэровские полные группы над кольцом R — это R-модули, удовлетворяющие условию, которое мы называем условием Бэра, т. е. инъективные модули. Наименьший инъективный модуль, содержащий данный модуль M, определяется как модуль $I(M)$ из упражнения 5. Очевидно, что модули $I_1(M)$ и $I_2(M)$, определенные с помощью различных модулей F_1 и F_2, содержащих M, изоморфны, причем изоморфизм осуществляется отображением, продолжающим 1_M. Более того, вопреки тому, что сказал Бэр, $I(M)$ — наименьший инъективный модуль, содержащий M, а именно если $I(M) \supseteq \supseteq E \supseteq M$ и E инъективен, то $I(M) = E$. Таким образом, нет сомнения, что понятие минимального инъективного модуля, содержащего M, принадлежит Бэру. Замечательный вклад Экмана и Шопфа — это характеризация модуля $I(M)$ как максимального существенного расширения. Кроме того, они показали, что инъективный модуль, содержащий M, можно построить с помощью вложения модуля M в делимую группу G.

Ссылки

Артин [50], Артин — Несбит — Тролл [44], Басс [73], Брауэр — Вейс [64], Бурбаки [66], Бэр [40], Ван-дер-Варден [48], Джанс [64], Джекобсон [47], [56, 64], Зарисский — Самуэль [63], Капланский [69], Кэртис — Райнер [69], Ламбек [71a], Маклейн [66], [72], Митчелл [65], Морита [58], Понтрягин [72], Фейс [67a], Херстейн [72], Экман — Шопф [53].

Глава 4

ТЕОРЕМА О СООТВЕТСТВИИ ДЛЯ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ И СТРОЕНИЕ ПРОСТЫХ НЁТЕРОВЫХ КОЛЕЦ

Большая часть гл. 4 посвящена изложению результатов о строении нётеровых справа колец. Основной аппарат составляют обобщения теорем Мориты [58], дающих критерий подобия двух колец A и B (подобие колец A и B означает эквивалентность категорий mod-A и mod-B). Критерий Мориты 4.29 устанавливает существование конечно порожденного проективного модуля P, являющегося образующим категории mod-B и такого, что A изоморфно $\mathrm{End}_B P$. В ситуации Мориты (4.30) имеет место структурный изоморфизм

$$\begin{cases} \text{правые } A\text{-подмодули из } P \to \text{правые идеалы из } B \\ IP \leftrightarrow I \end{cases}$$

переводящий (B, A)-подмодули в идеалы кольца B. Более общим образом (4.7), если U — конечно порожденный проективный точный левый модуль над произвольным кольцом B и $A = \mathrm{End}_B U$, то имеет место структурный изоморфизм

$$\begin{cases} \text{правые } A\text{-подмодули из } U \to (\text{правые идеалы из } B)\ T \\ IU \leftrightarrow I = IT \end{cases}$$

где T — след модуля U в B (теорема о соответствии для проективных модулей). Этот изоморфизм переводит (B, A)-подмодули из U в (идеалы из B) T. Таким образом, когда $T = B$ (и только в этом случае) эти две теоремы совпадают.

Только что приведенную теорему о соответствии для проективных модулей можно применить для решения следующей проблемы: выяснить, когда кольцо эндоморфизмов $A = \mathrm{End}_B U$ конечно порожденного проективного точного модуля U над кольцом B (1) просто, (2) нётерово справа или (3) просто и нётерово справа одновременно. Так, (1) A просто тогда и только тогда, когда $T = \mathrm{tr}_B U$ аннулирует любой идеал K кольца B, строго содержащийся в T, т. е. $TK = 0$. В этом случае $(KT)^2 = 0$. Если B полупервично, то $KT = 0$ и $K = 0$, а тогда A просто в том и только том случае, когда T — наименьший идеал кольца B (4.8.6).

Проблема (2) имеет аналогичное решение. Так как U обязательно является образующим категории mod-A, то из теоремы о соответствии следует, что U нётеров справа в категории mod-A

тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых идеалов вида $I = IT$. В этом случае A нётерово справа. Если же U конечно порожден в mod-A, то верно и обратное утверждение, а именно из нётеровости справа кольца A следует, что B удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых идеалов вида $I = IT$. (Ср. 4.9.)

Если A одновременно просто и нётерово справа, то по теореме Голди [58] оно содержит такой правый идеал U, что $B = \mathrm{End}\ U_A$ — правая область Ope. В этом случае U — обязательно конечно порожденный проективный B-модуль и решение проблемы (3) можно сформулировать для колец эндоморфизмов проективных модулей над правыми областями Ope следующим образом.

(A) Теорема. *Кольцо A является простым и нётеровым справа тогда и только тогда, когда $A \approx \mathrm{End}_B U$, где U — конечно порожденный и проективный модуль над правой областью Ope B, все идеалы которой исчерпываются следующими тремя: 0, $T = \mathrm{tr}_B U$ и B, и которая удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей идемпотентных правых идеалов, содержащихся в T (возможен случай $T = B$).* (Ср. 4.22. B.)

(B) Предложение. *В формулировке теоремы* (A) *кольцо B можно выбрать так, чтобы его центр C был телом, изоморфным центру кольца A, и, кроме того, $B = C + T$.* (Ср. 4.14 и 4.22.3A.)

(C) Предложение. *Если A — кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы* (A), *то для существования изоморфизма $A \approx \mathrm{End}_{B'} U'$, где B' — некоторая правая область Ope, а U' — конечно порожденный проективный левый B'-модуль, необходимо и достаточно, чтобы B и B' имели одно и то же тело частных D и были эквивалентными правыми порядками последнего.* (Ср. 4.37.)

Утверждения (A), (B) и (C) сводят каждый вопрос о строении простого нётерового кольца A к соответствующему вопросу для правой области Ope B, определенной с точностью до эквивалентности порядков в ее правом теле частных. Кроме того, *B имеет не более одного нетривиального идеала.* Это наилучшая из возможных теорем в том смысле, что все возникающие таким образом кольца B могут быть простыми лишь в случае, когда A наследственно справа (4.40). Однако если правая глобальная размерность кольца A не превосходит 2, то оно подобно некоторой простой области целостности, т. е. в этом случае какое-то кольцо B просто (ср. 8.27). Мы также выясняем, при каком условии (в терминах категории mod-B) кольцо A подобно области целостности. Оно состоит в том, что для некоторого правого идеала I кольца B подкольцо $(I : I) = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}$ является простым кольцом (4.23B).

Связь между категорией RINGS и категориями mod-R правых R-модулей, где R пробегает множество объектов категории

RINGS, любопытным образом «зациклена», так как каждый модул имеет кольцо эндоморфизмов.

Вот несколько типичных проблем теории абстрактных колец

1. Если кольцо абстрактно определено, попытаться найти ег «конкретную» реализацию.

(a) Изоморфно ли оно какому-либо «известному» кольцу?

(в) Изоморфно ли оно кольцу эндоморфизмов некоторог «известного» модуля над «известным» кольцом?

(b′) Можно ли его вложить в такое кольцо?

(c) Можно ли найти для него полное множество инвариантов [1] Будет ли оно конечным (счетным)?

(d) Если кольцо принадлежит некоторой подкатегории катего рии RINGS, то что можно сказать о его факторкольцах?

2. Если абстрактно задан модуль M из mod-R, то относительн него можно поставить аналогичные вопросы. Но, кроме того можно задать все вопросы из п. 1 применительно к кольцу эндо морфизмов этого модуля. Тогда, если ответ на вопрос 1 (b) поло жителен, скажем $\mathrm{End}\, M_R \approx \mathrm{End}\, N_A$, где «$A$ — известное кольц и N — известный модуль», то в каком соотношении находятся кольца R и A? И если они «близки», например изоморфны то в каком отношении находятся модули M и N? Наконец, ка соотносятся кольца R и $\mathrm{Biend}\, M_R$ (и категории модулей на ними)?

Некоторые из представленных ниже примеров использую понятие алгебры и тензорного произведения алгебр, определяемы в следующей главе. (Таким образом, эти примеры также под водят нас к гл. 5.)

4.0. Примеры.

4.0.1. Каждое простое кольцо вложимо в качестве плотного подкольца в кольцо всех линейных преобразований некоторог векторного пространства. Необходимым и достаточным условием для вложимости кольца в качестве плотного подкольца в кольц всех линейных преобразований некоторого векторного простран ства является существование простого точного модуля над этим кольцом (теорема Шевалле — Джекобсона). Такое кольцо назы вается **примитивным** (19.22).

4.0.2. Кольцо R изоморфно кольцу всех линейных преобра зований конечномерного векторного пространства над телом K тогда и только тогда, когда оно является простым кольцом с усло вием минимальности для правых идеалов (теорема Веддербёрна — Артина, гл. 8).

[1]) Полное множество инвариантов объекта A категории C есть множество $d(A)$, определенное так, что $A \approx B$ тогда, и только тогда, когда $d(A) = d(B)$. Для «хороших» теорий $d(A)$ оказывается обычно множеством целых чисел.— *Прим. ред.*

4.0.3. Если тело K в 4.0.2 коммутативно и алгебраически замкнуто, например $K = \mathbb{C}$, то кольцо R является центральной алгеброй над $\mathbb{C}$ и имеет конечный базис с известными структурными константами. На самом деле R — полная алгебра матриц над $\mathbb{C}$. В случае произвольного алгебраически замкнутого поля само поле и порядок кольца матриц [1]) составляют полную систему инвариантов простой конечномерной алгебры (теорема Веддербёрна, гл. 13).

4.0.4. Если M — образующий в mod-R, то R канонически изоморфно кольцу $\mathrm{Biend}\, M_R$ (теоремы Мориты 4.1 и 7.3). Следовательно, каждый образующий является сбалансированным модулем. Если R — простое кольцо, то каждый его ненулевой правый идеал сбалансирован.

4.0.5. Два кольца A и B подобны (т. е. mod-$A \approx$ mod-B) тогда и только тогда, когда B изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторого конечно порожденного проективного образующего категории mod-A (теорема Мориты 4.29).

4.0.6. Дуальным к понятию подобия служит понятие двойственности. Однако между категориями mod-A и B-mod не существует двойственности ни для какой пары колец A, B. Тем не менее в категориях mod-A и B-mod могут существовать подкатегории $\mathscr{C}_A$ и ${}_B\mathscr{C}$, содержащие A и B соответственно и такие, что имеет место двойственность $\mathscr{C}_A \rightsquigarrow {}_B\mathscr{C}$. Достаточным (и в некотором смысле необходимым) условием для этого служит существование (B, A)-бимодуля U, который является инъективным кообразующим в обеих категориях. Тогда $\mathrm{Hom}_A(\ ,U)$ и $\mathrm{Hom}_B(\ ,U)$ индуцируют пару двойственности (теорема Мориты, гл. 23). Случай $A = U = B$ характеризует квазифробениусовы кольца (гл. 24). Эти кольца самоинъективны справа и артиновы (теорема Икеды), любой односторонний идеал такого кольца является аннулятором. (Ср. гл. 12, упр. 6.)

4.0.7. Говорят, что модуль M из mod-R **определяется своим кольцом эндоморфизмов**, если изоморфизм $\mathrm{End}\, M_R \approx \mathrm{End}\, N_R$ влечет за собой изоморфизм $M \approx N$. Любое векторное пространство определяется своим кольцом эндоморфизмов (см. упр. 2 в конце этой главы). Э. Уокер поставил в связи с этим такой вопрос: когда изоморфизм $\mathrm{End}\, M_A \approx \mathrm{End}\, N_B$ для двух различных колец A и B влечет за собой категорную эквивалентность T: mod-$A \approx$ $\approx$ mod-B и эквивалентность $N \approx TM$ в категории mod-B? (Ср. 16.20 и 24.27.)

4.0.8. В связи с вопросом о соотношении между категориями mod-A и mod-B, где $B = \mathrm{End}\, M_A$, теорема Попеску — Габриеля утверждает, что если M — образующий в mod-A, то категория

[1]) То есть порядок (или размер) матриц, составляющих это кольцо.— *Прим. ред.*

mod-A может быть восстановлена по категории mod-B одним из следующих способов:

(a) mod-A — это некоторая полная подкатегория категории mod-B [вложение mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B, индуцированное функтором h^M, полно (теорема Мориты и Габриеля — Попеску 4.24)].

(b) Существует точный функтор S: mod-$B \rightsquigarrow$ mod-A (сопряженный слева к h^M), такой, что $Sh^M \approx 1_{\text{mod-}A}$ (см. 5.70), и mod-A есть абелева категория, эквивалентная факторкатегории mod-B/ker S категории mod-B в смысле определения Габриеля [62] (см. 15.26).

4.0.9. Если k — коммутативное кольцо, то категория k-ALG всех алгебр над k (гл. 5) представляет собой абелев моноид относительно тензорного умножения $A \underset{k}{\otimes} B$ алгебр A и B. Пусть $[A] = [A']$ тогда и только тогда, когда A и A' подобны как k-алгебры [1]). Тогда множество всех $[A]$ составляет моноид относительно операции $[A]\,[B] = [A \underset{k}{\otimes} B]$. **Группа Брауэра** Br (k) определяется как группа обратимых элементов этого моноида. Она состоит из всех таких $[A]$, что A — алгебра Адзумаи. (Теорема Брауэра [когда k — поле], Адзумаи [k — локальное кольцо] и Ауслендера — Голдмана [k — произвольное коммутативное кольцо].

4.0.10. Редуцированное кольцо R без кручения конечного ранга n изоморфно кольцу эндоморфизмов абелевой группы без кручения ранга $\leqslant 2n$ (Корнер [63]). Кольцо называется **кольцом без кручения**, если его аддитивная группа — группа без кручения. Оно называется **редуцированным**, если 0 — его единственная делимая подгруппа. **Ранг** — это максимальная мощность его подмножеств, линейно независимых над $\mathbb{Z}$. В этом направлении Цассенхауз [67] доказал, что любое кольцо с конечным базисом ранга n над $\mathbb{Z}$ изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторой абелевой группы M ранга n.

4.0.11. Следуя Троллу [48], назовем кольцо A QF-1-**кольцом**, если любой точный модуль над ним сбалансирован. Следуя Камилло [70], будем называть кольцо A **сбалансированным**, если сбалансирован каждый правый модуль над ним. Таким образом, A сбалансировано тогда и только тогда, когда каждое факторкольцо A/I является QF-1-кольцом. Тролл поставил проблему описания всех конечномерных QF-1-алгебр над полем k. Любое квазифробениусово кольцо (QF-кольцо) является QF-1-кольцом, но класс QF-1-алгебр строго содержит класс QF-алгебр (Тролл, там же). (Недавние результаты см. Камилло [70], Диксон — Фуллер [70], Фуллер [71], Камилло — Фуллер[72], Длаб и Рингель [72], Джанс [70].)

Более общий, но примыкающий сюда вопрос: когда каноническое отображение $A \to \text{Biend}\, M_A$ является эпиморфизмом в категории RINGS? Например, вложение любого кольца в его классическое кольцо частных (в частности, вложение области целостности в ее тело частных) есть кольцевой эпиморфизм. (Любое гомоморфное наложение колец является разумеется, эпиморфизмом категории RINGS.)

[1]) См. стр. 587—589.— *Прим. ред.*

4.1. Предложение. *Пусть U — объект категории* mod-A, *и пусть* $B = \text{End}\, U_A$.

4.1.1. *Существует канонический (A, B)-бимодульный гомоморфизм*

$$(1)\qquad [\ ,\ ]\begin{cases} \text{Hom}_A(U, A) \to \text{Hom}_B(U, B) \\ f \mapsto [\ , f], \end{cases}$$

такой, что

$$(2)\qquad [\ , f]\begin{cases} U \to B \\ u \mapsto [u, f], \end{cases}$$

где $[u, f]$ — эндоморфизм объекта U, определяемый как

$$(3)\qquad [u, f]\begin{cases} U \to U \\ v \mapsto uf(v). \end{cases}$$

Таким образом,

$$(4)\qquad [u, f]\, v = uf(v)$$

для любых $u, v \in U$, $f \in \text{Hom}_A(U, A)$.

4.1.2. *Если, кроме того, $A = \text{End}_B U$, то по симметрии существует канонический гомоморфизм*

$$(5)\qquad (\ ,\ )\begin{cases} \text{Hom}_B(U, B) \to \text{Hom}_A(U, A) \\ g \mapsto (g,\ ), \end{cases}$$

где

$$(g,\ )\begin{cases} U \to A \\ u \mapsto (g, u) \end{cases}$$

и

$$(6)\qquad v(g, u) = (v)\, g \cdot u.$$

(7) *В этом случае $(\ ,\ )$ и $[\ ,\ ]$ — взаимно обратные изоморфизмы* [1]).

4.1.3 (Морита). *Следующие условия на U, A, B эквивалентны:*

(a) *U — образующий категории* mod-A.

(b) *U — конечно порожденный проективный объект категории* End U_A-mod *и A канонически изоморфно* End$_B U$.

[1]) Морита доказал эту часть в предположении, что U — образующий категории mod-A.

4.1.4. *Если U — образующий в* mod-A, *то* $[\ ,\ ]$, $\mathrm{Hom}_A(U, A) \to \mathrm{Hom}_B(U, B)$ *есть* (A, B)*-бимодульный изомо*
физм, а (5) *— изоморфизм, обратный к нему.*

Доказательство. Пусть $U^* = \mathrm{Hom}_A(U, A)$ и U' $= \mathrm{Hom}_B(U, B)$ — канонические (A, B)-бимодули. Если $a \in$ $b \in B$ и $f \in U^*$, то

$$[u, afb]\, v = uaf(bv) = [ua, f]\, bv,$$

так что $[\ , afb] = a[\ , f]\, b$. Тогда (1) определяет (A, B)-гом морфизм; по симметрии то же самое можно сказать про (5). То дество

$$u\cdot[\ , (g, \ )](v) = [u, (g, \ )](v) = u(g, v) = (u)\, g\cdot v$$

показывает, что $[\ , (g, \ )] = g$ для любого $g \in U'$, т. е. $[\ , (\ , \ )] = 1_U$. Когда $A = \mathrm{End}_B U$, то по симметрии $([\ , f], \ )$ $= f$ для любого $f \in U^*$ и $([\ , \ ], \ ) = 1_{U^*}$. Это доказывает, ч $(\ , \ )$ и $[\ , \ ]$ при $A = \mathrm{End}_B U$ и $B = \mathrm{End}\ U_A$ — взаим обратные изоморфизмы.

Согласно 3.27, U является образующим категории mod-A тог и только тогда, когда существует конечное множество элемент $f_1, \ldots, f_n$ из U^* и $u_1, \ldots, u_n$ из U, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1_A. \tag{8}$$

С другой стороны, по лемме о дуальном базисе 3.23 B-моду U конечно порожден и проективен тогда и только тогда, ког существует конечное множество элементов $g_1, \ldots, g_n$ из и $u_1, \ldots, u_n$ из U, таких, что

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v)\, g_i u_i \tag{9}$$

для любого $v \in U$. Таким образом, если умножить v на (8), то ст новится ясно, что (9) выполняется при $g_i = [\ , f_i] \in U'$, $i = 1,$ $\ldots, n$. Это доказывает, что если U является образующим в mod- то он конечно порожден и проективен над B. Кроме того, есл $t \in \mathrm{End}_B U$, то, применяя t к v в (9), получаем, что

$$vt = \sum_{i=1}^{n} (v)\, g_i \cdot u_i t = \sum_{i=1}^{n} [v, f_i]\cdot u_i t = \sum_{i=1}^{n} v f_i(u_i t), \tag{10}$$

откуда вытекает, что t есть образ элемента $a = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i t)$ пр каноническом гомоморфизме

$$\begin{cases} A \longrightarrow \mathrm{End}_B U \\ a \longmapsto a_d, \end{cases} \tag{11}$$

именно $vt = va$ для любого $v \in U$, откуда $t = a_d$. Значит, 4.1.3 (a) влечет за собой 4.1.3 (b), поскольку канонический гомоморфизм (11) инъективен в силу того, что образующий является точным модулем и, как мы уже показали, сюръективен. Обратно, из 4.1.3 (b) следует 4.1.3(a). Действительно, пусть имеет место 4.1.3 (b). Тогда (9) выполняется, и с помощью гомоморфизма (5) можно найти элементы $f_1, \ldots, f_n \in U^*$, а именно $f_i = (g_i, \ )$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v)\, g_i u_i = \sum_{i=1}^{n} v(g_i, u_i) = v \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i), \tag{12}$$

чем доказывается справедливость равенства (8). Следовательно, U — образующий в категории mod-A.

Осталось доказать 4.1.4. Пусть U — образующий в mod-A. Тогда по 4.1.3 (b) кольцо A канонически изоморфно кольцу $\mathrm{End}_B U$ и, следовательно, можно применять (7). □

4.2. Следствие.

4.2.1. *Если U — образующий в* mod-A, *то* $U^* = \mathrm{Hom}_A(U, A) \approx$ $\approx \mathrm{Hom}_B(U, B)$ *— образующий в* A-mod, *который конечно порожден и проективен в* mod-B. *Кроме того, существует канонический изоморфизм* $A \approx \mathrm{End}\ U_B^*$.

4.2.2. *Если U конечно порожден и проективен в* B-mod, *то U — образующий категории* mod-$\mathrm{End}\ U_B$.

Доказательство 4.2.1. Пусть

$$\langle\ ,\ \rangle \begin{cases} U \to U^{**} \\ u \mapsto \langle\ ,\ u\rangle \end{cases}$$

обозначает канонический (B, A)-гомоморфизм модуля U в его бидуальный модуль U^{**}. Таким образом,

$$f\langle\ ,\ u\rangle = \langle f,\ u\rangle = f(u)$$

для любых $f \in U^*$, $u \in U$. Если U — образующий в mod-A, то (8) из доказательства предыдущей теоремы выполняется и

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\langle\ ,\ u_i\rangle = 1_A,$$

а это показывает, что U^* — образующий в A-mod. Остальное теперь следует из предыдущей теоремы [1].

[1]) Непосредственно из теоремы вытекает лишь, что U^* конечно порожден и проективен в mod-B' и $A \approx \mathrm{End}\ U_{B'}^*$, где $B' = \mathrm{End}_A U^*$. Чтобы доказать 4.2.1, нужно на самом деле провести рассуждения, аналогичные доказательству предложения 4.1. Например, изоморфизм $\mathrm{End}\ U_B^* \to A$ задается соответствием $t \mapsto \sum_i \langle tf_i, u_i\rangle$. — *Прим. перев.*

Доказательство 4.2.2. Это следствие доказательст импликации 4.1.3 (a) $\Rightarrow$ 4.1.3 (b) предыдущей теоремы, так к тот факт, что $B = \mathrm{End}\ U_A$, в этом доказательстве не исполь вался. □

4.3. Предложение и определение. *Объект U категории* mod *называется* ***прообразующим****, если он обладает следующи эквивалентными свойствами:*

(a) *U — образующий в категории* mod-A *и конечно порожд и проективен в этой категории.*

(b) *U — образующий в категории* mod-A *и в категор* $\mathrm{End}\ U_A$-mod.

(c) *U конечно порожден и проективен как в категории* mod- *так и в категории* $\mathrm{End}\ U_A$-mod.

(d) *U — образующий в* $\mathrm{End}\ U_A$-mod *и конечно порожден и про тивен над* $\mathrm{End}\ U_A$ *и кольцо A канонически изоморфно* $\mathrm{Biend}\ U_A$.

Иногда прообразующие называют **вполне проективными мод лями**.

4.4. Упражнения

4.4.1. (Коззенс — Эллингер). В 4.2.1 канонический изомо физм $B \approx \mathrm{End}_A U^*$ не обязан иметь место [1]). Показать, что дост точным условием для его существования является рефлексивнос модуля U_A. См. также упражнение 10 к этой главе.

4.4.2. Если B — *коммутативное кольцо, то любой конеч порожденный точный проективный модуль U является образующи в категории* mod-B.

Кольцо биэндоморфизмов проективного модуля

Если B_0-модуль U проективен и точен, то приведенное ни предложение 4.6 устанавливает, что он проективен также ка B-модуль, где $B = \mathrm{Biend}_{B_0} U$, и, кроме того, B есть рациональн расширение (в определенном ниже смысле) B_0-модуля B_0, а сл модуля U в B_0 является левым идеалом кольца B.

4.5. Упражнения (Джонсон, Утуми и Финдлей — Ла бек).

4.5.1. Правый R-модуль M называется **рациональным расш рением** некоторого своего подмодуля N, если выполняются сл дующие эквивалентные условия:

(a) $\mathrm{Hom}_R(S/N, M) = 0$ для любого модуля S, такого, чт $M \supseteq S \supseteq N$.

[1]) Точнее, кольца B и $\mathrm{End}_A U^*$ могут оказаться как вообще неизомор ными, так и изоморфными, но не канонически.— *Прим. перев.*

(b) Если a и b — элементы модуля M и $b \neq 0$, то существует элемент $r \in R$, такой, что $ar \in N$ и $br \neq 0$.

4.5.2. Любое рациональное расширение является существенным, но обратное, вообще говоря, неверно.

4.5.3 (Финдлей — Ламбек [58]). Если M — правый R-модуль, $\hat{M}$ — его инъективная оболочка и $B = \mathrm{End}\ \hat{M}_R$, то

$$\overline{M} = \mathrm{ann}_{\hat{M}}\, \mathrm{ann}_B M$$

— максимальное рациональное расширение модуля M. Любое максимальное рациональное расширение модуля M изоморфно модулю $\overline{M}$, причем соответствующий изоморфизм индуцирует на M тождественное отображение. Модуль M называется **рационально замкнутым**, если $\overline{M} = M$. Отметим, что $\overline{M}$ всегда рационально замкнут.

4.5.4 (Джонсон [51a] и Утуми [56]). Максимальное рациональное расширение $\overline{R}$ модуля R_R является кольцом, причем R — его подкольцо. Кроме того (Ламбек [63]),

$$\begin{cases} \mathrm{Biend}\ \hat{R}_R \to \overline{R} \\ f \mapsto f(1) \end{cases}$$

— изоморфизм колец, который индуцирует на R тождественное отображение. Кольцо $\overline{R}$ — это **максимальное правое кольцо частных** (Джонсона — Утуми) кольца R. Кольцо $\overline{R}$ является своим собственным максимальным правым кольцом частных.

4.5.5. Если R обладает классическим правым кольцом частных Q, то $Q \subseteq \overline{R}$ и, возможно, $Q \neq \overline{R}$. □

Доказательства можно найти в книге Ламбека [71a] или в лекциях Фейса [67a, гл. 7 и 8]. Однако в дальнейшем по существу используется лишь определение рационального расширения.

4.6. Предложение. *Если U — точный проективный левый модуль над кольцом B_0, то он проективен над $B = \mathrm{Biend}_{B_0} U$. Пусть G_0 и G обозначают соответствующие дуальные модули, а T_0 и T — следы модуля U в B_0 и B соответственно. Тогда включение $B_0 \subseteq B$ индуцирует включение $G_0 \subseteq G$ и $G = G_0 B$. Кроме того, каждый правый идеал I кольца B является рациональным расширением модуля IT_0. В частности, B содержится в максимальном правом кольце частных кольца B_0 и T_0 — левый идеал кольца B, такой, что*

$$T_0^2 = T_0 = TT_0 = BT_0$$

и

$$T_0 B = T_0 T = T = T^2.$$

Таким образом, имеет место структурный изоморфизм [1])

$$(1)\quad \begin{cases} (\text{правые идеалы из } B)\ T \to (\text{правые идеалы из } B_0)\ T_0 \\ I = IT \mapsto IT_0, \end{cases}$$

который индуцирует изоморфизм

$$(2)\quad \begin{cases} T\ (\text{идеалы из } B)\ T \to T_0\ (\text{идеалы из } B_0)\ T_0 \\ I = TIT \mapsto T_0IT_0 \end{cases}$$

мультипликативных моноидов.

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{End}_{B_0} U$ и рассмотрим канонический (A, B)-бимодульный гомоморфизм

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{B_0}(U, B_0) \to \mathrm{Hom}_A(U, A) \\ f \mapsto (f, \ ), \end{cases}$$

такой, что

$$u\,(f, \ )\,v = u\,(f, v) = (u)\,f{\cdot}v$$

для любых $u, v \in U$. Так как $B = \mathrm{End}\ U_A$ и $(f, v) \in A$, то

$$(bu)\,fv = (bu)\,(f, v) = b{\cdot}(u)\,f{\cdot}v$$

для любых $u, v \in U$, $b \in B$. Таким образом, $(bu)\,f = b\,(u)\,f$, а это доказывает требуемое включение

$$G_0 = \mathrm{Hom}_{B_0}(U, B_0) \subseteq \mathrm{Hom}_B(U, B) = G.$$

По лемме 3.23 о дуальном базисе существует множество элементов $\{f_i\}_{i\in X}$ из G_0, каждый с конечным носителем, и соответствующее множество $\{u_i\}_{i\in X}$ элементов из U, таких, что

$$v = \sum_{i\in X} (v)\,f_i u_i$$

для любого $v \in U$. Так как $f_i \in \mathrm{Hom}_B(U, B)$ для любого $i \in X$, то из леммы о дуальном базисе следует, что семейство $\{f_i\}_{i\in X}$ порождает правый B-модуль G, т. е. $G = G_0B$, и, кроме того, что U проективен над B. Таким образом, выполняются условия $TU = U = T_0U$, $T^2 = T$, $T_0^2 = T_0$ по 3.30. Значит,

$$T = \sum_{f\in G} (U)\,f = \sum_{f\in G} (T_0U)\,f = \sum_{f\in G} T_0\,(U)\,f = T_0T,$$

$$T_0 = \sum_{g\in G_0} (U)\,g = \sum_{g\in G_0} (TU)\,g = \sum_{g\in G_0} T\,(U)\,g = TT_0.$$

Следовательно, отображение (1) биективно.

[1]) Структура, стоящая слева, состоит из тех и только тех правых идеалов I кольца B, для которых $IT = I$. — *Прим. перев.*

Если $I = TIT$ и $J = TJT$, то $I = TI = T_0I$ и

$$T_0IJT_0 = T_0IT_0JT_0 = T_0IT_0^2JT_0 = (T_0IT_0)\,(T_0JT_0),$$

что доказывает (2).

Остается только показать, что I — рациональное расширение модуля IT_0 для любого правого идеала I из B. Если a и b — элементы из I и $b \neq 0$, то $bU \neq 0$, а это значит, что $bT_0 \neq 0$. Таким образом, $at \in IT_0$ и $bt \neq 0$ для некоторого $t \in T_0$, а это доказывает, что I — рациональное расширение B_0-модуля IT_0. В частности, B — рациональное расширение B_0-модуля $BT_0 = BTT_0 = TT_0 = T_0$ и, следовательно, модуля B_0. □

4.7. Теорема о соответствии для проективных модулей (Морита [58], Фейс [71a, 72a]). *Пусть U — конечно порожденный точный проективный левый B_0-модуль, $T_0 = \mathrm{tr}_{B_0} U$ и $A = \mathrm{End}_{B_0} U$. Если I и J — правые идеалы в B_0, то*

$$(I \cap J)\,U = IU \cap JU,$$

и множество (правые идеалы из B_0) T_0, *состоящее из всех правых идеалов кольца B_0 вида $I = IT_0$, является структурой, причем*

$$I \vee J = I + K,$$
$$I \wedge J = (I \cap J)\,T_0.$$

Отображение

$$(1)\quad \begin{cases} A\text{-подмодули из } U \rightleftarrows (\text{правые идеалы из } B_0)\ T_0 \\ W \mapsto (\mathrm{ann}_{B_0}(U/W))\ T_0 = \bigcap_{KU=W} K = I\,(W) \\ KU \hookleftarrow K \end{cases}$$

— структурный изоморфизм, и $I\,(W)$ — наименьший правый идеал из B_0, такой, что $I\,(W)\,U = W$. Кроме того, $I\,(W) = \sum_{f\in G_0} (W)\,f$, где $G_0 = \mathrm{Hom}_{B_0}(U, B_0)$.

Отображение (1) *индуцирует структурный изоморфизм*

$$(2)\quad \begin{cases} (B_0, A)\text{-подбимодули из } U \to (\text{идеалы из } B_0)\ T_0 \\ W \mapsto I\,(W). \end{cases}$$

Отображение

$$(3)\quad \begin{cases} \text{идеалы из } A \to T_0\ ((B_0, A)\text{-подбимодули из } U) \\ J \mapsto UJ \end{cases}$$

— структурный изоморфизм, где

$$W \wedge V = T_0\,(W \cap V)$$

для (B_0, A)*-подбимодулей* $W = T_0W$ *и* $V = T_0V$ *из* U. *Обратно к отображению* (3) *индуцируется отображением*

$$U^* \left\{ \begin{array}{l} (B_0, A)\text{-подмодули из } U \to \text{идеалы из } A \\ W \mapsto U^*(W), \end{array} \right. \tag{4}$$

где

$$U^*(W) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(U, A)} f(W) = U^*(T_0W) \tag{5}$$

есть образ подмодуля W *при каноническом отображении* $U^{(U^*)} \to A$, *где* $U^* = \mathrm{Hom}_A(U, A)$.

Наконец, отображение

$$S \left\{ \begin{array}{l} \text{идеалы из } A \to T_0 \text{ (идеалы из } B_0) \; T_0 \\ J \to S(J) = I(UJ) \end{array} \right. \tag{6}$$

является изоморфизмом мультипликативных моноидов. Таким образом,

$$UJ = S(J)\, U$$

для любого идеала J *из* A.

Доказательство. Учитывая структурный изоморфизм (1) и изоморфизм моноидов (2) из 4.6, достаточно доказать теорему в предположении, что B_0 совпадает с $B = \mathrm{Biend}_{B_0}U = \mathrm{End}\, U_A$. Положим также $T = T_0$. Если

$$0 \to W \xrightarrow{k} U$$

— точная последовательность в mod-A, то последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(U, W) \xrightarrow{h^U(k)} \mathrm{Hom}_A(U, U) = B$$

точна в mod-B. Если $k = 1^U_W$ — включение, то

$$I_0(W) = \mathrm{im}\, h^U(k) = \{b \in B \mid b\, U \subseteq W\} = \mathrm{ann}_B(U/W) \tag{7}$$

есть правый идеал в B. Поскольку U является образующим в mod-A, то по 3.26 образом канонического гомоморфизма

$$U^{(\mathrm{Hom}_A(U, W))} \to W \tag{8}$$

служит W. Таким образом, $I_0(W)\, U = W$. Если K — правый идеал кольца B и $KU = W$, то равенство $TU = U$ влечет за собой $(KT)\, U = W$. Значит, $I(W) = I_0(W)\, T$ есть пересечение всех таких правых идеалов K, что $KU = W$ [1]. Тогда $I(W)\, T = I(W)$.

Если $I = IT$ и $K = KT$ — правые идеалы кольца B, то $(I \cap K)\, T$ является суммой всех таких правых идеалов Q, что

[1]) Это следует из того, что если K_1, K_2 — правые идеалы кольца B, такие, что $K_1U = K_2U = W$, то $K_1T = K_2T$. В самом деле $K_iT = K_i(\sum_{f \in U^*} (U)\, f) = \sum_{f \in U^*} K_i(U)\, f = \sum_{f \in U^*} (K_iU)\, f = \sum_{f \in U^*} (W)\, f$ для $i = 1, 2$.— *Прим. перев.*

$Q = QT$, содержащихся в $I \cap K$. Из определения (7) следует, что

$$\begin{array}{l} I_0(W_1 \cap W_2) = I_0(W_1) \cap I_0(W_2), \\ I_0(W_1 + W_2) \supseteq I_0(W_1) + I_0(W_2) \end{array} \tag{9}$$

для всех A-подмодулей W_1 и W_2 из U, и тогда

$$\begin{array}{l} I(W_1 + W_2) = I(W_1) + I(W_2), \\ I(W_1 \cap W_2) = [I(W_1) \cap I(W_2)]T. \end{array} \tag{10}$$

Проверим первое из равенств (10). Во-первых, поскольку $(I + K)\, T = IT + KT$ для любых правых идеалов I и K кольца B, то из (9) следует, что

$$I(W_1 + W_2) \supseteq I(W_1) + I(W_2).$$

С другой стороны, так как $(I(W_1) + I(W_2))\, U = I(W_1)\, U + I(W_2)\, U = W_1 + W_2$, то в силу доказанного выше представления $I(W)$ в виде пересечения, $I(W_1) + I(W_2) \supseteq I(W_1 + W_2)$ и, таким образом,

$$I(W_1 + W_2) = I(W_1) + I(W_2).$$

Далее,

$$\begin{array}{l} I(W_1 \cap W_2) = I_0(W_1 \cap W_2)\, T = [I_0(W_1) \cap I_0(W_2)]\, T \subseteq \\ \qquad \subseteq I_0(W_1)\, T \cap I_0(W_2)\, T, \end{array}$$

так что

$$I(W_1 \cap W_2) \subseteq I(W_1) \cap I(W_2)$$

и, следовательно,

$$\begin{array}{l} I(W_1 \cap W_2)\, U = I_0(W_1 \cap W_2)\, TU = W_1 \cap W_2 \subseteq \\ \qquad \subseteq [I(W_1) \cap I(W_2)]\, U \subseteq \\ \qquad \subseteq I(W_1)\, U \cap I(W_2)\, U = W_1 \cap W_2. \end{array} \tag{11}$$

Отсюда вытекает [1]), что

$$I(W_1 \cap W_2) = [I(W_1) \cap I(W_2)]T.$$

Это доказывает, что (1) — структурный изоморфизм. Если W есть (B, A)-подбимодуль, то $I(W) = I(BW) = BI(W)$ — идеал кольца B и, значит, (2) выполняется.

Рассмотрим теперь отображение (3). Если J — произвольный идеал кольца A, то

$$U^*(UJ) = \sum_{f \in U^*} f(UJ) = \Big(\sum_{f \in U^*} f(U)\Big) J = AJ = J.$$

[1]) Следует учесть примечание на предыдущей странице. — *Прим. перев.*

Изоморфизм

$$\begin{cases} U^* \to U' = \mathrm{Hom}_B(U, B) \\ f \mapsto [\ ,\ f], \end{cases}$$

определенный в 4.1, обладает тем свойством, что

$$[u, f]\, v = uf(v).$$

Пусть W есть (B, A)-подбимодуль модуля U, и пусть $J = U^*(W)$. Подмодуль UJ порождается множеством

$$(12)\quad \{ua \mid u \in U,\ a \in J\} = \{uf(w) \mid u \in U,\ f \in U^*,\ w \in W\} = \{[u, f]\, w \mid u \in U, f \in U^*,\ w \in W\}.$$

Поскольку $[\ ,\ ]\colon U^* \to U'$ является изоморфизмом, то множество

$$(13)\quad \{[u, f] \mid u \in U,\ f \in U^*\} = \{(u)\, g \mid u \in U,\ g \in U'\}$$

порождает $T = \mathrm{tr}_B U$. Значит, множество (13) порождает и TW и UJ как (B, A)-подбимодули модуля U, т. е.

$$(14)\quad UJ = TW.$$

Это доказывает, что отображение (3) является структурным изоморфизмом, а именно любой (B, A)-подбимодуль $W = TW$ может быть записан так: $W = UJ$ для единственного идеала J кольца A, где $J = U^*(W)$.

(5) Это справедливо, поскольку если $W = IU$, где $I = I(W)$, то

$$(W)\, U' = \sum_{f \in U'} (W) f = I \Big(\sum_{f \in U'} Uf \Big) = IT = I.$$

(6) Отображение $J \to SJ$, описанное в (6), составлено из отображения $J \to UJ$ [формула (3)] и отображения $W \to I(W)$ [формула (1)]. Таким образом, $UJ = S(J)\, U$, и так как $TUJ = UJ$, то $TS(J)\, TU = UJ$, т. е. $TS(J)\, T = S(J)$. Кроме того, $S(JK) = S(J)\, S(K)$ для любых идеалов J и K из A. □

4.8. Следствие. *Пусть U — конечно порожденный точный и проективный модуль над кольцом B_0, $A = \mathrm{End}_{B_0} U$ и $T_0 = \mathrm{tr}_{B_0} U$. Например, U может быть произвольным образующим категории* mod-A *для некоторого кольца A и $B_0 = \mathrm{End}\, U_A$.*

4.8.1. *Пусть P — любое свойство мультипликативных моноидов, которое сохраняется при гомоморфизмах. В этом случае моноид* (идеалы из A) *обладает свойством P тогда и только тогда, когда им обладает моноид T_0* (идеалы из B_0) T_0.

4.8.2. *A полупервично тогда и только тогда, когда $T_0 Q = 0$ для каждого нильпотентного идеала Q из B_0.*

4.8.3. *A первично тогда и только тогда, когда $T_0 Q = 0$ для каждого аннуляторного идеала Q из B_0.*

4.8.4. *Если кольцо B_0 полупервично, то оно является первичным тогда и только тогда, когда A первично.*

4.8.5. *Структура идеалов кольца A конечна в том и только том случае, когда множество идеалов вида $I = T_0 I T_0$ кольца B_0 конечно. В частности, A оказывается простым кольцом тогда и только тогда, когда $T_0 K = 0$ для любого идеала $K \neq T_0$, содержащегося в T_0.*

4.8.6. *Если B_0 полупервично, то кольцо A просто в том и только том случае, когда T_0 — наименьший идеал кольца B_0. При этом правый идеал I кольца B_0 удовлетворяет условию $I = IT_0$ в том и только том случае, когда I идемпотентен и содержится в T_0.*

4.8.7. *Все идеалы кольца A попарно перестановочны тогда и только тогда, когда любые два идеала $I = T_0 I T_0$ и $J = T_0 J T_0$ кольца B_0 перестановочны.*

Доказательство. В силу 4.6 мы можем предположить, что $B_0 = B = \mathrm{End}\, U_A$. Пусть $T = T_0$. Тогда доказываемое следствие вытекает из изоморфизма моноидов

$$\text{идеалы из } A \to T \text{ (идеалы из } B) \ T,$$

заданного формулой (6) из 4.7. Поэтому если P есть утверждение, что каждый элемент из некоторого подмножества $P(R)$ моноида R есть нуль, то, в частности, P (идеалы из A) $= 0$ влечет за собой P (T (идеалы из B) T) $= 0$. Так как $TU = U$ [1]), то $HT = 0$ для правого или левого идеала H кольца B тогда и только тогда, когда $H = 0$. Значит, $THT = 0$ тогда и только тогда, когда $TH = 0$. Отсюда следуют остальные утверждения [2]).

Если B полупервично, то из равенства $TI = 0$ для некоторого правого идеала I кольца B следует, что $(IT)^2 = 0$, а значит, $IT = 0$, т. е. $I = 0$. Таким образом, в этом случае B первично тогда и только тогда, когда A первично. Кроме того, в этом же случае A просто тогда и только тогда, когда T есть наименьший идеал из B. Но тогда если $I = I^2$ — правый идеал, содержащийся в T, то

$$I \supseteq IT \supseteq I^2 = I,$$

а значит, $I = IT$. Обратно, $I = IT$ влечет за собой

$$I^2 = I(TIT) = IT = I,$$

так как TIT должно равняться T, когда $I \neq 0$. □

[1]) И U — точный левый B-модуль.— *Прим. перев.*

[2]) Доказательство утверждений 4.8.4 и 4.8.6 приведено в следующем абзаце. Утверждения 4.8.5 и 4.8.7 очевидны. Докажем для примера 4.8.2 (4.8.3 доказывается аналогично). Свойство P здесь таково: $J^n = 0 \Rightarrow J = 0$ для любого идеала $J \in A$. Пусть Q — нильпотентный идеал из B, $Q^n = 0$. Поскольку $QT \subseteq Q$, то $(TQT)^n = T(QT)^n \subseteq TQ^n = 0$, т. е. TQT — нильпотентный идеал и в силу 4.8.1 равен нулю. Но тогда $TQ = 0$.— *Прим. перев.*

4.9. Следствие. *Пусть U — конечно порожденный точный проективный модуль над кольцом R, $T = \mathrm{tr}_R U$ и $A = \mathrm{End}_R U$.*

4.9.1. *Пусть L — произвольное свойство структур, сохраняющееся при их изоморфизмах. Тогда из изоморфизмов структур*

$$\begin{cases} A\text{-подмодули из } U \to (\text{правые идеалы из } R)\, T \\ W \mapsto \bigcap_{KU=W} K \end{cases}$$

и

$$(R, A)\text{-подмодули из } U \to (\text{идеалы из } R)\, T$$

следует, что структура, стоящая слева, обладает свойством L тогда и только тогда, когда им обладает правая. Кроме того, если R полупервично, а A просто (а значит, T — наименьший идеал в R), то это эквивалентно утверждению, что структура идемпотентных правых идеалов кольца R, содержащихся в T, обладает свойством L.

4.9.2. *Если L — свойство структур подобъектов, сохраняющееся при гомоморфизмах объектов и при взятии конечных произведений объектов, то структура правых идеалов кольца A обладает свойством L, если этим свойством обладает структура A-подмодулей модуля U. Если модуль U конечно порожден, то верно и обратное.*

Доказательство 4.9.1. Первое утверждение из 4.9.1 очевидно. Остальное следует из 4.8.6.

Доказательство 4.9.2. Так как U — образующий категории mod-A по 4.3, то $U^n \approx A \oplus X$ для некоторого X из mod-A. Если L сохраняется при взятии конечных произведений, то U^n обладает свойством L [1]) и, значит, этим свойством обладает и A, поскольку оно сохраняется при гомоморфизме (проекции) $U^n \to A$. Обратно, если U конечно порожден в mod-A, точна, например, последовательность $A^n \to U \to 0$, и если A обладает свойством L, то A^n, а значит, и U обладают этим свойством. □

4.10. Предложение. *Для любого левого R-модуля M и любого целого числа $n > 0$ имеем*

$$\mathrm{Biend}_R M = \mathrm{Biend}_R M^n$$

(канонический изоморфизм). Таким образом, M сбалансирован в категории R-mod *тогда и только тогда, когда сбалансирован M^n.*

[1]) Допуская вольность речи, будем говорить, что объект обладает свойством L, имея в виду, что этим свойством обладает структура его подобъектов.— *Прим. перев.*

Доказательство. Нетрудно показать, имеет место кольцевой мономорфизм

$$\begin{cases} \mathrm{Biend}_R M \to \mathrm{Biend}_R M^n \\ r \mapsto r', \end{cases}$$

такой, что

$$r'(x_1, \ldots, x_n) = (rx_1, \ldots, rx_n)$$

для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, где $x_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$. Чтобы показать, что это изоморфизм, возьмем $t \in \mathrm{Biend}_R M^n$. Пусть e_i: ${}_RM^n \to {}_RM$ — проекция M^n на i-е слагаемое и $t(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. Поскольку $e_i \in \mathrm{End}_R M^n$, то $(0, \ldots, y_i, \ldots, 0) = [t(x_1, \ldots, x_n)]\, e_i = t[(x_1, \ldots, x_n)\, e_i] = t(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$. Следовательно, $t(x_1, \ldots, x_n) = (t_1x_1, \ldots, t_nx_n)$, где, как нетрудно убедиться, $t_i \in \mathrm{Biend}_R M$. Покажем, что $t_i = t_j$. Пусть f_{ij}: $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Ясно, что $f_{ij} \in \mathrm{End}_R M^n$ и, значит, перестановочно с t. Но $[t(0, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, 0)]\, f_{ij} = (0, \ldots, t_jx_j, \ldots, t_ix_i, \ldots, 0)$, а $t[(0, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots 0)\, f_{ij}] = (0, \ldots, t_ix_j, \ldots, t_jx_i, \ldots, 0)$, т. е. $t_ix_i = t_jx_i$. Таким образом, $t(x_1, \ldots, x_n) = (\bar{t}x_1, \ldots, \bar{t}x_n)$, где $\bar{t} \in \mathrm{Biend}_R M$.

4.11. Упражнения.

4.11.1. (a) Если R — кольцо, являющееся своим максимальным правым кольцом частных, т. е. если R рационально замкнуто (см. 4.5.3), то любой точный проективный правый модуль над R сбалансирован. Это выполняется, в частности, если R самоинъективно справа.

(b) (Като) Если U — произвольный полурефлексивный точный левый модуль над некоторым кольцом R, то $\mathrm{Biend}_R U$ содержится в максимальном правом кольце частных кольца R. (Ср. 4.6.)

4.11.2. Пусть $U = A \oplus X$ в категории mod-A, и пусть $B = \mathrm{End}\, U_A$. Тогда U — циклический точный проективный модуль в категории B-mod. Кроме того, U сбалансирован. Однако образующим в B-mod модуль U является тогда и только тогда, когда X конечно порожден и проективен.

4.11.3. Пусть $B = \mathrm{End}\, U_D$, где U — правое бесконечномерное векторное пространство над телом D. Тогда U — простой точный проективный левый модуль над B, не являющийся, однако, образующим в категории B-mod.

4.11.4. Пусть R — произведение бесконечной совокупности тел. Тогда правый цоколь кольца R точен и проективен, но не является образующим.

4.11.5. Используя равенство $\mathrm{Biend}_R M = \mathrm{Biend}_R M^n$ для любого целого n, показать, сводя все к случаю $U = R \oplus X$ в категории mod-R, что любой образующий сбалансирован (ср. 7.3).

4.11.6. Пусть V — точный рефлексивный левый R-модуль, и пусть $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ каноническим образом наделен структурой (A, R)-бимодуля, где $A = \mathrm{End}_R V$.

(a) Тогда V канонически изоморфен некоторому правому идеалу кольца A в том и только том случае, когда R вкладывается в V^*.

(b) Достаточным условием для существования изоморфизма, упомянутого в п. (a), является условие, что R — область целостности.

(c) Если V конечно порожден и проективен над R или если R самоинъективно справа, то изоморфизм из п. (a) существует в том и только том случае, когда R вкладывается в V.

4.11.7. Если R — правая область Ope, то правое кольцо частных кольца R является его инъективной оболочкой в mod-R.

4.11.8 (Джонсон). Если ни один из элементов кольца R не аннулирует существенный правый идеал, то инъективная оболочка $\hat{R}$ модуля R в mod-R является самоинъективным справа кольцом, причем каждый его главный правый (левый) идеал порождается идемпотентом. (В терминологии гл. 11 $\hat{R}$ — регулярное кольцо. Ср. с кольцами частных Джонсона в гл. 16.) В этом случае следующие три условия эквивалентны: (a) $\hat{R}$ артиново и нётерово справа; (b) $\hat{R}$ артиново и нётерово слева; (c) любое семейство идемпотентных правых идеалов кольца R конечно.

4.11.9. Если R — область целостности, то $\hat{R}$ — простое самоинъективное справа кольцо (ср. упр. 8).

4.11.10. В упражнении 4.11.9 показать, что каждый конечно порожденный правый идеал кольца $\hat{R}$ или изоморфен всему кольцу, или равен 0.

4.12. Лемма. *Если U является таким (B, A)-бимодулем, что канонические гомоморфизмы*

$$A \to \mathrm{Biend}\, U_A = \mathrm{End}_B U,$$
$$B \to \mathrm{Biend}_B U = \mathrm{End}\, U_A$$

оказываются изоморфизмами, то канонические гомоморфизмы

$$\mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(B)$$
$$\mathscr{C}(B) \to \mathscr{C}(A)$$

— изоморфизмы. В частности, если U — образующий в категории mod-A, *то имеет место канонический изоморфизм $\mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(\mathrm{End}\, U_A)$.*

Доказательство. Канонический гомоморфизм

$$\begin{cases} A \to \mathrm{End}_B U \\ a \mapsto a_d \end{cases}$$

индуцирует канонический гомоморфизм $\mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(\mathrm{End}\, U_A)$.

Предположим, что $B = \mathrm{End}\, U_A$ и $A = \mathrm{End}\, U_B$. Тогда имеют место взаимно обратные канонические гомоморфизмы $\mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(B)$ и $\mathscr{C}(B) \to \mathscr{C}(A)$ и, следовательно, эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Общий случай является следствием этого. Значит, если U — образующий в mod-A и $B = \mathrm{End}\, U_A$, то по 4.1 кольцо A канонически изоморфно $\mathrm{End}_B U$ и можно применять уже доказанный частный случай. □

Из этой леммы следует, что $\mathscr{C}(B_n)$ совпадает с множеством диагональных матриц $\mathrm{diag}(c)$, где $c \in C = \mathscr{C}(B)$, и что

$$\mathscr{C}(e_{ii} B_n e_{ii}) = e_{ii}\, \mathscr{C}(B_n)\, e_{ii} \approx C$$

для любой идемпотентной матричной единицы e_{ii}.

4.13. Предложение о сужении. *Пусть U — проективный модуль категории R-mod, последовательность*

$$R^{(I)} \xrightarrow{p} U \to 0$$

точна в R-mod и $T = \mathrm{tr}_R U$. Если R_0 — произвольное подкольцо кольца R, содержащее T, то U проективен над R_0 и p индуцирует точную последовательность

$$R_0^{(I)} \to U \to 0.$$

Кроме того, канонический гомоморфизм $\mathrm{End}_R U \to \mathrm{End}_{R_0} U$ является изоморфизмом. Если U точен над R, то $\mathscr{C}(R_0) = R_0 \cap \mathscr{C}(R)$.

Доказательство. Пусть $R_0^{(I)} \supseteq T^{(I)}$ — каноническое включение. Тогда

$$p(R_0^{(I)}) \supseteq p(T^{(I)}) = Tp(R^{(I)}) = TU = U.$$

Так как U проективен над R, то

$$R^{(I)} = \ker p \oplus W,$$

и p индуцирует изоморфизм $\bar{p}$: $W \to U$ в категории R-mod. Тогда

$$R_0^{(I)} = (\ker p \cap R_0^{(I)}) \oplus W,$$ [1])

и $\bar{p}$: $W \to U$ является изоморфизмом в R_0-mod. Это показывает, что U проективен над R_0.

Теперь пусть $t \in T$, $u \in U$, $b \in R$ и $f \in \mathrm{End}_{R_0} U$. Тогда, поскольку $bt \in T \subseteq R_0$,

$$b(tu)f = bt(u)f = (btu)f.$$

[1]) Здесь неявно предполагается, что $W \subseteq R_0^{(I)}$. Действительно, так как W есть образ U при некотором отображении $U \to R^{(I)}$, то по определению следа $W \subseteq T^{(I)} \subseteq R_0^{(I)}$. — *Прим. перев.*

Так как $TU = U$ порождается множеством $\{tu \mid t \in T,\ u \in U\}$, отсюда следует, что $f \in \mathrm{End}_R U$. Это доказывает, что $\mathrm{End}_R U = \mathrm{End}_{R_0} U$.

Наконец, если $x \in \mathscr{C}(R_0)$, $b \in R$ и $t \in T$, то

$$(xb)\, t = x\,(bt) = (bt)\, x = (bx)\, t,$$

откуда $(xb - bx)\, T = 0$. Значит, $(xb - bx)\, U = 0$, т. е. $xb = bx$, когда U точен. Таким образом, $x \in \mathscr{C}(R)$. □

4.14. Предложение. *Пусть U есть (B, A)-бимодуль, причем $B = \mathrm{End}\, U_A$ и $A = \mathrm{End}_B U$, такой, что выполняются следующие эквивалентные условия:*

(a) *U конечно порожден и проективен над B.*

(b) *U — образующий в категории* mod-A.

4.14.1. *Центр C кольца B канонически изоморфен центру кольца A, и для любого подкольца B_0 кольца B, содержащего $T = \mathrm{tr}_B U$, в частности для $B_0 = C + T$, модуль U конечно порожден и проективен над B_0, $\mathrm{tr}_{B_0} U = T$ и $A = \mathrm{End}_{B_0} U$.*

4.14.2. *Имеют место канонические изоморфизмы из* 4.7:

$$\begin{cases} (\text{правые идеалы из } B_0)\, T \to A\text{-подмодули из } U \\ I = IT \mapsto IU \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T\ (\text{идеалы из } B_0)\, T \to \text{идеалы из } A \\ I = TIT \mapsto \sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}_A(U, A)} f(IU). \end{cases}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (a) и (b) содержится в 4.1. Тогда $\mathscr{C}(B) = \mathscr{C}(A)$ по 4.12, и 4.14.1 следует из 4.13. Теперь 4.14.2 следует из 4.6. □

Кольца с латеральными идеалами

В следующем предложении мы определяем понятие латерального правого идеала.

4.15. Предложение и определение. *Правый идеал V кольца A называется* ***латеральным****, если $V \neq 0$ и $\mathrm{End}\, V_A$ — область целостности. Главный правый идеал $V = vA$ является латеральным тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{J}(v^\perp)/v^\perp$$

— область целостности.

Доказательство. Достаточно воспользоваться каноническим изоморфизмом $vA \approx A/v^\perp$ и применить 3.62.3. □

4.16. Предложение. *Для того, чтобы ненулевой правый идеал V кольца A был латеральным, достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:*

(1) *$V = vA$ для некоторого $v \in A$, такого, что $v^3 \neq 0$ и, если $x^\perp \supseteq v^\perp$ для какого-нибудь $x \in A$, то либо $x^\perp = v^\perp$, либо $vx = 0$.*

(2) (Кох) *$V = vA$ для некоторого $v \in A$, такого, что $v^\perp$ — максимальный правый аннуляторный идеал.*

(3) *$V = vA$ и v содержится в минимальном левом аннуляторном идеале кольца A.*

Доказательство. (1) Ввиду 4.15 нам нужно показать, что если $a,\ b \in \mathscr{J}(v^\perp)$ и $ab \in v^\perp$, $b \notin v^\perp$, то $a \in v^\perp$. Но легко проверяется, что

$$(va)^\perp \supseteq v^\perp + bA \supset v^\perp.$$

Следовательно, $v(va) = v^2 a = 0$. Так как $v^3 \neq 0$, то $v^{2\perp} = v^\perp$ и поэтому $a \in v^\perp$, что и требуется.

(2) Как и в доказательстве (1), имеем $(va)^\perp \supset v^\perp$, откуда $(va)^\perp = A$. Следовательно, $va = 0$ и $a \in v^\perp$.

(3) В этом случае $v^\perp$ — максимальный правый аннуляторный идеал. □

4.17. Лемма. *Пусть ${}_BV$ — точный конечно порожденный проективный модуль и $A = \mathrm{End}_B V$. Тогда V_A изоморфен правому идеалу кольца A в том и только том случае, когда B_B вкладывается в V_B^*.* □

4.18A. Теорема о наименьшем идеале. *Кольцо A является простым кольцом с латеральным правым идеалом тогда и только тогда, когда A изоморфно кольцу эндоморфизмов сбалансированного конечно порожденного проективного левого модуля V над областью целостности B, такой, что $T = \mathrm{tr}_B V$ — ее наименьший идеал.*

Доказательство. Так как $T = \mathrm{tr}_B V$ — наименьший идеал области целостности B, по 4.8.6 кольцо $A = \mathrm{End}_B V$ просто. Поскольку V точен и проективен, мы в силу 4.17 можем предположить, что V_A — правый идеал кольца A. Так как ${}_BV$ сбалансирован, то $\mathrm{End}\, V_A = B$ — область целостности и, следовательно, V — латеральный правый идеал кольца A.

Обратно, если V — латеральный правый идеал, то $B = \mathrm{End}\, V_A$ — область целостности. Так как V_A — правый идеал кольца A и A просто, то V_A — образующий, откуда по 4.1.3 заключаем, что V_A сбалансирован, ${}_BV$ конечно порожден и проективен и $A = \mathrm{End}_B V$, что и требуется. □

По предложению 4.14 [1]) если $A = \mathrm{End}_B V$, $B = \mathrm{End}\, V_A$ и ${}_BV$ конечно порожден, проективен и точен, то $A = \mathrm{End}\, {}_{B_0}V$, где $B_0 = C + T$, $C = \mathscr{C}(B) \approx \mathscr{C}(A)$ и ${}_{B_0}V$ конечно порожден, проективен и точен. Кроме того, $T_0 = \mathrm{tr}_{B_0}V = \mathrm{tr}_B V = T$ и $\mathscr{C}(B_0) = \mathscr{C}(B)$. Равенство $T_0 = T$ выполняется в силу доказательства второй части предложения 4.14.1. Если $c \in \mathscr{C}(B_0)$, $b \in B$, то $(bc - cb)\, T = 0$, потому что $BT = T$ и $ct = tc$ для всех $t \in T$. Следовательно, $bc = cb$ для всех $b \in B$, откуда $c \in \mathscr{C}(B)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, мы имеем

4.18B. Теорема о единственном идеале. *Простое кольцо A с латеральным правым идеалом V изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного левого B-модуля, где B — область целостности с не более чем тремя идеалами. В действительности B можно выбрать так, чтобы $B = C + T$, $T = \mathrm{tr}_B V$ и $C = \mathscr{C}(B) \approx \mathscr{C}(A)$ — поле.* □

Кольца с однородными идеалами

Напомним понятия, введенные в упражнении 3.61. Объект U категории mod-A **однороден** тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

(1) Любые два ненулевых подобъекта объекта U имеют ненулевое пересечение.

(2) Инъективная оболочка объекта U неразложима.

(3) Каждый ненулевой подмодуль модуля U неразложим.

4.19. Определение и предложение. *Следующие три условия на правый R-модуль M эквивалентны, и, если они выполняются, будем говорить, что M имеет* ***конечную размерность*** *(**Голди**) и писать* $\dim M < \infty$.

4.19.1. *Никакую бесконечную прямую сумму ненулевых модулей нельзя вложить в M.*

4.19.2. *Существует конечное независимое множество однородных подмодулей $\{U_i\}_{i=1}^n$, такое, что $\sum_{i=1}^{n} U_i$ — существенный подмодуль* [2]) *в M.*

4.19.3. *Инъективная оболочка модуля M является прямой суммой конечного числа неразложимых модулей $\{E_i\}_{i=1}^m$.*

Любой нётеров модуль имеет конечную размерность. Любой ненулевой подмодуль модуля конечной размерности содержит ненулевой однородный модуль.

[1]) Учитывая, что его можно применить к рассматриваемой ситуации, ввиду 4.1.3.— *Прим. перев.*

[2]) Наибольшее из таких n называется **размерностью Голди** модуля M.— *Прим. перев.*

Замечание по поводу доказательства. Это предложение будет доказано позднее, а в настоящий момент его можно рассматривать как упражнение. На самом деле можно усилить сформулированное здесь утверждение, а именно доказать, что $n = m$. Этот более глубокий результат нам в ближайшее время не потребуется. Он является следствием теоремы Крулля — Ремака — Шмидта, которая будет рассматриваться в гл. 17, 18 и 21.

Очевидно, что любой нётеров модуль удовлетворяет условиям предложения 4.19.1, а следовательно, имеет конечную размерность. Кроме того, 4.19.2 показывает, что любой ненулевой модуль M конечной размерности содержит ненулевой однородный модуль. Наконец, отметим, что любой подмодуль модуля конечной размерности является модулем конечной размерности. □

4.20. Предложение. *Пусть U — конечно порожденный проективный точный левый B-модуль, и пусть $A = \mathrm{End}_B U$. Тогда U имеет конечную размерность n в категории* mod-A *в том и только том случае, когда B имеет конечную размерность n в* mod-B.

Доказательство. По (1) из 4.7 (см. (10) из доказательства 4.7) для любых A-подмодулей W_1 и W_2 из U имеем

$$(1) \qquad W_1 \cap W_2 = 0 \Leftrightarrow [I(W_1) \cap I(W_2)]\, T = 0.$$

В силу (11) из 4.7 и точности B-модуля U это эквивалентно равенству $I(W_1) \cap I(W_2) = 0$. Таким образом, U однороден в mod-A тогда и только тогда, когда выполняется такое условие:

$$(2) \qquad I \cap K = 0 \Rightarrow I = 0 \text{ или } K = 0$$

для всех правых идеалов $I = IT$ и $K = KT$ кольца B. Далее, B однороден в mod-B в том и только том случае, когда (2) выполняется для всех правых идеалов I и K кольца B, следовательно, если B однороден в mod-B, то U однороден в категории mod-A. Обратно, если выполняется (2) и $H \cap Q = 0$ для некоторых двух идеалов кольца B, то $HT \cap QT = 0$. Тогда $HT = 0$ или $QT = 0$, а значит, или $H = 0$, или $Q = 0$. Итак, мы доказали, что B однороден в категории mod-B. Таким образом, предложение доказано для случая $n = 1$. Общий случай можно доказать аналогичным образом, используя индукцию.

4.21. Предложение. [1]). *Пусть U — однородный правый идеал кольца A.*

[1]) Это предложение за исключением утверждения, что B является правой областью Ope, если A просто, и его доказательства, принадлежит Голди [58, стр. 593—594, леммы 2.2, 2.3]. А это утверждение по существу получено Джонсоном [53] (в предположении что A содержит однородные левые идеалы (см. Фейс — Утуми [65b]). Однако простое кольцо A с однородным правым идеалом удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых и правых аннуляторных идеалов (доказательство?), и, значит, первый случай включает в себя второй.

4.21.1. *Тогда*

$$X = \{x \in A \mid x^{\perp} \cap U \neq 0\}$$

— левый идеал, содержащий идеал XU.

4.21.2. *Если* A *— простое кольцо или если* A *— первичное кольцо, удовлетворяющее условию обрыва возрастающих цепей левых аннуляторных идеалов, то* $X = {}^{\perp}U$. *В обоих случаях* $B = \operatorname{End} U_A$ *— правая область Оре и, в частности, идеал* U *латерален.*

4.21.3. *Любое кольцо, обладающее однородным правым идеалом, имеет конечную правую размерность (Голди).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$(x+y)^{\perp} \supseteq x^{\perp} \cap y^{\perp}$$

$$(ax)^{\perp} \supseteq x^{\perp}$$

для любых x, $y \in X$, $a \in A$, откуда следует, что X — левый идеал кольца A. Если $x \in X$, $u \in U$, то $xu \in X$. Действительно, если $uU = 0$, то $xu \in X$, и если $uU \neq 0$, то $x^{\perp} \cap uU \neq 0$, а значит, $(xu)^{\perp} \cap U \neq 0$. Так как каждый элемент a идеала XU является конечной суммой элементов вида xu, то $a^{\perp} \cap U$ содержит конечное пересечение аннуляторов таких элементов, следовательно, $a^{\perp} \cap U \neq 0$. Этим доказано, что $X \supseteq XU$. Тогда если кольцо A просто, то, поскольку $X \neq A$, имеем $XU = 0$, т. е. X — левый аннулятор [1]) идеала U.

Далее, предположим, что A — первичное кольцо с условием обрыва возрастающих цепей левых аннуляторных идеалов, т. е. с условием обрыва убывающих цепей правых аннуляторных идеалов, и пусть M — правый аннуляторный идеал, минимальный в множестве S ненулевых правых аннуляторных идеалов кольца A, являющихся конечными пересечениями

$$a_1^{\perp} \cap \ldots \cap a_n^{\perp} \neq 0$$

правых аннуляторов элементов $a_1, \ldots, a_n$ из XU. Так как $XU \subset X$, то $M \cap U \neq 0$. Если N — другой минимальный аннуляторный идеал из S, то и $N \cap U \neq 0$, но тогда $M \cap N \neq 0$ в силу однородности U. Поскольку $N \cap M$ — элемент множества S, то $M = N$ — единственный минимальный элемент множества S, т. е. $XUM = 0$ [2]). Так как A первично и $M \neq 0$, то $XU = 0$ и опять $X = {}^{\perp}U$.

Докажем, что в обоих случаях B — область целостности. Пусть $f \in B$ таков, что $\ker f \neq 0$. Если $u \in U$ и $uU \neq 0$, то $\ker f \cap u U \neq 0$, а следовательно, $f(u)^{\perp} \cap U \neq 0$. Это показывает, что $f(u) \in X = {}^{\perp}U$, т. е. $f(u)\,U = 0$ для любого $u \in U$. Значит, $(\operatorname{im} f)^2 = 0$. Так как любой ненулевой правый идеал первичного кольца точен, то $\operatorname{im} f = 0$. Получаем, что любой эндоморфизм f правого A-модуля U является мономорфизмом. Значит, B — область целостности.

Остается показать, что B — правая область Оре. Если f и g — два ненулевых элемента из B, то $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g \neq 0$ и $(\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g)\,U \neq 0$. Можем записать $x = f(u) = g(v)$ для некоторых элементов u и v из U, причем $xU \neq 0$. Тогда $uU \neq 0$ и $vU \neq 0$, а значит, умножения модуля U на u и v слева являются эндоморфизмами u_s и v_s соответственно, причем

$$x_s = f(u)_s = fu_s = gv_s,$$

т. е. в B выполняется правое условие Оре.

4.21.3 остается читателю в качестве упражнения. □

[1]) В силу определения идеала X. — *Прим. перев.*

[2]) Так как M в силу своей единственности и условия минимальности для аннуляторных правых идеалов лежит в $a^{\perp}$ для любого $a \in XU$. — *Прим. перев.*

Строение простых нётеровых колец

В этом разделе простое нётерево справа кольцо A характеризуется с помощью кольца эндоморфизмов своего однородного правого идеала. С этой целью мы доказываем следующее предложение, характеризующее подобным же образом простые кольца с однородными правыми идеалами. Вопрос о том, когда кольцо A подобно области целостности B, заключительный результат 4.23В этого раздела сводит к вопросу о строении правых идеалов этой области целостности.

4.22А. Предложение. *Пусть* A *— кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

4.22.1А. A *— простое кольцо с однородным правым идеалом* U.

4.22.2А. *Кольцо* A *изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля* W *над правой областью Оре* R, *содержащей не более трех идеалов и такой, что* $T = \operatorname{tr}_R W$ *— наименьший идеал.*

4.22.3А. *Кольцо* A *изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля* V *над правой областью Оре* B_0, *центр* C *которой является полем и такой, что либо* B_0 *— простое кольцо, либо* $B_0 = C + T_0$ *— кольцо, имеющее точно три идеала, причем* $T_0 = \operatorname{tr}_{B_0} V$.

Доказательство. 4.22.2А $\Rightarrow$ 4.22.1А вытекает из 4.8.5 и 4.20.

4.22.1А $\Rightarrow$ 4.22.3А. По 4.21.2 кольцо $B = \operatorname{End} U_A$ — правая область Оре. Кроме того, по 4.1 модуль U конечно порожден и проективен над B. Поэтому применимо 4.14. Наконец, импликация 4.22.3 А$\Rightarrow$ 4.22.2А тривиальна. □

4.22B. Предложение. *Кольцо A является простым и нётеровым (артиновым) справа тогда и только тогда, когда A изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного левого модуля U над правой областью Оре B_0, удовлетворяющей условиям* 4.22.3A *и условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей идемпотентных правых идеалов, содержащихся в T_0. В этом случае кольцо $B = \mathrm{End}\, U_A$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей главных правых идеалов. Кроме того, A артиново справа тогда и только тогда, когда B_0 — тело* [1]*). При этом $B_0 = B$ и имеют место изоморфизмы $U \approx B^n$ в B-mod и $A \approx B_n$, где B_n — полное кольцо матриц порядка n над B.*

Доказательство. Если A нётерово справа, то по 4.19 оно содержит однородный правый идеал U, так что для A справедливо 4.22.3A. Теперь из 4.7 и 4.8.6 вытекает условие обрыва возрастающих цепей идемпотентных правых идеалов кольца B_0, содержащихся в T_0. Далее, если

$$x_1B \subseteq \ldots \subseteq x_nB \subseteq x_{n+1}B \subseteq \ldots$$

— главные правые идеалы кольца B, то из условия обрыва возрастающих цепей A-подмодулей модуля U вытекает, что $x_nU = x_{n+1}U$ для некоторого числа $n > 0$. Так как B_0 и B — правые области Оре, то x_{n+1}^{-1} лежит в правом теле частных K кольца B. Теперь если $xU = yU$ для двух элементов x и y кольца B, то

$$xT = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_B(U,\, B)} (xU) f = yT,$$

и поэтому для элемента $y^{-1}x = u$ выполнены равенства $uT = T$ и $uU = U$. Но любой эпиморфизм u нётерова модуля является автоморфизмом (доказательство?), т. е. u — обратимый элемент кольца $B = \mathrm{End}\, U_A$. Таким образом, $x_{n+1}^{-1}x_n$ — обратимый элемент кольца B, откуда вытекает, что $x_nB = x_{n+1}B$. Это доказывает, что B удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей главных правых идеалов.

Обратно, предположим, что 4.22.3A выполнено. Тогда условие обрыва возрастающих цепей идемпотентных правых идеалов кольца B_0, содержащихся в T_0, влечет за собой по 4.7, 4.8.6 и 4.9.2, что U, а следовательно и A, нётеровы справа. Двойственным образом доказывается правая артиновость кольца A.

Наконец, по 4.9.1 кольцо A содержит минимальный правый идеал тогда и только тогда, когда B_0 содержит минимальный правый идеал. В этом случае B_0 — тело и поэтому $B = B_0$, а U — конечномерное векторное пространство над B_0 и $U \approx B^n$ для некоторого целого $n > 0$. Тогда по 3.33 $A = \mathrm{End}_B U \approx B_n$. В частности, этот случай имеет место, когда A артиново справа или, что эквивалентно, когда B_0 — тело. (Относительно примечания 1 на стр. 264 заметим, что минимальный главный правый идеал является минимальным правым идеалом.) □

[1]) Приводимое ниже доказательство показывает, что если A удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, то $B_0 = B$ — тело и A артиново справа. В этом случае наше предложение есть не что иное, как классическая теорема 7.9 Веддербёрна — Артина.

Хотя 4.22B представляет собой характеризацию простых нётеровых справа колец в терминах правых областей Оре, возникающие при этом области Оре, вообще говоря, не изоморфны друг другу [1]) и не просты. (Ср. 4.40.)

4.22C. Следствие. *Если B — простое кольцо и U — конечно порожденный проективный левый модуль над B, то $A = \mathrm{End}_B U$ — простое кольцо и U — прообразующий (B, A)-бимодуль* [2]*).*

Доказательство. Простота кольца A следует из 4.8.6. Так как B просто и $\mathrm{Hom}_B(U, B) \neq 0$, то ввиду 3.26 U — образующий категории B-mod. Поэтому по 4.3 U — прообразующий как в mod-A, так и B-mod. □

4.23A. Предложение. *Рассмотрим следующие условия:*

(a) *U — конечно порожденный проективный точный модуль над правой областью Оре R, содержащей наименьший идеал $T = \mathrm{tr}_R U$.*

(b) *U — однородный правый идеал простого кольца A, а R — подкольцо кольца $B = \mathrm{End}\, U_A$, над которым U конечно порожден и проективен, и $B = \mathrm{Biend}_R U$.*

Условия (a) *и* (b) *эквивалентны. Если они выполнены, то*

4.23.1A. *Правое тело частных D кольца B является правым телом частных кольца R, а также подкольца $(I : I) = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}$ для любого правого идеала I кольца R.*

4.23.2A. *Любой правый идеал Y кольца A, кольцо эндоморфизмов которого не имеет делителей нуля, является однородным, и любой однородный правый идеал кольца A изоморфен подмодулю модуля U. Пусть Y — любой однородный правый идеал кольца A, содержащийся в U, а I — правый идеал кольца R, такой, что $IU = Y$ и $IT = I$, где T — след модуля U в R. Тогда имеют место канонические изоморфизмы*

$$(I : I) \xrightarrow{g} \mathrm{End}\, I_R \xrightarrow{h} \mathrm{End}\, Y_A,$$

где

$$g(d)(x) = dx$$

[1]) Имеются в виду области Оре, возникающие при описании одного кольца.— *Прим. перев.*

[2]) То есть ${}_BU$ и U_A — прообразующие категорий B-mod и mod-A соответственно.— *Прим. перев.*

u

$$h(f)(xu) = f(x)\,u$$

для всех $d \in D$, $x \in I$, $u \in U$, $f \in \operatorname{End} I_R$. *В частности,* $\operatorname{End} Y_A$ — *правая область Ope, изоморфная кольцу эндоморфизмов правого идеала кольца* R, *и* D — *ее правое тело частных.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Предположив справедливость условия (a), получим по 4.20, что U — однородный A-модуль, где $A = \operatorname{End}_R U$. Поскольку R — область целостности, то R вкладывается в дуальный к R-модулю U модуль U^* и поэтому U канонически вкладывается в $A = \operatorname{End}_R U$ (ср. 4.11.6). Кроме того, из 4.8.6 следует, что A — простое кольцо.

(b) $\Rightarrow$ (a). B — правая область Ope в силу 4.20. По 4.6 B — рациональное расширение кольца R, и потому R — правая область Ope с тем же самым правым телом частных D. Кроме того, след модуля U в B является в силу 4.8.6 наименьшим идеалом кольца B, откуда по 4.6 след модуля U в R является наименьшим идеалом кольца R.

Докажем теперь 4.23.1A. Пусть $d = ab^{-1}$ — произвольный элемент тела D, где a, $b \in R$. Поскольку R — правая область Ope, то существует такой элемент $x \in R$, что $x \neq 0$ и ax, $bx \in I$. Тогда $d = (ax)(bx)^{-1}$ и ax и bx — элементы кольца $(I : I)$. Тем самым доказано, что D — правое тело частных кольца $(I : I)$.

Если Y — правый идеал, такой, что $S = \operatorname{End} Y_A$ — область целостности, то по 4.20 и 4.21 $\dim S_S = \dim Y_A < \infty$. Тогда, как показывает легкая проверка (см., например, 7.18.2), $\dim S_S = 1$. Поэтому Y — однородный правый идеал. Это доказывает, что если $a \in A$, то либо $aY = 0$, либо $ay \neq 0$ для каждого ненулевого $y \in Y$ [1]). Так как $UY \neq 0$, отсюда следует, что для некоторого $a \in U$ подмодуль aY модуля U отличен от нуля и изоморфен Y. Поэтому можно допустить, что $Y \subseteq U$. Обозначим через I правый идеал $I(Y)$ кольца R, определенный в 4.7, так что $IU = Y$ и $IT = I$, где $T = \operatorname{tr}_R U$. Если D — правое тело частных области B, то поскольку D — инъективная оболочка модуля R в mod-R (доказательство?), определен мономорфизм колец

$$\begin{cases} \operatorname{End} I_R \to D \\ f \mapsto f', \end{cases}$$

где обратное отображение $f' \mapsto f$ индуцируется умножением правого идеала I слева на f'. Следовательно, можно предположить, что

$$Q = \operatorname{End} I_R = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}.$$

[1]) В силу первой части утверждения 4.21.2.— *Прим. перев.*

Теперь, поскольку U конечно порожден и проективен над R, мы можем считать, что U содержится в конечно порожденном свободном левом R-модуле, скажем $U \subseteq R^n$. Модуль R^n канонически вкладывается в D^n. Тогда $du \in D^n$ для любых $d \in D$ и $u \in U$. В тоже время если $q \in Q$, то

$$qY = q(IU) = (qI)\,U \subseteq IU = Y.$$

Таким образом, Y каноническим образом превращается в левый Q-модуль. Следовательно, имеет место мономорфизм колец

$$t \begin{cases} Q \to \operatorname{End} Y_A \\ q \mapsto \bar{q}, \end{cases}$$

такой, что

$$\bar{q}(y) = qy,$$

$q \in Q$, $y \in Y$. Более того, t — изоморфизм, так как любой $f \in \operatorname{End} Y_A$ определяет элемент $f_0 \in Q$, для которого

$$f_0(x)\,u = f(xu)\ ^{1}),$$

для всех $x \in I$, $u \in U$ и отображение

$$\begin{cases} \operatorname{End} Y_A \to Q \\ f \mapsto f_0 \end{cases}$$

является обратным к t. □

Следующее предложение дает классический ответ на вопрос о том, когда области целостности в 4.22A являются простыми кольцами. (Ср. предложение 8.27.)

4.23B. Предложение. *Пусть* A — *простое кольцо с однородным правым идеалом* U, *а* D — *правое тело частных области целостности* $B = \operatorname{End} U_A$.

Следующие условия эквивалентны:

4.23.1B. *Кольцо* A *изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля* W *над простой областью целостности* R.

4.23.2B. *Кольцо* A *изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля* W *над областью целостности* S, *такой, что кольцо эндоморфизмов некоторого ее правого идеала является простым кольцом.*

4.23.3B. *Кольцо эндоморфизмов некоторого ненулевого правого идеала области целостности* B *является простым кольцом.*

[1]) Действительно, для каждого $x \in I$ соответствие $u \mapsto f(xu)$ задает гомоморфизм $U_A \to Y_A$, принадлежащий правому идеалу $I(Y) = I$.— *Прим. перев.*

4.23.4B. *Кольцо эндоморфизмов некоторого A-подмодуля модуля U просто.*

4.23.5B. *Кольцо эндоморфизмов некоторого однородного правого идеала кольца A просто.*

4.23.6B. *Существуют ненулевой правый идеал I области целостности B и простое подкольцо Q тела D, такие, что $QI \subseteq I$ и D — правое тело частных кольца Q.*

4.23.7B. *Существует прообразующий V в* mod-A, *такой, что $L = \mathrm{End}\, V_A$ — область целостности. В этом случае L — простое кольцо. (В терминологии, вводимой ниже в* 4.29, *A подобно области целостности L и $\mathrm{Hom}_A(V, \ )$ индуцирует эквивалентность категорий* mod-$A \approx$ mod-L.)

Доказательство. Импликация 4.23.1B $\Rightarrow$ 4.23.2B тривиальна.

4.23.2B $\Rightarrow$ 4.23.5B. Во-первых, модуль W канонически изоморфен правому идеалу кольца A в силу 4.11.6(b). Действительно, W однороден и вкладывается в U по 4.23.2A. Кроме того, если I — такой правый идеал области целостности S, что $\mathrm{End}\, I_S = R$ — простое кольцо, то из 4.23A следует, что IW — однородный правый идеал кольца A, кольцо эндоморфизмов которого изоморфно R.

4.23.5B $\Rightarrow$ 4.23.4B тривиально, а 4.23.4B $\Rightarrow$ 4.23.3B следует из 4.23A: если Y есть A-подмодуль модуля U и I — такой правый идеал области целостности B, что $IU = Y$, то $\mathrm{End}\, I_B = \mathrm{End}\, Y_A$ — простое кольцо.

4.23.3B $\Rightarrow$ 4.23.6B. Если I — правый идеал, удовлетворяющий 4.23.3B, то $Q = (I : I)$ по 4.23.1A изоморфно $\mathrm{End}\, I_B$ и, следовательно, Q — простое кольцо. Кроме того, D — правое тело частных области целостности Q в силу 4.23.1A.

4.23.6B $\Rightarrow$ 4.23.7B. По условию 4.23.6B Q содержится в $R = (I : I)_\cdot = \mathrm{End}\, I_B$. Кроме того, по 4.23A $Y = IU$ — однородный правый идеал и $R = \mathrm{End}\, Y_A$. Теперь если J — любой ненулевой идеал кольца R, то, снова используя 4.23.2A, получаем $J \cap Q \neq 0$, поскольку D — правое тело частных кольца Q. Из простоты кольца Q вытекает, что $J \cap Q = Q \subseteq J$. Итак, $1 \in J$ и поэтому $J = R$. Это доказывает, что кольцо R просто. Кроме того, поскольку A просто, то Y — образующий категории mod-A, следовательно, в силу 4.1 Y конечно порожден и проективен над $R = \mathrm{End}\, Y_A$. Теперь из простоты кольца R вытекает, что Y — образующий в R-mod. Поэтому в силу 4.3 Y — прообразующий категории R-mod и, следовательно, категории mod-A [1]). Это завершает доказательство импликации 4.23.6B $\Rightarrow$ 4.23.7B. Импликация 4.23.7B $\Rightarrow$ 4.23.1B тривиальна. □

[1]) Поскольку $\mathrm{End}_R\, Y \approx A$ в силу простоты кольца A.— *Прим. ред. и перев.*

Доказанная теорема дает «классический» ответ на вопрос, когда кольцо $A = \mathrm{End}_B U$ подобно области целостности, поскольку ответ сводится к вопросу о структуре области целостности B и ее тела частных.

4.24. Теорема Мориты и Попеску — Габриеля о полном вложении. *Пусть R — кольцо и $C =$* mod-R (*или, в терминологии гл.* 14, *C — произвольная категория Гротендика*). *Тогда любой образующий U категории C индуцирует полное вложение* [1]), *т. е. полный унивалентный функтор*

$$h^U\colon C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathrm{End}_C U.$$

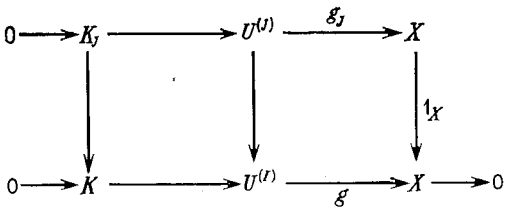
Доказательство. Пусть $A = \mathrm{End}_C U$, т. е. $A = \mathrm{End}\, U_R$, где $C =$ mod-R, и $T\colon C \rightsquigarrow$ mod-A — функтор, индуцированный функтором h^U. Наша цель — найти для каждого морфизма $t \in \mathrm{Hom}_A(TX, TX')$ морфизм $b\colon X \to X'$ категории C, такой, что $t = T(b)$. Пусть $I = TX = \mathrm{Mor}_C(U, X)$. Тогда $t(f) \in tX' = \mathrm{Mor}_C(U, X')$ для всех $f \in I = TX$. Рассмотрим копроизведения

$$g = \coprod_{f \in I} f\colon U^{(I)} \to X$$

и

$$g' = \coprod_{f \in I} tf\colon U^{(I)} \to X'.$$

Так как U — образующий в C, то $g\colon U^{(I)} \to X$ — эпиморфизм. По 2.15.3 для каждого конечного подмножества J множества I определена коммутативная диаграмма с точными строками:

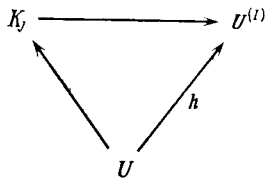


где морфизмы, образующие левый квадрат,— канонические вложения.

Для того чтобы получить отображение $b\colon X \to X'$, такое, что $t = Tb$, необходимо и достаточно, чтобы $\ker g' \supseteq K$, т. е. чтобы g'

[1]) В некоторых источниках, говоря о вложениях, кроме их унивалентности, требуют, чтобы они являлись точными функторами. Здесь этого не требуется. Теорема о полном вложении Митчелла (гл. 14) дает пример точного вложения.

аннулировал K. Каждый $k \in U^{(I)}$ имеет конечный носитель и, следовательно, принадлежит некоторому $U^{(J)}$, где J зависит от k. Поэтому каждый $k \in K$ принадлежит некоторому K_J. Отсюда следует, что g' аннулирует K тогда и только тогда, когда g' аннулирует каждое K_J. (Если C — категория Гротендика, то $K = \varinjlim K_J$ и $X \approx U^{(I)}/K \approx \varinjlim U^{(I)}/K_J$ по 14.4, откуда вытекает соответствующее утверждение.) Так как U — образующий, то для того, чтобы доказать, что g' аннулирует K, достаточно показать что g' аннулирует каждый такой морфизм $h\colon U \to U^{(I)}$, что диаграмма



коммутативна.

Запишем $h = k_J h_1$, где $k_J\colon U^{(J)} \to U^{(I)}$ — включение, а h_1 — произведение $U \to K_J \to U^{(J)}$. Мы покажем, что g' аннулирует h_1 и, следовательно, h. Пусть u_f и p_f — инъекции и проекции для копроизведения $U^{(J)}$. Тогда

$$0 = g_J h_1 = \coprod_{f \in J} f p_f h_1 = \coprod_{f \in J} f \alpha_f, \tag{1}$$

где $\alpha_f = p_f h_1$. Так как $f \in I = TX = \mathrm{Mor}_C(U, X)$ и $t \in \mathrm{Hom}_R(TX, TX')$, то $t(f) \in \mathrm{Mor}_C(U, X')$ и $t(f\alpha) = t(f)\,\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Теперь $\alpha_f = p_f h_1 \in \mathrm{Mor}_C(U, U) = A$ и по (1) $f \cdot \alpha_f = 0$ для каждого $f \in I$. Поэтому

$$t(f)\,\alpha_f = t(f\alpha_f) = 0$$

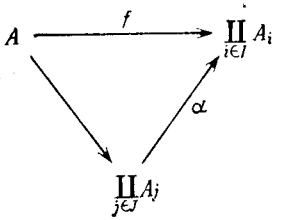
для любого $f \in I$, откуда

$$0 = g'_J h_1 = \coprod_{f \in J} t(f)\,\alpha_f = 0$$

(для любого конечного подмножества $J \subseteq I$). Поэтому $g' h_1 = 0$, следовательно, g' аннулирует $K = \ker g$. Таким образом, существует морфизм $b\colon \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} g' \subseteq X'$, т. е. морфизм $b\colon X \to X'$ категории C, такой, что $g' = bg$, откуда $t = T(b)$. □

Говорят, что объект A категории C **мал**, если каждый морфизм $f\colon A \to \coprod_{i \in I} A_i$ объекта A в копроизведение объектов категории C пропускается через конечное копроизведение, т. е. существует

конечное подмножество J множества I, зависящее от f, такое, что диаграмма



где α — каноническая инъекция, коммутативна.

4.25A. Предложение для аддитивной категории. *Пусть* $\{A_i \mid i \in I\}$ *— семейство объектов и* $\coprod_{i \in I} A_i$ *— копроизведение с инъекциями* $\{u_i\}$ *и проекциями* $\{p_i\}$. *Пусть* A *— произвольный объект и* J *— любое конечное подмножество множества* I. *Тогда морфизм* $f\colon A \to \coprod_{i \in I} A_i$ *пропускается через конечное копроизведение* $\coprod_{j \in J} A_j$:

$$A \xrightarrow{\bar{f}} \coprod_{j \in J} A_j \xrightarrow{u_{IJ}} \coprod_{i \in I} A_i,$$

тогда и только тогда, когда

$$f = \sum_{j \in J} u_j p_j f.$$

Доказательство. Пусть $\bar{u}_i$, $\bar{p}_j$ — соответственно i-я инъекция и j-я проекция конечного копроизведения $\coprod_{j \in J} A_j$. Тогда морфизм u_{IJ} может быть записан в виде $u_{IJ} = \sum_{i \in J} u_i \bar{p}_i$. Если f пропускается через $\coprod_{j \in J} A_j$, то $f = \sum_{j \in J} u_j \bar{p}_j \bar{f}$. Тогда для любого $k \in J$ имеем

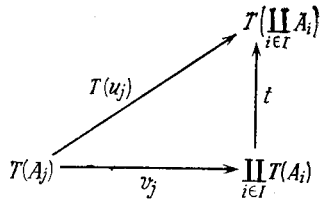
$$p_k f = \sum_{j \in J} p_k u_j \bar{p}_j \bar{f} = \sum_{j \in J} \delta_{kj} \bar{p}_j \bar{f} = \bar{p}_k \bar{f}.$$

Таким образом, $f = \sum_{j \in J} u_j p_j f$, как и утверждалось. Обратно, если f имеет такое представление, то положим $\bar{f} = \sum_{j \in J} \bar{u}_j p_j f$. Тогда

$$u_{IJ} \bar{f} = \sum_{k \in J} u_k \bar{p}_k \sum_{j \in J} \bar{u}_j p_j f_j = f. \quad \square$$

4.25B. Предложение и определение. *Пусть* C *и* D *— категории и* $T\colon C \rightsquigarrow D$ *— ковариантный функтор.*

Если $\{A_i \mid i \in I\}$ — семейство объектов категории C, таких, что определены копроизведения $\coprod_{i\in I} A_i$ и $\coprod_{i\in I} T(A_i)$, то в категории D существует единственный морфизм t, такой, что диаграмма



коммутативна для всех $j \in I$, где $\{u_j\}$ и $\{v_j\}$ — канонические инъекции соответственно в $\coprod_{i\in I} A_i$ и $\coprod_{i\in I} T(A_i)$. Морфизм t называется ***каноническим****. Говорят, что функтор T* ***перестановочен с копроизведениями (сохраняет копроизведение)****, если t является эквивалентностью для каждого копроизведения в категории C. Если A — произвольный объект аддитивной категории, то для функтора h^A со значениями в категории абелевых групп канонический морфизм*

$$\coprod_{i\in I} h^A(A_i) \to h^A\left(\coprod_{i\in I} A_i\right)$$

является мономорфизмом (т. е. инъективен).

Доказательство. Морфизм t существует в силу определения копроизведения. Предположим, теперь, что C аддитивна. Для каждого объекта A функтор $h^A : C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}$ индуцирован функтором $\mathrm{Mor}(A,)$. Воспользуемся тем обстоятельством, что копроизведения в mod-$\mathbb{Z}$ — это прямые суммы. Пусть $f \in \coprod_{i\in I} h^A(A_i)$. Поскольку $h^A(A_i) = \mathrm{Mor}_C(A, A_i)$, то существует семейство $\{f_i : A \to A_i\}$ морфизмов, такое, что $f_i \neq 0$ лишь для конечного числа $i \in I$ и

$$f = \sum_{i\in I} v_i f_i.$$

Применение морфизма t дает

$$t(f) = \sum_{i\in I} (tv_i) f_i = \sum_{i\in I} h^A(u_i) f_i = \sum_{i\in I} u_i f_i.$$

Если $f \neq 0$, то $f_k \neq 0$ для некоторого k, и поэтому

$$p_k \sum_{i\in I} u_i f_i = f_k \neq 0.$$

Итак, $\sum_{i\in I} u_i f_i \neq 0$ и, следовательно, t — мономорфизм. □

4.25C. Предложение для аддитивной категории с копроизведениями. *Объект A мал тогда и только тогда, когда функтор h^A со значениями в категории абелевых групп перестановочен с копроизведениями.*

Доказательство. Согласно предыдущему результату, канонический морфизм

$$t: \coprod_{i\in I} h^A(A_i) \to h^A\left(\coprod_{i\in I} A_i\right)$$

является мономорфизмом, где $\coprod_{i\in I} A_i$ — копроизведение с инъекциями $\{u_i\}$ и проекциями $\{p_i\}$.

Предположим теперь, что t — эпиморфизм. Тогда t — изоморфизм. Если $g: A \to \coprod_{i\in I} A_i$ — морфизм, то $g \in h^A\left(\coprod_{i\in I} A_i\right)$ и поэтому g можно записать в виде $\sum_{i\in I} u_i g_i$ для некоторых морфизмов g_i [1]). Тогда $p_k g = g_k$ для всех $k \in I$. Таким образом, $g = \sum_{i\in I} u_i p_i g$, откуда по 4.25A g пропускается через конечное копроизведение. Следовательно, A мал.

Обратно, если A мал и $g \in h^A\left(\coprod_{i\in I} A_i\right)$, то $g = \sum_{i\in I} u_i (p_i g)$. Таким образом, $t\left(\sum_{i\in I} v_i p_i g\right) = g$. Следовательно, t — эпиморфизм, а значит, и изоморфизм.

4.25D. Предложение. *Пусть R — кольцо и A — некоторый R-модуль. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

4.25.1D. *h^A: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ перестановочен с копроизведениями.*

4.25.2D. *A мал как объект категории* mod-R.

4.25.3D. *Если*

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$$

— любая возрастающая (счетная) последовательность собственных подмодулей модуля A, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ — собственный подмодуль модуля A.

Доказательство. 4.25.1D $\Leftrightarrow$ 4.25.2D вытекает из предыдущего предложения. Воспользуемся обозначениями, принятыми при его доказательстве. Тогда для любого копроизведения $\coprod_{i\in I} A_i$ в mod-R морфизм $t: \coprod_{i\in I} h^A(A_i) \to h^A(\coprod_{i\in I} A_i)$ является мономорфизмом.

[1]) Таких, что $g_i \neq 0$ лишь для конечного числа $i \in I$. — *Прим. перев.*

4.25.3D $\Rightarrow$ 4.25.2D. Если A не мал, то по 4.25A существует копроизведение $\coprod_{i\in I} A_i$ в mod-R с инъекциями u_i и проекциями p_j и морфизм f: $A \to \coprod_{i\in I} A_i$, такие, что $p_j f \neq 0$ для каждого j, принадлежащего счетному подмножеству J множества I. (В противном случае $f = \sum_{i\in I} u_j p_j f$ для конечного подмножества J.) Пусть $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, где J_n — конечное подмножество из J_{n+1}, и пусть $B_n = \coprod_{j\in J_n} A_j$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим также $B = \coprod_{j\in J} A_j$, и пусть g: $\coprod_{i\in I} A_i \to B$ — проекция. Тогда морфизм gf: $A \to B$ также не может быть пропущен через конечное копроизведение. Пусть $S_n = (gf)^{-1}B_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\operatorname{im}(gf) \not\subseteq B_n$, то $S_n \neq A$, $n \geqslant 1$. В то же время $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

4.25.2D $\Rightarrow$ 4.25.3D. Пусть $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$ — возрастающая последовательность собственных подмодулей, объединение которых равно A, и f_n: $A \to A/S_n$ — канонические эпиморфизмы. Пусть h: $A \to \prod_{n=1}^{\infty} A/S_n$ — их произведение. Тогда $\operatorname{im} h \subseteq \coprod_{n=1}^{\infty} A/S_n$, и поэтому h определяет отображение f: $A \to \coprod_{n=1}^{\infty} A/S_n$. Ясно, что f не пропускается ни через какое конечное копроизведение $\coprod_{n=1}^{k} A/S_n$, $k < \infty$, и, следовательно, A не мал. □

4.26. Упражнение. Найти пример малого модуля, не являющегося конечно порожденным.

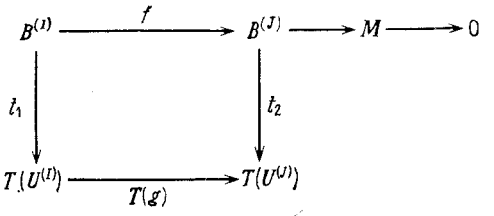
4.27. Следствие. *В обозначениях теоремы* 4.24 *функтор* h^U: $C \rightsquigarrow$ mod-End U_R *является эквивалентностью тогда и только тогда, когда* U *— малый проективный образующий.*

Доказательство. Малость объекта — категорное свойство. Если h^U — эквивалентность с обратным функтором S, то $B = h^U U$ — малый объект, следовательно, таков и $SB = U$. Аналогичным образом устанавливается, что U проективен и является образующим.

Обратно, если U — малый проективный образующий, то по теореме 4.24 функтор h^U индуцирует вполне унивалентный функтор $C \rightsquigarrow$ mod-B. Тогда по 2.2 h^U — эквивалентность в том и только том случае, когда h^U — представительный функтор. Итак, пусть M — объект категории mod-B и

$$B^{(I)} \xrightarrow{f} B^{(J)} \to M \to 0$$

— точная последовательность в mod-B. (Такая последовательность существует, например в качестве J можно взять множество образующих модуля M.) Теперь мы воспользуемся утверждением (4.25C) о том, что h^U перестановочен с копроизведениями тогда и только тогда, когда U — малый объект категории C. Таким образом, если $T = h^U$ и $\{u_i\colon U \to U^{(I)}\}_{i\in I}$ — копроизведение в C, то $\{Tu_i\colon TU \to T(U^{(I)})\}_{i\in I}$ — копроизведение в mod-B. Поскольку $B = TU$, отсюда следует существование эквивалентностей t_1: $B^{(I)} \to T(U^{(I)})$ и t_2: $B^{(J)} \to T(U^{(J)})$. Так как $T = h^U$ — полный функтор, то существует g: $U^{(I)} \to U^{(J)}$, такой, что диаграмма



коммутативна. Поскольку U проективен, функтор $T = h^U$ точен. Следовательно, $T(\operatorname{coker} g) \approx \operatorname{coker} Tg$. Поэтому из коммутативности диаграммы вытекает эквивалентность $M = \operatorname{coker} f \approx T(\operatorname{coker} g)$. Это доказывает, что $T = h^U$ — представительный функтор. Следовательно, h^U — эквивалентность. □

4.28. Следствие. *Если* R *— кольцо, то объект* U *категории* mod-R *является прообразующим тогда и только тогда, когда функтор* h^U: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-End U_R *является эквивалентностью.* □

4.29. Теорема Мориты. *Говорят, что два кольца* A *и* B ***подобны*** [1]) (*обозначается через* $A \sim B$), *если выполняется одно из трех следующих эквивалентных условий*:

4.29.1. mod-$A \approx$ mod-B.

4.29.2. A-mod $\approx B$-mod.

4.29.3. *Существуют конечно порожденный проективный образующий (прообразующий)* U *в* mod-A *и изоморфизм колец* $B \approx \approx$ End U_A.

Если эти условия выполнены, то имеет место эквивалентность

$$h^U = \operatorname{Hom}_A(U, \ )\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$$

[1]) В русской литературе часто употребляется термин «эквивалентны в смысле Мориты».— *Прим. ред.*

с обратной эквивалентностью

$$h^{U^*} = \mathrm{Hom}_B(U^*, \ ) : \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A,$$

где $U^* = \mathrm{Hom}_A(U, A)$. *Таким образом,* $h^{U^*} = (h^U)^{-1}$. *Симметрично, имеет место эквивалентность*

$$\mathrm{Hom}_B(U, \ ) : B\text{-mod} \rightsquigarrow A\text{-mod}$$

с обратной эквивалентностью

$$\mathrm{Hom}_A(U', \ ) : A\text{-mod} \rightsquigarrow B\text{-mod}.$$

Любая эквивалентность T: mod-$A \approx$ mod-B *индуцирует для каждого объекта* X *категории* mod-A *естественный изоморфизм*

$$h'(X) : \mathrm{Hom}_A(A, X) \to \mathrm{Hom}_B(TA, TX),$$

который влечет за собой категорную эквивалентность $h^{TA} \approx T^{-1}$, *т. е. любая эквивалентность* T: mod-$A \approx$ mod-B *представима и* T *естественно эквивалентен функтору, индуцированному основным ковариантным функтором* $h^{(TA)^*}$.

Доказательство. Любой изоморфизм f: $B \to R$ колец влечет за собой категорную эквивалентность mod-f: mod-$R \rightsquigarrow$ mod-B. Таким образом, импликация 4.29.3 $\Rightarrow$ 4.29.1 — следствие из 4.28 и данного по условию изоморфизма End $U_A \approx B$.

Обратно, если T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B — эквивалентность, то для каждого объекта X категории mod-A функтор T индуцирует изоморфизм

$$h'(X) : \mathrm{Hom}_A(A, X) \to \mathrm{Hom}_B(TA, TX),$$

естественный по X. Тогда если $h(X)$ — произведение естественного изоморфизма $X \to \mathrm{Hom}_A(A, X)$ и $h'(X)$, то определена естественная эквивалентность функторов

$$h : 1_{\text{mod-}A} \to h^{TA}T, \tag{1}$$

где h^{TA} : mod-$B \rightsquigarrow$ mod-A — функтор, индуцированный модулем TA. Чтобы доказать это, прежде всего заметим, что $h(A)$ — изоморфизм колец

$$A \to \mathrm{End}\ TA_B, \tag{2}$$

откуда следует, что $P = TA$ является (A, B)-бимодулем. Тогда и h^PY — правый A-модуль для любого объекта Y категории mod-B. Это показывает, что h^P — действительно функтор из mod-B в mod-A и h — естественное преобразование. По симметрии существует эквивалентность функторов

$$h^{T^{-1}B}T^{-1} \approx 1_{\text{mod-}B},$$

а значит, и эквивалентность

$$h^{T^{-1}B} \approx T.$$

Поскольку T — эквивалентность, то h^{TA} — эквивалентность, ей обратная. По 4.28 $P = TA$ — прообразующий в mod-B и в A-mod, откуда по 4.1 определен канонический изоморфизм

$$P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A) \to P' = \mathrm{Hom}_B(P, B)\ ^1).$$

Кроме того, P' — прообразующий в B-mod и mod-A ввиду 4.2, так что по 4.28 имеют место эквивалентности

$$\mathrm{Hom}_A(P, \ ) : A\text{-mod} \approx B\text{-mod},$$
$$\mathrm{Hom}_B(P', \ ) : B\text{-mod} \approx A\text{-mod},$$
$$\mathrm{Hom}_B(P, \ ) : \text{mod-}B \approx \text{mod-}A. \ \square$$

4.30. Следствие. *Пусть* U — *прообразующий в* mod-A *и* $B = \mathrm{End}\ U_A$. *Тогда* (1) $T = \mathrm{tr}_B U = B$; (2) *соответствие* $W \leftrightarrow I(W)$ *теоремы* 4.7 — *изоморфизм структур* A-*подмодулей модуля* U *и правых идеалов кольца* B, *отображающий* (B, A)-*подбимодули бимодуля* U *на идеалы кольца* B, *и* (3) $J \leftrightarrow SJ$, *где* $(SJ)\,U = UJ$, — *изоморфизм структур идеалов колец* A *и* B.

Подобные кольца обладают изоморфными структурами идеалов. $\square$

4.31. Следствие. *Пусть* T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B — *эквивалентность.*

4.31.1. *Для любого объекта* Y *категории* mod-A *эквивалентность* T *индуцирует изоморфизм.*

$$[k] \mapsto [Tk]$$

частично упорядоченного множества классов эквивалентных подобъектов объекта Y *на частично упорядоченное множество классов эквивалентных подобъектов объекта* TY.

4.31.2. T *индуцирует биективное отображение*

$$\begin{cases} \text{идеальные классы из mod-A} \to \text{идеальные классы из mod-}B \\ \qquad C(I) \mapsto TC(I) = C(I') \\ \qquad X \mapsto TX \end{cases}$$

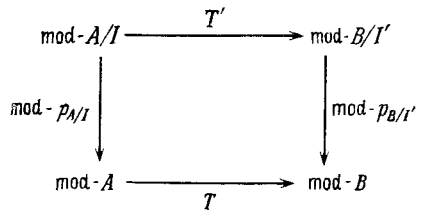
и изоморфизм структур

$$\begin{cases} \text{идеалы из } A \to \text{идеалы из } B \\ \qquad I \mapsto I'. \end{cases}$$

---

[1]) Отсюда и из изоморфизма $\mathrm{Hom}_A(A, T^{-1}B) \approx \mathrm{Hom}_B(TA, B) = P'$ получаем, что $T^{-1}B \approx P^*$ и таким образом $T = h^{P^*}$. В качестве U, существование которого утверждается в 4.29.3, теперь можно взять P^*. — *Прим. перев.*

4.31.3. *Для каждого идеала I кольца A функтор T индуцирует эквивалентность T': mod-$A/I \rightsquigarrow$ mod-B/I', такую, что диаграмма*



коммутативна, т. е. $T'F = TF$ для любого объекта или морфизма F категории mod-A/I. *Если $T \approx h^U$ для некоторого объекта U категории* mod-A, *то $T' \approx h^{U/UI}$, т. е. если U — прообразующий категории* mod-A *и его кольцо эндоморфизмов канонически изоморфно кольцу B, то U/UI — прообразующий категории* mod-A/I *и его кольцо эндоморфизмов канонически изоморфно кольцу B/I'.*

Доказательство. 4.31.1. Быть мономорфизмом и эквивалентность мономорфизмов — категорные свойства. То обстоятельство, что T — эквивалентность, завершает доказательство.

Доказательство 4.31.2. По 3.12 класс $T\boldsymbol{C}(I)$ объектов категории mod-B вида TX, где X — объект класса $\boldsymbol{C}(I)$, является идеальным классом, а отображение $I \to I'$, определенное равенством $T\boldsymbol{C}(I) = \boldsymbol{C}(I')$, биективно и сохраняет порядок.

Доказательство 4.31.3. Поскольку T' — вполне унивалентный и представительный функтор, то T' — эквивалентность. Если X — объект категории mod-A/I, то $\ker f \supseteq UI$ для каждого морфизма f: $U \to X$ и потому f индуцирует морфизм f': $U/UI \to X$. Тогда определена естественная эквивалентность функторов

$$h'\colon T' \to h^{U/UI},$$

где для всех X

$$h'\begin{cases} T'X \approx \mathrm{Hom}_A(U, X) \to \mathrm{Hom}_{A/I}(U/UI, X) = h^{U/UI}X \\ f \mapsto f'. \end{cases}$$

Поскольку T' — эквивалентность, отсюда по 4.29 получаем, что U/UI — прообразующий в mod-(A/I) и mod-(B/I'), а остальное следует из 4.1. □

Говорят, что свойство P колец **инвариантно в смысле Мориты,** если кольцо A обладает свойством P тогда и только тогда, когда каждое кольцо, подобное A, обладает свойством P. Таким образом, любое свойство P колец, которое для каждого кольца A характеризуется категорным свойством категории mod-A, является инвариантным в смысле Мориты.

По предложению 3.12 об идеальности, а также по 4.30 и 4.31 свойства структуры идеалов кольца A инвариантны в смысле Мориты. Свойство называется **вполне кольцевым**, если кольцо A обладает им тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждое факторкольцо A/K кольца A.

4.32. Следствие. *Если все факторкольца кольца A обладают некоторым свойством, инвариантным в смысле Мориты, то этим же свойством обладают все факторкольца любого кольца, подобного A.* □

Категория C называется **нётеровой**, если каждый ее объект является нётеровым, т. е. если частично упорядоченный класс классов эквивалентных подобъектов любого объекта Y удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Итак, если

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n \leqslant \ldots$$

— произвольная последовательность мономорфизмов $\{k_i\colon X_i \to Y\}_{i \in \omega}$, то существует целое число $m > 0$, такое, что $k_m \approx k_{m'}$ для всех $m' \geqslant m$. Категория C называется **артиновой**, если дуальная категория нётерова или, что эквивалентно, если упорядоченный класс классов эквивалентных подобъектов любого объекта Y категории C удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

4.33. Упражнения.

4.33.1. Показать, что кольцо A нётерово (артиново) справа тогда и только тогда, когда полная подкатегория конечно порожденных A-модулей нётерова (артинова). Вывести отсюда, что нётеровость (артиновость) справа — свойство, инвариантное в смысле Мориты.

4.33.2. Показать, что нётерово (артиново) справа кольцо не обязано быть нётеровым (артиновым) слева.

* 4.33.3 (Гопкинс — Левицкий). Показать, что каждое артиново справа кольцо нётерово справа.

4.33.4. Показать, что следующие свойства инвариантны в смысле Мориты:

(a) Первичность.

(b) Примитивность справа (т. е. существование точного простого правого модуля).

(c) Полупервичность.

(d) Полупримитивность (т. е. равенство нулю радикала кольца).

(e) Простота.

(f) Полупростота (в том смысле, что кольцо является прямой суммой простых правых модулей). Показать, что это свойство право-лево симметрично и из него следует полупростота всех левых и правых модулей.

(g) Регулярность (в том смысле, что каждый конечно порожденный правый идеал порождается идемпотентом; это свойство право-лево симметрично).

(h) Конечность числа элементов (но не их число).

(i) Мощность [1]) (если мощность бесконечна).

(j) Самоинъективность (т. е. кольцо является инъективным правым модулем).

(k) Каждый правый идеал проективен.

(l) Каждый правый идеал инъективен.

(m) Каждый подмодуль проективного модуля проективен, а также дуальное свойство.

* (n) Каждый циклический модуль инъективен, а также дуальное свойство.

* (o) Каждый модуль удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей конечно порожденных подмодулей (соотв. циклических подмодулей).

* (p) Конечнопорожденность кольца как алгебры (соотв. как модуля) над своим центром.

4.33.5. Показать, что следующие свойства не инвариантны в смысле Мориты:

(a) Быть областью.

(b) Быть полем.

(c) Отсутствие ненулевых нильпотентных элементов.

(d) Коммутативность.

(e) Справедливость импликации $(ab = 1 \Rightarrow ba = 1)$.

(f) Каждый правый идеал свободен.

(g) Каждый проективный модуль свободен.

(h) Отсутствие идемпотентов, отличных от 0 и 1.

(j) Существование матричных единиц.

(i) Каждый подмодуль свободного модуля свободен.

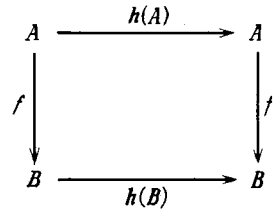
* (k) Условие обрыва возрастающих цепей правых аннуляторных идеалов.

4.33.6. Какие из инвариантных в смысле Мориты свойств в 4.33.4 являются вполне кольцевыми свойствами?

* 4.33.7. Если R — кольцо главных правых идеалов, то таким же является каждое полное матричное кольцо R_n. Обратное, вообще говоря, неверно, но справедливо, если кольцо R коммутативно. (Таким образом, свойство «каждый правый идеал — главный» не инвариантно в смысле Мориты.)

Центр категории

Если C — категория и 1_C: $C \rightsquigarrow C$ — тождественный функтор, то **центр** категории C (в обозначениях $\mathscr{C}(C)$) определяется как класс всех естественных преобразований h: $1_C \to 1_C$. Таким образом, для каждого $A \in C$ определен морфизм $h(A)$: $A \to A$, такой, что для любого морфизма f: $A \to B$, где $B \in C$, диаграмма



коммутативна, т. е. $fh(A) = h(B)f$. В частности, морфизм $h(A)$ перестановочен с каждым f: $A \to A$, т. е. $h(A)$ — эндоморфизм, принадлежащий центру кольца $\mathrm{End}\, A_R$.

[1]) Точнее мощность множества элементов кольца.— *Прим. перев.*

4.34. Предложение. *Для любого кольца R имеет место изоморфизм колец*

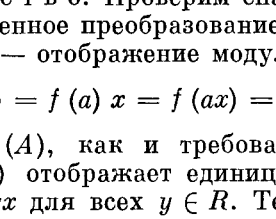
$$\varphi\colon \mathscr{C}(R) \approx \mathscr{C}(\mathrm{mod}\text{-}R),$$

такой, что если $x \in \mathscr{C}(R)$, $h = \varphi(x)$ и $A \in \mathrm{Obj}\ \mathrm{mod}\text{-}R$, то отображение $h(A)$: $A \to A$ — это гомотетия с коэффициентом x, т. е. $h(A)(a) = ax$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Проверим сначала, что $h = \varphi(x)$ — действительно естественное преобразование тождественного функтора. Если f: $A \to B$ — отображение модулей, то

$$h(B)\, f(a) = f(a)\, x = f(ax) = fh(A)\,(a).$$

Поэтому $h(B)f = fh(A)$, как и требовалось. Далее если $h \in \mathscr{C}(\mathrm{mod}\text{-}R)$, то $h(R)$ отображает единицу кольца R в элемент $x \in R$ и $h(R)(y) = yx$ для всех $y \in R$. Теперь если $A \in \mathrm{mod}\text{-}R$, то $A \approx \mathrm{Hom}_R(R, A)$. Если $a \in A$, то пусть f: $R \to A$ — такой модульный гомоморфизм, что $f(1) = a$. Тогда диаграмма



коммутативна, поскольку $h \in \mathscr{C}(\mathrm{mod}\text{-}R)$. Поэтому

$$h(A)\, f(y) = h(A)\, f(1)\, y = h(A)\, ay$$

и

$$fh(R)\,(y) = f(yx) = f(1)\, yx = ayx$$

для всех $y \in R$. Полагая $y = 1$, получаем

$$h(A)\, a = ax$$

для всех $a \in A$. Это показывает, что $h = \varphi(x)$ — гомотетия с коэффициентом x. Следовательно, φ — наложение. Далее, если $h = \varphi(x) = \varphi(y)$, то $h(R)(1) = x = y$. Поэтому отображение φ взаимно однозначно и, следовательно, изоморфизм. □

Тот факт, что для любого n

$$\mathscr{C}(R) \approx \mathscr{C}(R_n),$$

является следствием доказанного предложения и эквивалентности

$$\text{mod-}R \approx \text{mod-}R_n.$$

Приводимые ниже следствия вытекают также из 4.12.

4.35. Следствие. *Если A — коммутативное кольцо и кольцо B подобно A, то A изоморфно центру кольца B. Таким образом, два коммутативных кольца подобны тогда и только тогда, когда они изоморфны.* □

4.36. Следствие. *Если A и B — кольца и существует эквивалентность T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B, то T индуцирует изоморфизм колец $\mathscr{C}(A) \to \mathscr{C}(B)$.*

Доказательство. Эквивалентность T индуцирует изоморфизм центра категории mod-A на центр категории mod-B. □

Правым порядком R кольца S называется подгруппа аддитивной группы кольца S, являющаяся также подполугруппой мультипликативного моноида кольца S и такая, что каждый элемент кольца S имеет вид rx^{-1} для некоторых элементов r, $x \in R$. (Заметим [1]), что тогда R есть предкольцо и подпредкольцо кольца S.) Говорят, что кольцо R имеет **правое кольцо частных** S, если определен кольцевой мономорфизм h: $R \to S$, такой, что образ отображения h является правым порядком кольца S и h отображает каждый регулярный элемент кольца R в обратимый элемент кольца S. Если g: $R \to T$ — другое кольцо частных кольца R, то существует единственный изоморфизм колец f: $S \to T$, для которого $fh = g$. Таким образом, мы можем говорить о правом кольце частных кольца R. Необходимым и достаточным условием для существования правого кольца частных кольца R является правое условие Ope: *для любой упорядоченной пары (a, b), где a, $b \in R$ и b регулярен, существуют a_1, $b_1 \in R$, такие, что b_1 регулярен и $ab_1 = ba_1$.* (Итак, любое коммутативное кольцо, как мы уже отметили в гл. 3 перед

[1]) См. стр. 469.

3.46 и 3.61, обладает кольцом частных.) [Мы предоставляем читателю возможность самому доказать эти утверждения либо обратиться к гл. 9, где они доказываются.] Впредь для кольца частных h: $R \to S$ будем предполагать, что h — включение.

Говорят, что S — **кольцо частных**, если оно является кольцом частных некоторого кольца R [1]). В этом случае не только каждый регулярный элемент кольца R обратим в S, но и каждый регулярный элемент кольца S обратим в нем. Таким образом, S является кольцом частных тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим левым и правым кольцом частных. Это показывает, что операция перехода к кольцам частных в известном смысле идемпотентна (ср. идемпотентные радикалы, гл. 16).

Определения (Джекобсон [47, стр. 226]). *Пусть R_1 и R_2 — правые порядки в кольце частных Q. Тогда говорят, что*

(i) *они* ***эквивалентны*** (*символически* $R_1 \overset{Q}{\sim} R_2$), *если в Q существуют регулярные элементы a_1, b_1, a_2, b_2, такие, что $a_1 R_1 b_1 \subseteq R_2$, $a_2 R_2 b_2 \subseteq R_1$;*

(ii) *они* ***эквивалентны справа*** (*символически* $R_1 \overset{r}{\sim} R_2$), *если в Q существуют регулярные элементы a_1, a_2, такие, что $a_1 R_1 \subseteq R_2$, $a_2 R_2 \subseteq R_1$;*

(iii) *они* ***эквивалентны слева*** (*символически* $R_1 \overset{l}{\sim} R_2$), *если в Q существуют регулярные элементы b_1, b_2, такие, что $R_1 b_1 \subseteq R_2$, $R_2 b_2 \subseteq R_1$. Все эти отношения являются отношениями эквивалентности. Кроме того,*

$$R_1 \overset{r}{\sim} R_2 \Rightarrow R_1 \overset{Q}{\sim} R_2 \text{ и } R_1 \overset{l}{\sim} R_2 \Rightarrow R_1 \overset{Q}{\sim} R_2.$$

Лемма (Джекобсон). *Пусть R — правый порядок в кольце частных Q и S — подпредкольцо кольца Q.*

1. Если в Q существуют регулярные элементы a, b, c и d, такие, что $aRb \subseteq S$ и $cSd \subseteq R$, то S — правый порядок в Q и $R \overset{Q}{\sim} S$.

2. Если в Q существуют регулярные элементы a и c, такие, что $aR \subseteq S$ и $cS \subseteq R$, то S — правый порядок в Q и $R \overset{r}{\sim} S$. Аналогичное утверждение справедливо для эквивалентности слева.

Доказательство 1. Если $q \in Q$, то

$$a^{-1} q a = x c^{-1}$$

для некоторых x, $c \in R$. Тогда

$$q = (axb)(acb)^{-1},$$

т. е. S — правый порядок кольца Q, эквивалентный R. Если положить $b = 1$, то получаем доказательство утверждения 2. □

[1]) То есть является либо левым, либо правым кольцом частных кольца R.—*Прим. перев.*

4.37. Предложение. *Пусть B_i — правая область Оре с правым телом частных D_i, U_i — конечно порожденный проективный левый B_i-модуль, и пусть $A_i = \mathrm{End}_{B_i} U_i$, $i = 1, 2$. Тогда из существования кольцевого изоморфизма $f\colon A_2 \to A_1$ вытекает существование кольцевого изоморфизма $g\colon D_2 \to D_1$, такого, что $g(B_2)$ и B_1 — эквивалентные правые порядки тела D_1.*

Доказательство. По 4.20 U_i — однородный правый A_i-модуль, $i = 1, 2$. По предложению 4.23А и его доказательству модуль U_i канонически изоморфен правому идеалу кольца A_i. Следовательно, можно считать, что U_i — однородный правый идеал кольца A_i, $i = 1, 2$. Тогда $f(U_2) = V$ — однородный правый идеал кольца A_1. Пусть $A = A_1$, $U = U_1$, $B = B_1$ и $D = D_1$. Тогда по 4.23А правый идеал V изоморфен такому A-подмодулю Y модуля U, что $IU = Y$ для некоторого правого идеала I кольца B и $\mathrm{End}\, V_A$ изоморфно $B' = \mathrm{End}\, I_B$, где

$$B' = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}$$

— правый порядок в D. Если $x \in I$ и $x \neq 0$, то $B'x \subseteq B$ и $xB \subseteq B'$. *Это доказывает, что B и B' — эквивалентные правые порядки.* Далее, $R = \mathrm{Biend}_{B_2} U_2$ — правая область Оре, содержащая B_2, и имеет место кольцевой изоморфизм $g\colon R \to B'$, определенный произведением изоморфизмов

$$R = \mathrm{End}\, U_{2_{A_2}} \approx \mathrm{End}\, V_A \approx B'.$$

По 4.6 R — рациональное расширение кольца B_2, такое, что $RT \subseteq B_2$, где $T = \mathrm{tr}_{B_2} U_2$. Это показывает, что R и B_2 имеют одно и то же тело частных D_2 и что R и B_2 — эквивалентные слева правые порядки, поскольку $Rt \subseteq B_2$ для любого $t \in T$ и $B_2 \subseteq R$. (Это также показывает, что B и $S = \mathrm{Biend}_B U$ — эквивалентные правые порядки тела D.) Пусть $g\colon D_2 \to D$ — единственное расширение изоморфизма $R \approx B'$. Тогда эквивалентность порядков B_2 и R влечет за собой эквивалентность правых порядков $g(B_2)$ и B', а следовательно, и правых порядков $g(B_2)$ и B. □

4.38. Предложение. *Пусть B_i, $i = 1, 2$ — правые области Оре с одним и тем же правым телом частных D. Если кольца B_1 и B_2 подобны, то B_1 и B_2 — эквивалентные правые порядки и существует правый идеал P кольца B_2, такой, что имеет место кольцевой изоморфизм*

$$B_1 \approx (P : P) = \{d \in D \mid dP \subseteq P\}.$$

Доказательство. По 4.29 можем записать $B_1 = \mathrm{End}\, P_{B_2}$ и $B_2 = \mathrm{End}_{B_1} P$ для некоторого (B_1, B_2)-бимодуля P, являющегося прообразующим. Тогда, как и в доказательстве предложения

4.23А, в mod-B_2 существует вложение модуля P в B_2, откуда, поскольку D самоинъективно справа, получаем, как и утверждалось, изоморфизм колец $B_1 \approx (P : P)$. (Ср. 4.23А.) Значит, для любого $p \in P$ имеем

$$B_1 p \subseteq P \subseteq B_2 \text{ и } pB_2 \subseteq P \subseteq B_1.$$

Таким образом, B_1 и B_2 — эквивалентные правые порядки. □

Говорят, что кольцо R **наследственно справа**, если каждый правый идеал проективен. Любая область главных правых идеалов R наследственна справа, так как каждый ненулевой правый идеал является свободным модулем, изоморфным R. Более того, наследственность — это свойство, инвариантное в смысле Мориты в силу упражнения 4.33.4, и в действительности наследственные справа кольца могут быть охарактеризованы следующим категорным свойством: любой подмодуль проективного модуля проективен. В частности, любое полное матричное кольцо R_n над наследственным кольцом R наследственно.

4.39А. Предложение. *Пусть B — правая область Оре с правым телом частных D и A — подкольцо тела D, являющееся правым порядком кольца D. Рассмотрим следующие условия:*

4.39.1А. *Кольцо A подобно кольцу B, т. е.* mod-$A \approx$ mod-B.

4.39.2А. *Существует правый идеал I кольца B и изоморфизм колец $A \approx (I : I) = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}$.*

4.39.3А. *A и B — эквивалентные правые порядки.*

Тогда 4.39.1А $\Rightarrow$ 4.39.2А $\Rightarrow$ 4.39.3А.

Если B — простое кольцо и каждое кольцо, удовлетворяющее условиям 4.39.2А *или* 4.39.3А, *является простым, то B наследственно справа и нётерово справа. Таким образом, если B — простое кольцо, для которого условия* 4.39.1А *и* 4.39.3А *равносильны, то B наследственно справа и нётерово справа. В этом случае условия* 4.39.1А *и* 4.39.3А *эквивалентны для любого максимального правого порядка A* [1]).

Доказательство. 4.39.1А $\Rightarrow$ 4.39.2А $\Rightarrow$ 4.39.3А по предложению 4.38 и его доказательству.

Любой ненулевой правый идеал I кольца B является левым идеалом кольца $A = (I : I) = \{d \in D \mid dI \subseteq I\}$, и A оказывается правым порядком тела D, эквивалентным B. Если B — простое кольцо и A — кольцо, подобное B, то A — простое кольцо. В этом случае I — образующий как в A-mod, так и в mod-B и, следовательно, по 4.2 и 4.3 является конечно порожденным и проективным в обеих категориях. Это доказывает, что B нётерово справа и наследственно справа при условии, что каждое из колец

[1]) См. определение 10.24. — *Прим. перев.*

$(I : I)$ просто. Этот случай имеет место, если B — простое кольцо и 4.39.3A $\Rightarrow$ 4.39.1A.

Обратно, допустим, что B наследственно справа и нётерово справа, и пусть A — максимальный правый порядок, эквивалентный B. Тогда $xAy \subseteq B$ для ненулевых элементов $x, y \in D$. Поэтому $xy = b \in B$ и $y = x^{-1}b$. Отсюда для $A' = xAx^{-1}$ справедливо $A'b \subseteq B$ и, следовательно, $A'I \subseteq I$ для $I = A'bB$. Пусть $S = (I : I) \approx \operatorname{End} I_B$. Тогда, так как I — прообразующий категории mod-B, то по 4.29 S подобно B. Отсюда $A = x^{-1}Sx$, поскольку A — максимальный правый порядок и потому A подобно B. □

4.39B. Упражнение (Фейс [65]). *Простая правая область Оре B является максимальным порядком в множестве правых порядков своего правого тела частных, которые эквивалентны слева B. Обобщить.*

4.40. Предложение. *Для простого кольца с однородным правым идеалом U эквивалентны следующие условия:*

4.40.1. *Кольцо эндоморфизмов каждого однородного правого идеала V кольца A просто (соотв. подобно A).*

4.40.2. *Каждый однородный правый идеал кольца A конечно порожден и проективен.*

4.40.3. *A наследственно справа и нётерово справа.*

Доказательство. Применение утверждений 4.22C, 4.29 и теоремы 4.7 о соответствии доказывает эквивалентность двух утверждений, указанных в 4.40.1, а также эквивалентность 4.40.1 $\Leftrightarrow$ 4.40.2. Ясно, что 4.40.3 $\Rightarrow$ 4.40.2.

4.40.1 $\Rightarrow$ 4.40.3. По условию $B = \operatorname{End} U_A$ является простым кольцом, подобным A. Если I — правый идеал кольца B и $I \neq 0$, то по 4.23A $V = IU$ оказывается однородным правым идеалом кольца A, таким, что $\operatorname{End} V_A$ имеет то же самое правое тело частных, что и B, и, кроме того, $\operatorname{End} V_A \approx \operatorname{End} I_B$. Тогда 4.40.3 справедливо в силу 4.39.3A. □

Другие результаты о порядках см. в гл. 7, 9, 10 и 18.

Упражнения к гл. 4

1. Доказать все теоремы в гл. 7 и 8.

2. Любое простое кольцо A с однородным правым идеалом U вкладывается в полное матричное кольцо D_n, где $n = \dim A_A$ и D — правое тело частных кольца $B = \operatorname{End} U_A$. (Ср. 4.22.) [Это частный случай утверждения 9.13, из которого следует, что A имеет правое кольцо частных, изоморфное D_n.] Вывести отсюда, что A удовлетворяет условиям обрыва возрастающих и убывающих цепей правых и левых аннуляторных идеалов. (См. стр. 187, перед пунктом «Два канонических отображения»; ср. также 4.21.)

3.1. Доказать, что если A и B — тела и если существуют объекты V в mod-A и W в mod-B и кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} V_A \to \operatorname{End} W_B$, то существуют эквивалентность T: mod-$A \approx$ mod-B и эквивалентность $W \approx TV$ в mod-B. Обобщить. (Ср. 16.7 и 24.26.)

3.2. Если k — тело и A — кольцо, подобное k, то $A \approx \operatorname{End}_k V$ для некоторого конечномерного векторного пространства V над k, и обратно.

4. Кольцо R называется **классически полупростым**, если каждый правый R-модуль полупрост. Показать, что любое подобное телу кольцо R классически полупросто. Показать, что кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда R подобно конечному произведению тел. Заключить, что свойство кольца быть классически полупростым право-лево симметрично. Показать, что любое классически полупростое кольцо наследственно.

5 (теорема Веддербёрна — Артина). (a) Кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов и не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Заключить с помощью упр. 4, что это условие право-лево симметрично.

(b) Простое кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов (и тогда и только тогда, когда R подобно телу).

6. Следующие свойства кольца R эквивалентны:

(a) R полупросто в mod-R.

(b) R полупросто в R-mod.

(c) R — конечное произведение колец всех линейных преобразований конечномерных векторных пространств над какими-либо телами.

(d) R — конечное произведение полных колец матриц (разных порядков) над какими-либо телами.

(e) Каждый объект категории mod-R полупрост.

(f) Каждый объект категории mod-R инъективен.

(g) Каждый объект категории mod-R проективен.

7. Если F — тело, то пересечение всех его подтел является полем, которое называется **простым** подполем тела F и которое изоморфно либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_p$ для некоторого простого p. Если F конечно, то F — векторное пространство конечной размерности n над простым подполем $\mathbb{Z}_p$ и поэтому F состоит из p^n элементов. Показать, что два конечных поля изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. [Теорема Мура

(E. H. Moore).] Доказать, что для каждого простого p и целого n существует конечное поле, состоящее из p^n элементов и называемое полем Галуа из p^n элементов (обозначение: $GF(p^n)$). Доказать теорему Веддербёрна, которая утверждает, что каждое конечное тело коммутативно и, следовательно, является полем Галуа.

8. Доказать, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, группа автоморфизмов конечного поля также является циклической, и ее порядок равен степени простого числа.

*9 (Картан — Эйленберг). Кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый гомоморфный образ инъективного модуля инъективен. Доказать, что если над кольцом R каждый делимый правый модуль инъективен, то R наследственно справа.

*10 (Козенс). Если A — максимальный порядок в простом артиновом кольце Q и M_A — полурефлективный модуль конечной размерности Голди, то $B' = \mathrm{End}_A M^*$ — максимальный порядок в $\mathrm{End}\,(M \oplus Q)_Q$ (где $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$); кроме того B' максимален среди эквивалентных справа порядков, содержащих $B = \mathrm{End}\, M_A$. При этом $B = B'$ тогда и только тогда, когда M рефлексивен. (Ср. Коззенс — Фейс [75], в частности теорему о максимальных порядках, стр. 76).

Замечания к гл. 4

Первородный грех и эдипов комплекс

Математик, философ, гуманист (и т. д.) Бертран Расселл начал изучение философии с двух вопросов: 1. Возможно ли познание? 2. Если ответ на первый вопрос положительный, то что я могу познать? Я не знаю точно, каковы были его выводы, но сами по себе эти вопросы замечательны и вызывают в памяти принципы Декарта. Существует третий вопрос: 3. Каким образом я могу что-либо познать? Здесь я имею в виду часто совершенно различные формы, в которых представимо знание. Математик обнаруживает, что трудно даже выяснить, когда два объекта совпадают — доказано, что в случае слов или элементов группы, заданной образующими и соотношениями, эта задача невыполнима. (Неразрешимость проблемы тождества слов.)

Эдипов комплекс — это неспособность математических объектов узнавать своего родителя (мать) [1]. Свободен ли подобъект свободного объекта? Свободно ли прямое слагаемое произведения (или копроизведения) свободных объектов? Многие типы математических теорем утверждают неэдиповость, давая положительные ответы на подобные вопросы. Теорема о подгруппах свободных групп представляет собой положительный ответ на первый вопрос. Тем не менее подсистемы свободных полугрупп (моноидов) и алгебр эдиповы [1], и проблема состоит в том, чтобы изучить родственные отношения и с их помощью найти аксиомы, определяющие свободные подмоноиды (алгебры). (Эти аксиомы не должны отсылать за рамки подсистемы. См. Кон [62].)

[1] Как и в греческом мифе, в этом случае мать также не узнает своего сына.

Утвердительный ответ на второй вопрос называется теоремой об однозначном разложении или теоремой Крулля — Шмидта. К этим именам (перед ними или после) часто добавляют имена Адзумаи, Ремака, Веддербёрна и других (гл. 21). Основной моделью здесь является теорема об однозначном разложении целого числа на простые сомножители.

Первородный грех в алгебраическом саду был свершен, когда обнаружилось, что теорема об однозначном разложении алгебраических чисел для поля алгебраических чисел (=конечномерного расширения поля $\mathbb{Q}$) неверна. Основываясь на ошибочном предположении о том, что алгебраическое число не эдипово, Ламе дал неверное доказательство последней теоремы Ферма. Дедекинд в известной мере восстановил приличия, создав теорию идеалов — он доказал, что разложение идеалов в произведение простых в полях алгебраических чисел единственно. Но это не удовлетворило Кронекера, который неоднократно говорил «Бог создал целые числа; все остальное — дело рук человеческих». Его высказывание снижало ценность многих диссертаций того времени, а также работ Кантора, в которых он зашел совсем далеко, создав свои трансфинитные кардинальные (а может папские?) числа.

Замечания о простых кольцах

То обстоятельство, что в структурной теории простых нётеровых колец появляются области Оре, было впервые замечено Голди [58] и Лезьё — Круазо [59], обобщившими лемму Шура 3.10.1. Литтлвуд [33] отметил, что некоммутативные нётеровы простые области Оре встречаются в природе как «алгебры квантовой механики». Часть его теоремы в обобщенной форме есть не что иное, как теорема 7.30 Амицура. Новые простые области были обнаружены Коззенсом [70] [2]. О них подробно рассказывается в гл. 7, в особенности 7.40 и далее.

Что касается теории простых колец, то теорема Веддербёрна датируется 1908 г., теоремы Веддербёрна — Артина появились

[1] См. предыдущее примечание.

[2] См. также Л. А. Койфман, *Мат. заметки*, 7 (1970), 359—367.— *Прим. ред.*

двадцать лет спустя [см. Артин [27a, b]], далее — Артин и Уэйплс [43] и Артин — Несбитт — Тролл [44] — приблизительно в то же время, что и теорема плотности (Джекобсон [45]). Следующими — полвека спустя после теоремы Веддербёрна — явились теоремы Голди [58], [60] — Лезьё — Круазо [59] и Мориты [58]. Теорема Фейса [64] о кольце эндоморфизмов для простых колец с однородными правыми идеалами опиралась на результаты Голди и Джонсона [51 a, b]. Однако даже ее усиленный вариант, установленный Хартом [67], оказался, как заметил Фейс [67b], довольно легким следствием из теорем Мориты и Голди — Лезьё — Круазо.

Теорема о соответствии для проективных модулей и большая часть структурной теории простых колец с однородными правыми идеалами и/или латеральными правыми идеалами были аннонсированы Фейсом [71a] и полностью опубликованы в [72a]. Несколько содержащихся там гипотез, касающихся простых колец, представлено в гл. 8, стр. 467—468.

Замечания о кольцах частных

Является ли условие Ope свойством, инвариантным в смысле Мориты? В общем случае ответ неизвестен. Тем не менее если R — произвольное коммутативное кольцо, то любое кольцо A, подобное R, имеет кольцо частных (доказательство?). Аналогично если R имеет правое полупростое кольцо частных, то этим же свойством обладает любое кольцо, подобное R. (Ср. гл. 9.) Это лишь два примера из большого числа частных случаев, для которых ответ утвердителен. Во всех этих случаях из $A \sim R$ следует $Q(A) \sim Q(R)$, где через $Q(\ )$ обозначено кольцо частных. Если даже условие Ope инвариантно в смысле Мориты, то верно ли, что $Q(A)$ обладает указанным функториальным свойством? Если это так, то справедливо следующее утверждение: если S — кольцо частных, то S_n — также кольцо частных для любого целого n, т. е. каждый регулярный элемент кольца S_n обратим. Верно ли это? В общем случае ответ отрицательный, см. Бергман [74].

Ссылки

Артин [27 a, b], Артин — Несбитт — Тролл [44], Артин — Уэйплс [43], Ауслендер и Голдман [60a], Басс [62], [73], Бергман [74], Веддербёрн [08], Габриель [62], Голди [58], [60], Джанс [70], Джекобсон [45b], [45c], [47], Джонсон [51a], [51b], Диксон — Фуллер [70], Длаб — Рингель [72], Камилло [70], Камилло — Фуллер [72], Кон [62], [66a], Коззенс [70], Морита [58], Попеску — Габриель [64], Утуми [56], Фейс [64], [67a], [67b], [71a], [72a], Фейс — Утуми [65], Финдлей — Ламбек [58], Харт [67], Шефердсон [51].

Глава 5

ПРЕДЕЛЫ, СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКТОРЫ И АЛГЕБРЫ

В перечень тем и понятий, изучаемых в гл. 5, следует включить: бифункторы, представимые функторы, сопряженные слева и справа функторы, биекции и морфизмы сопряжения, сопряженные пары, забывающий функтор и функтор свободы, пределы, согласованные семейства морфизмов, направленные классы, прямые и обратные пределы, ядра, коядра, уравнители, пересечения, расслоенные произведения или универсальные (или кодекартовы) квадраты, образы, прообразы, гомоморфные образы, полные категории, нормальные объекты и категории, сбалансированные категории, локально малые категории, точные категории, диаграммный поиск, теоремы Нётер об изоморфизме для точных категорий, функторы, сохраняющие пределы, непрерывные справа функторы, теоремы Фрейда, сопряженные функторы со значениями в категории модулей, функторы тензорного умножения, плоские модули, модули характеров, сопряженные к унивалентным функторам, теорема Габриэля — Попеску (второй вариант), алгебры над коммутативными кольцами, полугрупповые и групповые кольца, свободные алгебры, коммутативные и некоммутативные кольца многочленов.

Определенное в этой главе свойство функтора $S\colon D \rightsquigarrow C$ быть сопряженным слева к функтору $T\colon C \rightsquigarrow D$ эквивалентно требованию, чтобы для каждого объекта B категории D существовала естественная эквивалентность $h^B T \approx h^{SB}$ основных ковариантных функторов со значениями в категории множеств. Например, функтор свободы SETS $\rightsquigarrow C$ сопряжен слева к забывающему функтору $C \rightsquigarrow$ SETS. Функтор T обладает сопряженным слева функтором тогда и только тогда, когда он «почти» представим в том смысле, что для каждого объекта B категории D функтор $h^B T$ со значениями в категории множеств является представимым. Любой аддитивный функтор $T\colon C \rightsquigarrow$ mod-R, обладающий сопряженным слева функтором S, представим и $T \approx h^{SR}$ (предложение 5.52). Обратно, любой представимый функтор $T\colon C \rightsquigarrow$ mod-R обладает левым сопряженным, если C — локально малая полная аддитивная категория с кообразующим, например если $C =$ mod-A для произвольного кольца A. (Локально малыми называют категории, в которых неэквивалентные подобъекты любого объекта составляют множество; полные категории определены чуть ниже.)

Теорема Фрейда 5.51 характеризует функторы $T\colon C \rightsquigarrow D$, обладающие сопряженными слева функторами. Если C — полная локально малая категория с кообразующим, то функтор T обладает сопряженным слева функтором тогда и только тогда, когда он сохраняет пределы. Если, кроме того, категория C аддитивна, то следующие три свойства функтора совпадают: сохранять пределы, иметь сопряженный слева и быть представимым (5.56).

Уравнители, произведения, пересечения и расслоенные произведения являются пределами функторов, и категория C (конечно) полна тогда и только тогда, когда она обладает уравнителями и (конечными) произведениями. Если C имеет нулевой объект, то ядро морфизма f является уравнителем морфизмов f и 0. Аддитивная категория обладает ядрами в том и только том случае, когда она обладает уравнителями. Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ сохраняет (конечные) пределы тогда и только тогда, когда он сохраняет уравнители и (конечные) произведения (5.39).

Если L и C — категории, то через C^L обозначают категорию Funct (L, C), объектами которой являются функторы $F\colon L \rightsquigarrow C$, а морфизмами — естественные преобразования функторов [1]). Функтор $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$, сопряженный слева к постоянному (диагональному) функтору $c\colon C \rightsquigarrow C^L$, называется предельным функтором или функтором предела. Объект A категории C называется пределом, если $A = \lim F$ для некоторого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$. [Таким образом, $A = \lim c\,(A)$ для любой категории L.] Говорят, что функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ сохраняет пределы, если существует естественная эквивалентность функторов $\lim \overline{T} \approx T \lim$, где $\overline{T}\colon C^L \rightsquigarrow D^L$ — функтор, индуцированный функтором $\overline{T}$ и переводящий любой функтор $F \in C^L$ в TF. Для любой категории C основные функторы h^A и h_A со значениями в категории множеств сохраняют пределы для любого объекта A (предложение 5.41) [2]). Любой обладающий левым сопряженным функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ сохраняет пределы, а функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$, сопряженный к функтору T слева, сохраняет копределы (предложение 5.43). Отсюда следует, в частности, что любой функтор предела $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$ сохраняет пределы, а функтор свободы $F\colon$ SETS $\rightsquigarrow C$ сохраняет копределы. Из последнего результата вытекает, что для свободного объединения $\coprod_{i \in I} S_i$ в категории множеств копроизведение $\coprod_{i \in I} F(S_i)$ свободных объектов $\{F(S_i)\}_{i \in I}$ в категории C совпадает с $F(\coprod_{i \in I} S_i)$. Это используется в категориях k-ALG алгебр над коммутативным кольцом k, в категории

[1]) Автор пренебрегает возникающими здесь теоретико-множественными трудностями.— *Прим. ред.*

[2]) Здесь h_A рассматривается как ковариантный функтор $C^* \rightsquigarrow SETS$.— *Прим. перев.*

(полу)групповых колец любой группы (моноида) G над произвольным кольцом A и в кольце (коммутативных или некоммутативных) многочленов над произвольным кольцом; все эти примеры рассматриваются в данной главе.

Бифункторы

Если $\{C_i\}_{i \in I}$ — семейство категорий, то произведение $\coprod_{i \in I} C_i$ определяется как категория, имеющая в качестве объектов семейства объектов $\{X_i\}_{i \in I}$, где X_i — объект категории C_i для каждого $i \in I$. Морфизм $\{X_i\} \to \{Y_i\}$ есть элемент $\{f_i\}$ произведения $\coprod_{i \in I} \mathrm{Mor}_C(X_i, Y_i)$. Если $\{g_i\}$ — другой морфизм, то произведение $\{g_i\}\ \{f_i\}$ определено тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ область значений морфизма f_i совпадает с областью определения морфизма g_i. В этом случае полагают $\{g_i\} \cdot \{f_i\} = \{g_i f_i\}$.

Произведение двух категорий C и D обозначают через $C \times D$. Основные функторы определяют основной бифунктор

$$\mathrm{Mor}_C(\ ,\ ) \begin{cases} C^{\mathrm{op}} \times C \rightsquigarrow \mathrm{SETS} \\ (A^*, B) \mapsto \mathrm{Mor}_C(A, B) \\ (f^*, g) \mapsto M(f, g), \end{cases}$$

где для $f\colon A_1 \to A_2$ и $g\colon B_1 \to B_2$ через $M(f, g)$ обозначено произведение $h^{A_2}(g)\, h_{B_1}(f)$.

Бифунктор $F\colon C \times D \rightsquigarrow E$ для каждого объекта $Y \in \mathrm{Obj}\, D$ и каждого объекта $X \in \mathrm{Obj}\, C$ определяет индуцированные **частные функторы**

$$F(\ , Y) \begin{cases} C \rightsquigarrow E \\ A \mapsto F(A, Y) \ \text{(на объектах)} \\ f \mapsto F(f, 1_Y) \ \text{(на морфизмах)} \end{cases}$$

и $F(X, \ )\colon D \rightsquigarrow E$ (определяется аналогично). Если $F, G\colon C \times D \rightsquigarrow E$ — ковариантные бифункторы и $h\colon F \to G$ — естественное преобразование, то для каждого $X \in \mathrm{Obj}\, C$ и каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, D$ преобразование h индуцирует естественные преобразования

$$h(\ , Y)\colon F(\ , Y) \to G(\ , Y)$$

и

$$h(X, \ )\colon F(X, \ ) \to G(X, \ )$$

индуцированных функторов. Фраза «преобразование $h(X, Y)$ естественно по X и Y» выражает как раз этот факт. Обратно, если

$$h'(X, Y)\colon F(X, Y) \approx G(X, Y)$$

— эквивалентность в категории E для каждого $X \in \mathrm{Obj}\, C$ и каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, D$, естественная по X и Y в указанном смысле, то h' определяет естественное преобразование бифункторов $F \rightsquigarrow G$.

Сопряженные функторы

Ковариантные функторы $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$ называются **сопряженными**, если существует естественная эквивалентность

(1) $$h(\ ,\ )\colon \mathrm{Mor}_C(S(\ ),\ ) \to \mathrm{Mor}_D(\ ,T(\ ))$$

основных бифункторов со значениями в категории множеств. В этом случае говорят, что функтор S **сопряжен слева** к функтору T, а функтор T **сопряжен справа** к функтору S; говорят также, что S обладает **сопряженным** функтором T, а T — **косопряженным** функтором S. Таким образом, для каждого объекта A категории C и каждого объекта B категории D существуют биективные отображения

(2) $$h(B, A)\colon \mathrm{Mor}_C(SB, A) \to \mathrm{Mor}_D(B, TA),$$

естественные по A и B, называемые **биекциями сопряжения.**

Символ (h, S, T, C, D) или, более коротко, (S, T), означает только что описанную ситуацию сопряжения, т. е. тот факт, что функтор S сопряжен слева к функтору T. В этом случае (S, T) называют **сопряженной парой.** Ввиду предложения 5.2, доказанного несколько ниже, если (S', T) и (S, T) — сопряженные пары, то существует естественная эквивалентность функторов $S' \approx S$, так что можно говорить просто о левом сопряженном к T. В этом случае ввиду предложения 5.67 существует естественное преобразование функторов

$$\psi\colon ST \to 1_C,$$

где

$$\psi_A = h^{-1}(TA, A)(1_{TA})$$

есть морфизм $STA \to A$, определенный для каждого объекта A категории C. Естественное преобразование $ST \to 1_C$ и морфизм $\psi_A\colon STA \to A$ называют **морфизмом сопряжения.** Дуально, существует естественное преобразование

$$\varphi\colon 1_D \to TS,$$

где

$$\varphi_B = h(B, SB)(1_{SB})$$

— морфизм сопряжения $B \to TSB$.

5.1. Примеры.

5.1.1. **Функтор свободы.** Этот функтор сопряжен слева к забывающему функтору

$$G\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}.$$

Для любых объекта Y категории C и множества S пусть $h\colon S \to GY$ — отображение, а $h'\colon F(S) \to Y$ — единственный морфизм категории C, такой, что $h' f_S = h$, где $f_S\colon S \to F(S)$ — каноническое отображение. Отображение

$$h(S, Y)\colon \mathrm{Mor}_C(FS, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(S, GY),$$

которое переводит морфизм $g\colon FS \to Y$ категории C в отображение $gf_S = g_1$, является обратным для отображения $h \mapsto h'$. (Иначе говоря, $(h')_1 = h$ по определению, а $g'_1 = g$, так как g — единственный морфизм, такой, что $g' f_S = g f_S = g_1$.) Поскольку $h(S, Y)$ биективно и естественно по S и Y, то указанные функторы сопряжены. (Ср. 2.7, стр. 131.)

5.1.2. Для (B, A)-бимодуля U контравариантные функторы

$$h_U : \text{mod-}A \rightleftarrows B\text{-mod}: h_U$$

сопряжены в том смысле, что существуют биективные отображения

$$g(X, Y)\colon \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(Y, U)) \approx \mathrm{Hom}_B(Y, \mathrm{Hom}_A(X, U)),$$

естественные и по X, и по Y, где по определению

$$(yg(f))(x) = (y) f(x)$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$ и $f \in \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(Y, U))$.

5.1.3. Для данных трех множеств S, A и B биективные отображения

$$g(A, B)\begin{cases} S^{A\times B} \to (S^A)^B \\ f \mapsto g(f), \end{cases}$$

где $g(f)\, b\, (a) = f(a, b)$, естественны по A и B и

$$g(A, B)\colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(A \times B, S) \approx \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(B, \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(A, S)),$$

т. е. основной ковариантный функтор h^A сопряжен справа к функтору $A \times (\ )$.

5.1.4. Функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$ обладает сопряженным справа в том и только том случае, когда произведение функторов

$$S^*_*\colon D^* \rightsquigarrow D \overset{S}{\rightsquigarrow} C \rightsquigarrow C^*,$$

где первый и третий функторы канонические, обладает сопряженным слева. Таким образом, (S, T) — сопряженная пара тогда и только тогда, когда (T^*_*, S^*_*) — сопряженная пара.

5.1.5. Обозначим через ORE DOM полную подкатегорию категории RINGS, объектами которой являются правые области Ope. Тогда забывающий функтор из категории тел в ORE DOM имеет сопряженный слева функтор, который переводит каждую область Ope в ее правое тело частных. Обобщить.

5.1.6. Для (B, A)-бимодуля U функтор

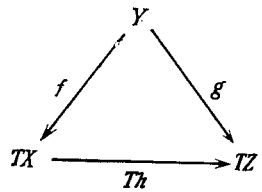
$$h^U\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$$

со значениями в категории mod-B, индуцированный функтором h^U со значениями в категории абелевых групп, имеет сопряженный слева функтор

$$\underset{B}{\otimes} U\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A.$$

Существование функтора, сопряженного слева к функтору h^U, есть следствие предложения 5.46, но более элементарное доказательство дает теорема 11.4. □

5.2. Предложение и определение. *Функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ имеет сопряженный слева функтор в том и только том случае, когда для каждого объекта Y категории G* ***комма-категория*** *(Y, T) обладает левым нулем. Объектами категории (Y, T) служат пары (f, X), состоящие из объекта X категории C и морфизма $f\colon Y \to TX$ категории D; морфизм $(f, X) \to (g, Z)$ категории (Y, T) определяется как морфизм $h\colon X \to Z$ категории C, такой, что диаграмма*

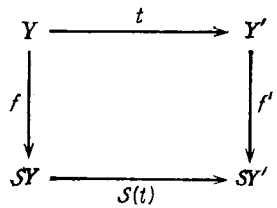


коммутативна.

Доказательство. Если (f, SY) — левый нуль категории (Y, T), то для каждого объекта Y категории D и каждого объекта Z категории C существует биекция

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{Mor}_D(Y, TZ) \to \mathrm{Mor}_C(SY, Z) \\ g \mapsto g', \end{cases}$$

естественная по Z и Y, где $g'\colon SY \to Z$ — единственный морфизм, такой, что $T(g')\, f = g$. Если $t\colon Y \to Y'$ — морфизм в категории D, то существует единственный морфизм $S(t)\colon SY \to SY'$, такой, что диаграмма



коммутативна [1]); здесь $f'\colon Y' \to SY'$ — канонический морфизм. Поскольку (f, SY) — левый нуль категории (Y, T), то $S(1_Y) = 1_{SY}$ и $S(tt') = S(t) \cdot S(t')$ для любых морфизмов t и t'. Этим доказано существование функтора $S\colon D \rightsquigarrow C$, переводящего в SA объект A категории D. Биекция (1) показывает, что функтор S сопряжен слева к функтору T.

Обратно, если S — функтор, сопряженный слева к функтору T, то морфизм сопряжения $\varphi_Y\colon Y \to TSY$ определяет левый нуль (φ_Y, SY) категории (Y, T). □

С комма-категорией мы еще встретимся в 5.50.

5.3. Предложение. *Пусть T и T' — функторы из категории C в категорию D, а S и S' — функторы, сопряженные слева к T и T' соответственно. Тогда $T \approx T'$ (как функторы) в том и только том случае, когда $S \approx S'$.*

Доказательство. Пусть нам даны эквивалентности функторов

$$h(\ ,\ )\colon \mathrm{Mor}_C(S(\ ),\ ) \approx \mathrm{Mor}_D(\ ,\ T(\ ))$$

и

$$h'(\ ,\ )\colon \mathrm{Mor}_C(S'(\ ),\ ) \approx \mathrm{Mor}_D(\ ,\ T'(\ )).$$

По предложению, дуальному к 2.3.3, эквивалентность функторов $T \approx T'$ влечет за собой эквивалентность функторов

$$\mathrm{Mor}_D(\ ,\ T(\ )) \approx \mathrm{Mor}_D(\ ,\ T'(\ ))$$

и, значит, эквивалентность функторов

$$k(\ ,\ )\colon \mathrm{Mor}_C(S(\ ),\ ) \approx \mathrm{Mor}_C(S'(\ ),\ ).$$

Этим для каждого $B \in \mathrm{Obj}\, D$ определяется естественная эквивалентность функторов

$$k(B,\ )\colon \mathrm{Mor}_C(SB,\ ) \approx \mathrm{Mor}_C(S'B,\ ).$$

Но тогда из предложения 2.3 вытекает естественная эквивалентность функторов $S \approx S'$. Обратное получается аналогично. □

Существование сопряженных функторов

Для любого объекта A категории C обозначим, как всегда, через h^A основной ковариантный функтор $\mathrm{Mor}(A,\ )$ [соотв. $h_A = \mathrm{Mor}(\ ,\ A)$]. Тогда легко видеть, что если функтор T сопря-

[1]) Поскольку (f, SY) — левый нуль, то $\mathrm{Mor}_{(Y,T)}((f, SY), (f't, SY'))$ состоит из одного морфизма, скажем $S(t)\colon SY \to SY'$, являющегося морфизмом категории C, такого, что $TS(t)\, f = f't$. Аналогичные соображения используются и для доказательства некоторых из высказываемых ниже утверждений.— *Прим. ред.*

жен справа к функтору S, то для каждого $A \in \mathrm{Obj}\, C$ существует эквивалентность функторов

$$h_A S \approx h_{TA}, \tag{1}$$

индуцированная эквивалентностью $h(\ ,\ A)$, а для каждого $B \in \mathrm{Obj}\, D$ — эквивалентность

$$h^{SB} \approx h^B T, \tag{2}$$

индуцированная эквивалентностью $h(B,\ )$.

Следующее предложение утверждает, что функтор, обладающий сопряженным слева, «почти» представим (см. 5.55 и 5.56).

5.4. Предложение. *Сопряженный слева для функтора $T\colon C \to D$ существует в том и только том случае, когда для каждого $B \in \mathrm{Obj}\, D$ функтор*

$$h^B T\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$$

представим.

Доказательство. Если функтор S сопряжен слева к функтору T, то, ввиду (2), существует эквивалентность функторов $h^B T \approx h^{SB}$. Обратно, для каждого $B \in \mathrm{Obj}\, D$ выберем объект SB и естественную эквивалентность функторов $h^{SB} \approx h^B T$, которую мы обозначим через $f(B)$. Тогда

$$f(B)\ (A) : h^{SB}(A) \to h^B(T(A))$$

для любого объекта A категории C представляет собой биективное отображение, естественное по переменным B и A. Таким образом, $h(A, B) = f(B)\ (A)$ определяет нужные нам биекции сопряжения.

Пределы

Если L и C — категории, то **постоянный (или диагональный) функтор** определяется как

$$c \begin{cases} C \rightsquigarrow \mathrm{Funct}(L, C) = C^L \\ X \mapsto c(X) = X_{\mathrm{const}}, \end{cases}$$

где

$$c(X) = X_{\mathrm{const}} \begin{cases} L \rightsquigarrow C \\ M \mapsto X \ \text{(на объектах)} \\ f \mapsto 1_X \ \text{(на морфизмах)}. \end{cases}$$

Понятно, что морфизм $f\colon X \to Y$ категории C определяет естественное преобразование

$$c(f)\colon c(X) \to c(Y),$$

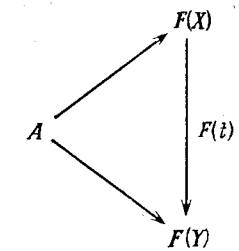
так что постоянный функтор определен и вполне унивалентен.

5.5. Предложение и определение. *Пусть L и C — категории и $C^L = \mathrm{Funct}(L, C)$. Тогда постоянный функтор $c\colon C \rightsquigarrow C^L$ вполне унивалентен. Функтор $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$, сопряженный справа к функтору $c\colon C \rightsquigarrow C^L$, если он существует, называется* ***предельным функтором*** *(или* ***функтором предела****) и обозначается также через $\lim_{L,C}$. Для каждого естественного преобразования функторов $f\colon F \to F'$, где $F, F'\colon L \rightsquigarrow C$, т. е. для каждого морфизма f категории C^L, морфизм $\lim f$ называется* ***предельным морфизмом*** *(или* ***морфизмом предела****) $\lim F \to \lim F'$.*

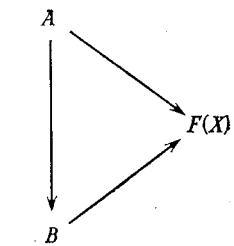
Двойственным образом функтор $\mathrm{colim}\colon C^L \rightsquigarrow C$, сопряженный слева к функтору $c\colon C \rightsquigarrow C^L$, называется ***копредельным функтором*** *(или* ***функтором копредела****).*

Согласованные семейства морфизмов

Пусть L и C — категории, $F\colon L \rightsquigarrow C$ — функтор. Говорят, что семейство $\{A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}\, L}$ категории C **согласовано** с функтором F, если для каждого морфизма $t\colon X \to Y$ категории L диаграмма



коммутативна [и, следовательно, определяет морфизм $c(A) \to F$ в категории C^L]. Через $\mathrm{compat}_L F$ обозначим категорию, объектами которой служат семейства морфизмов, согласованные с функтором F, а морфизм между двумя согласованными семействами определяется как морфизм $A \to B$ категории C, такой, что диаграмма



коммутативна для всех $X \in \mathrm{Obj}\, L$. Если категория L фиксирована, то указанную категорию будем обозначать просто compat F. Категория $\mathrm{cocompat}_L F$ определяется двойственно.

5.6. Предложение и определение. *Пусть* $F\colon L \rightsquigarrow C$ *— функтор.*

5.6.1. *Для каждого объекта* A *категории* C *существует биективное отображение*

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_{C^L}(c(A),\ F) \to \mathrm{compat}\, F \\ h \mapsto \{h(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}. \end{cases}$$

5.6.2. *Категория* compat F *имеет правый нуль в том и только том случае, когда существует биективное отображение*

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}_{C^L}(c(A),\ F) \to \mathrm{Mor}_C(A,\ \overleftarrow{F}) \\ h \mapsto h', \end{cases}$$

естественное по A. *В этом случае объект* $\{f(X)\colon \overleftarrow{F} \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$, *где* $f' = 1_{\overleftarrow{F}}$, *является правым нулем категории* compat F.

5.6.3. *Функтор предела* $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$ *существует тогда и только тогда, когда для каждого функтора* $F\colon L \rightsquigarrow C$ *категория* compat F *имеет правый нуль. Функтор* $C^L \rightsquigarrow C$, *переводящий функтор* F *в* $\overleftarrow{F}$, *сопряжен справа к функтору* $c\colon C \rightsquigarrow C^L$ *и, значит, естественно эквивалентен функтору* $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$.

5.6.4. *Если справедливо* 5.6.2, *то* $\overleftarrow{F}$ *обозначается также через* $\lim F$ *или* $\lim F$. *В этом случае для любого морфизма* $h\colon c(A) \to F$, *т. е. для любого элемента* $\{h(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ *категории* compat F *единственный морфизм* h' *называется* ***предельным*** *или* ***каноническим*** *морфизмом* $\lim h\colon A \to \lim F$. *Двойственным образом в случае копределов применяются обозначения* $\overleftarrow{F}$ *и* $\mathrm{colim}\, F$, *и для любого элемента* $\{f(X)\colon F(X) \to A\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ *категории* cocompat F *существует канонический морфизм*

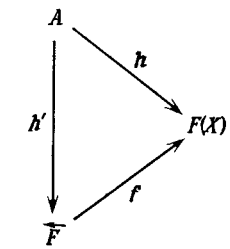
$$\mathrm{colim}\ f\colon \mathrm{colim}\ F \to A.$$

Доказательство. Часть 5.6.1 ясна. Предполагая, что $\{f(X)\colon \overleftarrow{F} \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ — правый нуль категории compat F, определим отображение $h \mapsto h'$, взяв в качестве $h'\colon A \to \overleftarrow{F}$ единственный морфизм, определенный согласованным семейством $\{h(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$. Поскольку любой морфизм $f\colon A \to \overleftarrow{F}$ категории C определяет объект $\{A \to \overleftarrow{F} \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ категории compat F, который в свою очередь в силу 5.6.1 определяет естественное преобразование $g\colon c(A) \to F$, такое, что $g' = f$, то отображение $h \mapsto h'$ биективно и естественно по A. Обратно, пусть

существует биекция $h \mapsto h'$, указанная в 5.6.2. Тогда, полагая $A = \overleftarrow{F}$, найдем морфизм $f \in \mathrm{Mor}_{C^L}(c(\overleftarrow{F}),\ F)$, такой, что $f' = 1_{\overleftarrow{F}}$. В силу биекции 5.6.1 f определяет объект $\{f(X)\colon \overleftarrow{F} \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ категории compat F. Покажем, что он является правым нулем. Действительно, если $\{h(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ — согласованное семейство морфизмов, то по 5.6.1 ему соответствует морфизм $h \in \mathrm{Mor}_{C^L}(c(A),\ F)$. Рассмотрим морфизм $h'\colon A \to \overleftarrow{F}$. Учитывая, что биекция 5.6.2 естественна по A, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{C^L}(c(\overleftarrow{F}),F) & \longleftarrow & \mathrm{Mor}_C(\overleftarrow{F},\overleftarrow{F}) \\ {\scriptstyle h_F(c(h'))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{\overleftarrow{F}}(h')} \\ \mathrm{Mor}_{C^L}(c(A),F) & \longleftarrow & \mathrm{Mor}_C(A,\overleftarrow{F}) \end{array}$$

откуда (вычисляя значение морфизма $1_{\overleftarrow{F}}$ вдоль обоих путей на диаграмме) следует, что $h = c(h') \cdot f$, т. е. для любого $X \in \mathrm{Obj}\, L$ диаграмма



коммутативна. Единственность морфизма h' с таким свойством вытекает из биективности соответствия 5.6.2. Это доказывает, что $\{f(x)\colon \overleftarrow{F} \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ — правый нуль категории compat F.

Часть 5.6.3. Биекции 5.6.1, естественные по A, естественны также и по F. Следовательно, функтор, определенный в 5.6.3, сопряжен справа к постоянному функтору, как и требовалось. Эквивалентность функторов следует из 5.3. □

5.7. Упражнения.

5.7.1. Пусть L — категория, а $T\colon C \rightsquigarrow D$ и $S\colon D \rightsquigarrow C$ — сопряженная пара. Пусть $\overline{T}\colon C^L \rightsquigarrow D^L$ и $\overline{S}\colon D^L \rightsquigarrow C^L$ — функторы, индуцированные T и S соответственно.

(a) Доказать, что функтор $\overline{S}$ сопряжен слева к функтору $\overline{T}$.

(b) Убедиться, что $h^{\overline{S}c(X)} = h^{c(SX)}$ и $h^{c(X)\overline{T}} = h^{c(SX)}$ для всех $X \in \mathrm{Obj}\, D$.

(c) Про
категории

(d) Про
и объекта

(e) Сохр
Пусть S =
$\rightsquigarrow (S^A)^B$, т

(f) Пок

5.7.2. Е
объекта A
изоморфизм
сопряжени
образом, е
ров и если
объекта TA
сопряжени
эквивалент
двойственн

Частичн
такую, что
B имеет не
то мы пиш
В частично
и $B \leqslant C$ (

Направл
такой, что
которого A
ным, если д
условия вы
ченный под
ченного кла

[1]) Поскол
антисимметри
и перев.

малая категория [1]), то категория $\{A_i, \pi\}$ называется **направленным семейством или направленным множеством.** Обратно, если $\{A_i\}_{i \in L}$ — подкатегория категории C, индексированная с помощью категории L так, что отображение $i \mapsto A_i$ инъективно, и если $\{A_i\}_{i \in L}$ — направленный класс, то

(a) L — направленный класс, такой, что

$$i \leqslant j \Leftrightarrow \text{существует морфизм } A_i \to A_j,$$

(b) морфизмы π_{ji}: $A_i \to A_j$ удовлетворяют условиям 1 и 2.

(c) существует функтор π: $L \rightsquigarrow C$, такой, что категория $\{A_i, \pi\}_{i \in L}$ направлена по π.

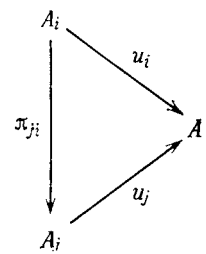
Примеры.

1. Класс подобъектов объекта A категории C направлен с помощью вложений. Таким образом, если $\{u_i\colon A_i \to A\}_{i \in L}$ — класс подобъектов, то следующие условия эквивалентны:

(i) $A_i \leqslant A_j$,

(ii) $u_i \leqslant u_j$,

(iii) Существует в точности один морфизм π_{ji}: $A_i \to A_j$, такой, что диаграмма



коммутативна. □

2. Если L — направленный класс, то подкатегория J называется **кофинальной**, если для каждого объекта X категории L существует объект Y категории J, такой, что $Y \geqslant X$. Если L — направленный класс, а J — кофинальный подкласс, то J — направленный класс и для любого функтора F: $L \rightsquigarrow C$ существует индуцированный функтор F': $J \rightsquigarrow C$ и эквивалентность

$$\varprojlim_{X \in L} F(X) \approx \varprojlim_{Y \in J} F'(Y)$$

в категории C. □

[1]) Напомним, что категория называется малой, если класс ее объектов является множеством.— *Прим. ред. и перев.*

5.8. Примеры.

5.8.1. Если L — частично упорядоченный класс, то для любого функтора F: $I \rightsquigarrow L$ существует биективное соответствие между элементами $\{f(X) : A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, I}$ категории compat F и объектами A категории L, содержащимися в $F(X)$ для любого $X \in \mathrm{Obj}\, I$. Отсюда следует, что

$$\lim F = \inf_{X \in \mathrm{Obj}\, I} \{F(X)\} = \bigwedge_{X \in \mathrm{Obj}\, I} F(X) = \prod_{X \in \mathrm{Obj}\, I} F(X),$$

$$\operatorname{colim} F = \sup_{X \in \mathrm{Obj}\, I} \{F(X)\} = \bigvee_{X \in \mathrm{Obj}\, I} F(X) = \coprod_{X \in \mathrm{Obj}\, I} F(X).$$

Таким образом, пределы, произведения, пересечения и точные нижние грани (inf) совпадают, и категория L (конечно) полна [1]) тогда и только тогда, когда существует точная нижняя грань любого (конечного) семейства объектов категории L. Кроме того, если L направленна и (конечно) кополна, то L (конечно) полна, так как

$$\inf \{A_i\}_{i \in I} = \sup_{X \in \mathrm{Obj}\, I} \{X \leqslant A_i \text{ для любого } i \in I\}.$$

5.8.2. (a) Для любых категории C и функтора предела $\lim$: $C^L \rightsquigarrow C$ любой объект A категории C является пределом, например $A = \lim c(A)$. Таким образом, бессмысленно говорить, что некоторый объект категории является пределом, если не сказано, пределом какого функтора он является.

(b) *Правые нули являются пределами.* Если A — любой правый нуль категории C, то $A = \lim F$, где F: $L \rightsquigarrow C$ — пустой функтор, определенный на пустой категории L.

5.8.3. *Произведения являются пределами.* Конечно, произведения определяются как правые нули, но не обязательно как нули категории C. Если $\{A \to A_i\}_{i \in I}$ — произведение в категории C, то обозначим через I категорию, объектами которой являются элементы i множества I, а морфизм $i \to j$ определен только для $i = j$ и совпадает с тождественным морфизмом $i \to i$. Тогда $A = \lim F$, где

$$F \left| \begin{cases} I \rightsquigarrow C \\ i \mapsto A_i. \end{cases} \right.$$

5.8.4. *Уравнители являются пределами.* Если f_1, f_2: $A \to B$ — морфизмы категории C, то их **уравнитель** определяется как морфизм k: $K \to A$, являющийся правым нулем полной подкатегории категории target A, состоящей из таких морфизмов k': $K' \to A$, для которых $f_1 k' = f_2 k'$. Этот морфизм (а иногда и объект K) обозначают через $\mathrm{eq}\,(f_1, f_2)$; он является однозначно (с точностью до эквивалентности) определенным мономорфизмом (объектом)

[1]) Определение полной категории см. на стр. 312.— *Прим. ред. и перев.*

категории target A. Если L — категория, состоящая из двух объектов X и Y и двух морфизмов k_i: $X \to Y$, $i = 1, 2$, а F: $L \rightsquigarrow C$ — такой функтор, что $FX = A$, $FY = B$, $Fk_i = f_i$, $i = 1, 2$, то eq (f_1, f_2) — правый нуль категории compat F, т. е.

$$\lim F = \text{eq}\,(f_1, f_2).$$

(a) eq (f_1, f_2) *является мономорфизмом.* Действительно, пусть k: $K \to A$ — уравнитель пары f_1, f_2 и q: $Q \to K$, q': $Q \to K$ — такие морфизмы, что $kq = kq'$. Так как $f_1k = f_2k$, то для морфизма $h = kq$ справедливо равенство: $f_1h = f_2h$. Поэтому существует единственный морфизм q'': $Q \to K$ такой, что $h = kq''$. Но это равенство верно для обоих морфизмов q и q'. Отсюда $q = q'' = q'$. Следовательно, k — мономорфизм. Двойственным образом, коуравнитель f_1 и f_2 [coeq (f_1, f_2)] является эпиморфизмом.

Пусть f: $A \to B$ *и* g: $A \to B$ — *морфизмы в категории* C.

(b) Если C — аддитивная категория, то

$$\text{eq}\,(f, g) = \ker (f - g),$$
$$\text{coeq}\,(f, g) = \text{coker}\,(f - g).$$

(c) Если C — любая конкретная категория, то eq (f, g) есть подобъект, порожденный уравнителем f и g в категории множеств, т. е. подмножеством $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$. Если C — одна из категорий GROUPS, MONOIDS, RINGS или mod-R для произвольного кольца R, то забывающий функтор отображает уравнитель f и g в категории C на уравнитель f и g в категории множеств.

(*d*) В категории множеств определим отношение R на множестве B формулой

$$xRy \Leftrightarrow f^{-1}x \cap g^{-1}y \neq \phi.$$

Пусть $\overline{R}$ — отношение эквивалентности на B, порожденное отношением R. Тогда каноническое отображение

$$\begin{cases} B \to \text{множество классов эквивалентности отношения } \overline{R} \\ x \mapsto \overline{R}_x \end{cases}$$

совпадает с коуравнителем морфизмов f и g в категории множеств.

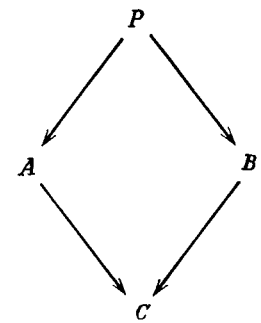
(e) В категории групп коуравнителем морфизмов f и g является канонический эпиморфизм $B \to B/H$, где H — нормальная подгруппа, порожденная множеством $\{f(x)\, g(x)^{-1} \mid x \in A\}$. Аналогично, в категории колец коуравнителем является канонический эпиморфизм $B \to B/H$, где H — идеал, порожденный множеством $\{f(x) - g(x) \mid x \in A\}$.

5.8.5. Пусть f_1: $A \to C$ и f_2: $B \to C$ — морфизмы категории D, L — категория, содержащая три объекта X, Y и Z и пять морфизмов: три тождественных, k_1: $X \to Z$ и k_2: $Y \to Z$, а F: $L \rightsquigarrow D$ —

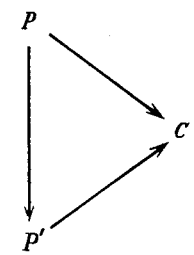
такой функтор, что

$$F(X) = A, \quad F(Y) = B, \quad F(Z) = C,$$
$$F(k_i) = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $\lim F$, если он существует, называется **расслоенным произведением** объектов A и B относительно C и обозначается через $A \prod_C B$. Объектами категории compat F являются классы всех пар морфизмов $P \to A$ и $P \to B$, таких, что диаграмма



коммутативна. Морфизм в категории compat F между этим и другим объектом $P' \to A$ и $P' \to B$ категории compat F есть морфизм $P \to P'$, такой, что диаграмма



коммутативна. Таким образом, $\lim F$ является правым нулем P этой категории, а канонический морфизм $P \to C$ называется **расслоенным морфизмом.** Правый нуль P и соответствующая диаграмма называются **коуниверсальным квадратом (pullback).** Эта диаграмма называется также **декартовым квадратом.** Двойственными понятиями являются **расслоенное копроизведение** $A \coprod_C B$ и **универсальный, или кодекартов, квадрат (pushout).**

Для любого морфизма f: $A \to B$ в категории с нулем **ядро** определяется как

$$\ker f = A \prod_B 0 = \text{eq}\,(f, 0),$$

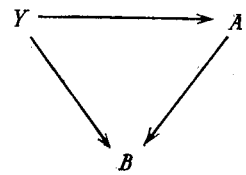
а **коядро**

$$\operatorname{coker} f = 0 \coprod_A B = \operatorname{coeq}(f, 0).$$

Таким образом, канонический (расслоенный) морфизм $\ker f \to A$ является мономорфизмом, а морфизм $B \to \operatorname{coker} f$ — эпиморфизмом. Для любого мономорфизма $K \to A$ выбирается канонический мономорфизм в классе эквивалентности мономорфизмов, эквивалентных морфизму $K \to A$; он обозначается через $i_K^A : K \to A$. Тогда $p_{A/K} : A \to \operatorname{coker} i_K^A$ обозначает коядро.

Пусть f: $X \to Y$ — морфизм в категории C с нулем. Обозначим через $\operatorname{ann} f$ множество всех морфизмов g, таких, что gf определено и $gf = 0$. В этом случае говорят, что морфизм g **аннулирует** f или что f **аннулируется** морфизмом g. Дуальная категория C^* также имеет нуль, поэтому можно определить $\operatorname{coann} f$ как множество всех морфизмов k, для которых $k^* \in \operatorname{ann} f^*$. Таким образом, $\operatorname{coann} f$ — это множество всех морфизмов, аннулирующихся морфизмом f. Таким образом, f аннулирует $\ker f$ (см. упр. 5.10.5).

5.8.6. Морфизм $A \to B$ называют **составляющим** морфизма $Y \to B$, если существует морфизм $Y \to A$, такой, что диаграмма

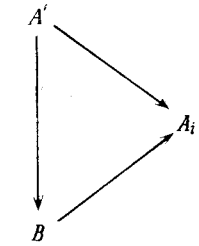


коммутативна [1]).

Если $\{A_i \to A\}_{i \in I}$ — семейство мономорфизмов категории C, а $I' \backsimeq I \coprod \{p\}$ — частично упорядоченный класс, такой, что $i \leqslant p$ для всех $i \in I$, то предел функтора

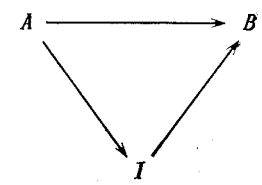
$$\begin{cases} I' \rightsquigarrow C \\ i \mapsto A_i \\ p \mapsto A \end{cases}$$

называется **пересечением** $\bigcap A_i$ данного семейства. Рассмотрим категорию, состоящую из всех морфизмов $A' \to A$, таких, что $A_i \to A$ является составляющим морфизма $A' \to A$ для всех $i \in I$. Морфизм в этой категории между $A' \to A$ и $B \to A$ определяется как такой морфизм $A' \to B$, что диаграмма



коммутативна для каждого $i \in I$. Тогда правый нуль $A' \to A$ этой категории есть мономорфизм, эквивалентный пересечению семейства $\{A_i \to A\}_{i \in I}$.

5.8.7. **Образ** морфизма f: $A \to B$ определяется как левый нуль $\operatorname{im} f \to B$ категории всех мономорфизмов $I \to B$, которые являются составляющими морфизма f. Тогда диаграмма



коммутативна. Таким образом, $\operatorname{im} f \to B$ — наименьший мономорфизм $I \to B$, являющийся составляющим морфизма f, и любые два образа являются эквивалентными мономорфизмами в категории target B. Мономорфизм $\operatorname{im} f \to B$ и единственный морфизм $A \to \operatorname{im} f$, который вместе с ним составляет f, называются **каноническими**; говорят, что они индуцированы морфизмом f. Категория C называется **категорией с (эпиморфными) образами** [1]), если каждый морфизм f: $A \to B$ имеет образ (а индуцированный морфизм $A \to \operatorname{im} f$ всегда является эпиморфизмом). Если g: $A' \to A$ — мономорфизм, то через $f(A')$ обозначают образ мономорфизма fg: $A' \to B$. Таким образом, $f(A) = \operatorname{im} f$.

Если f: $A \to B$ и B' — подобъект объекта B, то расслоенное произведение $A \coprod_B B'$ называется **полным прообразом** объекта B' и обозначается через $f^{-1}B'$. Говорят, что расслоенный морфизм f': $f^{-1}B' \to B$ **индуцирован** морфизмом f, а сам в свою очередь **индуцирует** мономорфизм $\operatorname{im} f' \to B'$.

Если f: $X \to Y$ — отображение множеств, S — подмножество множества Y, причем соответствующее включение является сос-

[1]) В этом случае говорят также, что $Y \to B$ **пропускается** через $A \to B$. — *Прим. перев.*

[1]) В конкретных категориях обычно говорят о **гомоморфных образах**. — *Прим. перев.*

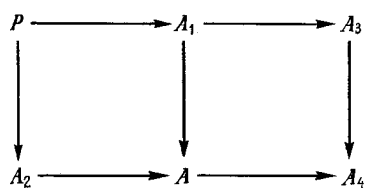
тавляющим морфизма f, и g — такое отображение $X \to S$, что $f = i_S^Y g$, то $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$, т. е. $\operatorname{im} f \subseteq S$. Таким образом, $\operatorname{im} f$ — наименьшее подмножество множества Y, такое, что его включение в Y является составляющим морфизма f, т. е. определение образа в категориях совпадает с его обычным толкованием в категории множеств. То же самое справедливо для полного прообраза, ядра, коядра и пересечения. □

5.9. Предложение. *Если C — категория с уравнителями, то для любого морфизма $f\colon A \to B$ канонический морфизм $A \to \operatorname{im} f$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $f'\colon A \to \operatorname{im} f$ — канонический морфизм (предполагается, что образ морфизма f существует) и $h_1 f' = h_2 f'$ для двух морфизмов $h_i\colon \operatorname{im} f \to X$, $i = 1, 2$. Тогда f', а значит, и f пропускаются через уравнитель I морфизмов h_1 и h_2. Следовательно, I — подобъект образа морфизма f и, значит, объекта B, который является составляющим морфизма f. Но поскольку $\operatorname{im} f$ является наименьшим подобъектом объекта B с этим свойством, то отсюда следует, что включение объекта I в $\operatorname{im} f$ есть эквивалентность. Значит, $h_1 = h_2$, т. е. f' — эпиморфизм. □

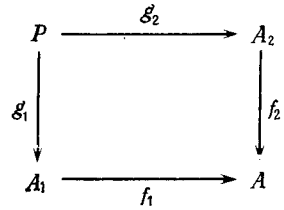
5.10. Упражнения.

5.10.1. Если каждый квадрат диаграммы



является коуниверсальным квадратом, то и весь прямоугольник является коуниверсальным квадратом.

5.10.2. Если



— коуниверсальный квадрат и f_1 (соотв. f_2) — мономорфизм, то g_2 (соотв. g_1) — тоже мономорфизм.

5.10.3. Если в диаграмме упр. 5.10.2 f_1 и f_2 — мономорфизмы, то расслоенное произведение является пересечением $A_1 \cap A_2$.

5.10.4. Если $A = 0$, то диаграмма 5.10.2 является декартовым квадратом в том и только том случае, когда $\{g_i\colon P \to A_i\}_{i=1,2}$ — произведение.

5.10.5. В категории с произведениями ядро произведения морфизмов есть произведение ядер. Таким образом, произведение мономорфизмов — мономорфизм.

5.10.6. Морфизм $f\colon A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{im} f$.

5.10.7. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset A$, $B_1 \subset B_2 \subset B$ — объекты, а $f\colon A \to B$ — морфизм категории C. Если f переводит подобъект A' в B' [1]), то обозначим B' через $f(A')$. Тогда следующие соотношения справедливы, если соответствующие объекты определены:

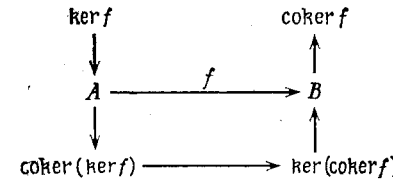
(a) $f(A_1) \subseteq f(A_2)$,
(b) $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,
(c) $A_1 \subseteq f^{-1}(fA_1)$,
(d) $B_1 \supseteq f(f^{-1}B_1)$,
(e) $f(A_1) = f(f^{-1}(f(A_1)))$,
(f) $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(f(f^{-1}(B_1)))$,
(g) если мономорфизм $B' \to B$ является составляющим морфизма f и пересечение $B' \cap B_1$ определено, то $f^{-1}(B' \cap B_1) = f^{-1}(B_1)$; таким образом, $f^{-1}(\operatorname{im} f \cap B_1) = f^{-1}B_1$,
(h) полный прообраз коммутирует с пересечениями, т. е.

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}A_i.$$

5.10.8. (a) *Ядро $K \to X$ морфизма $f\colon X \to Y$ в категории с нулем является правым нулем категории* coann $f \cap$ target X, *если правые нули в этой категории существуют, и единственно с точностью до эквивалентности в категории* target X. *Любое ядро является мономорфизмом.*

(a*) *Коядро $Y \to Q$ морфизма $f\colon X \to Y$ категории C с нулем является левым нулем в подкатегории* ann $f \cap$ source Y *и единственно с точностью до эквивалентности в категории* source Y. *Коядро является эпиморфизмом.*

(b) *Существует такой канонический морфизм* coker (ker f) $\to$ $\to$ ker (coker f), *что коммутирует следующая диаграмма* (*ср.*5.20):



[1]) То есть если B' равен образу морфизма $A' \to A \xrightarrow{f} B$. — *Прим. перев.*

5.10.9. Если $T\colon I \rightsquigarrow L$ — функтор, а $F\colon L \rightsquigarrow C$ — представительный и полный функтор, который переводит канонический морфизм $(\lim T) \to T(i)$ для некоторого $i \in I$ в какой-то мономорфизм категории C, то $\lim FT = F \lim T$. Таким образом, если $\{p(i)\colon Y \to T(i)\}_{i\in I}$ — правый нуль категории compat T, такой, что $F(p(i))$ для некоторого $i \in I$ — мономорфизм, то $\{F(p(i))\colon FY \to FT(i)\}_{i\in I}$ — правый нуль категории compat FT.

5.10.10. Доказать, что в любой категории C копроизведение есть прямой предел некоторого функтора $L \rightsquigarrow C$.

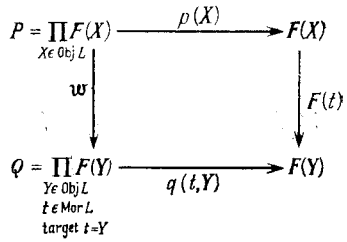
5.10.11. Доказать, что категория C кополна [1]) тогда и только тогда, когда она является категорией с прямыми пределами.

5.10.12 (Фрейд). Вполне унивалентный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ отражает пределы и копределы, т. е. если $F\colon L \rightsquigarrow C$ — такой функтор, что $\lim TF$ существует, и если $TX = \lim\limits_{L,D} TF$ для некоторого $X \in \operatorname{Obj} C$, то $X = \lim\limits_{L,D} F$. [*Указание*: $\operatorname{Mor}_C(Y, \lim\limits_{L,C} F) = \operatorname{Mor}_{CL}(c(Y), F) = \operatorname{Mor}_{DL}(c(TY), TF) = \operatorname{Mor}_D(TY, \lim\limits_{L,D} TF)$.]

Категория C называется **полной (конечно полной)**, если $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$ существует для любой (конечной) малой категории L.

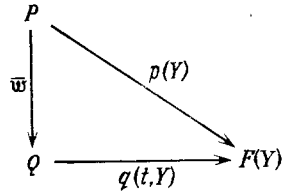
5.11. Предложение. *Категория C (конечно) полна в том и только том случае, когда она обладает (конечными) произведениями и уравнителями.*

Доказательство. Из примеров 5.8.3 и 5.8.4 следует, что произведения и уравнители являются пределами. Обратно, ввиду предложения 5.6 достаточно доказать, что для любой малой категории L категория compat F, объектами которой являются семейства морфизмов $\{A \to F(X)\}_{X\in \operatorname{Obj} L}$, согласованные с функтором F, имеет правый нуль. Рассмотрим коммутативные диаграммы

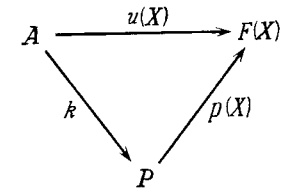


[1]) Понятие **кополной** категории двойственно понятию полной.—*Прим. ред.*

и



где $t\colon X \to Y$ — произвольный морфизм категории L, $p(X)\colon P \to F(X)$, $q(t, Y)\colon Q \to F(Y)$ — канонические проекции произведений и $w\colon P \to Q$, $\bar{w}\colon P \to Q$ — канонические морфизмы. Обозначим через $k\colon A \to P$ уравнитель морфизмов w и $\bar{w}$. Тогда семейство морфизмов $\{u(X)\colon A \to F(X)\}_{X\in \operatorname{Obj} L}$ согласовано с функтором F, и диаграмма



коммутативна. Действительно, для каждого морфизма $t\colon X \to Y$ категории L имеем

$$F(t)\,u(X) = F(t)\,p(X)\,k = q(t, Y)\,wk = q(t, Y)\,\bar{w}k = p(Y)\,k = u(Y).$$

Чтобы показать, что $A \approx \lim F$, достаточно ввиду предложения 5.6.2 убедиться, что A — правый нуль категории compat F. Для этой цели рассмотрим семейство $\{v(X)\colon B \to F(X)\}_{X\in \operatorname{Obj} L}$ морфизмов категории C, согласованное с функтором F. По определению произведения существует единственный морфизм $h\colon B \to P$, такой, что $p(X)\,h = v(X)$ для любого объекта X категории L. Тогда для любого морфизма $t\colon X \to Y$ категории L имеем

$$q(t, Y)\,wh = F(t)\,p(X)\,h = F(t)\,v(X) = v(Y)$$

и

$$q(t, Y)\,\bar{w}h = p(Y)\,h = v(Y).$$

Из определения произведения теперь следует, что $wh = \bar{w}h$. Так как $k = \operatorname{eq}(w, \bar{w})$, то существует единственный морфизм $v'\colon B \to A$, такой, что $kv' = h$, и тогда

$$u(X)\,v' = p(X)\,kv' = p(X)\,h = v(X).$$

Это показывает, что $v'\colon B \to A$ — морфизм категории compat F, а $\{u(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}\, L}$ — нужный нам правый нуль, т. е. что $A \approx \lim F$.

Если категория L конечна, то произведения P и Q, возникающие в доказательстве, конечны и, значит, утверждения, взятые в скобки, справедливы. □

5.12. Следствие. *Аддитивная категория C (конечно) полна тогда и только тогда, когда C имеет (конечные) произведения и ядра.*

Доказательство. В аддитивной категории ядро разности двух морфизмов $A \to B$ совпадает с их уравнителем. Поэтому для аддитивной категории C условия следствия совпадают с условиями предложения 5.11.

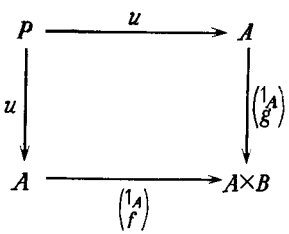
5.13. Предложение. *Следующие утверждения о категории C эквивалентны:*

(a) *C — категория с конечными пересечениями и конечными произведениями.*

(b) *C — категория с уравнителями и конечными произведениями.*

(c) *C — конечно полная категория.*

Доказательство. Часть (a) ⇒ (b) есть следствие того факта, что для данных двух морфизмов $f\colon A \to B$ и $g\colon A \to B$ категории C диаграмма



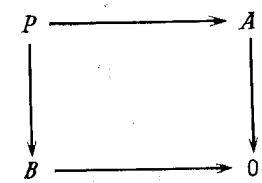
является декартовым квадратом в том и только том случае, когда $P \to A$ — уравнитель подобъектов, определенных вертикальным и горизонтальным морфизмами $A \to A \times B$. Так как в этом случае последние два морфизма непременно являются мономорфизмами, то декартов морфизм (т. е. произведение морфизмов) $P \to A \times B$ обязан совпадать с их пересечением. Это следует из того, что диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда $fu = gu$. Таким образом, (a) ⇒ (b), а (b) ⇒ (c). Так как конечные произведения и конечные пересечения являются конечными пределами, то (c) ⇒ (a). □

5.14. Следствие. *Категория C полна в том и только том случае, когда она обладает произведениями и конечными пересечениями.*

Доказательство. В силу 5.12 и 5.13 при наличии конечных произведений категория C имеет уравнители тогда и только тогда, когда она имеет конечные пересечения. Следствие теперь вытекает из предложения 5.11. □

5.15. Следствие. *Конечно полная категория C обладает расслоенными произведениями. Обратно, всякая категория с нулем и расслоенными произведениями конечно полна.*

Доказательство. Расслоенное произведение является конечным пределом. Обратно, существование расслоенных произведений влечет за собой существование конечных пересечений. Тогда если C имеет нулевой объект, то расслоенное произведение



является произведением объектов A и B в категории C. Таким образом, категория C обладает конечными пересечениями и конечными произведениями и, значит, конечно полна ввиду предложения 5.13.

5.16. Упражнения.

5.16.1. Показать, что категории SETS, GROUPS, mod-R (над любым кольцом R) и RINGS (а также категория TOP топологических пространств) полны.

5.16.2. Показать, что категории SETS, GROUPS, mod-R и TOP кополны.

5.16.3. Показать, что категория колец кополна.

5.16.4. Если C (конечно) (ко)полна, то C^L также (конечно) (ко)полна.

5.16.5. Если категория C или аддитивна, или является категорией с ядрами или с (конечными) произведениями, или с уравнителями, то категория C^L обладает соответствующим свойством. Расширить список подходящих свойств, насколько это возможно.

5.16.6. Любая конечно полная категория C имеет уравнители, а ядра имеет тогда и только тогда, когда она имеет нуль [1]). Вывести отсюда, что категория моноидов не является конечно полной.

*5.16.7. В категории групп эпиморфизмы являются наложениями.

5.16.8. Если $F\colon L \rightsquigarrow C$ — функтор, где L — малая категория, то предел функтора F есть семейство произведений

$$\bigcap_{t \in \mathrm{Mor}_L(B, A)} \mathrm{eq}\,(p(A), F(t)\,p(B)) \to \prod_{X \in L} F(X) \xrightarrow{p(X)} F(X),$$

где $p(A)$ — проекция произведения для любого $A \in \mathrm{Obj}\,L$; предполагается, что произведения, уравнители и пересечения существуют.

5.16.9. Множество $\{X_i\}_{i \in I}$ объектов категории C называется **прединициальным или левым псевдонулем**, если для каждого объекта Y существует индекс $i \in I$ и морфизм $X_i \to Y$. Показать, что полная категория C содержит левый псевдонуль тогда и только тогда, когда она имеет левый нуль.

Нормальные категории

Подобъект B объекта A называется **нормальным**, если он является ядром некоторого морфизма. Категорию с нулем называют **нормальной**, если каждый подобъект любого объекта нормален. Таким образом, категория mod-$\mathbb{Z}$ нормальна, а GROUPS — нет. **Конормальная** категория определяется двойственным образом.

5.17. Предложение. *Если* $i_B^A\colon B \to A$ *— нормальный подобъект объекта* A, *то*

$$i_B^A = \ker(\mathrm{coker}\, i_B^A) = \ker p_{A/B}.$$

Доказательство. Пусть $i = i_B^A$ — ядро морфизма $f\colon A \to C$. Тогда существует морфизм $\alpha\colon A/B \to C$, такой, что $\alpha p = f$, где $p = p_{A/B}$. Отсюда следует, что f аннулирует любой мономорфизм $K \to A$, который аннулируется морфизмом p. Это показывает, что $i_B^A = \ker p_{A/B}$. □

5.18. Следствие. *Если* C *— нормальная и конормальная категория с ядрами и коядрами, то для каждого объекта* A *функция*

$$\mathrm{coker}\left\{\begin{array}{c}\text{подобъекты объекта } A \to \text{факторобъекты объекта } A \\ B \mapsto A/B\end{array}\right.$$

[1]) Заметим, что в силу определения на стр. 307 говорить о ядрах можно лишь в категории с нулем.— *Прим. перев.*

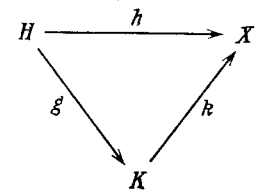
является антиизоморфизмом частично упорядоченных множеств и обратная функция ker *переводит каждый факторобъект* $A \to C$ *в его ядро. Таким образом, для каждого морфизма* $f\colon X \to Y$

$$\ker(\mathrm{coker}(\ker f)) = \ker f$$

и

$$\mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker}\, f)) = \mathrm{coker}\, f. \quad \square$$

Если $k\colon K \to X$ — ядро морфизма $f\colon X \to Y$ и $h\colon H \to X$ — мономорфизм, аннулируемый морфизмом f, то существует единственный морфизм $g\colon H \to K$, такой, что диаграмма

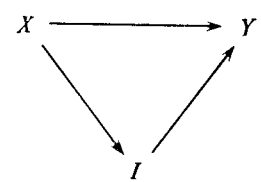


коммутативна. Так как $kg = h$ — мономорфизм, то $g\colon H \to K$ — тоже мономорфизм, т. е. H — подобъект объекта K. Кроме того, $H \leqslant K$ при упорядочивании $\leqslant$ морфизмов. Таким образом, в двух разных смыслах *ядро морфизма — наибольший мономорфизм, который этим морфизмом аннулируется*. Это утверждение совпадает с ситуацией в категории групп, где ядро гомоморфизма f есть наибольшая подгруппа, включение которой аннулируется морфизмом f. Двойственным образом, *коядро морфизма* f *— наименьший эпиморфизм, который аннулирует морфизм* f.

5.19. Предложение и определение. *Категория называется* ***сбалансированной****, если каждый морфизм, являющийся одновременно эпиморфизмом и мономорфизмом, оказывается эквивалентностью.*

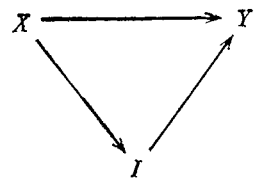
5.19.1. *Каждая нормальная категория сбалансирована.*

5.19.2. *В сбалансированной категории из коммутативности диаграммы*



где $X \to I$ *— эпиморфизм, а* $I \to Y$ *— мономорфизм, следует, что* $I \to Y$ *является образом морфизма* $X \to Y$, *если только последний морфизм имеет образ.*

5.19.3. *В сбалансированной категории, обладающей образами и уравнителями, морфизм* $I \to Y$ *в коммутативной диаграмме*

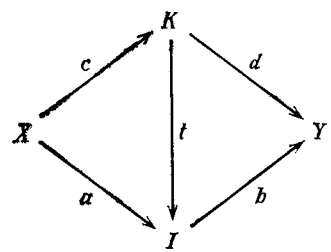


является образом морфизма $X \to Y$ *тогда и только тогда, когда* $I \to Y$ *— мономорфизм, а* $X \to I$ *— эпиморфизм.*

5.19.4 (***единственность разложения***). *Если в сбалансированной категории с образами морфизм* f *имеет два разложения* $f = kq = k'q'$, *где* q *и* q' *— эпиморфизмы, а* k *и* k' *— мономорфизмы, то* $q \approx q'$, *а* $k \approx k'$.

Доказательство 5.19.1. Пусть $f\colon A \to B$ — эпиморфизм и мономорфизм одновременно. Тогда $\operatorname{coker} f = 0$, и f есть ядро своего коядра. Но ядром морфизма $B \to 0$ является 1_B. Значит, существует морфизм $h\colon B \to A$, такой, что $fh = 1_B$. Тогда $fhf = 1_B f = f$. Следовательно, $hf = 1_A$, т. е. f является эквивалентностью.

Доказательство 5.19.2. Рассмотрим диаграмму



где a — эпиморфизм, b — мономорфизм, d — образ морфизма $f = ba$ и c — канонический морфизм в образ. Поскольку b — составляющий морфизма f, а образ — наименьший мономорфизм с этим свойством, то морфизм t возникает естественно. Тогда из того, что a — эпиморфизм, следует, что t — эпиморфизм, а из того, что d — мономорфизм, следует, что t — мономорфизм. Так как категория сбалансирована, это влечет за собой, что t — эквивалентность. Следовательно, $b\colon I \to Y$ также является образом.

Доказательство 5.19.3 следует из 5.19.2 и 5.9.

Доказательство 5.19.4 следует из 5.19.2. Так как оба мономорфизма k и k' являются образами морфизма f, то они эквивалентны. Эквивалентность t, такая, что $kt = k'$, удовлетворяет равенству $tq' = q$, т. е. эпиморфизмы тоже эквивалентны. □

5.20. Предложение. *Нормальная категория* C *с ядрами и коядрами обладает образами и для каждого морфизма* $f\colon X \to Y$ *имеет место равенство*

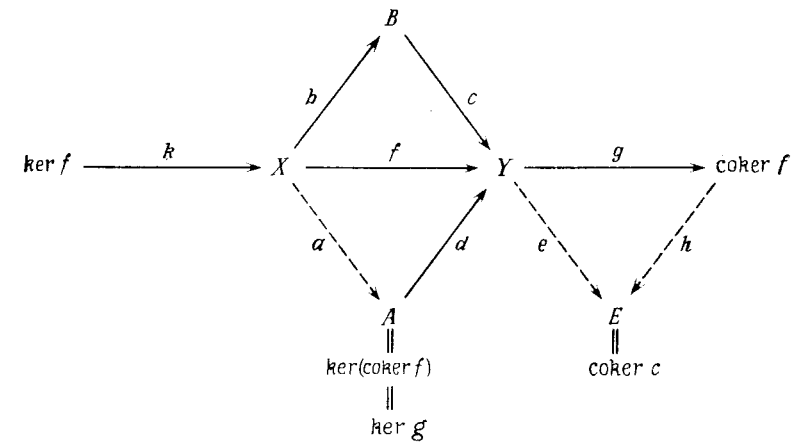
$$\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f).$$

Если, кроме того, C *обладает уравнителями, то канонический морфизм* $X \to \operatorname{im} f$ *является эпиморфизмом, а в этом случае он является кообразом морфизма* f, *т. е.* $\operatorname{coim} f \approx \operatorname{im} f$. *Иначе говоря, канонический морфизм*

$$\operatorname{coker}(\ker f) \to \ker(\operatorname{coker} f)$$

является эквивалентностью.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



Для произвольного мономорфизма $c\colon B \to Y$, являющегося составляющим морфизма f, обозначим через $e\colon Y \to E$ его коядро. Так как $ec = 0$, то $ef = 0$. Значит, существует единственный морфизм h, такой, что $hg = e$. Тогда $ed = hgd = 0$. Поскольку категория нормальна, мономорфизм c является ядром своего коядра e. Следовательно, существует единственный морфизм $t\colon A \to B$, такой, что $ct = d$. Так как это справедливо для любого мономорфизма $c\colon B \to Y$, являющегося составляющим морфизма f, то по определению образа $d = \ker(\operatorname{coker} f) = \operatorname{im} f$, что и утверждалось.

Существование морфизма $a\colon X \to A$ вытекает из того, что $gf = 0$, а $d\colon A \to Y$ является ядром морфизма g. Так как C — категория с уравнителями, то ввиду 5.9 a — эпиморфизм. Предположим, что $b\colon X \to B$ — эпиморфизм, являющийся составляющим морфизма f. Тогда $gc = 0$, значит, существует единственный морфизм $t\colon B \to A$, такой, что $dt = c$. Следовательно, $f = cb =$

$= dtb = da$ и $tb = a$, поскольку d — мономорфизм. Это показывает, что $a\colon X \to A$ — наибольший эпиморфизм, являющийся составляющим морфизма f, т. е. a — кообраз морфизма f. □

5.21. Следствие. *Пусть U — образующий объект нормальной, аддитивной категории C с ядрами и коядрами. Для каждого объекта X категории C существует каноническая точная последовательность*

$$U^{(\mathrm{Mor}_C(U,X))} \xrightarrow{h} X \to 0, \tag{1}$$

если только указанное копроизведение существует.

Доказательство. Канонический морфизм h, определенный формулой (1), ввиду 3.25 является эпиморфизмом. Так как категория аддитивна и обладает ядрами, то она обладает и уравнителями. Поэтому, используя предложение 5.20, имеем

$$\operatorname{im} h = \ker(\operatorname{coker} h) = \ker 0 = X,$$

т. е. последовательность (1) точна. □

Категория C называется **локальной малой**, если совокупность представителей классов эквивалентных подобъектов любого объекта составляет множество. Категория множеств локально мала в силу аксиом ZF теории множеств. Следовательно, и любая конкретная категория локально мала.

Множество $\{U_i\}_{i\in I}$ объектов категории C называется **множеством образующих**, если для каждой пары различных морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ существует морфизм $h\colon U_i \to X$ $(i \in I)$, такой что $fh \neq gh$.

5.22. Упражнения.

5.22.1. Если $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество объектов категории C, такое, что для каждого $A \in \mathrm{Obj}\, C$ и любого $i \in I$ существует морфизм $U_i \to A$, и если существует копроизведение $U = \coprod_{i\in I} U_i$, то для того, чтобы $\{U_i\}_{i\in I}$ было множеством образующих категории C, необходимо и достаточно, чтобы объект U был образующим категории C.

5.22.2. Всякое одноэлементное множество является образующим категории множеств, а всякое двуэлементное — кообразующим.

5.23. Предложение. *Пусть C — сбалансированная категория с конечными пересечениями и $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество образующих. Тогда*

5.23.1. *Если A — объект категории C, то подобъект $X \to A$ характеризуется теми морфизмами $U_i \to A$, которые пропускаются через $X \to A$.*

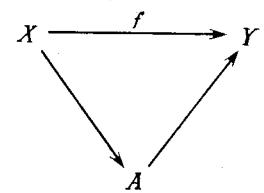
5.23.2. *Категория C локально мала, т. е. для любого объекта A категории C совокупность представителей классов эквивалентных подобъектов объекта A составляет множество.*

Доказательство 5.23.1. Пусть $u_1\colon X_1 \to A$ и $u_2\colon X_2 \to A$ — различные подобъекты, т. е. неэквивалентные мономорфизмы. Если канонические мономорфизмы $v_1\colon X_1 \cap X_2 \to X_1$ и $v_2\colon X_1 \cap X_2 \to X_2$ окажутся оба эпиморфизмами, то они обязаны быть эквивалентностями в противоречие с предположением о том, что X_1 и X_2 не эквивалентны. Предположим, что v_1 не является эпиморфизмом. Тогда существуют объект B и различные морфизмы $f\colon X_1 \to B$ и $g\colon X_1 \to B$, такие, что $fv_1 = gv_1$. Кроме того, существуют $i \in I$ и морфизм $h\colon U_i \to X_1$, такие, что $fh \neq gh$. Тогда $v_1\colon X_1 \cap X_2 \to X_1$ не является составляющим морфизма h и, значит, $u_2\colon X_2 \to A$ не является составляющим морфизма $u_1 h\colon U_i \to A$.

Доказательство 5.23.2. Множества морфизмов $\{U_i \to A\}$ достаточно, чтобы различить неэквивалентные подобъекты объекта A. □

Точные категории

5.24. Определение. Категория C называется **точной**, если она нормальна, конормальна, обладает ядрами и коядрами и каждый ее морфизм $f\colon X \to Y$ обладает разложением



где $X \to A$ — эпиморфизм, а $A \to Y$ — мономорфизм. Последовательность морфизмов

$$\ldots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$$

называется **точной**, если $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$ как подобъекты объекта A_{i+1} для всех i.

Точная последовательность $0 \to A \to B \to X$ называется **левой точной** последовательностью. Ковариантный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ называется **точным слева**, если он сохраняет левые точные последовательности, т. е. если из точности последовательности $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X$ вытекает точность последовательности $0 \to TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TX$. Функтор T называется **точным**, если он точен

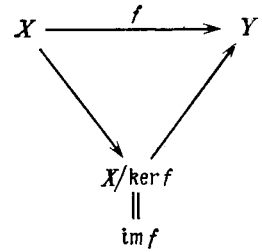
и слева, и справа. Функтор T называется **полуточным**, если точность последовательности $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X \to 0$ влечет за собой точность последовательности $TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TX$. Очевидно, всякий точный слева или справа функтор полуточен.

Контравариантный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ называется **точным (слева, справа)**, если индуцированный им функтор $T^*\colon C^* \rightsquigarrow D$ точен (справа, слева); здесь $T^*(A^*) = TA$. Таким образом, T точен слева, если из точности последовательности $A \to B \to X \to 0$ следует точность последовательности

$$TA \leftarrow TB \leftarrow TX \leftarrow 0.$$

5.25. Предложение.

5.25.1. *Точная категория обладает эпиморфными образами, любой морфизм $f\colon X \to Y$ представляется однозначно с точностью до эквивалентности эпиморфизмов и мономорфизмов в виде*

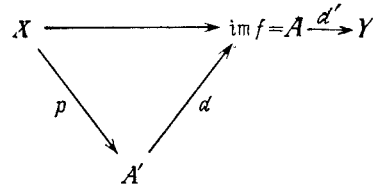


где $X \to X/\ker f$ — канонический эпиморфизм, а $X/\ker f \to Y$ — индуцированный мономорфизм. При этом канонический морфизм $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ *является эквивалентностью.*

5.25.2. *Нормальная и конормальная категория с ядрами, коядрами и уравнителями точна.*

5.25.3. *Нормальная и конормальная аддитивная категория с ядрами и коядрами точна.*

Доказательство. Ввиду предложения 5.20, $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$, а $\operatorname{coim} f = X/\ker f$. Кроме того, морфизм $X \to \operatorname{im} f$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда он является кообразом морфизма f. Разложим



где p — эпиморфизм, d — мономорфизм, а d' — индуцированный мономорфизм. Тогда $d'd\colon A' \to Y$ — мономорфизм, который является составляющим морфизма $f\colon X \to Y$. Если морфизм f пропускается через $C \to Y$, то $A \to Y$ пропускается через $C \to Y$, а значит, и $A' \to Y$ пропускается через $C \to Y$. Это показывает, что $A' \to Y$ является образом морфизма f, так что морфизм $d\colon A' \to A$ должен быть эквивалентностью. Следовательно, $X \to A$ — эпиморфизм, эквивалентный эпиморфизму $X \to A'$. Отсюда следует, что $X \to \operatorname{im} f$ — кообраз морфизма f. Поскольку $\operatorname{coim} f = X/(\ker f)$, то коммутативность треугольника в утверждении 5.25.1 вытекает из коммутативности соответствующего треугольника, индуцированного морфизмом $X \to \operatorname{im} f$. Этим доказано 5.25.1. Если выполнены условия утверждения 5.25.2, то $X \to \operatorname{im} f$ является эпиморфизмом по 5.9, и тогда каждый морфизм разлагается в произведение эпиморфизма и мономорфизма. Аддитивная категория с ядрами обладает уравнителями; следовательно, 5.25.2 влечет за собой 5.25.3.

5. 26. Предложение.

5.26. 1. *В точной категории C справедливы такие утверждения:*

(a) *Последовательность $A \to B \to X$ точна в категории C в том и только том случае, когда последовательность $A^* \leftarrow B^* \leftarrow X^*$ точна в категории C^*.*

(b) *Последовательность $0 \to A \to B$ точна тогда и только тогда, когда $A \to B$ — мономорфизм.*

(c) *Последовательность $A \to B \to 0$ точна тогда и только тогда, когда $A \to B$ — эпиморфизм.*

(d) *Последовательность $0 \to A \to B \to 0$ точна тогда и только тогда, когда $A \to B$ — эквивалентность.*

(e) *Последовательность $0 \to A \to B \to X$ точна тогда и только тогда, когда $A \to B$ — ядро морфизма $B \to X$.*

(f) *Морфизм $f\colon A \to B$ является мономорфизмом (эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда* $\ker f = 0$ ($\operatorname{coker} f = 0$).

5.26.2. *Пусть C и D — точные категории и $T\colon C \rightsquigarrow D$ — ковариантный функтор. Тогда*

(i) *Функтор T точен слева в том и только том случае, когда он сохраняет ядра.*

(ii) *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *Функтор T точен.*

(b) *T сохраняет точные последовательности.*

(c) *T сохраняет ядра и коядра.*

(d) *T сохраняет ядра и образы.*

5.26.3. *Для точности точного справа функтора T необходимо и достаточно, чтобы он являлся монофунктором* [1]).

[1]) См. стр. 338.— *Прим. перев.*

Доказательство 5.26.1. Категория C^*, дуальная точной категории C, точна. Чтобы доказать (a), нужно установить, что для морфизмов $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to X$ из равенства $\operatorname{im} f = \ker g$ в категории C следует, что $\operatorname{im} g^* = \ker f^*$ в категории C^*. Но по 5.20 $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$ и $\operatorname{coim} g = \operatorname{coker}(\ker g)$. Таким образом, из равенства $\operatorname{im} f = \ker g$ следует, что

$$\operatorname{coim} g = \operatorname{coker}(\operatorname{im} f) = \operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker} f)) = \operatorname{coker} f,$$

и тогда $\operatorname{im} g^* = \ker f^*$. Это доказывает (a). Далее из точности последовательности $0 \to A \xrightarrow{f} B$ вытекает, что $\ker f = \operatorname{im} 0 = 0$, откуда $\operatorname{im} f = \operatorname{coker}(\ker f) = \operatorname{coker} 0$. Таким образом, канонический морфизм $A \to \operatorname{im} f$ является эквивалентностью, т. е. $f\colon A \to B$ — мономорфизм [это доказывает также и (f)]. Обратно, если $f\colon A \to B$ — мономорфизм, то $\ker f = 0$, т. е. последовательность $0 \to A \xrightarrow{f} B$ точна. Это доказывает (b), а (c) дуально (b). Утверждение (d) вытекает из (b), (c) и того факта, что нормальные категории сбалансированы (см. 5.19.1).

Докажем пункт (e). Если $f\colon A \to B$ — ядро морфизма $g\colon B \to X$, то f — мономорфизм, а канонический морфизм $A \to \operatorname{im} f$ является эпиморфизмом и мономорфизмом, а значит, и эквивалентностью, так как категория C сбалансирована. Следовательно, $\operatorname{im} f = \ker g$, т. е. последовательность $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X$ точна. Обратно, если эта последовательность точна, то $\ker f = \operatorname{im} 0 = 0$, т. е. f — мономорфизм. Следовательно, канонический эпиморфизм $A \to \operatorname{im} f$ является эквивалентностью, так что равенство $\operatorname{im} f = \ker g$ влечет за собой равенство $f = \ker g$.

Доказательство 5.26.2. (a) $\Leftrightarrow$ (c) ввиду 5.26.1, а (b) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (a) тривиально.

(c) $\Rightarrow$ (d). Пусть $f\colon A \to B$ — морфизм. Ввиду 5.20 $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$. Так как функтор T сохраняет ядра и коядра, то

$$T(\operatorname{im} f) = \ker(T(\operatorname{coker} f)) = \ker(\operatorname{coker} Tf) = \operatorname{im} Tf,$$

т. е. T сохраняет образы.

(d) $\Rightarrow$ (b). Если последовательность $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X$ точна, то последовательность $0 \to \operatorname{im} f \xrightarrow{f'} B \xrightarrow{g} X$, где $f' = \operatorname{im} f = \ker g$, тоже точна. Так как T сохраняет ядра, то $Tf' = \ker Tg$. Поскольку T сохраняет образы, то $Tf' = \operatorname{im} Tf = \ker Tg$, т. е. функтор T точен.

Доказательство 5.26.3. Если $A \to B \to X \to 0$ — правая точная последовательность, то последовательность $0 \to A \to B \to X \to 0$ точна в том и только том случае, когда точна последовательность $0 \to A \to B$, т. е. когда $A \to B$ — мономорфизм. Следовательно, если функтор T точен справа, а $0 \to A \to B \to X \to 0$ — точная последовательность, то последовательность $0 \to TA \to TB \to TX \to 0$ точна тогда и только тогда, когда морфизм $TA \to TB$ является мономорфизмом. □

5.27. Упражнения.

5.27.1. Нормальная категория с ядрами обладает полными прообразами и конечными пересечениями.

5.27.2. Если категория C точна, то для любой категории L категория C^L точна.

5.27.3. Если C — точная локально малая категория, а L — малая категория, то категория C^L локально мала.

5.27.4. Для любого кольца R категория mod-R является локально и колокально малой точной аддитивной полной кополной категорией и имеет проективный образующий и инъективный кообразующий.

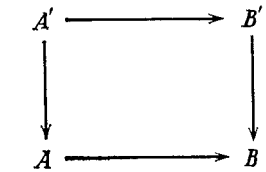
5.27.5. Пусть C — нормальная аддитивная категория с копроизведениями, ядрами, коядрами и образующим U. Доказать, что $\operatorname{Obj} C$ совпадает со своим наименьшим подклассом, замкнутым относительно копроизведений и коядер и содержащим образующий категории C.

5.27.6. Если C — точная аддитивная категория, то для каждого объекта A функтор h_A (соотв. h^A) со значениями в категории абелевых групп точен слева. Более того, функтор h_A (соотв. h^A) точен тогда и только тогда, когда A — инъективный (проективный) объект категории C.

5.27.7 (Пуппе [67]). Категория C с нулем и конечными произведениями точна и аддитивна в том и только том случае, когда каждый морфизм $A \xrightarrow{f} B$ имеет вид $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} B$, где h — ядро, а g — коядро.

Суммы

Пусть $u\colon A' \to A$ — мономорфизм. Будем говорить, что морфизм $f\colon A \to B$ **переводит** A' в B', если существуют мономорфизм $B' \to B$ и морфизм $A' \to B'$, такие, что диаграмма



коммутативна. (Морфизм $A' \to B'$ определен однозначно.) Говорят также, что A' **переходит в** B' при f.

Пусть $\{u_i\colon A_i \to A\}$ — мономорфизмы, представляющие собой семейство подобъектов объекта A. **Суммой** *подобъектов данного семейства* назовем подобъект $u\colon A' \to A$, определенный следующими условиями: (1) каждый мономорфизм $u_i\colon A_i \to A$ меньше морфизма u, т. е. $u_i = uw_i$ для какого-то мономорфизма $w_i\colon A_i \to A'$; (2) каждый морфизм $A \to B$, переводящий все A_i в B', переводит A' в B'. Сумму будем обозначать через $\sum\limits_{i\in I} A_i$. Она является наименьшим подобъектом в A, содержащим все A_i. Таким образом, сумма $\sum\limits_{i\in I} A_i$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности [1]). Будем говорить, что категория C **обладает (конечными) суммами**, если для каждого объекта категории C существует сумма любого (конечного) семейства его подобъектов.

Говорят, что семейство подобъектов $\{A_i\}_{i\in I}$ объекта A **порождает** этот объект, если канонический морфизм $\sum\limits_{i\in I} A_i \to A$ является эквивалентностью.

5.28. Предложение. *Если C — категория с образами и прообразами, то для любого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ подобъектов объекта A и любого морфизма $f\colon A \to B$ имеет место равенство*

$$\sum_{i\in I} f(A_i) = f\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big),$$

если только $\sum\limits_{i\in I} A_i$ существует. Таким образом, морфизмы перестановочны с суммами.

Доказательство. Так как $A_i \subseteq \sum\limits_{i\in I} A_i$, то $f(A_i) \subseteq f(\sum\limits_{i\in I} A_i)$, так что левая часть доказываемого равенства содержится в правой. Пусть теперь $D \xrightarrow{g} B$ — подобъект объекта B, содержащий $f(A_i)$ для всех i. Тогда $A_i \subseteq f^{-1}(D)$ и, следовательно, $\sum\limits_{i\in I} A_i \subseteq f^{-1}(D)$. Отсюда в силу определения образа вытекает, что $f(\sum\limits_{i\in I} A_i) \subseteq D$. Это доказывает требуемое равенство.

5.29. Предложение.

5.29.1. *Если C — категория с образами, L — произвольная малая категория и $f\colon F \to c(A)$ — морфизм категории C^L, то образ морфизма копредела* $\operatorname{colim} F \to A$ *является суммой*

[1]) В литературе сумму иногда обозначают через $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

$\sum\limits_{X\in L} \operatorname{im} f(X)$ *образов морфизмов косогласованного семейства*

$$\{f(X)\colon F(X) \to A\}_{X\in L}.$$

5.29.2. *Если C — категория, обладающая образами и (конечными) копроизведениями, то C обладает (конечными) суммами и сумма $\sum\limits_{i\in I} A_i$ любого (конечного) семейства подобъектов объекта A является образом канонического морфизма $\coprod\limits_{i\in I} A_i \to A$.*

Доказательство. Пусть $I = \operatorname{im}(\operatorname{colim} f)$ — образ копредельного морфизма $\operatorname{colim} F \to A$. Морфизм $F(X) \to A$ пропускается через $I \to A$. Следовательно, существует канонический морфизм $\operatorname{im} f(X) \to I$, который является составляющим морфизма $F(X) \to I$. Остается только показать, что если морфизм $I \to A$ переводит каждый объект $\operatorname{im} f(X)$ в некоторый подобъект U объекта A, то он переводит также I в U. Произведение

$$F(X) \to \operatorname{im} f(X) \to U$$

определяет элемент категории $\operatorname{cocompat} F$. Значит, существует канонический морфизм $\operatorname{colim} F \to U$, такой, что

$$(\operatorname{colim} F \to A) = (\operatorname{colim} F \to U \to A).$$

Следовательно, $I = \operatorname{im}(\operatorname{colim} F) \subseteq U$. Это доказывает утверждение 5.29.1, а 5.29.2 следует из него непосредственно, так как копроизведение является копределом ввиду утверждения, дуального 5.8.3. □

5.30. Следствие. *Если C — категория с образами, а L — малая категория, то для любого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$ копредел функтора F порождается образами канонических морфизмов $\{f(X)\colon F(X) \to \operatorname{colim} F\}_{X\in L}$. В частности, копроизведение $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ порождается образами канонических инъекций $A_i \to \coprod\limits_{i\in I} A_i$. Кроме того, если $f\colon F \to c(A)$ — естественное преобразование функтора F в постоянный функтор $c(A)\colon L \rightsquigarrow C$, то образ морфизма копредела $\operatorname{colim} F \to A$ совпадает с образом копроизведения морфизмов $\{f(X)\colon F(X) \to A\}_{X\in L}$, если только это копроизведение существует.*

Доказательство. Для частного случая $A = \operatorname{colim} F$ копредельный морфизм $\operatorname{colim} F \to A$ равен 1_A и его образ есть $\operatorname{colim} F$, который по предложению 5.29 совпадает с суммой образов канонических морфизмов $F(X) \to \operatorname{colim} F$. Копроизведение оказывается частным случаем копредела. Наконец, ввиду предложения 5.29 образы копредела и копроизведения как морфизмов совпадают и равны сумме образов канонических морфизмов. □

5.31. Упражнения.

5.31.1. (a) Если C — точная категория с малым образующим, то каждый конечно порожденный объект категории C мал.

(b) Каждый малый проективный объект P категории C с образующим U конечно порожден относительно U, т. е. существуют целое число $n > 0$ и эпиморфизм $U^{(n)} \to P$.

5.31.2. Доказать первую и вторую теоремы Нётер об изоморфизме (1.10 и 1.12) для точных категорий.

5.31.3. (a) Пусть C — точная категория. (i) Если A/A' — копересечение семейства факторобъектов $\{A/A_i\}$, то A' — сумма семейства $\{A_i\}$. (ii) C обладает конечными суммами.

(b) Если C — точная аддитивная категория и $\{u_i\colon A_i \to A \mid i = 1, 2\}$ — копроизведение, то $A_1 \cap A_2 = 0$ и $A = A_1 + A_2$ — сумма A_1 и A_2. Обратно, если $\{u_1\colon A_i \to A \mid i = 1, 2\}$ — мономорфизмы с нулевым пересечением и суммой A, то A — их копроизведение.

5.31.4. В точной аддитивной категории последовательность

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

точна, если $gf = 0$ и существуют морфизмы $f'\colon B \to A$ и $g'\colon C \to B$, такие, что $ff' + g'g = 1_B$.

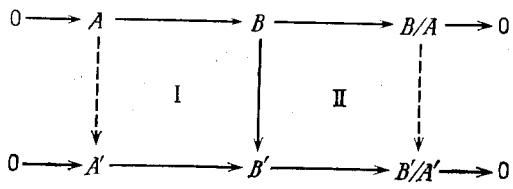
5.31.5 (Фрейд). Унивалентный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$, сохраняющий нуль, отражает точные последовательности для точных категорий C и D (см. 5.10.12).

*5.31.6. Пусть (S, T) — сопряженная пара для точных аддитивных категорий. Если функтор S точен, то T сохраняет инъективные объекты. Обратно, если область определения функтора T инъективно богата и T сохраняет инъективные объекты, то функтор S точен.

Некоторые классические леммы

Мы докажем несколько лемм для точных категорий. В частности, 3 × 3-, или 9-лемма, содержит теорему Нётер об изоморфизме.

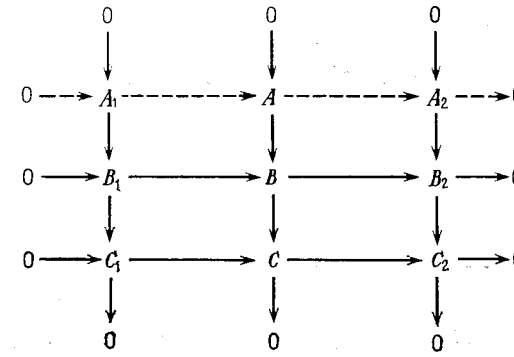
5.32. Лемма для точной категории. *В диаграмме с точными строками*



морфизм $A \to A'$, дополняющий квадрат I, *существует в том и только том случае, когда существует морфизм $B/A \to B'/A'$, дополняющий квадрат* II.

Доказательство. Пусть $B/A \to B'/A'$ дополняет квадрат II. Тогда произведение морфизмов $A \to B \to B/A \to B'/A'$ равно 0. Так как $A' \to B'$ — ядро морфизма $B' \to B'/A'$, то существует морфизм $A \to A'$, который дополняет квадрат I. Обратное утверждение дуально.

5.33. 3 × 3 = 9 лемма для точной категории. *Диаграмма*



с точными строками и столбцами может быть дополнена точной последовательностью

$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0.$$

Доказательство. Ввиду 5.32, существуют морфизмы $A_1 \to A$ и $A \to A_2$, дополняющие верхние квадраты. Так как $A_1 \to B_1 \to B$ — мономорфизм, то $A_1 \to A$ — тоже мономорфизм. Установим сначала точность последовательности

$$0 \to A_1 \to A \to B_2 \to C_2 \to 0,$$

где $A \to B_2$ определяется как произведение $A \to B \to B_2$. Отметим, что

$$(A_1 \to A \to B_2) = (A_1 \to B_1 \to B \to B_2) = 0.$$

Пусть $X \to A$ — такой морфизм, что $(X \to A \to B \to B_2) = 0$. Выберем морфизм $X \to B_1$, для которого $(X \to B_1 \to B) = (X \to A \to B)$. Тогда

$$(X \to B_1 \to C_1 \to C) = (X \to B_1 \to B \to C) = (X \to A \to B \to C) = 0.$$

Так как $C_1 \to C$ — мономорфизм, то $(X \to B_1 \to C_1) = 0$. Значит, существует морфизм $X \to A_1$, для которого $(X \to A_1 \to B_1) =$

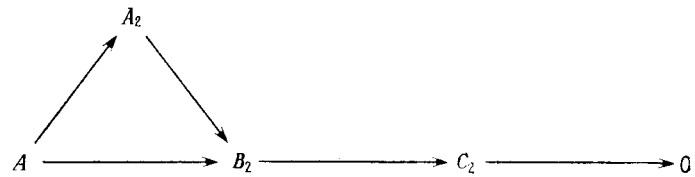
$= (X \to B_1)$. Следовательно,

$$(X \to A_1 \to A \to B) = (X \to A_1 \to B_1 \to B) =$$
$$= (X \to B_1 \to B) = (X \to A \to B).$$

Поскольку $A \to B$ — мономорфизм, отсюда вытекает, что $(X \to A_1 \to A) = (X \to A)$, т. е. $A_1 \to A$ является ядром морфизма $A \to B_2$. Таким образом, последовательность

$$0 \to A_1 \to A \to B_2$$

точна. Двойственным образом, точна и последовательность $A \to B_2 \to C_2 \to 0$. Так как $A_2 \to B_2$ — ядро морфизма $B_2 \to C_2$, который в свою очередь является коядром морфизма $A \to B_2$, то $A_2 \to B_2$ оказывается образом морфизма $A \to B_2$, т. е.



Таким образом, $\ker (A \to A_2) = \ker (A \to B_2) = \operatorname{im} (A_1 \to A)$, что доказывает точность последовательности

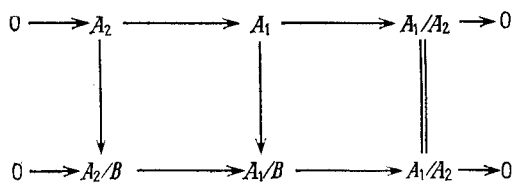
$$0 \to A_1 \to A \to A_2 \to 0. \ \square$$

Если A и B — объекты и существует фиксированный мономорфизм $B \to A$, т. е. точная последовательность

$$0 \to B \to A \to A/B \to 0,$$

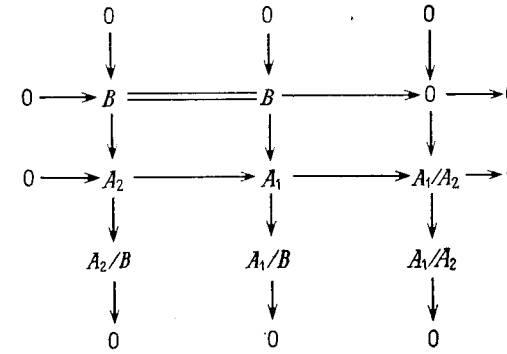
то будем писать, что $B \subseteq A$.

7.34. Первая теорема Нётер об изоморфизме для точной категории. *Пусть* $B \subseteq A_2 \subseteq A_1$. *Тогда существует диаграмма*

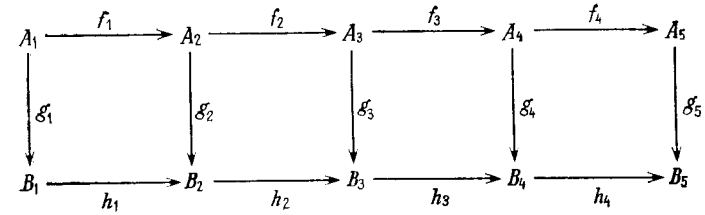


с точными строками. Следовательно, $A_2/B \subseteq A_1/B$ *и* $(A_1/B)/(A_2/B) \approx A_1/A_2$.

Доказательство. Доказательство вытекает из предложения, дуального 3 × 3-лемме, примененного к следующей диаграмме:



5.35. 5-лемма для точной категории. *Пусть диаграмма*



коммутативна и имеет точные строки. Тогда

5.35.1. *Если* g_1 *— эпиморфизм, а* g_2 *и* g_4 *— мономорфизмы, то* g_3 *— мономорфизм.*

5.35.2. *Если* g_5 *— мономорфизм, а* g_2 *и* g_4 *— эпиморфизмы, то* g_3 *— эпиморфизм.*

5.35.3. *Если* g_1 *— эпиморфизм,* g_5 *— мономорфизм, а* g_2 *и* g_4 *— эквивалентности, то* g_3 *— эквивалентность.*

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждения 5.35.1. Сначала установим его справедливость для категории mod-$\mathbb{Z}$. Пусть $a \in \ker g_3$. Тогда $0 = h_3 g_3 (a) = g_4 f_3 (a)$ и $f_3 (a) = 0$, так как g_4 — мономорфизм. Из точности строк извлекаем, что $a = f_2 (a')$ для некоторого $a' \in A_2$. Значит,

$$h_2 g_2 (a') = g_3 f_2 (a') = g_3 (a) = 0.$$

Поэтому из точности нижней строки вытекает существование $b \in B_1$, для которого $g_2 (a') = h_1 (b)$. Используя тот факт, что g_1 — эпиморфизм, имеем $b = g_1 (a'')$ для некоторого $a'' \in A_1$. Тогда

$$g_2 f_1 (a'') = h_1 g_1 (a'') = h_1 (b) = g_2 (a').$$

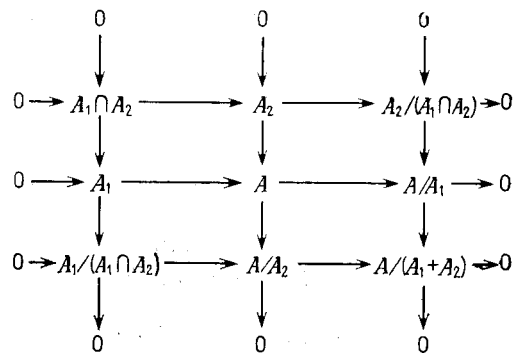
Так как g_2 — мономорфизм, то отсюда следует, что $a' = f_1(a'')$. Следовательно,

$$a = f_2(a') = f_2 f_1(a'') = 0(a'') = 0.$$

Проведем теперь доказательство для точной категории. Заменим A_1 на $\operatorname{im} f_1$ и B_1 — на $\operatorname{im} h_1$. Индуцированный морфизм $\operatorname{im} f_1 \to \operatorname{im} h_1$ является эквивалентностью. По теореме Нётер об изоморфизме морфизм $\operatorname{im} f_2 \to \operatorname{im} h_2$ оказывается мономорфизмом. Значит, можно считать, что морфизмы f_2, h_2 и g_2 являются мономорфизмами. Но тогда из того, что g_4 — мономорфизм, следует, что g_3 — мономорфизм. (Идея этого доказательства предложена Митчеллом [65, стр. 38, упр. 14].) □

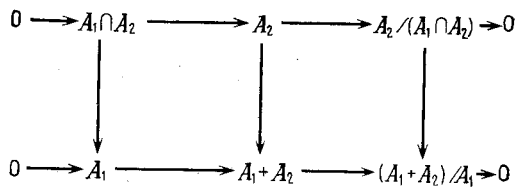
5.36. Упражнение для точной категории.

5.36.1. Если A_1 и A_2 — подобъекты объекта A, то диаграмма



коммутативна и ее строки и столбцы точны.

5.36.2. **Вторая теорема Нётер об изоморфизме.** *Если A_1 и A_2 — подобъекты объекта A в точной категории, то существует коммутативная диаграмма*



с точными строками.

Сохранение пределов

Пусть $F\colon L \rightsquigarrow C$ и $T\colon C \rightsquigarrow D$ — функторы. Говорят, что функтор T **сохраняет** $\lim F$ (или **перестановочен** с ним), если в категории D существует эквивалентность

$$t(F)\colon T(\lim_{L,C} F) \approx \lim_{L,D} TF. \tag{1}$$

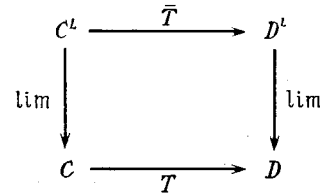
Если функтор T сохраняет $\lim F$ для каждого функтора $F\colon L \rightsquigarrow C$ и если существует естественное преобразование функторов

$$t\colon T \lim_{L,C} \to \lim_{L,D} \overline{T},$$

где функтор

$$\overline{T} \begin{cases} C^L \rightsquigarrow D^L \\ F \mapsto TF \end{cases}$$

индуцирован функтором T, то говорят, что T *сохраняет* (*малые*, *конечные*) *пределы* (*по малой*, *конечной*) *категории* L (или *перестановочен с ними*). В этом случае существует коммутативная диаграмма



т. е. $T \lim \approx \lim \overline{T}$ как функторы и для каждого $F\colon L \rightsquigarrow C$ существует эквивалентность (1), естественная по F. *Обычно термин «сохраняет пределы» применяется для функторов из малых категорий, хотя многие утверждения не нуждаются в этом ограничении.* Если T сохраняет пределы из всех (малых, конечных) категорий L, то T называют **сохраняющим (малые, конечные) пределы** или **перестановочным** с соответствующими пределами.

Абелевой категорией называют точную аддитивную категорию. Абелевы категории детально изучаются в гл. 6 и 14—16, а здесь определены лишь для того, чтобы сформулировать приведенное ниже предложение. Функтор называют **непрерывным справа (слева)**, если он сохраняет копределы (пределы).

5.37. **Предложение для абелевой категории.** *Пусть C — абелева категория с копроизведениями и образующим, D — абелева категория, а $h\colon S \to T$ — естественное преобразование непрерывных справа функторов S, $T\colon C \rightsquigarrow D$. Предположим, что сущест-*

вует образующий P категории C, такой, что морфизм $h(P)$: $S(P) \to T(P)$ является эквивалентностью категории D. Тогда h — естественная эквивалентность.

Доказательство. Ввиду 5.21 для любого $X \in \mathrm{Obj}\, C$ существует точная последовательность

$$P^{(J)} \to P^{(I)} \to X \to 0,$$

где $P^{(I)}$ — копроизведение I экземпляров объекта P. Так как S и T — точные справа функторы, то диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} S(P^{(J)}) & \longrightarrow & S(P^{(I)}) & \longrightarrow & S(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle h(P^{(J)})} & & \downarrow{\scriptstyle h(P^{(I)})} & & \downarrow{\scriptstyle h(X)} & & \\ T(P^{(J)}) & \longrightarrow & T(P^{(I)}) & \longrightarrow & T(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

имеет точные строки. Так как S и T сохраняют копроизведения, то

$$S(P^{(J)}) \approx S(P)^{(J)} \approx T(P)^{(J)} \approx T(P^{(J)}),$$

откуда следует, что $h(P^{(J)})$ и $h(P^{(I)})$ —эквивалентности. Ввиду 5-леммы $h(X)$ также является эквивалентностью для каждого X, т. е. h — естественная эквивалентность. □

5.38. Упражнение. Функтор T: $C \rightsquigarrow D$ сохраняет малые пределы тогда и только тогда, когда для каждого функтора F: $L \rightsquigarrow C$ из малой категории L и каждого семейства $\mathscr{F} = \{f(X)\colon A \to F(X)\}$, являющегося правым нулем категории compat F, объект $T\mathscr{F} = \{Tf(X)\colon TA \to TF(X)\}$ является правым нулем категории compat TF.

5.39. Следствие из предложения 5.11. *Если категория C обладает произведениями, то следующие свойства функтора T: $C \rightsquigarrow D$ эквивалентны:*

5.39.1. *Функтор T сохраняет (конечные) пределы.*

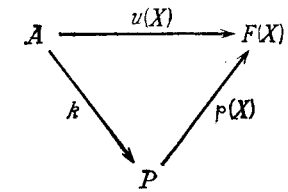
5.39.2. *T сохраняет (конечные) произведения и конечные пересечения.*

5.39.3. *T сохраняет (конечные) произведения и уравнители.*

Доказательство. 5.39.1 $\Rightarrow$ 5.39.2 и 5.39.1 $\Rightarrow$ 5.39.3, так как (конечные) произведения, (конечные) пересечения и уравнители являются примерами (конечных) пределов.

5.39.3 $\Rightarrow$ 5.39 1. Пусть F: $L \rightsquigarrow C$ — функтор из малой категории L. Предел функтора F будем рассматривать как правый нуль $\{u(X)\colon A \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ категории compat F. Введем

те же обозначения, что и в доказательстве предложения 5.11: $P = \coprod_{X \in \mathrm{Obj}\, L} F(X)$, k: $A \to P$ — уравнитель канонических морфизмов w: $P \to Q$ и $\bar{w}$: $P \to Q$, и рассмотрим коммутативную диаграмму



Тогда $\{Tu(X)\colon TA \to TF(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, L}$ является правым нулем категории compat TF, так как $TP \approx \coprod_{X \in L} TF(X)$, а морфизм Tk: $TA \to TP$ является уравнителем морфизмов Tw и $T\bar{w}$. Последние морфизмы являются каноническими морфизмами $TP \to TQ$ и определены точно так же, как морфизмы w, $\bar{w}$: $P \to Q$. Доказательство импликации 5.39.2 $\Rightarrow$ 5.39.1 проводится аналогично с учетом упражнения 5.16.8. □

5.40. Упражнение. (a) Нормальная категория (конечно) полна в том и только том случае, когда она обладает ядрами и (конечными) произведениями.

(b) Функтор T: $C \rightsquigarrow D$ из нормальной категории C, обладающей (конечными) произведениями и ядрами, сохраняет (конечные) пределы в том и только том случае, если он сохраняет (конечные) произведения и ядра.

5.41. Предложение. *Для любой категории C и любого ее объекта A функтор h^A: $C \rightsquigarrow$ SETS сохраняет пределы, а функтор h_A: $C \rightsquigarrow$ SETS превращает копределы в пределы.*

Доказательство. Пусть L — произвольная категория. Нужно установить естественную эквивалентность

$$\lim h^A \to h^A \lim$$

функторов $C^L \rightsquigarrow$ SETS или, что то же самое, найти эквивалентности

$$h(F)\colon \lim(h^A F) \approx h^A(\lim F),$$

естественные по переменной $F \in \mathrm{Obj}\, C^L$. Поскольку в силу определения предела

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(X, \lim h^A F) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}^L}(c(X), h^A F) \quad (1)$$

и

$$\mathrm{Mor}_C(A, \lim F) = \mathrm{Mor}_{CL}(c(A), F), \tag{2}$$

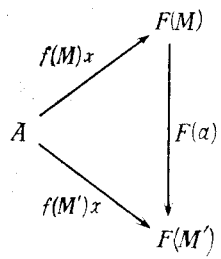
для доказательства последнего утверждения достаточно найти биективные отображения

$$T(X, F) = T\colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}^L}(c(X), h^A F) \to \\ \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}}(X, \mathrm{Mor}_{CL}(c(A), F)),$$

естественные по переменным X и F. Если $f \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}^L}(c(X), h^A F)$, то определим отображение

$$T(f)\colon X \to \mathrm{Mor}_{CL}(c(A), F),$$

положив $T(f)(x)[M] = f(M)(x)$ для любых $M \in \mathrm{Obj}\, L$ и $x \in X$. Тогда $T(f)(x)\colon c(A) \to F$ является естественным преобразованием функторов, так как для любого морфизма $a\colon M \to M'$ категории L диаграмма



коммутативна. Обратным для T является отображение, которое переводит любое отображение

$$h'\colon X \to \mathrm{Mor}_{CL}(c(A), F)$$

в элемент $h \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{SETS}^L}(c(X), h^A F)$, такой, что $h(M)x = h'(x)[M]$. □

5.42. Следствие. *Для любой категории C с нулем и любого ее объекта A функтор $h^A\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$ сохраняет произведения и уравнители, а функтор $h_A\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}$ превращает копроизведения и коуравнители в произведения и уравнители соответственно.*

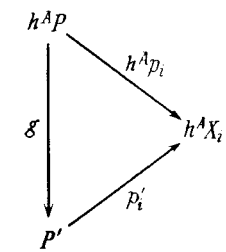
Доказательство. Это есть непосредственное следствие предложения, так как произведения и уравнители являются пределами. Поучительно, однако, дать прямое доказательство, поскольку ввиду 5.39 это даст другое (и более простое) доказательство предложения 5.41.

Пусть сначала $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ — морфизмы категории C и $k\colon K \to X$ — их уравнитель. Вследствие 2.4 отображение $h^A(k)\colon h^A(K) \to h^A(X)$ является мономорфизмом и, значит, вложением. Уравнителем отображений $h^A(f)$ и $h^A(g)$ является подмножество

$$\{t \in h^A(X) \mid h^A(f)(t) = ft = gt = h^A(g)(t)\}.$$

Для любого такого t существует единственный морфизм $t'\colon A \to K$, удовлетворяющий соотношению $kt' = t$, поскольку k — уравнитель пары (f, g). Таким образом, $t = h^A(k)\, t'$ лежит в образе отображения $h^A(k)$, так что $h^A(k)$ оказывается уравнителем пары $(h^A f, h^A g)$. Для h_A рассуждаем двойственным образом.

Пусть теперь $\{p_i\colon P \to X_i\}_{i \in I}$ — произведение в категории C, $\{p_i'\colon P' \to h^A X_i\}_{i \in I}$ — произведение в категории множеств и $g\colon h^A P \to P'$ — канонический морфизм, обеспечивающий коммутативность диаграммы



Так как p_i — эпиморфизм, то $h^A p_i$ — наложение, вследствие 2.4. Поэтому для любого $y \in P'$ существует $y_0 \in h^A P$, такой, что $h^A p_i(y_0) = p_i'(y)$ для каждого $i \in I$. Но тогда $g(y_0) = y$. Таким образом, g — эпиморфизм. Если $g(a) = g(b)$, то

$$h^A p_i(a) = p_i a = p_i b = h^A p_i(b)$$

для любого $i \in I$, т. е. $a = b$. Этим доказано, что g — эквивалентность. Следовательно, h^A сохраняет произведения. Двойственным образом доказывается утверждение для h_A. □

Следующее предложение показывает, что не каждый функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$ может быть сопряженным слева для какого-либо функтора (ср. 5.55 и 5.56).

5.43. Предложение. *Пусть (S, T) — сопряженная пара. Тогда*

5.43.1. *Функтор S сохраняет копределы, и в частности копроизведения, коядра, коуравнители и левые нули.*

5.43.2. *Функтор T сохраняет пределы, и в частности произведения, ядра, уравнители, правые нули и пересечения.*

Доказательство. Если L— любая категория и $F\colon L \rightsquigarrow C$ — функтор, то ввиду 5.41 для любого объекта X категории D справедливы равенства

$$h^X(T \lim F) = h^{SX}(\lim F) = \lim h^{SX}F$$
$$= \lim h^X TF = h^X(\lim TF),$$

из которых в силу 2.3.3 следует существование эквивалентностей

$$t(F)\colon T \lim F \approx \lim TF,$$

естественных по F. Таким образом, существует эквивалентность функторов $T \lim \approx \lim T$. □

Функтор называется **монофунктором (эпифунктором)**, если он сохраняет мономорфизмы (эпиморфизмы).

5.44. Следствие. *Если (S, T) — сопряженная пара, то функтор S непрерывен справа, а T является монофунктором, сохраняющим пределы.*

Доказательство. Сохранение (ко)пределов установлено в предложении 5.43. Если f — мономорфизм категории C, то $h^{SX}f$ — мономорфизм категории D для любого объекта X категории D. Из эквивалентности функторов $h^X T \approx h^{SX}$ следует, что $h^X Tf$ — мономорфизм в категории множеств для всех $X \in \mathrm{Obj}\, D$, откуда вытекает, что Tf — мономорфизм в категории D (см. 2.4). □

5.45. Следствие. *Если C — полная категория, то для каждой малой категории L функтор предела $\lim\colon C^L \rightsquigarrow C$ является сохраняющим пределы монофунктором, а постоянный функтор $c\colon C \rightsquigarrow C^L$ сохраняет копределы.*

Доказательство. Предельный функтор сопряжен слева к постоянному функтору $C \rightsquigarrow C^L$. □

Сопряженные к представимым функторам

Следующее предложение принадлежит Габриэлю [62].

5.46. Предложение. *Пусть C — абелева категория. Для любого объекта U положим $A = \mathrm{End}_C U$, и пусть*

$$h^U\colon C \rightsquigarrow \text{mod-}A$$

— функтор, индуцированный основным функтором. Тогда функтор h^U обладает сопряженным слева функтором S в том и только том случае, когда для любого множества индексов I в категории C существует копроизведение $U^{(I)}$.

Доказательство. Достаточность. Для произвольного объекта M категории mod-A напишем точную последовательность

$$A^{(J)} \xrightarrow{f} A^{(I)} \xrightarrow{g} M \to 0, \tag{1}$$

где I и J — некоторые множества. Тогда для любого объекта U категории C имеем

$$h^{A^{(I)}}h^U \approx (h^A h^U)^I \approx (h^U)^I \approx h^{U^{(I)}}. \tag{2}$$

Здесь первая и третья эквивалентности имеют место, поскольку основной контравариантный функтор h_Y со значениями в категории множеств при любом $Y \in \mathrm{Obj}$ mod-A превращает копроизведения в произведения, а средняя эквивалентность вытекает из канонической эквивалентности $h^A \approx 1_{\text{mod-}A}$. Морфизм $f\colon A^{(J)} \to A^{(I)}$ индуцирует канонический морфизм функторов

$$h^{A^{(I)}} \to h^{A^{(J)}}. \tag{3}$$

Учитывая (2) и аналогичную эквивалентность

$$h^{A^{(J)}}h^U \approx h^{U^{(J)}}, \tag{2'}$$

получаем морфизм функторов

$$h^{U^{(I)}} \to h^{U^{(J)}}. \tag{4}$$

Но ввиду предложения 2.3 естественное преобразование (4) индуцируется некоторым морфизмом

$$t_M\colon U^{(J)} \to U^{(I)}. \tag{5}$$

Тогда функтор

$$S\begin{cases} \text{mod-}A \rightsquigarrow C \\ M \mapsto \operatorname{coker} t_M = SM \end{cases}^{1}) \tag{6}$$

оказывается сопряженным слева к функтору h^U. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим диаграмму

(7)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & h^M h^U & \to & h^{A^{(I)}}h^U \to h^{A^{(J)}}h^U \\ & & \downarrow & & \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 0 & \to & h^{SM} & \to & h^{U^{(I)}} \to h^{U^{(J)}} \end{array}$$

[1]) Заметим, что coker t_M не зависит от выбора морфизмов f и g в точной последовательности (1), так что S — действительно функтор.— *Прим. перев.*

Точность верхней строки в категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ вытекает из точности последовательности (1). (Здесь, например, $h^M h^U$ означает произведение функтора h^U и функтора h^M: mod-$A \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ со значениями в категории абелевых групп.) Точность нижней строки вытекает из (5) и того факта, что $SM = \operatorname{coker} t_M$. Правые вертикальные эквивалентности функторов определены формулами (2) и (2′). Применяя леммы 5.32 и 5.35, получаем вертикальную эквивалентность

$$h^M h^U \approx h^{SM}, \tag{8}$$

обеспечивающую коммутативность диаграммы (7). Этим доказано, что функтор S сопряжен слева к функтору h^U. (Ср. 5.4.)

Необходимость. Если функтор S сопряжен слева к функтору h^U, то существует естественная эквивалентность функторов $h^A h^U \approx h^{SA}$ со значениями в категории множеств. Тогда, поскольку $h^A \approx 1_{\text{mod-}A}$, имеем эквивалентность $h^U \approx h^{SA}$ и, значит, $U \approx SA$. Так как ввиду 5.43 любой сопряженный слева функтор сохраняет копроизведения, то

$$S(A^{(I)}) \approx (SA)^{(I)} \approx U^{(I)}$$

для любого множества индексов I. □

Категория C называется *аддитивной с конечными произведениями или без них*, если она удовлетворяет (Ad 1) и (Ad 2) (стр. 195).

5.47. Предложение. *Если (h, S, T, C, D) — ситуация сопряжения для аддитивных категорий C и D с конечными произведениями или без них, то следующие условия эквивалентны:*

5.47.1. *Функтор T: $C \rightsquigarrow D$ аддитивен.*

5.47.2. *Функтор S: $D \rightsquigarrow C$ аддитивен.*

5.47.3. *Биекции сопряжения*

$$h(B, A)\colon \operatorname{Mor}_C(SB, A) \to \operatorname{Mor}_D(B, TA)$$

являются изоморфизмами категории mod-$\mathbb{Z}$ *для всех $A \in \operatorname{Obj} C$, $B \in \operatorname{Obj} D$.*

Если одно (а значит, и все) из перечисленных условий выполнено, то $h(\ ,\ )$ является естественной эквивалентностью индуцированных бифункторов со значениями в категории групп

$$\operatorname{Mor}_C(S(\ ),\ )\colon D^{\mathrm{op}} \times C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z},$$
$$\operatorname{Mor}_D(\ , T(\ ))\colon D^{\mathrm{op}} \times C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Морфизм

$$h_B = h(B, SB)(1_{SB})\colon B \to TSB,$$

определенный для любого объекта $B \in \operatorname{Obj} D$, удовлетворяет условию

$$h(a) = T(a)\, h_B,$$

где $h = h(B, A)$, а a: $SB \to A$ — морфизм в категории C. Поэтому если функтор T аддитивен, то

$$h(a + a') = T(a + a')\, h_B = (Ta + Ta')\, h_B = \\ = T(a)\, h_B + T(a')\, h_B = h(a) + h(a'),$$

где a': $SB \to A$. Этим доказана импликация 5.47.1 $\Rightarrow$ 5.47.3. Импликация 5.47.3 $\Rightarrow$ 5.47.1 доказывается аналогично, если использовать морфизм

$$g_A = h^{-1}(TA, A)(1_{TA})$$

и соотношение $bg_A = h^{-1}(TB)$ для произвольного морфизма b: $A \to A'$ категории C. Эквивалентность условий 5.47.2 и 5.47.3 получается по двойственности. □

5.48. Следствие. *Если T: $C \rightsquigarrow D$ — функтор из аддитивной категории C в аддитивную категорию D и если T имеет сопряженный слева или справа функтор S, то функторы T и S аддитивны.*

Доказательство. Если функтор T имеет сопряженный слева функтор S, то по 5.43 T сохраняет пределы, в частности произведения, после чего из 3.38 следует, что функтор T аддитивен. Аддитивность функтора S вытекает теперь из предложения 5.47. Второе утверждение получается двойственным образом.

5.49. Предложение и определение. *Множество $\{C_i\}_{i \in I}$ объектов категории C называется* ***прединициальным или левым псевдонулем****, если для каждого объекта X категории C существуют $i \in I$ и морфизм $C_i \to X$. Если C — полная категория, то предел любого прединициального множества, рассматриваемого как направленное множество* [1]*, является левым нулем категории C.*

Доказательство. Пусть A является пределом описанного выше функтора, и $\{p_i\colon A \to C_i\}_{i \in I}$ — семейство канонических морфизмов. Прежде всего, ясно, что $\{A\}$ — прединициальное множество. Пусть, далее, f и g — морфизмы из $\operatorname{Mor}_C(A, B)$ и $K \xrightarrow{k} A$ — их уравнитель. По условию найдется $i \in I$ и h: $C_i \to K$, а значит,

$$p_j khp_i = p_j$$

для всех j. Отсюда $khp_i = 1_A$, следовательно,

$$f = fkhp_i = gkhp_i = g. \quad \square$$

[1]) Точнее, имеется в виду предел функтора включения в категорию C полной подкатегории, порожденной семейством $\{C_i\}_{i \in I}$. — *Прим. перев.*

Теоремы существования для сопряженных функторов

Следующая теорема принадлежит Фрейду (ср. 5.51).

5.50. Общая теорема о сопряженном функторе. *Если C — полная категория, то ковариантный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ обладает сопряженным слева в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:*

5.50.1. *Функтор T сохраняет пределы.*

5.50.2. *Для каждого объекта Y категории D комма-категория (Y, T), определенная в* 5.2, *обладает прединициальным множеством.*

Доказательство. Вследствие предложения 5.43 любой функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$, обладающий сопряженным слева, сохраняет пределы, а ввиду 5.2 комма-категория (Y, T) имеет левый нуль.

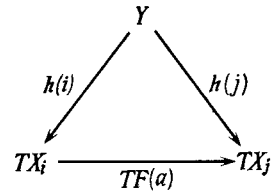
Для доказательства обратного утверждения достаточно убедиться в том, что каждая комма-категория (Y, T) полна, так как тогда в силу предыдущего предложения она имеет левый нуль и из предложения 5.2 вытекает, что функтор T обладает сопряженным слева. Определим функтор P следующим образом:

$$P\begin{cases}(Y, T) \rightsquigarrow C\\ (f, X) \mapsto X \text{ (на объектах)}\\ t \mapsto t \text{ (на морфизмах).}\end{cases}$$

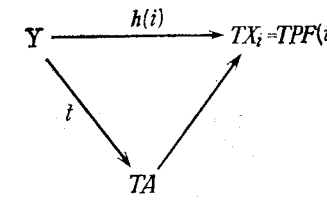
Если теперь $F\colon L \rightsquigarrow (Y, T)$ — произвольный функтор из малой категории L, то, ввиду полноты категории C, существует $\lim PF = A$. Тогда $TA = \lim TPF$, так как функтор T сохраняет пределы. Покажем, что семейство $\{h(i)\colon Y \to TX_i\}_{i\in L}$, такое, что $F(i) = (h(i), X_i)$, является элементом категории compat TPF. Действительно, если $a\colon i \to j$ — произвольный морфизм категории L, то

$$F(a)\colon (h(i), X_i) \to (h(j), X_j)$$

— морфизм категории (Y, T), т. е. $F(a)\colon X_i \to X_j$ — такой морфизм категории C, что диаграмма



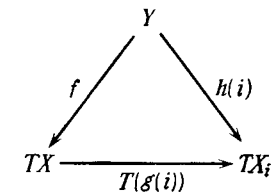
коммутативна. Поскольку $TX_i = TPF(i)$ и $TF(a) = TPF(a)$, то наше утверждение установлено. Тогда поскольку $TA = \lim TPF$, то существует единственный морфизм $t\colon Y \to TA$ категории D, такой, что диаграмма



где $TA \to TX_i$ — естественный морфизм, коммутативна. Покажем, что $(t, A) = \lim F$. Пусть

$$\{g(i)\colon (f, X) \to (h(i), X_i)\}_{i\in L}$$

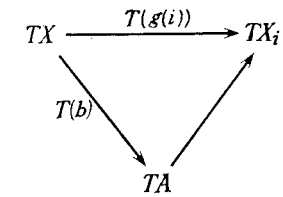
— элемент категории compat F. Тогда диаграмма



коммутативна. Следовательно,

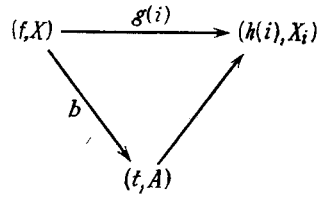
$$\{T(g(i))\colon TX \to TX_i\}_{i\in L}$$

является элементом категории compat TPF. Значит, существует единственный морфизм $b\colon X \to A$, такой, что диаграмма



коммутативна для любого $i \in L$. Таким образом, $b\colon (f, X) \rightsquigarrow (t, A)$ — единственный морфизм комма-категории (Y, T), такой, что диа-

грамма

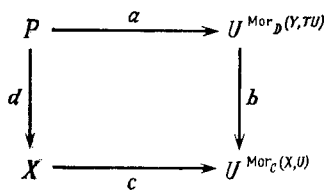


где $(t, A) \to (h(i), X_i)$ — канонический морфизм, коммутативна. Но это и означает, что $(t, A) = \lim F$. □

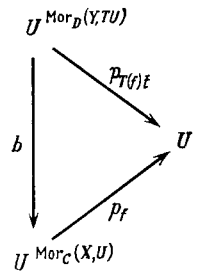
5.51. Специальная теорема о сопряженном функторе (Фрейд [60]). *Если C — полная локально малая категория с кообразующим U, то функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ обладает сопряженным слева в том и только том случае, когда он сохраняет пределы.*

Доказательство. Ввиду предложения 5.50 достаточно показать, что для каждого объекта Y категории D комма-категория (Y, T) обладает прединициальным множеством. Если (t, X) — объект категории (Y, T), то из полноты категории C вытекает существование декартова квадрата

(1)

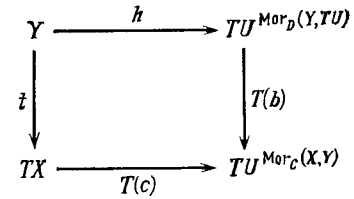


где c — канонический морфизм, а b — тот единственный морфизм, для которого при любом морфизме $f\colon X \to U$ категории C диаграмма

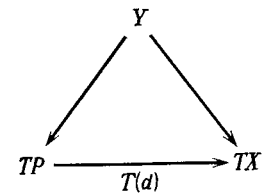


коммутативна (p — каноническая проекция). Так как U — кообразующий, то c — мономорфизм вследствие утверждения, дуального к предложению 3.25. Тогда из упр. 5.10.2 следует, что и a —

мономорфизм. Определим $h\colon Y \to TU^{\mathrm{Mor}_D(Y,TU)}$ условием $p_g h = f$ для любого $g\colon Y \to TU$. Тогда диаграмма



коммутативна. Так как функтор T сохраняет пределы, то применение функтора T к декартову квадрату (1) дает декартов квадрат. Следовательно, существует канонический морфизм $Y \to TP$, такой, что диаграмма



коммутативна. Таким образом, категория (Y, T) обладает прединициальным множеством, мощность которого не превосходит числа подобъектов объекта $U^{\mathrm{Mor}_D(Y,TU)}$. □

5.52. Следствие. *Если D — колокально малая кополная категория с образующим, то функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$ обладает сопряженным справа функтором в том и только том случае, когда он сохраняет копределы.*

Доказательство. Если S обладает сопряженным справа функтором, то, ввиду 5.43, он сохраняет копределы. Предположим, что S сохраняет копределы. Тогда произведение функторов

$$S^*_*\colon D^* \rightsquigarrow D \overset{S}{\rightsquigarrow} C \rightsquigarrow C^*,$$

где первый и третий из функторов — канонические, является функтором $D^* \rightsquigarrow C^*$, сохраняющим пределы. Следовательно, функтор S^*_* имеет сопряженный слева функтор H. Эквивалентности сопряжения

$$\mathrm{Mor}_{D^*}(HX^*, Y^*) \approx \mathrm{Mor}_{C^*}(X^*, S^*_* Y^*)$$

влекут за собой существование эквивалентностей

$$\mathrm{Mor}_D(Y, H^*X) \approx \mathrm{Mor}_C(SY, X).$$

Но это и означает, что функтор H^* сопряжен справа к функтору S. □

5.53. Следствие. *Полная локально малая категория C с кообразующим кополна.*

Доказательство. Для любой категории C постоянный функтор c: $C \rightsquigarrow C^L$ сохраняет пределы. Это следует из того, что если F: $L \rightsquigarrow C$ — функтор и A — правый нуль категории compat F, то $c(A)$ — правый нуль категории compat cF. Ввиду следствия 5.52, функтор c: $C \rightsquigarrow C^L$ обладает сопряженным слева функтором colim: $C^L \rightsquigarrow C$, т. е. категория C кополна. □

Сопряженные к функторам со значениями в категории модулей

Приведем теперь некоторые применения изложенной теории к категориям модульного типа.

5.54. Следствие. *Пусть R — кольцо, а C — категория. Тогда функтор F: mod-$R \rightsquigarrow C$ обладает сопряженным справа в том и только том случае, когда он непрерывен справа (сохраняет копределы).*

Доказательство. Категория $D = \text{mod-}R$ удовлетворяет условиям следствия 5.52, ввиду упр. 5.27.4. □

5.55. Предложение. *Если R — кольцо, а C — аддитивная категория, то функтор T: $C \rightsquigarrow$ mod-R, обладающий сопряженным слева, представим, т. е. $T \approx h^A$ для некоторого $A \in \text{Obj } C$.*

Доказательство. Если функтор S: mod-$R \rightsquigarrow C$ сопряжен слева к функтору T, то для $A = SR \in \text{Obj } C$ и любого $X \in \text{Obj } C$ имеем

$$h^A X = \text{Mor}_C(SR, X) \approx \text{Hom}_R(R, TX) \approx TX.$$

Тот факт, что эквивалентность сопряжения является изоморфизмом R-модулей, вытекает из ее естественности. □

Следующие два результата представляют собой теоремы Уотса [60], обобщенные Митчеллом [65, стр. 142].

5.56. Предложение. *Пусть C — полная локально малая аддитивная категория с кообразующим, R — кольцо и T: $C \rightsquigarrow$ mod-R — ковариантный функтор. Тогда следующие свойства функтора T эквивалентны:*

5.56.1. *T сохраняет копределы.*

5.56.2. *T обладает сопряженным слева функтором S: mod-$R \rightsquigarrow C$.*

5.56.3. *T представим, т. е. $T \approx h^A$ для некоторого $A \in \text{Obj } C$.*

Доказательство. 5.56.1 $\Rightarrow$ 5.56.2 ввиду 5.52; 5.56.2 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 5.56.3 ввиду 5.55; 5.56.3 $\Rightarrow$ 5.56.1 ввиду 5.42.

5.57. Следствие. *Если C — кополная колокально малая аддитивная категория с образующим, а R — кольцо, то контравариантный функтор T: $C \rightsquigarrow$ mod-R превращает копределы в пределы в том и только том случае, когда он представим, т. е. $T \approx h_A$ для некоторого $A \in \text{Obj } C$.*

Доказательство. Любой представимый функтор h_A превращает копределы в пределы ввиду предложения 5.41. Обратно, произведение

$$T'\colon C^* \rightsquigarrow C \overset{T}{\rightsquigarrow} \text{mod-}R$$

является ковариантным функтором, а категория C^* удовлетворяет условиям предыдущего предложения. Следовательно, функтор T' представим, т. е. $T' \approx h^{A^*}$. Но тогда $T \approx h_A$. □

5.58. Предложение.

5.58.1. *Пусть C и D — точные категории.*

Тогда функтор T: $C \rightsquigarrow D$ точен слева (справа) в том и только том случае, когда он сохраняет ядра (коядра). В частности, функтор, обладающий сопряженным слева, точен слева, а сопряженный к нему функтор точен справа.

5.58.2. *Для любого объекта A точной аддитивной категории C функторы h^A и h_A со значениями в категории абелевых групп точны слева.*

5.58.3. *Если C — полная локально малая аддитивная категория с кообразующим, то для любого объекта A функтор*

$$h^A : C \rightsquigarrow \text{mod-}B,$$

где $B = \text{End}_C A$, точен слева и имеет точный справа сопряженный слева функтор.

Доказательство. В точной категории C морфизм f: $A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда последовательность $0 \to A \overset{f}{\longrightarrow} B$ точна. Таким образом, функтор T точен слева, если он сохраняет ядра. Обратно, если T — точный слева функтор, а k: $K \to A$ — ядро морфизма f: $A \to B$, то из точности последовательности $0 \to K \to A \to B$ вытекает точность последовательности $0 \to TK \to TA \to TB$. Следовательно, $\text{im } Tk = \ker Tf$, т. е. T сохраняет ядра. Если T имеет сопряженный слева, то в силу предложения 5.43 он сохраняет пределы, в частности ядра, и, значит, точен слева, ввиду 5.26. Аналогично, функтор h^A в силу 5.42 и 5.41 сохраняет пределы, в частности ядра, и, значит, точен слева. Это доказывает 5.58.2, а 5.58.3 следует из 5.56. □

Функтор тензорного умножения

Если U — (B, A)-бимодуль, то вследствие 5.46 (а также 5.56) функтор

$$h^U : \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B,$$

индуцированный функтором h^U со значениями в категории множеств, имеет сопряженный слева функтор

$$\underset{B}{\otimes} U\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A,$$

т. е. существует функтор $\underset{B}{\otimes} U$, такой, что для любых объекта X категории mod-B и объекта Y категории mod-B определены изоморфизмы

$$h(X, Y)\colon \mathrm{Hom}_A(X \underset{B}{\otimes} U, Y) \approx \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A(U, Y)),$$

естественные по X и Y. (См. также теорему 11.4.)

Поскольку любой модуль естественно является $\mathbb{Z}$-модулем, то каждый объект X категории mod-A и каждый объект Y категории A-mod определяют функторы

$$X \underset{A}{\otimes}\colon A\text{-mod} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z},$$

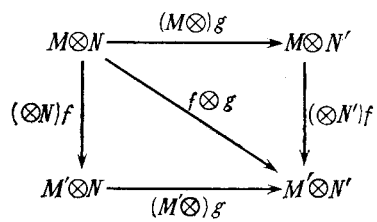
$$\underset{A}{\otimes} Y\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$$

со значениями в категории абелевых групп, которые определяют бифунктор

$$(\ ) \underset{A}{\otimes} (\ ) \begin{cases} \text{mod-}A \times A\text{-mod} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ (M, N) \mapsto M \underset{A}{\otimes} N \quad \text{(на объектах)} \\ (f, g) \mapsto f \otimes g \quad \text{(на морфизмах).} \end{cases}$$

Для данных морфизмов $f\colon M \to M'$ категории mod-A и $g\colon N \to N'$ категории A-mod через $f \otimes g\colon M \underset{A}{\otimes} N \to M' \underset{A}{\otimes} N'$ обозначен единственный морфизм, такой, что диаграмма

(1)

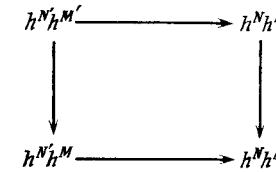


коммутативна. (Индекс A в символе $\underset{A}{\otimes}$ для простоты опущен.) Из диаграммы (1) следует, что если $f'\colon M' \to M''$ и $g'\colon N' \to N''$ — морфизмы категорий mod-A и A-mod соответственно, то

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g.$$

Коммутативность диаграммы (1) может быть получена как следствие коммутативности диаграммы

(2)

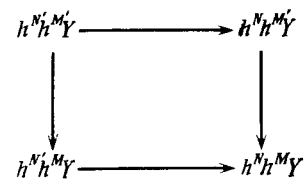


Ввиду предложения 2.3 Йонеды существует биективное отображение

$$[h^{M'}, h^M] = \mathrm{Hom}_A(M, M') \tag{3}$$

из множества $[h^{M'}, h^M]$ естественных преобразований функторов $h^{M'} \to h^M$ в множество морфизмов $M \to M'$, естественное по M и M'. Таким образом, морфизму $f\colon M \to M'$ соответствует естественное преобразование $h^M \to h^M$, а морфизму $g\colon N \to N'$ — естественное преобразование $h^{N'} \to h^N$, такое, что диаграмма (2) коммутативна. Таким образом, для каждого объекта Y категории mod-A оказывается коммутативной диаграмма

(4)



Но ввиду биекций сопряжения

$$h^M h^N Y = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, Y)) \approx \mathrm{Hom}_A(M \underset{A}{\otimes} N, Y),$$

т. е. диаграмма (4) является результатом применения функтора h^Y к диаграмме (1) для произвольного объекта Y категории mod-A. В частности, для любого кообразующего объекта Y категории mod-A функтор h^Y унивалентен, и, значит, коммутативность диаграммы (4) влечет за собой коммутативность диаграммы (1).

Если R — кольцо и M — объект категории mod-R, то, поскольку функтор $\underset{R}{\otimes} R$ сопряжен слева к функтору $h^R \approx 1_{\text{Mod-}R}$,

существует канонический изоморфизм $M \underset{R}{\otimes} R \to M$. Тогда если A — произвольный левый идеал кольца R, то образ канонического гомоморфизма

$$M \underset{R}{\otimes} A \to M \underset{R}{\otimes} R \to M$$

равен MA, т. е. существует каноническая точная последовательность $M \underset{R}{\otimes} A \to MA \to 0$. Модуль M называется **плоским** в категории mod-R, если функтор $M \underset{R}{\otimes} : R\text{-mod} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$ является точным. В этом случае поскольку для каждого левого идеала A кольца R существует точная последовательность $0 \to A \to R$, то существует каноническая точная последовательность

$$0 \to M \underset{R}{\otimes} A \to MA \to 0,$$

т. е. $M \underset{R}{\otimes} A \approx MA$ естественным образом.

55.9. Упражнение.

5.59.1. Показать, что объект M является плоским в категории mod-R в том и только том случае, когда для любого конечно порожденного левого идеала кольца R существует канонический изоморфизм $M \underset{R}{\otimes} A \approx MA$.

5.59.2. Показать, что любой проективный объект категории mod-R является плоским.

5.59.3. Доказать все предложения гл. 11.

5.59.4. Показать, что если $f\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, то функтор

$$\text{mod-}f\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A$$

имеет сопряженный слева функтор

$$\underset{A}{\otimes} B\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$$

и сопряженный справа функтор $\mathrm{Hom}_A(B, \ )$. Иными словами, если $T = \text{mod-}f$, то существуют естественные эквивалентности

$$\mathrm{Hom}_B(M \underset{A}{\otimes} B, N) \approx \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(B, N)) \approx \mathrm{Hom}_A(M, TN)$$

и

$$\mathrm{Hom}_A(TM, N') \approx \mathrm{Hom}_A(M, N') \approx \mathrm{Hom}_A(M \underset{B}{\otimes} B, N') \approx$$

$$\approx \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(B, N'))$$

для любых объектов M, N категории mod-B и объекта N' категории mod-A.

5.59.5. Если (B, A)-бимодуль U является плоским B-модулем, то функтор $\underset{B}{\otimes} U$: mod-$B \rightsquigarrow$ mod-A точен. Установить это для случая, когда U — образующий категории mod-A, а $B = \mathrm{End}\, U_A$.

5.59.6. Пусть U — образующий категории mod-A, а $B = \mathrm{End}\, U_A$. Показать, что произведение функтора h^U: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B на его сопряженный слева равно тождественному функтору $1_{\text{mod-}A}$, т. е. что для всех объектов X категории mod-A существуют естественные изоморфизмы

$$X \approx \mathrm{Hom}_A(U, X) \underset{B}{\otimes} U.$$

*5.59.7. Прямой предел плоских модулей является плоским модулем.

*5.59.8. Модуль является плоским в том и только том случае, когда он есть прямой предел проективных модулей.

*5.59.9. Прямой предел проективных модулей не обязан быть проективным.

По поводу значения следующего результата обратитесь к Ламбеку [64a].

5.60. Теорема (Бурбаки — Ламбек). *Левый R-модуль M является плоским в том и только том случае, когда его модуль характеров $M' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ инъективен в категории* mod-R.

Доказательство. Идею доказательства дает упр. 3.51.3 (другой путь доказательства см. в 6.28). □

5.61. Следствие. *Любой проективный объект категории R-mod является плоским.*

Доказательство. Если P — проективный объект категории R-mod, то модуль характеров $P' = h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(P)$ инъективен в категории mod-R (см. 3.51, 6.28 и 11.35), а тогда по теореме 5.60 модуль P является плоским. □

Из доказательства теоремы вытекает такое

5.62. Следствие. *В ситуации ${}_RA_S$, B_S, где ${}_RA$ — плоский, а B_S — инъективный модули, правый R-модуль $\mathrm{Hom}_S(A, B)$ является инъективным модулем.*

Кольцо R называется **самоинъективным** (справа), если модуль R_R инъективен в категории mod-R.

5.63. Следствие. *Если инъективный S-модуль A является образующим категории* mod-S, *то кольцо* End-A_S *самоинъективно справа.*

Доказательство. Пусть $R = \operatorname{End} A_S$. Так как модуль A_S является образующим, то A — конечно порожденный проективный R-модуль. Значит, A — плоский R-модуль. Теперь остается только применить следствие 5.62 для случая $B = A$. □

5.64.

5.64.1. Пример. Пусть S — самоинъективное справа кольцо, а A — произвольный инъективный свободный модуль. (Если кольцо A нётерово справа, то прямая сумма инъективных модулей инъективна, значит, каждый свободный S-модуль в этом случае инъективен.) Тогда кольцо $\operatorname{End} A_S$ самоинъективно справа. Это включает случай, когда S — поле, а A — любое правое векторное пространство. Таким образом, любое кольцо всех линейных преобразований правого векторного пространства самоинъективно справа.

5.64.2. Категория самоинъективных справа колец обладает прямыми произведениями (Доказательство?)

5.65. Упражнения.

5.65.1. Если A — кольцо, а M — объект категории mod-A, то

$$\operatorname{sing} M = \{m \in M \mid \operatorname{ann}_A m \text{ — существенный правый идеал}\}$$

есть вполне инвариантный A - подмодуль модуля M, называемый **сингулярным подмодулем.**

(a) Если $M \triangle N$, то $\operatorname{sing} M = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{sing} N = 0$.

(b) $\operatorname{sing} A$ — идеал, называемый **правым сингулярным идеалом.**

(c) Если $\operatorname{sing} A = 0$, то инъективная оболочка $\hat{A}$ правого A-модуля A является (S, A)-бимодулем, где $S = \operatorname{End} \hat{A}_A$, канонически изоморфным каноническому (S, A)-бимодулю S. (Канонический правый A-модуль S определяется отображением $A \to S$, переводящим $a \in A$ в единственный элемент $a' \in S$, индуцирующий на кольце A левое умножение a_s на элемент a).

(d) Канонический изоморфизм (S, A)-бимодулей $h\colon S \to \hat{A}$ из п. (c) превращает $\hat{A}$ в кольцо, такое, что $h(s)\,h(t) = h(st)$ для любых $s, t \in S$, т. е. кольцо $\hat{A}$ канонически изоморфно кольцу S.

(e) Кольцо $S \approx \hat{A}$ самоинъективно справа, т. е. модуль S инъективен в mod-S.

(f) Если A — первичное кольцо с однородным правым идеалом U и $\operatorname{sing} A = 0$, то кольцо $B = \operatorname{End} U_A$ является правой областью Ope с правым телом частных D, причем кольцо $\hat{A}$ изоморфно кольцу всех линейных преобразований левого векторного пространства V над телом D. При этом канонический правый $\hat{A}$-модуль V изоморфен простому (минимальному) правому идеалу W кольца $\hat{A}$, такому, что $W \cap A = U'$ — однородный правый идеал кольца A, а $W = D \cdot U'$, т. е. порождается множеством U' как левое векторное пространство над D.

(g) Если A — первичное кольцо с условием максимальности для дополнительных правых идеалов (см. 9.14.1) и правых аннуляторных идеалов, то A содержит однородный правый идеал U, такой, что векторное пространство W п. (f) конечномерно. При этом $\hat{A}$ является классическим правым кольцом частных кольца A в том смысле, что каждый регулярный элемент $x \in A$ обратим в $\hat{A}$ (здесь A считается канонически вложенным в $\hat{A}$) и

$$\hat{A} = \{ax^{-1} \mid a \in A,\ x \text{ — регулярен в } A\}.$$

(Ср. гл. 9 и 15.)

5.65.2. Первичное кольцо A с нулевым сингулярным идеалом $\operatorname{sing} A$ содержит однородный правый идеал U, являющийся образующим категории mod-A, в том и только том случае, когда A изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного левого модуля V над правой областью Ope K. В этом случае $\operatorname{Biend}_K V$ и $\operatorname{End} U_A$ оказываются правыми областями Ope. (Ср. 4.22А.)

5.65.3. Доказать утверждение, обратное 5.63. Если A — образующий категории mod-S и кольцо $\operatorname{End} A_S$ самоинъективно справа, то A (и S) инъективны в категории мод-S.

Эластичные билинейные гомоморфизмы

Если G — абелева группа, то отображение

$$h \begin{cases} (X, Y) \to G \\ (x, y) \mapsto h(x, y) \end{cases}$$

называется биаддитивным (билинейным), если отображения

$$h_x \begin{cases} Y \to G \\ y \mapsto h(x, y) \end{cases}$$

и

$$h_y \begin{cases} X \to G \\ x \mapsto h(x, y) \end{cases}$$

являются гомоморфизмами групп для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Если X — правый, а Y — левый модуль над кольцом A, то мы будем говорить, что отображение h **эластично,** если

$$h(xa, y) = h(x, ay)$$

для всех $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$. Отображение h называется **сбалансированным**, если оно одновременно биаддитивно и эластично. Обозначим через $\mathrm{bal}\,(X, Y)$ подгруппу свободной абелевой группы $F\,(X, Y)$ над множеством (X, Y), порожденную множеством всех элементов

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),$$
$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),$$
$$(xa, y) - (x, ay),$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$. Тогда произведение

$$t\,(X, Y)\colon (X, Y) \to F\,(X, Y) \to F\,(X, Y)/\mathrm{bal}\,(X, Y)$$

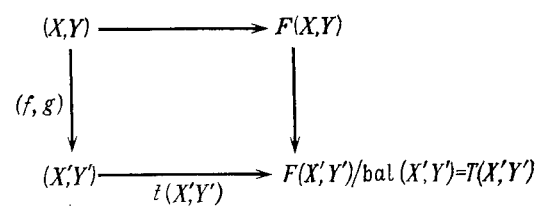
включения и канонического гомоморфизма сбалансировано. Кроме того, существует бифунктор

$$T \begin{cases} \text{mod-}A \times A\text{-mod} \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z} \\ (X, Y) \mapsto F\,(X, Y)/\mathrm{bal}\,(X, Y) = T\,(X, Y). \end{cases}$$

Если $(f, g)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ — морфизм, то, поскольку $F\,(X, Y)$ — свободная группа, единственный морфизм

$$F\,(X, Y) \to T\,(X', Y'),$$

такой, что диаграмма



где верхнее отображение — включение, коммутативна, индуцирует отображение

$$T\,(f, g)\colon T\,(X, Y) \to T\,(X', Y'),$$

которое превращает T в функтор. Таким образом, ядро правого вертикального отображения содержит $\mathrm{bal}\,(X, Y)$. Если Y — правый B-модуль, то $T\,(X, Y)$ естественным образом превращается в правый B-модуль, если положить

$$\sum_{(x, y) \in (X, Y)} [(x, y) + \mathrm{bal}\,(X, Y)]\, b = \sum_{(x, y) \in (X, Y)} (x, yb) + \mathrm{bal}\,(X, Y)$$

для всех $b \in B$.

5.66. Ассоциативность сопряженности. *Если A и B — кольца, X — объект категории* mod-A, *Z — объект категории* mod-B *и Y — некоторый (A, B)-бимодуль, то существуют изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_B\,(T\,(X, Y), Z) \approx \mathrm{Hom}_A\,(X, \mathrm{Hom}_B\,(Y, Z)),$$

естественные по X, Y и Z, где

$$T\,(X, Y) = F\,(X, Y)/\mathrm{bal}\,(X, Y)$$

— объект категории mod-B. *Таким образом, функтор*

$$T(\ ,Y) \begin{cases} \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B \\ X \mapsto T\,(X, Y) \end{cases}$$

сопряжен слева к функтору

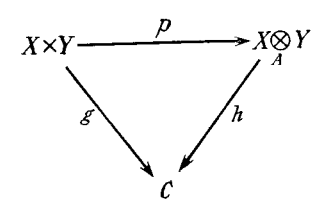
$$h^Y \begin{cases} \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A \\ Z \mapsto \mathrm{Hom}_B\,(Y, Z), \end{cases}$$

т. е. существует естественная эквивалентность

$$T(\ ,Y) \approx \otimes_A Y$$

непрерывных справа функторов. Если $(x, y) \in X \times Y$, то образ элемента (x, y) при каноническом отображении $X \times Y \to T\,(X, Y)$ обозначается через $x \otimes y$.

Если X — объект категории mod-A, *Y — объект категории* A-mod *и $g\colon X \times Y \to C$ — сбалансированное отображение в категории* mod-$\mathbb{Z}$, *то существует единственное отображение $h\colon X \otimes_A Y \to C$, такое, что диаграмма*



где p — каноническое отображение, коммутативна. Таким образом, $g\,(x, y) = h\,(x \otimes y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Сопряженные к унивалентным и полным функторам

5.67. Предложение. *Рассмотрим ситуацию сопряжения* (h, S, T, C, D). *Тогда*

5.67.1. (a) *Существует естественное преобразование функторов*

$$\varphi\colon 1_D \to TS,$$

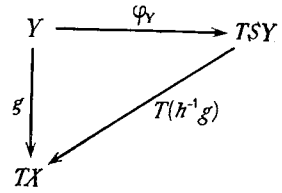
где для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, D$ *морфизм*

$$\varphi_Y : Y \to TSY$$

определяется равенством

$$\varphi_Y = h\,(Y, SY)\,(1_{SY}).$$

(b) *Если* $X \in \mathrm{Obj}\, C$ *и* $g\colon Y \to TX$ *— морфизм категории* D, *то* $h^{-1}g\colon SY \to X$ *— единственный морфизм, такой, что диаграмма*



коммутативна. Таким образом, функтор T *индуцирует вложение*

$$\mathrm{Mor}_C\,(SY, X) \to \mathrm{Mor}_D\,(TSY, TX).$$

5.67.2. (a) *Существует естественное преобразование функторов*

$$\psi\colon ST \to 1_C,$$

где для каждого $X \in \mathrm{Obj}\, C$ *морфизм*

$$\psi_X\colon STX \to X$$

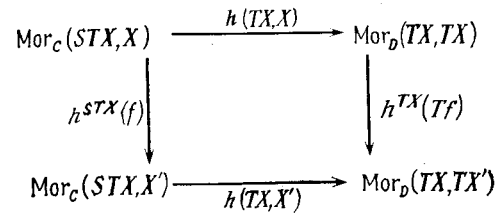
определяется равенством

$$\psi_X = h^{-1}\,(TX, X)\,(1_{TX}).$$

(b) *Следующие условия эквивалентны:*
(α) *Функтор* T *унивалентен.*
(β) *Если* $g\colon Y \to TX$ *— эпиморфизм, то и* $h^{-1}g$ *— эпиморфизм.*
(γ) *Для всех* $X \in \mathrm{Obj}\, C$ *морфизм* $\psi_X\colon STX \to X$ *является эпиморфизмом.*

(c) *Следующие условия эквивалентны:*
(α) T *— полный функтор.*
(β) *Для всех* $X \in \mathrm{Obj}\, C$ *морфизм* $\psi_X\colon STX \to X$ *является расщепляющимся мономорфизмом.*

Доказательство. Для морфизма $f\colon X \to X'$ категории C рассмотрим коммутативную диаграмму



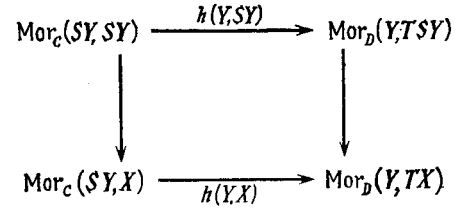
Для 1_{TX} (идя по и против часовой стрелки) получим

$$fh^{-1}\,(1_{TX}) = h^{-1}Tf$$

или

(i) $$f\psi_X = h^{-1}Tf.$$

Аналогично, из коммутативной диаграммы



написанной для морфизма $g\colon SY \to X$, получим

(ii) $$h\,(g) = T\,(g)\,\varphi_Y.$$

Дуальными к (i) и (ii) являются равенства

(i*) $$\varphi_Y f = hS\,(f),$$

(ii*) $$h^{-1}\,(g) = \psi_X S\,(g),$$

где $Y,\ Y' \in \mathrm{Obj}\, D$, $X,\ X' \in \mathrm{Obj}\, C$, $f\colon Y' \to Y$, $g\colon Y \to TX$.

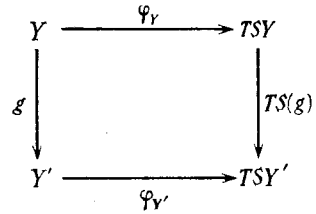
5.67.1. Если $g\colon Y \to Y'$ — морфизм категории D, то справедливы равенства

(i*) $$\varphi_{Y'} g = hS\,(g)$$

и

(ii) $$hS\,(g) = TS\,(g)\,\varphi_Y.$$

Следовательно, диаграмма



коммутативна, что доказывает (a). Биективность морфизма h и условие (ii) доказывают (b).

5.67.2(a). Если $f\colon X \to X'$ — морфизм категории C, то справедливы равенства

(i) $$f\psi_X = h^{-1}T(f)$$

и

(ii*) $$h^{-1}T(f) = \psi_X ST(f),$$

откуда следует, что $\psi_X\colon ST \to 1_C$ является естественным преобразованием.

5.67.2 (b). (α) ⇒ (β). Если $g\colon Y \to TX$ — эпиморфизм, то из второй диаграммы нашего доказательства вытекает, что $T(h^{-1}g)$ — тоже эпиморфизм. Так как унивалентный функтор отражает эпиморфизмы, то $h^{-1}g$ — эпиморфизм.

(β) ⇒ (γ). Положим $Y = TX$, а $g = 1_{TX}$.

(γ) ⇒ (α). Если $f_i\colon X \to X'$, $i = 1, 2$, и $Tf_1 = Tf_2$, то ввиду естественности ψ_X получаем

$$f_1\psi_X = \psi_{X'}ST(f_1) = \psi_{X'}ST(f_2) = f_2\psi_X.$$

Поскольку ψ_X — эпиморфизм, то $f_1 = f_2$, т. е. функтор T унивалентен.

5.67.2 (c) следует из 5.68.2 (см. ниже). □

5.68. Предложение. *Рассмотрим ситуацию сопряжения* (h, S, T, C, D). *Тогда*

5.68.1. $(T\psi)(\varphi T) = 1_T$.

5.68.2. *Если* T *— полный функтор, а* f *— такой морфизм* $X \to STX$, *что*

$$T(f) = \varphi_{TX}\colon TX \to TSTX,$$

то

$$f\psi_X = 1_{STX},$$

где $\psi_X\colon STX \to X$ *является коретракцией* [1].

[1] Это справедливо также в случае, если функтор S является полным (см. Митчелл [65, стр. 120]).

Доказательство. Равенство (ii) для

$$g = \psi_X\colon S(TX) \to X$$

приводит к соотношению

$$h(\psi_X) = T(\psi_X)\varphi_{TX}.$$

Но $\psi_X = h^{-1}(1_{TX})$, поэтому

$$1_{TX} = T(\psi_X)\varphi_{TX},$$

т. е.

$$(T\psi)(\varphi T) = 1_T.$$

Если T — полный функтор, то $\varphi_{TX} = Tf$ для некоторого морфизма $f\colon X \to STX$. Тогда

$$T(1_{STX})\varphi_{TX} = \varphi_{TX} = \varphi_{TX}T(\psi_X)\varphi_{XT} = T(f)T(\psi_X)\varphi_{TX} = T(f\psi_X)\varphi_{TX}.$$

Ввиду 5.67.1 (b), из равенства

$$T(1_{STX})\varphi_{TX} = T(f\psi_X)\varphi_{TX}$$

следует, что $1_{STX} = f\psi_X$.

5.69. Следствие. *Если в ситуации сопряжения* (h, S, T, C, D) *функтор* T *вполне унивалентен, то существует естественная эквивалентность функторов*

$$t\colon 1_C \to ST,$$

где $t(X) = \psi_X^{-1}$ *для всех* $X \in \mathrm{Obj}\, C$.

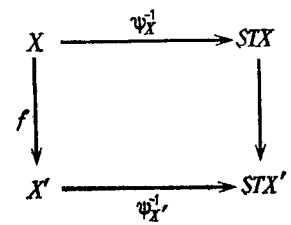
Доказательство. Ввиду 5.67 морфизм $\psi_X\colon STX \to X$ является эпиморфизмом. Кроме того, из 5.68.2 следует, что ψ_X — расщепляющийся мономорфизм и, значит, ψ_X — эквивалентность. Если $f\colon X \to X'$, то равенство (i) дает

$$f\psi_X = h^{-1}Tf,$$

а равенство (ii*) —

$$\psi_{X'}ST(f) = h^{-1}Tf.$$

Следовательно, диаграмма



коммутативна. Значит, $h\colon 1_C \to ST$ — естественное преобразование и, следовательно, эквивалентность функторов. □

5.70. Теорема Мориты и Попеску — Габриеля (второй вариант). *Пусть A — кольцо и $C = \mathrm{mod}\text{-}A$ (или C — произвольная категория Гротендика). Если U — образующий объект категории C и $B = \mathrm{End}_C U$, то полное вложение $h^U : C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}B$ является коретракцией. Функтор $\otimes_B U\colon \mathrm{mod}\text{-}B \rightsquigarrow C$, сопряженный слева к функтору h^U, является ретракцией, и существует естественная эквивалентность функторов*

$$(\otimes_B U)\, h^U \approx 1_C.$$

Таким образом, для каждого объекта X категории C имеет место эквивалентность

$$\mathrm{Mor}_C(U, X) \otimes_B U \approx X,$$

естественная по X. В частности, для $C = \mathrm{mod}\text{-}A$ существует изоморфизм (A, A)-бимодулей

$$U^* \otimes_B U \approx A.$$

Доказательство. Ввиду 4.24 функтор h^U вполне унивалентен. Следовательно, к нему можно применить 5.69. Остальное очевидно. □

Замечание. Так как, ввиду 4.1, модуль U проективен над кольцом B, то из 5.61 вытекает, что функтор $\otimes_B U$ точен. Это справедливо и в том случае, когда C — категория Гротендика (ср. 15.26). Короткое доказательство этого факта, использующее функтор Ext, было дано Такэути [71]. См. также короткое доказательство Ламбека [71].

5.71. Упражнения.

5.71.1. Найти свойства объекта U произвольной кополной абелевой категории, необходимые и достаточные для того, чтобы функтор $h^U : C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathrm{End}_C U$ был полным.

5.71.2. Доказать все теоремы гл. 7 и 8.

Алгебры над коммутативными кольцами

Пусть k — коммутативное кольцо. Рассматривая k как объект категории RINGS, можно определить категорию source k, объектами которой являются кольцевые гомоморфизмы $f_A\colon k \to A$. Обозначим через k-ALG полную подкатегорию категории source k, определяемую таким классом объектов f_A, что образ каждого

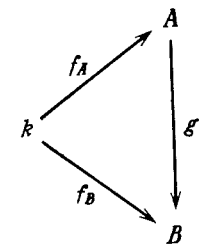
гомоморфизма $f_A\colon k \to A$ содержится в центре кольца A. Произведение гомоморфизма $f_A\colon k \to A$ и канонического кольцевого изоморфизма $A \to \mathrm{End}\, A_A$ превращает A в k-модуль. Для умножения элемента $x \in A$ на элемент $a \in k$, определенного условием

$$(a, x) \to f(a)\, x = ax,$$

справедливо равенство

$$(ax)\,(by) = (ab)\, xy$$

для всех $a, b \in k$, $x, y \in A$. Морфизм $g\colon A \to B$ категории k-ALG есть такой кольцевой гомоморфизм, что диаграмма



коммутативна. Образом гомоморфизма f_A является подкольцо $\{a1 \mid a \in k\}$, и тогда условие коммутативности диаграммы означает просто, что $g(a1) = a1$ для любого $a \in k$, т. е. что гомоморфизм g индуцирует на $\mathrm{im}\, f_A$ тождественный гомоморфизм. Значит,

$$g(ax) = g(a1x) = g(a1)\, g(x) = a1g(x) = ag(x)$$

для любых $a \in k$, $x \in A$, т. е. морфизм категории k-ALG есть просто такой кольцевой гомоморфизм $g\colon A \to B$ k-алгебр, что $g(ax) = ag(x)$ для любых $a \in k$, $x \in A$. Если обозначить через ga произведение гомотетии $a_s\colon A \to A$ и гомоморфизма g и аналогично определить ag, то это совпадает с требованием, чтобы g коммутировал с гомотетиями, определенными любым $a \in k$. Таким образом, $ga = ag$. Назовем k-алгебру $k \to A$ **точной**, если она является инъективным морфизмом, и **центральной**, если она индуцирует изоморфизм $k \to \mathcal{C}(A)$.

Если A — любая алгебра над кольцом k, а X — объект категории mod-A, то X канонически превращается в k-модуль с помощью гомоморфизма $k \to A \to \mathrm{End}\, X$ и для любого морфизма $g\colon X \to Y$ категории mod-A выполняется условие $g(ax) = ag(x)$. Если T — функтор mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B, где A и B — некоторые k-алгебры, то Ta определяется для всех $a \in k$ формулой

$$(Ta)\, f = T(af)$$

для любого морфизма $f\colon X \to Y$ категории mod-A, где af представляет собой произведение морфизма f и левого умножения

модуля Y на a; аналогичным образом для любого $a \in k$ определяется aT. Функтор T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B называется **k-линейным** если $aT = Ta$ для всех $a \in k$. Далее будут рассматриваться только k-линейные функторы.

Алгебра $k \to A$ называется **коммутативной**, если A — коммутативное кольцо. Полная подкатегория категории k-ALG, состоящая из всех коммутативных k-алгебр, обозначается через COMM k-ALG.

5.72. Примеры.

5.72.1. Если A — произвольное кольцо, то каноническое отображение $\mathbb{Z} \to A$ является алгеброй над кольцом $\mathbb{Z}$.

5.72.2. Если k — любое коммутативное кольцо, то тождественное отображение $k \to k$ есть алгебра над кольцом k.

5.72.3. Пусть M — произвольный правый A-модуль над k-алгеброй A. Как уже отмечалось, произведение $k \to A \to \operatorname{End} M$ канонических отображений $k \to A$ и $A \to \operatorname{End} M$ есть k-модуль, который индуцирует гомоморфизмы $k \to \operatorname{End} M_k$ и $k \to \operatorname{End} M_A$. Таким образом, кольца $\operatorname{End} M_k$ и $\operatorname{End} M_A$ являются (каноническими) k-алгебрами.

5.72.4. Если M — произвольный (B, A)-бимодуль, то функтор $\otimes_B M$: mod-$B \rightsquigarrow$ mod-A является k-линейным тогда и только тогда, когда $\alpha x = x\alpha$ для любых $\alpha \in k$ и $x \in M$.

5.72.5. Если M — любой правый A-модуль и $B = \operatorname{End} M_A$ — каноническая k-алгебра, то оба функтора h^M: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B и $\otimes_B M$: mod-$B \rightsquigarrow$ mod-A k-линейны.

5.72.6. Если k — любое ненулевое подкольцо центра кольца A, то включение $k \to A$ является точной алгеброй, а включение $\mathcal{C}(A) \to A$ — центральной алгеброй.

5.73. Определение и предложение о (полу)групповом кольце. *Пусть T — мультипликативный моноид, A — кольцо и f_T: $T \to AT$ — свободный левый A-модуль. Для простоты будем считать, что $T \subseteq AT$ и f_T — включение. Таким образом, AT является (A, A)-бимодулем, таким, что $at = ta$ для всех $a \in A$, $t \in T$. Тогда AT — кольцо относительно своей операции сложения и операции умножения, определенной правилом*

$$(1) \qquad \sum_{s \in T} a_s s \sum_{t \in T} b_t t = \sum_{r \in T} c_r r,$$

где

$$(2) \qquad c_r = \sum_{st = r} a_s b_t.$$

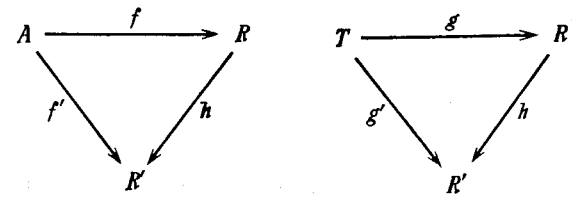
(Каждый элемент в модуле AT имеет конечный носитель, поэтому элемент в правой части формулы (1) определен.) Таким образом, отображение f_T: $T \to AT$ является гомоморфизмом моноидов,

а отображение

$$(3) \qquad f_A \begin{cases} A \to AT \\ a \mapsto a \cdot 1 \end{cases}$$

— кольцевым мономорфизмом. В дальнейшем предполагается, что $A \subseteq AT$ и f_A является включением.

Обозначим через $C(AT)$ категорию, объектами которой являются упорядоченные тройки (f, g, R), где R — кольцо, f: $A \to R$ — гомоморфизм колец, g: $T \to R$ — гомоморфизм моноидов, такие, что образы морфизмов f и g коммутируют, т. е. $f(a)\, g(t) = g(t)\, f(a)$ для всех $a \in A$, $t \in T$. Морфизм между этим и другим объектом (f', g', R') этой категории есть кольцевой гомоморфизм h: $R \to R'$, такой, что диаграммы



*коммутативны. Тогда (f_A, f_T, AT) —левый нуль категории $C(AT)$, называемый **полугрупповым кольцом полугруппы T над кольцом A** и обозначаемый через AT. Если A — коммутативное кольцо, то AT — алгебра относительно вложения f_A, называемая **полугрупповой алгеброй над кольцом A**. Если T — группа, то соответственно вводятся понятия **группового кольца и групповой алгебры.***

Доказательство.

Чтобы проверить закон дистрибутивности, положим $S = U \coprod V$ для подмножеств U и V. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{u \in U} a_u u\Big)\Big(\sum_{t \in T} b_t t\Big) + \Big(\sum_{v \in V} a_v v\Big)\Big(\sum_{t \in T} b_t t\Big) = \\
&= \sum_{\substack{ut = k \\ u \in U,\ t \in T}} a_u b_t k + \sum_{\substack{vt = q \\ v \in V,\ t \in T}} a_v b_t q = \\
&= \sum_{\substack{st = r \\ s \in S,\ t \in T}} a_s b_t r = \\
&= \Big(\sum_{u \in U} a_u u + \sum_{v \in V} a_v v\Big) \sum_{t \in T} b_t t,
\end{aligned}$$

что доказывает один закон дистрибутивности. Второй закон дистрибутивности есть следствие симметрии в определении умножения.

Ассоциативность:

$$\Big(\sum_{s\in S} a_s s \sum_{t\in T} b_t t\Big) \sum_{u\in U} c_u u = \Big(\sum_{\substack{st=k\\ s\in S,\ t\in T}} a_s b_t st\Big)\Big(\sum_{u\in U} c_u u\Big) = \sum_{s\in S,\ t\in T,\ u\in U} a_s b_t c_u stu.$$

Ассоциативность умножения в AT вытекает из симметричности его определения и ассоциативности умножения в A и T. Это доказывает, что AT — кольцо. Если (f, g, R) — объект категории $C(AT)$, то кольцевой гомоморфизм $f\colon A \to R$ превращает R в притягивающий левый A-модуль и существует морфизм $h\colon AT \to R$ в категории A-mod

$$h \begin{cases} AT \to R \\ \sum_{s\in S} a_s s \mapsto \sum_{s\in S} f(a_s)\, g(s), \end{cases}$$

который, очевидно, является также гомоморфизмом колец. Кроме того, (f_A, f_T, AT) — левый нуль категории $C(AT)$. □

Упражнение.

Какие свойства кольца A наследуются кольцом AG, если G — конечная группа? Как обстоит, например, с классической полупростотой, самоинъективностью и т. д.? (См. 13.26.)

Пусть A-GROUP RINGS (A-MONOID RINGS) — категория, объектами которой являются кольца AG, где G — группа (моноид), а морфизмы $f\colon AS \to AG$ определяются как кольцевые гомоморфизмы, такие, что

$$f(ax) = af(x) \text{ для любого } a \in A.$$

Так же как в предложении о полугрупповом кольце, любой морфизм $f\colon AS \to AG$ категории A-GROUP RINGS (A-MONOID RINGS) индуцирует гомоморфизмы $f_A\colon A \to AG$ и $f_G\colon S \to AG$, и (f_A, f_G, AG) — объект категории $C(AS)$.

5.74. Теорема о свободном (полу)групповом кольце.

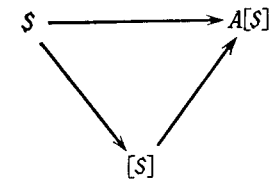
5.74.1. *Пусть A — кольцо. Забывающий функтор*

$$A\text{-GROUP (MONOID) RINGS} \rightsquigarrow \text{SETS}$$

обладает сопряженным слева функтором

$$\begin{cases} \text{SETS} \rightsquigarrow A\text{-GROUP (MONOID) RINGS} \\ S \mapsto A[S], \end{cases}$$

где через $[S]$ обозначена свободная группа (моноид) над S, через $A[S]$ — (полу)групповое кольцо над A, а диаграмма



где наклонные стрелки означают канонические вложения, коммутативна. Тогда $S \mapsto A[S]$ называется ***кольцом некоммутативных многочленов от переменных*** *(или* ***неизвестных****)* ***из*** *S. Когда кольцо A коммутативно, то $S \to A[S]$ определяет функтор свободы для категории алгебр и $A[S]$ называется* ***свободной алгеброй над кольцом A на множестве S.***

5.74.2. *Пусть A — любое кольцо (коммутативное или некоммутативное). Обозначим через A-ABEL GROUP (MONOID) RINGS полную подкатегорию категории A-GROUP (MONOID) RINGS, состоящую из объектов AG, где G — абелева группа (моноид). Забывающий функтор*

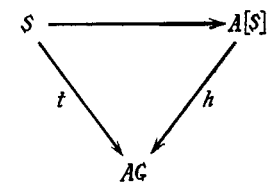
$$A\text{-ABEL GROUP (MONOID) RINGS} \rightsquigarrow \text{SETS}$$

обладает сопряженным слева функтором

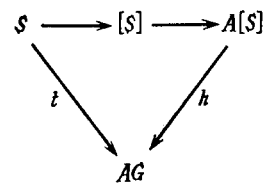
$$\begin{cases} \text{SETS} \rightsquigarrow A\text{-ABEL GROUP (MONOID) RINGS} \\ S \mapsto A[S]_c, \end{cases}$$

где $[S]_c$ — свободная над S коммутативная группа (моноид), а $S \mapsto A[S]_c$ — произведение канонических вложений $S \to [S]_c$ и $[S]_c \to A[S]_c$. В случае когда нет опасности путаницы, будем писать $A[S]$ вместо $A[S]_c$. Это кольцо называется ***кольцом многочленов от (коммутирующих) переменных*** *(или* ***неизвестных****)* ***из*** *S.*

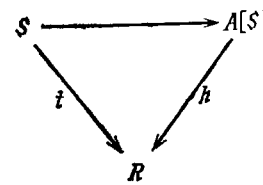
Доказательство. Сопряженный слева к указанному забывающему функтору обладает тем свойством, что для каждого множества S и отображения $t\colon S \to AG$ множества S в групповое кольцо, коммутирующего с каноническим вложением $A \to AG$, существует единственный морфизм $h\colon A[S] \to AG$ категории A-GROUP (MONOID) RINGS, такой, что диаграмма



коммутативна. На самом деле h — морфизм, канонически определенный S-(полу)групповым кольцом $A[S]$, такой, что диаграмма



где t и оба отображения в горизонтальной строке канонические, коммутативна. Это доказывает существование. Если кольцо A коммутативно и $A \to R$ — алгебра, обозначим через A' образ отображения $A \to R$. Если $t\colon S \to R$ — отображение, то t коммутирует с каноническим вложением $A' \to R$ и, таким образом, существует единственный морфизм $h\colon A[S] \to R$, для которого диаграмма



где горизонтальное отображение каноническое, коммутативна, т. е. $S \to A[S]$ — свободная алгебра над S. Это заканчивает доказательство 5.74.1, а 5.74.2 доказывается аналогично. □

5.75. Следствие и определение. *Если A есть k-алгебра и S — подпространство k-алгебры A, то подалгебра (S), порожденная множеством S, есть образ канонического гомоморфизма $k[S] \to A$ свободной алгебры $k[S]$, индуцированного включением $S \to A$. Если $A = (S)$, то существует точная последовательность*

$$0 \to \Delta \to k[S] \to A \to 0,$$

где Δ — ядро гомоморфизма $k[S] \to A$. Если Δ — идеал алгебры $k[S]$, порожденный элементами $\{r_q\}_{q \in Q}$, то говорят, что A — алгебра ***с системой образующих*** *S и* ***определяющими соотношениями*** *$\{r_q = 0\}$. Тогда пару $(S \mid \Delta)$ называют* ***представлением алгебры*** *A.*

Доказательство. Пусть B — образ канонического гомоморфизма $k[S] \to A$, а $g\colon k[S] \to B$ — индуцированное отображение. Так как отображение $S \to k[S]$ пропускается через включение $g^{-1}(S) \to k[S]$, то из теоремы 2.7 о свободном объекте следует, что $g^{-1}(S) = k[S]$ и, значит, $B = (S)$. □

Таким образом, каждая алгебра изоморфна факторкольцу (факторалгебре) свободной алгебры.

5.76. Теорема. *Категории* GROUPS, RINGS *и k-ALG для любого коммутативного кольца k обладают бипроизведениями.*

Доказательство. Забывающий функтор RINGS $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \mathbb{Z}$-ALG является эквивалентностью категорий, так как он вполне универсален и представителен (2.2). Следовательно, для категории RINGS теорема вытекает из теоремы для k-ALG. Функтор свободы

$$F\colon \text{SETS} \rightsquigarrow k\text{-ALG}$$

(который существует ввиду 5.74) сопряжен слева к забывающему функтору

$$k\text{-ALG} \rightsquigarrow \text{SETS}$$

и, следовательно, ввиду 5.44, сохраняет копроизведения. Пусть

$$\{t_i\colon S_i \to \coprod_{i \in I} S_i\}_{i \in I}$$

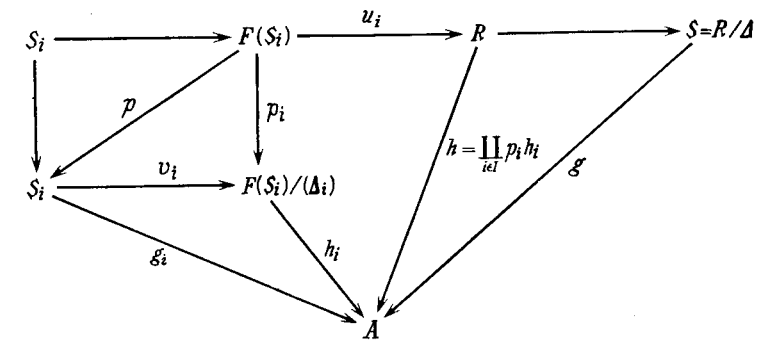
— свободное объединение объектов в категории множеств. Тогда

$$\{u_i\colon F(S_i) \to F\left(\coprod_{i \in I} S_i\right)\}_{i \in I}$$

— копроизведение в категории k-ALG, где $u_i = F(t_i)$ для всех $i \in I$. Положим $R = F\left(\coprod_{i \in I} S_i\right)$, и пусть S_i есть k-алгебра с представлением $(S_i \mid \Delta_i)$, Δ — идеал кольца R, порожденный $\bigcup_{i \in I} u_i(\Delta_i)$, а $f_i\colon S_i \to S = R/\Delta$ для любого $i \in I$ — произведение

$$S_i \to F(S_i) \xrightarrow{u_i} R \xrightarrow{\alpha} R/\Delta = S,$$

где α — канонический морфизм. Тогда $\{f_i\colon S_i \to S\}_{i \in I}$ — копроизведение в категории k-ALG, так как если $\{g_i\colon S_i \to A\}$ — произвольное семейство морфизмов категории k-ALG, то существует коммутативная диаграмма



где все необозначенные отображения и p_i канонические, p означает гомоморфизм представления $F(S_i) \to S_i$, $v_i\colon S_i \to F(S_i)/(\Delta_i)$ — изоморфизм, индуцированный гомоморфизмом p, $h_i = g_i v_i^{-1}$, а g индуцирован гомоморфизмом h. Диаграмма показывает, что $\ker h$ содержит образ идеала Δ_i при любом гомоморфизме u_i. Поскольку в этом случае $\ker h$ содержит Δ, то h индуцирует отображение $g\colon S \to A$, такое, что $gf_i = g_i$ для любого $i \in I$, и g — единственный гомоморфизм с этим свойством. Для категории GROUPS доказательство проводится точно так же с естественной заменой идеала нормальной подгруппой. □

5.77. Следствие. *Категория* A-GROUPS (MONOIDS) RINGS *обладает копроизведениями. Пусть* $\{u_i\colon S_i \to G\}_{i\in I}$ *— копроизведение в категории* GROUPS (MONOIDS). *Тогда* $\{f_i\colon AS_i \to AG\}_{i\in I}$ *— копроизведение в категории* A-GROUP (MONOID) RINGS, *где* f_i *— единственный морфизм категории* $C(AS_i)$ (см. 5.73), *определенный каноническими вложениями* $A \to AS_i$ *и* $u_i\colon S_i \to G$. *Таким образом,*

$$\coprod_{i\in I} AS_i \to A \coprod_{i\in I} S_i$$

— изоморфизм в категории A-GROUP (MONOID) RINGS.

Доказательство. Копроизведение

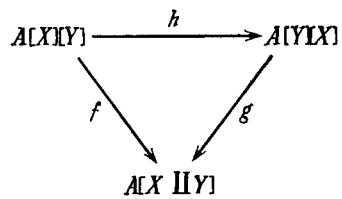
$$f\colon \coprod_{i\in I} AS_i \to A \coprod_{i\in I} S_i$$

семейства морфизмов $\{f_i\}_{i\in I}$ существует в категории RINGS, ввиду 5.76, и f сюръективно, так как $G = \coprod_{i\in I} S_i$ и A порождает AG. Пусть $g\colon AG \to \coprod_{i\in I} AS_i$ — единственный морфизм, индуцированный вложением $A \to B = \coprod_{i\in I} AS_i$ и копроизведением $G \to B$ вложений $\{S_i \to B\}_{i\in I}$, индуцированных вложениями $\{AS_i \to B\}_{i\in I}$. Тогда $gf = 1$ на образах канонических инъекций $AS_i \to B$, значит, $gf = 1_B$. Аналогично, $fg = 1_{AG}$. □

5.78. Следствие. *Если* A *— кольцо, а* X *и* Y *— непересекающиеся множества, то существует единственный изоморфизм*

$$h\colon A[X][Y] \to A[Y][X],$$

такой, что диаграмма



коммутативна. Здесь f *— единственный морфизм категории* $C(A[X][Y])$, *определенный каноническими инъекциями*

$$f_1\colon A[X] \to A[X \coprod Y]$$

и

$$f_2\colon [Y] \to A[X \coprod Y],$$

а g *определяется аналогично. Это справедливо также для коммутирующих переменных.*

Доказательство. Гомоморфизм f (соотв. g) является копроизведением в категории колец морфизма f_1 и канонической инъекции

$$g_1\colon A[Y] \to A[X \coprod Y],$$

так как

$$A[X] \coprod A[Y] \approx A[X] \coprod [Y] \approx A[X \coprod Y].$$

Первая эквивалентность существует ввиду 5.77, а вторая — так как свободная группа (моноид) над свободным объединением двух множеств эквивалентна копроизведению свободных групп (моноидов) над множествами, т. е. $[X] \coprod [Y] \approx [X \coprod Y]$ в категории GROUPS (MONOIDS), что индуцирует последнюю эквивалентность.

Для множества $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и кольца A символ $A[y_1, \ldots, y_n]$ будет означать кольцо многочленов над A от коммутирующих переменных $y_1, \ldots, y_n$. Каждый элемент из A-полугруппового кольца $A[x]$ имеет единственное представление в виде

$$\sum_{i\in\omega} a_i x^i,$$

где $a_i \in A$ и $a_i = 0$ почти для всех $i \in \omega$. Более того, каждый элемент в A-групповом кольце $A[x]$ имеет единственное представление

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i,$$

где только конечное число a_i отлично от 0. Таким образом, A-групповое кольцо $A[x]$ изоморфно A-полугрупповому кольцу $A[x, y]$ [1]). Это следует из того, что $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \coprod (-\mathbb{N}) \coprod \{0\}$ и

$$\begin{cases} A[x] \approx A\mathbb{Z} \approx (A\mathbb{N})\,\mathbb{N} \approx A[x][y] \approx A[x, y] \\ a_{ij}x^{i-j} \mapsto a_{ij}x^i y^j \end{cases}$$

[1]) Здесь $[x, y]$ — моноид с двумя образующими и соотношениями $xy = yx = 1$. — *Прим. перев.*

является изоморфизмом. Чтобы избежать путаницы, групповое кольцо свободной циклической группы с образующим x будем обозначать через $A\ [x, x^{-1}]$, т. е. переменное y заменяется его образом x^{-1} при обратном к только что определенному изоморфизму.

Упражнения к гл. 5

1. Если S — множество и A — кольцо, то факторкольцо свободного полугруппового кольца $A\ [S]$ по идеалу COM S, порожденному множеством коммутаторов

$$\{[s, t] = st - ts \mid s, t \in S\},$$

есть кольцо многочленов от коммутирующих переменных из S и

$$S \to A\ [S] \to A\ [S]/(\mathrm{COM}\ S)$$

является вложением.

2. Для любого множества S кольцо $A\ [S]$ коммутативных многочленов над S является областью целостности, если A — область целостности, и тогда оно совпадает с кольцом многочленов от коммутирующих переменных.

3 (Кон [64b]). (a) Показать, что для множества $S = \{x, y\}$, состоящего из двух элементов, и поля A подалгебра B алгебры $A\ [x, y]$, порожденная всеми коммутаторами, не может быть свободной алгеброй.

(b) Если I — идеал свободной алгебры $A\ [S]$ ранга > 1 и если I порождает подалгебру $B \neq A\ [S]$, то B не может быть свободной алгеброй.

(c) Если A — поле и $A\ [x]$ — кольцо многочленов ранга 1, то подалгебра B кольца $A\ [x]$ свободна тогда и только тогда, когда она целозамкнута в своем поле частных, например подалгебра, порожденная x^2 и x^3, не свободна.

4 (Кон [64b]). Пусть A — поле. Свободная A-алгебра не более чем счетного ранга может быть вложена в свободную A-алгебру ранга 2.

5 (Ятегаонкар [69a]). Если центральная алгебра A является правой, но не левой областью Ope, то она содержит подалгебру, являющуюся свободной алгеброй ранга 2, и, значит, в силу упражнения 4 содержит свободную алгебру несчетного ранга.

***6** (a) (Хохшильд [58]). Для любого коммутативного кольца k и множества S глобальная размерность полугруппового кольца $k\ [S]$ на 1 больше глобальной размерности кольца k. Если k — поле, то любой правый идеал кольца $k\ [S]$ проективен. (Определения и случай свободной коммутативной алгебры над k см. в гл. 8.)

(b) (Кон [64a]). Кольцо R называется правым **FI-кольцом**, если R есть IBN-область, а каждый его правый идеал является свободным модулем. Для любого поля свободная алгебра $k\ [S]$ над любым множеством S, а также групповая алгебра $k\ (S)$ над свободной группой (S) на множестве S являются левыми и правыми FI-кольцами.

7. Групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ называется **целочисленным групповым кольцом** группы G. Показать, что для конечной группы G

(a) $\mathbb{Z}G$ не имеет идемпотентов, отличных от нуля и единицы.

(b) Каждый проективный модуль над $\mathbb{Z}G$ свободен.

(c) Для любого множества S проективные модули над целочисленным групповым кольцом свободной над S группы свободны. (Это справедливо также для свободного группового кольца над любым коммутативным кольцом главных идеалов; см. Басс [64].)

8. Пусть A и B являются k-алгебрами. Тогда произведение

$$k \to A \times B \to A \underset{k}{\otimes} B,$$

где $k \to A \times B$ диагонально, а $A \times B \to A \otimes B$ — каноническое вложение, является k-алгеброй относительно группового сложения и следующего умножения:

$$\sum a_i \otimes \sum b_j = \sum a_i \otimes b_j.$$

Отображение

$$\begin{cases} A \to A \underset{k}{\otimes} B \\ a \mapsto a \otimes 1 \end{cases}$$

является каноническим гомоморфизмом.

9. Для k-алгебры A и группы G отображение

$$A \times kG \to AG,$$

переводящее (a, h) в ah для любых $a \in A$, $h \in kG$, сбалансировано над k, и канонический морфизм

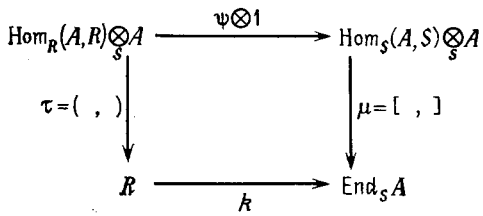
$$A \underset{k}{\otimes} kG \to AG$$

является изоморфизмом колец.

10. Доказать, что в категории COM k-ALG над полем k канонические гомоморфизмы $A \to A \underset{k}{\otimes} B$ и $B \to A \underset{k}{\otimes} B$ определяют копроизведение. Верно ли это для произвольного коммутативного кольца k?

11. (Ауслендер — Голдман [60]). *Пусть A есть R-модуль и $S = \mathrm{End}\ A_R$.*

(a) *Тогда имеет место коммутативная диаграмма*



где k *— канонический гомоморфизм,* $\mu = [\ ,\ ]$: $\mathrm{Hom}_S(A, S) \underset{S}{\otimes} A \to \mathrm{End}_S A$ *определено правилом*

$$\mu(f \otimes a)(b) = af(b)$$

для любых $a, b \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_S(A, S)$,

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_R(A, R) \to \mathrm{Hom}_S(A, S)$$

— правилом

$$\psi(f)(a) = \mu(f \otimes a)$$

для всех $a \in A$ *и*

$$\tau = (\ ,\ )\colon \mathrm{Hom}_R(A, R) \underset{S}{\otimes} A \to R$$

— правилом

$$\tau(f \otimes a) = f(a)$$

для любых $f \in \mathrm{Hom}_R(A, R)$, $a \in A$.

(b) *Образом отображения* τ *является идеал следа* $\mathrm{tr}_R A$ *и*

$$\mathrm{tr}_R A \cdot \mathrm{ann}_R A = 0.$$

(c) *Если* $\mathrm{tr}_R A + \mathrm{ann}_R A = R$, *то* μ *оказывается эпиморфизмом, а* A *— конечно порожденным проективным* S*-модулем. В этом случае последовательность*

$$0 \to \mathrm{ann}_R A \to R \to \mathrm{End}_S A \to 0$$

расщепляется.

(d) *Если* A_R *— образующий, то отображения* τ, μ, ψ *и т. д. из* (a) *являются изоморфизмами.*

Замечания к гл. 5

Теория сопряженных функторов была построена Каном [58], который впервые установил соответствие между функтором тензорного умножения и функтором Hom (возможно, этим объясняется таинственное отсутствие одного из этих функторов в развитии некоторых математических идей!). Уотс [60] охарактеризовал функторы со значениями в категории модулей, обладающие сопряженными (см. 5.56—7). Эта характеризация описывает также непрерывные функторы (ср. 12.9 и Эйленберг [60]). Фрейд [62] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы функтор обладал левым сопряженным.

Ссылки

Габриель [62], Габриель — Цисман [71], Гротендик [57], Кан [58], Кон [64a, 64b], Ламбек [64a], Маклейн [66], Митчелл [65], Морита [58], Попеску — Габриель [64], Уотс [60], Фрейд [62], Хохшильд [58], Эйленберг [60], Ятегаонкар [69a].

Глава 6

АБЕЛЕВЫ КАТЕГОРИИ

Точная аддитивная категория называется абелевой (6.1). Если C — абелева категория, то для любой (малой) категории L категория C^L также абелева. Кроме того, категория C^L наследует следующие свойства категории C (предложение 6.17): (1) конечную полноту; (2) существование (конечных) произведений; (3) существование ядер и уравнителей; (4) существование образов, сумм или (конечных) пересечений; (5) нормальность и существование коядер; (6) аддитивность; (7) точность; (8) абелевость; (9) точность и локальную малость (в предположении, что категория L мала). Более того, категория C^L имеет точные прямые пределы, если их имеет категория C (предложение 6.25). (Ср. также упр. 6.13.) В этом случае прямой предел $\varinjlim_{X \in M} F(X)$ любого семейства $\{F(X)\}_{X \in M}$ точных (слева) функторов является точным слева функтором $L \rightsquigarrow C$ (следствие 6.24). Отсюда вытекает, что для любого кольца R прямой предел направленного семейства плоских модулей в категории mod-R является плоским модулем. Копредел функторов, сохраняющих копределы, всегда сохраняет копределы (6.22).

Для любой категории C функтор представления $H\colon C^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathrm{SETS}^C$ сохраняет пределы (6.23), и если категория C аддитивна, то функтор H индуцирует полное вложение $C^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow (\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z})^C$ (6.21). Если вдобавок категория C мала, то функтор $H(A^*) = h^A$ является малым проективным объектом в Adfunct $(C, \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z})$, а функтор $G = \coprod_{A \in C} h^A$ является вложением $L \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$.

Кроме того, функтор $[G, \ ]$ является точным вложением Adfunct $(C, \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$ (см. 6.20 и 6.23). (Ср. с теоремой 14.21 о точном вложении.)

6.1. Предложение и определение. *Категория C называется* ***абелевой****, если она удовлетворяет любому из следующих условий* I, II, III *и* IV, *которые эквивалентны друг другу*:

I

(Ab 1) *Каждый морфизм категории C имеет ядро и коядро.*

(Ab 2) *C — нормальная конормальная аддитивная категория* [*таким образом, каждый мономорфизм (эпиморфизм) является ядром (коядром) некоторого морфизма*].

(Ab 3) *Каждый морфизм категории C разлагается в произведение эпиморфизма и мономорфизма.* (*Это разложение однозначно с точностью до эквивалентности эпиморфизмов и мономорфизмов*; *ср.* 5.25.)

II

Категория C точна и аддитивна.

III

Категория C нормальна, конормальна, аддитивна и обладает расслоенными произведениями и расслоенными копроизведениями (см. 5.8.5).

IV

Категория C нормальна, конормальна, аддитивна и обладает ядрами и коядрами.

Доказательство. Если в (Ab 2) убрать слово «аддитивная», то условие I превращается в определение точной категории (стр. 321). Таким образом, I $\Leftrightarrow$ II.

II $\Rightarrow$ III. Любая категория с конечными произведениями и ядрами является конечно полной и, следовательно, обладает расслоенными произведениями. Так как любая аддитивная категория имеет конечные копроизведения, то из условия II следует существование в C расслоенных копроизведений. Следовательно, II $\Rightarrow$ III.

Импликация III $\Rightarrow$ IV тривиальна. Допустим теперь, что выполнено условие IV. Любая аддитивная категория с ядрами обладает уравнителями, и поэтому, ввиду 5.25.2, категория C точна. Итак, IV $\Rightarrow$ II. □

6.2. Упражнения.

6.2.1 (Фрейд [62]). Категория C абелева, если она удовлетворяет следующим условиям:

A_0. Категория C имеет нулевой объект.

A_1. Каждая пара объектов обладает произведением.

A_1^*. Каждая пара объектов обладает копроизведением.

A_2. Каждый морфизм имеет ядро.

A_2^*. Каждый морфизм имеет коядро.

A_3. Каждый мономорфизм является ядром некоторого морфизма.

A_3^*. Каждый эпиморфизм является коядром некоторого морфизма.

6.2.2 (Пуппе [67]). Рассмотрим следующие свойства категории C:

K: категория C имеет ядра.

N: каждый мономорфизм категории C является ядром некоторого морфизма.

P: категория C имеет конечные произведения.

Z: любой морфизм разлагается в произведение эпиморфизма и мономорфизма (Ab 3).

Обозначим через K^*, N^* и P^* условия, дуальные свойствам K, N и P соответственно. Показать, что аддитивная категория C с нулевым объектом абелева тогда и только тогда, когда она удовлетворяет какой-нибудь из следующих систем условий:

(I) P, K, K^*, N, N^*,

(I*) P^*, K, K^*, N, N^*,

(II) P, N, N^*, Z,

(II*) P^*, N, N^*, Z.

6.2.3. Если C — малая абелева категория, то категория Funct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ абелева.

6.2.4. Если C — произвольная абелева категория и F — некоторое множество объектов категории C, то существует полная подкатегория F' категории C, являющаяся малой абелевой категорией и такая, что $F \subseteq \text{Obj}\, F'$.

6.2.5. Пусть C' — некоторая полная подкатегория категории C с нулевым объектом 0 и предположим, что $0 \in \text{Obj}\, C'$. Если F: $L \rightsquigarrow C'$ — произвольный функтор, F': $L \rightsquigarrow C$ — индуцированный функтор и $\varprojlim_{L,C} F'$ является объектом категории C', то $\varprojlim_{L,C} F' = \varprojlim_{L,C} F$. Таким образом, если категория C имеет произведения (ядра), а категория C' замкнута относительно произведений (соотв. ядер) семейств ее морфизмов в том смысле, что для любого семейства морфизмов из C' по крайней мере один объект, являющийся произведением (или ядром) этого семейства в категории C, лежит в C', то категория C' имеет произведения (соотв. ядра). Дуальное утверждение справедливо для копределов. Следовательно, если C — точная (или абелева) категория и подкатегория C' замкнута относительно ядер и коядер (и конечных произведений), то C' также точна (абелева).

6.2.6. Пусть в аддитивной категории дан квадрат

(1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_2} & A_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & S & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ A_1 & \xrightarrow[f_1]{} & Y \end{array}$$

Рассмотрим морфизм $X \to Y$, являющийся произведением морфизмов

$$X \to A_1 \oplus A_2 \twoheadrightarrow Y,$$

где $X \to A_1 \oplus A_2$ определен морфизмами g_1 и g_2, а $A_1 \oplus A_2 \twoheadrightarrow Y$ — морфизмами f_1 и $-f_2$.

Доказать:

(a) Морфизм $X \to Y$ нулевой тогда и только тогда, когда квадрат S коммутативен.

(b) Последовательность $0 \to X \to A_1 \oplus A_2 \to Y$ точна тогда и только тогда, когда S является расслоенным произведением.

(c) Последовательность $X \to A_1 \oplus A_2 \to Y \to 0$ точна тогда и только тогда, когда S является расслоенным копроизведением.

6.2.7. Если категория абелева, квадрат S из предыдущего упражнения декартов и $A_2 \to Y$ — эпиморфизм, то $X \to A_1$ — также эпиморфизм. Двойственным образом, для кодекартова квадрата, если $X \to A_2$ — мономорфизм, то $A_1 \to Y$ — также мономорфизм.

6.2.8. Если C — абелева категория и f: $A \to B$, g: $B \to D$ — морфизмы, то

(a) $\text{im}\, f \cap \ker g = f(\ker gf)$,

(b) $\text{im}\, f + \ker g = g^{-1}(\text{im}\, gf)$,

(c) $\text{coim}\, g \cap \text{coker}\, f = g^{-1}(\text{coker}\, gf)$,

(d) $\text{coim}\, g + \text{coker}\, f = f(\text{coim}\, gf)$.

6.3. Предложение. *Любая абелева категория C конечно полна и конечно кополна. Кроме того, C полна (кополна) в том и только том случае, когда C обладает произведениями (копроизведениями).*

Доказательство. Ввиду 5.11, категория (конечно) полна тогда и только тогда, когда она имеет конечные произведения и ядра. Это и дуальное утверждения доказывают предложение. □

6.4. Предложение. *Пусть C — абелева категория. Тогда справедливы следующие импликации:*

(a) *Если C имеет образующий, то кополнота категории влечет за собой ее полноту.*

(b) *Если C имеет кообразующий, то полнота категории влечет за собой ее кополноту.*

Доказательство. Ввиду двойственности между ядрами и коядрами, абелева категория оказывается локально малой в том и только том случае, когда она колокальна мала. Таким образом, если категория C имеет образующий, то C локально и колокально мала по 5.23. Так как категория C^* имеет кообразующий, то, ввиду 5.53, из кополноты категории C следует ее полнота. Это доказывает (a). Свойство (b) устанавливается двойственным рассуждением. □

Инъективно богатые категории

Если для каждого объекта A категории C существует инъективный объект E и мономорфизм $A \to E$, то говорят, что категория C **инъективно богата.** Для абелевых категорий это эквивалентно существованию точной последовательности $0 \to A \to E$, в которой E — инъективный объект.

6.5. Предложение. *Если C — абелева категория с образующим U и $\{U/K_i\}_{i\in I}$ — семейство представителей всех классов эквивалентных факторобъектов объекта U, то инъективный объект W, содержащий для всех $i \in I$ в качестве подобъектов объекты U/K_i, является кообразующим категории C.*

Доказательство. Достаточно повторить доказательство соответствующего результата 3.31 для категорий модульного типа. □

6.6. Следствие. *Инъективно богатая абелева категория C с образующим является кополной тогда и только тогда, когда она полна. Если это так, то C имеет инъективный кообразующий.*

Доказательство. Полнота следует из кополноты (без предположения о том, что C инъективно богата), ввиду импликации (а) предложения 6.4. Обратно, если C — полная категория, то существует инъективный объект W, удовлетворяющий условиям последнего предложения; именно, если последовательность $0 \to U/K_i \to E_i$ точна и объект E_i инъективен, то в качестве W можно взять произведение $W = \prod\limits_{i\in I} E_i$. Поскольку в этом случае для каждого $i \in I$ каноническая инъекция $E_i \to W$ индуцирует мономорфизм $U/K_i \to W$, объект W является кообразующим, ввиду предложения 6.5. □

6.7. Упражнения.

6.7.1. Если C — произвольная абелева категория, то объект A категории C проективен (инъективен) тогда и только тогда, когда функтор h^A (соотв. h_A) со значениями в категории абелевых групп является точным.

6.7.2. Если C — произвольная абелева категория, то любой ретракт проективного объекта A проективен и каждый эпиморфизм $X \to A$ расщепляется.

6.7.3. В любой категории C копроизведение проективных объектов проективно. Если категория C имеет нуль и $\{A_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство объектов из C, то копроизведение $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ проективно тогда и только тогда, когда объекты A_i для всех $i \in I$ проективны.

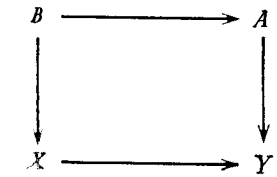
Пусть C — категория. Говорят, что C **проективно богата**, если для каждого объекта X существует проективный объект P и эпиморфизм $P \to X$.

6.8. Предложение.

6.8.1. *Если категория C проективно богата или является абелевой, то объект A проективен тогда и только тогда, когда каждый эпиморфизм $X \to A$ расщепляется.*

6.8.2. *Если категория C с проективным образующим U имеет копроизведения, то объект A проективен тогда и только тогда, когда для некоторого множества I существует ретракция $U^{(I)} \to A$.*

Доказательство 6.8.1. Необходимость условия — следствие упр. 6.7.2. Докажем достаточность. Если категория C проективно богата, то это также — следствие упр. 6.7.2. Если же категория C абелева, то для любых эпиморфизма $X \to Y$ и морфизма $A \to Y$ расслоенное произведение



определяет отображение $B \to A$, являющееся эпиморфизмом в силу упр. 6.2.7. Тогда по условию $(A \to B \to A) = 1_A$ для некоторого $A \to B$ и поэтому

$$(A \to B \to X \to Y) = (A \to B \to A \to Y) = (A \to Y),$$

т. е. $A \to Y$ пропускается через $X \to Y$.

Доказательство 6.8.2. Любая категория с проективным образующим проективно богата ввиду 3.25. □

6.9. Предложение. *Если C и D — абелевы категории, то полуточный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ аддитивен.*

Доказательство. Ввиду 3.38 функтор T из аддитивной категории в аддитивную категорию аддитивен тогда и только тогда, когда он сохраняет конечные копроизведения. Но в силу 3.35 любой полуточный функтор из точной аддитивной (абелевой) категории в точную аддитивную (абелеву) категорию сохраняет копроизведения. □

6.10. Предложение. *Если категории C и D абелевы, то точный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ является унивалентным, если он сохраняет ненулевые объекты (т. е. переводит ненулевые объекты в ненулевые).*

Доказательство. Так как категории C и D аддитивны, а из предложения 6.9 вытекает аддитивность функтора T, то унивалентность функтора T имеет место тогда и только тогда, когда он сохраняет ненулевые морфизмы. Предположим теперь, что $T(f) = 0$ для некоторого морфизма $f\colon A \to B$. Из точности функтора T следует, что $T(\operatorname{im} f) = \operatorname{im} Tf = 0$; поэтому $\operatorname{im} f = 0$, так как по условию T сохраняет ненулевые объекты. Но тогда $f = 0$, и, таким образом, T сохраняет ненулевые морфизмы. □

6.11. Предложение. *Для функтора $T\colon C \rightsquigarrow D$ из абелевой категории в абелеву категорию следующие условия эквивалентны:*
(a) *T сохраняет конечные пределы.*
(b) *T точен слева.*
(c) *T сохраняет конечные произведения и ядра.*

Доказательство. Ввиду 5.39, (a) $\Leftrightarrow$ (c), а ввиду 5.26, (c) $\Rightarrow$ (b).

Предположим далее, что условие (b) выполнено. Тогда функтор T, согласно 6.9, аддитивен и поэтому T сохраняет конечные произведения в силу 3.38. Итак, (b) $\Rightarrow$ (c). □

6.12. Предложение. *Пусть C — полная абелева категория. Тогда следующие свойства функтора $T\colon C \rightsquigarrow D$ эквивалентны:*
(a) *T сохраняет пределы.*
(b) *T сохраняет произведения и ядра.*

Доказательство. См. 5.39. □

6.13. Упражнения.

*6.13.1. Для произвольных категорий C и D функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$ является сопряженным слева к функтору $T\colon C \rightsquigarrow D$ тогда и только тогда, когда существуют морфизмы функторов $\Phi\colon 1_D \to TS$ и $\Psi\colon ST \to 1_C$, такие, что

(a) $$(T\Psi)(\Phi T) = 1_T$$

или, эквивалентно, $T(\Psi_X)\,\Phi_{TX} = 1_{TX}$ для каждого объекта X категории C и

(b) $$\Psi_{SY}\, S(\Phi_Y) = 1_{SY},$$

для каждого объекта Y категории D. [Ср. 5.68 (1).]

6.13.2. Если (S, T) — сопряженная пара для абелевых категорий и функтор S точен, то T сохраняет инъективные объекты. Обратно, если функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ сохраняет инъективные объекты, а категория C инъективно богата, то функтор $S\colon D \rightsquigarrow C$ точен.

6.13.3. Пусть C — абелева категория. Говорят, что C имеет **точные прямые пределы**, если для каждого направленного множества I функтор копредела $C^I \rightsquigarrow C$ является точным.

(a) Если C — кополная абелева категория с точными прямыми пределами, то C удовлетворяет следующему условию: для каждого направленного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ подобъектов объекта A и каждого подобъекта B объекта A справедливо соотношение

$$\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \sum_{i\in I} (A_i \cap B).$$

Кополная категория C, удовлетворяющая этому условию, называется AB 5-**категорией.**

(b) В кополной AB 5-категории существуют точные прямые пределы.

Категории функторов

6.14. Предложение. *Пусть L, M и C — категории. Тогда имеют место канонические эквивалентности*

(1) $$[C^L]^M \overset{h}{\rightsquigarrow} C^{M\times L} \overset{g}{\rightsquigarrow} [C^M]^L,$$

где, например,

(2) $$h(F)(X, Y) = F(X)(Y)$$

для всех $X \in \operatorname{Obj} M$, $Y \in \operatorname{Obj} L$ и морфизмов или объектов F категории $[C^L]^M$. Эквивалентность

(3) $$gh \begin{cases} [C^L]^M \rightsquigarrow [C^M]^L \\ F \mapsto F' \ (\textit{на объектах и морфизмах}) \end{cases}$$

такова, что

(4) $$F'(Y)(X) = h(F)(X, Y) = F(X)(Y)$$

для всех объектов и морфизмов Y категории L и всех объектов и морфизмов X категории M. Кроме того,

(5) $$(\varprojlim_{M,\,C^L} F)(Y) = \varprojlim_{M,\,C} F'(Y)$$ [1]

для всех $Y \in \operatorname{obj} L$, откуда

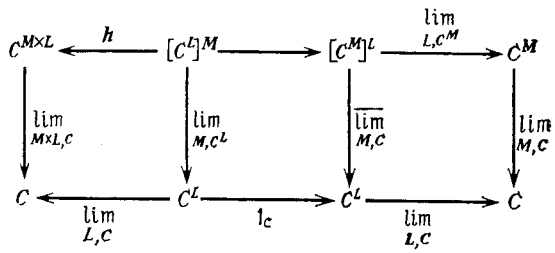
(6) $$\varprojlim_{M,\,C^L} F = \overline{\varprojlim_{M,\,C}}\, F^{[2]}$$

---

[1] Если правая часть определена.— *Прим. перев.*

[2] Здесь в левой части записано произведение функторов, в то время как в правой — значение функтора $\overline{\varprojlim}_{M,C}$ на объекте F'. — *Прим. перев.*

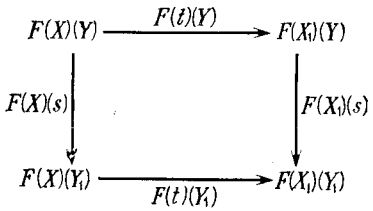
для всех $F \in \mathrm{Obj}\,[C^L]^M$, *где* $\varprojlim_{M,C}$ — *функтор, индуцированный предельным функтором* $\lim_{M,C}: C^M \rightsquigarrow C$. *Более того, диаграмма*

(7)


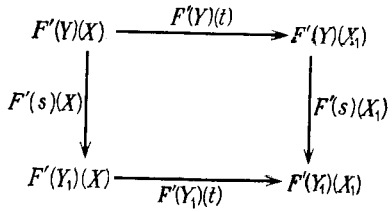
где отображение $[C^L]^M \to [C^M]^L$ *естественное, коммутативна.*

Доказательство. Ясно, что gh является эквивалентностью тогда и только тогда, когда h и g — эквивалентности. Достаточно доказать, что, например, gh является функтором, так как обратный для него определяется равенством $((gh)^{-1}(H)(X))(Y) = H(Y)(X)$.

Если t: $X \to X_1$ — любой морфизм категории M и $F \in \mathrm{Obj}\,[C^L]^M$, то $F(t)$: $F(X) \to F(X_1)$ — естественное преобразование функторов из категории L в категорию C. Поэтому для любого морфизма s: $Y \to Y'$ категории L диаграмма

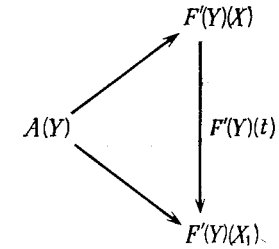
(8)


коммутативна. Морфизм $F'(s)$ категории C^M определяется равенством $F'(s)(X) = (F(X)(s)$. Таким образом, диаграмма

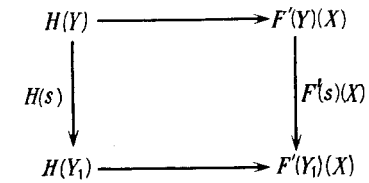
(8′)


коммутативна и тем самым показано, что $F'(s)$ — естественное преобразование для любого морфизма s: $Y \to Y_1$ категории L, т. е. $F'(s)$ — морфизм в C^M. Это доказывает, что F' — функтор, т. е. является, как и утверждалось, объектом категории $[C^M]^L$, и что gh — эквивалентность с указанным выше обратным.

Если A — объект категории C^L, F: $M \rightsquigarrow C^L$ — функтор и если $\{A \to F(X)\}_{X\in \mathrm{Obj}\,M}$ — элемент категории compat F, то предыдущая диаграмма[1] показывает, что для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\,L$ диаграмма



коммутативна для всех морфизмов t: $X \to X_1$ категории M. Поэтому для каждого Y семейство $\{A(Y) \to F'(Y)(X)\}_{X\in \mathrm{Obj}\,M}$ является элементом категории compat $F'(Y)$. Пусть для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\,L$ в категории compat $F'(Y)$ имеется правый нуль $H(Y)$. Тогда существует объект H категории C^L, который ставит в соответствие каждому морфизму s: $Y \to Y_1$ категории L единственный морфизм $H(s)$: $H(Y) \to H(Y_1)$, такой, что диаграмма



коммутативна для любого $X \in \mathrm{Obj}\,M$. Морфизм $H(s)$ существует, потому что семейство

$$\{H(Y) \to F'(Y)(X) \xrightarrow{F'(s)(X)} F'(Y_1)(X)\}_{X\in \mathrm{Obj}\,M},$$

как показывает диаграмма (8′), является элементом категории compat $F'(Y_1)$. Кроме того, для каждого $X \in \mathrm{Obj}\,M$ определено естественное преобразование функторов $H \to F(X)$, такое, что семейство

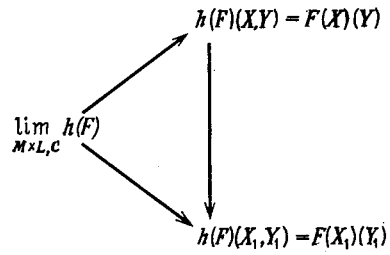
$$\{H(Y) \to F(X)(Y) = F'(Y)(X)\}_{X\in \mathrm{Obj}\,M}$$

[1] И равенство (4).— *Прим. перев.*

является финальным объектом категории compat $F'(Y)$ для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, L$. Таким образом, $\{H \to F(X)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, M}$ — правый нуль категории compat F и, следовательно, $H = \lim\limits_{M, C^L} F$. Другими словами,

$$(\lim_{M, C^L} F)(Y) = H(Y) = \lim_{M, C} F'(Y)$$

для каждого $Y \in \mathrm{Obj}\, L$. Это доказывает коммутативность второго квадрата диаграммы (7), поскольку по определению $(\overline{\lim\limits_{M,C}} F')(Y) = \lim\limits_{M,C} F'(Y)$. Третий квадрат диаграммы коммутативен, так как функтор $\lim\limits_{L,C}$ сохраняет пределы. Далее, поскольку диаграмма



коммутативна для любого морфизма $(X, Y) \to (X_1, Y_1)$ категории $M \times L$ и

$$\{\lim_{M \times L, C} h(F) \to h(F)(X, Y)\}_{(X, Y) \in M \times L}$$

— правый нуль категории compat $h(F)$, то

$$\lim_{M \times L, C} h(F) \approx \lim_{L, C} \lim_{M, C^L} F$$

— эквивалентность, естественная по F. Поэтому первый квадрат коммутативен. □

6.15. Следствие. *Пусть L, M и C — категории. Воспользуемся обозначением $\lim\limits_{I,D} G = \lim\limits_{i \in I} G(i)$ для любого функтора $G\colon I \to D$. Тогда для любого функтора $F\colon M \rightsquigarrow C^L$*

$$(\lim_{X \in M} F(X))(Y) = \lim_{X \in M} F(X)(Y).\ ^{1})$$

Кроме того, если $H(Y)$, где Y — объект категории L, определяется как такой объект категории C, что

$$H(Y) = (\lim F)(Y) = \lim F'(Y) = \lim_{X \in M} F(X)(Y),$$

[1]) Если правая часть определена.— *Прим. перев.*

то семейство канонических морфизмов $\{H(Y) \to F(X)(Y)\}_{X \in \mathrm{Obj}\, M}$ является правым нулем категории compat $F'(Y)$ *и определяет объект*

$$H = \lim_{M, C^L} F$$

категории C^L.

Доказательство. Это следует из предложения 6.14 и его доказательства. □

6.16. Предложение. *Для любой категории L следующие свойства и дуальные им переносятся с категории C на категорию C^L: (1) (конечная) полнота; (2) существование (конечных или расслоенных) произведений; (3) существование ядер или уравнителей; (4) существование образов, сумм или (конечных) пересечений; (5) нормальность и существование коядер; (6) аддитивность; (7) точность; (8) абелевость; (9) точность и локальная малость (в предположении, что L — малая категория). Если категории C и L аддитивны, то этими свойствами обладают также и категории* Adfunct (L, C), *если ими обладает C.*

Доказательство. Формула (5) предложения 6.14 определяет предел функтора $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ поточечно через пределы соответствующих функторов $F'(Y)\colon M \rightsquigarrow C$. Таким образом, категория C^L (конечно) полна, если такой является категория C, и, более того, C^L обладает пределами функторов $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ всех тех типов, что и категория C. Итак, если категория C имеет нулевой объект, то нулем категории C^L является постоянный функтор, принимающий на всех объектах категории L нулевое значение. Аналогично, если C имеет (конечные) произведения, то и C^L имеет (конечные) произведения. Произведение $\prod\limits_{X \in M} A(X)$ в категории C^L является пределом функтора $A\colon M \rightsquigarrow C^L$, причем

$$(\prod_{X \in M} A(X))(Y) = \prod_{X \in M} A(X)(Y) = \prod_{X \in M} A'(Y)(X)$$

для всех $Y \in \mathrm{Obj}\, L$. Таким образом, если $\{F_i\}_{i \in I}$ — семейство объектов категории C^L, то

$$(\prod_{i \in I} F_i)(Y) = \prod_{i \in I} F_i(Y).$$

Свойства (2) — (4) наследуются категорией C^L поточечно (ср. стр. 391), а следующее предложение 6.17 устанавливает возможность перенесения свойства (5). Если C аддитивна, то сложение естественных преобразований определяет операцию в Mor C^L, относительно которой C^L аддитивна. Если C — точная категория, то эпиморфизмы (мономорфизмы) категории C^L являются эпимор-

физмами (мономорфизмами) на каждом объекте категории L ввиду устанавливаемого ниже предложения 6.17, а каждый морфизм категории C^L поточечно разлагается в произведение эпиморфизма и мономорфизма, и притом единственным образом, поскольку $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$ определяется поточечно. Поэтому C^L — точная категория. Это доказывает возможность перенесения свойства (7). Остается заметить, что свойство (8) следует из (7) и (6). Приводимое ниже предложение достаточно для проверки возможности перенесения свойства (9).

Если C и L — аддитивные категории, то предыдущие рассуждения остаются справедливыми для $\operatorname{Adfunct}(L, C)$. □

6.17. Предложение.

6.17.1. *Пусть L и C — такие категории, что мономорфизмы категории C^L поточечно являются мономорфизмами. Тогда если категория C локально мала, а L — малая категория, то категория C^L локально мала.*

6.17.2. *Если мономорфизмы и эпиморфизмы категории C^L поточечно являются мономорфизмами и эпиморфизмами соответственно и категория C сбалансирована (или нормальна и с коядрами), то C^L также сбалансирована (или нормальна и с коядрами).*

6.17.3. *Если C — категория с ядрами и любой морфизм f, для которого $\ker f = 0$, является мономорфизмом, то мономорфизмы категории C^L являются мономорфизмами на каждом объекте категории L.*

6.17.4. *Если C — любая точная категория, то* 6.17.1, 6.17.2 *и* 6.17.3 *справедливы.*

6.17.5. *Любая аддитивная категория C с ядрами удовлетворяет условиям утверждения* 6.17.3 *и поэтому для любой аддитивной категории L категория* $\operatorname{Adfunct}(L, C)$ *удовлетворяет* 6.17.3. *Кроме того, если вдобавок C — локально малая категория, то* $\operatorname{Adfunct}(L, C)$ *также локально мала.*

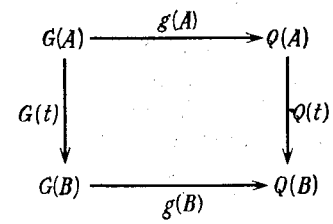
Доказательство 6.17.1. Если $K \to F$ — мономорфизм в C^L, то по предположению $K(A) \to F(A)$ — мономорфизм в C для любого $A \in \operatorname{Obj} L$. Поэтому класс S представителей подобъектов объекта F в категории C^L является множеством и существует вложение множества S в декартово произведение семейства $\{F(A)\}_{A \in \operatorname{Obj} L}$.

Доказательство 6.17.2. Мономорфизмы и эпиморфизмы категории C^L являются мономорфизмами и эпиморфизмами на каждом объекте категории L. Следовательно, если f — мономорфизм и эпиморфизм в C^L, то f является эквивалентностью на каждом объекте категории L. Поэтому категория C^L сбалансирована.

Пусть теперь C — нормальная категория с коядрами, $f: F \to G$ — мономорфизм категории C^L и $g(A): G(A) \to Q(A)$ — коядро морфизма $f(A): F(A) \to G(A)$ для всех $A \in \operatorname{Obj} L$. Если $t: A \to B$ — произвольный морфизм в L, то

$$g(B) f(B) = 0 = g(B) f(B) F(t) = g(B) G(t) f(A).$$

Поскольку $\operatorname{coker} f(A) = g(A)$, то существует канонический морфизм $Q(t): Q(A) \to Q(B)$, такой, что диаграмма



коммутативна. Таким образом, если $t': B \to B'$ — другой морфизм категории L, то

$$\begin{aligned} Q(t't)\, g(A) = g(B')\, G(t't) &= [g(B')\, G(t')]\, G(t) = \\ &= [Q(t')\, g(B)]\, G(t) = \\ &= Q(t')\, [g(B)\, G(t)] = \\ &= Q(t')\, [Q(t)\, g(A)], \end{aligned}$$

откуда, ввиду того что $g(A)$ — эпиморфизм, следует $Q(t't) = Q(t')\, Q(t)$. Поэтому определен функтор $Q: L \rightsquigarrow C$, приписывающий каждому объекту или морфизму h категории L значение $Q(h)$, а диаграмма показывает, что отображение, приписывающее каждому объекту A категории L значение $g(A)$, является естественным преобразованием $g: G \to Q$. Кроме того, в силу 5.17 $f: F \to G$ (поточечно) является ядром естественного преобразования $g: G \to Q$. Это доказывает нормальность категории C^L.

Доказательство 6.17.3. Если f — мономорфизм категории C^L, то $\ker f = 0$. По условию категория C имеет ядра. В силу (5) из 6.14 ядра в C^L определяются поточечно. Следовательно, $\ker f(A) = 0$ для всех $A \in \operatorname{Obj} L$. Поэтому $f(A)$ — мономорфизмы.

Доказательство 6.17.4. Ввиду 5.24 морфизм $f: A \to B$ в произвольной точной категории является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = 0$. Дуальное утверждение справедливо для эпиморфизмов.

Доказательство 6.17.5. Если $\ker f = 0$ в аддитивной категории C, то из равенства $fk = fq$ для морфизмов k и q вытекает, что $f(k - q) = 0$, откуда $k = q$, и, следовательно, f — мономорфизм. Поэтому имеют место утверждения 6.17.1 и 6.17.3. Доказательство того, что категория C^L локально мала, годится и для доказательства того, что категория Adfunct (L, C) локально мала в случае, когда L является малой аддитивной категорией. □

Для удобства категория Funct $(L, C) = C^L$ будет обозначаться также через $[C^L]$ или $[L, C]$.

6.18. Следствие. *Если L, M и C — аддитивные категории, то полная подкатегория (L, C) категории C^L, состоящая из всех аддитивных функторов $L \rightsquigarrow C$, является аддитивной категорией, обозначаемой также через (C^L) или* Adfunct (L, C). *Предложения* 6.14 *и* 6.16 *с заменой $[C^M]^L$ на $((C^M)^L) =$ Adfunct (L, C^M), $C^{M\times L}$ на $(C^{M\times L})$ и т. д. становятся справедливыми для аддитивных категорий и аддитивных функторов. Таким образом,* $\lim_{L,C}$ *является аддитивным функтором, и если $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ — аддитивный функтор, то $F'\colon L \rightsquigarrow C^M$ и* $\lim_{M,C^L} F$ *аддитивны. В частности, если категория C имеет одно из перечисленных в предложении* 6.16 *свойств, то тем же свойством обладает и категория (C^L). Итак, (C^L) — абелева категория, если категория C абелева. Наконец, категория* Sex (L, C) *точных слева функторов $L \rightsquigarrow C$, где L и C — абелевы категории, является абелевой.*

Доказательство. Ввиду 3.38 любой функтор из аддитивной категории в аддитивную категорию, сохраняющий пределы, является аддитивным, так как он сохраняет (конечные) произведения. Таким образом, $\lim_{L,C}$ — аддитивный функтор для любых аддитивных категорий L и C, поскольку функтор предела сохраняет пределы в силу 5.43. Поэтому доказательства предложений 6.14, 6.16 и следствия 6.15 годятся для доказательства всех утверждений следствия, кроме последнего, которое остается в качестве упражнения. (Ср. упражнения в конце главы.) □

6.19. Упражнения.

6.19.1. Вопрос: если C — инъективно богатая абелева категория, а категория L мала, то будет ли инъективно богатой категория C^L? (Ср. AB 5-категории, гл. 14.)

* 6.19.2. (См. 6.13.) Кополная абелева категория C с точными прямыми пределами и образующим инъективно богата. В случае когда $C =$ mod-$\mathbb{Z}$, этим же свойством обладает и категория C^L для любой малой абелевой категории L.

6.19.3. (a) Если C — абелева категория с точными прямыми пределами и L — направленное множество, то $c(E)$ — инъективный объект категории C^L всякий раз, когда E — инъективный объект категории C. Обратно, если C инъективно богата, это последнее условие (сохранение инъективных объектов) влечет за собой точность функтора копредела $C^L \rightsquigarrow C$.

(b) Привести пример, показывающий, что даже при наличии в категории C точных прямых пределов, функтор копредела $C^A \rightsquigarrow C$ не обязан быть точным для произвольной малой категории A. (*Указание*: показать, что функтор коядра [1]) не обязательно точен.)

6.19.4. Показать, что mod-$R \approx$ Adfunct $(R,$ mod-$\mathbb{Z})$ для любого кольца R.

6.19.5. В качестве частного случая вывести из 6.18, что любой предел правых R-модулей равен пределу, вычисленному в категории абелевых групп и снабженному «унаследованной» структурой R-модуля.

6.20. Предложение (Йонеда [54]). *Для любой категории L и любого ее объекта A функтор*

$$[h^A, \ ]\begin{cases} \mathrm{SETS}^L \rightsquigarrow \mathrm{SETS} \\ F \mapsto [h^A, F] \approx FA \end{cases}$$

сохраняет пределы и копределы. Если L — малая категория, то $G = \coprod_{A\in \mathrm{Obj}\, L} h^A$ является образующим категории SETS^L *и вложением $G\colon L \rightsquigarrow$* SETS.

Если L — малая аддитивная категория, то h^A — малый проективный объект категории Adfunct $(L,$ mod-$\mathbb{Z})$ *и $G\colon L \rightsquigarrow$* mod-$\mathbb{Z}$ — *вложение, а функтор*

$$[G, \ ]\colon \text{Adfunct } (L, \text{mod-}\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$$

является точным вложением.

Доказательство. В силу 2.3 функция Йонеды

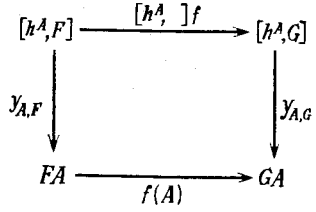
$$y_{A,\,T}\begin{cases} [h^A, F] \to FA \\ t \mapsto t(A)(1_A) \end{cases}$$

является биективной и естественной по A и F, и для любого естественного преобразования $f\colon F \to G$ функторов $L \rightsquigarrow$ SETS диа-

[1]) То есть функтор копредела $C^A \rightsquigarrow C$, где A — категория, все объекты и неединичные морфизмы которой описываются диаграммой $x \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} y$. — *Прим. перев.*

грамма

(1)



коммутативна. (См. диаграмму III в доказательстве 2.3.) Отсюда следует, что если g: $G \to H$ — коуравнитель морфизмов f': $F \to G$ и f: $F \to G$ в C^L, определенный поточечно, т. е. если $g(A)$: $G(A) \to H(A)$ — коуравнитель морфизмов $f(A)$ и $f'(A)$ в SETS для каждого $A \in \mathrm{Obj}\, L$, то $[h^A,]g$: $[h^A, G] \to [h^A, H]$ является коуравнителем морфизмов $[h^A,]f$ и $[h^A,]f'$ в SETS. Таким образом, $[h^A,]$ сохраняет коуравнители. Кроме того, если $\coprod_{i\in I} F_i$ — произвольное копроизведение в SETS^L, то

$$[h^A, \coprod_{i\in I} F_i] = (\coprod_{i\in I} F_i)(A) = \coprod_{i\in I} F_i(A) = \coprod_{i\in I} [h^A, F_i],$$

ввиду того что $[h^A, T] = TA$ для любого функтора T: $L \rightsquigarrow$ SETS. Поэтому $[h^A,]$ сохраняет копроизведения и коуравнители, а следовательно, и копределы в силу утверждения, дуального к 5.39. Кроме того, для любой категории C и объекта X функтор h^X: $C \rightsquigarrow$ SETS сохраняет пределы ввиду 5.41. Это доказывает первое утверждение. Далее, если f и g — различные морфизмы $F \to G$, то $f(A) \neq g(A)$ для некоторого $A \in \mathrm{Obj}\, L$. Поэтому $[h^A,]f \neq [h^A,]g$, ввиду диаграммы (1). Отсюда следует, что $ft \neq gt$ для некоторого морфизма t: $h^A \to F$ категории SETS^L. Если категория L мала, то $\{h^A\}_{A\in \mathrm{Obj}\, L}$ является семейством образующих категории SETS^L и поэтому копроизведение G этого семейства является образующим. Если a: $B \to C$ и b: $B \to C$ — морфизмы категории L, такие, что $G(a) = G(b)$, то $h^A(a) = h^A(b)$ для всех объектов A категории L. В частности, $h^B(a) = h^B(b)$, откуда $a = b$. Итак, G: $L \rightsquigarrow$ SETS — вложение, индуцирующее вложение G: $L \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ в случае, когда L аддитивна.

Если категория L аддитивна, то индуцированный функтор h^A : $L \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ сохраняет копределы и, следовательно, аддитивен, ввиду 3.38. Так как функтор $[h^A,]$ сохраняет пределы и копределы, то h^A — проективный объект категории Adfunct (L, mod-$\mathbb{Z}$), являющийся малым, ввиду 4.25 С. Так как категория Adfunct (L, mod-$\mathbb{Z}$) = (mod-$\mathbb{Z}$)^L обладает копроизведениями, то объект G

принадлежит ей и является проективным образующим, поэтому

$$[G,]: (\text{mod-}\mathbb{Z})^L \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$$

является точным вложением. □

6.21. Следствие.

6.21.1. *Если L — аддитивная категория, то существует полное вложение*

$$H \begin{cases} L^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow (\text{mod-}\mathbb{Z})^L \\ A^* \mapsto h^A, \end{cases}$$

индуцированное (и называемое также) ***функтором представления.***

6.21.2. *Если L — малая аддитивная категория, то определено вложение $L \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$, являющееся произведением функтора представления $L \rightsquigarrow (\text{mod-}\mathbb{Z})^{L^{\mathrm{op}}}$ и точного вложения $(\text{mod-}\mathbb{Z})^{L^{\mathrm{op}}} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Во-первых, $H(A^*) = h^A$ — объект категории Adfunct (L, mod-$\mathbb{Z}$) для любого объекта A аддитивной категории L. Во-вторых, если L — малая аддитивная категория, то такой же является и категория L^{op}. Поэтому можно применить предложение 6.20 и получить точное вложение $(\text{mod-}\mathbb{Z})^{L^{\mathrm{op}}} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$mod-$\mathbb{Z}$. Это доказывает следствие, так как произведение вложений является вложением. □

Для того чтобы получить из вложения G: $L \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ точное вложение H: $L \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$, требуются дополнительные условия. Так, если категория L является малой и абелевой, то будет показано, что Adfunct (L, mod-$\mathbb{Z}$) имеет инъективные оболочки (см. гл. 14) и инъективная оболочка H функтора G является требуемым точным вложением.

Говорят, что функтор F: $M \rightsquigarrow C^L$ **поточечно** обладает свойством P, если для каждого объекта X категории M функтор $F(X)$: $L \rightsquigarrow C$ обладает свойством P.

6.22. Следствие.

6.22.1. *Пусть F: $M \rightsquigarrow C^L$ поточечно обладает свойством P. Тогда образ F' функтора F при канонической эквивалентности $(C^L)^M \approx (C^M)^L$ обладает тем же свойством, если P — одно из следующих свойств: сохранение (конечных) пределов или (конечных) копределов.*

Кроме того, если F': $L \rightsquigarrow C^M$ поточечно обладает свойством P, то F обладает свойством P.

6.22.2. *Если функтор F сохраняет пределы поточечно, то функтор* $\lim_{M,C^L} F$: $L \rightsquigarrow C$ *сохраняет пределы. Двойственно, если F сохра-*

няет копределы поточечно, то функтор $\operatorname{colim}_{M,C^L} F\colon L \rightsquigarrow C$ *сохраняет копределы.*

6.22.3. *Если категории* L *и* C *точны и функтор* $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ *точен слева (справа) поточечно, то функтор* F' *точен слева (справа).*

6.22.4. *Если* L *и* C *— точные категории и функтор* $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ *точен справа поточечно, то функтор* colim F *точен справа. Двойственным образом, если* F *точен слева поточечно, то функтор* lim F *точен слева.*

Доказательство 6.22.1. Пусть $T\colon N \rightsquigarrow L$ — функтор. Тогда $Y = \lim T$ — объект категории L и, поскольку $F(X)$ сохраняет пределы,

$$F'(\lim T)(X) = F(X)(\lim T) = \lim F(X)\,T$$

для каждого объекта X категории L. Следовательно, семейство

$$\{F'(\lim T)(X) \to F(X)\,T(Z) = F'(TZ)(X)\}_{Z \in \mathrm{Ob}\, N}$$

является правым нулем категории compat $F(X)\,T$ и поточечно определяет правый нуль $\{F'(\lim T) \to F'(T)(Z)\}_{Z \in \mathrm{Ob}\, N}$ категории compat $F'T$. Таким образом, $F'(\lim T) = \lim F'T$, и поэтому функтор F' сохраняет пределы, т. е. $F'\lim = \overline{\lim}\, F'$. Если категория N конечна, а функтор F поточечно сохраняет конечные пределы, то это же доказательство показывает, что F' сохраняет конечные пределы.

Доказательство 6.22.2.

$$\begin{aligned}(\lim_{M,\,C^L} F)(\lim_{N,\,L} T) &= \lim_{M,\,C} F'(\lim_{N,\,L} T) = \\ &= \lim_{M,\,C}(\lim_{N,\,C^M}[F'T]) = \\ &= \lim_{N,\,C}(\overline{\lim}_{M,\,C} \circ [F'T]) = \\ &= \lim_{N,\,C}(\overline{\lim}_{M,\,C} F')\,T = \lim_{N,\,C}(\lim_{M,\,C^L} F)\,T.\end{aligned}$$

Это доказывает, что $\lim_{M,C^L} F$ сохраняет пределы.

Доказательство 6.22.3. Если $0 \to Y \to Y' \to Y'' \to 0$ — точная последовательность в L, а функтор F поточечно точен слева (справа), то последовательности

$$0 \to F(X)(Y) \to F(X)(Y') \to F(X)(Y'') \to 0$$

и

$$0 \to F'(Y)(X) \to F'(Y')(X) \to F'(Y'')(X) \to 0$$

точны слева (справа) для каждого объекта X категории M и это доказывает, что последовательность

$$0 \to F'(Y) \to F'(Y') \to F'(Y'') \to 0$$

поточечно является точной слева (справа). Итак, F' точен слева (справа).

Доказательство 6.22.4. Если предположить, что функтор F точен справа поточечно и точна справа первая последовательность в доказательстве утверждения 6.22.3, то последняя последовательность точна справа в силу 6.22.3.

Тогда, учитывая, что функтор colim сохраняет копределы, получаем, что последовательность

$$0 \to \operatorname{colim} F'(Y) \to \operatorname{colim} F'(Y') \to \operatorname{colim} F'(Y'') \to 0$$

точна справа. Но по доказанному предложению $\operatorname{colim} F'(Y) = (\operatorname{colim} F)(Y)$, и поэтому последняя последовательность показывает, что colim F точен справа. □

6.23. Следствие. *Для любой категории* C *функтор представления*

$$H\begin{cases} C^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathrm{SETS}^C \\ A^* \mapsto h^A \end{cases}$$

сохраняет пределы.

Доказательство. Каноническая эквивалентность $(\mathrm{SETS}^C)^{C^{\mathrm{op}}} \approx (\mathrm{SETS}^{C^{\mathrm{op}}})^C$ отображает функтор H в функтор $H'\colon C \rightsquigarrow \mathrm{SETS}^{C^{\mathrm{op}}}$. Если A и B — объекты категории C, то

$$H'(A)(B^*) = H(B^*)(A) = h^B(A) = h_A D(B^*),$$

где $D\colon C \rightsquigarrow C^{\mathrm{op}}$ — каноническая двойственность. Так как h_A переводит копределы в пределы, то функтор $H'(A) = h_A D$ сохраняет пределы для каждого объекта A категории C. Следовательно, в силу 6.22.1 H сохраняет пределы. □

Пусть C — кополная абелева категория. Говорят, что C имеет **точные прямые пределы**, если выполнены два следующих эквивалентных условия:

1. Для любой малой направленной категории L функтор копредела $C^L \rightsquigarrow C$ является точным.

2. Для любой точной последовательности $0 \to F \to G$ в категории C^L, где L — малая направленная категория, каноническая последовательность $0 \to \varinjlim F \to \varinjlim G$ в категории C точна.

6.24. Следствие. *Пусть L и C — точные категории. Если C имеет точные прямые пределы, то любой поточечно точный (слева) функтор $F\colon M \rightsquigarrow C^L$ из направленного множества M имеет точный (слева) прямой предел* $\varinjlim F\colon L \rightsquigarrow C$.

Доказательство. Если C имеет точные прямые пределы, то последовательность в доказательстве утверждения 6.22.4 точна (слева) всякий раз, когда поточечно точен (слева) функтор F. Поскольку

$$\varinjlim F'(Y) = (\varinjlim F)(Y),$$

это доказывает, что $\varinjlim F$ точен (слева). □

6.25. Предложение. *Если C — категория с точными прямыми пределами, то такой же является и категория C^L для любой категории L, и поэтому для любой аддитивной категории L категория* Adfunct (L, C) *имеет точные прямые пределы.*

Доказательство. Пусть F' обозначает образ любого функтора F относительно канонической эквивалентности $(C^L)^M \approx (C^M)^L$. Тогда точность последовательности $0 \to F \to G$ в $(C^L)^M$ влечет за собой точность последовательности $0 \to F' \to G'$ в $(C^M)^L$. Таким образом, последовательность

$$0 \to F'(Y) \to G'(Y)$$

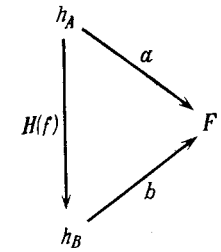
точна в C^M для любого объекта Y категории L. Так как C имеет точные прямые пределы, то последовательность

$$0 \to \varinjlim F'(Y) \to \varinjlim G'(Y)$$

точна в C для любого объекта Y категории L. Но поскольку, согласно формуле, дуальной (5) из 6.14, $\varinjlim F'(Y) = (\varinjlim F)(Y)$ для любого функтора F, то отсюда вытекает, что $0 \to \varinjlim F \to \varinjlim G$ — точная последовательность в категории C^L. Тем самым доказано, что C^L имеет точные прямые пределы. Если категория L аддитивна, то это же доказательство показывает, что Adfunct (L, C) имеет точные прямые пределы, если их имеет категория C. □

Другие результаты о категориях с точными прямыми пределами можно найти в упражнениях в конце главы. Вновь эта тема будет затронута в гл. 14.

6.26. Упражнение. Любой контравариантный функтор $F\colon L \rightsquigarrow$ SETS является копределом представимых контравариантных функторов. Обозначим через L^0S категорию контравариантных функторов $L \rightsquigarrow S$, где $S =$ SETS, и для любого объекта F категории L^0S рассмотрим категорию L/F, объекты которой суть морфизмы $a\colon h_A \to F$ в L^0S, где h_A — представимый функтор, определенный объектом A категории L. Морфизмами категории L/F являются такие морфизмы $f\colon A \to B$ категории L, что диаграмма



где $H(f)\colon h_A \to h_B$ — каноническое отображение, коммутативна. Тогда

$$F = \operatorname{colim} d_F,$$

где $d_F\colon L/F \to L^0S$ — функтор, приписывающий объекту $a\colon h_A \to F$ категории L/F значение h_A, а каждому морфизму f категории L/F — значение $H(f)$.

6.27. Упражнение. Пусть C — любая кополная категория, а L — произвольная категория. Тогда любой ковариантный функтор $F\colon L^0S \rightsquigarrow C$ (из категории L^0S контравариантных функторов $L \rightsquigarrow S$) имеет сопряженный справа тогда и только тогда, когда F сохраняет копределы. Кроме того, функтор

$$\begin{cases} C^{L^0S} \rightsquigarrow C^L \\ F \quad \mapsto FH, \end{cases}$$

где $H\colon L \rightsquigarrow L^0S$ — функтор контравариантного представления, индуцирует эквивалентность полной подкатегории сохраняющих копределы функторов категории Funct (L^0S, C) в категорию Funct (L, C). Таким образом, если C — кополная категория, то каждая категория функторов C^L эквивалентна категории, порожденной в некоторой категории функторов функторами, сохраняющими копределы. (См. Габриель и Цисман [71, стр. 65—69] или Букур и Деляну [72, стр. 72—75].) [$FH(A) = F(h_A)$ для любого объекта A категории L.]

Точные сопряженные слева функторы

6.28. Предложение. *Пусть (h, S, T, C, D) — сопряженная пара для абелевых категорий C и D.*

6.28.1. *Если $S\colon D \rightsquigarrow C$ — точный функтор, то T сохраняет инъективные объекты.*

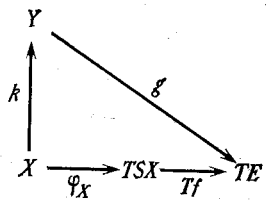
6.28.2. *Если категория C инъективно богата (например, если C имеет инъективный кообразующий), то верно и обратное: если T сохраняет инъективные объекты, то S — точный функтор.*

Доказательство. Если Y — произвольный объект категории C, то существует естественная эквивалентность контравариантных функторов со значениями в категории SETS

(1) $$h_Y S \approx h_{TY}.$$

Таким образом, если S — точный функтор и Y — инъективный объект, т. е. точен функтор h_Y: $C \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$, то функтор h_{TY} со значениями в категории абелевых групп точен. Это доказывает 6.28.1. Если категория C имеет инъективный кообразующий Y и, следовательно, C инъективно богата, то обратно: точность функтора h_{TY} влечет за собой точность функтора S, поскольку унивалентный функтор h_Y: $C \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ сохраняет неточные последовательности в силу 3.49.

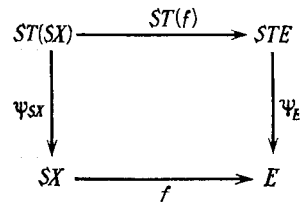
Доказательство 6.28.2. (Общий случай.) Так как функтор S сохраняет копределы, в частности коядра, то достаточно показать, что S — монофунктор. Пусть дана точная последовательность $0 \to X \xrightarrow{k} Y$, и пусть точна последовательность $0 \to SX \xrightarrow{f} E$ для некоторого инъективного объекта E категории C. Тогда по предположению TE — инъективный объект в D, и поэтому диаграмма



может быть дополнена до коммутативной некоторым морфизмом g: $Y \to TE$. Отсюда $gk = T(f)\,\varphi_X$ и

(1) $$S(g)\,S(k) = S(Tf)\,S(\varphi_X).$$

Предположим теперь, что $S(k)\,a = 0$ для некоторого морфизма a. Тогда $S(Tf)\,S(\varphi_X)\,a = 0$, и из коммутативности диаграммы



вытекает, что $f\psi_{SX}S(\varphi_X)\,a = 0$. Так как по утверждению, дуальному к 5.6.8 (1), $\psi_{SX}S(\varphi_X) = 1_{SX}$ и поскольку f — мономорфизм, то $a = 0$. Это доказывает, что $S(k)$ — мономорфизм. □

6.29. **Следствие.** *Пусть f: $R \to S$ — гомоморфизм колец и* mod-(f): mod-$S \rightsquigarrow$ mod-R — *индуцированный функтор* (ср. 3.4 и далее). *Тогда каждый инъективный правый S-модуль является инъективным каноническим правым R-модулем тогда и только тогда, когда канонический левый R-модуль S плоский.* □

В частности, это следствие справедливо либо когда $S = R/A$ — факторкольцо кольца R по идеалу A, либо когда R — подкольцо кольца S и f: $R \to S$ — включение.

Упражнения к гл. 6

1. Кополная абелева категория имеет точные прямые пределы тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

для каждого объекта A категории C и направленного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ его подобъектов канонический морфизм $\varinjlim_{i\in I} A_i \to A$ является мономорфизмом, т. е. прямой предел направленного семейства подобъектов — подобъект. (Ср. 6.13.3.)

2. Показать, что для любого кольца R категория mod-R имеет точные прямые пределы.

3. Если C — абелева категория с точными прямыми пределами и образующим U, то любой ее объект A является прямым пределом направленного семейства конечно порожденных относительно U подобъектов объекта A. (Объект X называется **конечно порожденным относительно** U, если существует точная последовательность $U^n \to X \to 0$, где n — целое число, зависящее от X.)

4. Если M — объект категории mod-A и $M = \varinjlim M_i$, где $\{M_i\}_{i\in I}$ — направленное семейство объектов категории mod-A, то существует естественная эквивалентность

$$\underset{A}{\otimes} M = \varinjlim \underset{A}{\otimes} M_i$$

функторов со значениями в категории абелевых групп. Кроме того, если M_i — плоские модули для всех $i \in I$, то и M — плоский модуль, т. е. прямой предел плоских модулей плоский.

* 5. Пусть C — малая абелева категория.

(a) Тогда любой инъективный объект категории Funct (C, mod-$\mathbb{Z}$) является точным справа функтором F: $C \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$. Если категория C нётерова, то верно и обратное.

(b) Любое существенное расширение монофунктора F: $C \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ в категории Funct (C, mod-$\mathbb{Z}$) является монофунктором.

6. Если C — нётерова малая абелева категория, то функтор представления H: $C^{op} \rightsquigarrow$ Funct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ сохраняет инъективные объекты и, следовательно, обладает точным сопряженным слева функтором. [*Указание*: если P — проективный объект в C, то $h^P = H(P^*)$ — инъективный объект в Funct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ по предыдущему упражнению. Применить 6.28.]

7 (Фрейд). Категория B эквивалентна категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ для некоторой малой аддитивной категории C тогда и только тогда, когда B — кополная абелева категория с семейством образующих, состоящим из малых проективных объектов.

8 (Фрейд). Если C — малая аддитивная категория с ядрами, то T: $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$ является малым проективным объектом категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда T представим.

9. Если C — малая абелева категория, то каждый проективный объект категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ сохраняет ядра.

10 (Габриель — Митчелл). Категория C эквивалентна категории модульного типа тогда и только тогда, когда C — абелева категория с копроизведениями и малым проективным образующим. (Ср. с теоремой Мориты 4.29; о малых объектах см. 4.25.)

Замечания к гл. 6

Абелевы категории были введены Маклейном [50], Буксбаумом [55] и Гротендиком [57] для того, чтобы обобщить гомологические методы Картана — Эйленберга [56] (и других). Однако теорема Фрейда — Лабкина 14.21 показала, что любая малая абелева категория обладает точным вложением в категорию абелевых групп. Таким образом (перефразируя Фрейда), абелевы группы приводят к абелевым категориям, а абелевы категории возвращают назад к абелевым группам. (См. Митчелл [65, метатеорема 2.8, стр. 101, а также 7.3, стр. 151].) Более того, любая малая абелева категория обладает полным точным вложением в некоторую категорию модульного типа (теорема Митчелла 15.30). Наконец, любая абелева категория с точными прямыми пределами и образующим является факторкатегорией (и ретрактом) категории модульного типа (теорема Поппеску — Габриеля 15.26; см. также 5.70).

Ссылки

Буксбаум [55], Букур — Деляну [72], Габриель [62], Габриель — Цисман [71], Гротендик [61], Йонеда [53], Картан — Эйленберг [60], Лабкин [60], Маклейн [50], Митчелл [65], Пуппе [67], Фрейд [60], [64].

Часть II

СТРОЕНИЕ НЁТЕРОВЫХ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

Во-первых, следует сказать, что в части II не требуется знания всей части I. Мы прилагаем список необходимых разделов (который не следует воспринимать слишком буквально!) и рекомендуем перечитать введение, особенно стр. 15—19, чтобы получить общее представление. Также следует перечитать первый абзац из рекомендаций читателю этой книги (стр. 23).

Минимальные необходимые сведения

0. Введение (декартовы произведения, инъективные и сюръективные отображения).
1. Глава 1 (категории).
2. Глава 2 (прямые суммы и произведения).
3. Глава 3:
   a) свободный модуль R^n (3.9);
   b) кольца матриц R_n (3.16 и 3.17);
   c) канонические изоморфизмы (3.38, 3.39 и 3.40)
   $$\mathrm{Hom}_R(X, A \oplus B) \approx \mathrm{Hom}_R(X, A) \oplus \mathrm{Hom}_R(X, B),$$
   $$\mathrm{Hom}_R(A \oplus B, X) \approx \mathrm{Hom}_R(A, X) \oplus \mathrm{Hom}_R(B, X)$$
   для любых трех R-модулей X, A, B;
   d) канонический изоморфизм $\mathrm{End}_R A^n \approx E_n$, где $E = \mathrm{End}_R A$ и $A^n = A \oplus \ldots \oplus A$ (n слагаемых (3.17));
   f) лемма Шура [3.10.1 (a) и (b); 3.14.3];
   g) определение проективного модуля и его характеризация как прямого слагаемого свободного модуля (3.11.2);
   h) понятие существенного расширения (3.58);
   i) (необязательно) инъективные оболочки (3.59).
4. (Необязательно) глава 4:
   a) Теорема о соответствии (4.7);
   b) Теорема Мориты (4.29).

Введение к части II

Если M — некоторый R-модуль, а K — его кольцо эндоморфизмов, то можно рассмотреть кольцевой гомоморфизм

$$\delta = \delta_M\colon R \to \operatorname{End}_K M,$$

где

$$x\delta(a) = xa$$

для всех $x \in M$, $a \in R$. Общая теорема Веддербёрна утверждает, что при некоторых условиях δ_M—наложение. В этом случае модуль M называется сбалансированным.

Кольцо R мы называем простым, если R не содержит идеалов, отличных от 0 и R. Из теоремы Веддербёрна — Артина следует, что если R — простое кольцо с условием минимальности для правых идеалов, то любой минимальный правый идеал I кольца R сбалансирован (как R-модуль). Сопоставляя это с леммой Шура, утверждающей, что кольцо эндоморфизмов R' этого R-модуля I является телом, убеждаемся в том, что R есть кольцо эндоморфизмов некоторого векторного пространства M. Из условия минимальности для R следует, что размерность векторного пространства M над R' конечна, т. е. что $(R')^n \approx M$ (как левые R'-модули), а тогда существует изоморфизм колец $R \approx R'_n$.

Назовем R-модуль M образующим, если для каждого R-модуля N существует множество индексов J и эпиморфизм $M^{(J)} \to N$ (это эквивалентно точности последовательности $M^n \to R \to 0$ для некоторого n, т. е. тому, что $M^n \approx R \oplus A$ для некоторых n и R-модуля A).

В 1958 г. Морита доказал общую теорему Веддербёрна: *каждый образующий M в категории* mod-R *сбалансирован*. Более того, сбалансированный модуль M является образующим тогда и только тогда, когда он конечно порожден и проективен над кольцом $\operatorname{End} M_R$ (7.3). Доказательство этого факта элементарно и требует совсем небольшого подготовительного материала из части I.

Как все это применяется к простым кольцам? *Если кольцо R простое, то каждый ненулевой правый идеал I кольца R является образующим, а следовательно, и сбалансирован.*

Действительно, RI — идеал, и поэтому $RI = \sum_{a \in R} aI = R$. Значит, существуют элементы $a_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $\sum_{i=1}^{n} a_i I = R$, и найдется наложение $I^n \to R$. Это показывает, что общие теоремы Веддербёрна совершенно не зависят от традиционных условий обрыва цепей. Теорема Веддербёрна — Артина немедленно получается как частный случай.

Кольцо, удовлетворяющее условию обрыва убывающих (возрастающих) цепей правых идеалов, называется артиновым (нётеровым) справа. Таким образом, простые артиновы справа кольца изоморфны кольцам матриц D_n над телами. Кольцо D_n полупросто в том смысле, что каждый правый модуль над ним является прямой суммой простых модулей. Теорема Веддербёрна — Артина 8.8 (вместе с 8.9 и 8.11) характеризует все классически полупростые кольца как конечные произведения полных колец матриц над телами или как артиновы справа кольца без ненулевых нильпотентных идеалов.

Теореме Веддербёрна — Артина предшествует в гл. 7 соответствующий результат в ситуации, когда R — простое нётерово справа кольцо. В этом случае лемма утверждает, что можно выбрать правый идеал I так, что $K = \operatorname{End} I_R$ является областью целостности с правым телом частных D, и само кольцо R обладает классическим правым кольцом частных, которое изоморфно кольцу матриц D_n над телом D для однозначно определенного числа $n > 0$. Этот последний результат является частным случаем общей теоремы, доказанной в гл. 9 и утверждающей, что кольцо R имеет классическое правое кольцо частных Q, которое классически полупросто, тогда и только тогда, когда в R нет ненулевых нильпотентных идеалов и выполнено условие обрыва возрастающих цепей аннуляторных и дополнительных правых идеалов. Глава 9 посвящена доказательству этой теоремы. (Другое доказательство намечено в гл. 16.)

Одна из теорем гл. 10 описывает все подкольца R полулокального кольца $Q = D_n$, для которых Q является классическим правым кольцом частных. (В этом случае кольцо R называется **правым порядком** в Q.) Правые порядки в $Q = D_n$— это в точности подкольца, содержащие кольцо K_n, где K — правый порядок в D (10.15 и 10.19). Если же Q — конечное произведение колец матриц над полулокальными кольцами, то R содержит конечное произведение колец матриц над правыми порядками в полулокальных кольцах.

Кольца, являющиеся правыми порядками в полулокальных кольцах частных D_n, охарактеризованы в гл. 18 (например, 18.48). Максимальные порядки в D_n оказываются кольцами эндоморфизмов модулей без кручения над правыми порядками в D (10.29).

В гл. 7 содержится теорема Гильберта о базисе, утверждающая, что кольцо многочленов $R[x]$ (кольцо степенных рядов $R\langle x\rangle$) нётерово справа, если нётерово справа кольцо R. Кольцо $A[y, D]$ дифференциальных многочленов относительно дифференцирования D кольца A также нётерово справа, если нётерово справа кольцо A (7.28). Кроме того, если A — простое кольцо нулевой характеристики и D не является внутренним дифференцированием, то $A[y, D]$ — также простое кольцо. Если A — тело, универсальное относительно дифференцирования D, то $A[y, D]$ — нётерово справа правое V-кольцо (в том смысле, что каждый простой модуль

инъективен) (7.42). Это кольцо обладает простым инъективным кообразующим, но само кольцо не является классически полупростым. Более того, каждый подмодуль содержит максимальный подмодуль, а каждый циклический R-модуль, отличный от R, полупрост и инъективен. Каждое правое V-кольцо, обладающее классически полупростым классическим правым кольцом частных, является конечным произведением простых правых V-колец (7.36).

Над классически полупростыми кольцами каждый модуль проективен, и, следовательно, глобальная размерность этих колец равна нулю. Глобальная размерность кольца многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ над кольцом R равна сумме числа n и глобальной размерности кольца R. Если кольцо R классически полупросто, то глобальная размерность кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$ равна n (теорема Гильберта о сизигиях, 8.16). Теоремы Ауслендера (8.19—8.21) утверждают, что

$$\text{r. gl. dim } R = \sup_{I \subseteq R} \{\text{proj. dim } R/I\},$$

а если кольцо R неполупросто, то

$$\text{r. gl. dim } R = 1 + \sup_{I \subseteq R} \{\text{proj. dim } I\}.$$

Итак, глобальная размерность кольца R равна 1 тогда и только тогда, когда каждый правый идеал проективен. Простые нётеровы кольца глобальной размерности $\leqslant 2$ подобны областям Оре (8.27).

Глава 7

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ВЕДДЕРБЁРНА

Изучение колец эндоморфизмов важно как для изучения модулей, так и для изучения абстрактных колец. Оно играет важную роль при изучении модулей, поскольку многие свойства модуля могут быть охарактеризованы свойствами его кольца эндоморфизмов. Действительно, некоторые модули над некоторыми кольцами определяются своими кольцами эндоморфизмов, т. е. в этих случаях модули изоморфны тогда и только тогда, когда их кольца эндоморфизмов изоморфны как кольца. Это верно для векторных пространств. Изучение колец эндоморфизмов важно при изучении колец, поскольку некоторые кольца, определенные абстрактно, могут быть вложены в кольцо эндоморфизмов относительно «хорошего» модуля, например, векторного пространства.

Один из прекрасных типов теорем — это теоремы, утверждающие, что данная абстрактно заданная алгебраическая структура изоморфна известной алгебраической структуре. Например, теорема Веддербёрна — Артина, доказываемая в гл. 8, утверждает,

что кольцо R изоморфно кольцу эндоморфизмов векторного пространства V конечной размерности над телом D тогда и только тогда, когда структура правых идеалов кольца R удовлетворяет условию минимальности, а структура идеалов кольца R состоит из двух элементов. В этом случае информация о кольце R весьма абстрактна, а заключение, напротив, конкретно. Более того, в ходе доказательства этой теоремы по кольцу R строятся тело D и векторное пространство V. Точнее, существует идемпотент $e \in R$, такой, что кольцо eRe изоморфно телу D, а правый идеал eR является векторным пространством над eRe, изоморфным пространству V.

Сбалансированные модули

Пусть R — кольцо, M — R-модуль,

$$R' = \mathscr{R}'(M) = \operatorname{End} M_R,$$
$$R'' = \mathscr{R}''(M) = \operatorname{End}_{R'} M.$$

Будем называть R'' **кольцом биэндоморфизмов** (кратко $\operatorname{Biend} M_R$).

Гомотетией модуля M называется отображение r_d: $M \to M$, такое, что для фиксированного элемента $r \in R$ каждому $x \in M$ сопоставляется элемент xr. Индекс «d» является сокращением латинского слова dexter. Обозначение r_d является стандартным у Бурбаки, а r_d также называют «правым умножением на элемент r». Если N — левый R-модуль, то r_s (s от латинского слова sinistra) обозначает соответствующую гомотетию. Отображение $R \to \operatorname{Biend} M_R$, такое, что $r \mapsto r_d$, называют **каноническим**, оно является гомоморфизмом колец. Модуль M называется **сбалансированным**, если каноническое отображение $R \to \operatorname{Biend} M_R$ сюръективно, и **точным**, если это вложение. Значение сбалансированных точных модулей для представления кольца R в виде кольца эндоморфизмов другого, возможно более простого, модуля очевидно. В этой главе будет существенно использоваться эта возможность для изучения простых колец.

Далее мы приводим элементарное введение к понятию образующего в категории mod-R, которое требует лишь немногих сведений из части I. (Специалисты могут сразу переходить к 7.1.)

В силу 3.26 (или в силу определения в категории mod-R) образующий в mod-R — это R-модуль G, такой, что каждый объект M в mod-R является гомоморфным образом прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля G, т. е. существуют множество I и эпиморфизм $G^{(I)} \to M$. Очевидно, что R — образующий в mod-R. Для получения других образующих заметим, что если $H \to G$ — эпиморфизм и G — образующий, то H — образующий. Следовательно, $R \oplus A$ — образующий для всех A из mod-R. В частности, любой свободный R-модуль является образующим.

7.1. Теорема. *Любой образующий в* mod-R *сбалансирован и точен.*

Доказательство. Во-первых, рассмотрим образующий $G = R \oplus A$. Если $x \in R \oplus A$, то, поскольку 1 образует базис в R, существует эндоморфизм $f \in \mathscr{R}'(R \oplus A)$, такой, что $f(1) = x$. (Мы рассматриваем R и A вложенными в $R \oplus A$ как $R \oplus 0$ и $0 \oplus A$ соответственно.) Пусть $p\colon R \oplus A \to R$ — проекция и $t \in \mathscr{R}''(R \oplus A)$. Тогда

$$(1)\quad t = (p1)\, t = p\,(1t) \in R.$$

Отсюда

$$(x)\, t = (f1)\, t = f\,(1t) = f\,(1 \cdot 1t) = f\,(1)\, 1t = x\,(1t).$$

Итак, отображение $R \to \mathscr{R}''(R \oplus A)$ сюръективно, т. е. для рассматриваемого случая желаемый результат получен.

Пусть теперь G — произвольный образующий. Тогда по 3.26 существует число $n > 0$ и изоморфизм $G^n \approx R \oplus A$, где $A \in$ mod-R. Так как $R \oplus A$ — сбалансированный модуль, то сбалансирован и модуль G^n. Так как R — точный модуль, то точен модуль G^n, а следовательно, и модуль G. Доказательство завершает следующая

7.2. Лемма. *Если G — модуль и модуль G^n сбалансирован, то модуль G сбалансирован. Таким образом, для любого модуля M и любого числа $n > 0$ имеет место канонический изоморфизм*

$$\text{Biend } M_R \approx \text{Biend } M_R^n.$$

Доказательство. В силу 3.24 $\text{End } G_R^n \approx R'_n$, где $R' = \mathscr{R}'(G) = \text{End } G_R$. Поэтому любой элемент $f \in \mathscr{R}'(G^n)$ представляется матрицей $(s_{ij}) \in R'_n$; а именно, для $v = (a_1, \ldots, a_n) \in G^n$, $a_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$f(v) = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $t \in \mathscr{R}''(G)$. Тогда отображение

$$v = (a_1, \ldots, a_n) \to (a_1 t, \ldots, a_n t),$$

обозначаемое через $\bar{t}$, удовлетворяет равенству $f(v)\,\bar{t} = f(v\bar{t})$. Следовательно, $\bar{t} \in \mathscr{R}''(G^n)$. Так как модуль G^n сбалансирован, то найдется $r \in R$, для которого $v\bar{t} = vr$ для всех $v \in G^n$. Взяв $v = (a, \ldots, a)$ для произвольного $a \in G$, получаем, что $v\bar{t} = (at, \ldots, at) = (ar, \ldots, ar)$, т. е. что $at = ar$. Это показывает, что G — сбалансированный модуль. □

7.3. Предложение Мориты. *Пусть A — кольцо. Объект P является образующим в категории* mod-A *тогда и только тогда, когда P сбалансирован в* mod-A *и является конечно порожденным проективным B-модулем (когда рассматривается как канонический левый B-модуль), где $B = \text{End } P_A$* (ср. 4.2).

Доказательство. В силу 3.26 P — образующий в mod-A тогда и только тогда, когда $P^n \approx A \oplus X$ для некоторого числа $n > 0$ и некоторого модуля X из mod-A. Так как функтор $h^P\colon$ mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B сохраняет конечные (би)произведения, то (3.38 и далее)

$$(1)\quad B^n \approx \text{Hom}_A(P, P)^n \approx \text{Hom}_A(P^n, P).$$

Так как функтор $h_P\colon$ mod-$A \rightsquigarrow B$-mod заменяет конечные произведения на копроизведения, то

$$(2)\quad \text{Hom}_A(P^n, P) \approx \text{Hom}_A(A \oplus X, P) \approx \\ \approx \text{Hom}_A(A, P) \oplus \text{Hom}_A(X, P).$$

Используя канонический (B, A)-изоморфизм $P \approx \text{Hom}_A(A, P)$ и полагая $Y = \text{Hom}_A(X, P)$ в B-mod, из (1) и (2) получаем, что

$$(3)\quad B^n \approx P \oplus Y$$

в B-mod, т. е. что модуль ${}_BP$ конечно порожден и проективен. Обратное утверждение доказываем обращением сделанных шагов, применяя функтор h_P к (3) и используя канонический изоморфизм $A \approx h_P(P)$, получаемый из предположения о сбалансированности модуля P в mod-A. □

7.4. Упражнения.

7.4.1. Пусть R — простое кольцо. Следующие утверждения о правом R-модуле M эквивалентны:

(a) M — образующий в mod-R.

(b) Существует ненулевой гомоморфизм модуля M в прямое произведение некоторого множества экземпляров кольца R.

(c) $\text{Hom}_R(M, R) \neq 0$.

7.4.2. Для любого кольца R и любого R-модуля A пусть $B = R \oplus A$ и $S = \text{End } B_R$. Тогда ${}_SB$ — циклический проективный модуль и, следовательно, существует идемпотент $e \in S$, такой, что ${}_SB \approx Se$ и $eSe \approx R$.

7.4.3. Если R — простое кольцо и $e \in R$ — ненулевой идемпотент, то eRe — простое кольцо.

7.4.4. Если R — простое кольцо, то для любого $n \geqslant 1$ кольцо R_n простое.

7.4.5. Кольцо R просто тогда и только тогда, когда каждый ненулевой правый R-модуль точен.

7.4.6. Если R — простое кольцо, то центр кольца R — поле.

*7.4.7. Тензорные произведения векторных пространств и модулей обсуждаются в гл. 11. Если A и B — простые кольца и $K = \mathscr{C}(A)$ (центр кольца A) — подкольцо в $\mathscr{C}(B)$, то тензорное произведение $A \underset{K}{\otimes} B$ — простое кольцо.

7.5. Теорема. *Если R — простое кольцо, I — ненулевой правый идеал в R и $K = \operatorname{End} I_R$, то I — конечно порожденный проективный левый K-модуль, а каноническое отображение $R \to \operatorname{End}_K I$ — изоморфизм. Кольцо K просто тогда и только тогда, когда I — конечно порожденный проективный правый R-модуль; в этом случае функтор $\operatorname{Hom}_R(I, \ )$ со значениями в категории K-модулей осуществляет эквивалентность категорий $\operatorname{mod}\text{-}R \approx \operatorname{mod}\text{-}K$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что I_R — образующий и $R \approx \operatorname{End}_K I$ (канонически) (см. 7.1 и 7.4.1).

Если I — конечно порожденный проективный модуль, то $F = I \oplus Q \approx R^n$. Поэтому существует идемпотент e в $R_n \approx \operatorname{End} F_R$, такой, что $K \approx eR_ne$. В силу предыдущих упражнений R_n, eR_ne и, следовательно, K — простые кольца.

Обратно, допустим, что K — простое кольцо. Пусть I' — множество левых умножений на элементы из I. Таким образом, если $x \in I$, то $x' \in I'$ — это гомотетия $a \mapsto xa$ для всех $a \in I$. Если $k \in K$, то $(kx)' = kx'$. Итак, I' — левый идеал в K, а отображение $x \mapsto x'$ — эпиморфизм левых K-модулей $I \to I'$. Так как кольцо K простое, то левый идеал I' — образующий в K-mod и, следовательно, I — образующий в K-mod. В силу 7.3 I — конечно порожденный проективный модуль над $R \approx \operatorname{End}_K I$. В этом случае функтор $\operatorname{Hom}_R(I, \ )$ определяет эквивалентность категорий по теореме Мориты (4.29). □

*7.6. Упражнение (Морита). Два кольца A и B называются **подобными**, если существуют число $n > 0$ и идемпотент $e \in A_n$, такие, что $A_neA_n = A_n$, и изоморфизм колец $B \approx eA_ne$. В этом случае существует прообразующий $P \approx eA^n$, где $A_n \approx \operatorname{End} A_A^n$ (канонически) и $B \approx \operatorname{End} P_A$.

Минимальные правые идеалы

Максимальным подмодулем ненулевого модуля M называется подмодуль, который является максимальным элементом множества всех подмодулей, отличных от M. **Минимальный** подмодуль — это подмодуль, который является минимальным элементом множества всех ненулевых подмодулей. Модуль M **простой**, если $M \neq 0$ и M удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(a) 0 — максимальный подмодуль.

(b) M — минимальный подмодуль.

(c) Каждый ненулевой эпиморфизм $M \to N$ является изоморфизмом.

Таким образом, если N — подмодуль в M, то N максимален тогда и только тогда, когда M/N — простой модуль.

Максимальный (соотв. **минимальный**) правый идеал I — это максимальный (соотв. минимальный) подмодуль в модуле R_R.

Далее мы докажем предварительный вариант теоремы Веддербёрна — Артина (7.9).

7.7. Теорема. *Пусть R — простое кольцо, содержащее минимальный правый идеал I. Тогда $K = \operatorname{End} I_R$ — тело, ${}_KI$ — конечномерное векторное пространство и $R \approx \operatorname{End}_K I$. Таким образом, если $\dim_K I = n$, то R изоморфно кольцу всех $(n \times n)$-матриц над K. Более того, существует идемпотент $e \in R$, такой, что $I = eR$, а кольцо eRe — тело, изоморфное телу K.*

Доказательство. Так как I_R — простой модуль, то по лемме Шура 3.10 $K = \operatorname{End} I_R$ — тело. Так как кольцо R простое, то I_R — образующий, а так как K — тело, то ${}_KI$ — образующий. По последней теореме I_R (соотв. ${}_KI$) — конечно порожденный проективный модуль. Так как ${}_KI$ — векторное пространство и оно конечно порождено, то ${}_KI$ обладает базисом, состоящим, например, из n элементов. Итак, $I \approx K^n$ (как левые K-модули). Так как модуль I_R сбалансирован и, будучи образующим, точен, то

$$R \approx \operatorname{End}_K I \approx \operatorname{End}_K K^n \approx K_n.$$

Так как I — точный модуль, то $I^2 \neq 0$, и поэтому существуют $x, y \in I$, такие, что $xy \neq 0$. Но I — простой R-модуль. Поэтому $I = xR$ и $I = yR$. К тому же I — проективный модуль. Значит, отображение $\varphi\colon R \to xR$, где $\varphi(a) = xa$ для всех $a \in R$, расщепляется (3.11.2). Пусть $R = \ker\varphi \oplus Q$, где Q — правый идеал, изоморфный модулю I. Это показывает, что $\ker\varphi$ — максимальный правый идеал в R. Так как $xy \neq 0$, то $xI = xyR \neq 0$. Поэтому $I \cap \ker\varphi = 0$. Поскольку $\ker\varphi$ — максимальный правый идеал, то R является прямой суммой $\ker\varphi \oplus I$, т. е. I — прямое слагаемое в R. Следовательно, $I = eR$, где $e = e^2 \in R$. Но для любого идемпотента f кольца S мы знаем, что $\eta\colon fSf \approx \operatorname{End}(fS)_S$, где для $x \in fSf$ под $\eta(x)$ понимается эндоморфизм модуля fS, отображающий $y \in fS$ в xy. Это завершает доказательство. □

Лемма Шура 3.10 утверждает, что если V — простой R-модуль, то $R' = \operatorname{End} V_R$ — тело, т. е. V — левое векторное пространство над R'. Если V — сбалансированный и точный модуль, то $R \approx \operatorname{End}_{R'} V$.

7.8. Лемма. *Кольцо R имеет сбалансированный простой точный правый R-модуль тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу всех линейных преобразований левого векторного пространства.*

Доказательство. Как было отмечено, необходимость условия очевидна. Обратно, если φ: $R \approx \mathrm{End}_K W$, где ${}_KW$ — векторное пространство, то W как правый R-модуль является простым. Действительно, если U — любой ненулевой R-подмодуль в W, $0 \neq x \in U$ и $y \in W$, то существует элемент $t \in \mathrm{End}_K W$, такой, что $(x)\, t = y$. [Например, запишем $W = Kx \oplus Q$, где Q — некоторое подпространство, и выберем t так, что $(kx)\, t = ky$ для всех $k \in K$ и $(q)\, t = 0$ для всех $q \in Q$.] Если $r = \varphi^{-1}(t)$, то $y = xr \in U$. Поэтому $W \subseteq U$ и $W = U$. Таким образом, W_R — простой сбалансированный и точный модуль. □

Артиновы кольца и модули

Множество подмодулей любого R-модуля является частично упорядоченным относительно отношения включения. Модуль M называется **артиновым**, если M удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. «Теоретико-множественное введение»):

(1) *частично упорядоченное множество подмодулей модуля M удовлетворяет условию минимальности,*

(2) *частично упорядоченное множество подмодулей модуля M удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.*

Таким образом, если модуль M артинов, то (1) *каждое непустое семейство $\{M_i\}$ подмодулей содержит подмодуль, который является минимальным в этом семействе*; (2) *каждая убывающая цепь*

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

подмодулей, начиная с некоторого n, стабилизируется, т. е. $M_n = M_{n+1} = \ldots$.

Кольцо R **артиново справа**, если R_R — артинов модуль. Кольцо R **артиново слева**, если ${}_RR$ — артинов модуль. Артиновы кольца впервые систематически изучал Эмиль Артин.

7.9. Основная теорема Веддербёрна — Артина. *Следующие условия на кольцо S эквивалентны:*

(a) *S — простое артиново справа кольцо.*

(b) *S — простое кольцо, содержащее минимальный правый идеал.*

(c) *$S \approx \mathrm{End}_K W$, где ${}_KW$ — левое векторное пространство конечной размерности n.*

(d) *$S \approx D_n$, где D — тело, а n — целое число и $n \geqslant 1$.*

(e) *Условия, симметричные (с заменой «правый» на «левый» и наоборот) условиям* (a) — (d).

Если эти условия выполнены и I — любой минимальный правый идеал, то каждый простой S-модуль изоморфен модулю I. Следовательно, любые два минимальных правых идеала кольца S изоморфны. Если K и D — тела, $S \approx D_m$ и $S \approx K_n$, то $n = m$ и $K \approx D$. Наконец, $S \approx D_n$ — прямая сумма n минимальных правых идеалов.

Доказательство. Импликация (a) ⇒ (b) очевидна. Импликация (b) ⇒ (c) следует из 7.7.

(c) ⇒ (d). Если $n = \dim_K W$, то ${}_KW \approx {}_KK^n$, поэтому

$$S \approx \mathrm{End}_K W \approx \mathrm{End}_K K^n \approx K_n.$$

(d) ⇒ (a). Пусть $S \approx D_n$, где D — тело. Тогда D — простое кольцо. Из предыдущего упражнения следует, что D_n — простое кольцо. Действительно, если I — идеал, содержащий ненулевой элемент $x = \sum_{i,\, j=1}^{n} d_{ij} e_{ij}$, где $\mathscr{M} = \{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ — матричные единицы, а D — централизатор множества $\mathscr{M}$ в D_n, то $d_0 = d_{i_0 j_0} \neq 0$ для некоторых i_0, j_0 и

$$d_0^{-1} e_{i_0 i_0} x e_{j_0 i_0} = e_{i_0 i_0} \in I.$$

Следовательно,

$$a_{ij} e_{ii_0} e_{i_0 i_0} e_{i_0 j} = a_{ij} e_{ij} \in I$$

для всех $a_{ij} \in D$. Таким образом, $I \supseteq \sum_{i,\, j=1}^{n} D e_{ij} = S$, и поэтому S — простое кольцо. (Аналогичное доказательство показывает, что $e_{ii} S$ — минимальный правый идеал, $i = 1, \ldots, n$.) Теперь D_n — правое (а также и левое) векторное пространство размерности n^2 над D (n^2 матричных единиц $\{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ являются базисом), а правые идеалы кольца D_n являются D-подпространствами. Так как конечномерное векторное пространство удовлетворяет условию минимальности для подпространств, то D_n удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов. Следовательно, это верно и для кольца S.

(e) выполняется в силу симметрии в кольце D_n, где D — тело.

Наконец, пусть $S \approx D_m$ и $S \approx K_n$, где D и K — тела. Пусть $W = D^m$ и $V = K^n$. Кольцевые изоморфизмы

$$S \approx D_m \approx \mathrm{End}_D W,$$
$$S \approx K_n \approx \mathrm{End}_K V$$

позволяют естественным образом рассматривать W и V как правые S-модули. Из доказательства леммы 7.8 видно, что W_S и V_S — простые S-модули. Пусть I — минимальный правый идеал кольца S (существующий в силу эквивалентности условий (a) —

(d)). Над простым кольцом *любой* ненулевой модуль M точен, поскольку $\operatorname{ann}_S M$ — идеал. В частности, W_S — точный модуль, и поэтому $WI \neq 0$. Выберем $w \in W$ так, что $wI \neq 0$. Из простоты модуля W_S следует, что $wI = W$. Следовательно, существует эпиморфизм f: $I \to W$, для которого $f(a) = wa$ для всех $a \in I$. Так как модуль I прост, то $\ker f = 0$ и поэтому $I \approx W$. Следовательно, каждый простой модуль W_S изоморфен любому минимальному правому идеалу I. Более того, из $I_S \approx W_S$ следует, что

$$Q = \operatorname{End} I_S \approx D \text{ и } \dim_Q I = m = \dim_D W.$$

Из этого также следует, что $Q \approx K$, поскольку $D \approx K$, и что

$$m = \dim_Q I = \dim_K V = n.$$

Но теперь $A = D_n$ — прямая сумма минимальных правых идеалов

$$D_n = A = e_{11}A \oplus \ldots \oplus e_{nn}A.$$

(Сумма прямая, так как $1 = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$ — сумма ортогональных идемпотентов $\{e_{ii} \mid i = 1, \ldots, n\}$.) Следовательно, аналогичное утверждение верно и для $S \approx D_n$. □

7.9′. Упражнения.

7.9′.1. Если $S \approx D_n$, где D — тело и $I_1, \ldots, I_m$ — минимальные правые идеалы кольца S, такие, что $S = I_1 \oplus \ldots \oplus I_m$, то $m = n$, $I_j \approx I_1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $\operatorname{End} I_R \approx D$ для любого минимального правого идеала I.

7.9′.2. Если кольцо R — сумма минимальных правых идеалов, то каждый правый R-модуль есть сумма простых подмодулей.

7.9′.3. Если $R = D_n$, где D — тело, и e — ненулевой идемпотент в R, то кольцо eRe — простое артиново (справа и слева) кольцо, изоморфное кольцу D_m для некоторого $m \leqslant n$.

7.9′.4. Доказать эквивалентность следующих условий для кольца R:

(a) Каждый объект категории mod-R проективен.

(b) Каждый факторобъект объекта R_R проективен.

(c) Каждый правый идеал кольца R выделяется в R_R прямым слагаемым.

(d) Каждый объект категории mod-R инъективен.

(e) Каждый правый идеал кольца R инъективен.

(f) Каждый объект категории mod-R является (прямой) суммой простых модулей.

7.9′.5. Если кольца R и S подобны, то R удовлетворяет условиям из 7.9′.4 тогда и только тогда, когда им удовлетворяет кольцо S. Это верно для $S = R_n$.

7.9′.6. Использовать 7.9 для доказательства теоремы Веддербёрна — Артина 8.8 в такой форме: если R — артиново справа кольцо

и ни один ненулевой правый идеал в R не является нильпотентным, то R — сумма минимальных правых идеалов.

7.9′.7. Доказать 7.9 как следствие теоремы Мориты.

7.9′.8. Если V — векторное пространство над телом D и I — идеал в $\operatorname{End}_D V$, то существует ординал a, такой, что $\aleph_a \leqslant \dim_D V$ и $I = \{f \in \operatorname{End}_D V \mid \dim f(V) \leqslant \aleph_a\}$. Вывести из этого, что идеалы кольца всех линейных преобразований вполне упорядочены.

Нётеровы кольца и модули

Прежде чем приводить частные случаи общей теоремы Веддербёрна, введем в рассмотрение кольца и модули, впервые систематически изучавшиеся Эмми Нётер.

Условием, дуальным к условию минимальности, является условие максимальности. Модуль M_R называется **нётеровым**, если множество подмодулей модуля M, упорядоченное по включению, удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(a) Условие максимальности.

(b) Условие обрыва возрастающих цепей.

(c) Каждый подмодуль модуля M конечно порожден.

Кольцо R называется **нётеровым справа**, если R_R — нётеров модуль.

Приведем доказательство эквивалентности этих условий. Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) уже была установлена (см. «Теоретико-множественное введение», предложение 12).

(a) $\Rightarrow$ (c). Пусть S — подмодуль, F — совокупность всех конечно порожденных подмодулей в S. В силу (b) F содержит максимальный элемент A. Если x — произвольный элемент из S, то подмодуль (A, x), порожденный A и x, также конечно порожден и поэтому принадлежит множеству F. Так как $(A, x) \supseteq A$, то $(A, x) = A$, т. е. $x \in A$. Итак, $A = S$, т. е. S — конечно порожденный модуль.

(c) $\Rightarrow$ (b). Пусть $S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$ — цепь подмодулей модуля M_R и $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. В силу (c) $S = \sum_{n=1}^{n} x_i R$, где $x_1, \ldots, x_n \in M$. Из определения S вытекает существование числа k, такого, что $x_1, \ldots, x_n \in S_k$. Тогда $S = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq S_k \subseteq S$, т. е. $S_k = S_{k+1} = \ldots = S_{k+j}$ для всех j. Итак, M удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. □

Лемма об артиновых и нётеровых модулях

Следующая лемма показывает, что класс нётеровых (артиновых) модулей замкнут относительно операций перехода к эпиморфным образам, подмодулям и конечным прямым суммам.

7.10. Лемма.

7.10.1. *Пусть M — модуль, N — подмодуль в M. Тогда M — нётеров (артинов) модуль в том и только том случае, когда N и M/N — нётеровы (артиновы) модули.*

7.10.2. *Конечное произведение $\prod_{i\in n} M_i$ нётерово (артиново) тогда и только тогда, когда M_i — нётеров (артинов) модуль при $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство утверждения 7.10.1. Если M — нётеров (артинов) модуль, то любой подмодуль N модуля M удовлетворяет соответствующему условию обрыва цепей. Это же верно и для M/N в силу теоремы о гомоморфизме (1.9). Обратно, пусть M/N и N — нётеровы (артиновы) модули и $\{A_n\}$ — возрастающая (убывающая) последовательность подмодулей модуля M. Тогда найдется число t_1, такое, что

$$(A_{t_1} + N)/N = (A_n + N)/N$$

для $n \geqslant t_1$, и число $t > t_1$, такое, что

$$A_t \cap N = A_n \cap N$$

для $n \geqslant t > t_1$. Пусть $n \geqslant t$ и $x \in A_n$ (в случае возрастающей цепи $\{A_n\}$). Поскольку $A_n + N = A_t + N$, можно записать $x = a + b$, где $a \in A_t$, $b \in N$. Тогда $x - a = b \in N \cap A_n = N \cap A_t$. Итак, $x = b + a \in A_t$, и поэтому $A_n = A_t$ для всех $n \geqslant t$. Аналогичное рассуждение применимо для убывающей цепи $\{A_n\}$.

Доказательство утверждения 7.10.2 проводится индукцией по n с применением утверждения 7.10.1 для случая $N = M_1 \oplus \ldots \oplus M_{n-1} \subseteq M$. □

7.10′. Упражнения.

7.10′.1. Напомним определение: модуль M **неразложим**, если 0 и M — единственные подмодули, являющиеся прямыми слагаемыми в M. Доказать, что если M — нётеров или артинов модуль, то M — прямая сумма конечного числа неразложимых подмодулей.

7.10′.2. Пусть N — подмодуль модуля M. Тогда назовем N **$\cap$-неприводимым** (**неприводимым** относительно пересечений), если из того, что A и B — подмодули модуля M и $N = A \cap B$, вытекает, что либо $A = N$, либо $B = N$. Доказать, что каждый подмодуль нётерова модуля M является пересечением конечного числа $\cap$-неприводимых подмодулей модуля M.

7.10′.3. Пусть R — кольцо и n — натуральное число. Кольцо R_n всех $(n \times n)$-матриц над R нётерово (артиново) справа тогда и только тогда, когда R нётерово (артиново) справа. (Это можно показать по крайней мере двумя способами. Один из них — дать категорную формулировку условия и применить утверждение 3.27.)

7.10′.4. Пусть R — коммутативная область главных идеалов, и I — ненулевой идеал в R. Тогда R/I — артиново кольцо.

7.10′.5. Если модуль M_R простой, то кольцо $\mathrm{End}\, M_R$ — тело. Верно ли обратное?

7.10′.6. Если R — нётерово (артиново) справа кольцо и существует гомоморфное наложение колец $R \to S$, то S — нётерово (артиново) справа кольцо.

*7.10′.7. Описать кольцо $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$. (Это кольцо изоморфно кольцу p-адических чисел.)

7.10′.8. Пусть R — коммутативная область главных идеалов. Показать, что если I — любой собственный идеал кольца R, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$. (Это выполняется и в коммутативных нётеровых областях целостности R.)

7.10′.9. Любое подкольцо A нётерова (артинова) справа кольца R удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей правых аннуляторных идеалов.

7.10′.10. Любой эпиморфизм $M \twoheadrightarrow M$ нётерова модуля является автоморфизмом. Двойственным образом любой мономорфизм $M \to M$ артинова модуля является автоморфизмом.

7.10′.11. Если R — либо нётерово справа, либо артиново справа кольцо, n, m — натуральные числа и $R^n \approx R^m$ в mod-R, то $n = m$. Вывести из этого, что любые два базиса в свободном модуле R^n содержат одинаковое число элементов.

Превращение модулей в идеалы

Имеется способ, который Нагата [62] называет **принципом идеализации**, позволяющий вложить данный (R, S)-бимодуль M в кольцо A таким образом, что M превращается в идеал кольца A. Именно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

обозначает множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & x \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

где $r \in R$, $x \in M$, $s \in S$. Сложение и умножение в множестве A определяется обычным образом, например

$$\begin{pmatrix} r & x \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & x' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & rx' + xs' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}.$$

Тогда A является кольцом. Для подмножеств $U \subseteq R$, $V \subseteq M$, $W \subseteq S$ положим

$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \in A \mid u \in U, v \in V, w \in W \right\}.$$

7.11. Принцип идеализации. *Пусть M есть (R, S)-бимодуль,*

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

— построенное выше кольцо. Рассмотрим отображения:

$$\psi: M \to A, \psi: m \mapsto \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi: R \to A, \ \varphi: r \mapsto \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta: S \to A, \ \eta: s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Тогда

7.11.1. *$\psi(M)$ — идеал кольца A и $\psi(M)^2 = 0$.*

7.11.2. *Отображения $\varphi: R \to A$ и $\eta: S \to A$ являются гомоморфными вложениями колец* [1]*, удовлетворяющими условиям*

(a) $$\psi(rms) = \varphi(r)\psi(m)\eta(s)$$

для $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$;

(b) *прямая сумма отображений*

$$\varphi \oplus \eta \oplus \psi: R \oplus S \oplus M \to A$$

является изоморфизмом групп;

(c) $$\varphi \oplus \eta: R \oplus S \to A$$

является гомоморфным вложением колец.

Обратно, если A — кольцо и существуют отображения ψ, φ и η, удовлетворяющие требованиям из 7.11.1 *и* 7.11.2*, то найдется изоморфизм колец*

$$\begin{cases} A \to \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \\ \varphi(r) + \eta(s) + \psi(m) \mapsto \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}. \end{cases}$$

[1]) В этом месте мы не требуем, чтобы образы содержали единичный элемент кольца A.

Если $f: R \to S$ — гомоморфизм колец, то подмножество

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

состоящее из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & f(r) \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $m \in M$, является подкольцом, которое мы будем обозначать через (A, f).

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Для подмножеств $U, X \subseteq R$, $V, Y \subseteq M$, $W, Z \subseteq S$ имеем равенства

$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UR & UM+VS \\ 0 & WS \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RX & RY+MZ \\ 0 & SZ \end{pmatrix}.$$

Итак, для правого идеала U кольца R, S-подмодуля V в M и правого идеала W в S получаем правый идеал кольца A

(1) $$\begin{pmatrix} U & UM+V \\ 0 & W \end{pmatrix};$$

это включает частные случаи

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & W \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По левому идеалу X из R, R-подмодулю Y из M и левому идеалу Z в S получаем левый идеал кольца A

(2) $$\begin{pmatrix} X & Y+MZ \\ 0 & Z \end{pmatrix};$$

это включает частные случаи

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & M \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если U — идеал в R, W — идеал в S и V является (R, S)-подмодулем в M, то получаем идеал кольца A

(3) $$\begin{pmatrix} U & UM+V+MW \\ 0 & W \end{pmatrix};$$

это включает частные случаи

$$\begin{pmatrix} U & M \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & W \end{pmatrix}.$$

Идеализация бимодулей оказывается полезным средством для построения асимметричных колец, т. е. колец, обладающих каким-либо «правым» свойством, но не обладающих его левым аналогом.

7.11′. Примеры нётеровых колец.

7.11′.1. *Кольцо A с тремя левыми идеалами, не являющееся ни артиновым справа, ни нётеровым справа.*

Пусть R — поле, $f\colon R \to S$ — наложение колец, где S — подполе поля R, такое, что $\dim R_S = \infty$. Например, пусть $R = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ — поле рациональных функций от бесконечного числа переменных, $S = \mathbb{Q}(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots)$ и $f(x_i) = x_i^2$, $f(a) = a$ для всех $a \in \mathbb{Q}$ и всех i. Тогда R есть (R, S)-бимодуль. Применяя к нему принцип идеализации, получаем кольцо

$$A = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

обладающее указанным свойством. Действительно, используя (1), замечаем, что множество

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является правым идеалом кольца A для любого S-подпространства V в R, и, поскольку $\dim_S R = \infty$, кольцо A не является ни артиновым справа, ни нётеровым справа. Однако кольцо A имеет ровно шесть левых идеалов:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix} = A.$$

Это вытекает из того, что, ввиду (2), формула

$$\begin{pmatrix} \alpha R & \beta R \\ 0 & \gamma S \end{pmatrix},$$

где α, β, γ — либо 0, либо 1, дает общий вид левого идеала [1]). Если рассмотреть подкольцо (A, f) для нашего гомоморфизма

[1]) Разумеется, надо еще установить, что других идеалов нет.— *Прим. перев.*

$f\colon R \to S$, то мы придем к трем левым идеалам

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A, f),$$

в то время как правые идеалы

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

кольца A являются и правыми идеалами кольца (A, f).

7.11′.2. *Кольцо A, имеющее три левых идеала и являющееся артиновым справа (и нётеровым справа).*

Пусть R — поле, S — подполе, $\dim_S R = n < \infty$, и пусть существует гомоморфизм $f\colon R \to S$. Например, $R = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_t)$, $S = \mathbb{Q}(x_1^2, \ldots, x_t^2)$ и $f\colon R \to S$ — такой гомоморфизм, при котором $x_i \to x_i^2$, $i = 1, \ldots, t$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

— идеализация. Тогда кольцо (A, f) содержит три левых идеала, а длина любой цепи правых идеалов не превосходит n.

7.11′.3 (Херстейн [65]). *Нётерово справа кольцо A без свойства Крулля для пересечений степеней радикала.*

Пусть p — простое число из $\mathbb{Z}$ и

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ab^{-1} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \notin p\mathbb{Z}\}.$$

Тогда $\mathbb{Z}_{(p)}$ — подкольцо кольца $\mathbb{Q}$, и поэтому $\mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Z}_{(p)}$-модуль Идеалы кольца $\mathbb{Z}_{(p)}$ исчерпываются цепью

$$\mathbb{Z}_{(p)} \supset p\mathbb{Z}_{(p)} \supset p^2\mathbb{Z}_{(p)} \supset \ldots \supset p^n\mathbb{Z}_{(p)} \supset \ldots$$

(доказать это). Это показывает, что $\mathbb{Z}_{(p)}$ — область главных идеалов, нётерова, но не артинова.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

— идеализация $(\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Q})$-бимодуля $\mathbb{Q}$. Поскольку $\mathbb{Q}$ — простой $\mathbb{Q}$-модуль, мы видим, что правыми идеалами вида

$$\begin{pmatrix} U & \beta\mathbb{Q} \\ 0 & \gamma\mathbb{Q} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где β, $\gamma = 0$ или 1 и $\beta = 1$ при $\gamma \neq 0$, исчерпываются все правые идеалы кольца A, когда U пробегает множество всех идеалов кольца $\mathbb{Z}_{(p)}$. Итак, A — нётерово справа кольцо, поскольку $\mathbb{Z}_{(p)}$ —

нётерово кольцо. Однако так как

$$\begin{pmatrix} U & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— идеал кольца A для любого идеала U кольца $\mathbb{Z}_{(p)}$, то A не является артиновым ни справа, ни слева. Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— левый идеал для любого $\mathbb{Z}_{(p)}$-подмодуля V в $\mathbb{Q}$, то A не является нётеровым слева кольцом.

Радикал модуля M_R был определен в упр. 3.69. 1 (а) как пересечение $\operatorname{rad} M$ максимальных подмодулей модуля M. Итак, $\operatorname{rad} R$ — пересечение максимальных правых идеалов кольца R. Нетрудно показать, что

$$\operatorname{rad} \mathbb{Z}_{(p)} = p\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Следовательно, для кольца

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

из рассмотрения правых идеалов (4) получаем, что

$$J = \operatorname{rad} A = \begin{pmatrix} B & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad B = \operatorname{rad} \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Отсюда следует, что

$$J^n = \begin{pmatrix} B^n & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

и

$$J_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Этот пример важен, поскольку теорема Крулля о пересечении утверждает, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\operatorname{rad} R)^n = 0$$

для любого коммутативного нётерова кольца R. В этом примере, однако, кольцо не является нётеровым слева.

7.11′.4 (Ятегаонкар [1]) [69]). Для каждого ординального числа a существует область R главных левых идеалов, такая, что $(\operatorname{rad} R)^a \neq 0$, где $I^{b+1} = I^b I$ и $I^b = \bigcap_{c<b} I^c$ определены для любого левого идеала I и непредельного ординального числа $b + 1$ или предельного ординального числа b.

Теорема Гильберта о базисе

Основная цель этого параграфа — расширение нашего запаса нётеровых колец и модулей, а также рассмотрение некоторых приложений.

Пусть R — кольцо, M — правый R-модуль, $I = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ — множество неотрицательных целых чисел, $A = M^I$ (прямое произведение), $B = M^{(I)}$ (прямая сумма). Введем символ x, называемый **переменной**, и для каждого $a \in M$ пусть ax^i представляет собой единственную функцию $p \in A$, такую, что $p(i) = a$, $p(j) = 0$, если $j \neq i$. Символ $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ будет обозначать единственную функцию $f \in A$, такую, что $f(i) = a_i$ для всех $i \in I$. Элементы $\{a_i\}_{i \in I}$ называются **коэффициентами** функции f, а a_i — коэффициентом при x^i, $i = 0, 1, \ldots$. Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in A$. Если $f(x) \neq 0$, то $f(x) \in B$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число n, называемое **степенью** f, что $a_n \neq 0$ и $a_m = 0$ для всех $m > n$. В этом случае будем писать $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Договоримся считать, что степень нулевого отображения равна $-\infty$.

Модуль $A = M^I$ обозначается через $M\langle x \rangle$, а его элементы называются **формальными степенными рядами над M от переменной x**. Модуль $B = M^{(I)}$ обозначается через $M[x]$, а его элементы называются **многочленами над M от переменной x**.

Таким образом, определен R-модуль $R\langle x \rangle$. Если $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ и $g(x) = \sum_{j=0}^{n} s_j x^j$ — элементы из $R\langle x \rangle$, то определено их **произведение** как формальный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k$, где $t_k = \sum_{i+j=k} r_i t_j \in R$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тем самым $R\langle x \rangle$ ста-

[1]) Эти примеры были первыми примерами колец, в которых пересечение степеней радикала отлично от нуля и которые являются: 1) областями целостности или 2) кольцами главных левых идеалов, или 3) и теми и другими. См. также работу Ятегаонкара [70] и другие его результаты в упражнениях.

новится кольцом относительно произведения и суммы формальных степенных рядов. Это кольцо называется **кольцом формальных степенных рядов над R от x.** Если $f, g \in R\langle x\rangle$ — многочлены степени n и m соответственно, то fg — многочлен, степень которого не превосходит $n+m$. Следовательно, $R[x]$ — подкольцо в $R\langle x\rangle$, называемое **кольцом многочленов над R от переменной x.** (См. 5.74 и 3.3b.) Множество всех многочленов в $R\langle x\rangle$ степени 0 образует подкольцо кольца $R\langle x\rangle$, изоморфное кольцу R.

Если $m(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in M[x]$ и $p(x) = \sum_{j=0}^{q} r_j x^i \in R[x]$, то положим $m(x)\,p(x) = \sum_{k=0}^{n+q} b_k x^k$, где $b_k = \sum_{i+j=k} a_i r_j \in M$, $k = 0, 1, \ldots, n+q$. Это определяет операцию μ: $M[x] \times R[x] \to M[x]$, а $M[x]$ можно рассматривать как $R[x]$-модуль $(M[x], R[x], \mu)$.

Как обычно, 1 обозначает единичный элемент кольца R. Тогда $R\langle x\rangle$ содержит элемент $1x$. А если мы определим $(1x)^0 = 1$, то тогда $(1x)^n = 1x^n$ для всех n. Далее, если M есть R-модуль, то каждый элемент $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i \in M\langle x\rangle$ однозначно записывается в виде $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i (1x)^i$.

Пусть S — любой $R[x]$-подмодуль модуля $M[x]$. Если S содержит многочлен степени n, то определим $L_n(S)$ как множество элементов модуля M, которое состоит из 0 и тех элементов $a \in M$, которые встречаются как коэффициенты при x^n в многочленах из S степени n. Тогда $L_n(S)$ есть R-подмодуль R-модуля M. Если степень многочлена $m(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in S$ равна n, то степень многочлена $m(x)\,x$ равна $n+1$. Следовательно, $L_n(S) \subseteq L_{n+1}(S)$.

7.12. Лемма. *Если S, T суть $R[x]$-подмодули в $M[x]$, такие, что $S \subseteq T$, и если $L_i(S) = L_i(T)$ для $i = 0, 1, \ldots$, то $S = T$.*

Доказательство. Допустим, что $S \neq T$. Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in T$ — многочлен наименьшей степени n среди всех многочленов из T, которые не лежат в S. Так как $a_n \in L_n(T)$ и $L_n(T) = L_n(S)$, то существует многочлен $g(x) \in S$ степени n, в котором a_n является коэффициентом при x^n. Тогда степень многочлена $f(x) - g(x) = h(x)$ не превосходит $n-1$. Поэтому $h(x) \in S$ (в силу предположения о выборе n). Тогда $f(x) = g(x) + h(x) \in S$, что противоречит предположению. Итак, $S = T$. □

7.13. Теорема Гильберта о базисе. *Пусть R — кольцо, M — нётеров R-модуль. Тогда модуль многочленов $M[x]$ является нётеровым $R[x]$-модулем.*

Доказательство. Пусть $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ — возрастающая последовательность $R[x]$-подмодулей модуля $M[x]$. Рассмотрим прямоугольную таблицу $\{L_i(M_j) \mid i, j = 0, 1, \ldots\}$ R-подмодулей модуля M. При фиксированном индексе j получаем возрастающую последовательность

$$L_0(M_j) \subseteq L_1(M_j) \subseteq \ldots \subseteq L_n(M_j) \subseteq \ldots.$$

Так как $M_j \subseteq M_m$ для всех $m \geqslant j$, то $L_i(M_j) \subseteq L_i(M_m)$ для всех $m \geqslant j$, и мы получаем диагональную возрастающую последовательность

$$L_0(M_0) \subseteq L_1(M_1) \subseteq \ldots \subseteq L_n(M_n) \subseteq \ldots.$$

Так как M — нётеров R-модуль, то найдется индекс q, такой, что $L_q(M_q) = L_{q+1}(M_{q+1}) = \ldots$. Тогда $L_i(M_j) = L_q(M_q)$ для всех $i \geqslant q$, $j \geqslant q$. С другой стороны, из условия обрыва возрастающих цепей следует, что для фиксированного индекса i существует наименьшее число $n(i)$ среди таких k, что $L_i(M_j) = L_i(M_k)$ для всех $j \geqslant k$. Если $i \geqslant q$, то $n(i) \leqslant q$. Итак, числа $n(i)$ ограничены, скажем, числом n_0. Тогда $L_i(M_j) = L_i(M_{n_0})$ для $i = 0, 1, \ldots$. Из предыдущей леммы следует, что $M_j = M_{n_0}$ для всех $j \geqslant n_0$. Так как $M[x]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей $R[x]$-подмодулей, то $M[x]$ является нётеровым $R[x]$-модулем. □

7.14. Следствие. *Если R — нётерово справа кольцо, M_R — конечно порожденный R-модуль, то модуль многочленов $M[x]$ является нётеровым $R[x]$-модулем; в частности, кольцо многочленов $R[x]$ нётерово справа.*

Доказательство. Так как M — нётеров R-модуль, то теорема Гильберта о базисе применима. Второе утверждение вытекает из первого при $M = R$. □

Если $R[x]$ — кольцо многочленов над R от переменной x, то через $R[x, y]$ обозначим кольцо многочленов над $R[x]$ от переменной y. Будем называть $R[x, y]$ кольцом многочленов над R от переменных x, y. Допустим, что мы определили кольцо $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ от $n-1$ переменных. Тогда пусть $R[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменной x_n над $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Это кольцо называется *кольцом многочленов над R от переменных $x_1, \ldots, x_n$* [1]).

[1]) Определение не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора переменной x_n.— *Прим. перев.*

7.15A. Следствие. *Если R — нётерово справа кольцо, то нётерово справа и кольцо многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Доказательство проводится индукцией по n с использованием 7.14.

Пусть S — коммутативное кольцо, R — его подкольцо. Если $a_1, \ldots, a_n$ — конечный набор элементов из S, то подкольцо $R[a_1, \ldots, a_n]$, порожденное подкольцом R и элементами $a_1, \ldots, a_n$, является гомоморфным образом кольца многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ при отображении, которое переводит x_i в a_i, $i = 1, \ldots, n$, и оставляет на месте элементы из R. Следовательно, *если кольцо R нётерово, то нётерово и кольцо $R[a_1, \ldots, a_n]$.*

Гипотеза Серра: будет ли каждый проективный модуль свободен над кольцом многочленов от n переменных над полем? Ответ положителен при $n = 1, 2$ (Сешадри [58]). В любом случае каждый проективный идеал свободен. В общем случае вопрос остается открытым (см. Басс [62]) [1]).

7.15B. Упражнения.

7.15B. 1 (Джилмер [68]). Доказать, что многочлен $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ в кольце многочленов $R[x]$ над коммутативным кольцом R обратим тогда и только тогда, когда f_0 — обратимый элемент в R, а f_i — нильпотентный элемент кольца R, $i = 1, \ldots, n$.

*7.15B.2 (Снаппер [52]). $\operatorname{rad} R[x] = N[x]$, где N — максимальный ниль-идеал коммутативного кольца R.

7.15B.3. Для любого кольца R обратимые элементы в кольце $R\langle x\rangle$ — это элементы вида $c + xg$, где $g \in R\langle x\rangle$ и c — обратимый элемент кольца R. Вывести из этого, что $\operatorname{rad} R\langle x\rangle$ состоит из всех степенных рядов $r + xh$, где $h \in R\langle x\rangle$ и $r \in \operatorname{rad} R$.

7.16. Предложение. *Следующие условия на модуль M эквивалентны:*

7.16.1. *M — однородный модуль.*

7.16.2. *Инъективная оболочка модуля M неразложима.*

Доказательство. Пусть $\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M. Если $\hat{M}$ — разложимый модуль, то $\hat{M} = A \oplus B$, где A, B — ненулевые подмодули. Тогда $U = A \cap M \neq 0$, $V = B \cap M \neq 0$ и $U \cap V = 0$, т. е. модуль M не является однородным. Обратно, если M содержит ненулевые независимые подмодули U, V, то пусть $\hat{U}$ и $\hat{V}$ — их инъективные оболочки в $\hat{M}$. Так как $\hat{U}$ и $\hat{V}$ — инъективные модули, то они выделяются прямыми слагаемыми в $\hat{M}$, и поэтому модуль $\hat{M}$ не является неразложимым. □

[1]) Полное решение проблемы получено А. А. Суслиным (*ДАН СССР*, 229 (1976), № 5, 1063—1066).— *Прим. перев.*

Области Ope

Правый идеал кольца R называется **однородным**, если он является однородным R-модулем. Однородный правый идеал U играет ту же роль в строении простого нётерова кольца R, что минимальный правый идеал в строении простого артинового кольца Именно, $R = \operatorname{End}_K U$, где U — конечно порожденный проективный модуль над $K = \operatorname{End} U_R$. В этом случае, однако, K является областью целостности, в то время как в артиновом случае оно было телом. Тем не менее кольцо K вложимо в тело. Сейчас мы обсудим, как это может быть осуществлено.

Правой **областью Ope** называется такая область целостности K, что K — однородный правый идеал в K. Например, любая коммутативная область целостности R является областью Ope, поскольку $xy \in xR \cap yR$. Симметрично определяется левая область Ope (Ope [31], [33]). Не каждая область целостности вложима в тело (А. И. Мальцев [36]). Среди вложимых в тела находятся области Ope. Тело Q называется (**правым**) **телом частных** области целостности K, если K — подкольцо тела Q и $Q = \{ab^{-1} \mid a, b \in K, b \neq 0\}$. В этом случае, если a, b — ненулевые элементы из K, то $b^{-1}a = a_1 b_1^{-1}$ для подходящих a_1, $b_1 \in K$. Тогда $ab_1 = ba_1 \neq 0$, т. е. $aK \cap bK \neq 0$. Это доказывает, что для того, чтобы K обладала телом частных, необходимо, чтобы K была областью Ope. Обратно, пусть K — область Ope. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in K$, $b \neq 0$. В $\mathcal{S}$ определим следующее отношение: $(a, b) \approx (c, d)$ тогда и только тогда, когда из $bd_1 = db_1$ следует $ad_1 = cb_1$. Можно проверить, что $\approx$ есть отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{S}$. Пусть a/b обозначает множество пар (c, d), таких, что $(c, d) \approx (a, b)$. Пусть $Q = \{a/b \mid a, b \in R, b \neq 0\}$. В Q определим операции:

$$a/b + c/d = (ad_1 + cb_1)/m, \tag{1}$$

где $m = bd_1 = db_1$. Если $c \neq 0$ и $n = bc_2 = cb_2$, то определим

$$(a/b)(c/d) = (ac_2)/(db_2) \quad \text{и} \quad (a/b)(c/d) = 0/d, \text{ если } c = 0. \tag{2}$$

Мы опускаем проверку того, что результат операций (1) и (2) не зависит от выбора представителей для a/b и c/d. Мы оставляем читателю и проверку того, что Q — тело. (Вопрос о кольцах частных мы обсудим детально и в большей общности в гл. 9.)

Имеется кольцевой мономорфизм $K \to Q$, такой, что $a \mapsto a/1$. [Это непосредственное следствие формул (1) и (2).] Если мы отож-

дествим K с его образом при этом отображении, то увидим, что Q — тело частных кольца K, поскольку $(a/1)^{-1} = (1/a)$ для всех $0 \neq a \in K$ и $(a/b) = (a/1)\,(b/1)^{-1}$ для всех $a/b \in Q$.

Условие максимальности для прямых сумм

Будем изучать следующее условие обрыва цепей для модуля, которое приведет нас к существованию однородных подмодулей:

модуль M не содержит бесконечного числа независимых подмодулей. Будем говорить, что модуль M, удовлетворяющий этому условию, удовлетворяет **условию максимальности для прямых сумм.** В частности, кольцо R может удовлетворять условию максимальности для прямых сумм правых или левых идеалов. Любое кольцо матриц D_n над телом D является конечномерным векторным пространством над D и поэтому удовлетворяет обоим условиям максимальности для прямых сумм. Более того, этим условиям удовлетворяет и конечное произведение таких колец.

Определение размерности (Голди), упоминаемой в следующем предложении, было дано в 4.19.

7.17. Предложение.

7.17.1. *Если M — ненулевой R-модуль, удовлетворяющий условию максимальности для прямых сумм, то существует конечное число независимых однородных подмодулей $U_1, \ldots, U_n$, таких, что $U_1 + \ldots + U_n$ — существенный подмодуль в M.*

В этом случае $\dim M = n$.

7.17.2. *Если M удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм и S — ненулевой подмодуль, то S содержит однородный подмодуль модуля M.*

7.17.3. *Модуль M удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяет каждое существенное расширение модуля M.*

Доказательство утверждения 7.17.1. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ — семейства независимых подмодулей, то будем говорить, что $\mathcal{F}'$ — **измельчение** множества $\mathcal{F}$, если каждый подмодуль из $\mathcal{F}'$ содержится в некотором подмодуле из $\mathcal{F}$. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{F}'$ — **собственное** измельчение, если мощность множества $\mathcal{F}'$ больше, чем мощность множества $\mathcal{F}$. Из условия максимальности для прямых сумм следует, что для данного множества $\mathcal{F}$ существует конечное измельчение $\mathcal{F}'$ множества $\mathcal{F}$, уже не обладающее собственными измельчениями. Покажем теперь, что такое семейство $\mathcal{F}'$ состоит из однородных подмодулей. Действительно, если $U \in \mathcal{F}'$ и U не является однородным, то $X \cap Y = 0$ для двух ненулевых подмодулей в U. Тогда семейство $\mathcal{F}''$, получающееся из $\mathcal{F}'$ заменой U на X и Y, является собственным измельчением

для $\mathcal{F}'$ [1]). Следовательно, можно считать, что M содержит однородный подмодуль U_1. Если U_1 не является существенным подмодулем, то $U_1 \cap M_2 = 0$ для некоторого ненулевого подмодуля M_2. Но M_2 содержит однородный подмодуль U_2. Продолжая, получим цепь

$$U_1 \subset U_1 \oplus U_2 \subset \ldots \subset U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n,$$

где U_i — однородный модуль, $i = 1, \ldots, n$. Из условия максимальности для прямых сумм следует, что для некоторого n модуль M является существенным расширением подмодуля $\sum_{i=1}^{n} U_i$. Обратное утверждение оставляем в качестве упражнения.

Доказательство 7.17.2. Любой подмодуль модуля M удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм, а тогда применимо утверждение 7.17.1. Доказательство утверждения 7.17.3 оставляем в качестве упражнения (см. 7.18.1). □

Можно было бы думать, что модуль M, удовлетворяющий условию максимальности для прямых сумм, может содержать сколь угодно большое число независимых подмодулей. Это не так. В действительности число n в утверждении 7.17.1 определено однозначно, и каждое семейство независимых подмодулей модуля M содержит не более n подмодулей. Это утверждение можно вывести из теоремы Крулля — Ремака — Шмидта 21.2 (см. упр. 7.18.1).

7.18. Упражнения.

7.18.1. Пусть M — ненулевой R-модуль, $\hat{M}$ — его инъективная оболочка. Тогда следующие условия равносильны:

(a) M удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм.

(b) Существует конечное число независимых однородных подмодулей $U_1, \ldots, U_n$, таких, что $U_1 + \ldots + U_n$ — существенный подмодуль в M.

(c) $\hat{M}$ — прямая сумма m неразложимых модулей, $m < \infty$.

(d) Существует число t, такое, что M содержит семейство из t независимых подмодулей, но не содержит такого семейства из большего числа подмодулей.

В этом случае $n = m = t$.

7.18.2 (Голди). Область целостности R является областью Ope тогда и только тогда, когда R_R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм.

7.18.3. Если R — область Ope, то областью Ope является и кольцо многочленов $R[x]$.

[1]) Поскольку $|\mathcal{F}'| < \aleph_0$. — *Прим. перев.*

7.18.4. Если K — тело частных правой области Оре R, то K — инъективная оболочка модуля R_R. Более общим образом, показать, что над правой областью Оре любой делимый правый модуль без кручения инъективен.

7.18.5. Если Q и Q' — тела частных кольца K, то существует единственный изоморфизм колец (тел) $\varphi\colon Q \to Q'$, такой, что $\varphi(a) = a$ для всех $a \in K$.

7.18.6. Если K — правое тело частных кольца Q, то Q — левое тело частных кольца K тогда и только тогда, когда K — левая область Оре.

***7.19.** Упражнения. Пусть E — неразложимый (квази)инъективный модуль и $B = \operatorname{End} E_R$.

7.19.1. Доказать, что B содержит единственный правый идеал J. Вывести из этого, что $J = \operatorname{rad} B$ и R/J — тело. (Тогда B — локальное кольцо. Ср. 18.10.)

7.19.2. Если в E нет вполне инвариантных подмодулей, то B — тело.

***7.20.** Упражнение (обобщение Адзумаи [50] теоремы Крулля — Ремака — Шмидта). Разложение модуля M в прямую сумму неразложимых модулей $\{M_i\}_{i\in I}$ с локальными кольцами $\operatorname{End}(M_i)_R$ для всех $i \in I$ единственно (в том смысле, что если $M = \sum_{j\in J} N_j$ — другое такое разложение, то существуют биективное отображение $f\colon I \to J$ и автоморфизм модуля M, отображающий M_i на $N_{f(i)}$ для всех $i \in I$).

Порядки в простых артиновых кольцах

Предподкольцо T кольца S называется **правым порядком** в S, если для любого $x \in S$ найдутся a, $b \in T$, причем a — обратимый элемент в S, для которых $x = ba^{-1}$. Например, область Оре K является порядком в своем теле частных D, а кольцо матриц K_n — порядок в кольце D_n. Действительно, пусть $x = (d_{ij}) \in D_n$, где $d_{ij} \in D$. Тогда $d_{ij} = k_{ij}t_{ij}^{-1}$, k_{ij}, $t_{ij} \in K$, i, $j = 1, \ldots, n$. Так как K — область Оре, то найдется ненулевой элемент $t \in \bigcap_{i,j=1}^{n} t_{ij}K$. Поэтому $t = t_{ij}g_{ij}$ для некоторого $g_{ij} \in K$. Тогда $t_{ij}^{-1}t = g_{ij}$ и поэтому для $a = \operatorname{diag} t$ получаем

$$b = xa = (k_{ij}g_{ij}) \in K_n.$$

Так как a — обратимый элемент в кольце D_n, то $x = ba^{-1}$, что и требовалось показать. (Все порядки кольца D_n могут быть описаны аналогичным образом, см. теорему Фейса — Утуми, гл. 10.) Более общее утверждение: если R — порядок в кольце S, то кольцо R_n — порядок в кольце матриц S_n.

7.21А. Предложение. *Если K — правый порядок в D, то канонический правый K-модуль D является существенным расширением (на самом деле рациональным расширением, см. 4.5) модуля K. Если D — артиново справа кольцо, то для любого натурального числа $n > 0$ и для любого ненулевого идемпотента e в кольце всех $(n \times n)$-матриц D_n кольцо eK_ne является правым порядком в кольце eD_ne.*

Доказательство. Если $d \in D$ и $d \neq 0$, то $d = ab^{-1}$, где a, $b \in K$. Поэтому $a = db$ — ненулевой элемент в $dK \cap K$. Это показывает, что D — существенное расширение модуля K. (Аналогично проверяется, что D — рациональное расширение модуля K.)

Допустим теперь, что D — артиново справа кольцо. Тогда любой регулярный справа элемент $d \in D$ обратим в D. Чтобы убедиться в этом, выберем число k так, что убывающая цепь $\{d^iD\}_{i=1}^{\infty}$ правых идеалов стабилизируется после d^kD. Тогда $d^k = d^{k+1}c$ для некоторого $c \in D$. Так как элемент d регулярен справа, то $1 = dc$. Итак, c — правый обратный для d. Но $d(cd - 1) = 0$, и поэтому $cd = 1$. Следовательно, d — обратимый элемент.

Докажем теперь, что $R = eK_ne$ — правый порядок в $Q = eD_ne$. Сначала покажем, что (1) *для любого $0 \neq q \in Q$ существует элемент $r \in R$, такой, что $qr \in R$ и $qr \neq 0$.* Действительно, правый идеал $J = \{b \in K_n \mid qb \in K_n\}$ кольца K_n существенный, поскольку, как показано выше перед предложением 7.21А, K_n — правый порядок в D_n, и потому D_n — существенное расширение для K_n. Итак, qJ — ненулевой правый идеал первичного кольца K_n. Следовательно, $qJe \neq 0$. Но $q = eqe \in eD_ne$. Поэтому существует элемент $r \in R$, для которого $qr \neq 0$.

Далее докажем, что (2) *каждый регулярный справа элемент x кольца R обратим в Q.* В самом деле, поскольку кольцо Q артиново, достаточно убедиться в том, что x — регулярный элемент в Q. Допустим, что $xq = 0$ для $q \in Q$. Если $q \neq 0$, то $qr \neq 0$ и лежит в R для некоторого $r \in R$. Тогда равенство $xqr = 0$ противоречит регулярности элемента x в R. Это показывает, что элемент x регулярен справа в Q, а тогда, как мы доказали для артинова справа кольца, он является обратимым элементом.

Для того чтобы убедиться, что R — правый порядок в Q, нам остается лишь показать, что для любого $q \in Q$ множество $q' = \{r \in R \mid qr \in R\}$ содержит регулярный справа элемент x. [Действительно, тогда x — обратимый элемент кольца Q, и поэтому $q = ax^{-1}$, $a = qx$, $x \in R$.] Так как R — подкольцо артинова справа кольца Q, то можно выбрать $x \in q'$ так, что правый аннулятор $x^{\perp}$ элемента x в R (соотв. в Q) является минимальным в множестве $\{y^{\perp} \mid y \in q'\}$. [*Указание*: правый аннулятор в R совпадает

с пересечением правого аннулятора в Q с R.] Если x не является регулярным справа в R, то x не является и обратимым в Q, поэтому $xQ \neq Q$. Следовательно, существует ненулевой правый идеал P кольца Q, такой, что $xQ \cap P = 0$. (Доказательство?) Тогда $I = P \cap R$ — ненулевой правый идеал кольца R, такой, что $xR \cap I = 0$. Так как q' — существенный правый идеал кольца R, то $J = q' \cap I \neq 0$. Если $k \in J$ и $t \in (k + x)^\perp$, то $kt = -xt \in I \cap xR$. Поскольку $I \cap xR = 0$, то $kt = xt = 0$, и поэтому $(k + x)^\perp \subseteq k^\perp \cap x^\perp$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $r_k^\perp = k^\perp \cap x^\perp$ для всякого элемента $r_k = k + x$ при любом $k \in q'$. Если $r_k^\perp = 0$, то r_k — нужный нам регулярный справа элемент из q'. В противном случае в силу выбора элемента x получаем, что $x^\perp = r_k^\perp = k^\perp \cap x^\perp$ для всех $k \in q'$, и поэтому $q'x^\perp = 0$. Так как R — первичное кольцо и $q' \neq 0$, то $x^\perp = 0$. Поэтому x — регулярный справа элемент (как раз его и требовалось найти). □

Голди [58], [60], Лезьё — Круазо [59] открыли, что любое нётерово первичное кольцо является порядком в простом артиновом кольце. Исторически это была первая теорема о конечномерном представлении для произвольного простого нётерова кольца. Она доказывается в гл. 9. Сейчас мы получаем лишь такое следствие.

7.21В. Предложение. *Если R — простое кольцо с однородным правым идеалом U, то R — правый порядок в простом артиновом кольце D_m, где D — тело частных области Оре $K = \operatorname{End} U_R$. Если T — подкольцо кольца D_m, содержащее R, то T — порядок в D_m и простое кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для прямых сумм. Кроме того, существуют число $n \geqslant m$, идемпотент e в кольце $(n \times n)$-матриц D_n и изоморфизм* [1]) $R \approx eK_ne$.

Доказательство. В силу 7.5 $R \approx \operatorname{End}_K U$, где K — порядок в теле D и ${}_KU$ — конечно порожденный проективный модуль. Допустим, что U — прямое слагаемое в K^n. В силу (7.6) найдется идемпотент

$$e \in K_n \approx \operatorname{End}_K K^n,$$

такой, что $R \approx eK_ne$. (Идемпотент e является проекцией $K^n \to U$.) Но K_n — порядок в D_n. Из этого следует, что eK_ne — порядок в eD_ne (7.21А). В силу упражнения 7.10′.3 $eD_ne \approx D_m$ для некоторого $m \leqslant n$. Итак, $R \approx eK_ne$ — порядок в простом артиновом кольце, изоморфном кольцу D_m.

Далее, если $D_m \supseteq T \supseteq R$, I — идеал кольца T и $0 \neq x = ab^{-1} \in I$, то $xb = a \in I \cap R$. Но $I \cap R$ — идеал кольца R. Так как $x \neq 0$, то $I \cap R \neq 0$. Следовательно, $I \cap R = R$, т. е. $I \supseteq R$. Тогда $1 \in I$, и поэтому $I = T$, т. е. T — простое кольцо. Также очевидно, что T — порядок в кольце D_m, удовлетворяющий условию максимальности для прямых сумм, поскольку этому условию удовлетворяет кольцо D_m (см. 7.17.3). □

[1]) Это часть теоремы Харта [67].

Аннуляторы

Если R — кольцо с делителями нуля, то существует нетривиальный **аннуляторный идеал**, т. е. правый идеал вида $A = \operatorname{ann}_R X$, где X — некоторое подмножество кольца R. Итак, правый идеал A является аннуляторным тогда и только тогда, когда $A = X^\perp$ для некоторого подмножества X. Тогда $A = (RX)^\perp$, где RX — левый идеал, порожденный множеством X. Пусть $B = {}^\perp A$ — левый аннулятор множества A. Очевидно, что $B \supseteq RX$ и

$$B^\perp \subseteq (RX)^\perp = X^\perp = A.$$

Однако $BA = 0$, и поэтому $B^\perp \supseteq A$. Следовательно, $A = B^\perp = ({}^\perp A)^\perp$. *Итак, правый идеал A является аннуляторным тогда и только тогда, когда $A = ({}^\perp A)^\perp$.*

7.22. Упражнения.

7.22.1. Пусть A — правый идеал кольца R. Если $A = eR$, где $e = e^2 \in R$, то A — аннуляторный правый идеал.

7.22.2. Если $R = D_n$, где D — тело, то каждый правый идеал кольца R аннуляторный.

7.22.3. Каждый конечно порожденный односторонний идеал в кольце всех линейных преобразований аннуляторный.

*7.22.4. Циклический модуль R/A вкладывается в произведение экземпляров модуля R тогда и только тогда, когда A — правый аннуляторный идеал. Вывести из этого, что если R — кообразующий в категории mod-R, то каждый правый идеал кольца R аннуляторный.

7.22.5. Показать, что каждый идеал кольца $\mathbb{Z}/(p^n)$ аннуляторный. [*Указание*: собственные идеалы имеют вид $(p^i)/(p^n)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Провести индукцию по i.]

Максимальные и минимальные аннуляторные идеалы

Множество правых аннуляторных идеалов кольца R упорядочено по включению. **Минимальным аннуляторным идеалом** называется минимальный элемент частично упорядоченного множества ненулевых правых аннуляторных идеалов. Двойственным образом, **максимальный аннуляторный идеал** — максимальный элемент в частично упорядоченном множестве правых аннуляторных идеалов, отличных от R. Например, если R — область целостности, то 0 — максимальный аннуляторный идеал, а R — минимальный аннуляторный идеал. Но это тривиальные примеры. Более типич-

ная ситуация: любой правый идеал A кольца R, выделяющийся прямым слагаемым, является аннуляторным идеалом, поскольку $A = eR$ для идемпотента $e \in R$ и, следовательно, $A = B^{\perp}$, где $B = R(1 - e)$ — левый аннуляторный идеал. Если K — область целостности, то для любой матричной единицы e_{ii} правый идеал $e_{ii}R$ в кольце матриц $R = K_n$ над кольцом K является минимальным правым аннуляторным идеалом. Итак, минимальные правые идеалы простого артинова кольца являются минимальными аннуляторными идеалами.

Условие максимальности для правых аннуляторных идеалов

Наряду с условием максимальности для правых аннуляторных идеалов (см. «Теоретико-множественное введение», где обсуждалось условие максимальности для упорядоченных множеств) мы будем иногда рассматривать и условие минимальности для правых аннуляторных идеалов, а также аналогичные условия для левых аннуляторных идеалов.

Следующие упражнения не являются необходимыми для дальнейшего изложения, но они проливают свет на основные свойства аннуляторных идеалов и иногда будут использоваться в тексте.

7.23. Упражнения.

7.23.1. Множество правых аннуляторных идеалов кольца R является структурой, где $A \vee B = ({}^{\perp}(A + B))^{\perp}$ и $A \wedge B = A \cap B$.

7.23.2. Соответствие $\varphi\colon \mapsto {}^{\perp}A$ является структурным антиизоморфизмом между структурой правых аннуляторных идеалов и структурой левых аннуляторных идеалов. Итак, кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет условию минимальности для левых аннуляторных идеалов. Аналогично, A — максимальный правый аннуляторный идеал тогда и только тогда, когда ${}^{\perp}A$ — минимальный левый аннуляторный идеал. Каждый максимальный правый аннуляторный идеал A имеет вид $A = b^{\perp}$, где b — некоторый элемент кольца R.

7.23.3. Если S — подкольцо кольца R, то отображение ограничения $A \mapsto A \cap S$ является гомоморфным наложением структуры правых аннуляторных идеалов кольца R на структуру правых аннуляторных идеалов кольца S. Вывести из этого, что если S удовлетворяет условию максимальности (минимальности) для правых аннуляторных идеалов, то этому же условию удовлетворяет и кольцо R. (См. стр. 188.)

7.23.4 (Фейс [67]). Кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов тогда и только тогда, когда для каждого правого идеала I существует конечно

порожденный правый идеал I_1, лежащий в I и имеющий тот же левый аннулятор, что и I.

7.23.5. Если R — правый порядок в классически полупростом кольце S, то R удовлетворяет условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и для правых аннуляторных идеалов. Итак, этим условиям удовлетворяет любое простое кольцо с ненулевым однородным правым идеалом. Кроме того, эти условия инвариантны (в смысле Мориты) [1]).

*7.23.6. Если для любого $n > 0$ кольцо матриц R_n **конечно по Дедекинду** (т. е. $ab = 1$ влечет за собой $ba = 1$), то R — правое IBN-кольцо (см. гл. 3). В противном случае для некоторого n кольцо R_n содержит бесконечное число ортогональных идемпотентов и, в частности, не удовлетворяет ни условию максимальности для прямых сумм правых идеалов, ни условию максимальности для правых аннуляторных идеалов. Вывести из этого, что кольцо R не вкладывается в тело.

Для $x \in R$ через $x^{\perp}$ обозначим его правый аннулятор.

Напомним (см. 4.15), что правый идеал U кольца R называется латеральным, если кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} U_R$ является областью целостности. Некоторые достаточные условия латеральности правого идеала U приведены в 4.16. Если R — простое кольцо или первичное кольцо с условиями обрыва возрастающих цепей левых аннуляторных идеалов, то по 4.21.2 любой однородный правый идеал является латеральным.

7.24. Предложение.

7.24.1. *Если A — максимальный правый аннуляторный идеал кольца A, то кольцо эндоморфизмов правого R-модуля R/A является областью целостности.*

7.24.2. *Пусть максимальный правый аннуляторный идеал A записан в виде $A = b^{\perp}$. Тогда bR — латеральный правый идеал и $\operatorname{End}(bR)_R$ — область целостности, изоморфная кольцу $\operatorname{End}(R/A)_R$.*

Доказательство. Так как в обоих случаях $A = b^{\perp}$, то $R/A \approx bR$. Поэтому $\operatorname{End}(R/A)_R \approx \operatorname{End}(bR)_R$. В силу 4.16.2, $\operatorname{End}(bR)_R$ — область целостности. □

7.24.1 является обобщением (Кох [66]) леммы Шура 3.10.1.

Простые кольца с максимальными правыми аннуляторными идеалами

Применим предложение 7.24 к простым кольцам.

7.25. Предложение. *Пусть R — простое кольцо с максимальным правым аннуляторным идеалом. Тогда существует главный правый идеал U кольца R, такой, что $Q = \operatorname{End} U_R$ — область*

[1]) См. стр. 278.— *Прим. перев.*

целостности. Кроме того, U — конечно порожденный проективный Q-модуль, а каноническое отображение $R \to \mathrm{End}_Q U$ является изоморфизмом колец. Итак, для некоторого числа $n > 0$ существуют идемпотент e в кольце матриц Q_n и изоморфизм колец $R \approx eQ_ne$.

Доказательство. Надо применить общую теорему Веддербёрна 7.5 и 7.24. В связи с изоморфизмом $R \approx eQ_ne$ см. доказательство утверждений 7.5 и 7.21В. □

7.26. Упражнения.

7.26.1 (Харт [67]). Если в предложении 7.25 простое кольцо R содержит однородный правый идеал, то Q — правая область Ope.

*7.26.2. Циклический правый R-модуль R/A содержится в некотором свободном R-модуле тогда и только тогда, когда $X^\perp = A$ для некоторого конечного подмножества X кольца R.

7.26.3. Если в кольце R каждый правый идеал A имеет вид $A = X^\perp$, где X — некоторое конечное подмножество кольца R, и соответствующее условие выполнено для левых идеалов, то кольцо R артиново и нётерово справа и слева.

7.26.4. Если каждый циклический правый и левый R-модуль вложим в проективный R-модуль, то кольцо R артиново и нётерово справа и слева, при этом каждый односторонний идеал является аннуляторным. (См. квазифробениусовы кольца, гл. 24.)

Вопросы единственности

Простые кольца вездесущи в некоммутативной теории колец. Мы знаем, что простое нётерово кольцо R изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля U над областью Ope K, при этом R — правый порядок в простом артиновом кольце D_n, где D — тело частных кольца K. Получаемое таким образом кольцо D_n единственно с точностью до изоморфизма (доказательство аналогично доказательству единственности тела частных области Ope, см. классические кольца частных, гл. 9). Из теоремы Веддербёрна — Артина (7.9) следует, что два простых артиновых кольца D_m и Q_n, где D, Q — тела, изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$ и $D \approx Q$. Итак, тела частных различных областей Ope K, возникающих при различных реализациях описанного процесса, изоморфны. Можно показать, однако, что в общем случае само кольцо K не определено однозначно.

В случае когда U — проективный однородный правый идеал кольца R (и только в этом случае), область Ope K является простым кольцом (7.5). Итак, мы неизбежно приходим к простому кольцу (не являющемуся телом) без делителей нуля. Можно было бы без риска заключать пари, что 99 процентов читателей ни разу не видели ни одного такого кольца, хотя эти кольца весьма часто встречаются в природе. Литтлвуд [33] рассматривал некоторый класс таких колец, связанный с квантовой механикой. Каждый, желающий выяснить строение всех простых нётеровых колец, вынужден вступить в схватку с ними (чем мы и займемся в следующем параграфе).

Дифференцирования

Пусть A — кольцо, $\varphi\colon A \to A$ — мономорфизм колец. Отображение $D\colon A \to A$ назовем **φ-дифференцированием**, если

$$D(a+b) = D(a) + D(b),$$

$$D(ab) = \varphi(a)\,D(b) + D(a)\,b$$

для всех $a, b \in A$. Если φ — тождественное отображение, то будем называть D **(обычным) дифференцированием**. Каждому элементу $x \in A$ можно сопоставить дифференцирование

$$D_x\colon a \mapsto ax - xa$$

для любого $a \in A$, которое будем называть **внутренним** дифференцированием, определяемым элементом x. Дифференцирование называется **внешним**, если оно не является внутренним.

Примеры. 1. Если R — кольцо и $A = R[x]$ — кольцо многочленов, то обычное дифференцирование D, для которого

$$D\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1},$$

где $a_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, является дифференцированием кольца A.

2. Пусть $A \supseteq k$ — тела и $\dim_k A = 2$. (Мы не требуем равенства $\dim A_k = 2$.) Тогда $A = k + kx$ для любого элемента $x \in A$, $x \notin k$. Если $a \in k$, то существуют единственные элементы $\varphi(a)$, $D(a) \in k$, такие, что

$$xa = D(a) + \varphi(a)\,x.$$

Это определяет кольцевой мономорфизм φ кольца A и φ-дифференцирование D. □

Пусть D есть φ-дифференцирование кольца A, $A[y]$ — кольцо многочленов. Тогда $A[y]$ является также кольцом относительно обычного сложения и умножения, которое определяется равенством

$$ya = D(a) + \varphi(a)\,y \tag{1}$$

и его следствиями. Это кольцо называется **кольцом φ-дифференциальных многочленов с дифференцированием** D и обозначается $A[y, D, \varphi]$.

Пусть D — любое дифференцирование кольца A (т. е. $\varphi = 1$). Тогда из (1) следует, что

$$ya = D(a) + ay \tag{2}$$

и

$$y^n a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)\, y^{n-k}, \tag{3}$$

где $D^2 = D \circ D$, ..., $D^n = D^{n-1} \circ D = D \circ D^{n-1}$ и $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент. В этом случае наше кольцо называется **кольцом дифференциальных многочленов над кольцом** A **с дифференцированием** D и обозначается через $A[y, D]$ или $A[y, ']$, где штрих означает дифференцирование.

7.27. Предложение. *Если A — нётерово слева кольцо и D — его дифференцирование, то кольцо дифференциальных многочленов $A[y, D]$ нётерово слева.*

Доказательство. Пусть M — любой левый идеал кольца $A[y, D]$. Как и в доказательстве теоремы Гильберта о базисе, пусть $L_k(M)$ — левый идеал, состоящий из нуля и старших коэффициентов многочленов степени k, лежащих в левом идеале M. (Если в M нет элементов степени k, то $L_k(M) = 0$.) Так как

$$x \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} Da_i x^i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} x^i,$$

то $L_n(M) \subseteq L_{n+1}(M)$ для всех n. Тогда дословное повторение доказательства утверждения 7.13 (и леммы, ему предшествующей) завершает доказательство. □

7.28. Теорема (Амицур [57]). *Если A — простое кольцо характеристики 0 с внешним дифференцированием D, то кольцо дифференциальных многочленов $R = A[y, D]$ простое.*

Доказательство. Если I — ненулевой идеал кольца R, то I содержит ненулевой элемент

$$t = ay^n + p_t(y), \tag{1}$$

где $\deg p_t(y) < n$ и n имеет наименьшее возможное значение. Пусть $C(I)$ — множество всех $b \in A$, таких, что либо $b = 0$, либо в I найдется элемент вида (1), для которого $b = a$. Очевидно, что $C(I)$ — левый идеал кольца A. Если $b \in A$, то

$$tb = ay^n b + p_t(y)b. \tag{2}$$

Но из

$$y^n b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(b)\, y^{n-k} = by^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D^k(b)\, y^{n-k} \tag{3}$$

следует, что

$$tb = aby^n + p_{tb}(y), \tag{4}$$

где $\deg p_{tb}(y) < n$, и поэтому $ab \in C(I)$. Это доказывает, что $C(I)$ — идеал кольца A. Так как кольцо A простое и $C(I) \neq 0$, то $C(I) = A$ и $1 \in C(I)$. Итак, в I существует элемент

$$t = y^n + p_t(y), \tag{5}$$

где $\deg p_t(y) < n$. Пусть b — любой элемент кольца A. Применяя внутреннее дифференцирование D_b к элементу t и используя (4) и (5), получаем

$$D_b(t) = tb - bt = (by^n + p_{tb}(y)) - (by^n + bp_t(y)) = p_{tb}(y) - bp_t(y). \tag{6}$$

Тогда $D_b(t) \in I$ и его степень $< n$. В силу определения числа n $D_b(t) = 0$ для любого $b \in A$. Итак, t лежит в централизаторе подкольца A в кольце $A[y, D]$. Следующая лемма (7.29) показывает, что этот централизатор совпадает с центром. Так как $t = y^n + p_t(y)$ лежит в центре кольца A и $\deg p_y(t) < n$, то в силу независимости элементов $1, y, \ldots, y^n, \ldots$ над A получаем, что $n = 0$, а поэтому $t = 1$. Так как $t \in I$, то $I = A[y, D]$, т. е. $A[y, D]$ — простое кольцо. □

7.29. Лемма. *Если характеристика кольца A равна 0, то централизатор подкольца A в $A[y, D]$ содержится в центре кольца A.*

Доказательство. Если $x = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i$ лежит в этом централизаторе и $\deg x = m$, то

$$bx = \sum_{i=0}^{m} ba_i y^i = \sum_{i=0}^{m} a_i (y^i b) = \sum_{i=0}^{m} a_i \Big(\sum_{k_i=0}^{i} \binom{i}{k_i} D^{k_i}(b)\, y^{i-k_i} \Big). \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты (при $m \geqslant 1$), получаем

$$ba_m = a_m b \tag{8}$$

и

$$ba_{m-1} = a_{m-1} b + m a_m D(b). \tag{9}$$

Из (8) следует, что a_m лежит в центре кольца A, а в (9), ввиду упр. 7.46, утверждается, что

(10) $$D(b) = bz - zb,$$

где $z = -a_{m-1}/ma_m$, т. е. что D — внутреннее дифференцирование, определяемое элементом z. Это противоречит тому, что D — внешнее дифференцирование. Следовательно, $m = 0$. Тогда $x = a_0$ и, следовательно, лежит в центре кольца A. Это завершает доказательство леммы. □

7.30. Предложение. *Пусть R — простое кольцо характеристики 0, $A = R[x]$ — кольцо многочленов и $B = A[y, ']$ — кольцо дифференциальных многочленов, в котором $x' = 1$. Тогда B — простое кольцо.*

Доказательство. Пусть t — ненулевой элемент из ненулевого идеала I кольца B. Запишем

$$t = \sum_{i=0}^{n} x^i g_i(y)$$

в виде многочлена от x с коэффициентами $\{g_i(y)\}$ из $R[y]$, $i = 0, \ldots, n$. Положим $[t, y] = yt - ty$. Так как коммутирование элемента $t \in A$ с y равносильно применению внутреннего дифференцирования, определенного элементом y, то получаем, что

$$[\ldots[[t, y], y]\ldots] = n!g_n(y) \in I.$$

Так как характеристика кольца A равна нулю, то $n!$ — ненулевой элемент центра C кольца R. Но C — поле. Отсюда $g_n(y) \in I$. Предположим, что

$$g = g_n(y) = ry^m + (\text{члены степени} < m),$$

где $r \in R$, $r \neq 0$. Но тогда

$$gx - xg = mry^{m-1} + (\text{члены степени} < m - 1).$$

Коммутируя m раз с x, получаем, что $m!r \in I$ и, следовательно, $r \in I$. Тогда $RrR = R \subseteq I$. Значит, $B \subseteq I$. Поэтому B — простое кольцо. □

7.31. Упражнения.

7.31.1. Если A — тело, а D — дифференцирование, то в кольце $R = A[y, D]$ имеет место как левый, так и правый алгоритм деления. Например, если $f, g \in R$, то существуют элементы $q, r \in A$, такие, что

$$f = gq + r$$

и $\deg r < \deg g$. Из этого следует, что R — область главных правых и главных левых идеалов.

7.31.2. Если A не является телом, то кольцо $A[y, D]$ может не быть кольцом главных правых или главных левых идеалов (например, если $A = k[x]$ — кольцо многочленов над полем k и если $Dx = 1$).

7.31.3. Каждый правый и левый идеал кольца $R = k[x][y, D]$, где $Dx = 1$, проективен, если характеристика поля k равна 0. В этом случае каждый максимальный правый (левый) идеал главный. (Если характеристика поля k отлична от 0, то gl. dim $R = 2$, ср. гл. 8, в частности 8.23.)

7.31.4. (a) Если D — дифференцирование кольца A, то внутреннее дифференцирование D_y кольца $A[y, D]$ индуцирует дифференцирование D.

(b) Показать, что центр кольца $A[y, D]$ изоморфен кольцу многочленов $T[y]$, где T — подкольцо центра кольца A, состоящее из всех таких элементов a, что $D(a) = ay - ya = 0$.

(c) (Амицур [56]) Показать, что обратимые элементы кольца $A[y, D]$ лежат в A. Вывести отсюда, что $x^{-1}Ax \subseteq A$ для всех обратимых элементов x кольца $A[y, D]$, но что A не лежит в центре кольца $A[y, D]$, если $D \neq 0$.

7.31.5 (Джекобсон [50]). (a) Если в R имеются элементы x и y, такие, что $xy = 1$, но $yx \neq 1$, то R содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов.

(b) Если кольцо удовлетворяет условиям максимальности или минимальности для главных правых идеалов, то из $xy = 1$ следует равенство $yx = 1$ для любых элементов x, y этого кольца.

Строение V-колец

Окончание этой главы посвящено строению полупервичных нётеровых справа V-колец.

7.32A. Определение и предложение (Вильямайер). *Кольцо R называется* ***правым V-кольцом****, если выполнены следующие эквивалентные условия:*

(a) *Каждый простой правый R-модуль инъективен.*

(b) *Каждый правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов.*

(c) $\operatorname{rad} M = 0$ [1]) *для всех* $M \in \operatorname{mod}\text{-}R$.

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (c). Пусть S_i, $i \in I$, — множество представителей различных классов изоморфных простых правых R-модулей. Тогда $C = \coprod_{i \in I} S_i$ — инъективный кообразующий в категории mod-R. Следовательно, для $M \in \operatorname{mod}\text{-}R$ существует морфизм $0 \to M \to C^I$. (См. 3.55.) Из этого непосредственно следует, что $\operatorname{rad} M = 0$.

[1]) Определение rad M см. упр. 3.69.1 (a).— *Прим. перев.*

Импликация (c) $\Rightarrow$ (b) очевидна.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (a). Пусть f — ненулевой гомоморфизм правого идеала I в модуль R/M, где M — максимальный правый идеал. Покажем, что f продолжается до гомоморфизма $R \to R/M$. Действительно, поскольку $\operatorname{Ker} f = I_1$ — максимальный подмодуль в I, то $xR + I_1 = I$ для всех $x \in I - I_1$. В силу (b) I и I_1 являются пересечениями максимальных правых идеалов. Так как I/I_1 — простой модуль, то существует максимальный правый идеал M_1, такой, что $M_1 \cap I = I_1$ и $M_1 + I = R$. Тогда $R/I_1 = M_1/I_1 \oplus I/I_1$ и f допускает продолжение до гомоморфизма $\bar{f}\colon R_R \to R/M$. □

7.32B. Упражнение (Капланский). Коммутативное кольцо R является V-кольцом тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный идеал порождается идемпотентом [1]).

7.32C. Следствие. *Если* $\operatorname{rad} R = 0$, *то кольцо* R *полупервично. Итак, любое правое* V*-кольцо полупервично.*

Доказательство. Если I — нильпотентный идеал кольца R, а V — простой R-модуль, то $VI \neq V$ (так как из $VI = V$ следует, что $V = VI^n = 0$ для некоторого n). Итак, $VI = 0$. Это показывает, что I содержится в любом максимальном правом идеале кольца R и, следовательно, $I = \operatorname{rad} R = 0$. □

Правый R-модуль M называется **полупростым**, если M — прямая сумма простых подмодулей. Кольцо R называется **классически полупростым**, если модули R_R и ${}_RR$ полупросты.

7.33A. Упражнения.

7.33A.1. Следующие условия эквивалентны: (a) модуль M полупрост; (b) каждый подмодуль модуля M выделяется в нем прямым слагаемым; (c) каждый фактормодуль модуля M полупрост.

7.33A.2. Следующие свойства кольца R эквивалентны: (a) модуль R_R полупрост; (b) модуль ${}_RR$ полупрост; (c) R — прямая сумма конечного числа простых правых R-модулей; (d) каждый правый R-модуль инъективен, (e) каждый левый R-модуль инъективен; (f) каждый правый R-модуль проективен; (g) каждый левый R-модуль проективен.

Кольцо R называется **правым кольцом Голди**, если оно удовлетворяет условиям максимальности для правых аннуляторных идеалов и для прямых сумм правых идеалов. (Любое подкольцо нётерова справа кольца удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов.)

[1]) То есть кольцо R регулярно в смысле Неймана.— *Прим. перев.*

7.33B. Упражнение (Голди [58], [60], Лезьё и Круазо [60]). Если кольцо R является правым порядком в классически полупростом кольце Q, то R — полупервичное правое кольцо Голди, и каждый его существенный правый идеал содержит регулярный элемент. (См. доказательство предложения 7.21A, а также гл. 9 для доказательства обратного утверждения. Ср. с 7.23.6.)

7.34. Предложение. *Если* A *— правое* V*-кольцо и* B *— его собственный ненулевой идеал, то* $xA \not\approx A$ *для любого элемента* $x \in B$.

Доказательство. Пусть M — максимальный правый идеал, содержащий идеал B. Тогда $V = A/M$ — простой модуль и, следовательно, инъективен. Условие $xA \approx A$ равносильно существованию элементов a и b из A, таких, что правый аннулятор $y^\perp$ элемента $y = xa$ в кольце A равен нулю и $x = yb$ [1]). (Тогда $ba = 1$ и $yA = xA$.) Кроме того, в этом случае для любого $v \in V$ существует отображение $xA \to V$, при котором $yr \mapsto vr$ для всех $r \in A$. Так как модуль V инъективен, то существует элемент $m \in V$, такой, что $v = my \in Vy$. Итак, $V = Vy$. Но тогда $y \notin B$ и, следовательно, $x \notin B$. □

7.35. Предложение. *Кольцо* A *является произведением конечного числа простых колец тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1) *структура идеалов кольца* A *конечна;*

2) *кольцо* A *не содержит собственных двусторонних идеалов, являющихся существенными правыми идеалами;*

3) *кольцо* A *полупервично.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Обратно, пусть выполнены условия 1) — 3) и B — максимальный идеал. Так как B не является существенным правым идеалом, то $B \cap I = 0$ для некоторого ненулевого правого идеала I. Отсюда $IB = 0$, поскольку $IB \subseteq I \cap B$, а значит $(BI)^2 = 0$. Из полупервичности кольца A следует, что $BI = 0$. Итак, $A_1 = \operatorname{ann}_A B$ — ненулевой идеал. Так как B — максимальный идеал, то $A = B \times A_1$. Поскольку кольцо B также удовлетворяет условиям 1) — 3), индукция по числу идеалов кольца A завершает доказательство. □

Следующая теорема была впервые доказана Фейсом в 1964 г. (опубликована в [67]) в предположении, что кольцо A первично, и Орнстейном [66] для нётерова справа кольца A.

[1]) Действительно, если φ: $xA \approx A$ и $\varphi^{-1}(1) = y = xa$, где $a \in A$, то y — свободный образующий модуля xA. Следовательно, $y^\perp = 0$ и $x = yb$ для некоторого $b \in A$. Пусть теперь a и b с указанным свойством существуют. Тогда $xA = yA$ и yA — свободный циклический A-модуль, т. е. $xA \approx A_A$.— *Прим. перев.*

7.36A. Теорема. *Если R — правое V-кольцо и R — правый порядок в некотором классически полупростом кольце, то R — конечное произведение простых правых V-колец.*

Доказательство. В силу 7.32C любое правое V-кольцо R полупервично (т. е. выполнено 7.35.3). Допустим, что R — правый порядок в классически полупростом кольце Q. Если Q — прямая сумма n простых правых модулей, то каждое множество независимых правых идеалов кольца R содержит не более чем n элементов. (Доказательство?) Кроме того, каждый существенный правый идеал содержит регулярный элемент кольца R. Итак, из упр. 7.33B и из 7.34 следует, что в R выполнено свойство 7.35.2. Учитывая, что n ограничивает число прямых слагаемых кольца R, и повторяя доказательство предложения 7.35, получаем, что в R выполнено условие 7.35.1. В силу 7.35 R — конечное произведение простых колец. Очевидно, что каждый из этих простых сомножителей также является V-кольцом. □

7.36B. Упражнение. Доказать теорему 7.36A для нётеровых справа V-колец, предполагая, что она верна для первичного кольца R. Как получить из 7.36 утверждение для нётерова справа кольца?

Решения линейных дифференциальных уравнений

Оставшаяся часть этой главы посвящена результатам Коззенса [70], выясняющим, когда кольца дифференциальных (косых) многочленов являются V-кольцами.

Линейным (однородным) D-дифференциальным уравнением над k называется уравнение вида

$$\Big(\sum_{i=0}^{n>0} a_i D^{(i)}(x) = 0,\ a_i \in k,\ 0 \leqslant i \leqslant n\Big),$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{(i)}(x) = b,\ a_i,\ b \in k,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

В дальнейшем в этом параграфе R обозначает кольцо $k[y, D]$.

7.37. Лемма. *Допустим, что каждое однородное линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет нетривиальное решение в k. Если $f = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i \in R = k[y, D]$, то существуют $a \in k$ и $g \in R$, такие, что степень многочлена g равна $m - 1$ и $af = (y + 1)g$.*

Доказательство. Пусть $g = \sum_{i=0}^{m-1} b_i y^i$. Найдем a, $b_i \in k$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, такие, что

$$af + (y + 1)g = 0. \tag{1}$$

Раскрывая уравнение (1) и сравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} &aa_0 + D(b_0) + b_0 = 0,\\ &aa_1 + b_0 + D(b_1) + b_1 = 0,\\ &\quad\vdots\\ &aa_{m-1} + b_{m-2} + D(b_{m-1}) + b_{m-1} = 0,\\ &aa_m + b_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что эта система уравнений равносильна уравнению вида

$$\sum_{i=0}^{m} c_i D^{(i)}(a) = 0, \tag{2}$$

где $c_i \in k$, $0 \leqslant i \leqslant m$. В силу предположения уравнение (2) имеет нетривиальное решение в k. □

7.38. Следствие. *Если каждое однородное линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет нетривиальное решение в k, то единственные неприводимые элементы в кольце $R = k[y, D]$ — элементы степени 1. Следовательно, $V_\alpha = R/(y - \alpha)R$ — это простой правый R-модуль для всех $\alpha \in k$, и всякий простой модуль имеет такой вид.* □

7.39. Лемма. *Если каждое линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет решение в k и каждое однородное линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет нетривиальное решение в k, то $V_\alpha = R/(y - \alpha)R$ — делимый правый R-модуль для всех $\alpha \in k$, где $R = k[y, D]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$V_\alpha (y + \beta) = V_\alpha$$

для всех α, $\beta \in k$. Это эквивалентно тому, что для многочлена нулевой степени $h \in R$ существуют f, $g \in R$, для которых

$$f(y + \beta) + (y + \alpha)g = h. \tag{1}$$

Попробуем найти a, $b \in k$, такие, что

$$a(y + \beta) + (y + \alpha)b = h. \tag{2}$$

Уравнение (2) эквивалентно [1]) уравнению вида

$$D(b) + (\alpha - \beta)b = h. \tag{3}$$

[1]) Действительно, так как $yb = by + D(b)$, то $(a+b)y + D(b) + (\alpha - \beta)b = h$ — многочлен нулевой степени, и поэтому $a + b = 0$. — *Прим. перев.*

В силу предположения элемент $b \in k$, удовлетворяющий условию (3), существует. □

7.40. Теорема (Коззенс [70]). *Следующие условия на кольцо дифференциальных многочленов $R = k[y, D]$ эквивалентны:*

(а) *R — правое V-кольцо, обладающее единственным, с точностью до изоморфизма, простым правым R-модулем.*

(б) *Каждое линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет решение в k и каждое однородное линейное D-дифференциальное уравнение над k имеет нетривиальное решение в k.*

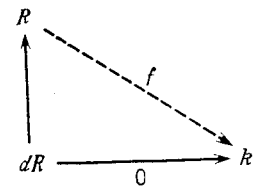
Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (b). Заметим, что k естественным образом можно рассматривать как правый R-модуль со следующим действием R на k:

$$ar = \sum_{i=0}^{n} D^{(i)}(a) r_i, \quad a \in k, \quad r = \sum_{i=0}^{n} r_i y^i \in R.$$

Очевидно, что правый R-модуль k простой и, следовательно, инъективный. Пусть

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{(i)}(x) = 0, \tag{1}$$

$a_i \in k$, $0 \leqslant i \leqslant n$, — произвольное однородное линейное D-дифференциальное уравнение над k, и пусть $d = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$. Поскольку модуль k инъективен и является единственным, с точностью до изоморфизма, простым правым R-модулем, диаграмма



дополняется до коммутативной некоторым ненулевым гомоморфизмом f. Таким образом, f (1) является нетривиальным решением уравнения (1).

Для того чтобы показать, что линейные дифференциальные уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{(i)}(x) = b,$$

где a_i, $b \in k$, имеют в k решение, надо просто продолжить отображение, переводящее $d = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ в b, на R и заметить, как и раньше, что образ единицы кольца R является искомым решением.

(b) $\Rightarrow$ (a). В силу 7.38 и 7.39 каждый простой правый R-модуль имеет вид $V_\alpha = R/(y - \alpha) R$ и делим (т. е. $V_\alpha x = V_\alpha$ для всех регулярных элементов $x \in R$). Так как над областью главных правых идеалов делимость эквивалентна инъективности (см. 3.45), то, ввиду упр. 7.31.1, V_α — инъективный правый R-модуль для всех $\alpha \in k$. Следовательно, R — правое V-кольцо.

Для завершения доказательства импликации (b) $\Rightarrow$ (a) остается лишь показать, что R обладает единственным, с точностью до изоморфизма, простым правым R-модулем, т. е. что $V_\alpha \approx V_\beta$ для всех α, $\beta \in k$. Из предположения об однородных линейных дифференциальных уравнениях следует существование ненулевых элементов a, $b \in k$, таких, что $a(y - \alpha) = (y - \beta) b$. Отображение

$$V_\alpha \to V_\beta,$$

при котором

$$r + (y - \alpha) R \mapsto ar + (y - \beta) R,$$

является требуемым изоморфизмом. □

Если в качестве k взять поле частных кольца $\mathbb{Q}[X]$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, а в качестве D — обычное дифференцирование, то $k[y, D]$ не является правым V-кольцом (для доказательства можно заметить, что в силу 7.39 уравнение $D(t) = 1/x$ не имеет решения, и применить 7.40).

Универсальные дифференциальные поля

Пусть k — поле характеристики 0, D — дифференцирование поля k. Результат, восходящий к Колчину, утверждает, что существует поле $U \supseteq k$ и дифференцирование $\bar{D}$ поля U, продолжающее дифференцирование D, такое, что уравнение

$$p(x, \bar{D}(x), \ldots, \bar{D}^{(n)}(x)) = 0$$

при любом n имеет решение $\xi \in U$ для всех $p(X) \in U[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ — U. Более того, каждое однородное линейное $\bar{D}$-дифференциальное уравнение над U имеет нетривиальное решение в U. Такое поле U называется **универсальным расширением** поля k или **универсальным дифференциальным полем** (Колчин [53]).

7.41. Упражнение. Если f — элемент степени n в кольце $k[y, D]$ дифференциальных многочленов над универсальным полем, то в k существуют элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$, такие, что

$$f(y) = a_0 (y - a_1) \ldots (y - a_n).$$

Кольца дифференциальных многочленов над универсальными дифференциальными полями дают примеры нётеровых V-областей, не являющихся полями.

7.42. Теорема (Коззенс [70] [1])). *Пусть k — универсальное дифференциальное поле с дифференцированием D. Тогда кольцо $R = k[y, D]$ обладает следующими свойствами:*

(a) *R — область главных правых и левых идеалов.*

(b) *R — простое кольцо.*

(c) *R — правое V-кольцо.*

(d) *R не является телом.*

(e) *R обладает единственным, с точностью до изоморфизма, простым правым R-модулем и, следовательно, простым инъективным кообразующим.*

Доказательство. Свойство (a) вытекает из 7.31.1. Так как R — область целостности, то из 7.34 следует (b).

Свойства (c) и (e). Так как k — универсальное дифференциальное поле, то условие (b) теоремы 7.40, очевидно, выполнено. Таким образом, учитывая, кроме того, 7.38, получаем (e), а следовательно, и (c).

Косые многочлены

Пусть $\overline{F}_2$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ρ — автоморфизм поля $\overline{F}_2$, при котором $z \mapsto z^2$. Через $\overline{F}_2[t, \rho]$ обозначим кольцо косых многочленов от t над $\overline{F}_2$, т. е. аддитивная группа кольца $\overline{F}_2[t, \rho]$ — это аддитивная группа кольца многочленов от переменной t с коэффициентами в поле $\overline{F}_2$, а умножение в $\overline{F}_2[t, \rho]$ определено условием $ta = \rho(a)\, t$ для всех $a \in \overline{F}_2$ и его следствиями. Хорошо известно, что $\overline{F}_2[t, \rho]$ — область главных левых и правых идеалов. Более того, легко показать, что все двусторонние идеалы кольца $\overline{F}_2[t, \rho]$ имеют вид $t^k\overline{F}_2[t, \rho]$, где k — неотрицательное целое число (Джекобсон [47]).

Пусть $R = \overline{F}_2[t, \rho]$, $M = \{t^k \mid k$ — целое число, $k \geqslant 0\}$ и $R_M = \{a/m \mid a \in R,\ m \in M\}$. Если $a/t^k,\ b/t^{k+i} \in R_M$, то $a/t^k = b/t^{k+i}$ тогда и только тогда, когда $b = t^i a$. Определим сложение и умножение в R_M, полагая $a/t^k + b/t^k = (a + b)/t^k$ и $a/t^i\, b/t^j = \rho^j(a)\, b/t^{i+j}$, где $\rho^j(a)$ — элемент кольца R, полученный применением ρ^j ко всем коэффициентам элемента a (Джекобсон [47, стр. 60—62]). Очевидно, что R_M — простая область целостности, не являющаяся телом. Кроме того, R_M — область главных правых и левых идеалов.

[1]) См. также Л. А. Койфман, *Мат. заметки*, **7** (1970), 359—367.— *Прим. ред.*

7.43. Лемма. *Пусть $r = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R$, $a_n = 1$. Тогда найдутся $\alpha_i \in \overline{F}_2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что $r = \prod_{i=0}^{n} (t - \alpha_i)$. В частности, неприводимые элементы в кольце R имеют вид $t - \alpha$, где $\alpha \in \overline{F}_2$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.37. □

Легко заметить, что простые правые R_M-модули имеют вид R_M/pR_M, где $p = t - \alpha$, $0 \neq \alpha \in \overline{F}_2$.

7.44. Лемма. *$R_M/(t - \alpha)\, R_M$ — делимый правый R_M-модуль для всех $\alpha \in F_2 - \{0\}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.39. □

7.45. Теорема. *Кольцо R_M обладает следующими свойствами:* (a) *R_M — область главных правых и левых идеалов;* (b) *R_M — простое кольцо;* (c) *R_M — правое V-кольцо;* (d) *R_M не является телом;* (e) *R_M обладает единственным, с точностью до изоморфизма, простым правым R_M-модулем.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.42. □

Области целостности, построенные в теоремах 7.42 и 7.45, называются **областями Коззенса**.

7.46. Упражнение. Показать, что области Коззенса являются также левыми V-кольцами.

Упражнения к гл. 7

Первые два упражнения взяты из статьи Коззенса [70].

1. Если R — область главных правых и левых идеалов, то R/I — артиново слева и справа кольцо для любого ненулевого идеала I. Пусть $R = k[y, D]$, где k — универсальное дифференциальное поле. Тогда:

(a) каждый циклический модуль либо изоморфен модулю R, либо является прямой суммой конечного числа экземпляров единственного простого модуля V;

(b) если K — правое тело частных кольца R, то K/R — прямая сумма некоторого множества экземпляров модуля V;

(c) если p_1R и p_2R — произвольные максимальные правые идеалы, то $p_1 = up_2$, где u — некоторый обратимый элемент кольца R;

(d) каждый элемент x тела K представим единственным образом в виде

$$x = a + a_1/p_1 + \ldots + a_n/p_n,$$

где p_i — неприводимые элементы и $a, a_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$;
(e) V — простой инъективный кообразующий;
(f) каждый R-модуль, вполне инвариантный в своей инъективной оболочке, инъективен.

2. Если в категории mod-R есть нётеров кообразующий, то каждый объект категории mod-R содержит максимальный подмодуль. Это верно, например, для кольца $R = k[y, D]$ над универсальным полем k. (Ср. с B-кольцами, гл. 22.)

3A (Бойл [71]). Кольцо R называется **правым PCI-кольцом**, если каждый циклический правый R-модуль C, который не изоморфен модулю R, инъективен. Кольцо R называется **правым QI-кольцом**, если каждый квазиинъективный правый R-модуль инъективен. Доказать, что каждое нётерово справа правое PCI-кольцо наследственно справа. Кроме того, для нётерова слева наследственного слева кольца R следующие условия эквивалентны: (1) R — нётерово справа правое PCI-кольцо; (2) R — наследственное справа правое QI-кольцо; (3) R — наследственное справа правое V-кольцо. В этом случае кольцо либо **классически полупросто**, либо является правой областью Ope.

3B (Кёлер [70]). Если каждый правый R-модуль вполне инвариантен в своей инъективной оболочке, то R — нётерово справа V-кольцо.

4 (Ятегаонкар). Пусть D — кольцо, $\rho\colon D \to D$ — гомоморфное вложение колец. На множестве $D[x]$ левых многочленов определим операцию $D[x] \times D[x] \to D[x]$, задаваемую равенством $xd = \rho(d)\,x$ для всех $d \in D$ и его следствиями. (Итак, $x^n d = \rho^n(d)\,x^n$ для всех $n \geqslant 0$.) Тогда $D[x]$ — кольцо, которое мы будем называть **кольцом косых многочленов** и обозначать через $D[x, \rho]$. Пусть D^* — множество всех ненулевых элементов кольца D. Если D — кольцо без делителей нуля, то показать, что $D[x, \rho]$ — кольцо главных левых идеалов тогда и только тогда, когда D — кольцо главных левых идеалов, такое, что $\rho(D^*) \subseteq \mathcal{U}(D)$.

5. Кольцо R называется **обобщенным кольцом косых многочленов** (gtp-кольцом) над кольцом D, если для некоторого ординального числа α кольцо R является объединением $\bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ цепи колец $\{R_\beta \mid \beta < \alpha\}$, таких, что
(i) $R_0 = D$;
(ii) $R_{\beta+1} = R_\beta[x_\beta, \rho_\beta]$ — кольцо косых многочленов;

(iii) $R_\beta = [\bigcup_{\gamma<\beta} R_\gamma][x_\beta, \rho_\beta]$ для предельного ординала β.

Допустим далее, что D — кольцо без делителей нуля.
(a) Показать, что каждый элемент $a \in R$ единственным образом представим как левый многочлен от конечного числа переменных x_β с коэффициентами из кольца D.
*(b) Пусть $\aleph_n$ — наименьшее ординальное число, такое, что каждый правый идеал кольца R порождается $\aleph_n$ элементами. Тогда

$$\text{r. gl. dim } R \leqslant (\text{w. r. gl. dim } R) + n + 1.$$

(Слабую размерность w. gl. dim определяем аналогично размерности dim M, используя плоские модули вместо проективных.) Показать, что r. gl. dim $R = \infty$. (Ср. со стр. 456.)
(c) Если R_β — кольцо главных левых идеалов для всех $\beta < \alpha$, то R — кольцо главных левых идеалов (и наследственно справа).

6. В предыдущем упражнении допустим, что D — тело и $\rho_\beta(R_\beta) \subseteq D$ для всех β. Пусть $|R| = \alpha$.
(a) Показать, что $\{1 + x_\beta\}$, $\beta < \alpha$, — базис свободного правого идеала кольца R.
(b) Если α — предельное ординальное число, то любой идеал кольца R содержит x_β для некоторого β.
(c) Каждый ненулевой левый идеал кольца R содержит некоторый ненулевой идеал этого кольца.
(d) Если I — ненулевой правый идеал кольца R, то I не содержит ненулевых идеалов.
*(e) Вывести из (c), что R не является примитивным слева кольцом, а из (d) — что R — примитивное справа кольцо. (Кольцо **примитивно справа**, если оно обладает точным простым правым модулем, см. гл. 19.)

7. Пусть R — простое кольцо, I — ненулевой правый идеал, $K = \operatorname{End} I_R$. Показать, что эквивалентность категорий mod-$R \rightsquigarrow$ mod-K существует тогда и только тогда, когда K — простое кольцо.

8. Пусть A — поле, а $D\colon A \to A$ есть φ-дифференцирование поля A, где φ не является автоморфизмом этого поля. Например, $A = \mathbb{Q}(x)$ и $\varphi\colon A \to A$ определяется условием $\varphi\colon x \mapsto x^2$. Итак,

$$\varphi\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{2i}$$

для всех $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Пусть S — соответствующее кольцо φ-дифференциальных многочленов. Тогда:
(a) кольцо без делителей нуля S обладает левым алгоритмом деления;

(b) S — кольцо главных левых идеалов;
(c) S — левое, но не правое кольцо Оре. [*Указание*: $(y + a)\, S \cap \cap\, y^2 S = 0$.]

Замечания к гл. 7

Довольно полные ссылки по материалу этой главы появляются в тексте. Некоторые комментарии, касающиеся простых колец, встречались в замечаниях к гл. 4. См. также Коззенс — Фейс [73/74] [1]).

Ссылки

Артин [27], Артин — Несбит — Тролл [44], Артин — Уэйплс [43], Ауслендер — Голдман [60], Басс [62], [73], Бойл [71]; Веддербёрн [08], Габриель [62], Голди [58], Джанс [70], Джекобсон [45], [47], Джонсон [51a], [51b], Камилло [70], Камилло — Фуллер [72], Кёлер [70], Коззенс [70], Кон [62, 66a], Морита [58], Попеску — Габриель [64], Утуми [56], Фейс [64], [67a], [67b], [71a], [72a], Фейс — Утуми [65b], Финдлей — Ламбек [58], Фуллер [71], Шефердсон [51], Ятегаонкар [70a].

[1]) И Коззенс, Фейс (Cozzens J., Faith C.), Simple noetherian rings, Cambridge university press, 1975.

Глава 8

ПОЛУПРОСТЫЕ МОДУЛИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Модуль M_R называется **полупростым**, если M является прямой суммой $\coprod_{i \in I} M_i$ семейства простых подмодулей $\{M_i \mid i \in I\}$. Кольцо R называется **классически полупростым**, если модуль R_R полупростой. Как мы видели, любое простое артиново кольцо классически полупросто. Произведение конечного числа простых артиновых колец также классически полупросто. Теорема Веддербёрна — Артина утверждает обратное: каждое классически полупростое кольцо изоморфно конечному произведению колец матриц тех или иных размеров над некоторыми телами. Эти кольца также описываются теоремой Веддербёрна — Артина 8.8 как артиновы справа кольца без нильпотентных идеалов. (Это условие право-лево симметрично.)

Над классически полупростыми кольцами каждый модуль проективен. В этой главе будет определена проективная размерность модуля. Глобальная размерность кольца определяется как наименьшая верхняя грань проективных размерностей всех модулей. Классически полупростые кольца являются кольцами, глобальная размерность которых (правая или левая) равна нулю. Простые нётеровы кольца, глобальная размерность которых $\leqslant 2$, подобны областям Оре (8.27).

Теорема Гильберта о сизигиях 8.17 утверждает, что глобальная размерность кольца многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем k равна n. В общем случае правая глобальная размерность кольца R равна наименьшей верхней грани проективных размерностей циклических правых R-модулей (8.19), и если кольцо R не является классически полупростым, то она равна наименьшей верхней грани проективных размерностей правых идеалов, увеличенной на единицу. (Глобальная размерность свободной алгебры $k[X]$ от любого числа переменных над любым коммутативным кольцом k превосходит глобальную размерность кольца k на 1. Итак, если k — поле, то $k[X]$ — наследственное кольцо. Однако в тексте последние два результата не доказываются.)

Следующее предложение показывает, что в определении полупростоты предположение о том, что сумма прямая, может быть опущено.

8.1. Предложение. *Пусть M — модуль, являющийся суммой $\sum_{i\in I} M_i$ семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ простых подмодулей. Тогда*

8.1.1. *Если N — подмодуль, отличный от M, то существует подмножество J в I, такое, что $M = N \oplus (\coprod_{j\in J} M_j)$.*

8.1.2. *Модуль M полупрост.*

Доказательство. Пусть $N \neq M$ — подмодуль. Если $M_i \cap N \neq 0$ для $i \in I$, то, поскольку M_i — простой модуль, $M_i \cap N = M_i$, т. е. $M_i \subseteq N$. Так как $N \neq M$, то $M_j \cap N = 0$ для некоторого индекса $j \in I$. Пусть P — совокупность всех подмножеств J в I, для которых

(1) сумма $\sum_{j\in J} M_j$ — прямая;

(2) $N \cap \sum_{j\in J} M_j = 0$.

Так как произвольная совокупность модулей $\{M_q \mid q \in Q\}$ независима тогда и только тогда, когда каждое подмножество $\{M_j \mid j \in J,\ J \subseteq Q\}$ независимо, то множество P индуктивно. В силу леммы Цорна P содержит максимальный элемент J. Рассмотрим подмодуль $N' = N + \sum_{j\in J} M_j$. В силу определения $N' = N \oplus (\coprod_{j\in J} M_j)$. Допустим, что $N' \neq M$. Тогда по доказанному существует индекс $q \in I$, такой, что $N' \cap M_q = 0$. Тогда $J' = J \cup \{q\} \in P$ и J' строго содержит множество J, что приводит нас к противоречию. Итак, $M = N \oplus \coprod_{j\in J} M_j$. Последнее утверждение предложения получается при $N = 0$ (ср. теорему о единственности разложения в гл. 21).

8.2. Следствие. *Следующие условия на модуль эквивалентны:*
(a) *Модуль M полупрост.*
(b) *Каждый подмодуль модуля M выделяется прямым слагаемым.*
(c) *Каждый фактормодуль модуля M полупрост.*

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) следует из 8.1.1.

(b) $\Rightarrow$ (a). Допустим, что каждый подмодуль модуля M выделяется прямым слагаемым в M. Тогда каждый подмодуль H модуля M также обладает этим свойством. [Если G — подмодуль в H, то $M = G \oplus K$, где K — некоторый подмодуль модуля M, а тогда $H = G \oplus (K \cap H)$.] В силу предыдущего предложения модуль M полупрост тогда и только тогда, когда M — сумма простых подмодулей. Покажем сначала, что M содержит хотя бы

один простой подмодуль. Для проверки этого рассмотрим произвольный ненулевой элемент x модуля M и подмодуль N модуля M, являющийся максимальным элементом множества P подмодулей, не содержащих элемент x. (Множество P непусто, поскольку $0 \in P$; оно индуктивно; в силу леммы Цорна N существует.) Пусть $M = N \oplus Q$, где Q — подмодуль. Допустим, что подмодуль Q не является простым. Пусть A — подмодуль, такой, что $Q \supset A \supset 0$. Тогда $Q = A \oplus B$, где $Q \supset B \supset 0$. Но $N + A$ и $N + B$ оба строго содержат подмодуль N, и поэтому оба содержат x. Это приводит к противоречию, поскольку $(N + A) \cap (N + B) = N$ и $x \notin N$. Это показывает, что M содержит простой модуль Q. Далее, пусть S — сумма всех простых подмодулей модуля M. Пусть $M = S \oplus T$, где T — подмодуль. Как мы показали, если $T \neq 0$, то T содержит простой подмодуль, который должен принадлежать множеству S, что невозможно, поскольку $S \cap T = 0$. Итак, $T = 0$ и $M = S$ — полупростой модуль.

(a) $\Rightarrow$ (c). Если K — подмодуль, то, поскольку (a) и (b) эквивалентны, $M = K \oplus M'$ для некоторого подмодуля M' и M' — полупростой модуль. Тогда $M/K \approx M'$ — полупростой модуль. Это доказывает, что (b) $\Rightarrow$ (c). Импликация (c) $\Rightarrow$ (a) очевидна. □

8.2′. Упражнения.

8.2′.1. Используя 8.2, показать, что прямая сумма конечного числа простых модулей является артиновым и нётеровым модулем одновременно (ср. 8.10).

*8.2′.2. Показать, что если $M = \sum_{i=1}^{n} \oplus M_i = \sum_{j=1}^{m} \oplus M'_j$, где $\{M_i\}$ и $\{M'_j\}$ — простые подмодули, то $m = n$ и существует перестановка π чисел $\{1, \ldots, n\}$, такая, что $M'_i \approx M_{\pi(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. (Ср. теорему о единственности разложения 21.2.)

Цоколь модуля M определяется как сумма всех простых подмодулей модуля M и обозначается через $\operatorname{soc} M$. В силу 8.2 $\operatorname{soc} M$ — полупростой модуль, содержащий каждый полупростой подмодуль.

8.3. Предложение [1]. *Цоколь модуля M является пересечением всех существенных подмодулей модуля M.*

Доказательство. Если S — простой подмодуль и A — существенный подмодуль, то $A \cap S \neq 0$. Поэтому $A \cap S = S$ и $S \subseteq A$. Итак, цоколь модуля M содержится в каждом существенном подмодуле модуля M.

Обратно, пусть Q — пересечение существенных подмодулей модуля M. Пусть N — произвольный подмодуль модуля Q.

[1]) Это предложение встречается в диссертации Сандомирского [64]. Я видел также ссылки на него как на предложение Каша — Сандомирского.

Если K — максимальный элемент в множестве подмодулей модуля M, таких, что $N \cap K = 0$, то $H = N + K$ — существенный подмодуль модуля M. Таким образом, поскольку $H \supseteq Q$ и $H = N \oplus K$, имеем $Q = N \oplus (K \cap Q)$. Так как каждый подмодуль N модуля Q выделяется прямым слагаемым, то либо $Q = 0$, либо в силу следствия 8.2 Q — полупростой модуль. Итак, $Q \subseteq \operatorname{soc} M$ и $Q = \operatorname{soc} M$. □

Первичность и полупервичность

Идеал P кольца R называется **первичным**[1]), если для любых правых идеалов A, $B \supseteq P$ из соотношения $AB \subseteq P$ следует, что либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. (Произведение AB двух правых идеалов A и B было определено в гл. 3.) Произведение RB является двусторонним идеалом кольца R. Следовательно,

$$AB = (AR)B = A(RB) \subseteq P \Leftrightarrow R(AB) = (RA)(RB) \subseteq P.$$

Отсюда следует, что P — первичный идеал тогда и только тогда, когда для *любых идеалов* A', B' кольца R включение $A'B' \subseteq P$ имеет место в том и только том случае, когда $A' \subseteq P$ или $B' \subseteq P$. В частности, любой максимальный идеал первичен, так как R — единственный идеал, содержащий его. Симметричным образом идеал P первичен в том и только том случае, когда в определении первичности правые идеалы заменены на левые. Напомним, что, согласно гл. 3, кольцо R **первично**, если 0 — первичный идеал, и **полупервично**, если 0 — единственный нильпотентный идеал. Итак, каждое первичное кольцо полупервично.

Каждое классически полупростое кольцо R полупервично: если I — правый идеал, то I — прямое слагаемое модуля R, поэтому $I = eR$ для некоторого идемпотента e и, следовательно, $I^n = I$ для любого числа $n \geqslant 1$, т. е. R полупервично.

8.4. Предложение. *Если I — минимальный правый идеал кольца R, то либо $I^2 = 0$, либо I порождается идемпотентом.*

Доказательство. Если $I^2 \neq 0$, то существует элемент $b \in I$, такой, что $bI \neq 0$. Из минимальности правого идеала I следует, что $I = bI$. Так как $I \neq 0$, то правый аннулятор $b^\perp$ элемента b в R не содержит I. Из этого и из минимальности правого идеала I следует, что $b^\perp \cap I = 0$. Так как $I = bI$, то существует элемент $e \in I$, такой, что $b = be$. Тогда $be = be^2$. Так как $e - e^2 \in b^\perp \cap I$, то $e = e^2$. Так как $b \neq 0$, то, очевидно, $e \neq 0$ и $eR \neq 0$. Поскольку $e \in I$, то, заведомо, $eR \subseteq I$. Итак, $I = eR$. □

8.5. Следствие. *Если R — полупервичное кольцо, то каждый минимальный правый идеал порождается идемпотентом.*

[1]) А в коммутативном случае простым. — *Прим. перев.*

8.6. Упражнения.

8.6.1. Привести доказательство предложения 8.4, в котором использовалось бы понятие образующего. (Так как I — минимальный правый идеал, то $D = \operatorname{End} I_R$ — тело, поэтому I — образующий над телом D и, следовательно, I — проективный модуль над кольцом $S = \operatorname{End}_D I$. Допустим сначала, что кольцо R первичное. Тогда кольцо R вложимо в кольцо $S = \operatorname{End}_D I$ и I — циклический S-модуль. (Почему?) Показать, что I — прямое слагаемое в S.)

8.6.2. В полупервичном кольце каждый правый идеал, являющийся суммой конечного числа простых правых идеалов, порождается идемпотентом.

8.6.3. Если первичный идеал P не является существенным правым идеалом, то он является правым аннуляторным идеалом.

Строение артиновых полупервичных колец

8.7. Теорема. *Каждое артиново полупервичное кольцо классически полупросто.*

Доказательство. В силу упражнения 7.10′.1 R является прямой суммой неразложимых правых идеалов, скажем $R = \coprod_{i=1}^{n} A_i$. Так как кольцо R артиново, то правый идеал A_i содержит минимальный правый идеал V_i, являющийся по следствию 8.5 прямым слагаемым в R, а следовательно и в A_i и, значит, совпадающий с A_i. Итак, каждый модуль A_i прост, т. е. кольцо R классически полупросто. □

8.8. Теорема Веддербёрна — Артина. *Следующие свойства ненулевого кольца R эквивалентны:*

(a) *Кольцо R артиново справа и полупервично.*

(b) *R является произведением конечного числа простых артиновых колец.*

(c) *Кольцо R артиново слева и полупервично.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть M — любой максимальный идеал кольца R, J — минимальный элемент множества правых идеалов кольца R, строго содержащих M. Тогда $S = R/M$ — простое кольцо, содержащее минимальный правый идеал J/M. В силу основной теоремы Веддербёрна — Артина кольцо S артиново (и изоморфно кольцу D_n, где D — тело). Если $M = 0$, то доказательство завершено.

Если же $M \neq 0$, то заметим, что в силу теоремы 8.7 кольцо R классически полупросто. По следствию 8.2 $R = M \oplus Q$, где Q — некоторый правый идеал. Но $QM \subseteq M \cap Q$ и потому $QM = 0$.

Следовательно, $(MQ)^2 = 0$. Так как кольцо R полупервично, то $MQ = 0$. Пусть $1 = g + h$, где $g \in M$, $h \in Q$. Тогда

$$ga = ag = a, \quad hb = bh = b$$

для всех $a \in M$, $b \in Q$, т. е. g (соотв. h) является единичным элементом мультипликативной полугруппы M (соотв. Q). Поэтому идеалы M и Q оказываются кольцами. Кроме того, $Q_1 = Q \approx R/M$ — простое артиново кольцо. Так как M — также артиново справа полупервичное кольцо, то $M = Q_2 \oplus M_2$, где Q_2 — простое артиново кольцо. Так как R — артиново кольцо, то этот процесс остановится через конечное число шагов, т. е.

$$R = \prod_{i=1}^{t} Q_i,$$

где Q_i — простое артиново кольцо.

(b) $\Rightarrow$ (a). Непосредственно вытекает из того, что каждое простое артиново справа кольцо полупервично и артиново.

Импликации (b) $\Leftrightarrow$ (c) получаются симметрично. □

Мы приведем другое доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (b). Так как модуль R_R полупрост (и конечно порожден), то

$$R_R \approx V_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{n_k},$$

где V_i — минимальный правый идеал, V_i и V_j не изоморфны при $i \neq j$ и $n_i > 0$. Так как любой гомоморфный образ модуля V_i либо равен 0, либо изоморфен модулю V_i (лемма Шура), то мы видим, что $\mathrm{Hom}_R(V_i, V_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Из этого замечания и формулы

$$\mathrm{Hom}\left(\prod A, \prod B\right) \approx \prod \mathrm{Hom}(A, B)$$

для конечных произведений (см. 3.33.2, а также 3.38) вытекает, что

$$R \approx \mathrm{Hom}_R(R, R) \approx \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}_R(V_i^{n_i}, V_i^{n_i}) \approx$$

$$\approx \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}_R(V_i, V_i)_{n_i} = \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i),$$

где D_i — тело $\mathrm{Hom}_R(V_i, V_i)$, а $M_{n_i}(D_i)$ — кольцо матриц, $i = 1, \ldots, n$.

8.9. Следствие. *Если R — ненулевое первичное артиново кольцо, то $R \approx D_n$ для некоторого тела D и целого числа $n > 0$.* □

8.10. Упражнения.

8.10.1. Если $R = \prod_{i=1}^{t} S_i$ и $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ — два представления кольца R в виде прямого произведения конечного числа простых колец (предполагается, что S_i и R_i лежат в R), то $n = t$ и существует перестановка π, такая, что $S_i = R_{\pi(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

8.10.2. Центр классически полупростого кольца является прямой суммой полей.

8.11. Теорема. *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(a) *R_R — полупростой модуль.*
(b) *Кольцо R артиново справа и полупервично.*
(c) *${}_RR$ — полупростой модуль.*
Если они выполняются, то каждый правый и каждый левый R-модуль полупрост.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Если R_R — полупростой модуль, то R — прямая сумма минимальных правых идеалов, $R = \coprod_{i \in I} A_i$. Пусть $1 = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$, где $x_{i_j} \in A_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Это показывает, что R — прямая сумма лишь конечного числа правых идеалов A_i, скажем $R = \coprod_{i=1}^{n} A_i$. Тогда в силу 7.10 кольцо R артиново справа (а также нётерово). Так как каждый ненулевой правый идеал I классически полупростого кольца R выделяется прямым слагаемым, то $I = eR$, где $e = e^2 \in R$, $e \neq 0$. Тогда правый идеал I не является нильпотентным.

(b) $\Rightarrow$ (c). В силу теоремы Веддербёрна — Артина $R = \prod_{i=1}^{n} S_i$, где S_i — простое артиново кольцо, изоморфное кольцу матриц D_n над некоторым телом D (n и D зависят от кольца S_i), $i = 1, \ldots, n$. Если $\{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ — матричные единицы кольца $A = D_n$, то

$$A = Ae_{11} \oplus \ldots \oplus Ae_{nn}$$

— прямая сумма левых идеалов, каждый из которых — простой модуль. (Это легко проверяется.) Так как каждый (минимальный) левый идеал кольца S_i является (минимальным) левым идеалом кольца R, то R — прямая сумма минимальных левых идеалов.

В силу теоремы Веддербёрна — Артина 8.8 из (b) следует (a). Доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (b) симметрично доказательству импликации (a) $\Rightarrow$ (b).

8.12. Упражнение. *Следующие свойства кольца R равносильны:*

8.12.1. *R — классически полупростое кольцо.*

8.12.2. *Каждый правый идеал кольца R выделяется прямым слагаемым в модуле R_R.*

8.12.3. *Каждый правый идеал кольца R — инъективный модуль.*

8.12.4. *Каждый правый R-модуль полупрост.*

8.12.5. *Каждый правый R-модуль инъективен.*

8.12.6. *Каждый правый R-модуль проективен.*
8.12.7. *Каждый циклический правый R-модуль проективен.*
8.12.8. *Симметричные к* 8.12.2—8.12.7 *свойства (с заменой прилагательного «правый» на «левый»).*
8.12.9. *Кольцо R подобно конечному произведению тел.* □

Размерность колец и модулей

Под **инъективной резольвентой** модуля M понимается бесконечная точная последовательность

$$0 \to M \to M_0 \to M_1 \to \ldots \to M_n \to \ldots,$$

в которой M_n — инъективный модуль, $n \geqslant 0$. Если $M_k \neq 0$ и $M_n = 0$ для всех $n > k$, то говорят, что **длина** инъективной резольвенты равна k (и ∞, если такого числа не существует).

Инъективная размерность (в обозначениях inj. dim M) модуля M определяется как наименьшая верхняя грань длин всех инъективных резольвент. Например, модуль M инъективен тогда и только тогда, когда inj. dim $M = 0$.

Проективные резольвенты и проективная размерность определяются двойственным образом. Проективная размерность модуля M над кольцом R также называется **гомологической размерностью** (в обозначениях: $\dim_R M$ или кратко dim M).

Правая глобальная размерность кольца R определяется следующим образом:

$$\text{r. gl. dim } R = \sup \{\dim M \mid M \in \text{mod-}R\}.$$

Например, кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда r. gl. dim $R = 0$. Левая глобальная размерность обозначается через l. gl. dim. Можно доказать, что

$$\text{r. gl. dim } R = \sup \{\text{inj. dim } M \mid M \in \text{mod-}R\}$$

(см. Картан — Эйленберг [60], Норскотт [60] или Маклейн [66]).

8.13A. Предложение. *Каждый модуль M обладает как инъективной, так и проективной резольвентами.*

Доказательство. Докажем, что существует инъективная резольвента. Доказательство существования проективной резольвенты проводится двойственным образом. Первый шаг — вложение $M \to M_0$, где M_0 — инъективная оболочка модуля M. Допустим, что последовательность

$$M \to M_0 \to \ldots \to M_{n-1}, \tag{1}$$

где M_i — инъективный модуль, $i = 0, \ldots, n-1$, точна. Если $f\colon M_{n-2} \to M_{n-1}$ — эпиморфизм, то M обладает инъективной

резольвентой, у которой $M_k = 0$ при $k \geqslant n$. В противном случае рассмотрим вложение $h\colon M_{n-1}/\operatorname{im} f \to M_n$, где M_n — инъективный модуль. Тогда существует точная последовательность

$$M_0 \to M_1 \to \ldots \to M_{n-1} \to M_n,$$

где отображение $M_{n-1} \to M_n$ равно fh. Это завершает шаг индукции. □

8.13B. Предложение. *Проективная, инъективная и глобальная размерности являются инвариантными в смысле Мориты.* □

8.14A. Теорема о неравенствах. *Пусть A — правый R-модуль, и B — подмодуль. Тогда*
8.14A.1. *Если* $\dim A > \dim B$, *то* $\dim A = \dim (A/B)$.
8.14A.2. *Если* $\dim A < \dim B$, *то* $\dim (A/B) = 1 + \dim B$.
8.14A.3. *Если* $\dim A = \dim B$, *то* $\dim (A/B) \leqslant 1 + \dim A$.

Доказательство оставляем в качестве упражнения (или см. теорему 1.2 из книги Капланского [59] или [69а, стр. 169]).

8.14B. Следствие. *Если* $B \subseteq A$, *то* $\dim B \leqslant \max \{\dim A, \dim A/B\}$. *Кроме того, из* $\dim B = \dim (A/B)$ *следует, что* $\dim B = \dim A$.

8.14C. Следствие. *Пусть T — подкольцо кольца R, являющееся прямым слагаемым в (T, T)-бимодуле R. Тогда*

$$\text{r. gl. dim } T \leqslant \text{r. gl. dim } R + \dim_T R.$$

Доказательство оставляем в качестве упражнения (или см. Капланский [69а]).

Кольцо R, глобальная размерность которого не превосходит 1, называется **наследственным справа**. В силу упражнения 8.12 глобальная размерность классически полупростых колец равна нулю. Из следующего результата вытекает следствие теоремы 8.16 о том, что

$$\text{r. gl. dim } R[x] = \text{r. gl. dim } R + 1,$$

где $R[x]$ — кольцо многочленов. Следовательно, кольцо $R[x]$ наследственно справа, если кольцо R классически полупросто.

8.15A. Теорема о замене колец. *Пусть R — кольцо, x — центральный элемент из R, не являющийся делителем нуля в R, и R/x обозначает факторкольцо $R/(x)$. Если A — ненулевой R/x-модуль и размерность* $\dim_{R/x} A = n$ *конечна, то* $\dim_R A = n + 1$. *Следовательно,*

$$\text{r. gl. dim } R \geqslant 1 + \text{r. gl. dim } R/x.$$

Доказательство (Капланский [69а, стр. 172]). Проведем индукцию по n. В случае $n = 0$ R/x-модуль A проективен

и, следовательно, служит прямым слагаемым некоторого свободного R/x-модуля F. Так как x не является делителем нуля, то идеал (x) — свободный модуль. Поэтому $\dim_R R/x = 1$ (равенство имеет место, поскольку R/x не является проективным R-модулем, так как идеал (x) не является прямым слагаемым в R). Аналогично, $\dim_R F = 1$. Следовательно, $\dim_R A \leqslant 1$. Однако A не может быть проективным объектом в категории mod-R, поскольку ненулевые проективные модули не могут аннулироваться элементом x. Следовательно, $\dim_R A = 1$.

В случае $n > 0$ отобразим свободный (R/x)-модуль G на модуль A с ядром K. Тогда из равенства $\dim_{R/x} A = n$ следует, что $\dim_{R/x} K = n - 1$. В силу индуктивного предположения $\dim_R K = n$. Тогда по теореме 8.14A получаем, что $\dim_R A = n + 1$, кроме случая, когда $n = 1$, в котором $\dim_R A \leqslant 2$. Итак, теорема доказана, за исключением случая, когда $\dim_{R/x} A = \dim_R A = 1$. В этом случае надо лишь доказать, что A — проективный R/x-модуль, если $\dim_{R/x} A$ и $\dim_R A$ не превосходят единицы.

Пусть H — свободный R-модуль и последовательность $0 \to T \to H \to A \to 0$ точна. Тогда из неравенства $\dim_R A \leqslant 1$ следует, что R-модуль T проективен. Кроме того, из $xA = 0$ вытекает, что $T \supseteq xH$, а поэтому последовательность $0 \to T/xH \to H/xH \to A \to 0$ точна. Так как (R/x)-модуль H/xH свободен и $\dim_{R/x} A \leqslant 1$, то (R/x)-модуль T/xH проективен. Поэтому xH/xT выделяется прямым слагаемым в T/xT. Так как R-модуль T проективен, то (R/x)-модуль T/xT проективен и, следовательно, $A \approx H/T \approx xH/xT$. □

Имеются еще две теоремы о «замене колец», которые связаны с теоремой 8.15A и приводятся ниже без доказательства.

8.15B. Вторая теорема о замене колец. *При тех же предположениях об R и x, что и в* 8.15A, *имеем*

$$\dim_{R/x} (A/xA) \leqslant \dim_R A$$

для любого R-модуля A, для которого $\operatorname{ann}_A x = 0$.

8.15C. Третья теорема о замене колец. *Если R — нётерово слева кольцо, x лежит в радикале кольца R и для R, x и A справедливы те же предположения, что и в* 8.15B, *то*

$$\dim_{R/x} (A/xA) = \dim_R A.$$

Так как мы не используем ни 8.15B, ни 8.15C, то мы оставляем доказательство читателю, предупреждая лишь, что в то время как доказательство теоремы 8.15B относительно коротко и стандартно, для доказательства теоремы 8.15C потребуется «лемма Накаямы», приведенная в гл. 18. (Таким образом, не каждый читатель готов в данный момент доказывать теорему 8.15C, по крайней мере тем способом, как это делает Капланский в [69a, стр. 178].)

Следующая теорема в случае поля R является теоремой Гильберта, а в более общем случае — теоремой Эйленберга — Розенберга — Зелинского [57].

8.16. Теорема Гильберта о сизигиях. *Для любого ненулевого кольца R*

$$\text{r. gl. dim } R[x_1, \ldots, x_n] = n + \text{r. gl. dim } R,$$

где $R[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных.

Доказательство. В силу теоремы 8.15A имеем r. gl. dim $R[x] \geqslant 1 +$ r. gl. dim $(R[x]/x)$. Но $R[x]/x \approx R$. Поэтому r. gl. dim $R[x] \geqslant 1 +$ r. gl. dim R. Приводимая ниже лемма доказывает обратное неравенство и нашу теорему в случае $n = 1$. Общий случай получается применением индукции по n. □

8.17. Лемма. *Если M — модуль над кольцом многочленов $R[x]$ с коэффициентами из кольца R, то*

$$\dim_{R[x]} M \leqslant \dim_R M + 1.$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{i \in I} \oplus M_i[x] \approx \left(\sum_{i \in I} \oplus M_i\right)[x]$$

для любого семейства $\{M_i\}$ R-модулей, то $M[x]$ — проективный $R[x]$-модуль, если R-модуль M проективен. Обратно, если $M[x]$ — проективный $R[x]$-модуль, то $M[x]$ является прямым слагаемым свободного $R[x]$-модуля F. Следовательно, M — прямое слагаемое R-модуля $M[x]$, который в свою очередь является прямым слагаемым свободного R-модуля F. Поэтому R-модуль M проективен, т. е.

$$\dim_R M = \dim_{R[x]} M[x].$$

Если M к тому же и $R[x]$-модуль, то через K обозначим ядро гомоморфизма

$$\begin{cases} M[x] \to M \\ (m_0, \ldots, m_i, \ldots) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i. \end{cases}$$

Тогда существует $R[x]$-изоморфизм

$$\begin{cases} M[x] \to K \\ (m_0, m_1, \ldots, m_i, \ldots) \mapsto (m_0 x, m_1 x - m_0, \ldots, m_{i+1} x - m_i, \ldots). \end{cases}$$

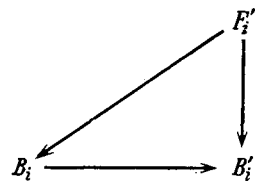
Из этого следует, что

$$\dim_R M = \dim_{R[x]} M[x] = \dim_{R[x]} K \geqslant$$
$$\geqslant (\dim_{R[x]} (M[x]/K)) - 1 = \dim_{R[x]} M - 1. \quad \square$$

8.18. Предложение (Ауслендер [55]). *Пусть A — правый B-модуль, $\mathcal{J}$ — непустое вполне упорядоченное множество, $\{B_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — семейство подмодулей модуля A, такое, что $B_i \subseteq B_j$ для $i \leqslant j$, где $i, j \in \mathcal{J}$. Если $A = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} B_i$ и $\dim_R (B_i / \bigcup_{j<i} B_j) \leqslant n$ для всех $i \in \mathcal{J}$, то $\dim_R A \leqslant n$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то $B_i = (\bigcup_{j<i} B_j) \oplus B_i'$ и модуль $A = \sum_{i \in \mathcal{J}} \oplus B_i'$ — проективен.

Допустим теперь, что $n > 0$. Положим $B_i' = B_i / \bigcup_{j<i} B_j$. Пусть F_i' — свободный модуль, отображающийся на модуль B_i' с ядром K_i'. Пусть $F_i = \sum_{j \leqslant i} \oplus F_j'$. Так как модуль F_i' свободный, то существует отображение $F_i' \to B_i$, такое, что диаграмма



с каноническим горизонтальным отображением коммутативна. Проводя трансфинитную индукцию, продолжим отображение $F_i' \to B_i'$ до отображения $F_i \to B_i$ с ядром K_i, такого, что

$$K_i \supseteq K_j, \quad \text{если} \quad i > j,$$

и

$$K_i' \approx K_i / \bigcup_{j<i} K_j.$$

Итак,

$$\dim_R (K_i) = \dim_R (B_i) - 1 \leqslant n - 1.$$

В силу индуктивного предположения $\dim_R (\bigcup_{i \in \mathcal{J}} K_i) \leqslant n - 1$. Так как $\bigcup_{i \in \mathcal{J}} K_i$ — ядро отображения $\bigcup_{i \in \mathcal{J}} F_i \to A$, то $\dim_R A \leqslant n$. $\square$

8.19. Теорема о глобальной размерности (Ауслендер [55]). *Если R — кольцо, то*

$$\text{r. gl. dim } R = \sup_{I \subseteq R} \{\dim (R/I)\},$$

т. е. правая глобальная размерность кольца R равна точной верхней грани проективных размерностей циклических правых R-модулей.

Доказательство. Пусть $d = \text{r. gl. dim } R$ и n — правая часть доказываемого равенства. Если A есть R-модуль, то вполне упорядочим элементы множества A. Пусть B_i (соотв. B_i') — подмодуль модуля A, порожденный всеми x_j, такими, что $j \leqslant i$ (соотв. $j < i$). Тогда фактормодуль B_i/B_i' является циклическим для всех i. Следовательно, его размерность не превосходит n. Поэтому из предложения Ауслендера следует, что $d \leqslant n$. Итак, $d = n$. $\square$

8.20. Следствие. *Для любого кольца R*

$$\text{r. gl. dim } R = \sup \{\text{proj. dim } M \mid M_R \text{ — конечно порожденный } R\text{-модуль}\}. \quad \square$$

8.21. Следствие. *Если кольцо R не является классически полупростым, то*

$$\text{r. gl. dim } R = 1 + \sup_{I \subseteq R} \{\dim I\}.$$

Доказательство. Пусть R/I — циклический модуль и

$$\dim R/I = \text{r. gl. dim } R = n \geqslant 1.$$

Тогда из точности последовательности $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ и проективности модуля R вытекает, что

$$1 + \dim I = \dim R/I,$$

чем и доказывается следствие. $\square$

Если M есть R-модуль, то через $g(M)$ обозначим наименьшую среди мощностей его систем образующих.

8.22. Предложение (Смолл [66b]). *Пусть k — поле мощности $\aleph_\varkappa$, $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов с полем частных $Q = k(x_1, \ldots, x_n)$, S — мультипликативно замкнутая система кольца R, $M = RS^{-1}$ и $g(M) = \aleph_\mu$. Тогда $g(Q) = \aleph_\varkappa$ и*

$$\dim_R M \leqslant \mu + 1.$$

Доказательство. Заметим, что R — область с однозначным разложением на простые множители. Многочлен $x_i - \alpha$ неприводим в R для любого элемента $\alpha \in k$, и

$$R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - \alpha x_1]$$

при $n \geqslant 2$. В Q отсутствуют R-подмодули, порожденные менее чем $\aleph_\varkappa$ элементами и содержащие множество $\{(x_1 - \alpha x_2)^{-1} \mid \alpha \in k\}$. Поэтому $g(Q) = \aleph_\varkappa$.

Допустим, что множество образующих модуля M вполне упорядочено и его мощность равна $\aleph_\mu$. Положим $M_0 = 0$. Допустим, что M_i уже определены для всех $i < \alpha$. Определим M_α как модуль, порожденный обратными элементами ко всем знаменателям элементов из M_i для $i < \alpha$ и первым элементом множества образующих, не лежащих в этом множестве, а также их произведениями. Тогда M_α порождается менее чем $\aleph_\mu$ элементами. В силу трансфинитной индукции $M = \bigcup_{\alpha<\aleph_\mu} M_\alpha$. Если $\mu > 0$, то по индуктивному предположению $\dim_R (\bigcup_{i<\alpha} M_i)$, $\dim_R M_\alpha \leqslant \mu$. Следовательно, $\dim_R (M_\alpha/\bigcup_{i<\alpha} M_i) \leqslant \mu + 1$, и применима лемма Ауслендера

Если $\mu = 0$, то M порождается обратными элементами к элементам некоторого счетного множества элементов кольца R, скажем $\{r_0, r_1, \ldots\}$. Положим $s_0 = r_0^{-1}$, $s_{i+1} = s_i r_{i+1}^{-1}$. Тогда $s_i R \subseteq s_{i+1} R$, $s_i R$ — проективный модуль (на самом деле свободный) и $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} s_i R$. Тогда $\dim_R (s_{i+1}R/s_iR) \leqslant 1$. Опять же в силу леммы Ауслендера $\dim_R M \leqslant 1$. Поскольку проективный модуль не может делиться на s_0, модуль M не является проективным. Итак, $\dim_R M = 1$. □

Теорема Гильберта и начало предыдущего доказательства показывают, что

$$\dim_{k[x_1, \ldots, x_n]} k(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \min(\varkappa + 1, n).$$

(На самом деле имеет место равенство, но мы его здесь не доказываем.) Если k — счетное поле, то очевидно, что $\dim_R Q = 1$. Кроме того, для любой коммутативной локальной области целостности R с полем частных Q теорема Капланского [66] утверждает, что $\dim_R Q$, если Q — счетно порожденное поле. (См. Смолл [66c], где R может быть любой областью целостности, такой, что $\operatorname{rad} R \neq 0$ и $R/\operatorname{rad} R$ — нётерово кольцо.)

Кольцо R называется **полунаследственным справа**, если каждый конечно порожденный правый идеал проективен. Коммутативные наследственные (соотв. полунаследственные) области целостности называются **дедекиндовыми** (соотв. **прюферовыми**) кольцами или областями.

8.23. Примыкающие результаты и упражнения.

8.23.1 (Ауслендер [55]). Если R — нётерово справа и слева кольцо, то правая и левая глобальные размерности равны. [*Указание*: заметить, что равны правая и левая слабые глобальные размерности.]

8.23.2 (Капланский [58b]). Правая и левая глобальные размерности в случае произвольного кольца R могут не совпадать. В частности, наследственное справа кольцо может не быть наследственным слева.

8.23.3. (a) $\operatorname{gl.dim} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \infty$ для любого простого числа p и натурального числа n.

(b) Кольцо, правая глобальная размерность которого равна бесконечности, может иметь в качестве левой глобальной размерности любое натуральное число n.

8.23.4. Доказать равенство, приведенное в замечании, следующем за доказательством предложения 8.22.

8.23.5 (Хохшильд [58]). Если R — кольцо, S — свободная группа (свободный моноид), $R[S]$ — групповое (полугрупповое) кольцо, то

$$\text{r gl dim } R[S] = 1 + \text{r. gl. dim } R.$$

В частности, **свободное кольцо** над S, определяемое как целочисленное полугрупповое кольцо $\mathbb{Z}[S]$, имеет глобальную размерность, равную 2. Выведите из этого, что любое кольцо T изоморфно факторкольцу A/I кольца A, глобальная размерность которого равна 2.

8.23.6. Свободная алгебра над полем наследственна справа и слева.

8.23.7. Если $T_n(R)$ — кольцо нижних треугольных матриц над кольцом R, то

$$\text{l. gl. dim } T_n(R) = 1 + \text{l. gl. dim } R.$$

Итак, кольцо $T_n(R)$ наследственно слева тогда и только тогда, когда кольцо R классически полупросто.

8.23.8 (Ософская). Если R — нётерово справа кольцо, то

$$\text{r. gl. dim } R = \sup\{\text{inj. dim } (R/I) \mid I \subseteq R\}.$$

8.23.9. (a) (Леви [63a]) Если R — наследственное справа и слева полупервичное кольцо, то R является прямой суммой наследственных справа и слева первичных колец.

(b) (Леви, там же) Над таким кольцом R каждый конечно порожденный правый R-модуль является прямой суммой периодического модуля и конечного числа правых идеалов.

(c) (Айзенбуд и Робсон) Любой модуль над наследственным справа и слева нётеровым справа и слева первичным кольцом, который аннулируется ненулевым идеалом, является прямой суммой модулей с единственным рядом Лоева (см. гл. 22) или, что эквивалентно, для любого ненулевого двустороннего идеала A факторкольцо R/A **обобщенно однорядно** (в том смысле, что оно артиново справа и слева и обладает разложением в прямую сумму

правых (левых) идеалов с единственным рядом Жордана — Гёльдера (см. гл. 17 и 24)).

8.23.10 (Райнехарт [62]). Пусть R — алгебра (кольцо) дифференциальных многочленов над полем k. Тогда

$$t = \text{gl. dim} \bigotimes_k^n R \leqslant \text{gl. dim}\, R + 2(n-1)$$

и также $t \leqslant 2n$. Если характеристика поля k отлична от нуля, то $t = 2n$.

(b) Проективная размерность модуля R над «обертывающей» алгеброй $R \underset{k}{\otimes} R^{\text{op}}$ равна 2.

Нётеровы кольца глобальной размерности 2

Теорема Басса, доказываемая в этом параграфе, утверждает, что глобальная размерность нётерова кольца не превосходит двух тогда и только тогда, когда дуальный к произвольному конечно порожденному правому R-модулю X R-модуль проективен. Чтобы привести доказательство Басса, мы введем понятия замкнутых подмодулей и полурефлексивных модулей. Кратко, правый R-модуль A называется **полурефлексивным** [1]), если каноническое отображение

$$\begin{cases} A \to A^{**} \\ a \mapsto \langle\ ,\ a\rangle, \end{cases}$$

где $f\langle\ ,\ a\rangle = f(a)$ для любого $f \in A^*$, является мономорфизмом. Модуль A называется **рефлексивным**, если $A \to A^{**}$ — изоморфизм. (См. дуальные модули, стр. 181—182.) Подмодуль K называется **замкнутым** в A, если

$$K = \text{ann}_A(\text{ann}_{A^*}K).$$

Для любого R-модуля K имеется изоморфизм

$$\begin{cases} \text{ann}_{A^*}K \approx (A/K)^* \\ f \mapsto \bar{f}, \end{cases}$$

где $\bar{f}(a + K) = f(a)$. Таким образом, существует изоморфизм

$$\text{ann}_A(\text{ann}_{A^*}K) \approx (A^*/(\text{ann}_{A^*}K))^*.$$

Если подмодуль K замкнут, то он изоморфен модулю, стоящему справа, т. е. *каждый замкнутый подмодуль модуля A изоморфен модулю, дуальному к некоторому фактормодулю модуля A^*.*

[1]) Их называют иногда модулями без кручения в смысле Басса.— *Прим. перев.*

8.24. Упражнения.

8.24.1. Подмодуль K модуля A замкнут тогда и только тогда, когда модуль A/K полурефлексивен.

8.24.2. Каждый правый R-модуль полурефлексивен тогда и только тогда, когда R — кообразующий в категории mod-R.

8.24.3. Подмодуль K модуля A замкнут тогда и только тогда, когда $K = \text{ann}_A H$, где H — некоторый подмодуль модуля A^*.

8.25A. Предложение. *Пусть R — кольцо, $n > 0$, K — подмодуль модуля R^n из категории* mod-R. *Тогда K — замкнутый подмодуль в том и только том случае, когда модуль K изоморфен R-модулю B^*, дуальному к левому R-модулю B, порожденному n элементами.*

Доказательство. Если подмодуль K замкнут, то для $A = R^n$ имеет место изоморфизм

$$K = \text{ann}_A\text{ann}_{A^*}K \approx (A^*/\text{ann}_{A^*}K)^*.$$

Таким образом, $K \approx B^*$, где $B = A^*/\text{ann}_{A^*}K$. Так как $A^* \approx R^n$ в категории R-mod, то модуль B порождается n элементами. Обратно, если $K \approx B^*$, где последовательность

$$0 \to H \to R^n \to B \to 0$$

точна в категории R-mod, то в силу упражнения 8.24.3 K — замкнутый подмодуль, поскольку $\text{ann}_{R^n}H \approx (R^n/H)^* \approx B^*$. □

8.25B. Предложение (Басс [60]). *Если R — нётерово справа и слева кольцо, то* l. gl. dim $R \leqslant 2$ *тогда и только тогда, когда любой R-модуль, дуальный к конечно порожденному правому модулю, проективен.*

Доказательство. Пусть M — конечно порожденный R-модуль и последовательность

$$0 \to K \to R^n \to M \to 0 \tag{1}$$

точна. В силу следствия 8.20 r. gl. dim $R \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда размерность возникающих таким образом модулей K не превосходит 1. Пусть последовательность

$$0 \to H \to R^m \to K \to 0 \tag{2}$$

точна. Тогда dim $K \leqslant 1$ в том и только том случае, когда dim $H = 0$. Таким образом, l. gl. dim $R \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда возникающие таким образом модули H проективны. Из упр. 8.24 следует, что эти модули H дуальны к конечно порожденным модулям. Действительно, модуль K полурефлексивен, и, следовательно, по 8.24.1 H — замкнутый подмодуль. В силу изоморфизма, установленного перед упр. 8.24, модуль H изоморфен модулю,

дуальному к некоторому конечно порожденному модулю. Обратно, любой такой дуальный модуль H' может быть дополнен до точной последовательности вида (2). □

8.26. Следствие. *Если R — нётерово справа и слева кольцо, глобальная размерность которого $\leqslant 2$, то как все правые, так и все левые аннуляторные идеалы кольца R проективны.*

Доказательство. Если I — правый аннуляторный идеал, скажем $I = \operatorname{ann}_A X$, где X — левый идеал кольца R, то в силу предложения 8.25B $X \approx (R/I)^*$ — проективный модуль. □

Простые нётеровы кольца, глобальная размерность которых $\leqslant 2$

Из теоремы Веддербёрна — Артина следует, что простое артиново кольцо подобно телу и, следовательно, его глобальная размерность равна 0. Следующая теорема обобщает это утверждение на простые нётеровы кольца глобальной размерности $\leqslant 2$.

8.27. Теорема [1]. *Нётерово справа и слева простое кольцо R, глобальная размерность которого $\leqslant 2$, подобно простой правой области Оре.*

Доказательство. В силу следствия 8.26 из теоремы Басса каждый правый аннуляторный идеал в кольце R проективен. В силу 4.11, 4.19, 4.29 (см. также 7.5) простое кольцо R подобно простой правой области Оре тогда и только тогда, когда оно содержит проективный однородный правый идеал U. В силу теоремы Голди 7.21B существует артиново справа классическое правое кольцо частных Q кольца R. Пусть I — минимальный правый идеал кольца Q, содержащийся в UQ. Положим $A = I \cap R$. В силу 8.5 правый идеал I порождается идемпотентом, и, следовательно, является минимальным правым аннуляторным идеалом в кольце Q. Тогда в силу 4.23.3 A — правый аннуляторный идеал в кольце R и, более того, минимальный правый аннуляторный идеал. Далее, A — однородный правый идеал, поскольку если X и Y — ненулевые правые идеалы кольца R, лежащие в A, то XQ и YQ — ненулевые правые идеалы, лежащие в I. Тогда в силу минимальности правого идеала I имеем $XQ = YQ = I$.

[1]) Автор доказал эту теорему в 1965 г. и сообщил о ней в устной и письменной форме частным образом. Михлер [69] получил ее независимо в более общем виде. Теорема была представлена в лекциях автора на конференции по теории колец (Ring Theory Conference at Appalachian State U., Boone, N. C., August 1969) в августе 1969 г. Коззенс и Фейс обобщили ее на рассматриваемый односторонний случай.

Запишем

$$t = xab^{-1} = ycd^{-1},$$

где все элементы $t \in Q$, $x \in X$, $y \in Y$, a, b, c, $d \in R$ ненулевые. (В силу 9.3 это возможно.) Тогда $d^{-1}b = b_1 d_1^{-1}$ для подходящих элементов b_1, $d_1 \in R$. Поэтому

$$tbd_1 = xad_1 = ycb_1$$

— ненулевой элемент правого идеала $X \cap Y$. Это доказывает, что правый аннулятор A является однородным и проективным. Тогда $k = \operatorname{End} A_R$ — правая область Оре (см. 4.21), а кольцо R подобно области k. □

Гипотезы о простых кольцах

Приведем переформулировку теоремы 7.21B и части теоремы 7.5.

8.28A. Теорема. *Пусть R — простое кольцо, U — ненулевой однородный правый идеал и $K = \operatorname{End} U_R$ — правая область Оре. Тогда U — конечно порожденный проективный левый K-модуль. Кроме того, равносильны следующие условия:*

(a) *K — простое кольцо.*

(b) *U — проективный R-модуль.*

(c) *Существует эквивалентность категорий*

$$\text{mod-}K \approx \text{mod-}R.$$

8.28B. Гипотезы [1].

(1) Можно ли выбрать правый идеал U в предложении 8.28A (b) так, чтобы U был свободным модулем над кольцом K? Гипотеза: нет.

(2) Верно ли, что $R \approx K_n$ для некоторой области целостности K? Гипотеза: нет.

(3) Если кольцо R не является областью целостности, то обязано ли кольцо R содержать нетривиальные идемпотенты? Гипотеза: нет.

(4) Существует ли простая правая область Оре K и неразложимый конечно порожденный проективный K-модуль P, который не вкладывается в K? Гипотеза: да.

[1]) А. Е. Залесский, О. М. Нерославский (Инст. мат. АН БССР, 1976, препринт № 1) построили пример простого нётерова кольца без идемпотентов, содержащего делители нуля, что дает ответ на вопрос (3) и в качестве следствия на вопросы (1), (2), (4), (9). См. также их статьи в *Изв. АН БССР* (1975), № 5, 38—42, и в *Comm. Algebra*, **5** (1977), № 3, 231—244. — *Прим. перев.*

(5) Если R — простое кольцо с однородным правым идеалом U, то существует ли однородный ненулевой проективный правый идеал W в R?

(6) Будет ли каждое простое кольцо Голди (или кольцо конечной глобальной размерности) подобно области Оре? Гипотеза: нет.

(7) Те же вопросы, но в предположении, что R — простое нётерово справа и/или нётерово слева кольцо и/или V-кольцо. (См. гл. 7, в частности 7.31.)

(8) Те же вопросы, но в предположении, что каждый квазиинъективный правый модуль инъективен. (Тогда кольцо R нётерово справа и кольцо эндоморфизмов любого неразложимого инъективного правого R-модуля является телом. См. гл. 20.)

(9) Если K — простая правая область Оре и U — конечно порожденный проективный левый K-модуль, то существует ли левый идеал V кольца K и изоморфизм $U \approx V^n$ для некоторого целого числа $n > 0$?

8.28С. Замечания. Гипотезы (1) и (2) равносильны. Если верно предположение (1), то U — конечно порожденный свободный K-модуль, скажем, $U \approx K^n$. Тогда в силу 3.17 $R = \mathrm{End}_K U \approx K_n$. Обратно, если $R \approx K_n$, то $R \approx \mathrm{End}_K W$, где $W \approx K^n$ — свободный K-модуль.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (9). Если $R = \mathrm{End}_K U$, $R \approx K_n$, то $U = \sum_{i=1}^{n} Ue_{ii}$ в категории K-mod, где $\{e_{ij}\}_{i,j\in n}$,— матричные единицы кольца R и все K-модули Ue_{ii} изоморфны модулю $V = Ue_{11}$, причем изоморфизм осуществляется посредством гомотетии модуля U с коэффициентом e_{1i}. (Заметим, что поскольку $Re_{11} = Re_{i1}$, то $Ue_{11} = Ue_{i1}$.) Из этого следует, что $U \approx V^n$ в категории K-mod. В силу 3.17 существует изоморфизм колец

$$R = \mathrm{End}_K U \approx \mathrm{End}_K V^n \approx Q_n,$$

где $Q = \mathrm{End}_K V$. В силу 7.21В кольцо R обладает правым кольцом частных D_n, где D — правое тело частных кольца K. Из этого следует, что Q — правая область Оре, правое тело частных которой изоморфно телу D. Далее, в силу 4.11.6 модуль V канонически вкладывается в Q, и, следовательно, $V \subseteq D$. Так как левый K-модуль V конечно порожден и K — правая область Оре, то существует ненулевой элемент $k \in K$, такой, что $Vk \subseteq K$. Из этого следует, что модуль V вложим в K, т. е. выполнено условие (9).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (6). Допустим, что справедливо предположение (3). Пусть e — нетривиальный идемпотент кольца R. Так как кольцо R простое, то eR — прообразующий и кольца $\mathrm{End}\, eR_R \approx eRe$ канонически изоморфны. Таким образом, $R \sim eRe$. Поэтому если eRe — область целостности, то выполнено (6). В противном случае в силу (3) кольцо eRe содержит нетривиальный идемпотент f. Правая размерность Голди кольца fRf не превосходит правой размерности Голди eRe. Проводя индукцию, можно считать, что fRf подобно области целостности. Тогда $R \sim eRe \sim fRf$, т. е. кольцо R подобно области целостности.

Утверждение (3) равносильно отрицанию утверждения (4). Действительно, пусть P — конечно порожденный проективный K-модуль. Так как кольцо K простое, то P является прообразующим в категории K-mod. Тогда кольцо $A = \mathrm{End}_K P$ подобно кольцу K. В силу 7.21В кольцо A обладает правым кольцом частных, которое изоморфно кольцу D_m для некоторого числа $m > 0$. Если модуль P неразложим, то в кольце A нет нетривиальных идемпотентов. Поэтому в силу (3) A — область целостности, правое тело частных которой изоморфно телу D. Тогда модуль P вложим в K [как это было показано в доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (9)].

Обратно, если P — неразложимый конечно порожденный проективный левый K-модуль, который не вкладывается в K, то аналогичные рассуждения показывают, что $R = \mathrm{End}_K P$ — простое кольцо Голди без нетривиальных идемпотентов и, кроме того, R не является областью целостности. (Действительно, если бы кольцо R было областью целостности Q, то правое тело частных кольца Q совпадало бы с D, а тогда приведенные выше аргументы показывают, что модуль P вложим в K, что противоречит предположению.)

Предположения (5) и (6) равносильны в силу 8.28А.

Гипотезы (3) и (9) связаны следующим образом. Предположение (3) равносильно тому, что каждый конечно порожденный левый K-модуль W изоморфен прямой сумме неразложимых левых идеалов кольца K, в то время как гипотеза (9) утверждает, что мы можем предполагать существование изоморфизма K-модулей $W \approx V^n$, где V^n — прямая сумма изоморфных неразложимых левых идеалов кольца K. □

Кольца без единичного элемента

Под **предкольцом** [1]) понимается множество с двумя бинарными ассоциативными операциями

умножением: $T \times T \to T$, $(a, b) \to a \cdot b$

и

сложением: $T \times T \to T$, $(a, b) \to a + b$,

[1]) У автора «ring — 1».— *Прим. перев.*

такими, что T — абелева группа относительно сложения и операции удовлетворяют законам дистрибутивности

$$(a + b)\, c = ac + bc,$$
$$a\,(b + c) = ab + ac$$

для всех a, b, $c \in T$.

Таким образом, каждое кольцо является предкольцом.

Обратно, предкольцо T является кольцом относительно операций сложения и умножения тогда и только тогда, когда T содержит единичный элемент.

Гомоморфизмы предколец (гомоморфные вложения и т. д.) определяются очевидным образом: отображение $h\colon T \to S$ предколец называется гомоморфизмом, если $h(ab) = h(a)\,h(b)$ и $h(a - b) = h(a) - h(b)$ для всех a, $b \in T$.

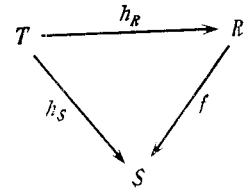
8.29A. Предложение. *Пусть T — предкольцо, а $\mathscr{T}$ — категория, объектами которой служат гомоморфные вложения предколец*

$$h_R\colon\ T \to R,$$

где R — кольцо, такое, что

$$R = \{\operatorname{im} h + n\cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Морфизм в $\mathscr{T}$ — гомоморфизм колец $f\colon R \to S$, для которого диаграмма



коммутативна. Тогда категория $\mathscr{T}$ обладает левым нулем.

Доказательство. Инициальный объект (или левый нуль) традиционно вводится как произведение $R = T \times \mathbb{Z}$, которое является кольцом относительно операций

умножения: $(a, n)\,(b, m) = (ab + nb + ma, nm)$,

сложения: $(a, n) + (b, m) = (a + b, n + m)$.

Единичным элементом кольца R является $(0,1)$, и отображение $t \mapsto (t, 0)$ определяет гомоморфное вложение предколец $h_R\colon T \to R$. Очевидно, что h_R принадлежит нашей категории $\mathscr{T}$. Если $h_S\colon T \to S$ — объект категории $\mathscr{T}$, то существует кольцевой гомоморфизм

$$f\begin{cases} R \to S \\ h_R(t) + n\cdot 1 \mapsto h_S(t) + n\cdot 1. \end{cases}$$

Заметим, что $h_R(t) + n\cdot 1 = (t, n) \in R$. Следовательно, $h_R(t) + n\cdot 1 = h_R(t') + m\cdot 1$ тогда и только тогда, когда $t = t'$ и $n = m$. Это показывает, что $f\colon h_R(t) + n\cdot 1 \mapsto h_S(t) + n\cdot 1$ действительно является отображением и, более того, очевидно, морфизмом в категории $\mathscr{T}$. Если $f'\colon R \to S$ — морфизм, такой, что $f'h_R = h_S$, то

$$f'(t, n) = f'(t, 0) + f'(0, n) = f'(t, 0) + n\cdot 1 = f'h_R(t) + n\cdot 1 = h_S(t) + n\cdot 1,$$

т. е. $f' = f$. Это доказывает, что $h_R\colon T \to R$ — левый нуль. □

Если T — предкольцо, не являющееся кольцом, то левый нуль $h_R\colon T \to R$ в категории $\mathscr{T}$, построенный в 8.29A, называется **кольцевым накрытием** предкольца T. Для простоты в качестве h_R будет рассматриваться включение, а R будет называться кольцевым накрытием предкольца T. В этом случае T — идеал кольца R и факторкольцо R/T изоморфно кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$.

(Правый) **модуль** (M, T, μ) над предкольцом T определяется как абелева группа M и отображение

$$\mu\begin{cases} M \times T \to M \\ (m, t) \mapsto mt, \end{cases}$$

для которых выполнены аксиомы (1)—(3) из определения модуля над кольцом (см. гл. 1). Гомоморфизм $M \to N$ T-модулей определяется как гомоморфизм групп $f\colon M \to N$, при котором $f(xt) = f(x)\,t$ для всех $x \in M$, $t \in T$. Как и в категории модулей над кольцами, $\operatorname{Hom}_T(M, N)$ будет обозначать множество всех T-гомоморфизмов $M \to N$. Класс всех T-модулей является категорией и обозначается через $\mathscr{M}_T$, в ней $\operatorname{Hom}_T(M, N)$ — множество всех морфизмов $M \to N$.

8.29B. Предложение. *Пусть T — предкольцо, и R — его кольцевое накрытие. Тогда существует изоморфизм категорий*

$$\varphi\begin{cases} \mathscr{M}_T \approx \mathscr{M}_R \\ (M, T, \mu) \mapsto (M, R, \varphi(\mu)), \end{cases}$$

где

$$\varphi(\mu)\begin{cases} M \times R \to M \\ (x, (t, n)) \mapsto \mu(x, t) + nx. \end{cases}$$

Если $M, N \in \mathscr{M}_T$ и $f \in \operatorname{Hom}_T(M, N)$, то $f \in \operatorname{Hom}_R(\varphi(M), \varphi(N))$, и мы положим $\varphi(f) = f$. Тогда

$$\eta\begin{cases} \mathscr{M}_R \approx \mathscr{M}_T \\ (M, R, \nu) \mapsto (M, T, \eta(\nu)), \end{cases}$$

где $\eta(\nu)$ — ограничение отображения ν на T.

Доказательство. Очевидно, что $\varphi\eta = \eta\varphi$ — тождественное отображение на объектах и на морфизмах. □

Правым идеалом предкольца T называется подмножество в T, являющееся подмодулем относительно индуцированных операций. Аналогично определяется **левый идеал**. Нильпотентные идеалы определяются так же, как и в кольцах.

Заметим, что если R — кольцо (с 1), то mod-R (в обычном смысле) соответствует множеству всех R-модулей (над предкольцом), в которых $x1 = x$ для каждого элемента x модуля.

8.30. Теорема. *Если $T \neq 0$ — предкольцо без ненулевых нильпотентных идеалов, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепей правых идеалов, то T содержит единицу и является, таким образом, (классически полупростым) кольцом.*

Доказательство оставляем читателю с указанием о том, что $R = \mathrm{End}\, T_T$ — артиново полупервичное кольцо, а отображение $t \to t_s$ осуществляет вложение $T \to R$.

Упражнения к гл. 8

1. Пусть R — кольцо, e_1, e_2 — идемпотенты кольца R. Тогда
(a) Правые R-модули e_1R и e_2R изоморфны тогда и только тогда, когда существуют элементы e_{12}, $e_{21} \in R$, такие, что

$$e_1e_{12}e_2 = e_{12},\quad e_2e_{21}e_1 = e_{21},$$
$$e_{12}e_{21} = e_1,\quad e_{21}e_{12} = e_2.$$

[*Указание*: если φ — изоморфизм, то положим $e_{21} = \varphi(e_1)$, $e_{12} = \varphi^{-1}(e_2)$.]
(b) Правые R-модули e_1R и e_2R изоморфны тогда и только тогда, когда левые R-модули Re_1 и Re изоморфны.

2. Пусть e — идемпотент полупервичного кольца. Тогда равносильны следующие утверждения:
(a) eR — минимальный правый идеал; (b) eRe — тело; (c) Re — минимальный левый идеал.

3. Следующие утверждения о минимальных правых идеалах I, K полупервичного кольца R эквивалентны: (a) $I \approx K$. (b) $KI \neq 0$; (c) $K = xI$ для некоторого элемента $x \in K$.

4. Если A — идеал классически полупростого кольца R, то существует центральный идемпотент e (т. е. идемпотент e, лежащий в центре кольца R), такой, что $A = eR = Re$.

***5.** Если R — полупервичное кольцо и каждый правый R-модуль полурефлексивен, то кольцо R классически полупросто.

***6** (Брауэр). Если кольцо R артиново справа, то каждый ненильпотентный правый идеал содержит идемпотент.

***7** (Капланский [52]). Если полупервичное кольцо R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов, то кольцо R классически полупросто. [*Указание*: показать, что R совпадает со своим цоколем, заметив, что каждый конечно порожденный правый идеал, лежащий в цоколе, порождается идемпотентом.] Это же утверждение верно и для предколец.

8. $R = A_n$, где A — кольцо, и T (соотв. N) — множество **нижних (строго) треугольных матриц** над R, т. е.

$$T = \{\textstyle\sum e_{ij}\, d_{ij} \mid d_{ij} \in D,\ d_{ij} = 0\ \forall j > i\},$$
$$N = \{\textstyle\sum e_{ij}\, d_{ij} \mid d_{ij} \in D,\ d_{ij} = 0\ \forall j \geqslant i\}.$$

(a) Показать, что T — кольцо, N — нильпотентный идеал кольца T индекса нильпотентности $\leqslant n$ и факторкольцо T/N — прямое произведение n экземпляров кольца A.
(b) Если кольцо A классически полупросто, то кольцо нижних треугольных матриц над A наследственно справа. Обобщить это утверждение.

***9** (Фейс [66]). Пусть M есть R-модуль и E — его инъективная оболочка. Тогда следующие условия равносильны:
(a) Прямая сумма счетного числа экземпляров модуля E является инъективным модулем.
(b) Структура правых идеалов кольца R, являющихся аннуляторами подмножеств модуля M, удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей.

(c) Любая прямая сумма экземпляров модуля E является инъективным модулем.

10. Пусть C — категория. Если объекты A и B эквивалентны, то существует эквивалентность категорий $\mathrm{Mor}(A, A) \approx \mathrm{Mor}(B, B)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Но это справедливо для категории векторных пространств над телом. Доказать это. [*Указание*: если $S = \mathrm{End}_D V$, где V — векторное пространство над телом D, то правый S-модуль V прост и изоморфен правому идеалу I кольца S. Таким образом, $K = \mathrm{End}\, I_S$ — тело, изоморфное телу D, а I — левое векторное пространство над D, изоморфное V. Любые два минимальных правых идеала кольца S изоморфны. Поэтому если $R \approx \mathrm{End}_Q W$, где ${}_QW$ — векторное пространство над телом Q, то из изоморфизма $R \approx S$ следует существование изоморфизма $Q \approx D$ и равенство $\dim_Q W = \dim_D V$. Это несколько более сильное утверждение, чем то, которое мы первоначально сформулировали.]

11. Коммутативное полунаследственное кольцо не содержит нильпотентных элементов.

*12 (Голди [62]). Если R — полупервичное кольцо главных правых идеалов, то кольцо R наследственно справа.

*13 (Голди [62]). Если R — первичное кольцо главных правых идеалов, то $R \approx K_n$, где K — наследственная справа область целостности.

*14. Кольцо R наследственно справа тогда и только тогда, когда каждый подмодуль проективного модуля проективен. Вывести из этого, что каждое наследственное кольцо полунаследственно.

*15 (Капланский). Если кольцо R наследственно справа, то каждый проективный модуль изоморфен прямой сумме правых идеалов кольца R.

*16 (Альбрехт [61]). Если кольцо R полунаследственно справа, то каждый проективный модуль изоморфен прямой сумме конечно порожденных правых идеалов кольца R.

*17 (Басс [64]). Если кольцо R полунаследственно справа, то каждый проективный левый R-модуль изоморфен прямой сумме модулей, дуальных конечно порожденным правым идеалам.

Замечания к гл. 8

Теоремы Веддербёрна — Артина о классически полупростых кольцах и полупростых модулях, представленные в этой главе, стандартны и не нуждаются в дальнейших комментариях, исключая, возможно, лишь указание на то, что это одно из наиболее мощных средств в структурной теории артиновых неполупростых колец (часть V). Почему это так? Во-первых, радикал J любого артинова справа кольца R нильпотентен. Из этого следует, что любой ненулевой модуль M содержит MJ в качестве собственного подмодуля. Но канонический R/J-модуль M/MJ должен в силу 8.11 быть полупростым, поскольку R/J классически полупросто и артиново справа. В частности, J^i/J^{i+1} — полупростой модуль для любого числа i, меньшего, чем индекс нильпотентности радикала J. Из этого следует, что R обладает композиционным рядом (гл. 17), простые факторы которого в силу теоремы Жордана — Гёльдера определены однозначно с точностью до изоморфизма. Кроме того, отсюда извлекается несложное следствие: кольцо R нётерово справа, т. е. любое артиново справа кольцо является нётеровым справа (теорема Гопкинса [39] и Левицкого [39]). Как мы уже отмечали, важные приложения теорема Веддербёрна — Артина находит при исследовании строения неполупростых колец. Более полное освещение этого вопроса можно найти в томе 2.

Как указывалось в упражнении 8.23.3, существуют кольца бесконечной глобальной размерности. В действительности, приведенные там примеры могут быть обобщены: любое самоинъективное справа нётерово справа или слева кольцо R либо классически полупросто, либо его глобальная размерность равна ∞. [Эти кольца называются **квазифробениусовыми кольцами** (QF-кольца). Класс таких колец совпадает с классом артиновых справа и слева колец, в которых каждый правый или левый идеал является аннуляторным. См. гл. 12, упр. 6.]

Теорема Ауслендера — Буксбаума [57] утверждает, что любое нётерово коммутативное локальное кольцо конечной глобальной размерности является областью целостности с однозначным разложением на простые множители. Таким образом, глобальная размерность любого нётерова коммутативного локального кольца с делителями нуля равна бесконечности (из этого утверждения следует 8.23.3(а)). Однако существуют локальные коммутативные кольца с делителями нуля конечной глобальной размерности (Ософская [69]).

Результаты Капланского и Смолла о глобальной размерности колец частных (см. 8.22) были обобщены Ософской [68c] (см. также Ософская [70], где обсуждается глобальная размерность кольца линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства над телом).

Митчелл [65] изложил теоремы о глобальной размерности для случая абелевых категорий. Кроме того, он доказывает не только теорему Гильберта о сизигиях 8.16 для категории многочленов над абелевой категорией, но также и теорему Хохшильда, сформулированную в 8.23.5, для «свободной» категории над абелевой категорией. Позже Митчелл получил обе эти теоремы единым методом (не опубликовано).

Ссылки

Айзенбуд — Робсон [70], Альбрехт [61], Артин [27], Ауслендер [55], Ауслендер — Бухсбаум [57], Басс [60a], [64], Вебер [70], Веддербёрн [08], Голди [62], Капланский [52], [58a], [59], [66], [69a], [69b], Картан — Эйленберг [56], Леви [63], Маклейн [66], Митчелл [65], Михлер [69], Норскотт [60], Ософская [68c], [69], [70], Райнхарт [62], Сандомирский [64], Смолл [66c], Фейс [66], [72a], Хохшильд [58].

Глава 9

НЁТЕРОВЫ ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ КОЛЬЦА

Кольцо S называется (классическим) правым кольцом частных своего подкольца T, если каждый регулярный элемент $a \in T$ обратим в S и

$$S = \{ab^{-1} \mid a, b \in T, b \text{ — регулярный элемент}\}.$$

Тогда T — порядок в кольце S (см. 7.21). Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы кольцо T обладало классическим кольцом частных: если a, $b \in T$ и b — регулярный элемент, то существуют элементы a_1, $b_1 \in T$, где b_1 регулярен, такие, что $ab_1 = ba_1$ (см. 9.1). Если T — коммутативное кольцо, то это условие выполнено автоматически. Если T — область целостности, то это условие Ope.

Интересен вопрос о том, когда кольцо (или группа) R вложимо в кольцо $(n \times n)$-матриц над телом (в этом случае кольцо называется **представимым**). Ветвь математики, известная как теория представлений, посвящена изучению гомоморфизмов данного кольца (или группы) в кольцо матриц или в кольцо линейных преобразований над телом. (См. книгу Кэртиса и Райнера [69], где излагается теория представлений.)

Очень простое, но важное введение в эту область дает следующая теорема: любое кольцо R, являющееся конечномерным левым векторным пространством над своим подтелом F, вложимо в кольцо F_n, где $n = \dim_F R$. Вложение [1]) осуществляется отображением, при котором $a \mapsto a_d$, где a_d — гомотетия с коэффициентом $a \in R$. Такое представление называется **конечномерным**.

В этой связи теорема Веддербёрна — Артина — весьма сильное утверждение. Артиново первичное кольцо не только представимо, но и является полным кольцом матриц над телом. В этой главе мы покажем, что нётерово первичное (или простое) кольцо не только представимо, но, что является гораздо более точным утверждением, оказывается порядком в полном кольце матриц над телом. Исторически как первая теорема о конечномерном представлении для общего нётерова простого (или первичного) кольца это утверждение было доказано Голди в 1958 г. для нётеровых справа и слева колец, а Лезьё и Круазо в 1959 г. для первичных нётеровых справа колец [1]). Мы приведем предложенное Голди [69] доказательство утверждения, характеризующего кольца с классически полупростыми правыми кольцами частных как полупервичные кольца с условиями максимальности для аннуляторных идеалов и прямых сумм (теорема 9.9). Следствием является теорема Левицкого 9.16 о том, что любой правый ниль-идеал нётерова справа или слева кольца нильпотентен. Глава заканчивается рядом упражнений о максимальном (в смысле Джонсона) правом кольце частных антисингулярного справа кольца, обобщающего понятие классического правого кольца частных. Кроме того, теорема Фейса — Утуми [65], определяющая все правые порядки кольца D_n как подкольца, содержащие кольцо F_n для некоторого правого порядка F в D, доказывается в следующей гл. 10.

[1]) Забавная патология: R — левое и правое векторное пространство над любым подтелом F, но возможно, что $n = \dim_F R < \omega$ и $\dim R_F = \omega$ (Кон [61]). В этом случае отображение $a \mapsto a_s$ вкладывает R не в F_n, а в кольцо F_ω конечно-строчных матриц над F.

Существование колец частных

Кольцо R удовлетворяет правому **условию Ope**, если для любой пары элементов a, $b \in R$, где b регулярен, существует пара элементов a_1, $b_1 \in R$, где b_1 регулярен, такая, что

$$ab_1 = ba_1. \tag{1}$$

Условие Ope, очевидно, необходимо для того, чтобы кольцо R имело правое кольцо частных S, поскольку тогда $b^{-1}a \in S$, и поэтому

$$b^{-1}a = a_1 b_1^{-1} \tag{2}$$

для подходящих a_1, $b_1 \in R$, т. е. выполняется (1). Итак, равенство (2) — мнемоническое средство для запоминания равенства (1). В этом случае кольцо R называется **правым кольцом Ope.**

9.1. Предложение. *Кольцо R обладает правым кольцом частных тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию Ope.*

Доказательство [2]). Пусть G — множество регулярных элементов кольца R. Докажем сначала, что (i) если $ab_1 = ba_1$, где a, b, $a_1 \in G$ и $b_1 \in R$, то $b_1 \in G$. Чтобы убедиться в этом, пусть $x \in b_1^{\perp}$. Тогда $b_1 x = 0$, а значит,

$$0 = b_1 x = ab_1 x = ba_1 x,$$

[1]) Теорема плотности Шевалле — Джекобсона дает нам представление любого простого кольца R, которое конечномерно лишь тогда, когда R артиново (см. гл. 19).

[2]) В связи с доказательством Габриеля см. 16.9. Ср. «обращающие морфизмы» у Габриеля и Цисмана [71].

и из $ba_1 \in G$ следует, что $x = 0$. Далее, если $x \in {}^{\perp}b_1$, то существуют a_2, $b_2 \in R$, такие, что $b_2 \in G$ и $ab_2 = ba_2$, а тогда существуют $c \in G$, $d \in R$, такие, что $a_2c = a_1d$. Следовательно,

$$ba_2c = ab_2c \text{ и } ba_1d = ab_1d,$$

откуда $ab_2c = ab_1d$. Так как $a(b_2c - b_1d) = 0$ и $a \in G$, то $b_2c = b_1d$ и поэтому, поскольку $xb_1 = 0$, имеем

$$0 = xb_1 = xb_1d = xb_2c.$$

Так как $b_2c \in G$, то $x = 0$, что доказывает утверждение (1). Определим на произведении $R \times G$ отношение $\sim$, где

$$(a, b) \sim (c, d)$$

тогда и только тогда, когда верна следующая импликация: (*) если $bx = dy$ для некоторой пары элементов x, $y \in G$, то $ax = cy$. Теперь докажем утверждение (ii): *если для данной пары* $(a, b) \in R \times G$ *импликация* (*) *верна для одной упорядоченной пары* $\langle x, y\rangle$, *то она верна для любой такой пары* $\langle x_1, y_1\rangle \in G \times G$ [1]). Действительно, найдем элементы g, $g_1 \in G$, такие, что $yg = y_1g_1$. Так как мы допустили, что $bx_1 = dy_1$ и $bx = dy$, то

$$bx_1g_1 = dy_1g_1 = dyg = bxg.$$

Следовательно, $x_1g_1 = xg$ и

$$ax_1g_1 = axg = cyg = cy_1g_1,$$

т. е. $ax_1 = cy_1$, что доказывает (ii). Из этого следует, что $\sim$ — отношение эквивалентности на $R \times G$. Обозначим множество классов эквивалентности через RG^{-1}. Класс эквивалентности пары $(a, b) \in R \times G$ обозначим через a/b. Если a/b, $c/d \in RG^{-1}$, то существуют элементы x, $y \in G$, такие, что

$$m = bx = dy.$$

Тогда определим

(1) $$a/b + c/d = (ax + cy)/m.$$

(Заметим, что $a/b = ax/m$ и $c/d = cy/m$.) Во-первых, определение (1) не зависит от выбора элемента m, поскольку если также $m' = bx' = dy'$, где x', $y' \in G$, и если $mu = m'v$ для u, v, $\in G$, то $bxu = bx'v$, т. е. $xu = x'v$. Аналогично, $yu = y'v$, и поэтому

$$(ax + cy)u = (ax' + cy')v,$$

откуда

$$(ax + cy)/m = (ax' + cy')/m'.$$

[1]) То есть $(bx = dy \Rightarrow ax = cy) \Rightarrow (\forall (x_1, y_1) \in G \times G \ (bx_1 = dy_1) \Rightarrow (ax_1 = cy_1))$. — *Прим. перев.*

Далее, определение (1) не зависит от выбора представителей для a/b. Действительно, если $a/b = a'/b'$, то найдутся элементы x', y', $z \in G$, такие, что $m' = bx' = dy' = b'z$, и тогда $ax' = a'z$. Но определение (1) не зависит от выбора элемента m, т. е.

$$t = a/b + c/d = (ax + cy)/m = (ax' + cy')/m'.$$

Следовательно, $t = (a'z + cy')m' = a'/b' + c/d$, т. е. то, что мы и хотели показать. Аналогично, если $y_1 \in G$, $x_1 \in R$ таковы, что $n = bx_1 = cy_1$, то положим

(2) $$(a/b)(c/d) = ax_1/dy_1.$$

(Заметим, что $a/b = ax_1/n$ и $c/d = n/dy_1$.) Как и ранее, формула (2) не зависит от выбора элементов x_1 y_1 в равенстве $bx_1 = cy_1$ и также не зависит от выбора представителей для a/b, c/d. Например, если $a/b = a'/b'$, то выберем u, $v \in G$, такие, что $bu = b'v$, и тогда $au = a'v$. Далее, выберем x, $y \in R$, $y \in G$ такими, что

$$n' = bux = cvy.$$

Тогда, поскольку равенство (2) не зависит от выбора $n = bx_1 = cy_1$, получаем

$$t = (a/b)(c/d) = (aux)/(dvy).$$

Однако $au = a'v$ и $bu = b'v$. Отсюда $n' = b'vx = cvy$ и

$$t = a'vx/dvy = (a'/b')(c/d),$$

т. е. то, что мы и хотели показать.

Мы опускаем подробные вычисления, проверяющие аксиомы кольца. После их проведения равенства (1) и (2) показывают, что соответствие $a \mapsto a/1$ является гомоморфным вложением колец $\varphi\colon R \to RG^{-1}$ ($a/1 = ab/b$ для всех $b \in G$). Кроме того, если $a \in G$, то $a/1$ — обратимый элемент кольца RG^{-1} и $(a/1)^{-1} = 1/a$. Наконец, если $a/b \in RG^{-1}$, то $a/b = (a/1)(b/1)^{-1}$. Это показывает, что RG^{-1} — классическое правое кольцо частных подкольца $\operatorname{im}\varphi$. Из этого следует, что кольцо R обладает классическим правым кольцом частных. □

9.2. Упражнения.

9.2.1. Если S — другое классическое кольцо частных кольца R, то $S = \{ab^{-1} \mid a \in R, b \in G\}$. Тогда существует единственный изоморфизм колец $h\colon RG^{-1} \to S$, такой, что $h(a/b) = ab^{-1}$.

9.2.2. Назовем R-модуль M модулем **без кручения,** если из $xa = 0$ для регулярных элементов $a \in R$ и $x \in M$ следует, что $x = 0$. Если M — модуль без кручения и если кольцо R обладает классическим кольцом частных RG^{-1}, то существует RG^{-1}-модуль MG^{-1}, который является левым нулем в категории всех отображений $h\colon M \to N$, где N есть RG^{-1}-модуль и h — мономорфизм

R-модулей, такой, что $N = \{h(x)\, b^{-1} \mid x \in M,\ b \in G\}$. Итак, существуют мономорфизм R-модулей t: $M \to MG^{-1}$ и единственный гомоморфизм RG^{-1}-модулей g: $MG^{-1} \to N$, такие, что $gt = h$.

9.2.3. Доказать лемму 9.3 (без подглядывания).

9.3. Лемма. *Пусть Q — правое кольцо частных кольца R. Тогда*

9.3.1. *Если $b_1, \ldots, b_n$ — регулярные элементы кольца R, то существуют регулярный элемент $c \in R$ и элементы $g_i \in R$, такие, что $b_i^{-1} = g_i c^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$.*

9.3.2. *Если $x_1, \ldots, x_n \in Q$, то существует регулярный элемент $c \in R$, такой, что $x_i c \in R$, $i = 1, \ldots, n$.*

9.3.3. *Если I — правый идеал кольца R, то правый идеал кольца Q, порожденный правым идеалом I, равен IQ и $IQ = \{xc^{-1} \mid x \in I,\ c \in R,\ c$ — регулярный элемент$\}$.*

9.3.4. *Если элемент $d \in R$ регулярен, то dR — существенный правый идеал кольца R.*

Доказательство 9.3.1. Это очевидно для $n = 1$, поскольку $g_1 = b_1$, $c_1 = b_1^2$ годятся для наших целей. Допустим, что утверждение верно для $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Пусть $\overline{g}_i \in R$ и регулярный элемент $\overline{d} \in R$ таковы, что $b_i^{-1} = \overline{g}_i \overline{d}^{-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда существуют g_n и регулярный элемент $d \in R$, такие, что $b_n^{-1}\overline{d} = g_n d^{-1}$. Следовательно, $c = \overline{d}d$ и $g_i = \overline{g}_i d$, $i = 1, \ldots, n-1$, являются требуемыми элементами.

Доказательство 9.3.2. Пусть $x_i = a_i b_i^{-1}$, где $a_i, b_i \in R$. Подберем c, g_i, $i = 1, \ldots, n$, в соответствии с 9.3.1. Тогда $x_i c = a_i b_i^{-1} c = a_i g_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, и c — регулярный элемент кольца R.

Доказательство 9.3.3. Очевидно, что IQ — правый идеал кольца Q, порожденный множеством I, и $IQ \supseteq I_0 = \{xc^{-1} \mid x \in I,\ c \in R,\ c$ — регулярный элемент$\}$. Произвольный элемент $y \in IQ$ имеет вид $y = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, где $y_i \in I$, $x_i \in Q$, $i = 1, \ldots, n$, и n — целое число. В силу 9.3.2 найдется регулярный элемент $c \in R$, такой, что $x_i c = g_i \in R$ для всех i. Тогда $y = xc^{-1}$, где $x = \sum_{1}^{n} y_i g_i \in I$. Итак, как и утверждалось, имеем $IQ = I_0$.

Доказательство утверждения 9.3.4 является следствием условия Ope. □

9.4. Упражнения.

9.4.1. Если R — артиново справа кольцо, то каждый регулярный справа и каждый регулярный слева элементы обратимы в кольце R. Таким образом, любое артиново кольцо является своим собственным кольцом частных.

9.4.2. Если R — коммутативное кольцо или область целостности, то из 9.3.4 вытекает условие Ope. При каких ограничениях на кольцо R это верно? (Автору ответ неизвестен.)

9.4.3. В кольце R левый аннулятор любого нильпотентного идеала является существенным правым идеалом.

Сингулярный идеал и подмодуль

Напомним обозначение: $M \rhd N$ *означает, что N — существенный подмодуль модуля M.* Если M — произвольный R-модуль, то рассмотрим множество

$$\operatorname{sing} M = \{x \in M \mid R \rhd \operatorname{ann}_R x\}.$$

Если $x, y \in M$, $a \in R$, то

$$\operatorname{ann}_R(x-y) \supseteq \operatorname{ann}_R x \cap \operatorname{ann}_R y, \tag{1}$$

$$\operatorname{ann}_R xa = \operatorname{ann}_R(a/\operatorname{ann}_R x)^{1}). \tag{2}$$

В 9.5.1 будет показано, что $\operatorname{ann}_R(a/I)$ — существенный правый идеал кольца R, если I — существенный правый идеал. Следовательно, если $x, y \in \operatorname{sing} M$, то $I = \operatorname{ann}_R x$ — существенный правый идеал. Поэтому из равенства (2) видно, что $xa \in \operatorname{sing} M$ для всех $a \in R$. Кроме того, из (1) ясно, что $x - y \in \operatorname{sing} M$ для всех $x, y \in \operatorname{sing} M$. Поэтому $\operatorname{sing} M$ — подмодуль, называемый **сингулярным** подмодулем кольца R.

Лемма 9.5 принадлежит Джонсону.

9.5. Лемма. *Пусть R — кольцо, M — R-модуль и I — его подмодуль. Тогда*

9.5.1. *Если I — существенный подмодуль модуля M, то $\operatorname{ann}_R(x/I)$ — существенный правый идеал кольца R для любого элемента $x \in M$.*

9.5.2. *Обратно, если $\operatorname{sing} M = 0$, $x \in M$ и $\operatorname{ann}_R(x/I)$ — существенный правый идеал, то I — существенный подмодуль модуля $I + xR$.*

Доказательство 9.5.1. Если A — ненулевой правый идеал, то из $xA = 0$ следует, что $0 \neq A \subseteq \operatorname{ann}_R(x/I) \cap A$, а из $xA \neq 0$ следует, что $I \cap xA \neq 0$. Выбирая $y = xa \neq 0$ из этого пересечения, получаем, что $a \in \operatorname{ann}_R(x/I) \cap A$. Следовательно, во всех случаях $\operatorname{ann}_R(x/I) \cap A \neq 0$, что и доказывает 9.5.1.

[1]) В этом разделе автор систематически использует введенное ранее (см. стр. 188) обозначение $\operatorname{ann}_R(X/N)$ для $\{r \in R \mid Xr \subseteq N\}$, где $X \subseteq M_R$ и N — подмодуль в M_R. — *Прим. перев.*

Доказательство 9.5.2. Если $y + xa \in I + xR$, $y \in I$, $a \in R$, то мы хотели бы показать, что $(y + xa)\,R \cap I \neq 0$. Но

$$\operatorname{ann}_R((y + xa)/I) = \operatorname{ann}_R(xa/I) = \operatorname{ann}_R(a/B),$$

где $B = \operatorname{ann}_R(x/I)$. Так как в силу предположения B — существенный правый идеал, то из 9.5.1 следует, что $\operatorname{ann}_R((y + xa)/I)$ — существенный правый идеал. Но тогда из равенства $\operatorname{sing} M = 0$ следует, что $(y + xa)\cdot\operatorname{ann}_R((y + xa)/I) \neq 0$ и этот подмодуль содержится в $I \cap (y + xa)\,R$. □

9.6. Упражнения.

9.6.1. $\operatorname{sing} M$ — вполне инвариантный подмодуль.

9.6.2. $\operatorname{sing} R$ — идеал кольца R.

Идеал $\operatorname{sing} R$ называется (правым) **сингулярным идеалом** кольца R.

Равенство $(ra)^{n+1} = r\,(ar)^n\,a$ для элементов a, $r \in R$ показывает, что Ra — левый ниль-идеал, если aR — правый ниль-идеал. Таким образом, кольцо R не содержит ненулевых правых ниль-идеалов тогда и только тогда, когда оно не содержит ненулевых левых ниль-идеалов.

9.7. Лемма. *Пусть S — кольцо, удовлетворяющее условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторных идеалов. Если S содержит ненулевой правый или левый ниль-идеал A, то S содержит ненулевой нильпотентный идеал.*

Доказательство (Утуми [63а]). В силу предыдущего замечания можно считать, что A — ненулевой левый ниль-идеал. Пусть $0 \neq a \in A$ — такой элемент, что $a^\perp$ — максимальный элемент множества $\{x^\perp \mid 0 \neq x \in A\}$. Если $ua \neq 0$ для некоторого $u \in S$, то $(ua)^n = 0$ и $(ua)^{n-1} \neq 0$ для некоторого $n > 1$. Так как $[(ua)^{n-1}]^\perp \supseteq a^\perp$ и $ua \in A$, то $[(ua)^{n-1}]^\perp = a^\perp$. Из включения $ua \in [(ua)^{n-1}]^\perp$ следует, что $aua = 0$. Таким образом, $aSa = 0$. Тогда $(a)^3 = 0$, где (a) — идеал кольца S, порожденный элементом a. □

9.8. Лемма. *Пусть R — кольцо, удовлетворяющее условиям максимальности для правых аннуляторных идеалов и прямых сумм правых идеалов. Если $a \in R$, то существует такое $n > 0$, что $a^nR + (a^n)^\perp$ — существенный правый идеал.*

Доказательство. Существует такое $n \geqslant 1$, что $(a^n)^\perp = (a^{n+1})^\perp$. Тогда $a^nR \cap (a^n)^\perp = 0$. Пусть I — правый идеал, и допустим, что

$$I \cap (a^nR + (a^n)^\perp) = 0.$$

Можно показать, что сумма $I + a^nI + a^{2n}I + \ldots$ прямая. Поскольку выполнено условие максимальности для прямых сумм, делаем вывод, что $I = 0$. □

9.9. Теорема (Голди [58], [60], Лезье — Круазо [59]). *Кольцо R обладает классически полупростым правым кольцом частных тогда и только тогда, когда оно полупервично и удовлетворяет условиям максимальности для правых аннуляторных идеалов и для прямых сумм правых идеалов.*

Доказательство (Голди [69]). Допустим сначала, что R — полупервичное кольцо, удовлетворяющее сформулированным выше условиям максимальности. Докажем, что каждый существенный правый идеал E содержит регулярный элемент. Заметим, что в силу леммы 9.7 E не является ниль-идеалом. Тогда в нем найдется элемент $a_1 \neq 0$, такой, что $a_1^\perp = (a_1^2)^\perp$, причем либо $a_1^\perp \cap E = 0$, либо $a_1^\perp \cap E \neq 0$. В последнем случае выберем элемент $a_2 \in a_1^\perp \cap E$, удовлетворяющий условиям $a_2 \neq 0$ и $a_2^\perp = (a_2^2)^\perp$. Если $a_1^\perp \cap a_2^\perp \cap E \neq 0$, то продолжим процесс.

Через некоторое число шагов получаем прямую сумму

$$a_1R \oplus \ldots \oplus a_kR \oplus (a_1^\perp \cap \ldots \cap a_k^\perp \cap E),$$

где $a_k \in a_1^\perp \cap \ldots \cap a_{k-1}^\perp \cap E$ и $a_k \neq 0$, $a_k^\perp = (a_k^2)^\perp$.

Этот процесс должен остановиться, поскольку кольцо R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов. Пусть это произошло на k-м шаге. Тогда

$$a_1^\perp \cap \ldots \cap a_k^\perp \cap E = 0 = a_1^\perp \cap \ldots \cap a_k^\perp.$$

Следовательно,

$$(a_1^2 + \ldots + a_k^2)^\perp = a_1^\perp \cap \ldots \cap a_k^\perp = 0.$$

Пусть Z — сингулярный идеал кольца R и $z \in Z$. Тогда $z^nR \oplus (z^n)^\perp$ — существенный правый идеал для некоторого $n > 0$ (см. лемму 9.8), но $(z^n)^\perp$ — также существенный правый идеал. Следовательно, $z^n R = 0$, т. е. Z — ниль-идеал и, таким образом, $Z = 0$. Положим $c = a_1^2 + \ldots + a_k^2 \in E$. Так как $c^\perp = 0$, то в силу леммы 9.8 cR — существенный правый идеал. Следовательно, ${}^\perp c \subset Z$. Поэтому ${}^\perp c = 0$, т. е. c — регулярный элемент. Это доказывает существование регулярных элементов в E.

Допустим, что a, $d \in R$ и d — регулярный элемент. Положим

$$E = \{x \in R \mid ax \in dR\}.$$

Тогда dR — существенный правый идеал. Следовательно, E — существенный правый идеал. Поэтому E содержит регулярный элемент d_1. Выполнено правое условие Оре, и, следовательно, кольцо R обладает правым кольцом частных Q.

Далее, предположим, что F — существенный правый идеал кольца Q. Тогда $F \cap R$ — существенный правый идеал кольца R. Но правый идеал $F \cap R$ содержит регулярный элемент, который обратим в кольце Q. Следовательно, $F = Q$. Пусть J, K — правые идеалы кольца Q, такие, что $J \cap K = 0$ и $J \oplus K$ — существенный правый идеал (надо использовать лемму Цорна). Тогда $J \oplus K = Q$. Итак, модуль Q_Q полупрост, т. е. Q — классически полупростое кольцо.

Обратно, пусть кольцо R обладает классически полупростым правым кольцом частных Q. Тогда правый идеал E кольца R является существенным в том и только том случае, когда $EQ = Q$. Действительно, пусть I — ненулевой правый идеал кольца Q. Тогда $I \cap R \neq 0$ и $I \cap R \cap E \neq 0$, если E — существенный правый идеал кольца R. Следовательно, $I \cap EQ \neq 0$, а это означает, что EQ — существенный правый идеал кольца Q. Так как Q_Q — прямая сумма простых модулей, то $EQ = Q$. С другой стороны, если $EQ = Q$ и I — ненулевой правый идеал кольца R, то очевидно, что $IQ \cap EQ \neq 0$ и, следовательно, $I \cap E \neq 0$. Поэтому E — существенный правый идеал кольца R. Эти условия равносильны тому, что правый идеал E содержит регулярный элемент. Если $1 \in EQ$, то $1 = ec^{-1}$, где $e \in E$, $c \in R$ и c — регулярный элемент. Напротив, если правый идеал E содержит регулярный элемент, то $EQ = Q$ и E — существенный правый идеал кольца R.

Можно теперь утверждать, что R — полупервичное кольцо, поскольку если N — нильпотентный идеал кольца R, то в силу 9.4.3 $^{\perp}N$ — существенный правый идеал и, следовательно, содержит регулярный элемент. Итак, $N = 0$.

Пусть S — прямая сумма ненулевых правых идеалов $\{I_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ кольца R, являющаяся существенным правым идеалом. Тогда в S найдется регулярный элемент c, представимый в виде конечной суммы

$$c = x_1 + \ldots + x_n,\ x_i \in I_{\alpha_i}.$$

Далее, cR — существенный правый идеал, он лежит в некоторой сумме (см. лемму 9.8) $I_{\alpha_i} + \ldots + I_{\alpha_n}$. Поэтому множество Λ содержит лишь индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и кольцо R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов.

Наконец, поскольку R — подкольцо нётерова кольца, то в силу 7.23 R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов. □

9.10. Следствие. *Первичное кольцо R обладает простым артиновым правым кольцом частных тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и для правых аннуляторных идеалов.* □

Используя терминологию, введенную в гл. 7, можно сказать, что R является **правым кольцом Голди**, если оно удовлетворяет условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и для правых аннуляторных идеалов. Таким образом, в силу 9.9 и 9.10 кольцо R обладает (простым) классически полупростым правым кольцом частных тогда и только тогда, когда R — (первичное) полупервичное правое кольцо Голди.

Антисингулярные кольца

Модуль M называется **антисингулярным**, если $\operatorname{sing} M = 0$. Кольцо R называется **антисингулярным справа**, если $\operatorname{sing} R_R = 0$.

9.11. Лемма. *Пусть R — антисингулярное справа кольцо, A и B — правые аннуляторы и $A \supseteq B$.*

9.11.1. *Если B — существенный подмодуль модуля A, то $B = A$.*

9.11.2. *Если $x, y \in R$, xR и yR — существенные правые идеалы, то yxR — существенный правый идеал.*

Доказательство утверждения 9.11.1. Если $x \in A$, то из леммы 9.5 следует, что $\operatorname{ann}_R(x/B)$ — существенный правый идеал кольца R. Так как $(^{\perp}Bx)\operatorname{ann}_R(x/B) = 0$, то из антисингулярности кольца R следует, что $^{\perp}Bx = 0$. Откуда $x \in B = (^{\perp}B)^{\perp}$.

Доказательство 9.11.2. Так как $xR \subseteq \operatorname{ann}_R(y/yxR)$, то $\operatorname{ann}_R(y/yxR)$ — существенный правый идеал, и по лемме 9.5.2 yxR — существенный подмодуль в yR и, следовательно, в R.

9.12 Лемма.

9.12.1. *Если R — полупервичное кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, то кольцо R антисингулярно справа.*

9.12.2. *Любое антисингулярное справа кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для прямых сумм правых идеалов, удовлетворяет также условиям максимальности и минимальности для правых аннуляторных идеалов.*

Доказательство 9.12.1. (Непрямое доказательство.) Если $b \in \operatorname{sing} R$ и $b \neq 0$, то $b^{\perp} \neq R$, и, следовательно, $^{\perp}(b^{\perp})$ — ненулевой левый аннуляторный идеал. Но кольцо R удовлетворяет условию минимальности для левых аннуляторных идеалов. Поэтому можно выбрать минимальный левый аннуляторный идеал $A \subseteq {}^{\perp}(b^{\perp})$. Так как кольцо R полупервично, то $A^2 \neq 0$ и $Aa \neq 0$ для некоторого элемента $a \in A$. Поскольку $b^{\perp}$ — существенный правый идеал, то $b^{\perp} \cap aR \neq 0$, например $ax \in b^{\perp} \cap aR$, где $x \in R$, $ax \neq 0$. Так как $ax \in b^{\perp}$, то $^{\perp}(b^{\perp})\, ax = 0$. Отсюда $Aax = 0$

и $0 \neq Aa \subseteq {}^{\perp}x \cap A$. Из минимальности левого аннуляторного идеала A следует, что ${}^{\perp}x \cap A = A$ и $Ax = 0$, но это противоречит тому, что $ax \neq 0$.

Доказательство 9.12.2. Если A и B — правые аннуляторные идеалы $B \subset A$ и $B \neq A$, то в силу леммы 9.11.1 A содержит прямую сумму $B \oplus C$, где C — некоторый ненулевой правый идеал. Этим способом из любой бесконечной цепи правых аннуляторных идеалов можно извлечь бесконечную прямую сумму правых идеалов. □

9.13. Следствие. *Следующие три свойства кольца R равносильны:*

(a) *R — полупервичное кольцо с условиями максимальности для прямых сумм правых идеалов и правых аннуляторных идеалов.*

(b) *Кольцо R обладает классически полупростым правым кольцом частных.*

(c) *R — антисингулярное справа полупервичное кольцо с условием максимальности для прямых сумм правых идеалов.*

Доказательство. По теореме 9.9 (a) $\Leftrightarrow$ (b). По лемме 9.12 (a) $\Leftrightarrow$ (c).

9.14. Упражнения.

9.14.1. Пусть M — модуль. **Дополнительным** подмодулем называется подмодуль N', для которого существует подмодуль N, такой, что N' — максимальный элемент в множестве подмодулей A, для которых $A \cap N = 0$. В этом случае N' называется **относительным дополнением подмодуля** N в M.

(a) Показать, что сумма $N + N'$ подмодуля N и его относительного дополнения N' всегда является существенным подмодулем.

(b) Если A и B — независимые подмодули, то показать, используя лемму Цорна, что всегда существует относительное дополнение A' подмодуля A, содержащее подмодуль B. Если A'' — относительное дополнение подмодуля A', содержащее подмодуль A, то $A'' \rhd A$. Подмодуль C называется **замкнутым** [1]), если он не обладает существенными расширениями в M, отличными от C.

(c) Показать, что замкнутый подмодуль является дополнительным, и наоборот.

(d) Минимальный дополнительный подмодуль (если он существует) является однородным.

9.14.2 (Шок [72b]). Если правая размерность Голди кольца R конечна, то она совпадает с такой же размерностью кольца многочленов $R[x]$.

9.14.3. Пусть R — порядок в классически полупростом кольце S.

[1]) Не путать с одноименным понятием из гл. 8 (перед 8.24).— *Прим. перев.*

(a) Если B — правый идеал кольца R, то BS — инъективная оболочка модуля B_R. Если A — произвольный R-подмодуль модуля S, такой, что A — инъективная оболочка модуля B, то $A = BS$, т. е. B обладает *единственной* инъективной оболочкой в S.

(b) Отображение сокращения $A \mapsto A \cap R$ является изоморфизмом структуры всех правых идеалов кольца S на структуру дополнительных (замкнутых) правых идеалов кольца R.

(c) Правый идеал B кольца R является однородным тогда и только тогда, когда BS — минимальный правый идеал кольца S. В этом случае существует идемпотент $e \in S$, такой, что $BS = eS$. Кроме того, $K = \operatorname{End} B_R$ — правая область Ope, тело частных которой изоморфно телу eSe (ср. 7.21 и далее).

Теорема Левицкого

(Левый, правый) идеал N называется **ниль-идеалом**, если каждый элемент идеала N нильпотентен. В 1930 г. Кёте поставил вопрос: обязан ли ниль-идеал нётерова справа кольца быть нильпотентным? Левицкий решил эту проблему положительно.

9.15. Теорема (Левицкий [45]). *Если S — нётерово справа кольцо, то каждый правый или левый ниль-идеал I кольца S нильпотентен.*

Доказательство. Пусть N — максимальный нильпотентный идеал кольца S. Тогда факторкольцо S/N не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Если бы $I \not\subseteq N$, то $(I + N)/N$ был бы ненулевым односторонним ниль-идеалом кольца S/N. Но кольцо S/N нётерово справа. Поэтому в силу леммы 9.7 в $(I + N)/N$ содержался бы нильпотентный идеал. Это противоречие показывает, что $I \subseteq N$, т. е. I — нильпотентный идеал. □

Упражнения к гл. 9

***1** (Джонсон). Если R — антисингулярное справа кольцо, то инъективная оболочка $\hat{R}$ правого R-модуля R_R канонически изоморфна (как кольцо) кольцу $\operatorname{End} \hat{R}_R$, при этом кольцевые операции на $\hat{R}$ индуцированы модульными операциями правого R-модуля $\hat{R}$.

(a) (Джонсон — Уонг) Кольцо $\hat{R}$ является самоинъективным справа регулярным в смысле Неймана кольцом, а R канонически вкладывается как подкольцо в $\hat{R}$.

(b) (Джонсон) Отображение сокращения $I \mapsto I \cap R$ индуцирует изоморфизм структур $C_r(\hat{R})$ и $C_r(R)$ замкнутых (дополнительных) правых идеалов колец $\hat{R}$ и R соответственно.

(c) Показать, что $\hat{R}$ — классически полупростое кольцо тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет условию максимальности (соотв. минимальности) для дополнительных правых идеалов. При этих условиях каждый регулярный элемент $d \in R$ порождает существенный правый идеал. (Ср. 9.4.2.)

(d) Если R — полупервичное антисингулярное справа кольцо с условием максимальности для дополнительных правых идеалов, то $\hat{R}$ — классическое правое кольцо частных кольца R. Обратно, если кольцо R обладает классически полупростым правым кольцом частных Q, то Q — инъективная оболочка модуля R в категории mod-R.

(e) Если R — антисингулярное справа кольцо, то кольцо $\hat{R}$ изоморфно произведению колец линейных преобразований правых векторных пространств тогда и только тогда, когда каждый дополнительный правый идеал кольца R содержит минимальный дополнительный правый идеал.

(f) (Фейс — Утуми [65]) Если I — любой правый идеал кольца R, то $\hat{I} = eS$ для некоторого идемпотента $e = e^2 \in S = \hat{R}$ и eSe — самоинъективное справа регулярное кольцо. Кроме того,

$$K = \{x \in eSe \mid xI \subseteq I\} \approx \operatorname{End} I_R$$

— подкольцо кольца eSe, канонически изоморфное кольцу $\operatorname{End} I_R$, и eSe — инъективная оболочка модуля K в категории mod-K. Таким образом, так как $eSe \approx \operatorname{End} eS_S$ (канонически) и $eS = e\hat{R}$ является инъективной оболочкой $\hat{I}$ модуля I в категории mod-R, то

$$\widehat{\operatorname{End} I_R} = \operatorname{End} \hat{I}_{\hat{R}} .$$

(g) (Фейс — Утуми, там же) В условиях и обозначениях п. (f) показать, что если либо $\hat{R}$ — существенное расширение модуля R в категории R-mod, либо e — примитивный идемпотент (т. е. eS — минимальный правый идеал кольца $S = \hat{R}$, или, что то же самое, I — однородный правый идеал кольца R) и если $Q = eSe \cap R \neq \neq 0$, то $eSe = \hat{Q}$.

***2.** Пусть R — ниль-предкольцо. Тогда предкольцо R нильпотентно в каждом из следующих случаев:

(a) (Херстейн — Смолл, Левицкий) Предкольцо R удовлетворяет условию максимальности для левых и правых аннуляторных идеалов.

(b) (Ланский) Предкольцо R удовлетворяет условиям максимальности для правых аннуляторных идеалов и для прямых сумм правых идеалов.

3. Кольцо R обладает правым кольцом частных S тогда и только тогда, когда для каждого правого R-модуля M множество периодических элементов (т. е. множество элементов модуля M, аннулируемых некоторым регулярным элементом кольца R) является подмодулем модуля M (Жантиль — Леви). В этом случае модуль M является R-подмодулем некоторого S-модуля тогда и только тогда, когда модуль M без кручения, и в этом случае $MS \approx M \underset{R}{\otimes} S$ при отображении, переводящем ms в $m \otimes s$. Кроме того, если к тому же и N — R-подмодуль некоторого S-модуля, то любой R-гомоморфизм $f\colon M \to N$ обладает единственным продолжением до S-гомоморфизма $\bar{f}\colon MS \to NS$. Таким образом, если $N \underset{R}{\otimes} S$ — инъективный объект категории mod-S, то $N \underset{R}{\otimes} S$ — инъективный объект категории mod-R, являющийся инъективной оболочкой R-модуля N. В частности, S — инъективная оболочка модуля R в категории mod-R, если S — самоинъективное справа кольцо (см. Леви [63], а также 6.28).

4 (Леви [63]). Наследственное справа кольцо R с классически полупростым правым кольцом частных нётерово справа. Кроме того, кольцо R является конечным произведением наследственных первичных колец $\{R_i\}_{i=1}^n$, где R_i — минимальный аннуляторный идеал.

5 (Леви [63]). Если каждый конечно порожденный правый R-модуль без кручения вложим в свободный R-модуль, то кольцо R называется **правым TF-кольцом**. Если R обладает двусторонним кольцом частных S, а R — правое TF-кольцо, то S — правое TF-кольцо. Полупервичное кольцо R с правым кольцом частных S является правым TF-кольцом тогда и только тогда, когда S — классически полупростое кольцо и левое кольцо частных кольца R. (Кольцо частных S — правое TF-кольцо тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный модуль вложим в свободный модуль. Правое и левое TF-кольцо S является QF-кольцом. См. Фейс — Уокер [67], а также Фейс [73/74b].)

6. Пусть R — полупервичное кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для прямых сумм правых аннуляторных идеалов, и A — правый идеал. Если $a \in A$ и $a^\perp$ — минимальный элемент множества $\{x^\perp \mid x \in A\}$, то aR — существенный подмодуль правого идеала A.

7. Пусть R — полупервичное кольцо.

(a) Если кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторных идеалов, $a \in R$ и aR — существенный правый идеал, то a — регулярный элемент, т. е. $a^\perp = {}^\perp a = 0$.

(b) Если кольцо R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов, $a \in R$ и $a^{\perp} = 0$, то aR — существенный правый идеал.

(c) Если кольцо R удовлетворяет условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и для правых аннуляторных идеалов, то каждый существенный правый идеал содержит регулярный элемент.

8. Доказать, что в классе полупервичных правых колец Голди свойство быть правым кольцом Оре является инвариантным в смысле Мориты.

9. Если R — полупервичное правое кольцо Голди, то этим же свойством обладает и кольцо eRe, где e — любой ненулевой идемпотент. (Ср. доказательство утверждения 7.21A.)

Замечания к гл. 9

До работы Голди фундаментальные и весьма общие теоремы о кольцах частных и сопутствующие теоремы вложения были получены Джонсоном [51].

С публикацией теорем Голди математики увидели, как теоремы Джонсона могут быть применены для получения новых доказательств. Автор отразил эту точку зрения в лекциях, прочитанных в Пенн Стайт в 1961 и в Ратгерсе в 1962—1963 гг. и опубликованных в 1967 г. Ряд других подходов перечисляется далее: Габриель [65], Лезьё — Круазо [59], Фрейд [64], Джонсон [65], Прочези — Херстейн (в дополнении B к книге Джекобсона [64]), Прочези и Смолл [65]. Доказательства Зельмановича [69] и Голди [69] (представленные здесь) содержат элементы рассуждений всех упомянутых подходов.

В 1960 г. Голди дал доказательство теоремы Левицкого, основанное на его структурной теории нётеровых полупервичных колец. Далее Херстейн предложил упрощение этого доказательства. Доказательство Утуми [63] (воспроизведенное здесь) — вероятно, последнее слово на эту тему. Мораль этой истории: нелегко найти оптимальное доказательство [1]) — предположения часто оказываются более сильными, чем это необходимо. Действительно, Левицкий заметил нужные объекты, именно аннуляторные идеалы, а теорема Левицкого [64] (подготовлена к печати Амицуром) утверждает, что любой ниль-идеал нильпотентен, если кольцо удовлетворяет условиям максимальности для правых и левых аннуляторных идеалов. Этот результат независимо был доказан Херстейном и Смоллом [64]. (См. упр. 2, где сформулирована теорема Ланского; см. также другие теоремы о ниль и нильпотентности Фиттинга и Шока в гл. 17 и 18.)

[1]) И формулировку утверждения.— *Прим. перев.*

В. П. Елизаров [69] опубликовал обзор о кольцах частных, включающий результаты о том, когда кольца частных артиновы (совершенные или квазифробениусовы), см., например, статьи Джанса [67], Ятегаонкара [70], Гупты [68], Гупты и Саха [67], Мьюборна и Уинтона [69], Робсона [67a], Смолла [66b] и Талинтайра [63], [66]. Кольца с полулокальными правыми кольцами частных будут обсуждаться в главах 10 и 18.

В другом направлении отметим исследования Смолла [66a], доказавшего, что нётеровы справа и слева наследственные справа и слева кольца обладают правыми кольцами частных (см. ссылки на примыкающие статьи о наследственных нётеровых кольцах), и Чаттерса [72], установившего, что эти кольца являются прямыми суммами артиновых и первичных колец. (Ср. Фейс [73/74a].)

Остается нерешенным вопрос, является ли инвариантным в смысле Мориты свойство быть правым кольцом Оре? Если да, то будут ли подобные правые кольца Оре иметь подобные правые кольца частных? (Ср. замечания о кольцах частных, стр. 290.)

Ссылки

Айзенбуд — Гриффитс [71], Айзенбуд — Робсон [70], Вебер [70], Габриель [62], Габриель — Цисман [71], Голди [58], [60], [69], Гупта [68], Гупта — Саха [67], Джанс [67], Джекобсон [64], Джонсон [51a], [51b], Джонсон — Уонг [59], Елизаров [69], Зельманович [69], Кэртис — Райнер [69], Ланский [69], Леви [63], Левицкий [45], [64], Лезьё — Круазо [59], Михлер [69d], Мьюборн — Уинтон [69], Оре [31], Прочези [63], Прочези — Смолл [65], Робсон [67a], [68], Смолл [66a], [66b], [68], Талинтайр [63], [66], Утуми [63], Фейс [67a], Фейс — Утуми [65b], Фрейд [64], Херстейн — Смолл [64], Чаттерс [70], [72], Шок [71b], Ятегаонкар [70], [72].

Глава 10

ПОРЯДКИ В ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ МАТРИЦ

Кольцо R называется полулокальным, если $R/\operatorname{rad} R$ — классически полупростое кольцо. [Так как $R/\operatorname{rad} R$ — полупервичное кольцо, то по теореме Веддербёрна — Артина 8.8 это равносильно тому, что $R/\operatorname{rad} R$ — артиново справа (или слева).] Основная теорема этой главы описывает правые порядки в полулокальных кольцах матриц D_n. Правый порядок R кольца S является предподкольцом, таким, что

$$S = \{ac^{-1} \mid a, c \in R,\ c \text{ — регулярный элемент}\}.$$

Из теоремы Фейса — Утуми [65] следует, что каждый порядок R в кольце матриц $S = D_n$ содержит порядок вида F_n, где F — подкольцо централизатора D некоторого множества $(n \times n)$-матричных единиц M. Кроме того, если D_n — полулокальное кольцо частных, то в силу 10.15 и 10.19 F является правым порядком в D и

$$D_n = \{af^{-1} \mid a \in F_n,\ f \in F\}.$$

Таким образом, в качестве «знаменателей» могут быть выбраны скаляры $f \in F$. (Ср. 10.10.) Если R — также и левый порядок, то это верно независимо от выбора множества M.

В качестве следствия получаем теорему Голди, утверждающую, что каждое первичное кольцо R главных правых идеалов (являющееся по теореме 9.10 правым порядком в кольце матриц D_n над телом D) изоморфно кольцу матриц F_n над правой областью Оре (с правым телом частных D). В этом случае F — наследственное справа кольцо, которое может не быть кольцом главных правых идеалов.

В последней части этой главы описываются максимальные правые порядки в полулокальных кольцах частных D_n (в духе Фейса [64]) как кольца эндоморфизмов модулей без кручения над правыми порядками в D. (Это развивает обобщение Робсона [67] в случае, когда D — артиново справа кольцо.)

Характеризация правых порядков в полулокальных кольцах приводится в гл. 18, особенно утверждение 18.47.

Для удобства мы повторяем некоторые понятия из гл. 4 (перед 4.37) и гл. 7 (перед 7.21).

10.1. Определения (Джекобсон [42]). Пусть R_1 и R_2 — правые порядки в кольце частных Q. Тогда

(1) они называются **эквивалентными**, в обозначениях $R_1 \overset{Q}{\sim} R_2$, если существуют регулярные элементы a_1, b_1, a_2, $b_2 \in Q$, такие, что $a_1R_1b_1 \subseteq R_2$ и $a_2R_2b_2 \subseteq R_1$;

(2) они называются **эквивалентными справа**, в обозначениях $R_1 \overset{r}{\sim} R_2$, если существуют регулярные элементы a_1, $a_2 \in Q$, такие, что $a_1R_1 \subseteq R_2$, $a_2R_2 \subseteq R_1$;

(3) они называются **эквивалентными слева**, в обозначениях $R_1 \overset{l}{\sim} R_2$, если существуют регулярные элементы b_1, $b_2 \in Q$, такие, что $R_1b_1 \subseteq R_2$, $R_2b_2 \subseteq R_1$.

Эти отношения являются отношениями эквивалентности. Кроме того, $R_1 \overset{r}{\sim} R_2 \Rightarrow R_1 \overset{Q}{\sim} R_2$ и $R_1 \overset{l}{\sim} R_2 \Rightarrow R_1 \overset{Q}{\sim} R_2$.

10.2. Лемма (Джекобсон). *Пусть R — правый порядок в кольце частных Q, и S — предподкольцо* [1]) *кольца Q.*

10.2.1. *Если существуют регулярные элементы a, b, c, $d \in Q$, такие, что $aRb \subseteq S$, $cSd \subseteq R$, то S — правый порядок в Q и $R \overset{Q}{\sim} S$.*

10.2.2. *Если существуют регулярные элементы a, $c \in Q$, такие, что $aR \subseteq S$, $cS \subseteq R$, то S является правым порядком в Q и $R \overset{r}{\sim} S$. Аналогичное утверждение имеет место для левой эквивалентности.*

Доказательство утверждения 10.21. Если $q \in Q$, то

$$a^{-1}qa = xc^{-1}$$

для некоторых элементов x, $c \in R$. Тогда

$$q = (axb)\,(acb)^{-1}.$$

Поэтому S — правый порядок кольца Q, эквивалентный правому порядку R.

Доказательство утверждения 10.2.2 получается при $b = 1$. □

10.3. Определение. Q **— правое кольцо частных** кольца R. Это понятие может использоваться и тогда, когда R — предподкольцо кольца Q, такое, что

(Q1) R содержит регулярные элементы.

(Q2) Каждый регулярный элемент кольца R обратим в кольце Q.

(Q3) Если $q \in Q$, то $q = xc^{-1}$, где x, $c \in R$ и c — регулярный элемент.

Если S — правое кольцо частных кольца R, то R — правый порядок кольца S. Обратное верно, если S — артиново справа кольцо (см. 10.7).

[1]) Имеется в виду подкольцо, не обязательно имеющее единицу, даже отличную от единицы самого кольца.— *Прим. перев.*

10.4. Предложение. *Предкольцо R обладает правым кольцом частных Q тогда и только тогда, когда R содержит регулярный элемент и выполнено правое условие Оре, а именно для каждой пары (a, c), где $a, c \in R$ и c — регулярный элемент, существует пара (a_1, c_1) элементов кольца R, где c_1 — регулярный элемент, такая, что $ac_1 = ca_1$.*

Доказательство. Ср. 9.1.

10.5. Предложение. *Любые два правых кольца частных кольца R изоморфны при отображении, которое индуцировано тождественным отображением 1_R.*

Доказательство. Пусть D и Q — два кольца частных кольца R, и $x \cdot y$ — операция в Q. Далее, из условия Оре

$$ac^{-1} = bd^{-1} \Leftrightarrow ad_1 = bc_1,$$

где $d_1, c_1 \in R$, c_1 — регулярный элемент, причем $d^{-1}c = c_1 d_1^{-1}$. Это доказывает, что

$$ac^{-1} = bd^{-1} \text{ в } D \Leftrightarrow a \cdot c^{-1} = b \cdot d^{-1} \text{ в } Q$$

и что соответствие $ac^{-1} \mapsto a \cdot c^{-1}$ дает нам искомый изоморфизм. □

Кольцо называется **регулярным** (в смысле Неймана), если каждый главный правый идеал порождается идемпотентом, а тогда и каждый главный левый идеал порождается идемпотентом (см. 11.24).

Кольцо R называется **конечным по Дедекинду**, если в R имеет место импликация $xy = 1 \Rightarrow yx = 1$.

10.6. Упражнения.

10.6.1. Следующие условия эквивалентны:

(a) Кольцо R классически полупросто.

(b) Кольцо R регулярно и нётерово справа.

(c) Кольцо R регулярно и артиново справа.

(d) Кольцо R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов и $\operatorname{rad} R = 0$.

10.6.2. Любое полулокальное кольцо конечно по Дедекинду.

10.6.3. Кольцо всех линейных преобразований $L = \operatorname{End}_D V$ левого векторного пространства V над телом D является регулярным самоинъективным слева кольцом. Кроме того, кольцо L конечно по Дедекинду тогда и только тогда, когда пространство V конечномерно.

10.6.4. Произведение регулярных колец регулярно. Кольцо матриц D_n над регулярным кольцом D регулярно.

*10.6.5 (Утуми [65]). Каждое самоинъективное справа и слева кольцо R конечно по Дедекинду (ср. гл. 19).

*10.6.6 (Роос [68]). Самоинъективное слева регулярное кольцо R конечно по Дедекинду тогда и только тогда, когда кольцо R самоинъективно справа.

10.7. Определение и предложение.

10.7.1. *Кольцо S называется **кольцом частных**, если S удовлетворяет следующим равносильным условиям:*

(a) *S — правое кольцо частных кольца S.*

(b) *S — правое кольцо частных некоторого предкольца R.*

(c) *Каждый регулярный элемент кольца S обратим в S.*

(d) *S — левое кольцо частных кольца S.*

В этом случае (см. п. (b)) *S называется **правым кольцом частных кольца** R.*

10.7.2. *Кольцо S является кольцом частных, если оно удовлетворяет любому из условий:*

(1) *Кольцо S удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов вида $x^n S$, где x — регулярный элемент.*

(2) *Кольцо S самоинъективно справа и конечно по Дедекинду.*

(3) *S — регулярное кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность условий (a), (c) и (d) очевидна, а поэтому верна импликация (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть выполнено условие (b). Если $q = xc^{-1}$ — регулярный элемент кольца Q, где $x, c \in R$, то x — регулярный элемент кольца R, и поэтому $q^{-1} = cx^{-1}$ — обратимый элемент кольца Q. Итак, (b) $\Rightarrow$ (c).

(1) Если $x^{n+1}S = x^n S$, то $x^n = x^{n+1}q$, где $q \in S$. Тогда $x^n(1 - xq) = 0$. Из регулярности (даже регулярности справа) элемента x следует, что $(1 - xq) = 0$. Тогда $x(1 - qx) = 0$. Поэтому $qx = 1 = xq$ и x — обратимый элемент, а q — его обратный. Это доказывает (1) $\Rightarrow$ (c).

(2) Если S_S — инъективный модуль и x — регулярный (справа) элемент, то $yx = 1$ для некоторого $y \in S$ [1]). Тогда из (2) следует, что $xy = 1$. Следовательно, S — кольцо частных.

(3) Если $x \in S$, то $xS = eS$ для $e = e^2 \in S$. Поэтому $(1 - e)x = 0$. Из регулярности элемента x следует, что $e = 1$, т. е. $xS = S$. Таким образом, (3) $\Rightarrow$ (1), и поэтому S — кольцо частных. □

10.8. Упражнение. Если кольцо D удовлетворяет условиям 10.7.2 (1), (2) или (3), то этим же условиям удовлетворяет и кольцо матриц D_n.

10.9. Предложение. *Рассмотрим следующие условия на элемент x правого порядка R кольца частных S:*

(a) *x — регулярный справа элемент кольца R.*

(b) *x — регулярный справа элемент кольца S.*

[1]) Рассмотреть вложение $0 \to xS \to S$ и изоморфизм $f\colon xS \to S$, где $f(xs) = s$. Если $\bar{f}\colon S \to S'$ — его продолжение, то положим $y = \bar{f}(1)$. — *Прим. перев.*

(c) x — *регулярный элемент кольца* R.
(d) x — *регулярный элемент кольца* S.
(e) x — *обратимый элемент кольца* S.
Тогда

$$(e) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (a).$$

Таким образом, условия (a) — (e) *эквивалентны тогда и только тогда, когда* (b) $\Leftrightarrow$ (d) (*например, если* S *удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов или если кольцо* S *конечно по Дедекинду и самоинъективно слева*). *В этом случае* S *является правым кольцом частных кольца* R.

Доказательство. Импликации (e) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) и (b) $\Rightarrow$ (a) очевидны. Для доказательства (a) $\Rightarrow$ (b) пусть $xy = 0$, где $y \in S$. Тогда $yc = a \in R$ для некоторого регулярного элемента c кольца R и $xa = 0$. Поэтому из (a) следует, что $a = yc = 0$ и $y = 0$. Это доказывает первую цепочку импликаций. Если (b) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (d), то (a) $\Rightarrow$ (e), и цикл импликаций замыкается. Если условия (1) или (2) предложения 10.7.2 выполнены, то из (b) следует (d). □

10.10. Предложение. *Пусть* F — *предподкольцо кольца* D. *Тогда каждый элемент кольца матриц* D_n *имеет вид*

$$fc^{-1},$$

где $f \in F_n$, $c \in F$, *тогда и только тогда, когда* F — *правый порядок кольца* D. *Кроме того, если* D_n — *кольцо частных, то* D — *кольцо частных. Обратное верно, если кольцо* D *удовлетворяет условиям* (1), (2) *или* (3) *предложения* 10.7.2.

Доказательство. Если F — правый порядок в кольце D и

$$x = \sum_{i,\,j=1}^{n} e_{ij}\, d_{ij},$$

где $d_{ij} \in D$ для всех i, j,— элемент кольца D_n, то в силу 9.3 найдутся элементы f_{ij}, $c \in F$, такие, что $d_{ij} = f_{ij}c^{-1}$. Тогда $x = fc^{-1}$, где $f = \sum_{i,\,j=1}^{n} e_{ij}f_{ij} \in F_n$.

Обратно, если $d = xc^{-1} \in D$, где $x \in F_n$ и $c \in F$, то $x = dc \in$ $\in F_n \cap D = F$. Поэтому F — правый порядок в D.

Наконец, если D_n — кольцо частных и d — регулярный элемент кольца D, то d — регулярный элемент кольца D_n. Поэтому в кольце D_n существует d^{-1}. Но тогда d^{-1} лежит в централизаторе матричных единиц $\{e_{ij}\}$ и, следовательно, $d^{-1} \in D$. Таким образом, D — кольцо частных.

Обратное следует из 10.7 и 10.8. □

10.11. Предложение и определение. *Правый идеал* I *предкольца* R *называется* ***замкнутым*** [1]), *если для всех* $x \in I$ *и регулярных элементов* $c \in R$ *из* $xc \in I$ *следует, что* $x \in I$. *Каждый правый аннуляторный идеал предкольца замкнут. Каждый правый идеал кольца частных замкнут. Кроме того, если* Q — *кольцо частных и* R — *предподкольцо, каждый регулярный элемент которого обратим в* Q, *то отображение сокращения*

$$\begin{cases} \text{правые идеалы из } Q \to \text{замкнутые правые идеалы из } R \\ I \mapsto I \cap R \end{cases}$$

является гомоморфизмом структур. Если к тому же R — *правый порядок кольца* Q, *то отображение сокращения* $I \mapsto I \cap R$ *является изоморфизмом структур, при этом обратным отображением служит*

$$J \mapsto JQ = \{xc^{-1} \mid x \in J,\ c \in R,\ c \text{ — регулярный элемент}\}$$

для любого замкнутого правого идеала J *кольца* R. *Если* J — *замкнутый правый идеал, то* JQ — *идеал кольца* Q *тогда и только тогда, когда* J — *идеал кольца* R, *замкнутый как левый модуль.*

Доказательство. Если I — правый идеал кольца Q, $x \in R$ и $xc \in I$ для некоторого регулярного элемента $c \in R$, то $x \in I \cap R$. Таким образом, правый идеал $I \cap R$ замкнут в R. Если R — правый порядок кольца Q и $y \in I$, то $x = yc \in I \cap R$ для некоторого регулярного элемента $c \in R$. Поэтому $y = xc^{-1}$. Это показывает, что множество $I = (I \cap R)\, Q$ совпадает с множеством всех элементов вида $y = xc^{-1}$, $x \in I \cap R$. Кроме того, если J — правый идеал кольца R, то

$$J' = \{xc^{-1} \mid x \in J,\ c \in R,\ c \text{ — регулярный элемент}\}$$

— правый идеал кольца Q и

$$J' = JQ = (JQ \cap R)\, Q.$$

Следовательно, если $y \in JQ \cap R$, то $y = xc^{-1}$, где $x \in J$, $c \in R$. Если J — замкнутый правый идеал кольца R, то из $x = yc \in J$ следует, что $y \in J$. Поэтому $JQ \cap R = J$. Это доказывает, что указанное соответствие является изоморфизмом структур.

Далее, пусть J — идеал кольца R, замкнутый как левый модуль, c — регулярный элемент кольца R и $x \in J$. Тогда

$$y = c^{-1}x = x_1c_1^{-1},$$

где x_1, $c_1 \in R$, и $xc_1 = cx_1 \in J$. Так как J — замкнутый как левый модуль идеал, то $x_1 \in J$. Следовательно, каждый элемент вида

[1]) Не путать с одноименным понятием из гл. 8 и 9 (ср. примечание на стр. 486).— *Прим. перев.*

$y = c^{-1}x$, где $x \in J$, $c \in R$, лежит в JQ. Поэтому JQ — идеал кольца Q. Обратно, из $J = JQ \cap R$ следует, что J — идеал кольца R, если JQ — идеал кольца Q. Кроме того, ограничение любого левого идеала кольца Q является замкнутым левым идеалом кольца R. □

10.12. Определение. Пусть C — класс колец частных, замкнутый относительно подобия. Свойство быть правым порядком в кольце из класса C будет называться **инвариантным в смысле Мориты**, если для любого правого порядка R в кольце S из класса C каждое кольцо, подобное подкольцу R_1 кольца S, порожденному R, обладает правым кольцом частных из класса C. (Здесь $R_1 = R + \mathbb{Z}1$ и равно R, если R — кольцо, т. е. $1 \in R$.)

10.13. Упражнения.

10.13.1. Класс правых порядков в классически полупростых кольцах является инвариантным в смысле Мориты. В частности, если $R = F_n$ — правый порядок в кольце матриц $S = D_n$, где D — классически полупростое кольцо, то F — правый порядок в кольце D.

10.13.2. Если R — коммутативное кольцо частных, то кольцо $(n \times n)$-матриц R_n является кольцом частных. [*Указание*: если R — коммутативное кольцо и $x \in R_n$, то элемент x регулярен в R_n тогда и только тогда, когда определитель $\det x$ регулярен в R.]

10.14. Предложение.

10.14.1. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*

(a) *R — полупервичное правое кольцо Голди.*

(b) *R обладает классически полупростым правым кольцом частных S.*

(c) *Кольцо R полупервично и кольцо эндоморфизмов* $\operatorname{End} \hat{P}_R$ *инъективной оболочки $\hat{P}$ любого конечно порожденного проективного правого R-модуля P классически полупросто.*

10.14.2. *Свойство быть полупервичным правым кольцом Голди инвариантно в смысле Мориты.*

Доказательство. Если T: $C \rightsquigarrow D$ — эквивалентность категорий, то T индуцирует биекцию $\operatorname{Mor}_C(X, Y) \to \operatorname{Mor}_D(TX, TY)$, где X, Y — любая пара объектов категории C. Для абелевых категорий эта биекция является изоморфизмом абелевых групп. Кроме того, в этом случае кольца $\operatorname{End}_C X \approx \operatorname{End}_D TX$ для любого объекта X. Таким образом, из 10.14.1(c) следует 10.14.2.

Доказательство утверждения 10.14.1. В силу 9.9 (a) $\Leftrightarrow$ (b). Допустим, что выполнены условия (a) и (b). Тогда в силу 9.14 $\operatorname{sing} R = 0$. Поэтому в силу 4.5 $\hat{R}$ совпадает с максимальным рациональным расширением $\overline{R}$ кольца R. Правое кольцо частных S кольца R является рациональным расширением кольца R и, следовательно, канонически вложимо в $\overline{R}$. Так как кольцо S классически полупросто, то S — инъективный модуль в категории mod-S. Следовательно, S — прямое слагаемое модуля $\overline{R}$ в категории mod-S. Однако $\overline{R}$ — существенное расширение модуля R в категории mod-R. Поэтому $\overline{R} = S = \hat{R}$ — классически полупростое кольцо. Это доказывает, что из (a) следует (c) в случае $P = R$. Отсюда, очевидно, вытекает (c).

Обратно, допустим, что выполнено условие (c). Тогда кольцо $B = \operatorname{End} \hat{R}_R$ классически полупросто. Так как кольцо $\hat{R}$ содержит R, то $\hat{R}$ — циклический канонический B-модуль. Значит, $A = \operatorname{End}_B \hat{R}$ — классически полупростое кольцо. Так как в силу 4.5 кольца $\overline{R}$ и $\operatorname{Biend} \hat{R}_R$ канонически изоморфны, то $\overline{R} = A$ — классически полупростое кольцо. Поскольку классически полупростое кольцо удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов и $\overline{R}$ — существенное расширение кольца R, то кольцо R удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов. Кроме того, любое подкольцо кольца с условием максимальности для правых аннуляторных идеалов также обладает этим свойством. Поэтому в силу 9.9 из (c) следует (a). □

10.15. Теорема Фейса — Утуми [65]. *Пусть R — предподкольцо кольца матриц $S = D_n$, где D — централизатор в S множества $M = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ матричных единиц. Пусть*

$$A = A_M = \{a \in R \mid aM \subseteq R\}$$

и

$$B = B_M = \{b \in R \mid Mb \subseteq R\}.$$

10.15.1. *Тогда*

$$BA = (BA \cap D)_n = \sum_{i,j=1}^{n} (BA \cap D)\, e_{ij}$$

является предподкольцом кольца R, AB — идеал кольца R и $(BA)^2 \subseteq AB$. Кроме того, $F = BA \cap D$ и $U = B \cap D = A \cap D$ [1]) — идеалы кольца $P = R \cap D$, для которых $F \supseteq U^2$. Таким образом, $R \supseteq BA = F_n \supseteq U_n^2$.

10.15.2. *Если D_n — правое кольцо частных кольца R, то можно так выбрать M, что A содержит обратимый элемент a кольца S, B содержит обратимый элемент b кольца S и $BA = F_n$ — пра-*

[1]) $B \cap D = A \cap D$, поскольку элементы из D перестановочны с матричными единицами.— *Прим. перев.*

вый порядок кольца D_n, эквивалентный порядкам R и P_n. Если к тому же R — и левый порядок кольца D_n, то при любом выборе множества M матричных единиц оно обладает этими свойствами.

10.15.3. *Если в ситуации предложения* 10.15.2 *кольцо D классически полупросто* [1]), *то D — правое кольцо частных кольца F и*

$$D_n = \{af^{-1} \mid a \in F_n,\ f \in F,\ f \text{ — регулярный элемент}\}.$$

Доказательство утверждения 10.15.1. Так как $AP \subseteq A$, $PB \subseteq B$ и $P \subseteq D$, то $PF \subseteq F$ и $FP \subseteq F$. Поэтому F — идеал кольца P. Так как B — правый идеал кольца R, то $U = B \cap D$ — правый идеал кольца $P = R \cap D$ и $U = A \cap D$ — левый идеал кольца P. Кроме того,

$$U \supseteq F = BA \cap D \supseteq (B \cap D)(A \cap D) = U^2.$$

В силу 3.18 каждый элемент $t \in D_n$ единственным образом записывается в виде $t = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}e_{ij}$, где

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}te_{kj} \in D.$$

Таким образом, если $t = ba \in BA$, где $b \in B$, $a \in A$, то $t_{ij} \in BA \cap D = F$, поскольку $MB \subseteq B$ и $AM \subseteq A$. Это доказывает, что $BA = F_n$. Кроме того, $(BA)^2 = BABA \subset AB$, так как A — левый и B — правый идеалы.

Доказательство утверждения 10.15.2. Допустим теперь, что D_n — правое кольцо частных кольца R. Прежде всего пусть M' — любое множество $(n \times n)$-матричных единиц кольца D_n с централизатором D'. В силу 9.3 найдется общий знаменатель $a \in R$ элементов из множества M', т. е. регулярный элемент $a \in R$, такой, что $M'a \subseteq R$. Тогда

$$M = a^{-1}M'a$$

является множеством матричных единиц кольца S и

$$D = a^{-1}D'a$$

служит централизатором множества M в S, который изоморфен кольцу D'. Кроме того, a — обратимый элемент кольца S, лежащий в

$$A = \{x \in R \mid xM \subseteq R\}.$$

Далее,

$$B = \{y \in R \mid My \subseteq R\}$$

[1]) Это верно и в более общем случае для любого полулокального кольца D (10.19). Первоначально теорема Фейса — Утуми [65] была сформулирована для тела D. (Большая часть из 10.15.1 и часть из 10.15.2 взяты из статьи Фейса [65а].)

также содержит обратимый элемент b кольца S. Сейчас мы покажем, что любое множество M матричных единиц кольца S, для которого так определенные множества A и B содержат обратимые элементы кольца S, обладает сформулированными свойствами. Так как каждое множество M матричных единиц удовлетворяет этому требованию в том случае, когда R — также и левый порядок кольца S, то каждое множество матричных единиц обладает в этом случае сформулированными свойствами.

Поскольку AB — идеал кольца R и AB содержит регулярный элемент $t = ab \in R$, то D_n — правое кольцо частных кольца AB и каждый элемент $y \in D_n$ имеет вид $y = xt\,(ct)^{-1}$, где x, $c \in R$ и c — регулярный элемент. Так как $bSb^{-1} = S$, где $S = D_n$, то каждый элемент $y \in S$ имеет вид $y = by_1b^{-1}$, где $y_1 = xr^{-1} \in S$, x, $r \in R$, r — регулярный элемент. Таким образом,

$$y = b\,(xr^{-1})\,b^{-1} = (bxa)\,(bra)^{-1},$$

где $bxa \in BA$ и $bra \in BA$. Это доказывает, что D_n — правое кольцо частных кольца BA. Далее, $bRa \subseteq BA$ и $BA \subseteq R$. Поэтому BA — правый порядок в кольце D_n, эквивалентный порядку R. Кроме того, в силу 10.15.1 F — идеал кольца P. Поэтому F_n — идеал кольца P_n, содержащий регулярный элемент t. Таким образом, $tP_n \subseteq F_n$, и, следовательно, порядок F_n эквивалентен порядку P_n.

Доказательство утверждения 10.15.3. Допустим, что D_n — классически полупростое правое кольцо частных кольца F_n. Так как в силу 10.14 свойство быть полупервичным правым кольцом Голди инвариантно в смысле Мориты, то F — полупервичное правое кольцо Голди. Следовательно, кольцо F обладает классически полупростым правым кольцом частных Q. (Если F — предподкольцо кольца D, то подкольцо F', порожденное множеством F, является полупервичным правым кольцом Голди с классически полупростым правым кольцом частных Q, и тогда Q — правое кольцо частных для F.) Так как каждый регулярный элемент $f \in F$ регулярен в F_n, то $f^{-1} \in D_n$. На самом деле $f^{-1} \in D$. Тогда Q можно вложить в D с помощью отображения, индуцированного тождественным отображением 1_F. Поэтому F_n — правый порядок в кольце Q_n. В силу 10.10

$$Q_n = \{ac^{-1} \mid a \in F_n,\ c \in F\}.$$

Однако кольцо Q_n классически полупросто. Следовательно, каждый регулярный справа элемент кольца Q_n обратим. В силу 10.9 Q_n — правое кольцо частных кольца F_n, а в силу 10.5 это доказывает, что $Q_n = D_n$. Поэтому $Q = D$ — правое кольцо частных кольца F. □

10.16. Предложение. *Пусть S — правое кольцо частных кольца R. Если I — идеал кольца S, такой, что каждый регулярный справа элемент факторкольца $\overline{S} = S/I$ обратим в $\overline{S}$ (например, если кольцо S/I удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов; ср. также* 10.7), *то кольцо $\overline{S}$ канонически изоморфно правому кольцу частных кольца $\overline{R} = R/(I \cap R)$. Кроме того, $(I \cap R)S = I$.*

Доказательство. Если $y \in S$, то $y = ac^{-1}$, где $a, c \in R$. Тогда $\overline{y} = \overline{a}\overline{c}^{-1}$, где $\overline{a}, \overline{c} \in \overline{R}$ (черточка означает переход к смежному классу при $S \to \overline{S} = S/I$). Таким образом, $\overline{R} = (R + I)/I \approx R/(I \cap R)$ — правый порядок в кольце S. В силу 10.9 из предположений о кольце $\overline{S}$ следует, что $\overline{S}$ — правое кольцо частных кольца $\overline{R}$.

Кольцо S называется **полулокальным**, если кольцо $S/\operatorname{rad} S$ классически полупросто.

10.17. Следствие. *Если кольцо R обладает полулокальным правым кольцом частных S, то $\overline{R} = R/(R \cap \operatorname{rad} S)$ — правое кольцо Голди с правым кольцом частных $\overline{S} = S/\operatorname{rad} S$.*

Доказательство. Так как S/I, где $I = \operatorname{rad} S$ — классически полупростое кольцо (в частности, артиново), то применимо предыдущее предложение. Кольцо $\overline{R}$ обладает классически полупростым правым кольцом частных S/I. В силу 10.14 $\overline{R}$ — правое кольцо Голди. □

10.18. Лемма [1]. *Пусть кольцо $R = F_n$ обладает полулокальным правым кольцом частных $S = D_n$. В соответствии с* 10.15 *выберем множество M $(n \times n)$-матричных единиц кольца S так, что централизатор D множества M в S содержит F. Пусть $x = (x_{ij})$ для любого элемента $x \in S$ обозначает его матричное представление, где $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда для любого регулярного элемента $t \in F_n$ найдется регулярный элемент $a \in F_n$, такой, что диагональные элементы x_{ii} матрицы $x = ta$ являются регулярными элементами кольца F, а элементы x_{ij}, не лежащие на диагонали, принадлежат множеству $F \cap \operatorname{rad} D$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. В силу 10.17 $\overline{S} = S/\operatorname{rad} S$ — правое кольцо частных кольца $\overline{R} = R/(R \cap \operatorname{rad} S)$. В силу 10.15

[1]) Эта лемма была доказана Фейсом — Утуми [65] для случая тела D. Ее обобщение на случай классически полупростого кольца очевидно. Робсон [67, 3.3, стр. 607] распространил ее на случай, когда кольцо D артиново справа.

каждый элемент факторкольца $\overline{S} = \overline{D}_n$ имеет вид $\overline{a}\overline{c}^{-1}$, где $a \in F_n$, $c \in F$ (т. е. $\overline{a} \in \overline{R}$ и $\overline{c} \in \overline{F}$). В частности, t^{-1} для любого регулярного элемента $t \in F_n$ имеет такой вид. Поэтому

$$tac^{-1} = 1 + (w_{ij}),$$

где $(w_{ij}) \in (\operatorname{rad} D)_n$. Тогда $x = ta \in F_n$ — такой элемент, что

$$x_{ii} = (1 + w_{ii})\, c \in F$$

регулярен (поскольку $1 + w_{ii}$ и c — обратимые элементы кольца D), и

$$x_{ij} = w_{ij}c \in F \cap \operatorname{rad} D,$$

что и требовалось доказать. □

10.19. Предложение [1]. *Если кольцо R обладает полулокальным правым кольцом частных $S = D_n$, то существует множество M $(n \times n)$-матричных единиц кольца S, такое, что R содержит правый порядок F_n кольца D_n, где F — правый порядок централизатора D множества M в кольце S. Кроме того,*

$$D_n = \{ac^{-1} \mid a \in F_n,\ c \in F\}.$$

Доказательство. Все следует из теоремы 10.15, за исключением того, что F — правый порядок в кольце D. В силу 10.15 F_n — правый порядок кольца D_n, эквивалентный порядку R. Поэтому каждый элемент $d \in D_n$ имеет вид $d = yt^{-1}$, где $y, t \in F_n$ и t — регулярный элемент. В частности, любой элемент $d \in D$ можно записать в таком виде. Из леммы 10.18 вытекает возможность записать $x = ta \in F_n$, где элементы $x_{ii} \in F$ обратимы в кольце D, $i = 1, \ldots, n$. Так как

$$ya = dta = dx = d(x_{ij}) = (dx_{ij}) \in F_n,$$

то $f_{ij} = dx_{ij} \in F_n$ и $d = f_{11}x_{11}^{-1}$, где $x_{11} \in F$. Это доказывает, что D — правое кольцо частных кольца F.

10.20. Следствие. *Если T — правый порядок в кольце частных S, являющемся конечным произведением колец матриц, скажем $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$, где $S_i = M_{n_i}(D_i)$ — кольцо $(n_i \times n_i)$-матриц над полулокальным кольцом D_i, то $T_i = S_i \cap T$ — правый порядок в кольце S_i, и поэтому найдется правый порядок F_i в кольце D_i, такой, что T содержит произведение $\prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(F_i)$.*

[1]) Это теорема Фейса и Утуми для полулокальных колец. К ней применимо все сказанное в примечании к лемме 10.18, см. также замечания к гл. 10.

Доказательство. Нетрудно проверить, что T_i — правый порядок кольца S_i (используя тот факт, что единичный элемент кольца S_i лежит в центре кольца S). Далее надо применить предложение 10.19 к кольцу T_i. □

Кольца главных идеалов

Если R — правый порядок в кольце D_n, то теорема Фейса и Утуми утверждает, что найдется порядок F в D, для которого имеют место включения $F_n \subseteq R \subseteq D_n$. Даже если F_n и является порядком в кольце D_n, то строение кольца R не определяется полностью кольцом F_n. Однако это так при более сильных предположениях.

10.21. Предложение (Голди [62]). *Если R — первичное кольцо главных правых идеалов, то существует правая область Оре F, число $n > 0$ и изоморфизм $R \approx F_n$.*

Доказательство (Фейс — Утуми [64a]). Используя обозначения теоремы 10.15, можно записать $B = cR$, где $c \in R$. Так как B содержит регулярный элемент, то c — регулярный элемент. Поскольку $e_{ij}B \subseteq B$, т. е. $e_{ij}cR \subseteq cR$, то

$$c^{-1}e_{ij}c = f_{ij} \in R$$

($i, j = 1, \ldots, n$). Далее, $M = \{f_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ — полное множество матричных единиц кольца S с ассоциированным телом $H = c^{-1}Dc$. Так как $M \subseteq R$, то в силу 3.18 $R = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}K$, где $K = H \cap R$. Но R — порядок в кольце H_n. Тогда K — порядок в кольце H. Таким образом, K — область Оре. □

Кольцо F не обязано быть кольцом главных идеалов (см. Суон [61]). Тем не менее F — наследственное нётерово справа кольцо (Доказательство?).

Дополнительные замечания. 1. Пусть T — правый порядок в кольце $S = D_n$, где $n > 1$. Если f — идемпотент кольца S, такой, что fS — минимальный правый идеал, то $f = ac^{-1}$, где $a, c \in R$. Таким образом, $e = c^{-1}fc$ — идемпотент и $0 \neq ce \in Se \cap R$. Так как $Se \cap R \neq 0$, то из первичности кольца T следует, что $(eS \cap R)(Se \cap R) \neq 0$. Поэтому $eSe \cap R \neq 0$. Из доказательства теоремы 10.15 можно вывести, что $F = eSe \cap T$ — правая область Оре, а $D \approx eSe$ — ее правое тело частных. Итак, мы получили, что $S \approx D_n$, где D содержит правую область Оре K, лежащую в R. Это иллюстрирует истинную сущность утверждения 10.15.2, в котором доказывается значительно более сильный факт. □

2. Покажем, далее, что, вообще говоря, не любое множество M матричных единиц обладает свойством, приведенным в 10.15.2 (если не предполагать, что T — также и левый порядок в кольце S).

Пусть K — правая область Оре, D — ее правое тело частных, но K не является левой областью Оре, x, y — ненулевые элементы области K, такие, что $Kx \cap Ky = 0$ и

$$T = \begin{pmatrix} Kx & Ky \\ Kx & Ky \end{pmatrix}.$$

[T — множество всех (2×2)-матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, c \in Kx$ и $b, d \in Ky$.] Так как K — правая область Оре, то для произвольной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in D_2$ найдется элемент $0 \neq q \in K$, такой, что $aq, bq, cq, dq \in K$. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qx & 0 \\ 0 & qy \end{pmatrix} \in T.$$

Таким образом, $A = BC^{-1}$, где B, $C = \begin{pmatrix} qx & 0 \\ 0 & qy \end{pmatrix} \in T$. Следовательно, T — правый порядок в кольце D_2.

Как и в теореме 10.15, отождествим D с подкольцом кольца D_2, состоящим из всех скалярных матриц $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, где $k \in D$. Допустим временно, что T содержит подкольцо F_2, где F — кольцо без делителей нуля, лежащее в D. Но тогда немедленно приходим к противоречию, поскольку множество T имеет вид

$$\begin{pmatrix} Kx & Ky \\ Kx & Ky \end{pmatrix},$$

где $Kx \cap Ky = 0$, что исключает возможность существования в T ненулевой скалярной матрицы $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $d \in K$. □

3. Кольцо R, рассмотренное в упражнении 10.6, не обязано содержать нетривиальные идемпотенты. Укажем следующий простейший пример: пусть $S = \mathbb{Q}_2$ — кольцо всех (2×2)-матриц над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, R — подкольцо, состоящее из всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где b, c — четные целые числа, а a, d — целые числа, которые либо оба четные, либо оба нечетные. Тогда $R = (2\mathbb{Z})_2 + \mathbb{Z}$ не является областью целостности и R — правый порядок в кольце $\mathbb{Q}_2$, не содержащий идемпотентов, отличных от 0 и 1. □

10.22. Упражнения.

10.22.1 (Голди). Если $R = F_n$ — кольцо главных правых идеалов, где F — область целостности, то кольцо F наследственно справа и каждый правый идеал кольца F порождается не более чем n элементами.

10.22.2. Если F — кольцо и каждый F-подмодуль модуля F^n порождается не более чем n элементами, то $R = F_n$ — кольцо главных правых идеалов. Верно и обратное утверждение.

*10.22.3 (Асано — Голди). Если R — кольцо главных (левых и правых) идеалов, то R — прямое произведение конечного числа колец, каждое из которых либо первично, либо артиново. Артиново кольцо главных идеалов является прямым произведением конечного числа колец, каждое из которых является кольцом матриц A_n над локальным кольцом A (варьируются A и n). (См. «Локальные кольца», гл. 18[1]).)

10.22.4. Обобщить утверждение 10.21 на случай, когда R обладает полулокальным правым кольцом частных D_n. Если R — кольцо главных правых идеалов, то показать, что $R = F_n$, где F — правый порядок кольца D. (Заметим, что из упражнения 10.22.3 следует, что любое кольцо главных левых и правых идеалов обладает полулокальным правым кольцом частных.)

Максимальные порядки в полулокальных кольцах матриц

В этом параграфе максимальные правые порядки в полулокальных кольцах матриц D_n характеризуются как кольца эндоморфизмов модулей без кручения над правыми порядками в D. Эта теорема была впервые доказана Фейсом [64] для простого правого кольца Голди R, которое, как было показано, является максимальным правым порядком в кольце D_n, где D — тело. Имея в руках теорему Фейса — Утуми 10.19 для полулокальных колец, можно модифицировать доказательство Фейса [64] (как сделал это Робсон [67] для артинова справа кольца) для случая, когда кольцо D полулокально.

10.23. Лемма. *Пусть R и S — правые порядки в кольце частных Q, $R \subseteq S$ и $R \overset{Q}{\sim} S$. Тогда найдутся правые порядки T и T' в кольце Q, такие, что*

$$R \subseteq T \subseteq S,\ R \overset{l}{\sim} T \overset{r}{\sim} S, \qquad R \subseteq T' \subseteq S,\ R \overset{r}{\sim} T' \overset{l}{\sim} S.$$

Доказательство. Существуют такие регулярные элементы $x, y \in Q$, что $xSy \subseteq R$. Положим $x = ab^{-1}$, $y = cd^{-1}$, $a, b, c, d \in R$. Так как $d \in R$, то $Rd \subseteq R$. Поэтому

$$b \in R \Rightarrow b \in S \Rightarrow bS \subseteq S \Rightarrow S \subseteq b^{-1}S.$$

[1]) А также теорему 20.37 второго тома.—*Прим. перев.*

Таким образом,

$$aSc \subseteq ab^{-1}Sc \subseteq Rd \subseteq R.$$

Пусть теперь T — подкольцо кольца S, порожденное множествами aS и R. Тогда $T = R + aS + RaS$. Нетрудно убедиться также в том, что $aS \subseteq T$ и $Tc \subseteq R$. Кроме того, $R \subseteq T \subseteq S$. В силу 10.2 $R \overset{l}{\sim} T \overset{r}{\sim} S$. Аналогично строится порядок T'. □

10.24. Определения. Максимальным правым $\sim$-порядком называется правый порядок, который является максимальным среди правых порядков, ему эквивалентных. **Максимальные правые $\overset{r}{\sim}$-порядки и $\overset{l}{\sim}$-порядки** определяются аналогично.

Связь между этими тремя понятиями устанавливает следующая

10.25. Теорема. *Следующие условия на правый порядок R в кольце частных Q равносильны:*

(1) *R — максимальный правый $\sim$-порядок.*

(2) *R — максимальный правый $\overset{r}{\sim}$-порядок и максимальный правый $\overset{l}{\sim}$-порядок.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из определения. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $S \supseteq R$ и $S \sim R$. Тогда в силу леммы 10.23 существует порядок T, для которого $R \subseteq T \subseteq S$ и $R \overset{l}{\sim} T \overset{r}{\sim} S$. Но R — максимальный правый $\overset{l}{\sim}$-порядок. Поэтому $T = R$ и $S \overset{r}{\sim} R$. В то же время R — максимальный правый $\overset{r}{\sim}$-порядок. Поэтому $S = R$. Таким образом, R — максимальный правый $\sim$-порядок. □

10.26. Определения. Кольцо R с единицей называется **iprі-кольцом**, если каждый (двусторонний) идеал кольца R является главным правым идеалом. Аналогично определяются **ipli-кольца** (левый вариант).

Очевидно, что простое кольцо с единицей является одновременно iprі-кольцом и ipli-кольцом. Ясно также, что **prі-кольцо** (в котором каждый правый идеал главный) является iprі-кольцом.

10.27. Теорема. *Пусть R есть* iprі-*кольцо* (*или* ipli-*кольцо*) *с полулокальным правым кольцом частных Q. Тогда R — максимальный правый $\overset{r}{\sim}$-порядок* (*или $\overset{l}{\sim}$-порядок*) *в кольце Q.*

Доказательство. Пусть $S \overset{r}{\sim} R$ — правый порядок, содержащий кольцо R, $c \in Q$ — обратимый элемент и $cS \subseteq R$.

Тогда $R(RcS) = RcS$ и $(RcS)R = RcSR = RcS$. Поэтому RcS — идеал кольца R и $RcS = dR$ для некоторого $d \in R$. Так как $1 \in R$, то $c \in dR$ и $c = da$ для некоторого $a \in R$. Поскольку c — обратимый элемент кольца Q и кольцо Q полулокально, то d — обратимый элемент кольца Q. Если элемент $q \in Q$, такой, что $dRq \subseteq dR$, то $dq = db$, где $b \in R$. Следовательно, $q \in R$. Это доказывает, что

$$R = \{q \in Q \mid dRq \subseteq dR\}.$$

Тогда $R = S$, поскольку $dRS = (RcS)S = RcS = dR$. Поэтому R — максимальный правый $\overset{r}{\sim}$-порядок.

Аналогичное доказательство проходит для ipli-кольца R. □

10.28. Следствие (Робсон [67]). *Полупервичное* pri-*кольцо является максимальным правым* $\overset{r}{\sim}$-*порядком в своем правом кольце частных.*

(Фейс [64]) *Простое правое кольцо Голди с единицей является максимальным правым* $\sim$-*порядком в своем правом кольце частных.* (Ср. 4.39В.) □

Сейчас мы в состоянии обобщить на полулокальные кольца упомянутую выше теорему Фейса [64] и Робсона [67а].

10.29. Теорема. *Пусть R — максимальный правый* $\overset{l}{\sim}$-*порядок в полулокальном кольце частных Q, где Q — кольцо $(n \times n)$-матриц над некоторым кольцом. Тогда кольцо R изоморфно кольцу эндоморфизмов F'-модуля без кручения K, где кольцо F' является правым порядком в полулокальном кольце D, и $Q \cong D_n$.*

Доказательство. (См. Фейс [64], Робсон [67].) Выберем полное множество M матричных единиц кольца Q так, как это делалось в предложении 10.19. Тогда $R \supseteq F_n$, где F — правый порядок в кольце D и $Q \approx D_n$. Пусть $e_{11} = e$. Тогда Qe — правый D-модуль и $Q \approx \Omega = \mathrm{Hom}_D(Qe, Qe)$, где изоморфизм φ определяется условием $\varphi(q)\, x = qx$ для всех $x \in Qe$ и всех $q \in Q$.

Пусть F' — подкольцо кольца D, порожденное предподкольцом F и единицей. Тогда F' — правый порядок в кольце D. Кроме того, если $Qe \cap R = K$, то K — правый F'-модуль без кручения. Действительно, $K \subseteq Qe$, F' — правый порядок кольца D и Qe, очевидно,— правый D-модуль без кручения.

Далее, $(Qe \cap R)D \supseteq F_n eD = F_n De = Qe$. Очевидно, что $(Qe \cap R)D \subseteq Qe$. Следовательно, $KD = Qe$. Но D — правое кольцо частных кольца F'. Поэтому

$$Qe = \{xd^{-1} \mid x \in K,\ d \in F',\ d \text{ — регулярный элемент}\}.$$

Таким образом, любой элемент γ из кольца $\Gamma = \mathrm{Hom}_{F'}(K, K)$ продолжается единственным образом на Ω. Наличие естественного изоморфизма $Q \approx \Omega$ показывает, что

$$\Gamma \approx T = \{q \in Q \mid qK \subseteq K\}.$$

Ясно, что $T \supseteq R$. Поэтому если бы мы показали, что $T \overset{l}{\sim} K$, то все было бы доказано. Пусть $K = K_1 = Qe_{11} \cap R$ и $K_i = Qe_{ii} \cap R$. Тогда $K_i \supseteq F_n e_{ii}$. Если f — регулярный элемент кольца F, то $K_1 K_i \supseteq K_1 e_{1i} f = K_i'$. Но K_i — левый идеал и $K_i' \subseteq K_i$. В силу определения множества T ясно, что $TK_1 \subseteq K_1$. Поэтому $TK_i' \subseteq K_i'$. Но

$$f = \sum_i fe_{ii} = \sum_i fe_{i1} \cdot e_{1i} \in \sum_i K_1 e_{1i}.$$

Следовательно, $f^2 \in \sum_i K_i'$. Кроме того, $T \sum_i K_i' \subseteq \sum_i K_i' \subseteq R$. Таким образом, $Tf^2 \overset{l}{\subseteq} R$. Однако f^2 — регулярный элемент кольца Q. Поэтому $T \sim R$ и $T = R \approx \Gamma$. □

10.30. Следствие (Фейс [64]). *Пусть R — первичное правое кольцо Голди, и R — максимальный правый $\sim$-порядок в своем правом кольце частных Q. Тогда кольцо R изоморфно кольцу эндоморфизмов модуля без кручения над областью целостности, размерность Голди которого конечна.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из теоремы 10.29, поскольку Q — простое артиново кольцо. В ситуации теоремы 10.29 утверждение о конечности размерности модуля K над кольцом F' (т. е. об отсутствии в нем бесконечных прямых сумм подмодулей) вытекает из конечности размерности модуля Qe над кольцом D. □

Если R — простое кольцо, то, учитывая следствие 10.30, можно усилить предложение 4.22А.

10.31. Следствие (Фейс [65]). *Пусть R — правый порядок кольца $S = D_n$, где D — тело. Допустим, что R — простое кольцо с единицей. Тогда*

10.31.1. *Если z — такой элемент кольца S, что $Rz \subseteq zR$, то z — обратимый элемент в S и $z, z^{-1} \in R$.*

10.31.2. *Кольцо R содержит центр кольца S, т. е. центры колец R и S совпадают.*

Доказательство утверждения 10.31.1. Так как R — правый порядок кольца S, то $I = zR \cap R \neq 0$. Таким образом, I — ненулевой правый идеал кольца R. Из включения $Rz \subseteq zR$ следует, что I — идеал кольца R. Так как кольцо R простое, то $I = R$. Поэтому $zR \supseteq R$. Отсюда вытекает, что z не является пра-

вым делителем нуля в S. Так как S — артиново справа кольцо, то $z^{-1} \in S$. Поскольку $R \subseteq z^{-1}R$, то $z^{-1} \in R$. Далее, из простоты кольца R следует, что $Rz^{-1}R$ (идеал кольца R, порожденный элементом z^{-1}) совпадает с R. Так как $z^{-1}R \subseteq Rz^{-1}$, то

$$R = Rz^{-1}R \subseteq Rz^{-1} \subseteq R,$$

т. е. $Rz^{-1} = R$. Итак, $(z^{-1})^{-1} = z \in R$, что доказывает утверждение 10.31.1.

Доказательство 10.31.2 получается непосредственно. □

Замечания к гл. 10

В этой главе были даны более полные, чем это было возможно в некоторых других главах, ссылки. Но я не привел упрощение доказательства теоремы Фейса — Утуми, данное Ламбеком [66]. (Это, я думаю, многое прояснило бы в связи с обобщениями, появляющимися в гл. 10.) Джекобсон дал более отточенное доказательство этой теоремы в дополнении B обновленного варианта своей книги [64].

Одним из следствий этой теоремы является такое утверждение: любое первичное правое кольцо Голди R должно содержать нильпотентные элементы, если оно не является областью целостности. Это вытекает из того, что $R \supseteq F_n$ и $n > 1$, если R не является областью целостности. Однако любое первичное кольцо, не являющееся областью целостности, обязано содержать нильпотентные элементы! (Устное сообщение Робсона: доказательство тривиально!)

Мы уже отмечали результаты Робсона [67a], [67b], часть из которых в нашей книге перенесена с артиновых на полулокальные кольца. (На самом деле в теореме 10.27 Q может быть любым конечным по Дедекинду кольцом.)

Вопрос о единственности кольца F в 10.19 был поставлен (устно) Леви. Связь между кольцами R и F не ясна. В направлении, связанном с теоремами о порядках из гл. 4, особенно 4.37 и далее, можно доказать такой результат: любые две области целостности F и K, такие, что F_n и K_n — эквивалентные правые порядки в D_n, где D — тело, являются эквивалентными правыми порядками в D. Кроме того, между кольцами R и F можно установить связь, во всяком случае, когда кольцо R просто, с помощью теоремы типа теоремы 4.7. Таким образом, в этом случае кольцо F должно содержать наименьший идеал T, а кольцо R будет нётеровым справа тогда и только тогда, когда F удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей идемпотентных правых идеалов.

Ссылки

Голди [62], Джекобсон [47], [64], Ламбек [71a], Робсон [67], Рооз [68], Утуми [65], Фейс [64], [65], Фейс — Утуми [65a].

Часть III

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Если дан (B, A)-бимодуль M, то для любого правого A-модуля X группа $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ канонически наделяется структурой правого B-модуля. В результате получается функтор

$$\mathrm{Hom}_A(M, \ ) \begin{cases} \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B \\ X \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, X), \end{cases}$$

который также обозначается через $\mathrm{Hom}_A(M, \ )$ или просто h^M. (Двойственным образом определяется $\mathrm{Hom}_A(\ , M) = h_M$.) Этот функтор непрерывен слева в том смысле, что он сохраняет произведения и ядра (5.44), а его левый сопряженный

$$\underset{B}{\otimes} M \begin{cases} \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A \\ Y \mapsto Y \underset{B}{\otimes} M \end{cases}$$

непрерывен справа, т. е. сохраняет копроизведения и коядра. (Ср. с ассоциативностью сопряженности, 11.4.) Свобода тензорного произведения свободных модулей следует из 11.10.

Левый B-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда функтор $\underset{B}{\otimes} M$: mod-$B \rightsquigarrow$ mod-$\mathbb{Z}$ точен. Фундаментальные свойства плоских модулей излагаются в гл. 11. Так, например, модуль M плоский тогда и только тогда, когда он является прямым пределом проективных модулей (см. 11.32 и 6.24). Следовательно, каждый проективный модуль является плоским (11.22). Кроме того, каждый конечно представимый плоский модуль проективен. Отсюда следует, что над нётеровым справа кольцом каждый конечно порожденный плоский модуль проективен (11.31). Регулярные кольца охарактеризованы в 11.24 свойством плоскостности всех правых модулей. (Это свойство право-лево симметрично.) Как показано в гл. 19, инъективная оболочка $\hat{R}$ любого антисингулярного справа кольца R, т. е. кольца с нулевым пра-

вым сингулярным идеалом, является регулярным самоинъективным справа кольцом; более общим образом, кольцо эндоморфизмов любого квазиинъективного антисингулярного правого R-модуля M регулярно и самоинъективно справа. (Примером такого кольца служит любое кольцо конечно-строчных матриц над телом.)

Основное место в гл. 12 занимает изложение теорем Мориты, использующее тензорные произведения в форме, удобной для описания строения группы Пикара, появляющейся в конце этой главы, и группы Брауэра. Таким образом, $\mathrm{Pic}_k A$ — это группа изоморфных классов (P) обратимых (A, A)-бимодулей P относительно операции $(P)(Q) = (P \underset{k}{\otimes} Q)$, где A — произвольная алгебра над коммутативным кольцом k. В 12.15 определен изоморфизм

$$\begin{cases} \mathrm{Pic}_k A \to \mathrm{Pic}\,(A\text{-mod}) \\ (P) \mapsto P \underset{A}{\otimes} \\ TA \leftarrow\!\shortmid T, \end{cases}$$

где $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{mod}\text{-}A)$ — группа k-линейных автоэквивалентностей категории mod-A. Если алгебра A коммутативна, то имеет место изоморфизм $\mathrm{Aut}_k A \approx \mathrm{Pic}_k A / \mathrm{Pic}_A A$, где $\mathrm{Aut}_k A$ — группа автоморфизмов k-алгебры A (12.18).

Некоторые результаты о свойствах конечномерных алгебр над полем k излагаются в гл. 13. Среди них теорема Веддербёрна — Артина 13.5 об алгебрах над алгебраически замкнутым полем, теорема 13.28 о нильпотентности алгебр с базисом из нильпотентных элементов и теорема Машке 13.21 о полупростоте групповых алгебр, характеристика которых не делит порядок группы. Группа Брауэра, результаты, с ней связанные, и теорема Сколема — Нётер приводятся в упражнениях.

Глава 11

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПЛОСКИЕ МОДУЛИ

Пусть R — кольцо, M — правый и N — левый R-модули. Как обычно, $M \times N$ обозначает декартово произведение. Если G — абелева группа и $g\colon M \times N \to G$ — отображение множеств, то для каждого $y \in N$ определено отображение $g_y\colon M \to G$ по формуле $g_y(a) = g(a, y)$ для всех $a \in M$. Симметрично, если $x \in M$, то отображение $g_x\colon N \to G$ определяется формулой $g_x(b) = g(x, b)$ для всех $b \in N$. Отображение $g\colon M \times N \to G$ называется **билинейным**, если отображения $g_y\colon M \to G$ и $g_x\colon N \to G$ для всех

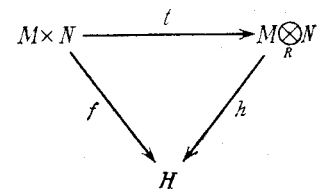
$x \in M$ и $y \in N$ являются групповыми гомоморфизмами. Билинейное отображение $g\colon M \times N \to G$ называется **сбалансированным**, если

$$g(xr, y) = g(x, ry)$$

для всех $x \in M$, $y \in N$, $r \in R$.

Рассмотрим категорию $T(M, R, N)$, состоящую из сбалансированных отображений $M \times N \to G$ в абелевы группы. Левый нуль этой категории, который определен однозначно с точностью до изоморфизма, обозначается через $M \underset{R}{\otimes} N$ и называется **тензорным произведением** модулей M и N (над R). Иногда, когда из контекста ясно, о каком кольце идет речь, мы пишем просто $M \otimes N$, впрочем последний символ обычно обозначает $M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$.

11.1. Существование тензорного произведения $M \underset{R}{\otimes} N$. *Если $M \in \mathrm{mod}\text{-}R$ и $N \in R\text{-mod}$, то существует абелева группа $M \underset{R}{\otimes} N$ (единственная с точностью до изоморфизма) и сбалансированное отображение $t\colon M \times N \to M \underset{R}{\otimes} N$, такое, что для каждого сбалансированного отображения $f\colon M \times N \to H$ в абелеву группу существует и притом единственный гомоморфизм h, дополняющий диаграмму*

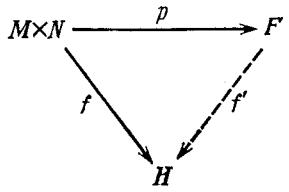


до коммутативной.

Доказательство. Пусть F — свободная абелева группа с множеством $M \times N$ свободных образующих. Таким образом, F — $\mathbb{Z}$-модуль, для которого определено вложение $p\colon M \times N \to F$, так что $p(M \times N)$ является базисом в F. *Для простоты допустим, что p — тождественное отображение.* Для любого сбалансированого отображения $f\colon M \times N \to H$, из свойства свободных групп (2.10) вытекает существование единственного гомоморфизма f',

дополняющего диаграмму

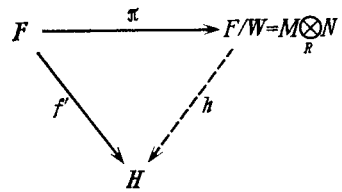
(1)



до коммутативной. Пересечение W ядер всех полученных таким образом гомоморфизмов $f'\colon F \to H$ является подмодулем в F, порожденным всеми элементами вида

$$\left.\begin{array}{l}(x+x',\ y)-(x,\ y)-(x',\ y),\\ (x,\ y+y')-(x,\ y)-(x,\ y'),\\ (x, ry)-(xr, y)\end{array}\right\} x,\ x' \in M,\ y,\ y' \in N,\ r \in R.$$

Пусть π — каноническое отображение $F \to F/W$, а F/W обозначено через $M \otimes N$. Тогда $t = \pi p$ — сбалансированное отображение $M \times N \to M \otimes N$. Если $f\colon M \times N \to H$ — произвольное сбалансированное отображение, то $\ker f' \supseteq W$, поэтому диаграмма



может быть дополнена до коммутативной единственным гомоморфизмом h. Тогда $f = f'p = h\pi p = ht$, и, таким образом, h дополняет диаграмму, приведенную в формулировке, до коммутативной. Чтобы показать, что h — единственный гомоморфизм $M \otimes N \to H$ с таким свойством, допустим, что k — любой другой гомоморфизм, такой, что $f = kt$. Тогда

$$f = kt = (k\pi)\,p = (h\pi)\,p = f'p.$$

Из единственности отображения f', дополняющего до коммутативной диаграмму (1), получаем $f' = k\pi$, т. е. $h\pi = k\pi$. Из единственности отображения $h\colon M \underset{R}{\otimes} N \to H$, удовлетворяющего соотношению $h\pi = f'$, заключаем, что $h = k$. □

Образ $t(x, y)$ элемента $(x, y) \in M \times N$ обозначается через $x \otimes y$. Итак, в $M \otimes N$ выполняются тождества:

$$(x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y),$$
$$x \otimes (y + y') = (x \otimes y) + (x \otimes y'),$$
$$x \otimes (ry) = (xr) \otimes y.$$

Группа $M \otimes N$ порождается множеством $\{x \otimes y \mid x \in M,\ y \in N\}$, т. е. состоит из всевозможных конечных сумм элементов такого вида. Следовательно, если $\{x_i \mid i \in I\}$ порождает M и $\{y_j \mid j \in J\}$ порождает N, то $\{x_i \otimes y_j \mid i \in I,\ j \in J\}$ порождает $M \otimes N$.

11.2. Предложение. *Пусть A — левый идеал кольца R и M — правый R-модуль. Имеется единственный гомоморфизм*

$$g_A\colon M \underset{R}{\otimes} A \to M,$$

такой, что

$$g_A\colon m \otimes a \mapsto ma,\ m \in M,\ a \in A.$$

Этот гомоморфизм называется ***каноническим****, его образ равен подгруппе MA, состоящей из всех конечных сумм $\sum_i m_i a_i$ с $m_i \in M$ и $a_i \in A$. Индуцированный гомоморфизм $M \underset{R}{\otimes} A \to MA$ также называется каноническим. Каноническое отображение $M \underset{R}{\otimes} R \to M$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Отображение $M \times A \to M$, при котором (m, a) переходит в ma, сбалансировано, поэтому g_A существует в силу 11.1. Так как $M \otimes A$ состоит из всех конечных сумм вида $\sum_i m_i \otimes a_i$, то $\operatorname{im} g_A = MA$, как и утверждалось. Если $\sum_i m_i \otimes a_i$ лежит в ядре канонического отображения $M \otimes R \to M$, т. е. $\sum_i m_i a_i = 0$, то $\sum_i m_i \otimes a_i = \sum_i m_i a_i \otimes 1 = 0$. Следовательно, g_R — мономорфизм. Так как $\operatorname{im} g_R = MR = M$, то g_R — изоморфизм. □

11.3. Предложение. *Пусть M, M' — правые и N, N' — левые модули над R, и пусть f (соотв. g) — гомоморфизм R-модуля M в R-модуль M' (соотв. N в N').*

11.3.1. Тогда определен групповой гомоморфизм, обозначаемый через $f \otimes g$, из $M \underset{R}{\otimes} N$ в $M' \underset{R}{\otimes} N'$, такой, что $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ для всех $x \in M$, $y \in N$.

11.3.2. *Если f и g — эпиморфизмы, то $f \otimes g$ — эпиморфизм, а подгруппа* $\ker(f \otimes g)$ *группы* $M \underset{R}{\otimes} N$ *порождена объединением множеств*

$$\{u \otimes y \mid u \in \ker f,\ y \in N\},$$
$$\{x \otimes v \mid v \in \ker g,\ x \in M\}.$$

11.3.3. *Если f и g — изоморфизмы, то $f \otimes g$ — изоморфизм.*

Доказательство 11.3.1. Так как отображение k: $M \times N \to M' \otimes N'$, переводящее (x, y) в $f(x) \otimes g(y)$, сбалансировано, то по определению группы $M \underset{R}{\otimes} N$ существует единственный гомоморфизм h: $M \otimes N \to M' \otimes N'$, такой, что $h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ для всех $x \otimes y \in M \otimes N$; гомоморфизм h обозначим через $f \otimes g$.

Доказательство 11.3.2. Если f и g — эпиморфизмы и $x' \otimes y' \in M' \otimes N'$ ($x' \in M'$, $y' \in N'$), то найдутся $x \in M$ и $y \in N$, такие, что $f(x) = x'$ и $g(y) = y'$, откуда $(f \otimes g)(x \otimes y) = x' \otimes y'$. Так как $M \otimes N$ порождается элементами $\{x \otimes y \mid x \in M,\ y \in N\}$, то $f \otimes g$ — эпиморфизм.

Очевидно, что $\ker(f \otimes g)$ содержит подгруппу H, порожденную двумя множествами, определенными в 11.3.2. Пусть ν — каноническое отображение ν: $M \otimes N \to (M \otimes N)/H$. Если элементы $x, x_1 \in M$, $y, y_1 \in N$ таковы, что $u = x_1 - x \in \ker f$, $v = y_1 - y \in \ker g$, то

$$x_1 \otimes y_1 = x \otimes y + (u \otimes y + x \otimes v + u \otimes v).$$

Так как слагаемое, стоящее в скобках, лежит в H, то $\nu(x_1 \otimes y_1) = \nu(x \otimes y)$ и, следовательно, определено сбалансированное отображение p: $M' \times N' \to (M \otimes N)/H$, при котором $p(f(x), g(y)) = \nu(x \otimes y)$. Поэтому существует гомоморфизм h: $M' \otimes N' \to (M \otimes N)/H$, такой, что $h(x' \otimes y') = p(x', y')$. Так как $h(f(x), g(y)) = \nu(x \otimes y)$ для всех $x \in M$, $y \in N$, то $h \circ (f \otimes g) = \nu$. Если $w \in \ker(f \otimes g)$, то

$$\nu(w) = h(f \otimes g)(w) = h(0) = 0$$

и поэтому $w \in H = \ker \nu$. Таким образом, $\ker(f \otimes g) = H$, как и утверждалось.

Доказательство 11.3.3 непосредственно вытекает из 11.3.2. □

Тензорное умножение как функтор

Если A, M, M', M'' — правые R-модули, B, N, N', N'' — левые R-модули и даны гомоморфизмы

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'', \quad N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'',$$

то $f'f \otimes g'g$ отображает $M \underset{R}{\otimes} N$ в $M'' \underset{R}{\otimes} N''$ и

$$f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g).$$

Определим теперь функтор:
Для каждого $A \in \text{mod-}R$ определен функтор

$$A \underset{R}{\otimes} \begin{cases} R\text{-mod} \rightsquigarrow \text{ABEL GROUPS} \\ N \mapsto A \otimes_R N & \text{(на объектах)} \\ g \mapsto 1_A \otimes g & \text{(на морфизмах).} \end{cases}$$

Аналогично, если $B \in R\text{-mod}$, то определим функтор

$$\underset{R}{\otimes} B \begin{cases} \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{ABEL GROUPS} \\ M \mapsto M \otimes B & \text{(на объектах)} \\ f \mapsto f \otimes 1_B & \text{(на морфизмах).} \end{cases}$$

Оба функтора $A \underset{R}{\otimes}$ и $\underset{R}{\otimes} B$ ковариантны, так как

$$f'f \otimes 1 = (f' \otimes 1)(f \otimes 1)$$

и

$$1 \otimes g'g = (1 \otimes g')(1 \otimes g).$$

Если R и S — кольца и имеет место ситуация A_R, ${}_RB_S$, C_S [1]), то

(1) $$\operatorname{Hom}_S(B, C) \in \text{mod-}R,$$

(2) $$A \underset{R}{\otimes} B \in \text{mod-}S.$$

Если $f \in \operatorname{Hom}_S(B, C)$, $r \in R$, то по определению полагают fr равным $f \cdot r_s$, где r_s — левая гомотетия $b \mapsto rb$. Полагают также $(a \otimes b)t = a \otimes bt$ для всех $a \in A$, $b \in B$, $t \in S$.

11.4. Ассоциативность сопряженности. *Пусть R, S — кольца и имеет место ситуация A_R, ${}_RB_S$, C_S. Тогда существует естественный изоморфизм абелевых групп*

$$\operatorname{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C) \xrightarrow{\eta} \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_S(B, C)),$$

определяемый формулой

$$([\eta f](a))(b) = f(a \otimes b)$$

[1]) Это означает, что $A \in \text{mod-}R$, $C \in \text{mod-}S$, а B есть (R, S)-бимодуль. — *Прим. перев.*

для всех $a \in A$, $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C)$. *Обратный естественный изоморфизм* φ *определяется формулой*

$$\varphi(g)(a \otimes b) = [g(a)](b),$$

где $g \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$. (Ср. 11.19.4.)

Доказательство (Маклейн [63]). Для каждого $a \in A$ и каждого $f \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes B, C)$ функция $(\eta f)(a)$, которая отображает $b \in B$ в $f(a \otimes b)$, действительно является S-гомоморфизмом $B \to C$, так как если $s \in S$, то

$$[\eta f(a)](bs) = f(a \otimes (bs)) = f(a \otimes b)s = [\eta f(a)](b)s.$$

Аналогично, $\eta(f_1 + f_2) = \eta f_1 + \eta f_2$ для всех f_1, f_2. Таким образом, η — групповой гомоморфизм.

Чтобы показать, что η — изоморфизм, построим обратное отображение φ. Если $g\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$ есть R-гомоморфизм и $a \in A$, $b \in B$, то $g(a) \in \mathrm{Hom}_S(B, C)$, $[g(a)](b) \in C$ и для любого $r \in R$

$$[g(ar)](b) = [g(a)r](b) = g(a)(rb).$$

Очевидно, отображение $A \times B \to C$, которое переводит (a, b) в $[g(a)](b)$, билинейно и, следовательно, сбалансировано (над R); поэтому по 11.1 существует единственный гомоморфизм $\varphi(g)\colon A \underset{R}{\otimes} B \to C$, такой, что

$$\varphi(g)(a \otimes b) = [g(a)](b).$$

Если $s \in S$, то

$$\varphi(g)[(a \otimes b)s] = \varphi(g)(a \otimes bs) = [g(a)](bs) = ([g(a)](b))s = [\varphi(g)(a \otimes b)]s$$

и $\varphi(g) \in \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C)$ для всех g. Если $h\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$ — другой гомоморфизм, то

$$\varphi(g + h)(a \otimes b) = [(g + h)(a)](b) = [g(a)]b + [h(a)]b = \varphi(g)(a \otimes b) + \varphi(h)(a \otimes b),$$

т. е. $\varphi(g + h) = \varphi(g) + \varphi(h)$, и поэтому отображение $g \to \varphi(g)$ является групповым гомоморфизмом

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \to \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C).$$

Нам осталось только проверить, что $\eta\varphi$ и $\varphi\eta$ — тождественные отображения. Если g — гомоморфизм, указанный выше, то $\varphi(g)\colon A \otimes B \to C$ и

$$([\eta\varphi(g)](a))(b) = \varphi(g)(a \otimes b) = (g(a))(b).$$

Таким образом, $\eta\varphi(g) = g$ для всех g, т.е. $n\varphi = 1$. Если $f\colon A \underset{R}{\otimes} B \to C$, то $\eta f\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$ и

$$[\varphi\eta f](a \otimes b) = [\eta f(a)](b) = f(a \otimes b).$$

Поэтому $\varphi\eta = 1$. Итак, η — изоморфизм.

Так как функтор $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ контравариантен по X и ковариантен по Y, а $X \underset{R}{\otimes} Y$ ковариантен по X и Y, то получаем, что функторы $T_1 = \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$ и $T_2 = \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C)$ контравариантны по A и B и ковариантны по C.

Следующим рассуждением покажем, что φ и η являются естественными преобразованиями. Пусть $\alpha\colon A' \to A$, $\beta\colon B' \to B$, $\gamma\colon C \to C'$. Проверим коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C) & \xrightarrow{\eta(A,B,C)} & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \\ \downarrow{\scriptstyle T_2(\alpha,\beta,\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle T_1(\alpha,\beta,\gamma)} \\ \mathrm{Hom}_S(A' \underset{R}{\otimes} B', C') & \xrightarrow[\eta(A',B',C')]{} & \mathrm{Hom}_S(A', \mathrm{Hom}_A(B', C')) \end{array}$$

Пусть $a' \in A'$, $b' \in B'$, $c' \in C'$ и $f \in \mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C)$, тогда $T_1\eta(f)$ определяется по формуле

$$((T_1\eta(f))(a'))(b') = \gamma(]\eta(f)(\alpha a')](\beta b')) = \gamma[f(\alpha a' \otimes \beta b')],$$

а $\eta T_2(f)$ — по формуле

$$[(\eta(T_2 f))(a')](b') = T_2 f(a' \otimes b') = \gamma[f(\alpha a' \otimes \beta b')].$$

Это доказывает коммутативность диаграммы и завершает доказательство. □

11.5. Определение.

11.5.1. Если R и S — кольца, то для (R, S)-бимодуля M функтор

(1) $$\underset{R}{\otimes} M\colon \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}S$$

называется **левым сопряженным** (или **сопряженным слева**) к функтору

(2) $$\mathrm{Hom}_S(M, \ )\colon \text{mod-}S \rightsquigarrow \text{mod-}R.$$

(Ср. «Сопряженные функторы», гл. 5.)

11.5.2. Говорят, что функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$ из абелевой категории C в абелеву категорию D **непрерывен слева** (соотв. **справа**), если он сохраняет произведения и ядра (соотв. копроизведения и коядра).

Непрерывность рассматривалась ранее в гл. 5.

11.6. Упражнение. Воспользуемся терминологией определения 11.5.

11.6.1. (A) Доказать, что функтор $\mathrm{Hom}_S(M, \ )$ со значениями в категории абелевых групп непрерывен слева.

(B) Используя ассоциативность сопряженности (11.4), доказать, что функтор $\underset{R}{\otimes} M$, сопряженный слева к $\mathrm{Hom}_S(M, \ )$, непрерывен справа.

(Полученное доказательство сравнить с 5.43.)

11.6.2. Воспользовавшись тем, что функтор $\mathrm{Hom}_S(M, \ )$ со значениями в категории абелевых групп аддитивен, доказать, что аддитивен и функтор $\underset{R}{\otimes} M$ со значениями в той же категории. (Ср. гл. 5, в частности 5.43, 5.48 и 5.58.)

Пример 11.7.1 показывает, что, вообще говоря, функтор тензорного произведения не точен слева.

11.7. Примеры.

11.7.1. Пусть R — кольцо и A — такой его идеал, что $A^2 \neq A \neq R$ (например, если $R = \mathbb{Z}$, то для любого ненулевого идеала A верно $A \neq A^2$). Если $r + A \in R/A$, $r \in R$ и $a \in A$, то $a \otimes' (r + A) \in A \otimes (R/A)$, где символ $\otimes'$ означает, что тензорное произведение берется в $A \otimes (R/A)$. Так как

$$(1_A \otimes 1_{R/A})(a \otimes' (r + A)) = a \otimes (r + A) = 1 \otimes (ar + A) = 1 \otimes 0 = 0^{1}),$$

то $\ker(1_A \otimes 1_{R/A}) = A \otimes {}_R(R/A)$. По 11.3 ядро K отображения $A \otimes R \to A \otimes (R/A)$ порождается множеством $\{a \otimes b \mid a \in A,\ b \in A\}$. Гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes R \to A$, такой, что $\varphi(a \otimes r) = ar$, отображает K на A^2. Так как $A \neq A^2$, то $K \neq A \otimes R$, а это доказывает, что $A \otimes (R/A) \neq 0$ и, значит, последовательность

$$0 \to A \otimes (R/A) \to R \otimes (R/A)$$

не является точной (хотя последовательность $0 \to A \to R$ точна).

11.7.2. Пусть A — произвольная абелева группа, m — натуральное число, $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — циклическая группа порядка m и $mA = \{ma \mid a \in A\}$. *Тогда существует изоморфизм* $h\colon A/mA \to \mathbb{Z}_m \otimes A$ (тензорное произведение над $\mathbb{Z}$), *задаваемый формулой* $h(a + mA) = u \otimes a$, где u — произвольный образующий группы $\mathbb{Z}_m$, например $u = 1 + m\mathbb{Z}$. Если $a, a' \in A$ и $a - a' \in mA$, т. е. $a - a' = ma''$ для некоторого $a'' \in A$, то

$$u \otimes (a - a') = u \otimes ma'' = mu \otimes a'' = 0 \otimes a'' = 0$$

и поэтому

$$h(a + mA) = u \otimes a = u \otimes a' = h(a' + mA).$$

Это доказывает, что h — гомоморфизм из A/mA в $\mathbb{Z}_m \otimes A$. Произвольный элемент группы $\mathbb{Z}_m \otimes A$ имеет вид $ku \otimes a$, где k — натуральное число и $a \in A$. Покажем теперь, что существует гомоморфизм $g\colon \mathbb{Z}_m \otimes A \to A/mA$, задаваемый формулой $g(ku \otimes a) = ka + mA$. Для этого рассмотрим отображение $t\colon \mathbb{Z}_m \times A \to A/mA$, для которого $t(ku, a) = ka + mA$. Если k' — такое натуральное число, что $k'u = ku$, то m делит $k' - k$ и поэтому $(k' - k)a \in mA$, т. е.

$$t(k'u, a) = k'a + mA = ka + mA = t(ku, a).$$

Следовательно, t — отображение. Более того, t — сбалансированное отображение из $\mathbb{Z}_m \otimes A$ в A/mA. Ввиду свойства универсальности тензорного произведения, существует гомоморфизм $g\colon \mathbb{Z}_m \otimes A \to A/mA$, для которого $g(ku \otimes a) = ka + mA$. Теперь имеем

$$hg(ku \otimes a) = h(ka + mA) = u \otimes ka = ku \otimes a,$$
$$gh(ka + mA) = g(u \otimes ka) = g(ku \otimes a) = ka + mA,$$

поэтому hg и gh — тождественные отображения. Следовательно, h — изоморфизм (и $h^{-1} = g$).

11.7.3. Если A — произвольная делимая группа, например $A = Q$, то $mA = A$ и поэтому $\mathbb{Z}_m \otimes A \approx A/A = 0$. С другой стороны, если A — произвольная группа порядка m, например $A = \mathbb{Z}_m$, то $\mathbb{Z}_m \otimes A \approx A$.

11.8. Упражнения.

11.8.1. Если m и n — элементы кольца $\mathbb{Z}$ и $d = (m, n)$ — их наибольший общий делитель, то $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Таким образом, из условия $(m, n) = 1$ следует, что $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

11.8.2. Если R и S — кольца и имеет место ситуация ${}_AA_R$, ${}_RB_S$, ${}_SC$, то определен естественный изоморфизм

$$(A \underset{R}{\otimes} B) \underset{S}{\otimes} C \approx A \underset{R}{\otimes} (B \underset{S}{\otimes} C).$$

11.8.3. Если R — коммутативное кольцо, A и B суть R-модули, то имеет место изоморфизм $A \underset{R}{\otimes} B \approx B \underset{R}{\otimes} A$, при котором $a \otimes b$ отображается в $b \otimes a$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

[1]) Здесь 1_A обозначает вложение идеала A в кольцо. — *Прим. ред. и перев.*

Тензорные произведения бимодулей

Групповой гомоморфизм h (S, R)-бимодуля M называется (S, R)-**гомоморфизмом**, если

$$h(sxr) = sh(x)\,r \text{ для всех } x \in M,\ s \in S,\ r \in R.$$

11.9. Предложение. *Пусть M и M' суть (S, R)-бимодули, N, N' — левые R-модули, и пусть даны (S, R)-гомоморфизм $f\colon M \to M'$ и R-гомоморфизм $g\colon N \to N'$. Тогда $f \otimes g$ является S-гомоморфизмом левых S-модулей $M \underset{R}{\otimes} N$ и $M' \underset{R}{\otimes} N'$.*

Доказательство. Мы уже показали, что $M \underset{R}{\otimes} N$ и $M' \underset{R}{\otimes} N'$ — левые S-модули. Если $s \in S$, $x \in M$, $y \in N$ и $u = x \underset{R}{\otimes} y$, то

$$su = sx \underset{R}{\otimes} y$$

и

$$(f \otimes g)(su) = f(sx) \otimes g(y) = sf(x) \otimes g(y) = s(f \otimes g)(x \otimes y) = s(f \otimes g)(u).$$

Так как $M \underset{R}{\otimes} N$ порождается элементами вида $u = x \underset{R}{\otimes} y$, где x пробегает все M, а y — все N, то

$$(f \otimes g)(sw) = s(f \otimes g)(w)$$

для всех $w \in M \underset{R}{\otimes} N$ и $s \in S$. □

11.10. Следствие. *Пусть R — кольцо, а I и J — непустые множества. Тогда произведение гомоморфизмов*

$$R^{(I)} \underset{R}{\otimes} R^{(J)} \to (R^{(I)} \underset{R}{\otimes} R)^{(J)} \to (R^{(I)})^{(J)} \to R^{(I \times J)}$$

является (R, R)-бимодульным изоморфизмом. (Другими словами, тензорное произведение двух свободных модулей — свободный модуль.)

Доказательство. Воспользоваться каноническим изоморфизмом $R \underset{R}{\otimes} M \approx M$, тем, что $\underset{R}{\otimes}$ сохраняет копроизведения (11.6), и 11.9. □

11.11. Следствие. *Пусть даны левый R-модуль E и множество I. Тогда если $\{x_i \mid i \in I\}$ — базис свободного правого R-модуля $R^{(I)}$, то каждый элемент a в $R^{(I)} \underset{R}{\otimes} E$ однозначно представляется в виде суммы*

$$a = \sum_{i \in I'} x_i \otimes y_i,$$

где I' — конечное подмножество в I, а $y_i \in E$ для всех $i \in I$.

Доказательство легко следует из того, что любой функтор тензорного произведения сохраняет копроизведения (см. 11.6.1). Таким образом, возникают канонические изоморфизмы $R^{(I)} \underset{R}{\otimes} E \approx E^{(I)}$. □

Замена колец

По определению R-модулем $[M, R, f]$ является абелева группа M вместе с кольцевым антигомоморфизмом $f\colon R \to \operatorname{End} M_{\mathbb{Z}}$ (см. 3.4). Поэтому если $h\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, то имеем **притягивающий S-модуль** $[M, S, fh]$, который обозначается через (M_S). Аналогично левый R-модуль N становится левым S-модулем $({}_SN)$.

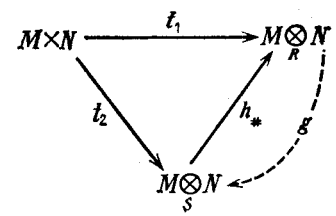
11.12. Лемма о притяжении. *Для кольцевого гомоморфизма $h\colon S \to R$ и R-модулей M_R, ${}_RN$ и ${}_RA$ имеют место гомоморфизмы*

$$\begin{cases} h_\#\colon (M_S) \underset{S}{\otimes} ({}_SN) \to M \underset{R}{\otimes} N \\ \qquad x \underset{S}{\otimes} y \mapsto x \underset{R}{\otimes} y, \end{cases}$$

$$h^\#\colon \operatorname{Hom}_R(A, N) \to \operatorname{Hom}_S(({}_SA), ({}_SN)).$$

Если h — эпиморфизм, то $h_\#$ и $h^\#$ — изоморфизмы.

Доказательство. Рассмотрим отображения



где

$$t_1(x, y) = x \underset{R}{\otimes} y,$$

$$t_2(x, y) = x \underset{S}{\otimes} y.$$

Если $s \in S$, то

$$(xs) \underset{R}{\otimes} y = (xh(s)) \underset{R}{\otimes} y = x \underset{R}{\otimes} (h(s)\,y) = x \underset{R}{\otimes} (sy).$$

Итак, t_1 — сбалансированное отображение над S и поэтому в силу 11.1 существует гомоморфизм $h_\#$. Аналогично, если h — эпи-

морфизм, то для каждого $r \in R$ найдется $s \in S$, такой, что $r = h(s)$, откуда

$$t_2(xr, y) = t_2(xs, y) = t_2(x, sy) = t_2(x, ry).$$

Следовательно, t_2 сбалансировано над R и, в силу 11.1, определен гомоморфизм g. Так как $h_\# g = g h_\# $ — тождественное отображение, то $h_\#$ — изоморфизм.

Если h — эпиморфизм, то фактически $\mathrm{Hom}_R(A, N) = \mathrm{Hom}_S(A, N)$, поэтому за $h^\#$ можно взять тождественное отображение.

11.13. Следствие. *Если $h\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм, то R является (притягивающим) левым S-модулем и для любого множества I правый R-модуль*

$$S^{(I)} \underset{S}{\otimes} R$$

свободен. Если $\{x_i \mid i \in I\}$ — базис свободного S-модуля $S^{(I)}$, то $\{x_i \otimes 1 \mid i \in I\}$ — базис свободного R-модуля $S^{(I)} \underset{S}{\otimes} R$.

Доказательство. Это следует из 11.11.

Напомним, что по определению свободный R-модуль имеет **инвариантное базисное число**, если любые два его базиса имеют одинаковую мощность (гл. 3). Кольцо, над которым каждый свободный правый R-модуль имеет инвариантное базисное число, называется IBN-кольцом. Это свойство право-лево симметрично.

11.14. Теорема. *Пусть $f\colon S \to R$ — ненулевой кольцевой гомоморфизм. Если R есть* IBN*-кольцо, то таким же является кольцо S.*

Доказательство. Пусть $F \approx S^{(I)}$ — свободный правый S-модуль. По следствию 11.13, $F \underset{S}{\otimes} R$ — свободный правый R-модуль, изоморфный $R^{(I)}$. Так как R есть IBN-кольцо, каждый базис модуля F имеет мощность $|I|$, и поэтому S есть IBN-кольцо. □

Любое коммутативное кольцо S (а также любое локальное кольцо) удовлетворяет условию теоремы, поскольку факторкольцо кольца S по максимальному идеалу является телом. В действительности, так как каждое нётерово кольцо — IBN-кольцо, то любое кольцо, обладающее ненулевым нётеровым факторкольцом, является IBN-кольцом. (См. Левитт [57] и Кон [66].)

11.15. Следствие. *Пусть R и S — кольца, P — проективный правый R-модуль и Q — (R, S)-бимодуль, являющийся проективным S-модулем. Тогда $P \underset{R}{\otimes} Q$ — проективный S-модуль.*

Доказательство. S-модуль A проективен тогда и только тогда, когда функтор $\mathrm{Hom}_S(A, \ )$ точен, т. е. точность последовательности $B \to C \to 0$ влечет за собой точность последовательности $\mathrm{Hom}_S(A, B) \to \mathrm{Hom}_S(A, C) \to 0$. Так как P — проективный R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, \ )$ точен и, в частности, точна последовательность

$$\mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_S(Q, B)) \to \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_S(Q, C)) \to 0.$$

Применяя предложение об ассоциативности сопряженности, получаем, что последовательность

$$\mathrm{Hom}_S(P \underset{R}{\otimes} Q, B) \to \mathrm{Hom}_S(P \underset{R}{\otimes} Q, C) \to 0$$

точна. Поэтому точен функтор $\mathrm{Hom}_S(P \underset{R}{\otimes} Q, \ )$, откуда следует, что S-модуль $P \underset{R}{\otimes} Q$ проективен. □

Следующее утверждение является исходным для определения и изучения группы Брауэра.

11.16. Следствие. *Если R — коммутативное кольцо, то тензорное произведение двух проективных R-модулей — проективный R-модуль.* □

Если A — правый R-модуль, то его дуальный $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$ каноническим образом наделяется структурой левого R-модуля. (См. 3.7.1 (b).) Если B — левый R-модуль, то его дуальный обозначим через $B^* = \mathrm{Hom}_R(B, R)$.

11.17. Следствие. *Если A — правый R-модуль и B — (R,R)-бимодуль, то имеет место естественный изоморфизм* $\mathrm{Hom}_R(A, B^*) \approx (A \underset{R}{\otimes} B)^*$.

Доказательство. Применить 11.4 к ситуации A_R, ${}_R B_R$, R_R. □

11.18. Следствие. *Если D — произвольная абелева группа и A — правый R-модуль, то $A' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ — левый R-модуль. Если B — произвольный левый R-модуль, то имеет место естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_R(A, B') \approx (A \underset{R}{\otimes} B)'.$$

Доказательство. Применить 11.4 к ситуации A_R, ${}_R B_{\mathbb{Z}}$, $D_{\mathbb{Z}}$. □

Если P и A суть R-модули, то определен гомоморфизм

$$\mu: A \underset{R}{\otimes} P^* \to \mathrm{Hom}_R(P, A),$$

где $\mu(a \otimes f)(p) = af(p)$ для всех $f \in P^*$, $a \in A$, $p \in P$ (см. следующие упражнения).

11.19. Упражнения.

11.19.1. Если P_R конечно порожден и проективен и $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$, то $\mu: A \underset{R}{\otimes} P^* \to \mathrm{Hom}_R(P, A)$ — изоморфизм. Пусть $S = \mathrm{End}_R P$. Тогда имеет место изоморфизм (S, S)-бимодулей.

$$P \underset{R}{\otimes} P^* \to \mathrm{End}_R P.$$

11.19.2. Если модуль P над коммутативным кольцом конечно порожден и проективен, то для всех R-модулей A имеет место естественный изоморфизм $P^* \underset{R}{\otimes} A^* \approx (P \underset{R}{\otimes} A)^*$.

11.19.3. В ситуации P_R, ${}_SM_R$, ${}_SN$ определено естественное преобразование

$$\Phi: P \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_S(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(P, M), N),$$

где

$$\Phi(p \otimes f)(g) = fgp$$

для всех $p \in P$, $f \in \mathrm{Hom}_S(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. (a) Если P конечно порожден и проективен над R, то Φ — естественный изоморфизм. [*Указание*: это тривиально для $P = R$.] (b) Если $S = \mathrm{End}\, P_R$, то Φ дает изоморфизм

$$P \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_S(P, S) \approx S.$$

[*Замечание*: $\mathrm{Hom}_S(P, S)$ — модуль, S-дуальный к P.]

11.19.4. Рассмотрим ситуацию A_R, ${}_SB_R$ и ${}_SC$ для колец R и S и модулей A, B, C. (Ср. 11.4.) Тогда существует естественный изоморфизм

$$h: \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \to \mathrm{Hom}_S(B \underset{R}{\otimes} A, C),$$

такой, что для каждого $f: A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$ имеем

$$h[f](b \otimes a) = f(a)[b].$$

Характеризации плоских модулей

Как было определено в гл. 5, левый R-модуль M называется плоским, если функтор $\underset{R}{\otimes} M$ со значениями в категории абелевых групп точен. В этом параграфе предлагаются несколько характеризаций плоскостности модуля.

11.20. Предложение. *Следующие свойства правого R-модуля M эквивалентны:*

(a) *M плоский.*

(b) *Для каждого конечно порожденного левого идеала A кольца R каноническое отображение*

$$g\begin{cases} M \underset{R}{\otimes} A \to MA \\ m \otimes a \mapsto ma \quad (m \in M,\ a \in A) \end{cases}$$

есть изоморфизм.

Если выполнено (a) *или* (b), *то отображение $M \underset{R}{\otimes} A \to MA$ оказывается изоморфизмом для любого левого идеала A кольца R.*

Доказательство (a) $\Rightarrow$ (b). Каноническое отображение $M \otimes R \xrightarrow{f} M$ — изоморфизм. Так как M — плоский модуль, то $M \otimes A \xrightarrow{g} M \otimes R$ — мономорфизм. Следовательно, $M \otimes A \xrightarrow{fg} M$ — мономорфизм. Так как $\mathrm{im}\, fg = MA$, то каноническое отображение g оказывается изоморфизмом. Это верно для любого левого идеала A.

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть A — произвольный левый идеал и предположим, что $a_i \in A$, $m_i \in M$, $i = 1, \ldots, t$, таковы, что $\sum_{i=1}^{t} m_i a_i = 0$. Поскольку левый идеал $B = \sum_{i=1}^{t} Ra_i$ конечно порожден, каноническое отображение $M \otimes B \to MB$ по условию является изоморфизмом. Поэтому $\sum_{i=1}^{t} m_i \otimes a_i = 0$ в $M \underset{R}{\otimes} B$. Ввиду канонического гомоморфизма $M \underset{R}{\otimes} B \to M \underset{R}{\otimes} A$, имеем $\sum_{i=1}^{t} m_i \otimes a_i = 0$ в $M \underset{R}{\otimes} A$, и, следовательно, отображение $M \underset{R}{\otimes} A \to MA$ — изоморфизм для всех левых идеалов. Это влечет за собой, что $M \otimes A \to M$ — мономорфизм, откуда следует, что $M' \to (M \underset{R}{\otimes} A)'$ — эпиморфизм (см. 3.39 и стр. 215). Так как $(M \underset{R}{\otimes} A)' \approx \mathrm{Hom}_R(A, M')$ в силу результата, соответствующего 11.18 и вытекающего из 11.19.4 (вместо 11.4), то отображение

$$\mathrm{Hom}_R(R, M') \to \mathrm{Hom}_R(A, M')$$

является эпиморфизмом. Поэтому из критерия Бэра 3.41 вытекает инъективность левого R-модуля M', откуда в силу 5.60 M — плоский R-модуль. □

11.21. Следствие. *Пусть P — плоский R-модуль и K — его подмодуль. Тогда модуль P/K плоский в том и только том случае, когда*

$$KA = PA \cap K \tag{1}$$

для каждого конечно порожденного левого идеала A кольца R. Если это так, то (1) справедливо для каждого левого идеала A.

Доказательство. Так как функтор $\otimes_R A$ точен справа, то последовательность

$$K \underset{R}{\otimes} A \to P \underset{R}{\otimes} A \to (P/K) \underset{R}{\otimes} A \to 0$$

точна. Так как модуль P плоский, то каноническое отображение $P \underset{R}{\otimes} A \to PA$ — изоморфизм, который отображает $K \underset{R}{\otimes} A$ на KA. Таким образом, $(P/K) \underset{R}{\otimes} A \approx PA/KA$. Поэтому по предложению 11.20 модуль P/K плоский тогда и только тогда, когда

$$(P/K)\,A \approx PA/KA \tag{2}$$

для всех (конечно порожденных) левых идеалов A. Мы покажем, что этот изоморфизм эквивалентен соотношению (1). По теореме о гомоморфизмах 1.14 имеем

$$(P/K)\,A = (PA + K)/K \approx PA/PA \cap K. \tag{3}$$

Таким образом, (2) эквивалентно изоморфизму

$$PA/KA \approx PA/PA \cap K. \tag{4}$$

Так как $PA \cap K \supseteq KA$, а изоморфизмы (2), (3) и (4) канонические, то (2) эквивалентно (1). Так как плоскостность модуля P/K эквивалентна (2), мы получаем желаемый результат. □

11.22. Следствие. *Любой проективный R-модуль является плоским* (ср. 5.61). □

11.23. Следствие. *Если P — плоский R-модуль и K — его подмодуль, то модуль P/K является плоским тогда и только тогда, когда $Pa \cap K \subseteq Ka$ для всех $a \in R$. (В этом случае $Pa \cap K = Ka$.)*

Доказательство. $PA \cap K \supseteq KA$ для любого левого идеала A кольца R. Поэтому соотношение (1) выполняется тогда и только тогда, когда

$$PA \cap K \subseteq KA. \tag{1'}$$

Из $Pa \cap K \subseteq Ka$ для всех $a \in A$ следует (1'). Обратно, из справедливости (1') для конечно порожденных левых идеалов вытекает $PRa \cap K \subseteq KRa$, или, что то же самое, $Pa \cap K \subseteq Ka$ для всех $a \in A$, чем и завершается доказательство. □

Кольца, определяемые в 11.24, были введены фон Нейманом [31] и охарактеризованы плоскостностью всех модулей над ними Харадой [56] и Ауслендером [57].

11.24. Теорема и определение. *Говорят, что кольцо R* **регулярно**, *если справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

(a) *Каждый правый R-модуль плоский.*

(a′) *Каждый левый R-модуль плоский.*

(b) *Для каждого $a \in R$ существует $x \in R$, такой, что $a = axa$.*

(c) *Каждый главный правый идеал порождается идемпотентом.*

(c′) *Каждый главный левый идеал порождается идемпотентом.*

(d) *Каждый конечно порожденный правый идеал порождается идемпотентом.*

(e + i) *Утверждение, лево-право симметричное утверждению* (i), *где* i = a, b, c, d.

Доказательство. Допустим, что каждый R-модуль является плоским. Если $a \in R$, то R/aR — плоский модуль, и, применяя следствие 11.23 для случая $P = R$, $K = aR$, получаем $Ra \cap aR \subseteq aRa$. Таким образом, $a = axa$ для некоторого $x \in R$. Итак (a) ⇒ (b). Обратно, допустим, что справедливо (b), и пусть P — свободный модуль, K — его подмодуль и $a \in R$. Тогда $a = axa$ для некоторого $x \in R$, откуда $e = xa$ — идемпотент и $Ra = Re$. Поэтому $Ma = Me$ для любого R-модуля M. Так как e — идемпотент, то $Pe \cap K \subseteq Ke$, и поэтому $Pa \cap K \subseteq Ka$. Это, ввиду следствия 11.23, показывает, что P/K — плоский модуль. Так как любой R-модуль M изоморфен модулю P/K для подходящих свободного R-модуля P и подмодуля K, то каждый R-модуль является плоским.

(b) ⇔ (c). Если $a = axa$, то $e = ax$ — идемпотент, который порождает циклический правый идеал, порожденный a. Обратное доказывается аналогично.

(c) ⇒ (d) предоставляется читателю в качестве упражнения (к тому же эта импликация устанавливается далее в 19.7), а (d) ⇒ ⇒ (c) тривиальна. Наконец, (e + i) — следствие симметричности утверждения (b). □

11.25. Упражнения.

* 11.25.1. Прямое слагаемое плоского модуля является плоским модулем, и любой прямой предел плоских модулей — плоский модуль. В частности, прямая сумма плоских модулей — плоский модуль. Каждый плоский модуль является прямым пределом проективных модулей.

11.25.2. Любой плоский модуль является модулем без кручения (см. стр. 208).

* 11.25.3. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда R-модуль M является плоским в том и только том случае, когда M — «ло-

кально плоский», т. е. для любого простого идеала P «локальный модуль» $M_P = M \otimes_R R_P$, где R_P—локальное кольцо кольца R в P, является плоским. Вывести отсюда, что локальное кольцо R_P является плоским R-модулем для любого простого идеала P.

11.25.4. Пусть R — коммутативная наследственная область целостности. Тогда R-модуль M является плоским в том и только том случае, когда M есть модуль без кручения. Таким образом, любое надкольцо кольца R плоское. (**Надкольцом** кольца R называется любое подкольцо кольца частных кольца R, содержащее R. См. упражнения к гл. 11.)

11.25.5. Над коммутативным кольцом R тензорное произведение двух плоских модулей является плоским модулем.

11.25.6. (a) Пусть P — плоский правый R-модуль и K — его подмодуль. Если модуль P/K плоский, то $Pa \cap K = 0$ для всех $a \in \operatorname{ann}_R K$.

(b) Если I — правый идеал кольца R и R/I — плоский R-модуль, то $I^{\perp} \cap I = 0$.

11.26. Предложение. *Пусть R—кольцо и $0 \to K \to F \to A \to 0$— точная последовательность правых R-модулей, где F—свободный модуль с базисом $\{x_\alpha\}$. Для каждого элемента $u = x_{\alpha_1}a_1 + \ldots + x_{\alpha_r}a_r$ модуля F обозначим через I_u левый идеал кольца R, порожденный элементами $a_1, \ldots, a_r$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *A плоский.*

(b) *Если $u \in K$, то $u \in KI_u$.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Если A плоский и $u \in K$, то $u \in K \cap FI_u = KI_u$ по 11.21.

(b) $\Rightarrow$ (a) Пусть I — произвольный левый идеал в R и $u \in K \cap FI$. Тогда ясно, что $I_u \subseteq I$ и поэтому $u \in KI_u \subseteq KI$. Так как это верно для всех $u \in K \cap FI$, то отсюда следует, что $K \cap FI = KI$. Следовательно, модуль A плоский, ввиду 11.21, что и требовалось. □

Следующую характеризацию плоских модулей Чейз [60] приписывает Вильямайору (не опубликовано).

11.27. Предложение. *Пусть R —кольцо и $0 \to K \to F \to A \to 0$ — точная последовательность правых R-модулей, причем F свободен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *A плоский.*

(b) *Для любого $u \in K$ существует гомоморфизм θ: $F \to K$, такой, что $\theta(u) = u$.*

(c) *Для любых $u_1, \ldots, u_n$ из K существует гомоморфизм θ: $F \to K$, такой, что $\theta(u_i) = u_i$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $u \in K$. Определим I_u, как в 11.26, т. е. если $u = x_{\alpha_1}a_1 + \ldots + x_{\alpha_r}a_r$, где $\{x_\alpha\}$ — базис модуля F, то $I_u = \sum_{i=1}^{r} Ra_i$. Так как A плоский, предложение 11.26 влечет за собой, что $u \in KI_u$ и поэтому $u = v_1a_1 + \ldots + v_ra_r$, где $v_i \in K$. Определим гомоморфизм θ: $F \to K$, полагая $\theta(x_{\alpha_i}) = v_i$ для $i = 1, \ldots, r$ и $\theta(x_\alpha) = 0$, если $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Тогда ясно, что θ обладает требуемым свойством.

(b) $\Rightarrow$ (a). Для данного элемента $u = x_{\alpha_1}a_1 + \ldots + x_{\alpha_r}a_r$ из K рассмотрим гомоморфизм θ: $F \to K$, такой, что $\theta(u) = u$. Тогда $u = \theta(x_{\alpha_1})a_1 + \ldots + \theta(x_{\alpha_r})a_r$, и, таким образом, u лежит в KI_u. Теперь из 11.26 следует, что A — плоский модуль.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть $u_1, \ldots, u_n \in K$. Если $n = 1$, то существование θ следует из (b). Доказательство продолжим индукцией по n: допустим, что $n > 1$ и (c) выполнено для $k < n$. Пусть θ_n: $F \to K$ — такой гомоморфизм, что $\theta_n(u_n) = u_n$. Положим $v_i = u_i - \theta_n(u_i)$ для $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда по предположению индукции существует гомоморфизм θ': $F \to K$, такой, что $\theta'(v_i) = v_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Определим гомоморфизм θ: $F \to K$, положив $\theta = 1 - (1 - \theta')(1 - \theta_n)$. Тогда θ обладает требуемым свойством.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (b) тривиальна. □

Конечно представимые плоские модули проективны

В этом параграфе устанавливается, что плоский модуль $M = F/K$, где F — свободный, а K конечно порожден, обязательно проективен. (См. 11.30.) Отсюда следует, что над нётеровыми кольцами конечно порожденные плоские модули проективны (см. 11.31).

Модуль M над кольцом R называется **конечно связанным** или **конечно представимым**, если существует точная последовательность

$$0 \to K \to R^n \to M \to 0, \tag{1}$$

где n — целое число, большее нуля, а K конечно порожден. Это эквивалентно требованию существования целых чисел m и n, таких, что последовательность

$$R^m \to R^n \to M \to 0 \tag{2}$$

точна. Из следующей леммы вытекает, что если модуль M конечно связанный, то из точности последовательности (1) следует, что модуль K конечно порожден.

11.28. Лемма (Шанюэль). *Пусть последовательности*

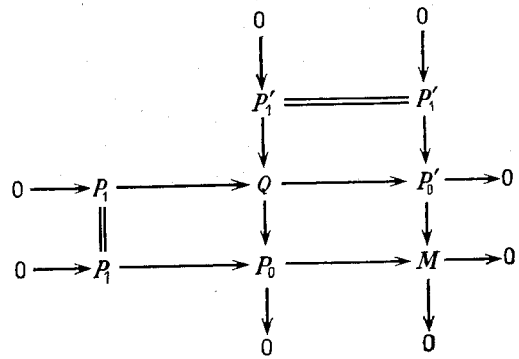
$$0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{f} M \to 0,$$

$$0 \to P_1' \to P_0' \xrightarrow{f} M \to 0$$

точны, а модули P_0 и P_0' проективны. Тогда имеет место изоморфизм

$$P_0 \oplus P_1' \approx P_0' \oplus P_1.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами



где $Q \to M$ — расслоенное произведение гомоморфизмов f и f'. Так как P_0 проективен, то $Q \to P_0$ расщепляется и поэтому $Q \approx P_0 \oplus P_1'$. Аналогично, $Q \approx P_0' \oplus P_1$. □

11.29. Упражнение. Если последовательности

$$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0,$$

$$0 \to P_n' \to \ldots \to P_0' \to M \to 0$$

точны, P_i и P_i', $0 \leqslant i \leqslant n-1$, — проективные модули, то имеет место изоморфизм

$$P_0 \oplus P_1' \oplus P_2 \oplus \ldots \approx P_0' \oplus P_1 \oplus P_2' \oplus \ldots .$$

11.30. Следствие. *Пусть R — произвольное кольцо. Если в точной последовательности*

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

M — плоский модуль, F свободен и K конечно порожден, то M проективен. Таким образом, любой конечно связанный плоский модуль проективен.

Доказательство. Если $M \approx F/K$ — плоский модуль и K конечно порожден, то, ввиду 11.27 (с), определено отображение u: $F \to K$, продолжающее тождественное отображение $K \to K$. Отсюда следует, что $F = K \oplus X$, где $X = \{u(x) - x \mid x \in F\}$ и поэтому $M \approx X$. Но X проективен, так как проективен F. □

11.31. Следствие. *Если R нётерово справа, то любой конечно порожденный плоский правый R-модуль проективен.*

Доказательство. Над нётеровым справа кольцом любой конечно порожденный модуль конечно представим, поэтому применимо 11.30. □

11.32. Предложение (Лазар [64])[1]). *Над произвольным кольцом R любой плоский модуль является прямым пределом проективных модулей.*

Доказательство. Обозначим через E множество $M \times \mathbb{N}$ и рассмотрим точную последовательность $0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} M \to 0$, в которой F — свободный R-модуль с базисом $\{c_{(x,n)}\}_{(x,n)\in E}$, а π задается соответствием $c_{(x,n)} \mapsto x$. Если $\{K_i\}_{i\in I}$ — направленное семейство конечно порожденных подмодулей модуля K, то по упр. к гл. 6 $K = \varinjlim_{i\in I} K_i$ и тогда $M \approx F/K = \varinjlim_{i\in I} F/K_i$ (ср. с гл. 14). Покажем, что в семействе $\{K_i\}_{i\in I}$ имеется кофинальное подмножество $\{P_j\}_{j\in J}$ свободных конечно порожденных прямых слагаемых модуля F. Для каждого K_i по 11.27 (с) и его доказательству существует гомоморфизм θ_i: $F \to K$, такой, что $\theta_i(u) = u$ для всех $u \in K_i$ и $\theta_i(F)$ — конечно порожденный подмодуль в K. В частности, $K_i \subseteq \theta_i(F)$ и $\theta_i(F)$ содержится в некотором свободном конечно порожденном прямом слагаемом $F_i = Rc_{(x_1,n_1)} + \ldots + Rc_{(x_r,n_r)}$ модуля F. Выберем в базисе модуля F элементы $c_{(x_1,n_1')}, \ldots, c_{(x_r,n_r')}$, такие, что $n_j \neq n_j'$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Тогда если F_i' — порожденный ими подмодуль, то $F = F_i \oplus F_i' \oplus X$ и соответствие $c_{(x_j,n_j')} \mapsto c_{(x_j,n_j)}$ определяет изоморфизм $F_i' \to F_i$. Рассмотрим теперь копроизведение h: $F_i \oplus F_i' \to F_i$ этого изоморфизма и гомоморфизма $1 - \bar{\theta}_i$: $F_i \to F_i$, где $\bar{\theta}_i$ — ограничение на F_i гомоморфизма θ_i. Очевидно, что h — эпиморфизм и поэтому $P = \ker h$ — конечно порожденное прямое слагаемое модуля $F_i \oplus F_i'$ (а следовательно, и модуля F). Ясно, что $P \supseteq K_i$, так как $(1 - \bar{\theta}_i)(K_i) = 0$. Наконец из того,

[1]) См. также В. Е. Говоров, *Докл. АН СССР*, 144 (1962), 965—967; *Алгебра и логика*, 2, № 6 (1963), 21—50.— *Прим. перев.*

что $\pi(c_{(x,n)}) = \pi h(c_{(x,n)})$ для любого элемента из базиса модуля $F_i \oplus F_i'$, следует, что $P \subseteq K$. Итак, мы доказали, что семейство $\{P_j\}_{j\in J}$ кофинально в $\{K_i\}_{i\in I}$. Следовательно, $K = \varinjlim_{j\in J} P_j$ и $M \approx F/K = \varinjlim_{j\in J} F/P_j$ — прямой предел проективных модулей. □

Несколько следующих предложений и их доказательства заимствованы из работы Чейза [60].

11.33. Предложение. *Пусть R — кольцо и A — правый R-модуль. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *A — плоский модуль.*

(b) *Если $a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r = 0$, где $a_k \in A$ и $\lambda_k \in R$, то существуют $b_1, \ldots, b_n \in A$ и $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$ $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, r)$, такие, что $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ и $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_k = 0$.*

(c) *Если $\sum_{k=1}^{r} a_k\lambda_{kj} = 0$, где $a_k \in A$ и $\lambda_{kj} \in R$ $(j = 1, \ldots, s)$, то существуют $b_1, \ldots, b_n \in A$ и $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$ $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r)$, такие, что $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ и $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0$.*

Доказательство. (a)⇒(c). Пусть $f: F \to A$ — эпиморфизм, где F — свободный правый R-модуль, и $K = \ker(f)$. Выберем $x_1, \ldots, x_r$ в F так, что $f(x_k) = a_k$, и положим $u_j = \sum_{k=1}^{r} x_k\lambda_{kj}$ для $j = 1, \ldots, s$. Тогда $f(u_j) = \sum_{k=1}^{r} a_k\lambda_{kj} = 0$. Так как A плоский, то из 11.29 вытекает существование такого гомоморфизма $\theta: F \to K$, что $\theta(u_j) = u_j$. Запишем $x_k - \theta(x_k) = \sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik}$, где $z_1, \ldots, z_n$ — элементы базиса модуля F. Положим $b_i = f(z_i)$. Тогда $a_k = f(x_k) = f(x_k - \theta(x_k)) = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$. Поэтому

$$0 = u_j - \theta(u_j) = \sum_{k=1}^{r} (x_k - \theta(x_k))\lambda_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik}\Big)\lambda_{kj} = \sum_{i=1}^{n} z_i \Big(\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj}\Big).$$

Так как $z_1, \ldots, z_n$ — часть базиса модуля F, то $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_{kj} = 0$.

(c)⇒(b). Тривиально.

(b)⇒(a). Пусть $f: F \to A$ — эпиморфизм, где F — свободный правый R-модуль с базисом $\{x_\alpha\}$. Пусть $K = \ker f$, и предположим, что $u = x_{\alpha_1}\lambda_1 + \ldots + x_{\alpha_r}\lambda_r$ лежит в K. Положим $a_k = f(x_{\alpha_k})$. Тогда $a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r = f(u) = 0$. По условию существуют $b_1, \ldots, b_n$ в A и $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$ $(i \leqslant n,\ k \leqslant r)$, такие, что $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik}$ и $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_k = 0$. Выберем $z_i \in F$ так, что $f(z_i) = b_i$. Определим гомоморфизм $\theta: F \to F$, положив $\theta(x_{\alpha_k}) = x_{\alpha_k} - \sum_{i=1}^{n} z_i\mu_{ik}$ для $k \leqslant r$ и $\theta(x_\alpha) = 0$ для $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Тогда $f\{\theta(x_{\alpha_k})\} = a_k - \sum_{i=1}^{n} b_i\mu_{ik} = 0$ и поэтому $\theta(F) \subseteq K$. Окончательно имеем

$$\theta(u) = u - \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{i=1}^{n} z_i u_{ik}\Big)\lambda_k = u - \sum_{i=1}^{n} z_i \Big(\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_k\Big) = u.$$

Тогда из 11.29 следует, что A — плоский модуль. □

Функториальное доказательство следующего предложения (использующее функтор Tor) было дано Колби и Раттером [71, стр. 248]. (Ср. Ленцинг [69].)

11.34. Предложение. *Для любого кольца R следующие условия эквивалентны:*

(a) *Прямое произведение любого семейства плоских правых R-модулей является плоским R-модулем.*

(b) *Прямое произведение любого семейства экземпляров кольца R является плоским правым R-модулем.*

(c) *Любой конечно порожденный подмодуль свободного левого R-модуля конечно связан.*

(d) *Любой конечно порожденный левый идеал в R конечно связан.*

Если эти условия выполнены, то говорят, что R ***когерентно слева.***

Доказательство. (a)⇒(b) тривиально, так как R является плоским правым R-модулем.

(b)⇒(c). Пусть G — свободный левый R-модуль, и L — конечно порожденный подмодуль модуля G. Ясно, что мы можем считать G конечно порожденным и поэтому для некоторого целого $s > 0$ отождествить G с левым R-модулем всех s-строк $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ элементов кольца R. Пусть $u_1, \ldots, u_r$, где $u_k = (\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{ks})$, порождают L. Рассмотрим свободный левый R-модуль F с бази-

сом $x_1, \ldots, x_r$ и определим эпиморфизм $f\colon F \to L$, положив $f(x_k) = u_k$. Пусть $K = \ker f$, и пусть $R^{(\alpha)}$ — экземпляр кольца R для каждого $\alpha \in K$. Рассмотрим правый R-модуль $A = \prod_{\alpha \in K} R^{(\alpha)}$. Если $\alpha = a_1(\alpha)\, x_1 + \ldots + a_r(\alpha)\, x_r$ лежит в K, то $a_1(\alpha)\, u_1 + \ldots + a_r(\alpha)\, u_r = f(\alpha) = 0$ и поэтому $\sum_{k=1}^{r} a_k(\alpha)\, \lambda_{kj} = 0$ для всех $j \leqslant s$. Таким образом, полагая $a_k = \{a_k(\alpha)\} \in A$ для $k = 1, \ldots, r$, мы получаем, что $\sum_{k=1}^{r} a_k \lambda_{kj} = 0$ для $j \leqslant s$.

По предположению A — плоский правый R-модуль. Следовательно, существуют $b_1, \ldots, b_n \in A$ и $\{\mu_{ik}\} \subseteq R$ $(i \leqslant n,\ k \leqslant r)$, удовлетворяющие условиям предложения 2.3 (c). Положим $z_i = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} x_k \in F$ для $i \leqslant n$. Тогда $f(z_i) = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} u_k = 0$, так как $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} \lambda_{kj} = 0$ для всех $j \leqslant s$. Следовательно, $z_1, \ldots, z_n \in K$. Запишем $b_i = \{b_i(\alpha)\}$, где $b_i(\alpha) \in R$. Тогда, поскольку $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu_{ik}$ для всех $k \leqslant r$, мы легко получаем, что $a_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\alpha) \mu_{ik}$ для $k \leqslant r$ и $\alpha \in K$. Отсюда следует, что $\alpha = \sum_{k=1}^{r} a_k(\alpha)\, x_k = \sum_{i=1}^{n} b_i(\alpha)\, z_i$. Поэтому $z_1, \ldots, z_n$ порождают K. Этим завершается доказательство того, что L конечно связан.

(c) $\Rightarrow$ (d). Тривиально.

(d) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\{R^{(\alpha)}\}$ — любое семейство экземпляров кольца R, $A = \prod_{\alpha} R^{(\alpha)}$, и предположим, что $a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r = 0$, где $a_k = \{a_k(\alpha)\} \in A$ и $\lambda_k \in R$, $k \leqslant r$. Пусть I — левый идеал в R, порожденный элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, F — свободный левый R-модуль с базисом $x_1, \ldots, x_r$ и $f\colon F \to I$ — эпиморфизм, определенный правилом $f(x_k) = \lambda_k$. Пусть K — ядро эпиморфизма f. По предположению K конечно связан. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — множество образующих модуля K. Записав $z_i = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} x_k$ и полагая $u(\alpha) = a_1(\alpha)\, x_1 + \ldots + a_r(\alpha)\, x_r$, имеем $f(u(\alpha)) = a_1(\alpha)\, \lambda_1 + \ldots + a_r(\alpha)\, \lambda_r = 0$. Поэтому существуют $b_i(\alpha) \in R$, такие, что $u(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\alpha)\, z_i = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i(\alpha)\, \mu_{ik}\right) x_k$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — базис модуля F, то отсюда следует, что $a_k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\alpha)\, \mu_{ik}$ для всех α и поэтому $a_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu_{ik}$ для $k = 1, \ldots, r$. Наконец, $\sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\lambda_k = f(z_i) = 0$ для каждого $i \leqslant n$, так как $z_i \in K$. Теперь из 11.33 вытекает, что A плоский.

Доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (a) остается в качестве упражнения; сошлемся также на Чейза [60, стр. 461]. □

Мы закончим эту главу применением теоремы из главы 6.

11.35. Предложение (следствие из 6.28).

11.35.1. *Если M — (B, A)-бимодуль, то следующие условия эквивалентны:*

(a) $\mathrm{Hom}_A(M, \ )\colon \mathrm{mod}\text{-}A \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}B$ *сохраняет инъективные модули.*

(b) *Если Q — наименьший инъективный кообразующий в* mod-A, *то* $\mathrm{Hom}_A(M, Q)$ *инъективен в* mod-B.

(c) *Левый сопряженный функтора* $\mathrm{Hom}_A(M, \ )$ *точен.*

(d) *M — плоский B-модуль.*

11.35.2. *Если I — идеал кольца A, то каждый инъективный правый (A/I)-модуль инъективен в* mod-A *тогда и только тогда, когда A/I плоский A-модуль.*

11.35.3. *Если B — подкольцо кольца A, то каждый инъективный правый A-модуль является инъективным правым (каноническим) B-модулем тогда и только тогда, когда A является плоским как канонический левый B-модуль.* □

Это дает другое доказательство предложения 5.60, которое утверждает:

Левый B-модуль M является плоским тогда и только тогда, когда модуль характеров $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *модуля M является инъективным как канонический правый B-модуль.*

Упражнения к гл. 11

1. Следующие классы колец когерентны слева:

(a) Нётеровы слева.

(b) Полунаследственные слева.

(c) Кольцо многочленов и кольцо формальных степенных рядов от любого числа переменных над любым полем.

(d) Любое факторкольцо R/I когерентного слева кольца R, если I конечно порожден как левый идеал .

(e) $\mathrm{End}\, F_R$, где F — свободный модуль над когерентным слева кольцом R.

2. (Чейз [60]). Для любого кольца R следующие утверждения эквивалентны:

(a) R когерентно слева.

(b) Если I — конечно порожденный левый идеал, то таким же является левый идеал $(I\colon a) = \{r \in R \mid ra \in I\}$ для каждого $a \in R$.

(c) Пересечение двух конечно порожденных левых идеалов конечно порождено и таким же является $(0\colon a)$ для каждого $a \in R$. Если эти условия выполнены, то $(I\colon C) = \{r \in R \mid rC \subseteq I\}$ конечно порожден для любого конечно порожденного левого идеала I и конечного подмножества C из R.

* **3.** Пусть $f\colon R \to S$ — морфизм в RINGS. Следующие свойства эквивалентны: (1) $R \to S$ — эпиморфизм; (2) канонический гомоморфизм $S \otimes S \to S$ — изоморфизм; (3) включение mod-$S \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ mod-R является полным вложением.

* **4** (Ричман [65]). Коммутативная область целостности полунаследственна (т. е. прюферова) тогда и только тогда, когда каждое надкольцо является плоским. (Ср. 11.25.4.) В этом случае каждое надкольцо полунаследственно.

* **5** (Жантиль [60], Сандомирский [68]). Пусть R — полунаследственное справа кольцо. Тогда максимальное правое кольцо частных $\hat{R}$ кольца R является плоским левым модулем над R. Над антисингулярным справа кольцом при выполнении последнего условия любой конечно порожденный плоский подмодуль свободного правого R-модуля проективен.

6 (Жантиль [60]). Если R — наследственная справа область целостности, то любой левый R-модуль без кручения является плоским. Обобщить на (антисингулярные справа) наследственные справа кольца. (Ср. 11.25.4.)

7 (Жантиль [60]). Если R — правая область Ope, то правое тело частных K кольца R является плоским левым модулем над R. Кроме того, K является плоским правым R-модулем тогда и только тогда, когда K является также левым телом частных кольца R. Обобщить на полупервичные правые кольца Голди.

* **8** (Басс [60]). Каждый плоский правый R-модуль проективен тогда и только тогда, когда R является кольцом с условием минимальности для главных левых идеалов.

9. Говорят, что кольцо R **полупримарно**, если $R/\mathrm{rad}\ R$ классически полупросто и $\mathrm{rad}\ R$ нильпотентен. (См. гл. 18.) Любое полупримарное кольцо удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов. (По симметрии соответствующее утверждение верно для конечно порожденных левых идеалов.)

Таким образом, над полупримарными кольцами, в частности над артиновыми кольцами, любой плоский модуль проективен.

* **10.** Если R — такое кольцо, что $R/\mathrm{rad}\ R$ классически полупросто и идемпотенты кольца $R/\mathrm{rad}\ R$ «поднимаются» (ср. гл. 22), то любой конечно порожденный плоский модуль проективен.

* **11** (Эндо [62]). Над коммутативной областью целостности любой конечно порожденный плоский модуль проективен. (Ср. упр. 15.)

12. Кольцо R является правым IBN-кольцом, если каждое кольцо матриц R_n, $n = 1, 2, \ldots$, над R конечно по Дедекинду. Достаточным условием для этого является требование, чтобы R_n удовлетворяло условию максимальности для главных правых идеалов. (Если каждый правый идеал кольца R свободен, то это условие также и необходимо. Ср. Кон [65].) [*Указание к доказательству*: в любом кольце S из соотношений $ab = 1$ и $ba \neq 1$ следует существование бесконечного множества ортогональных идемпотентов $e_{ij} = b^{i-1}(1 - ba)\,a^{j-1}$ (Джекобсон [50]). [*Указание*: $e_{ij}e_{kq} = \delta_{jk}e_{iq}$.]

13. Пусть $R = \mathrm{End}_D\ V$, где V—бесконечномерное векторное пространство над телом D. Представим $V = W_1 \oplus W_2$, где W_1 и W_2 — подпространства, $W_1 \approx W_2 \approx V$. Итак, $V \approx V^2$, и отсюда заключаем, что $R = \mathrm{End}_D\ V \approx R_2 = \mathrm{End}_D\ V^2$. Теперь R_2 — свободный R-модуль с базисом из четырех элементов. Вывести отсюда, что $R \approx R^4$, и поэтому R не является ни правым, ни левым IBN-кольцом.

14. Если R — любая область целостности, не являющаяся областью Ope, то каждый конечно порожденный ненулевой правый идеал ее максимального правого кольца частных $\hat{R}$ изоморфен $\hat{R}$. Показать, что $\hat{R} \approx \hat{R}^2$ в mod-$\hat{R}$, поэтому $\hat{R}$ не является правым IBN-кольцом.

* **15** (Васконселос [69]). Конечно порожденный идеал I коммутативного кольца R проективен тогда и только тогда, когда I плоский и его аннулятор конечно порожден. (Более общим образом, конечно порожденный плоский модуль M проективен тогда и только тогда, когда «инвариантные факторы» модуля M конечно порождены.)

Замечания к гл. 11

Сопряженные функторы и теорему Кана, утверждающую, что $\otimes_R M$ сопряжен слева к $\mathrm{Hom}_R(M, \ )$, мы обсуждали в гл. 5. Первоначально Уитни [44] определил тензорное произведение абелевых групп. Кроме того, старомодным названием тензорного произведения является кронекерово произведение: «кронекерово» произведение двух векторных пространств размерностей m и n есть просто векторное пространство размерности mn.

Теорема о слабой глобальной размерности была доказана Ауслендером [55]: любое кольцо имеет одну и ту же слабую размерность с обеих сторон. (К тому же над нётеровым справа кольцом w.gl.dim R = gl.dim R. См. гл. 8.) Кроме того, класс колец, у которых w.gl.dim = 0, совпадает с классом регулярных колец (11.24) (Ауслендер [57] и Харада [56]).

Басс [60] выяснил, когда плоские модули проективны. (См. упр. 8 и гл. 22.) Лазар [64][1]) показал, что каждый плоский модуль является прямым пределом направленного множества конечно порожденных проективных (на самом деле свободных) модулей (11.32). Кроме того, Басс [60] выяснил, когда прямой предел проективных модулей проективен или когда слабая и проективная размерности любого модуля совпадают. Чейз [60] выяснил, когда прямые произведения плоских модулей являются плоскими (11.34) и, кроме того, когда произведение проективных модулей проективно.

Ссылки

Ауслендер [57], Басс [60], Бурбаки [61], Васконселос [69], [70a], [70b], Джекобсон [50], Жантиль [60], Кан [58], Колби и Раттер [71], Кон [66, 67], Лазар [64], Левитт [51], Ленцинг [69], Маклейн [66], Раттер [71], Ричмонд [65], Сандомирский [67, 68], Уитни [44], Харада [56], Чейз [60].

[1]) См. также В. Е. Говоров, *Доклады АН СССР*, **144** (1962), 965—967; *Алгебра и логика*, **2** (1963), № 6, 21—50.—*Прим. перев.*

Глава 12

ТЕОРЕМЫ МОРИТЫ И ГРУППА ПИКАРА

Теорема Мориты, сформулированная и доказанная в гл. 4, вновь появляется в этой главе в расширенном и более общем виде, используемом для определения группы Пикара Pic (mod-A) всех k-линейных автоэквивалентностей категории mod-A для произвольной алгебры A, а также (в упражнениях к гл. 12) группы Брауэра коммутативного кольца k.

По теореме Мориты 4.29 любая эквивалентность T: mod-$A \approx$ $\approx$ mod-B представима A-дуальным модулем $P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$, где $P = TA$. Таким образом, имеет место естественная эквивалентность функторов

$$T \approx h^{P^*} \& T^{-1} \approx h^P.$$

Более того, по ассоциативности сопряженности (см. 11.4) функторы

$$\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, \ ) \approx \otimes_A P$$

и

$$\mathrm{Hom}_B(P, \ ) \approx \otimes_B P^*$$

естественно эквивалентны. Отсюда следуют естественные изоморфизмы

$$P \otimes_B P^* \approx A \text{ и } P^* \otimes_A P \approx B$$

(A, A)- и (B, B)-бимодулей соответственно. В этом случае говорят, что P и P^* — обратимые (A, B)- и (B, A)-бимодули соответственно. Для любой k-алгебры A группа $\mathrm{Pic}_k A$ классов (P) обратимых (P, P)-бимодулей изоморфна группе Pic (mod-A) при отображении $(P) \mapsto P_A$ (см. 12.15).

В гл. 5 мы доказали теорему Попеску — Габриеля 5.70: *если U — образующий в C = mod-A (или, более общим образом, в категории Гротендика C) и $B = \mathrm{End}_C U$, то функтор $T = \mathrm{Mor}_C(U, \ )$ со значениями в категории* mod-B *обладает сопряженным слева* $G = \otimes_B U$ *и*

$$GT \approx 1_C.$$

(На самом деле G — точный функтор, см. 15.26.)

Из этой теоремы вытекает только что сформулированная теорема Мориты. Кроме того, как показано в гл. 15, категория C оказывается эквивалентной факторкатегории mod-B/ker G. Хотя некоторые теоремы этой главы могут быть получены как следствия из теорем, отмеченных здесь и доказанных в других частях книги, представленные в этой главе доказательства теорем Мориты не требуют никакого нового аппарата, кроме классической теории тензорных произведений (гл. 11), тогда как за большую общность теоремы Попеску — Габриеля нужно заплатить теоретико-категорной подготовкой.

Проективные модули и образующие над коммутативными кольцами

Когда проективный R-модуль P является образующим? Если R коммутативно и либо P конечно порожден, либо R нётерово, мы получаем, что P оказывается образующим тогда и только тогда, когда он точен (12.2). Этот результат дает широкий класс образующих. К тому же образующими являются и тензорные произведения образующих (12.4).

12.1. Лемма. *Пусть R — коммутативное кольцо, M — конечно порожденный R-модуль и A — любой такой идеал в R, что $MA = M$. Тогда $M(1 - a) = 0$ для некоторого $a \in A$.*

Доказательство. Если $x_1, \ldots, x_n$ порождают M, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$$

для некоторых $a_{ij} \in A$, $i, j = 1, \ldots, n$, откуда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$$

для всех i. Тогда $x_i \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$ [1]), $i = 1, \ldots, n$, поэтому $M \cdot \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$. Ясно, что $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 1 - a$ для некоторого $a \in A$. □

[1]) Действительно, умножая i-е равенство на A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $(\delta_{ik} - a_{ik})$ — и складывая их вместе, получим $0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j (\delta_{ij} - a_{ij}) A_{ik}\right) = x_k \left(\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ik} - a_{ik}) A_{ik}\right) + \sum_{j \neq k} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) \times A_{ik}\right)$. Поскольку $\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ik} - a_{ik}) A_{ik} = \det(\delta_{ij} - a_{aj})$ (разложение определителя по k-му столбцу) и $\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) A_{ik} = 0$ для всех $j \neq k$, то $x_k \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. — *Прим. перев.*

12.2. Предложение. *Пусть R — коммутативное кольцо и P — проективный R-модуль. Если P конечно порожден или если R нётерово, то* tr P *порождается идемпотентом e, а* ann P *порождается* $(1 - e)$. *Таким образом,*

$$R = \operatorname{tr} P \oplus \operatorname{ann} P.$$

При этом P является образующим категории mod-R *тогда и только тогда, когда P точен.*

Доказательство. Если P конечно порожден над R, то таким же является $P^* = \operatorname{Hom}_R(P, R)$. Поэтому идеал tr P, порожденный всеми $\{f(x) \mid x \in P, f \in P^*\}$, конечно порожден. Итак, в обоих случаях идеал $T = \operatorname{tr} P$ конечно порожден. По 3.30 $PT = P$ и $T^2 = T$. Полагая в лемме $M = T$, имеем $T(1 - e) = 0$ для некоторого $e \in T$. Таким образом, $e(1 - e) = 0$, откуда $e = e^2$ и $T = Te$. Это доказывает, что $T = eR$. Теперь $P(1 - e) = PT(1 - e) = 0$, откуда $\operatorname{ann} P \supseteq (1 - e)R$, после чего ясно, что $\operatorname{ann} P = (1 - e)R$. Это доказывает, что $R = \operatorname{tr} P \oplus \operatorname{ann} P$. Кроме того, P является образующим тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} P = R$, и, следовательно, тогда и только тогда, когда $\operatorname{ann} P = 0$. Это завершает доказательство. □

12.3. Следствие. *Пусть R — коммутативное кольцо.*

12.3.1. *Модуль P является прообразующим тогда и только тогда, когда P конечно порожден, проективен и точен.*

12.3.2. *Если R не содержит отличных от 0 и 1 идемпотентов, то каждый ненулевой конечно порожденный проективный R-модуль является образующим.*

12.3.3. *Если R нётерово, то любой точный проективный модуль является образующим в* mod-R. □

12.4. Предложение. *Пусть P и Q — модули над коммутативным кольцом R. Тогда $P \underset{R}{\otimes} Q$ конечно порожден, проективен и точен над R (т. е. является прообразующим) в том и только том случае, когда такими являются P и Q.*

Доказательство (Басс). По следствию 12.3 модуль над коммутативным кольцом является прообразующим тогда и только тогда, когда он конечно порожден, проективен и точен. Если P и Q — прообразующие, то $P^n \approx R \oplus A$, $Q^m \approx R \oplus B$ для подходящих целых n и m и R-модулей A и B. Тогда, ввиду аддитивности функторов, имеющих сопряженный (см. 5.48), модуль

$$P^n \underset{R}{\otimes} Q^m \approx (P \underset{R}{\otimes} Q)^{nm}$$

содержит R в качестве прямого слагаемого. Следовательно, по 3.26 $P \underset{R}{\otimes} Q$ — образующий. Так как в силу 11.16 $P \underset{R}{\otimes} Q$ проективен, то заключаем, что $P \underset{R}{\otimes} Q$ — прообразующий.

Обратно, предположим, что $P \underset{R}{\otimes} Q = G$ — прообразующий. Тогда P точен, поскольку точен G. Далее, $G = P \underset{R}{\otimes} Q$ конечно порожден, скажем порождается элементами $\{x_i \otimes q_i \mid i = 1, \ldots, p\}$ и поэтому $G = \sum_{i=1}^{p} (x_i \otimes Q)$. Пусть F — свободный R-модуль с p образующими. Если $f\colon F \to P$ — гомоморфизм R-модулей, переводящий образующие в элементы $x_1, \ldots, x_p$, то $f \otimes 1_Q : F \otimes Q \to P \otimes Q = G$ — эпиморфизм. Он расщепляется, так как G проективен. Следовательно, отображение $f \otimes 1_{Q \otimes P}$: $F \otimes Q \otimes P \to P \otimes Q \otimes P$ сюръективно и расщепляется. Таким образом,

$$P \underset{R}{\otimes} G \approx P \otimes Q \otimes P$$

изоморфно прямому слагаемому модуля

$$F \underset{R}{\otimes} G \approx F \otimes Q \otimes P.$$

Поскольку в силу первой части предложения $F \underset{R}{\otimes} G$ — прообразующий, заключаем, что $P \underset{R}{\otimes} G$ конечно порожден и проективен. Так как G — образующий, то $G^n \approx R \oplus A$ для подходящих целого числа n и модуля A. Тогда $(P \underset{R}{\otimes} G)^{n^2}$ также проективен и

$$(P \underset{R}{\otimes} G)^{n^2} \approx P^n \otimes G^n \approx (P^n \underset{R}{\otimes} R) \oplus (P^n \underset{R}{\otimes} A) \approx P^n \oplus (P^n \underset{R}{\otimes} A).$$

Итак, P^n изоморфен прямому слагаемому конечно порожденного проективного R-модуля $(P \underset{R}{\otimes} G)^{n^2}$. Поэтому P^n, а следовательно, и P конечно порожден и проективен. Таким образом, мы доказали, что P конечно порожден, проективен и точен, т. е. P — прообразующий. □

12.5. Следствие. *Если P и Q — модули над коммутативным кольцом R, такие, что $P \underset{R}{\otimes} Q \approx R^n$ для некоторого $n > 0$, то P и Q оба конечно порождены, проективны и точны (т. е. являются прообразующими).* □

На самом деле для любого конечно порожденного точного проективного модуля P существует Q, указанное в 12.5. (См. Басс [67, стр. 37].)

Определение отображений (,) и [,]

Пусть P есть R-модуль, а $S = \operatorname{End} P_R$. Тензорное произведение $P^* \underset{S}{\otimes} P$ является естественным (R,R)-бимодулем: если $r, r' \in R$, $x \in P$, $y \in P^*$, то $r(y \otimes x)r' = (ry) \otimes (xr')$. Имеет место естественное (R, R)-бимодульное отображение $P^* \underset{S}{\otimes} P \to R$, обозначаемое через (,) и определяемое правилом

$$(\ ,\ )\colon \sum u_i \otimes x_i \to \sum u_i(x_i).$$

[Здесь $u_i \in P^*$, $x_i \in P$ и $u_i(x_i)$ — значение u_i на x_i и по этой причине (,) называется **вычисляющим отображением**.] Если $r, r' \in R$ и $\sum_1^n u_i \otimes x_i \in P^* \underset{S}{\otimes} P$, то

$$(\ ,\ )\colon \sum_1^n (r'u_i \otimes x_i r) \to r'\Big(\sum_1^n u_i(x_i)\Big) r.$$

Поэтому (,) является, как и утверждалось, (R, R)-гомоморфизмом.

Если $u \in P^*$, $x \in P$, то определен элемент $[x, u] \in S = \operatorname{End} P_R$, такой, что

$$[x, u](y) = x \cdot u(y) = x(u, y) \tag{1}$$

для всех $y \in P$. Так как $u(y) \in R$, то $x \cdot u(y) \in P$. Поэтому соответствие $y \to x \cdot u(y)$, действительно, определяет элемент $[x, u]$ кольца $S = \operatorname{End} P_R$. Кроме того, непосредственно проверяется, что отображение

$$[\ ,\ ]\begin{cases} P \underset{R}{\otimes} P^* \to S \\ \sum_1^n x_i \otimes u_i \mapsto \sum_1^n [x_i, u_i] \end{cases}$$

(где $x_i \in P$, $u_i \in P^*$, $i = 1, \ldots, n$) является (S, S)-гомоморфизмом (S, S)-бимодуля $P \underset{R}{\otimes} P^*$ в S. Тогда, как уже проверялось при доказательстве предложения 4.1, имеет место равенство

$$g[x, f] = g(x) f = (g, x) f \tag{2}$$

для всех $g, f \in P^*$ и $x \in P$.

Ситуация эквивалентности

Ситуация предэквивалентности (A, B, P, Q, f, g) состоит из k-алгебр A и B, бимодулей ${}_AP_B$ и ${}_BQ_A$ и бимодульных гомоморфизмов

$$f: P \underset{B}{\otimes} Q \to A,$$

$$g: Q \underset{A}{\otimes} P \to B,$$

таких, что, полагая $f(p \otimes q) = pq$ и $g(q \otimes p) = qp$, получаем закон ассоциативности

$$(1') \qquad (pq)\,p' = p\,(qp'),$$

$$(2') \qquad (qp)\,q' = q\,(pq')$$

для всех $p, p' \in P$, $q, q' \in Q$. Если f и g — изоморфизмы, то (A, B, P, Q, f, g) называется **ситуацией эквивалентности.**

12.6. Предложение. *Пусть P — R-модуль и $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$. Тогда*

$$(\mathrm{End}\ P_R,\ R,\ P,\ P^*\ [\ ,\ ],\ (\ ,\ ))$$

— ситуация предэквивалентности.

Доказательство. Здесь $f = [\ ,\ ]$, $g = (\ ,\ )$, $Q = P^*$, $pq = [p, q]$ и $qp = (q, p) = q(p)$. Тогда (i') суть тождества (i), $i = 1, 2$, определенные в предыдущем параграфе. □

12.7. Предложение. *Пусть (A, B, P, Q, f, g) — ситуация предэквивалентности. Если f сюръективно, то*

12.7.1 *f — изоморфизм.*

12.7.2. *P и Q — образующие категории A-модулей.*

12.7.3. *P и Q — конечно порожденные и проективные B-модули.*

12.7.4. *g индуцирует бимодульные изоморфизмы*

$$P \approx \mathrm{Hom}_B(Q, B),\quad Q \approx \mathrm{Hom}_B(P, B).$$

12.7.5. *Отображения гомотетии k-алгебр* (см. стр. 162)

$$A \to \mathrm{End}\ P_B,$$

$$A \to \mathrm{End}_B\ Q$$

— изоморфизмы.

Доказательство. Так как f сюръективно, мы можем записать

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 1 \in A.$$

Доказательство 12.7.1. Если $\sum p_j' \otimes q_j' \in \ker f$, то

$$\sum_j p_j' \otimes q_j' = \sum_{j,i} (p_j' \otimes q_j')\,p_i q_i = \sum_{j,i} p_j' \otimes (C(q_j' p_i)\,q_i) =$$

$$= \sum_{j,i} (p_j'(q_j' p_i)) \otimes q_i = \sum_{j,i} (p_j' q_j')(p_i \otimes q_i) =$$

$$= \sum_j (p_j' q_j')\Big(\sum_i p_i \otimes q_i\Big) = 0 \quad (\text{так как } \textstyle\sum p_j' q_j' = 0).$$

Доказательство 12.7.2. Пусть h_i: $P \to A$ — гомоморфизм A-модулей, определенный правилом $h_i(p) = pq_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда (*) влечет за собой сюръективность отображения $(h_1 \oplus \ldots \oplus h_n)$ из копроизведения P^n в A. Поэтому, ввиду 3.26, ${}_AP$ — образующий. Для Q_A доказательство аналогично.

Доказательство 12.7.3 следует из 4.1.2 или 7.3.

Доказательство 12.7.4. Отображение g индуцирует (A, B)-бимодульный гомоморфизм

$$h\colon P \to \mathrm{Hom}_B(Q, B),$$

$$h(p)(q) = qp.$$

(Заметим, что здесь мы отказываемся от нашего соглашения записывать отображения и скаляры с разных сторон.)

Если $h(p) = 0$, то

$$p = \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)\,p = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(q_i p) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,0 = 0.$$

Если $f: Q \to B$ — гомоморфизм B-модулей, то

$$f(q) = f\Big(\sum_i q\,(p_i q_i)\Big) = f\Big(\sum_i (qp_i)\,q_i\Big) = \sum_i (qp_i)\,f(q_i) = \sum_i q\,(p_i f(q_i)).$$

Поэтому

$$f = h\Big(\sum_i p_i f(q_i)\Big),$$

т. е. f сюръективно и, следовательно, изоморфизм. Аналогично, $Q \approx \mathrm{Hom}_B(P, B)$.

Доказательство 12.7.5 аналогично доказательству 12.7.4. □

12.8. Следствие. *Пусть P есть R-модуль, $S = \mathrm{End}\ P_R$ и $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$.*

(a) *(R, R)-гомоморфизм* $(\ ,\ )$: $P^* \underset{S}{\otimes} P \to R$ *сюръективен тогда и только тогда, когда P_R является образующим в* mod-R.

В этом случае [,] — *изоморфизм*, $P_S^* \approx \mathrm{Hom}_S(P, S)$, $R \approx \mathrm{End}\ {}_SP$ *и* ${}_RP^*$ — *образующий.*

(b) (S, S)-*гомоморфизм* [,]: $P \underset{R}{\otimes} P^* \to S$ *сюръективен тогда и только тогда, когда* P_R *конечно порожден и проективен. В этом случае* [,] — *изоморфизм,* $S \approx \mathrm{End}_R P^*$ *и* ${}_SP$ — *образующий в* S-mod.

(c) $(S, R, P, P^*, [\ ,\ ], (\ ,\ ))$ — *ситуация эквивалентности тогда и только тогда, когда* P_R — *конечно порожденный проективный образующий (прообразующий).*

Доказательство. (c) следует из (a), (b) и 12.6. Кроме того, доказанное предложение вместе с 12.6 дает импликацию $\Rightarrow$ в утверждениях (a) и (b) и указанные в них кольцевые изоморфизмы. (Ср. также 4.1 и 7.3.)

(a) Если P_R — образующий, то $\mathrm{tr}_R P = R$ по 3.26, но $\mathrm{tr}_R P$ — образ отображения (,), поэтому (,) сюръективно.

(b) По лемме о дуальном базисе 3.23 P конечно порожден и проективен тогда и только тогда, когда существуют конечное число элементов $x_1, \ldots, x_n \in P$ и соответствующие им элементы $u_1, \ldots, u_n \in P^*$, такие, что

$$x = \sum_1^n x_i u_i(x) \quad \text{для всех } x \in P$$

или, эквивалентно,

$$\sum_1^n [x_i, u_i] = 1$$

(1 — единица кольца S). Последнее условие выполняется для некоторого набора $x_i \in P$, $u_i \in P^*$ тогда и только тогда, когда [,] — эпиморфизм. □

12.9. Предложение (Эйленберг — Уотс). *Пусть* A *и* B *суть* k-*алгебры и* ${}_AM_B$ *и* ${}_AN_B$ — *бимодули.*

12.9.1. *Если* $f\colon M \to N$ *есть* (A, B)-*бимодульный гомоморфизм, то определено естественное преобразование* $\underset{A}{\otimes} f\colon \underset{A}{\otimes} M \to \underset{A}{\otimes} N$ *функторов, где* $(\underset{A}{\otimes} f)(P) = 1_P \underset{A}{\otimes} f$ *для каждого* $P \in \mathrm{Obj}\ \mathrm{mod}\text{-}A$.

12.9.2. *Если* $f\colon M \to N$ *есть* (A, B)-*бимодульный изоморфизм, то* $\underset{A}{\otimes} f$ — *естественная эквивалентность* k-*линейных функторов.*

12.9.3. *Два функтора* $\underset{A}{\otimes} M$ *и* $\underset{A}{\otimes} N$ *из* mod-A *в* mod-B *естественно эквивалентны тогда и только тогда, когда* ${}_AM_B \approx {}_AN_B$ *как бимодули.*

12.9.4. *Соответствие* $M \mapsto \underset{A}{\otimes} M$ *индуцирует биекцию между множеством классов изоморфных* (A, B)-*бимодулей и множеством классов естественно эквивалентных непрерывных справа* k-*линейных функторов* mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B. *Если* C — *еще одна* k-*алгебра, то в ситуации* ${}_AM_B$, ${}_BN_C$ *функтор*

$$\underset{A}{\otimes}(M \underset{B}{\otimes} N)\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}C$$

естественно эквивалентен функтору

$$(\underset{B}{\otimes} N) \circ (\underset{A}{\otimes} M)\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}C.$$

Доказательство. 12.9.1—12.9.3 следуют из теоремы 2.3 Йонеды (ср. 6.20 и 6.21) или могут быть проверены непосредственно. По 5.53 и 5.54 любой непрерывный справа функтор S из mod-A в mod-B сопряжен слева представимому функтору h^{SA}. По 5.3 два таких функтора S_1 и S_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $h^{S_1A} \approx h^{S_2A}$. В этом случае по теореме 2.3 Йонеды правые B-модули S_1A и S_2A изоморфны, и этот изоморфизм, очевидно, является (A, B)-бимодульным гомоморфизмом. До сих пор нигде в рассуждении не говорилось о k-линейности функторов, но эта часть утверждения 12.9.4 очевидна. (Ср. 5.72.4 и 5.72.5.) Это доказывает 12.9.4, за исключением последнего утверждения, которое следует из формулы

$$\begin{aligned}(\underset{B}{\otimes} N) \circ (\underset{A}{\otimes} M)(P) &= (\underset{B}{\otimes} N)(P \underset{A}{\otimes} M) = \\ &= (P \underset{A}{\otimes} M) \underset{B}{\otimes} N \approx \\ &\approx P \underset{A}{\otimes} (M \underset{B}{\otimes} N) = \\ &= \underset{A}{\otimes}(M \underset{B}{\otimes} N)(P).\ \square\end{aligned}$$

12.10 (Морита I). *Пусть* (A, B, P, Q, f, g) — *ситуация эквивалентности, например пусть* P_B — *прообразующий,* $A = \mathrm{End} P_B$, $f = [\ ,\ ]$, $g = (\ ,\ )$. (См. 12.8.) *Тогда*

12.10.1. $\underset{B}{\otimes} Q\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A$

и

$$\underset{A}{\otimes} P\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$$

— взаимно обратные эквивалентности категорий. Взаимно обратными эквивалентностями являются также

$$Q \underset{A}{\otimes}: A\text{-mod} \rightsquigarrow B\text{-mod}$$

и

$$P \underset{B}{\otimes}: B\text{-mod} \rightsquigarrow A\text{-mod}.$$

12.10.2. *P и Q являются прообразующими как A- и как B-модули.*

12.10.3. *f и g индуцируют бимодульные изоморфизмы*

$$P \approx \operatorname{Hom}_B(Q, B) \approx \operatorname{Hom}_A(Q, A),$$
$$Q \approx \operatorname{Hom}_A(P, A) \approx \operatorname{Hom}_B(Q, B).$$

12.10.4. *Все гомоморфизмы k-алгебр*

$$\operatorname{End} P_B \leftarrow A \rightarrow \operatorname{End}_B Q,$$
$$\operatorname{End}_A P \leftarrow B \rightarrow \operatorname{End} Q_A,$$

индуцированные соответствующими каноническими отображениями являются изоморфизмами.

12.10.5. *Кольца эндоморфизмов бимодулей A, B, P, Q изоморфны центрам колец A, B и категорий* mod-A, mod-B *соответственно.*

12.10.6. *Соответствие $C \mapsto CP \approx C \underset{A}{\otimes} P$ является изоморфизмом структуры правых идеалов кольца A на структуру B-подмодулей модуля P, причем идеалам кольца A соответствуют (A, B)-биподмодули бимодуля P. Аналогичные утверждения относительно других структурных изоморфизмов следуют из соображений симметрии. В частности, структуры идеалов колец A и B изоморфны.* (Ср. 4.7.)

Доказательство 12.10.1. Так как по 12.7 $Q \approx \operatorname{Hom}_B(P,B)$ и $P \approx \operatorname{Hom}_A(Q, A)$, то в силу 12.8 имеем бимодульные изоморфизмы

$$Q \underset{A}{\otimes} P \approx B \text{ и } P \underset{B}{\otimes} Q \approx A.$$

Таким образом, из 12.9 следует эквивалентность функторов

$$(\underset{A}{\otimes} P) \circ (\underset{B}{\otimes} Q) \approx \underset{B}{\otimes} (Q \underset{A}{\otimes} P) \approx \underset{B}{\otimes} B \approx 1_{\text{mod-}B}.$$

Аналогично,

$$(\underset{B}{\otimes} Q) \circ (\underset{A}{\otimes} P) \approx 1_{\text{mod-}A}.$$

Поэтому $\underset{B}{\otimes} Q$ и $\underset{A}{\otimes} P$ — взаимно обратные эквивалентности.

Доказательство 12.10.2, 12.10.3 и 12.10.4 непосредственно вытекает из 12.7.

Доказательство 12.10.5. Имеем изоморфизмы

$$\mathscr{C}(A) \approx \operatorname{Hom}_{(A,A)}(A, A) \xrightarrow{\underset{A}{\otimes} P} \operatorname{Hom}_{(A,B)}(P, P),$$

$$\mathscr{C}(A) \approx \operatorname{Hom}_{(B,B)}(B, B) \xrightarrow{P \underset{B}{\otimes}} \operatorname{Hom}_{(A,B)}(P, P).$$

Аналогичные изоморфизмы имеют место для модуля Q. Из этих изоморфизмов и из 4.34 следует 12.10.5.

Доказательство 12.10.6. Так как P проективен, то каноническое отображение $C \underset{A}{\otimes} P \to CP$ — изоморфизм (см. 11.20). Поскольку $\underset{A}{\otimes} P$: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B — эквивалентность, то отображение $C \mapsto \underset{A}{CP}$ является искомым структурным изоморфизмом, при котором вполне инвариантные A-подмодули, т. е. идеалы кольца A, соответствуют вполне инвариантным B-подмодулям модуля P, которыми в силу 12.10.4 являются его (A, B)-подмодули. □

12.11. Утверждение. Для ситуации эквивалентности $(S, R, P, P^*, [\ ,\ ], (\ ,\ ))$ доказанное предложение дает эквивалентность

$$\underset{R}{\otimes} P^*: \text{mod-}R \rightsquigarrow \text{mod-}S$$

Поскольку существует естественная эквивалентность функторов $\underset{R}{\otimes} P^* \approx \operatorname{Hom}_R(P, \ )$, последний функтор тоже является эквивалентностью с функтором $\operatorname{Hom}_S(P^*, \ )$ в качестве обратного.

Вторая и третья теоремы Мориты

Вторая теорема Мориты показывает, что все категорные эквивалентности mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B возникают из ситуаций эквивалентности. Понятие k-линейных эквивалентностей было введено ранее в 5.72. (Ср. 5.72.4 и 5.72.5.)

12.12 (Морита II). *Пусть A и B суть k-алгебры и*

$$G: \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B,$$
$$H: \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A$$

— взаимно обратные k-линейные эквивалентности. Положим $P = GA$, $Q = HB$. Тогда P есть (A, B)-бимодуль, а Q есть (B, A)-бимодуль. Более того:

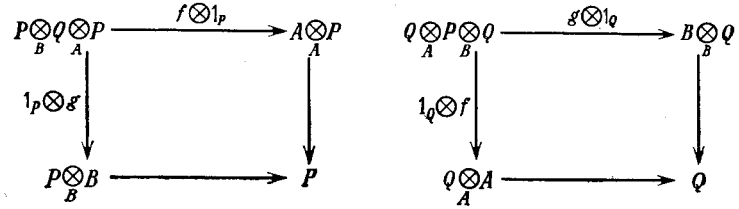
12.12.1. *Имеют место естественные эквивалентности функторов*

$$G \approx \underset{A}{\otimes} P \text{ и } H \approx \underset{B}{\otimes} Q.$$

12.12.2. *Существуют изоморфизмы бимодулей*

$$f\colon P \underset{B}{\otimes} Q \to A \text{ и } g\colon Q \underset{A}{\otimes} P \to B.$$

12.12.3. *f и g могут быть выбраны таким образом, что диаграммы*



где правые и нижние стрелки — канонические отображения, коммутативны.

Доказательство 12.12.1 и 12.12.2 воспроизведите в качестве упражнения или (если необходимо) обратитесь к доказательству предложения 4.29.

Доказательство 12.12.3. Все отображения, обозначенные на диаграммах, являются бимодульными изоморфизмами. Если $a\colon A \underset{A}{\otimes} P \to P$ и $b\colon P \underset{B}{\otimes} B \to P$ — канонические отображения, то существует (A, B)-автоморфизм u бимодуля P, такой, что

$$b(1 \otimes g) = ua(f \otimes 1).$$

Таким образом, $u \in \operatorname{End} P_B \approx A$, поэтому можно считать, что u — элемент кольца A и, следовательно, обратимый элемент в A. Так как u — также и A-гомоморфизм модуля P и ${}_AP$ точен, то u принадлежит центру кольца A. Поскольку $ua = a(u_s \otimes 1_P)$, то первый квадрат становится коммутативным, если в нем заменить f на uf. Далее запишем

$$f(p \otimes q) = pq \text{ и } g(q \otimes p) = qp$$

для всех $p \in P$, $q \in Q$. Тогда $(pq)p' = p(qp')$ для всех p, $p' \in P$, $q \in Q$. Нам нужно доказать, что $(qp)q' = q(pq')$ для всех $q' \in Q$.

Имеем

$$\begin{aligned}((qp)q')p' &= (qp)(q'p') && (g \text{ — гомоморфизм левых } B\text{-модулей}) = \\ &= q(p(q'p')) && (g \text{ — гомоморфизм правых } B\text{-модулей}) = \\ &= q((pq')p') && (\text{по уже доказанному}) = \\ &= (q(pq'))p' && (q \otimes ap = qa \otimes p \text{ для всех } a \in A).\end{aligned}$$

Следовательно, если положить $d = (qp)q' - q(pq')$, то $dp' = 0$ для всех $p' \in P$. Пусть $h\colon A \to Q$ определяется формулой $h(a) = da$. Тогда произведение гомоморфизмов $h \underset{A}{\otimes} 1_P\colon A \underset{A}{\otimes} P \to Q \underset{A}{\otimes} P$ и g равно нулю. Так как g — изоморфизм, то $h \underset{A}{\otimes} 1_P = 0$. Поскольку функтор $\underset{A}{\otimes} P$ вполне унивалентен, то $h = 0$, откуда $d = 0$. □

12.13. Определение и предложение. *Бимодуль ${}_AM_B$ называется* ***обратимым,*** *если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

(a) *Функтор $\underset{A}{\otimes} M\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}B$ является эквивалентностью.*

(b) *Существуют бимодуль ${}_BN_A$ и бимодульные изоморфизмы $M \underset{B}{\otimes} N \approx A$ и $N \underset{A}{\otimes} M \approx B$.*

(c) *Функтор $M \underset{B}{\otimes}\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A$ является эквивалентностью.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Если $H = \underset{A}{\otimes} M$ — эквивалентность, то существует функтор $G\colon \text{mod-}B \rightsquigarrow \text{mod-}A$, такой, что $HG \approx 1_{\text{mod-}A}$ и $GH \approx 1_{\text{mod-}B}$. Из предыдущего предложения следует, что $G = \underset{B}{\otimes} N$ для некоторого бимодуля ${}_BN_A$. Далее в силу того же предложения любой функтор $Q\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}A$, естественно эквивалентный функтору $1_{\text{mod-}A}$, естественно эквивалентен функтору $\underset{A}{\otimes} A$. Итак,

$$HG \approx \underset{A}{\otimes}(M \underset{B}{\otimes} N) \approx \underset{A}{\otimes} A,$$

поэтому по 12.9.3 мы получаем изоморфизм бимодулей $M \underset{B}{\otimes} N \approx A$. Аналогично, $N \underset{A}{\otimes} M \approx B$. Это доказывает импликацию (a) $\Rightarrow$ (b). Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) устанавливается осуществлением шагов доказательства в обратном порядке. Поскольку (b) право-лево симметрично, это завершает доказательство. □

12.14 (Морита III). *Если A и B суть k-алгебры, то соответствие $P \mapsto \otimes_A P$ является биекцией между множеством классов изоморфных обратимых (A, B)-бимодулей и множеством классов естественно эквивалентных k-линейных эквивалентностей из* mod-A *в* mod-B.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из предыдущего определения, 12.12 и 12.9. Хотя из них никак не следует k-линейность функторов, тем не менее, ввиду того, что $B = \operatorname{End} P_A$, возникающие функторы автоматически k-линейны. (См. 5.72.4, 5.72.5.) □

Автоэквивалентности и группа Пикара

Если k — коммутативное кольцо и $\mathscr{A}$ есть k-линейная абелева категория [1]), то

$$\operatorname{Pic}_k \mathscr{A}$$

обозначает группу классов изоморфных k-линейных эквивалентностей [2]) $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}$. Таким образом, если $S\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}$ — другая k-линейная эквивалентность, то $S = T$ в $\operatorname{Pic}_k \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда существует естественная эквивалентность $h\colon S \to T$ функторов. S и T. Групповой операцией является композиция функторов.

Если A — некоторая k-алгебра, то определим

$$\operatorname{Pic}_k A$$

как группу классов (P) изоморфных (A, A)-модулей относительно операции

$$(P)\,(Q) = (P \underset{A}{\otimes} Q).$$

Из 12.9 и 12.14 следует, что $\operatorname{Pic}_k A$ действительно является группой относительно этой операции и $(P)^{-1} = (\operatorname{Hom}_A(P, A))$. [В определении $\operatorname{Hom}_A(P, A)$ может быть использована структура как левых, так и правых A-модулей.]

Следующее предложение вытекает из 12.9 и 12.14:

---

[1]) То есть категория, где Mor (A, B) есть k-модуль для любых объектов A и B.— *Прим. перев.*

[2]) Определялись перед 5.72. Если пренебречь «размерами», то центр C абелевой категории $\mathscr{A}$ является кольцом. Если C есть k-алгебра, то $\operatorname{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ для любых объектов X и Y канонически превращается в k-модуль. Тогда k-линейная эквивалентность T характеризуется тем, что индуцированный гомоморфизм $(X, Y) \to (TX, TY)$ является k-линейным преобразованием.

12.15. Предложение. *Пусть A есть k-алгебра. Функторы*

$$\begin{cases} (P) \mapsto P \underset{A}{\otimes} \\ \operatorname{Pic}_k A \rightsquigarrow \operatorname{Pic}(A\text{-mod}) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \operatorname{Pic}(A\text{-mod}) \rightsquigarrow \operatorname{Pic}_k A \\ T \mapsto TA \end{cases}$$

являются взаимно обратными эквивалентностями. □

Пусть A — алгебра над k. Ее изоморфизмы на себя образуют группу относительно операции умножения отображений. Эта группа обозначается через $\operatorname{Aut}_k A$, а ее элементы называются **автоморфизмами.** Автоморфизм f называется **внутренним,** если существует такой обратимый элемент $x \in A$, что $f(a) = x^{-1}ax$ для всех $a \in A$. В этом случае говорят, что f — **внутренний автоморфизм, определяемый (или реализуемый) элементом** x. Множество внутренних автоморфизмов является нормальной подгруппой группы $\operatorname{Aut}_k A$ и обозначается через $\operatorname{In}\operatorname{Aut}_k A$.

Пусть P — обратимый (A, A)-бимодуль. Если $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut}_k A$ — автоморфизмы k-алгебры, то определим (A, A)-бимодуль

$${}_\alpha P_\beta,$$

полагая

$$a \cdot p \cdot b = \alpha(a)\, p\beta(b)$$

для всех $a, b \in A$, $p \in P$. Таким образом, ${}_1P_1 = P$.

Если $f\colon P \to Q$ — изоморфизм левых A-модулей, где $(P), (Q) \in \operatorname{Pic}_k A$, и если $a \in A$, то отображение

$$\begin{cases} P \to P \\ p \mapsto ((p)\, fa)\, f^{-1} \end{cases}$$

является элементом из $\operatorname{Hom}_A({}_AP, {}_AP) = A$. Обозначим его через $\alpha(a)$. Итак,

$$(p\alpha(a))\, f = (p)\, fa \quad \text{для всех } p \in P.$$

Отображение $a \mapsto \alpha(a)$ является автоморфизмом α алгебры A $(\alpha \in \operatorname{Aut}_k A)$, а отображение $f\colon {}_1P_\alpha \to Q$ — бимодульным изоморфизмом.

12.16. Лемма. *Если $\alpha, \beta, \gamma \in \operatorname{Aut}_k A$, то существуют следующие бимодульные изоморфизмы:*

12.16.1. ${}_\alpha A_\beta \approx {}_{\gamma\alpha}A_{\gamma\beta}$.

12.16.2. ${}_1A_\alpha \otimes_{A1} A_\beta \approx {}_1A_{\alpha\beta}$.

12.16.3. ${}_1A_\alpha \approx {}_1A_1 \Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{In}\operatorname{Aut}_k A$.

12.16.4. *Если $(P) \in \operatorname{Pic}_k A$ и ${}_AP \approx {}_AA$, то $P \approx {}_1A_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{Aut}_k A$.*

Доказательство 12.16.1. Отображение

$$\begin{cases} {}_\alpha A_\beta \to {}_\gamma\alpha A_{\gamma\beta} \\ x \mapsto \gamma(x) \end{cases}$$

является требуемым (A, A)-бимодульным изоморфизмом.

Доказательство 12.16.2. По 12.16.1

$${}_1A_\alpha \underset{A}{\otimes} {}_1A_\beta \approx {}_{\alpha^{-1}}A_1 \underset{A}{\otimes} {}_1A_\beta \approx {}_{\alpha^{-1}}A_\beta \approx {}_1A_{\alpha\beta}.$$

Доказательство 12.16.3. Если f: ${}_1A_\alpha \to {}_1A_1$ — изоморфизм бимодулей, то, рассматривая его как отображение левых A-модулей, получаем, что $f(x) = xu$, где $f(1) = u$ — обратимый элемент кольца A. К тому же

$$\alpha(a)\, u = \alpha(a)\, f(1) = f(\alpha(a)\, 1) = f(1 \cdot a) = ua.$$

Поэтому $\alpha(a) = uau^{-1}$ для всех $a \in A$ и $\alpha \in \operatorname{In}\operatorname{Aut}_k A$. Обратно, если $\alpha(a) = uau^{-1}$, то имеет место изоморфизм бимодулей f: ${}_1A_\alpha \to {}_1A_1$, который переводит x в xu для всех $x \in A$.

Доказательство 12.16.4. Это уже было доказано в абзаце, непосредственно предшествующем лемме. □

12.17. Предложение. *Пусть A есть k-алгебра, Q — левый A-порождающий и кольцо $B = \operatorname{End}_A Q$ рассматривается как k-алгебра. Тогда имеет место точная последовательность*

$$1 \to \operatorname{In}\operatorname{Aut}_k B \to \operatorname{Aut}_k B \xrightarrow{\varphi_Q} \operatorname{Pic}_k A, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{im}\varphi_Q = \{(P) \in \operatorname{Pic}_k A \mid P \underset{A}{\otimes} Q \approx Q \text{ как левые } A\text{-модули}\}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $Q = A$. Тогда $B = A$, и мы положим $\varphi_A(\alpha) = {}_1A_\alpha$ для всех $\alpha \in \operatorname{Aut}_k A$. По лемме 12.16 φ_A: $\operatorname{Aut}_k A \to \operatorname{Pic}_k A$ является гомоморфизмом с ядром $\operatorname{In}\operatorname{Aut}_k A$, а образ $\operatorname{im}\varphi_A$ имеет вид, описанный в формулировке.

В общем случае по 12.10 функтор $T = \operatorname{Hom}_A(Q, \ ) \approx Q^* \otimes_A$ [1]) является эквивалентностью A-mod $\sim$ B-mod, где $B = TQ$ и $Q^* = \operatorname{Hom}_A(Q, A)$. Эквивалентность T индуцирует изоморфизм $\operatorname{Pic}_k(A\text{-mod}) \to \operatorname{Pic}_k(B\text{-mod})$, который в силу 12.15 определяет изоморфизм

$$h \begin{cases} \operatorname{Pic}_k A \to \operatorname{Pic}_k B \\ (P) \mapsto (Q^* \otimes_A P \otimes_A Q). \end{cases}$$

[1]) Функторы $\operatorname{Hom}_A(Q, \ )$ и $Q^* \otimes_A$ естественно эквивалентны в силу упр. 11.19.1. — *Прим. перев.*

Пусть φ_Q: $\operatorname{Aut}_k B \to \operatorname{Pic}_k A$ — произведение отображений

$$\operatorname{Aut}_k B \xrightarrow{\varphi_B} \operatorname{Pic}_k B \xrightarrow{h^{-1}} \operatorname{Pic}_k A.$$

Точность последовательности (1) вытекает из ее точности в частном случае, когда $Q = A$. К тому же если $(P) \in \operatorname{Pic}_k A$, то $P \otimes_A Q \approx Q$, как левые A-модули тогда и только тогда, когда $Q^* \otimes_A P \otimes_A Q \approx Q^* \otimes_A Q$ как левые B-модули. Так как по 12.14 $Q^* \otimes_A Q \approx B$ как (B, B)-бимодули, то второе утверждение предложения также вытекает из этого частного случая. □

12.18. Предложение. *Если A есть k-алгебра с центром C, то имеет место точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Pic}_C A \to \operatorname{Pic}_k A \to \operatorname{Aut}_k C.$$

Если A коммутативна, то последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic}_A A \to \operatorname{Pic}_k A \to \operatorname{Aut}_k A \to 1$$

точна и расщепляется.

Доказательство. Пусть P — обратимый (A, A)-бимодуль и $t \in C$. Поскольку $p \mapsto pt$ — эндоморфизм бимодуля P, то, ввиду 12.10.4 и 12.13, существует $\alpha_P(t) \in C$, такое, что $\alpha_P(t)\, p = pt$ для всех $p \in P$. Так как $\lambda p = p\lambda$ для всех $\lambda \in k$, то $\alpha_P(t\lambda) = \alpha_P(t)\lambda$ для всех $\lambda \in k$. Ясно, что отображение

$$\alpha_P \begin{cases} C \to C \\ t \mapsto \alpha_P(t) \end{cases}$$

является эндоморфизмом алгебры.

Если $p \otimes q \in P \underset{A}{\otimes} Q$ и $t \in C$, то

$$(p \otimes q)\, t = p \otimes (qt) = p \otimes \alpha_Q(t)\, q = p\alpha_Q(t) \otimes q = \alpha_P\alpha_Q(t)\,(p \otimes q),$$

откуда

$$\alpha_P\alpha_Q = \alpha_{P \underset{A}{\otimes} Q}.$$

Так как $\alpha_A = 1_C$, отсюда следует

$$1_C = \alpha_A = \alpha_{P \underset{A}{\otimes} P^*} = \alpha_P\alpha_{P^*} \quad (= \alpha_{P^*}\alpha_P).$$

Тем самым доказано, что α_P — обратимый элемент в $\operatorname{End}_k C$, т. е. $\alpha_P \in \operatorname{Aut}_k C$. Заметим далее, что $\alpha_P = \alpha_{P'}$ для всех $P' \in (P)$. Действительно, если $p \mapsto p'$ есть (A, A)-бимодульный изоморфизм $P \to P'$ и $t \in C$, то равенство

$$p't = (pt)' = (\alpha_P(t)\, p)' = \alpha_P(t)\, p'$$

показывает, что $\alpha_{P'}(t) = \alpha_P(t)$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \mathrm{Pic}_k A \to \mathrm{Aut}_k C \\ (P) \mapsto \alpha_P \end{cases}$$

является отображением, которое, ввиду $\alpha_P \alpha_Q = \alpha_{P \underset{A}{\otimes} Q}$, есть гомоморфизм. Если (P) — элемент ядра этого гомоморфизма, т. е. если $\alpha_P = 1_C$, то $tp = pt$ для всех $t \in C$, $p \in P$, откуда $(P) \in \mathrm{Pic}_C A$. Обратно, если $(P) \in \mathrm{Pic}_C A$, то $(P) \in \mathrm{Pic}_k A$ и $\alpha_P = 1_C$. Таким образом, первая последовательность, указанная в формулировке, точна. Если A коммутативна, то отображение $\alpha \mapsto {}_1A_\alpha$ из предложения 12.16 дает требуемое расщепление $\mathrm{Aut}_k A \to \mathrm{Pic}_k A$.

В следующих примерах под **(прюферовой) дедекиндовой** областью понимается коммутативная (полу)наследственная область целостности.

12.19. Примеры.

12.19.1. Если k — прюферова область, то $\mathrm{Pic}_k k$ изоморфна группе классов идеалов кольца k, ввиду следующего соображения. (Группа классов идеалов — это группа классов изоморфных обратимых идеалов кольца k. Она изоморфна факторгруппе мультипликативной группы поля частных кольца k по подгруппе обратимых элементов кольца k.) Если $(P) \in \mathrm{Pic}_k k$, то $k = \mathrm{End}\, P_k$; поэтому P — неразложимый конечно порожденный проективный k-модуль. Так как k — прюферова область и, следовательно, полунаследственна, то каждый проективный k-модуль изоморфен прямой сумме идеалов кольца k. Таким образом, $(P) = (P')$ для некоторого обратимого идеала P'.

12.19.2. Пусть A — кольцо (алгебраических) целых чисел в поле алгебраических чисел K. (Полем алгебраических чисел называется конечное расширение поля $\mathbb{Q}$.) Пусть $G = G(K/\mathbb{Q})$ обозначает группу автоморфизмов поля K, оставляющих неподвижными элементы поля $\mathbb{Q}$[1]). Каждый автоморфизм f из G индуцирует автоморфизм f' кольца A, который оставляет неподвижными элементы кольца $\mathbb{Z}$. Итак, $f' \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}} A$ и, обратно, каждый $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}} A$ имеет единственное расширение $h \in G(K/\mathbb{Q})$. Короче говоря, отображение $f \mapsto f'$ является изоморфизмом групп $G(K/\mathbb{Q})$ и $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}} A$. Так как A — дедекиндова область, то из первого примера следует, что $\mathrm{Pic}_A A$ — группа классов идеалов кольца A. По предложению 12.18 $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}} A \approx \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}} A \oplus \mathrm{Pic}_A A$. Заметим, что $\mathrm{Pic}_A A$ конечна (ввиду конечности числа классов) и является также группой автоэквивалентностей категории A-mod.

[1]) Заметим, что любой автоморфизм поля K оставляет неподвижными элементы поля $\mathbb{Q}$.— *Прим. перев.*

Упражнения к гл. 12

1. Кольцо R является кообразующим в mod-R тогда и только тогда, когда каждый правый R-модуль полурефлексивен. В этом случае каждый правый идеал кольца R является правым аннуляторным идеалом.

***2.** Если R — коммутативная область целостности, то ненулевой правый идеал I проективен в том и только том случае, когда I — образующий. В этом случае I обязательно конечно порожден, а каноническое отображение $R \to \mathrm{End}\, I_R$ — изоморфизм. Вывести отсюда, что дедекиндова область нётерова.

3. Описать все образующие для различных колец, например для простого кольца. Показать, что если R является кольцом, в котором каждый ненулевой правый идеал — образующий, то R — первичное кольцо. (Если R к тому же коммутативно, то каждый правый идеал кольца R проективен, т. е. R наследственно.)

***4.** Доказать последнее утверждение с помощью 12.5.

***5** (Морита [58], Адзумая [59]). Дуализировать теоремы Мориты об эквивалентности категорий mod-$A \rightsquigarrow$ mod-B. Сначала заметить, что не существует двойственности mod-$A \rightsquigarrow B$-mod ни для каких колец A и B. Затем найти условия на абелевы подкатегории $\mathscr{S}_A$ категории mod-A и ${}_B\mathscr{S}$ категории B-mod, содержащие в качестве своих объектов A и B соответственно, необходимые и достаточные для существования двойственности D: $\mathscr{S}_A \rightsquigarrow {}_B\mathscr{S}$. Показать, что тогда в любой точной последовательности $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ в mod-A модуль $Y \in \mathscr{S}_A$ в том и только том случае, когда $X \in \mathscr{S}_A$ и $Z \in \mathscr{S}_A$. Кроме того, показать, что $U = D(A)$ — такой (B, A)-бимодуль, что контравариантный основной функтор h_U: mod-$A \rightsquigarrow B$-mod индуцирует двойственность D и аналогично для D^{-1}. Показать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы (B, A)-бимодуль U индуцировал двойственность, состоит в том, чтобы U был инъективным кообразующим в обоих категориях mod-A и B-mod и $B \approx \mathrm{End}\, U_A$, $A \approx \mathrm{End}_B U$. Такая двойственность называется U-**двойственностью**. Показать, что условие на A и B, необходимое для существования такой двойственности, заключается в том, чтобы оба кольца были полулокальными кольцами, в которых идемпотенты поднимаются по модулю радикала. [Или, что, ввиду гл. 22, эквивалентно, каждый конечно порожденный модуль (с каждой стороны и над каждым из колец A и B) имеет проективное накрытие.] Заключить, что не каждое кольцо A может обладать двойственностью в описанном смысле. Кроме того, если A артиново справа, то показать, что B артиново слева и U конечно порожден в обеих категориях. Заключить, что необ-

ходимое и достаточное условие для существования A-двойственности состоит в том, чтобы A был инъективным кообразующим в mod-A и A-mod. Для того чтобы артиново справа кольцо A обладало A-двойственностью, необходимо и достаточно, чтобы каждый правый и каждый левый идеалы являлись аннуляторными. [Такое кольцо A называется **квазифробениусовым** (QF).]

***6** (Икеда [52] и Эйленберг — Накаяма [55]). Для того чтобы A было QF-кольцом, необходимо и достаточно, чтобы A было самоинъективно справа и нётерово справа или слева. (Ср. Фейс [66a, стр. 182].)

***7** (Коннел [63]). Групповое кольцо AG конечной группы G над QF-кольцом A является QF-кольцом.

***8.** Если A — конечномерная алгебра над полем k и $U = \mathrm{Hom}_k(A, k)$, то A обладает U-двойственностью из категории конечно порожденных правых A-модулей в категорию конечно порожденных левых A-модулей.

***9** (Адзумая [59], Морита [58]). Любой неразложимый инъективный модуль над коммутативным артиновым кольцом A конечно порожден. Вывести отсюда, что над A существует конечно порожденный инъективный кообразующий U и, следовательно, A обладает U-двойственностью.

***10** (Морита [58]). Над артиновым коммутативным кольцом имеет место биекция между множеством классов естественно эквивалентных двойственностей mod-$A \rightsquigarrow$ mod-A и множеством автоморфизмов кольца A порядка $\leqslant 2$. Если U и W — правые A-модули, определяющие U- и W-двойственности соответственно, то существует автоморфизм d кольца A порядка $\leqslant 2$ и изоморфизм f аддитивных групп $U \to W$, такой, что $f(ua) = f(u)\, d(a)$ для всех $u \in U$, $a \in A$. (Такое отображение называется **полулинейным преобразованием.** См. гл. 23 и прежде всего 23.34.)

Замечания к гл. 12

Как указывалось во введении, большая часть материала этой главы заимствована из работ Басса [67], [68], который при изложении теорем Мориты выражает признательность Чейзу и Шануэлю (Басс [67, стр. 48]).

Основные результаты об образующих в категории mod-A заимствованы из работ Адзумаи [51], [66], Ауслендера — Голдмана [60] и Мориты [58]. По упражнениям, касающимся двойственности

и QF-колец, следует обратиться к статьям Мориты [58] и Адзумаи [59]. (Более детальные ссылки будут даны в гл. 23 и 24.)

Эйленберг [60] и Уотс [60] охарактеризовали непрерывные справа функторы как тензоры (12.9).

Ссылки

Адзумая [51, 59], Ауслендер—Голдман [60a], [60b], Басс [62a], [67], [73], Икеда [52], Коннел [63], Морита [58], Уотс [60], Фейс [66a], Эйленберг [60], Эйленберг — Накаяма [55].

Глава 13

Алгебры над полями

Эта глава представляет собой краткое введение к вопросам строения алгебр, главным образом конечномерных, над произвольным полем k. Ее основным содержанием являются теоремы Веддербёрна о конечномерных алгебрах A над алгебраически замкнутым полем k. Если в A нет ненулевых нильпотентных идеалов, то A есть конечное произведение полных матричных алгебр над k. В этом случае множество $d(A)$ порядков полных матричных алгебр, являющихся сомножителями, оказывается полным множеством инвариантов алгебры A. Таким образом, две конечномерные полупервичные алгебры A и B над k изоморфны тогда и только тогда, когда $d(A) = d(B)$ (13.7).

Теорема Веддербёрна о факторах (13.18) определяет строение произвольной конечномерной алгебры A над алгебраически замкнутым или совершенным полем, а именно: если N — максимальный нильпотентный идеал (таким образом, $N = \operatorname{rad} A$), то найдется полупростая подалгебра S, изоморфная A/N и такая, что $A = S + N$ и $S \cap N = 0$. Итак, каждая такая алгебра A есть прямая сумма над k полупростой алгебры и нильпотентной предалгебры (алгебры без единицы). По существу это сводит изучение строения алгебры A к изучению строения нильпотентной предалгебры и действия на N k-линейных преобразований, индуцированных умножением N на элементы алгебры S.

В эту главу также включены: (1) теорема Машке 13.21 о полупростоте групповых алгебр kG конечной группы G над полями k, характеристика которых не делит $|G|$; (2) теорема Веддербёрна о нильпотентности алгебр A, имеющих конечный базис, состоящий из нильпотентных элементов. (Связанная с ней теорема Нагаты и Хигмана [1]), не включенная в книгу, утверждает, что любая ниль-алгебра, элементы которой удовлетворяют тождеству $x^n = 0$, является нильпотентной индекса нильпотентности $\leqslant 2^n - 1$, если характеристика поля равна нулю либо больше, чем n.) Теорема Сколема — Нётер и группа Брауэра рассматриваются в упражнениях.

[1]) Короткое доказательство этой теоремы, данное Хиггинсом, содержится в книге Джекобсона [64, Appendix C, стр. 274].

Регулярные представления алгебры

Если k — произвольное коммутативное кольцо и A — алгебра над k, то канонический гомоморфизм

$$\begin{cases} A \to \operatorname{End}_k A \\ a \mapsto a_d, \text{ где } (x)\, a_d = xa \ \ \forall x \in A, \end{cases}$$

называется **правым регулярным представлением** алгебры A. (Здесь алгебра рассматривается как левое векторное пространство над k и в соответствии с соглашением, установленным в гл. 3, эндоморфизмы записываются с противоположной от скаляров стороны.) Двойственным образом, имеет место антигомоморфное вложение $A \to \operatorname{End}_k A$, определенное соответствием $a \mapsto a_s$, где $(x)\, a_s = ax$, и называемое **левым регулярным представлением алгебры** A. Если A — свободный модуль над k, скажем $A \approx k^m$, то говорят, что A имеет (**свободный**) k-**базис**. Тогда, поскольку имеет место канонический изоморфизм $k_m \approx \operatorname{End}_k k^m$, правое регулярное представление вкладывает A в k-алгебру k_m всех конечно-строчных $(m \times m)$-матриц над k. Это всегда так, если k — поле, поскольку в этом случае A — векторное пространство над k. Следовательно, если $\dim_k A = m < \infty$, то правое регулярное представление вкладывает A в алгебру матриц k_m.

Скалярные расширения

Если k — подкольцо коммутативного кольца K и A — k-алгебра, то $A_K = A \otimes_k K$ является K-алгеброй, которая называется **скалярным расширением алгебры A с помощью K**. Если A — плоский модуль над k, то последовательность

$$0 \to A \underset{k}{\otimes} k \to A \underset{k}{\otimes} K$$

точна, поэтому в этом случае определено вложение алгебры $A \approx A \underset{k}{\otimes} k$ в A_K, объясняющее термин «расширение». Кроме того, если K — плоский модуль над k и B — некоторый k-подмодуль алгебры A, то B_K канонически изоморфен K-подмодулю алгебры A_K.

13.1. Следствие. *Если A и B — точные алгебры над k и A — свободный k-модуль с базисом $\{x_i \mid i \in I\}$, то каждый элемент $x \in A \underset{k}{\otimes} B$ имеет единственное представление*

$$x = \sum_{i \in I} x_i \otimes b_i \quad (\textit{конечная сумма}),$$

где $b_i \in B$ для всех $i \in I$. В этом случае каноническое отображение $a \mapsto a \otimes 1$ является мономорфизмом алгебр $A \to A \underset{k}{\otimes} B$.

Доказательство. Первое утверждение следует из 11.13. Далее $a \mapsto a \otimes 1$ — гомоморфизм алгебр. Если $a = \sum_i x_i \alpha_i \in A$ и $a \otimes 1 = 0$, то $\sum_i x_i \otimes \alpha_i 1 = 0$, поэтому $\alpha_i 1 = 0$ в B, откуда $\alpha_i = 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $a = 0$, и тем самым второе утверждение доказано. □

13.2. Упражнения.

13.2.1. Если A — конечномерная алгебра над полем k, то A является конечномерным векторным пространством над k. Поэтому в векторном пространстве A существует базис $\{u_i\}_{i=1}^n$ и каждый $a \in A$ может быть представлен единственным образом в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad (\alpha_i \in k,\ i = 1, \ldots, n).$$

В частности, существуют n^3 скаляров $\gamma_{ijg} \in k$, таких, что

$$u_i u_j = \sum_{g=1}^{n} \gamma_{ijg} u_g \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Пусть K — произвольное поле, содержащее k, и рассмотрим векторное пространство B над K, размерность которого равна n. Выбрав в B базис $w_1, \ldots, w_n$, показать, что B является K-алгеброй относительно умножения, задаваемого правилом

$$w_i w_j = \sum_{g=1}^{n} \gamma_{ijg} w_g \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

(Так как это правило зависит только от n^3 скаляров γ_{ijg}, то умножение в B ассоциативно, поскольку оно ассоциативно в A.) Показать, что $B \approx A \underset{k}{\otimes} K$ как K-алгебры.

Обобщить на произвольные алгебры над полем k.

13.2.2. Пусть $A \underset{k}{\otimes} K$ — скалярное расширение k-алгебры A и K — плоский k-модуль.

(a) Если B — (правый, левый) идеал алгебры A, то B_K — (правый, левый) идеал алгебры A_K.

(b) Если K — свободный k-модуль и B_K — нильпотентный (правый, левый) идеал алгебры A_K, то B — нильпотентный (правый, левый) идеал алгебры A.

(c) A полупервично, если полупервично A_K. Обратное неверно (см. следующий пример).

13.3. Пример. Пусть $F = GF(2)$ — конечное поле, состоящее из двух элементов, $A = F(x)$ — трансцендентное расширение поля F и $k = F(x^2)$. Тогда A — алгебра над k с базисом $1, x$ и x — корень многочлена $f(X) = X^2 - \beta$, где $\beta = x^2 \in k$. Возьмем в качестве расширения K поля k поле A и рассмотрим алгебру $A_K = A \underset{k}{\otimes} K$. Если мы отождествим A с ее образом при каноническом отображении $A \to A_K$, то A_K имеет базис $1, x$ над K. Пусть $\theta = x \otimes 1 - 1 \otimes x \in A_K$. Тогда $\theta \in A_K$ и

$$\theta^2 = x^2 \otimes 1 - 1 \otimes x^2.$$

Так как

$$x^2 = \beta \in k,$$

то мы имеем

$$\theta^2 = \beta (1 \otimes 1 - 1 \otimes 1) = 0,$$

т. е. θ — нильпотентный элемент индекса 2. Поскольку A_K коммутативно, то θ порождает нильпотентный идеал индекса 2. Итак, A_K не полупервично, хотя A — поле. □

Алгебры над алгебраически замкнутыми полями

Если k — поле и $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ — многочлен от x с коэффициентами в k, т. е. если $p(x) \in k[x]$, то для каждого элемента $\beta \in k$ элемент $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta^i$ лежит в k и обозначается через $p(\beta)$. Если $p(\beta) = 0$, то β называется **корнем или нулем** многочлена $p(x)$. Поле k называется **алгебраически замкнутым**, если каждому многочлену $p(x) \in k[x]$ соответствует $\beta \in k$, такой, что $p(\beta) = 0$ (примером является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел). В этом случае по индукции найдутся $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in k$, такие, что $p(x) = \beta_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \beta_i)$, т. е. $p(x)$ разлагается на линейные множители в $k[x]$.

Если D — алгебра над полем k и D — тело, то D называется **алгеброй с делением** над k.

13.4. Предложение. *Если D — конечномерная алгебра с делением над k и k алгебраически замкнуто, то $D \approx k$ (канонически).*

Доказательство. Пусть n обозначает размерность D над k. Если $a \in D$, то $1, a, \ldots, a^n$ линейно зависимы над k и поэтому существуют $\alpha_i \in k$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i =$

$= 0$. Итак, если обозначить через L подполе тела D, порожденное полем k и элементом a, то многочлен $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in k[x]$ имеет корень $a \in L$. Пусть тогда $g(x)$ — многочлен наименьшей степени $t \leqslant n$, для которого $g(a) = 0$ в L. Так как k алгебраически замкнуто, то $g(x) = (x - \alpha) q(x)$, где $\alpha \in k$, $q(x) \in k[x]$. Тогда $g(a) = (a - \alpha) q(a) = 0$ в L и $q(a) \neq 0$ по определению $g(x)$. Поскольку D — тело, то непременно $(a - \alpha) \cdot 1 = 0$, т. е. $a = \alpha \cdot 1 \in k \cdot 1$. Это доказывает, что D совпадает с полем $k \cdot 1$, которое канонически изоморфно k при соответствии $\beta \cdot 1 \mapsto \beta$, определенном для всех $\beta \in k$. □

13.5. Следствие. *Пусть R — конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем k. Если в R нет (ненулевых) нильпотентных идеалов, то R является прямым произведением конечного числа полных матричных алгебр над k.*

Доказательство. Так как R является полупервичным артиновым кольцом, то по теореме 8.8 Веддербёрна — Артина R есть прямое произведение $R_1 \oplus \ldots \oplus R_t$, где каждое R_i — простое артиново кольцо. Поскольку мы можем считать, что R_i — идеал кольца R, то отсюда вытекает, что R_i — подалгебра алгебры R и, следовательно, алгебра над k, $i = 1, \ldots, t$. Таким образом, мы можем считать само R простым кольцом. Тогда $R \approx D_n$ для некоторой алгебры D с делением над k. Так как R, а следовательно, и D конечномерны, то из предложения 13.4 вытекает, что $D \approx k$. Поэтому R изоморфно полной матричной алгебре k_n, что и завершает доказательство. □

13.6. Следствие. *Если A — конечномерная простая центральная алгебра над полем k и K — алгебраически замкнутое поле, содержащее k, то алгебра $A \underset{k}{\otimes} K$ изоморфна полной матричной алгебре K_n.*

Доказательство. В силу 13.5 достаточно доказать, что A_K проста. (Упражнение, ср. 13.9.) □

Любое простое артиново кольцо R изоморфно кольцу D_n, где D — тело, причем D и n определены однозначно (см. 8.9). В разложении конечномерной полупростой алгебры R над алгебраически замкнутым полем k в прямое произведение $R = \prod_{i=1}^{t} R_i$, где каждая алгебра R_i является алгеброй матриц k_{n_i} порядка n_i, алгебры $R_1, \ldots, R_t$ также однозначно определены. Поэтому однозначно определено и множество

$$d(R) = \{n_1, \ldots, n_t\}.$$

13.7. Теорема (Веддербёрн). *Множество $d(R)$ является полным множеством инвариантов конечномерной полупростой алгебры R над алгебраически замкнутым полем k.* □

Выражаясь иначе, если S — другая такая алгебра, то $d(S) = d(R)$ тогда и только тогда, когда $S \approx R$.

Простые алгебры

Алгебра A над k называется **простой**, если A — простое кольцо. Центр простого кольца является полем. (Доказательство?)

13.8. Предложение. *Пусть k — поле, A и B — алгебры над k, причем A центральна. Если A и B — простые алгебры, то алгебра $A \underset{k}{\otimes} B$ также простая и*

$$\mathcal{C}(A \underset{k}{\otimes} B) = (1 \otimes \mathcal{C}(B)) \approx \mathcal{C}(B).$$

Доказательство. Пусть I — ненулевой идеал алгебры $R = A \otimes B$ ($\otimes$ обозначает тензорное произведение над k). Если $x \in R$, то

$$x = a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_n \otimes b_n \tag{1}$$

и $a_i \in A$, $b_j \in B$. Если $x \neq 0$, то определим длину элемента x как наименьшее число ненулевых a_i в представлениях (1) элемента x. Выберем в I элемент x наименьшей длины. Если $a', a'' \in A$, то элемент

$$(a' \otimes 1)\, x\, (a'' \otimes 1) = a'a_1a'' \otimes b_1 + \ldots + a'a_na'' \otimes b_n \tag{2}$$

лежит в I. Так как A — простая алгебра, то $A = Aa_1A$; поэтому 1 равна сумме конечного числа элементов вида $a'a_1a''$. Следовательно, складывая элементы вида (2), получим

$$0 \neq x_1 = 1 \otimes b_1 + \ldots + c_n \otimes b_n \in I^{1}). \tag{3}$$

Тогда для любого $a \in A$ элемент

$$(a \otimes 1)\, x_1 - x_1 (a \otimes 1) = (c_2a - ac_2) \otimes b_2 + \ldots + (c_na - ac_n) \otimes b_n$$

лежит в I и имеет длину, меньшую, чем длина элемента x. Таким образом, $(a \otimes 1)\, x_1 - x_1(a \otimes 1) = 0$ в силу выбора элемента x. Отсюда $c_ia = ac_i$ для каждого i и любого $a \in A$[2]). Итак, c_i лежит

[1]) $x_1 \neq 0$, так как элементы $b_1, \ldots, b_n$ в силу выбора элемента x линейно независимы над k. — *Прим. перев.*

[2]) В силу линейной независимости элементов $b_1, \ldots, b_n$ (см. примечание 1). — *Прим. перев.*

в центре алгебры A, т. е. в k, так что $c_i \otimes b_i = 1 \otimes c_i b_i$, $i = 2, \ldots, n$, и мы получаем из (3)

$$x_1 = 1 \otimes (b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_n b_n). \tag{4}$$

Так как $x_1 \neq 0$, то $y = b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_n b_n \neq 0$. Поскольку $x_1 = 1 \otimes y \in I$ и $y \neq 0$, то $1 \otimes B \in I$ и, следовательно $1 \otimes 1 \in I$. Поэтому $A \otimes B = I$, что и доказывает простоту алгебры $A \otimes B$. Далее, пусть $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ лежит в центре алгебры $A \otimes B$, где $u \neq 0$ и b_i линейно независимы над k. В силу рассуждения, аналогичного только что проведенному, $a_i \in k$ и $u = 1 \otimes y$, где $y = c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n$. Если $b \in B$, то $1 \otimes (by - yb) = 0$, поэтому $by = yb$. Отсюда $y \in \mathscr{C}(B)$. Итак,

$$\mathscr{C}(A \underset{k}{\otimes} B) = \{1 \otimes y \mid y \in \mathscr{C}(B)\},$$

как и утверждалось. □

13.9. Следствие. *Каждое скалярное расширение $A \underset{k}{\otimes} K$ центральной простой алгебры A над k с помощью поля K является центральной простой алгеброй.* □

Теорема Бернсайда

Теперь мы приведем теорему Бернсайда, которая будет доказана с использованием 13.4, теорем Веддербёрна — Артина и (чтобы осветить по-новому старую теорему) теоремы Мориты.

13.10А. Теорема. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, и пусть $L = \mathrm{End}_k V$, а R — подалгебра канонически определенной k-алгебры L. Тогда V — канонически определенный R-модуль, который прост в том и только том случае, когда $L = R$.*

Доказательство. Каждый R-эндоморфизм пространства V является k-эндоморфизмом и потому принадлежит L, т. е. $K = \mathrm{End}\, V_R \subseteq L$. Поскольку $\dim_k L = n^2$, где $n = \dim_k V$, и так как по лемме Шура K — тело[1]), то из 13.4 вытекает, что $K = k$. Если V — простой R-модуль, то из точности R-модуля V следует, что R не имеет ненулевых нильпотентных идеалов и что R — первичное кольцо. Таким образом, теорема Веддербёрна — Артина для конечномерных алгебр влечет за собой, что R — простая алгебра. Поэтому каждый простой правый R-модуль вкладывается в R и, следовательно, V — образующий категории mod-R (7.4.1).

[1]) В предположении, что V_R — простой модуль. — *Прим. перев.*

Тогда из теоремы 7.3 Мориты вытекает, что $R \approx \mathrm{End}_k V = L$ канонически, так что $R = L$. Обратно, V — простой правый L-модуль. (Доказательство?) □

13.10В. Упражнения.

13.10В.1. *Пусть A и B — алгебры над полем k. Если I — идеал алгебры A, то образ I' канонического отображения $I \underset{k}{\otimes} B \to A \underset{k}{\otimes} B$ является идеалом алгебры $A \underset{k}{\otimes} B$. Если B — центральная простая алгебра и J — идеал алгебры $A \underset{k}{\otimes} B$, то $J = I'$ для некоторого идеала I алгебры A.*

13.10В.2. *В категории коммутативных колец $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ является копроизведением $R \coprod S$.*

13.10В.3. *Если k — коммутативное кольцо, а A и B суть k-алгебры, то*

$$A_n \underset{k}{\otimes} B_m \approx (A \underset{k}{\otimes} B)_{nm}.$$

13.10В.4. *Доказать* 13.10В.3 *как частный случай более общего изоморфизма k-алгебр*

$$\varphi\colon (\mathrm{End}_A M) \underset{k}{\otimes}' (\mathrm{End}_B N) \to \mathrm{End}_{A \underset{k}{\otimes} B}(M \underset{k}{\otimes} N),$$

где

$$\varphi(f \otimes' g) = f \otimes g \quad (\textit{тензорное произведение отображений})$$

для всех $f \in \mathrm{End}_k M$, $g \in \mathrm{End}_k N$ и проективных A- и B-модулей M и N соответственно.

Сепарабельные расширения полей

Пусть L — алгебра над полем k. Элемент $a \in L$ называется **алгебраическим** над k, если существует ненулевой многочлен $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in k[x]$, где $\alpha_i \in k$, $i = 0, \ldots, n$, такой, что

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0.$$

Множество всех $g(x) \in k[x]$, таких, что $g(a) = 0$, является идеалом $Z(a)$ кольца $k[x]$. Так как $k[x]$ — кольцо главных идеалов, то найдется многочлен $f_a(x)$, такой, что $Z(a) = f_a(x)\, k[x]$. Для однозначности выберем $f_a(x)$ таким, что коэффициент при x^n равен 1, где $n = \deg f_a(x)$. Тогда $f_a(x)$ — **приведенный** многочлен,

который называется **минимальным многочленом элемента a над k.**

Многочлен $p(x) \in k[x]$ называется **неприводимым,** если в любом разложении $p(x) = a(x)\,b(x)$ в произведение многочленов $a(x)$, $b(x) \in k[x]$ либо $a(x)$, либо $b(x)$ постоянны, т. е. являются элементами поля k. Минимальный многочлен $f_a(x)$ элемента $a \in k$ неприводим.

Алгебра L над полем k (в обозначениях L/k) называется **алгебраической**, если каждый ее элемент является алгебраическим над k. Легко видеть, что если $\dim_k L$ конечна, то L/k — алгебраическая. Действительно, если $a \in L$, то $1, a, \ldots, a^n$ линейно зависимы над k для любого $n \geqslant \dim_k L$. Поэтому $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$, где α_i — элементы из k, не все равные нулю, и, следовательно, $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in Z(a)$. Алгебра L/k называется **трансцендентной**, если она не является алгебраической.

Пусть $k[x]$ обозначает кольцо многочленов над k. Тогда элемент $a \in L$ трансцендентен (т. е. не является алгебраическим) над k в том и только том случае, когда канонический гомоморфизм 5.74.1 k-алгебр $k[x] \to k[a]$, переводящий x в a, является изоморфизмом.

13.11. Упражнения.

13.11.1. Пусть $a \in k$. Тогда $h(x) \in Z(a)$ порождает $Z(a)$ в том и только в том случае, когда $h(x)$ — многочлен минимальной степени в $Z(a)$.

13.11.2. Если $h(x) \in k[x]$, то $h(x)$ неприводим в том и только том случае, когда $h(x)$ порождает максимальный идеал в $k[x]$. При этом $k[x]/(h(x))$ — поле.

13.11.3. Минимальный многочлен $f_a(x)$ элемента $a \in k$ неприводим. Пусть L обозначает поле $k[x]/(f_a(x))$. Канонический гомоморфизм $k[x] \to L$ отображает $k \subseteq k[x]$ на поле $\bar{k} \subseteq L$, а каждый $g(x) \in k[x]$ — в $\bar{g}(\bar{x})$ и, таким образом, $\bar{f}_a(\bar{x}) = 0$. Доказать по индукции, что существует поле E, содержащее k, в котором $f_a(x)$ разлагается на линейные множители. Такое поле наименьшей степени называется **полем разложения** многочлена $f_a(x)$ над k.

13.11.4. Пусть L/k — расширение поля k, $a \in L$ и $k(a)$ (соотв. $k[a]$) — поле (соотв. кольцо), порожденное элементом a и полем k. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) Элемент a алгебраический над k.

(b) $\dim_k k(a) < \infty$.

(c) $k(a) = k[a]$.

*13.11.5. Обобщить 13.11.4 следующим образом: если $a_1, \ldots, a_n \in L$, то подкольцо $k[a_1, \ldots, a_n]$ является полем тогда и только тогда, когда алгебра $k[a_1, \ldots, a_n]/k$ алгебраическая.

*13.11.6 (Амицур [56]). Если D — трансцендентная алгебра с делением над k, то $\dim_k D \geqslant |k|$. [*Указание*: учесть линейную независимость над k элементов $(t-a)^{-1}$, где $a \in k$.]

*13.11.7 (Амицур [56]). Пусть D — алгебра с делением над полем k и X — подмножество в D. Обозначим через $k(X)$ подалгебру с делением, а через $k[X]$ — подалгебру алгебры D, порожденные подмножеством X, и допустим, что k — несчетное поле, мощность которого больше $|X|$. Тогда если $D = k[X]$, то D — алгебраическая алгебра. (Ср. 13.11.5.)

13.11.8.(a) Если D — произвольная центральная алгебра с делением над k, то кольцо многочленов $D[x]$ является областью главных правых и главных левых идеалов, такой, что каждый идеал имеет вид $(p(x))$ для центрального многочлена $p(x)$, т. е. для $p(x) \in k[x]$. (Ср. Джекобсон [42].)

(b) Любая область главных левых и главных правых идеалов обладает тем свойством, что факторкольцо R/I, где $I \neq 0$, R, является QF-кольцом (Ср. упр. 6, гл. 12.) В частности, R/I артиново (справа и слева). Вывести отсюда, что каждый первичный идеал максимален. Если K — правое тело частных кольца R (существование?), а P — его максимальный идеал, то существует простое кольцо $RS^{-1} = \{as^{-1} \mid a \in R,\ s \in S = R - P\}$, содержащееся в K, которое называется **локализацией** R **в** P (и также обозначается через R_P).

*13.11.9 (ср. Джекобсон [64], стр. 241 и 248). Пусть D — центральная алгебра с делением над полем k. Доказать эквивалентность условий (a) — (d):

(a) Если $L = k(x)$ — поле частных алгебры многочленов $k[x]$, то $D \underset{k}{\otimes} k(x)$ — правое тело частных кольца $D[x] \approx D \underset{k}{\otimes} k[x]$.

(b) Каждый $d(x) \in D[x]$ является левым делителем некоторого центрального многочлена. [*Указание*: записать $d(x)^{-1} = f(x)\,a(x)^{-1}$, где $f(x) \in D[x]$ и $a(x) \in k[x]$. Это можно сделать, если $D \underset{k}{\otimes} k(x)$ является правым телом частных кольца $D[x]$.]

(c) Каждый ненулевой правый идеал кольца $D[x]$ содержит идеал, порожденный ненулевым многочленом $a(x) \in k[x]$.

(d) $D[x]$ не имеет точных простых модулей (в терминологии гл. 19 (точнее 19.22) кольцо $D[x]$ не является примитивным).

*13.11.10 (Амицур [56]). Пусть D — центральная алгебраическая алгебра с делением над k, и допустим, что справедливо одно из следующих условий: (A) $[D\colon k] < \infty$; (B) D/k локально конечномерна в том смысле, что любое конечное подмножество порождает конечномерную подалгебру; (C) для любого числа $n > 0$ алгебра матриц D_n размера $n \times n$ является алгебраической над k; (D) k несчетно. Тогда D удовлетворяет эквивалентным условиям (a) — (d) упражнения 13.11.9.

13.11.11. Если D — трансцендентная центральная алгебра с делением над k, то кольцо $D[x]$ многочленов является примитивным кольцом; итак, $D \underset{k}{\otimes} k(x)$ — область главных (правых и левых) идеалов и, более того, простое кольцо, не являющееся телом. (На самом деле эти свойства выполняются всякий раз, когда D — алгебра с делением и $D[x]$ примитивно.)

*13.11.12 (Амицур, loc cit). Если A — алгебра над полем k и $\dim_k A < |k|$, то $\operatorname{rad} A$ — алгебраическая предподалгебра. В действительности $\operatorname{rad} A$ — ниль-идеал.

*13.11.13 (Амицур, loc cit). Радикал конечно порожденной алгебры A над несчетным полем k является ниль-идеалом.

*13.11.14. Пусть k — алгебраически замкнутое поле и R — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для любого идеала I кольца R определим обычным образом множество $Z(I)$ нулей в k^n и, двойственным образом, для любого подмножества X в k^n определим идеал $I(X)$ как наибольший идеал кольца R, такой, что $Z(I(X)) = X$. **Теорема Гильберта о нулях** утверждает, что для любого идеала $I \neq R$ существует число m (зависящее от I), такое, что $f^m \in I$ для всех $f \in I(Z(I))$. Доказать эту теорему для случая $n = 1$.

13.12. Упражнение и определение. Алгебраическим замыканием поля k называется поле L, содержащее k и удовлетворяющее следующим эквивалентным условиям:

13.12.1. L — максимальный элемент в упорядоченном множестве $\operatorname{Alg}(k)$ всех алгебраических расширений поля k.

13.12.2. L — минимальный элемент в упорядоченном множестве всех алгебраически замкнутых полей, содержащих k.

13.12.3. L — алгебраическая алгебра над k и L алгебраически замкнута.

13.12.4. L — алгебраическая алгебра над k и каждый $f(x) \in k[x]$, не являющийся постоянным, имеет корень в L.

Доказать, что если L и K — два алгебраических замыкания поля k, то существует изоморфизм $L \approx K$, индуцирующий 1_k. □

Пусть $\overline{k}$ обозначает алгебраическое замыкание поля k. Тогда каждый многочлен $f(x) \in k[x]$ разлагается над $\overline{k}$ на линейные множители

$$f(x) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i),$$

где $\alpha_i \in \overline{k}$, $i = 0, \ldots, n$. Многочлен $f(x)$ называется **сепарабельным** над k, если элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ все различны. Это определение не зависит от $\overline{k}$, поскольку в силу 13.12 любые два алгебраических замыкания поля k изоморфны над k. Если C/k — расширение поля k, то элемент $a \in C$ называется **сепарабельным**, если он алгебраический над k и его минимальный многочлен над k является сепарабельным над k. Расширение C/k поля k называется **сепарабельным**, если каждый элемент поля C является сепарабельным над k. **Несепарабельность** означает, что расширение не является сепарабельным. Чтобы отличать только что введенное понятие от сепарабельности алгебр, мы будем ссылаться на него как на **сепарабельность полей.** Мы откажемся от этой модификации после того, как соответствующие теоремы (13.16) подтвердят, что это возможно.

Критерий сепарабельности полей

Для сепарабельности имеется простой тест. Идеалы A и B кольца R называются **взаимно простыми** или **комаксимальными**, если $R = A + B$. (Ср. 3.13.5.)

13.13. Тест сепарабельности. *Пусть C/k — алгебраическое расширение поля k.*

13.13.1. *Элемент $a \in C$ является сепарабельным над k тогда и только тогда, когда минимальный многочлен $f_a(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ и его производная $f_a'(x) = \sum_{i=0}^{n} i\alpha_i x^{i-1}$ взаимно просты в $k[x]$.*

13.13.2. *Элемент a не является сепарабельным тогда и только тогда, когда k имеет простую характеристику p и $f_a(x) = g(x^p)$ для некоторого многочлена $g(x) \in k[x]$.* □

13.14. Упражнения.

13.14.1. Пусть C и k — поля, $C \supseteq k$ и C/k — конечномерная алгебра. Тогда $C = k(a)$ для некоторого элемента $a \in C$ в том и только том случае, если существует лишь конечное число полей D между C и k, $C \supseteq D \supseteq k$. Вывести отсюда, что если $C = k(a)$ конечномерно и D — поле между C и k, то $D = k(b)$ для некоторого $b \in C$.

*13.14.2. Если C/k — конечное расширение поля k и C/k сепарабельна, то $C = k(a)$ для некоторого $a \in C$.

13.15. Предложение. *Пусть k — поле и $C = k(a)$ — алгебраическое расширение поля k, порожденное одним элементом a. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *C/k — сепарабельное расширение поля k.*

(b) *Элемент a сепарабелен над k.*

(c) *Для любого расширения L поля k тензорная алгебра $C \underset{k}{\otimes} L$ не имеет отличных от нуля нильпотентных элементов.*

(d) *Для любого поля* $L \supseteq k$ *алгебра* $C \underset{k}{\otimes} L$ *является (кольцевым) прямым произведением конечного числа экземпляров поля* L.

(c′) *Условие* (c) *для случая, когда* L — *алгебраически замкнутое поле, содержащее* k.

(d′) *Условие* (d) *для случая, когда* L — *алгебраически замкнутое поле, содержащее* k.

Если эти условия выполнены, то D/k — *сепарабельное расширение поля для любого поля* D, *такого, что* $C \supseteq D \supseteq k$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) тривиально (b) $\Rightarrow$ (c). Так как C/k — алгебраическая алгебра, то $C = \sum_{i=0}^{n-1} ka^i$ и эта сумма прямая, если n — степень минимального многочлена $f_a(x)$ элемента a. Следовательно, $\{a^i \otimes 1 \mid i = 0, \ldots, n-1\}$ — базис L-алгебры $C \underset{k}{\otimes} L$, т. е. существует точная последовательность

$$0 \to f_a(x) \cdot L[x] \to L[x] \to C \underset{k}{\otimes} L \to 0,$$

где $L[x] \to C \underset{k}{\otimes} L$ — такое отображение, при котором $x \mapsto a \otimes 1$. Если $y \in C \underset{k}{\otimes} L$, то $y = G(a)$[1]) для некоторого $G(x) \in L[x]$. Если y нильпотентен, скажем $y^t = 0$, то $G(x)^t \in f_a(x) \cdot L[x]$. Так как $f_a(x)$ сепарабельный, то $f_a(x)$ не делится на квадрат никакого неприводимого многочлена над L. Поэтому $f_a(x)$ делит $G(x)$ и $y = G(a) = 0$. Итак, любой нильпотентный элемент алгебры $C \underset{k}{\otimes} L$ равен нулю.

(c) $\Rightarrow$ (a). Предположим, что (a) не верно. Если $b \in C$ не является сепарабельным, то k имеет характеристику $p \neq 0$ и $f_b(x) = g(x^p)$ для некоторого многочлена $g(x) \in k[x]$. (См. 13.13.) Если L — произвольное расширение поля k, содержащее корни p-й степени из коэффициентов многочлена $g(x)$ (в частности, L может быть алгебраическим замыканием поля k), то $\alpha = \beta^p$ для некоторого $\beta \in L$, где α — произвольный коэффициент многочлена $g(x)$. Отсюда вытекает, что $f_b(x) = (h(x))^p$ для $h(x) \in L[x]$. Так как $\deg h < \deg f_b$, то $h(b)$ отличен от нуля в $C \underset{k}{\otimes} L$ и

$$f_b(b) = h(b)^p = 0.$$

Следовательно, из ложности утверждения (a) вытекает ложность утверждения (c).

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Так как C — конечномерная алгебра над k, то алгебра $A = C \underset{k}{\otimes} L$ конечномерна над L. Поэтому, поскольку алгебра A артинова, применима теорема 8.8 Веддербёрна — Артина.

[1]) Правильнее было бы писать $a \otimes 1$ вместо a.— *Прим. перев.*

Следовательно, A является произведением конечного числа полей тогда и только тогда, когда A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов[1]). Поскольку A коммутативна, это равносильно требованию, чтобы A не имела ненулевых нильпотентных элементов.

Тем самым доказана эквивалентность условий (a) — (d). Отсюда вытекает и эквивалентность утверждения (c) или (d) соответствующему утверждению для случая, когда L — алгебраически замкнутое поле, содержащее k, поскольку любое поле K, содержащее k, вкладывается в такое поле. Таким образом, если (c) выполняется для $L = \overline{K}$, то (c) справедливо и для $L = K$, поскольку $C \underset{k}{\otimes} K \subseteq C \underset{k}{\otimes} \overline{K}$ не имеет отличных от нуля нильпотентных элементов. Аналогично, если (d) справедливо для $L = \overline{K}$, то (c) справедливо для $L = \overline{K}$ и K, откуда, используя доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (d), выводим, что (d) справедливо для $L = K$. Теперь мы докажем последнее утверждение предложения. Так как последовательность

$$0 \to D \underset{k}{\otimes} L \to C \underset{k}{\otimes} L$$

точна, то $D \underset{k}{\otimes} L \subseteq C \underset{k}{\otimes} L$. Следовательно, если справедливо (b), то $C \underset{k}{\otimes} L$, а с ней и $D \underset{k}{\otimes} L$ не имеют ненулевых нильпотентных элементов. Поскольку $D = k(b)$ для некоторого $b \in D$ (см. 13.14), то D/k — сепарабельное расширение, ввиду импликации (c) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (a). □

13.16. Критерий сепарабельности. *Пусть* A — *конечномерная алгебра над полем* k. *Тогда говорят, что* A ***сепарабельна над*** k *или что* A/k — ***сепарабельное расширение***, *если справедливы следующие эквивалентные условия*:

13.16.1. $L \underset{k}{\otimes} A$ — *полупростая алгебра для всех расширений* L *поля* k.

13.16.2. L-*алгебра* $L \underset{k}{\otimes} A$ *для некоторого алгебраически замкнутого поля* $L \supseteq k$ *является произведением полных матричных алгебр над* L.

13.16.3. *Алгебра* A *полупроста, а* $\mathfrak{C}(A)$ *есть произведение конечного числа сепарабельных расширений поля* k.

В этом случае 13.16.2 *справедливо для* $L = \overline{k}$ — *алгебраического замыкания поля* k,— *а также для некоторого содержащегося в* $\overline{k}$ *конечного сепарабельного расширения* L *поля* k.

[1]) Следует иметь в виду, что коммутативное простое кольцо является полем.— *Прим. ред.*

Доказательство провести в качестве упражнения. □

Заметим, что из 13.16.3 следует, что поле A является конечным сепарабельным расширением поля k тогда и только тогда, когда алгебра A сепарабельна.

Говорят, что поле **совершенно**, если каждое его (конечное) алгебраическое расширение является сепарабельным.

13.17. Упражнение. Поле k совершенно тогда и только тогда, когда: (a) k имеет характеристику 0 или (b) k имеет характеристику $p > 0$ и содержит все корни p-й степени из элементов поля k или, что эквивалентно, каждый элемент поля k является p-й степенью. (Это справедливо для любого алгебраического расширения конечного поля.)

13.18. Теорема Веддербёрна о факторах. *Если A — алгебра конечной размерности над полем k и алгебра $A/\mathrm{rad}\,A$ сепарабельна, то в A существует полупростая подалгебра S, канонически изоморфная алгебре $A/\mathrm{rad}\,A$ и такая, что $A = S + \mathrm{rad}\,A$ и $S \cap \mathrm{rad}\,A = 0$. Алгебра S называется* ***полупростым фактором или полупростой частью алгебры*** *A*[1]*.*

Доказательство. Доказательство можно разложить на два случая, а именно если $N = \mathrm{rad}\,A$, то либо (1) $N^2 \neq 0$, либо (2) $N^2 = 0$. В каждом случае можно предположить справедливость теоремы для всех алгебр размерности, меньшей $n = \dim_k A$. Следовательно, в случае (1) существует подалгебра S_1, содержащая N^2, такая, что

$$\overline{A} = \overline{S}_1 + \overline{N} \,\&\, \overline{S}_1 \cap \overline{N} = 0,$$

где черта обозначает образ при каноническом гомоморфизме $\overline{A} \to A = A/N^2$. Тогда $A = S_1 + N$ и $S_1 \cap N = N^2$. Так как радикал алгебры S_1 равен N^2, а $\dim_k S_1 < n = \dim_k A$, то по предположению индукции в S_1 существует подалгебра S, такая, что $S_1 = S + N^2$ и $S \cap N^2 = 0$. Но тогда $A = S + N$ и $S \cap N = 0$, следовательно, $A = S + N$ — нужное разложение алгебры A, поскольку алгебра $S \approx A/N$ полупроста.

Доказательство для случая (2) *проведем только в предположении, что $\widetilde{A} = A/N$—произведение полных матричных алгебр над k.* Таким образом, теорема будет справедлива для скалярного расширения $\widetilde{A}_P = \widetilde{A} \underset{k}{\otimes} P$, где P — конечное сепарабельное расширение поля k, содержащееся в алгебраическом замыкании $\overline{k}$ (и для $P = \overline{k}$), так как тогда в силу 13.16 A_P является произведением

[1]) Этот факт вместе с утверждением о единственности полупростой части известен как теорема Веддербёрна — Мальцева (Кэртис — Райнер [69], стр. 450).— *Прим. ред. и перев.*

полных матричных алгебр над P. Редукция нужного разложения для $\widetilde{A}_P$ к $\widetilde{A}$ остается в качестве упражнения либо читатель может следовать книге Джекобсона [47, стр. 221—222] (как мы и делаем).

Итак, предположим, что $\widetilde{A} = \coprod_{i=1}^{t} M_{n_i}(k)$ — произведение полных матричных алгебр над k степеней n_i, $i = 1, \ldots, t$. Можно показать, что ортогональные идемпотенты алгебры $\widetilde{A} = A/\mathrm{rad}\,A$ могут быть «подняты» до ортогональных идемпотентов алгебры A. В частности, существуют ортогональные идемпотенты $\{e_i\}_{i=1}^{t}$ алгебры A, такие, что e_i— единица алгебры $M_{n_i}(k)$, $i = 1, \ldots, t$ см., например, 18.21). Тогда $B_i = e_i A e_i$— алгебра над k с единицей e_i и $\mathrm{rad}\,B_i = e_i N e_i$, $B_i/e_i N e_i \approx M_{n_i}(k)$, $i = 1, \ldots, t$. Если $t = 1$, то матричные единицы алгебры $M_{n_1}(k)$ могут быть «подняты» до матричных единиц $\{f_{ij}\}_{i,\,j=1}^{n}$ алгебры $A = B_1$ и тогда $k_n = \sum_{i,\,j=1}^{n} f_{ij} k$ — подалгебра алгебры A, которая является ее полупростой частью, поскольку, очевидно, $k_n \cap N = 0$, где $k = k \cdot 1$ — подалгебра скаляров. В случае если $t > 1$, сумма $S = S_1 + \ldots + S_t$, где S_i— обозначает полупростую часть алгебры B_i, $i = 1, \ldots, t$, имеет размерность $m = \sum_{i=1}^{t} n_i^2$ над k и $S \cap N = 0$. Так как $\dim_k A/N = m$, отсюда следует, что $A = S + N$ и поэтому S —полупростая часть алгебры A. □

13.19. Следствие. *Над совершенным полем k любая конечномерная алгебра A имеет полупростую часть.* □

Упражнения по теории Галуа

Алгебраическое расширение L/k поля k называется **нормальным**, если каждый многочлен $f(x) \in k[x]$, имеющий корень в L, разлагается в $L[x]$ на линейные множители. Это можно перефразировать так: все корни любого многочлена над k, имеющего по крайней мере один корень в L, лежат в L. Итак, если L и множество $Z(f)$ корней многочлена $f(x)$ рассматриваются как канонические подмножества поля $\overline{k}$, то либо $Z(f) \cap L = \varnothing$, либо $Z(f) \subseteq L$. Расширение L/k поля k называется **конечным**, если $\dim_k L$ конечна.

13.20. Упражнение.

13.20.1. Каждое конечное расширение L/k поля k содержится в конечном нормальном расширении N (L/k) наименьшей степени и между любыми двумя такими расширениями существует изоморфизм, который индуцирует тождественное отображение на k.

Поле $N(L/k)$ называется **нормальным замыканием** поля L/k. Конечное расширение L/k нормально тогда и только тогда, когда L — поле разложения некоторого многочлена над k.

13.20.2. Нормальное замыкание конечного сепарабельного расширения является конечным сепарабельным расширением.

13.20.3. Расширение L/k является конечными сепарабельным и нормальным тогда и только тогда, когда L/k — поле разложения сепарабельного многочлена над k.

13.20.4. Расширение L/k называется **расширением Галуа**, если существует группа G автоморфизмов поля L, такая, что

$$\operatorname{fix} G = \{x \in L \mid g(x) = x \text{ для всех } g \in G\} = k.$$

При этом $\dim_k L < \infty$ тогда и только тогда, когда $|G|$ конечно, и тогда $\dim_k L = |G|$.

13.20.5. Любое конечное расширение конечного поля является расширением Галуа.

13.20.6. Основная теорема Галуа. Конечное расширение L/k является расширением Галуа в том и только том случае, когда L/k конечно, сепарабельно и нормально. Тогда если, скажем, $k = \operatorname{fix} G$, то отображения множества подгрупп группы G в множество подполей поля L, содержащих k, и наоборот, определяемые так:

$$S \mapsto \operatorname{fix} S$$

и

$$G(L/M) \leftarrow\!\shortmid M,$$

являются взаимно обратными. Группа $G(L/M)$ [1]) называется **группой Галуа** поля L над M, а M — соответствующим **подполем Галуа**. Кроме того, S — нормальная подгруппа группы G тогда и только тогда, когда $\operatorname{fix} S$ — нормальное расширение поля k. В этом случае $\operatorname{fix} S/k$ оказывается расширением Галуа, каждый элемент $g \in G(L/k)$ индуцирует автоморфизм $\tilde{g} \in G(\operatorname{fix} S/k)$ и имеет место каноническая точная последовательность

$$(1) \to G(L/\operatorname{fix} S) \to G(L/k) \to G(\operatorname{fix} S/k) \to (1).$$

13.20.7. Если G — конечная группа автоморфизмов поля L, то $G = G(L/\operatorname{fix} G)$.

13.20.8. Если L/k — конечное сепарабельное расширение, то $L = k[a]$ для некоторого $a \in L$. [*Указание*: по основной теореме имеется лишь конечное число промежуточных расширений M, т. е. таких, что $L \supseteq M \supseteq k$.]

[1]) $G(L/M)$ обозначает подгруппу $\{g \in G \mid gx = x \text{ для всех } x \in M\}$.— *Прим. перев.*

След матрицы

Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матричные единицы полной матричной алгебры k_n над полем k[1]). Тогда каждый элемент $a \in k_n$ имеет единственное представление

$$a = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} e_{ij} \to (\alpha_{ij}),$$

где $\alpha_{ij} \in k$, $i, j = 1, \ldots, n$. След матрицы a по определению равен сумме $\operatorname{Tr}(a)$ диагональных элементов в ее матричном представлении,

$$\operatorname{Tr}(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}. \tag{1}$$

Тогда

$$\operatorname{Tr}(a+b) = \operatorname{Tr}(a) + \operatorname{Tr}(b) \tag{2}$$

и

$$\operatorname{Tr}(ab) = \operatorname{Tr}(ba) \text{ для всех } a, b \in k_n. \tag{3}$$

(На самом деле эти формулы верны для любого коммутативного кольца k.)

След $\operatorname{Tr}(a)$ не зависит от выбора матричных единиц в k_n, т. е. если $\{f_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ — также матричные единицы в k_n и

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} f_{ij} \quad (\beta_{ij} \in k),$$

то $\sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$. Существует много способов это доказать. Один способ состоит в доказательстве того, что если

$$f(x) = x^t - \alpha_1 x^{t-1} - \ldots - \alpha_t$$

— минимальный многочлен элемента a над k, то $\operatorname{Tr}(a) = \alpha_1$. (Элемент a является корнем некоторого многочлена, так как $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ порождают векторное подпространство конечной размерности, меньшей чем n^2.) В частности, если a нильпотентен, скажем $a^s = 0$, то минимальный многочлен $f(x)$ элемента a делит многочлен x^s, и отсюда следует, что $f(x) = x^t$ и поэтому $\operatorname{Tr}(a) = 0$.

Другой способ доказательства независимости следа от выбора матричных единиц заключается в том, чтобы установить существо-

[1]) Автор имеет в виду не обязательно естественные матричные единицы и рассматривает матричное представление относительно этих матричных единиц.—*Прим. ред.*

вание обратимого элемента $y \in k_n$, такого, что $ye_{ij}y^{-1} = f_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. (Это делается в гл. 18.) Тогда

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}e_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}f_{ij} = y\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}e_{ij}\Big)\, y^{-1}$$

и из того, что $\mathrm{Tr}\,(ay) = \mathrm{Tr}\,(ya)$, т. е. $\mathrm{Tr}\,(y^{-1}ay) = \mathrm{Tr}\,(a)$, вытекает, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}$.

Теорема Машке

Пусть G — конечная группа порядка n. Рассмотрим левое регулярное представление групповой алгебры

$$\begin{cases} kG \to \mathrm{End}_k\, kG \approx k_n \\ a \mapsto a_s \leftrightarrow (\alpha_{ij}) = \bar{a}. \end{cases}$$

Запишем $G = \{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_n\}$. Тогда $\bar{a} = (\alpha_{ij})$ — такая матрица, что

$$ag_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}g_i \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, $\bar{g}_i (i = 1, \ldots, n)$ есть просто **матрица подстановки**, *т.е. такая матрица, что в каждой ее строке содержится одна и только одна единица, остальные коэффициенты строк нулевые и ни один столбец не содержит более одной единицы.* Это соответствует следующим фактам: (i) g_ig_j — базисный элемент (т. е. элемент группы G) и (ii) $g_iG = G$, $i, j = 1, \ldots, n$. Если матрица $\bar{g}_i$ имеет единицу на диагонали, скажем на месте (p, p), то $g_ig_p = g_p$ и поэтому непременно $g_i = 1$, т. е. $i = 1$. Следовательно, $\mathrm{Tr}\,(\bar{g}_i) = 0$, $i > 1$ и $\mathrm{Tr}\,(\bar{g}_1) = n$. Этот простой факт о матрицах будет использован в доказательстве теоремы Машке, которая ведет свою историю от работы Машке [98].

13.21. Теорема (Машке). *Пусть $A = kG$ — групповая алгебра конечной группы G порядка n над полем k. Тогда A — полупростая алгебра в том и только том случае, когда характеристика π поля k не делит n.*

Доказательство. Предположим сначала, что π делит n, и пусть $h = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Из того, что $g_ih = hg_i = h$, $i = 1, \ldots, n$, выводим два результата: (a) h коммутирует с каждым элементом алгебры A; (b) $h^2 = nh$. Поскольку π делит n, из (b) следует, что $h^2 = 0$. Свойство (a) влечет за собой, что $hA = Ah$, поэтому $(hA)^2 = h^2A = 0$, и, следовательно, hA — нильпотентный идеал алгебры A. Так как A — конечномерная алгебра над k, из теоремы (8.8) Веддербёрна — Артина получаем, что A не является полупростой.

Обратно, если A не является полупростой, то по теореме Веддербёрна — Артина A содержит ненулевой нильпотентный идеал N. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} g_i\alpha_i$ — ненулевой элемент идеала N. Тогда $\gamma = \alpha_i \neq 0$ для некоторого i, и $y = x\gamma^{-1}g_i^{-1}$ — элемент идеала N вида

$$y = 1 + g_2\beta_2 + \ldots + g_n\beta_n,$$

где $\beta_i \in k$, $i = 2, \ldots, n$. Так как N нильпотентен, то y — нильпотентный элемент. Мы уже установили, что любая нильпотентная матрица имеет нулевой след[1]), поэтому $\mathrm{Tr}\,(y) = 0$. Но, поскольку функция следа аддитивна,

$$\mathrm{Tr}\,(y) = \mathrm{Tr}\,(1) + \mathrm{Tr}\,(g_2)\,\beta_2 + \ldots + \mathrm{Tr}\,(g_n)\,\beta_n.$$

Ввиду замечаний, предшествовавших теореме, мы знаем, что

$$\mathrm{Tr}\,(g_2) = \ldots = \mathrm{Tr}\,(g_n) = 0$$

и $\mathrm{Tr}\,(1) = n$. Таким образом, $\mathrm{Tr}\,(y) = n = 0$; поэтому π делит n, что завершает доказательство. □

Из теоремы Машке вытекает, что над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (или над любым полем характеристики нуль) групповая алгебра $\mathbb{C}G$ **классически** полупроста. Вопрос о том, какие **классически** полупростые алгебры над $\mathbb{C}$ являются групповыми алгебрами, не решен и представляется исключительно трудным (см. обсуждение этого вопроса Брауэром [63, стр. 135—137]).

Только что изложенное доказательство использует теорему Веддербёрна — Артина и некоторые результаты из теории матриц. Оно иллюстрирует аксиоматический подход в математике: строится математическая теория (в нашем случае теорема Веддербёрна — Артина) и затем она последовательно используется для решения связанных с ней проблем. Это очень мощный принцип в математике, поскольку многие вопросы получают естественную формулировку в рамках системы аксиом, которая, в свою очередь, возникает именно в связи с этими вопросами. Во многих случаях этот метод оказывается эффективным ввиду того, что широкий класс проблем без больших усилий приводит к системе аксиом. Но такой принцип имеет также и недостатки: (1) каждая проблема обладает своим собственным набором аксиом (предположениями), который может привести к заметно более простым доказательствам, чем те, которые получены из общей системы аксиом; (2) попытки решить проблему, исходя из первоначальных принципов, могут оказаться обескураживающими в результате огрубления математической

[1]) Здесь используется матричное представление алгебры.—*Прим. перев.*

интуиции. Следующая теорема или, точнее, ее доказательство представляет собой классическое доказательство теоремы Машке. Это в высшей степени оригинальное доказательство весьма поучительно.

Сначала мы вводим лемму о функции следа на конечной группе, а затем понятие расщепляемо-расщепляющейся алгебры.

13.22. Лемма и определение. *Пусть k — коммутативное кольцо, G — конечная группа, и пусть A, B, A_1 и B_1 — правые kG-модули, а E есть (kG, kG)-бимодуль. Отображение*

$$\mathrm{Tr}_G\begin{cases} E \to E \\ a \mapsto \sum\limits_{g\in G} g^{-1}(a)\, g \end{cases}$$

является k-гомоморфизмом, таким, что

(1) $$h\,\mathrm{Tr}_G(x) = \mathrm{Tr}_G(x)\,h \text{ для всех } x \in E,\ h \in G.$$

Кроме того,

(2) $$\mathrm{Tr}_G(f_1 f f_2) = f_1 \mathrm{Tr}_G(f)\, f_2$$

для любого k-гомоморфизма f и $k(G)$-гомоморфизмов f_1 и f_2,

$$A_1 \xrightarrow{f_2} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f_1} B_1,$$

и $\mathrm{Tr}_G(f)$ является kG-гомоморфизмом.

Доказательство. Равенство (1) следует из того, что $hG = Gh = G$ для всех $h \in G$ (т. е. умножение на h переставляет элементы группы G). В самом деле, имеем

$$h\cdot\mathrm{Tr}_G(x) = h\sum_{g\in G} g^{-1}xg = \sum_{g\in G} hg^{-1}xg =$$
$$= \sum_{g\in G}(gh^{-1})^{-1}xgh^{-1}\cdot h = \Big(\sum_{g\in G}(gh^{-1})^{-1}x(gh^{-1})\Big)h = \mathrm{Tr}_G(x)\,h.$$

Далее, ясно, что $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ является (kG, kG)-бимодулем. Поэтому для него определено отображение Tr_G и имеет место (1). В частности, отсюда вытекает, что $\mathrm{Tr}_G(f)$ является kG-гомоморфизмом для любого $f \in \mathrm{Hom}_k(A, B)$. Более того,

$$\mathrm{Tr}_G(f_1 f f_2) = \sum_{g\in G} g^{-1}(f_1 f f_2)\, g =$$
$$= \sum_{g\in G} f_1(g^{-1}(f f_2))\, g = \sum_{g\in G} f_1(g^{-1}fg)\, f_2 =$$
$$= f_1\Big(\sum_{g\in G} g^{-1}fg\Big) f_2 = f_1\,\mathrm{Tr}_G(f)\, f_2,$$

что доказывает (2). □

Говорят, что k-алгебра A является **k-расщепляемо-расщепляющейся** алгеброй, если для каждой точной последовательности

(3) $$0 \to P \to Q \to T \to 0$$

A-модулей выполняется такое утверждение: последовательность (3) расщепляется как последовательность A-модулей тогда и только тогда, когда она расщепляется как последовательность k-модулей [1]).

Поскольку из A-расщепляемости всегда следует k-расщепляемость, то суть этого условия состоит в том, что из k-расщепляемости обязана следовать A-расщепляемость. Это эквивалентно условию, что если A-подмодуль модуля Q является k-прямым слагаемым, то он также и A-прямое слагаемое.

13.23. Теорема. *Пусть G — группа конечного порядка n и k — коммутативное кольцо, такое, что $n = n\cdot 1$ — обратимый элемент в k. Тогда групповая алгебра kG является k-расщепляемо-расщепляющейся алгеброй.*

Доказательство. Пусть M — A-модуль и N — его A-подмодуль, являющийся прямым слагаемым левого k-модуля M. Запишем $M = N \oplus N'$, где N' есть k-подмодуль модуля M. Пусть $p\colon M \to N$ — проекция параллельно N', а $i\colon N \to M$ — включение. Тогда

$$pi = 1_N.$$

Кроме того, поскольку $ix = x$ для всех x, лежащих в N, то

$$igx = gx = gix \text{ для всех } g \in G,\ x \in N.$$

Поэтому i является kG-гомоморфизмом. Применяя теперь к равенству $pi = 1_N$ отображение Tr_G и учитывая равенство (2) из 13.22, получаем

$$\mathrm{Tr}_G(pi) = \mathrm{Tr}_G(p)\, i = \mathrm{Tr}_G(1_N) = n\cdot 1_N,$$

где n — порядок группы G. Следовательно, и $\mathrm{Tr}_G(p)$, и $n^{-1}\mathrm{Tr}_G(p)$: $N \to M$ являются kG-гомоморфизмами. Поскольку $n^{-1}\mathrm{Tr}_G(p)\cdot i = 1_N$, это доказывает, что N — прямое kG-слагаемое. □

13.24. Упражнение. Применить 13.23 для доказательства теоремы Машке.

---

[1]) В литературе такую алгебру иногда называют «полупростой» или говорят, что она имеет нулевую относительную глобальную размерность. (Ср. Хохшильд [56,] [58].)

Порядки в алгебрах

13.25. Определение. Пусть A — алгебра с конечным базисом над коммутативным кольцом k, совпадающим со своим кольцом частных, и R — правый порядок с единицей в k. Тогда **R-порядком** в A называется R-предподалгебра B, которая конечно порождена в mod-R и такова, что справедливы следующие эквивалентные условия:

13.25.1. B содержит k-базис алгебры A.

13.25.2. $Bk = A$.

Тогда

$$A = \{b\alpha^{-1} \mid b \in R,\ \alpha \in R \text{ и } \alpha \text{ — регулярный элемент}\}.$$

Доказательство предоставляется читателю.

13.26. Пример.

13.26.1. Если B — алгебра, имеющая конечный базис над R, то B является R-порядком в k-алгебре $B_k = B \underset{R}{\otimes} k$.

13.26.2. Групповая алгебра RG конечной группы является R-порядком в k-алгебре kG.

13.26.3. Пусть B есть R-порядок в k-алгебре A над полем k. Поскольку $\dim_k A$ конечна, то алгебра A полулокальна и в действительности артинова. Таким образом, результаты гл. 10 (ср. также гл. 25) применимы к этим порядкам. Итак, из теоремы Машке вытекает, что групповая алгебра RG конечной группы является порядком в полупростой алгебре kG, если R — порядок в k и характеристика поля k не делит порядок группы G. В любом случае RG является порядком в квазифробениусовой (QF-) алгебре. (См. 13.27.7.) По R-порядкам имеется обширная литература. См., например, Джекобсон [47], Дейринг [48], Ауслендер — Голдман [60a] и Кэртис — Райнер [69, в особенности стр. 515 и далее].

13.27. Упражнения.

13.27.1. (a) Если G — конечная группа, то целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ не содержит идемпотентов, отличных от 0 и 1. (b) Каждый проективный $\mathbb{Z}G$-модуль свободен.

13.27.2. Если G — конечная группа, R — коммутативное кольцо и V — простой RG-модуль, то V — конечномерное пространство над $\operatorname{End} V_{RG}$.

13.27.3. Если K — поле характеристики 0, G — конечная группа и $d(KG) = \{n_1, \ldots, n_d\}$ — инварианты Веддербёрна (см. 13.7) для полупростой алгебры KG, то d равно числу классов сопряженности группы G.

13.27.4 (Коннел [63]). Пусть G — конечная группа. Если A — самоинъективное справа кольцо, то групповое кольцо AG также самоинъективно справа.

13.27.5 (Коннел). Если групповое кольцо AG над кольцом A самоинъективно справа, то A самоинъективно справа и G — периодическая группа, т. е. каждый элемент группы G имеет конечный порядок.

13.27.6 (Коннел). Пусть G — группа и A — кольцо. Тогда AG — артиново справа кольцо в том и только том случае, когда A артиново справа и группа G конечна.

13.27.7. Если G — конечная группа, то групповое кольцо AG над кольцом A квазифробениусово тогда и только тогда, когда A квазифробениусово. (Ср. гл. 12, упр. 6.)

13.27.8. Найти необходимые и достаточные условия на R и G для того, чтобы RG было первичным кольцом [соотв. совершенным кольцом (см. гл. 22)]. (Ср. Коннел [63]; Вудс [71].)

13.27.9. Пусть G и H — конечные группы. Для любого коммутативного кольца R имеет место канонический изоморфизм

$$R(G \times H) \approx RG \underset{R}{\otimes} RH$$

R-алгебр, где $G \times H$ — прямое произведение групп.

13.27.10 (Ауслендер [58]). Группа называется **локально конечной**, если каждое ее конечное подмножество порождает конечную подгруппу. (Таким образом, абелева группа локально конечна тогда и только тогда, когда она периодическая.) Групповая алгебра kG локально конечной группы G является регулярным кольцом в том и только том случае, когда k — регулярное кольцо с однозначным делением на порядок каждого элемента группы G. Для того чтобы kG было регулярным без предположения локальной конечности группы G, необходимо, чтобы G была периодической группой, а k обладало указанным выше свойством делимости.

Нильпотентные базисы

В этом параграфе понятие скалярного расширения вместе с теоремой Веддербёрна — Артина для алгебр применяются для того, чтобы получить теорему Веддербёрна об алгебрах, имеющих нильпотентный базис. (Они являются нильпотентными.) Подобно первому доказательству теоремы Машке, доказательство этой теоремы показывает, каким образом теория матриц используется для изучения строения алгебр конечной размерности.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле и a — матрица в полной матричной алгебре K_n степени n над K. Таким образом

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij} \qquad (\alpha_{ij} \in K).$$

13.28. Теорема (Веддербёрн [37]). *Если R — конечномерная алгебра над полем k и предподалгебра B имеет базис $x_1, \ldots, x_n$, состоящий из нильпотентных элементов, то B нильпотентна.*

Доказательство. Множество $A = \{\alpha + b \mid \alpha \in k, b \in B\}$ является подалгеброй. Так как $1 \in A$, то A — алгебра и B — идеал алгебры A, такой, что A/B — поле, изоморфное k. Пусть $N = \operatorname{rad} A$. Поскольку A артинова, то N нильпотентен, A/N полупроста, и поэтому N есть пересечение максимальных идеалов алгебры A. Теперь ясно, что B нильпотентна тогда и только тогда, когда $B \subseteq N$. Если $B \nsubseteq N$, то B не лежит в некотором максимальном идеале M. Так как B — идеал, то $B + M = A$. Тогда простая алгебра $C = A/M$ имеет базис, состоящий из смежных классов $[x_1 + M], \ldots, [x_t + M]$, где $t \leqslant n$, т. е. существует простая алгебра C, обладающая нильпотентным базисом. (Мы хотим показать, что это невозможно.) Мы можем предполагать, что C центральна. Тогда если K — алгебраически замкнутое поле, содержащее k, то $B' = C \underset{k}{\otimes} K$ — центральная простая алгебра над K (см. 13.9) с нильпотентным базисом. Пусть $b_1, \ldots, b_g$ — нильпотентный базис алгебры B'. По теореме 13.6 Веддербёрна B' — полная алгебра матриц, изоморфная K_n. Если $a = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i b_i$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, g$, то $\operatorname{Tr}(a) = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \operatorname{Tr}(b_i)$. Так как b_i нильпотентны, то по замечанию, предшествующему 13.21, $\operatorname{Tr}(b_i) = 0$, $i = 1, \ldots, g$, и поэтому $\operatorname{Tr}(a) = 0$. Это верно для всех $a \in K_n$. Так как K_n содержит нильпотентные элементы, то оно не может быть полем, следовательно, $n > 1$. Если $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — любое множество $n \times n$-матричных единиц алгебры K_n, то $\operatorname{Tr}(e_{11}) = 1$, что и дает желаемое противоречие. □

Упражнения к гл. 13

1. Если A — конечномерная центральная простая алгебра над полем C, то $\dim_C A = n^2$, где n — целое число. [*Указание*: пусть K — алгебраически замкнутое поле, содержащее C. Тогда $A_K = A \otimes_C K \approx K_n$ в силу 11.41.]

2. Если A — конечномерная центральная простая алгебра над полем C и $n = \dim_C A$, то $A^{\mathrm{op}} \underset{C}{\otimes} A \approx C_n$. [*Указание*: пусть $R = A^{\mathrm{op}} \underset{C}{\otimes} A$ Тогда A — правый R-модуль, где $c(a^0 \otimes b) = acb$ для любых $a, b, c \in A$. Пусть $f \in \operatorname{End} A_R$. Показать, что соответствие $f \mapsto f(1)$ — изоморфизм $\operatorname{End} A_R \approx C$. Так как R — простая алгебра, то отображение φ: $R \to A$, где $\varphi(a^0 \otimes b) = ab$, является расщепляющимся R-эпиморфизмом. Это отображение расщепляется, поскольку R — классически полупростое кольцо и, следовательно, каждый R-модуль проективен. Но тогда модуль A_R является образующим (почему?) и, следовательно, сбалансирован. Таким образом, $R \approx \operatorname{End}_C A$. Ср. с группой Брауэра, упр. 4(b) и 10(b).]

3. Воспользоваться упр. 2 для того, чтобы показать, что тензорное произведение центральных алгебр с делением не обязано быть телом (на самом деле не обязано даже быть областью целостности).

4. *Группа Брауэра.* Две конечномерные центральные простые алгебры A и B над K называются **подобными** ($A \sim B$), если существуют полные матричные алгебры K_m и K_n и изоморфизм

$$A \otimes K_m \approx B \otimes K_n.$$

(a) Показать, что $A \sim B$ является отношением эквивалентности. (*Указание*: $K_p \otimes K_q \approx K_{pq}$.) Установить, что это определение отношения $\sim$ совпадает с использованным ранее, а именно что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда mod-$A \approx$ mod-B.

(b) Пусть $[A]$ обозначает класс эквивалентности конечномерной центральной простой алгебры A. Пусть, далее, $\operatorname{Br}(K)$ обозначает множество классов эквивалентности таких алгебр над K. По теореме Веддербёрна $[A] = [D]$ для некоторой алгебры с делением D. (Если D и E — такие алгебры с делением, что $[D] = [E]$, то $D \approx E$.) Показать, что

$$[A][B] = [A \underset{K}{\otimes} B]$$

— бинарная операция на $\operatorname{Br}(K)$, относительно которой $\operatorname{Br}(K)$ является абелевой группой, называемой **группой Брауэра** поля K. По упражнению 2 $[A]^{-1} = [A^{\mathrm{op}}]$.

* (c) Показать, что группа $\operatorname{Br}(K)$ для любого поля K является периодической. Установить, что если $\dim_K A \quad n$, то $[A]^n$ — единица группы Брауэра, т. е. если $\underset{K}{\otimes^n} A$ обозначает n-кратное тензорное произведение, то $\underset{K}{\otimes^n} A \approx K_m$ для некоторого m.

5. Полем расщепления центральной простой алгебры A над K называется поле $F \supseteq K$, такое, что $A \underset{K}{\otimes} F$ является полной алгеброй матриц над F, т. е. такое, что $[A \underset{K}{\otimes} F]$ — единица в группе $\operatorname{Br}(F)$. **Максимальным подполем** алгебры A называется подполе F, являющееся максимальным элементом в частично упорядоченном множестве подполей алгебры A. (Такое поле F обязательно содержит $\mathcal{C}(A)$.)

(a) Пусть D — конечномерная центральная алгебра с делением над K. Тогда любое максимальное подполе алгебры D является полем расщепления. Более того, D содержит сепарабельное макси-

мальное подполе и, следовательно, сепарабельное поле расщепления.

(b) Любая простая центральная алгебра конечной размерности имеет сепарабельное поле расщепления.

6. Для любого коммутативного кольца k **обертывающей алгеброй** A^e алгебры A над k называется алгебра $A \underset{k}{\otimes} A^{op}$. В этом случае A является каноническим правым A^e-модулем, а именно:

$$x\,(a \otimes b^0) = bxa \quad \text{для всех } a,\ b,\ x \in A.$$

Тогда A называется **сепарабельной** алгеброй, если A является проективным A^e-модулем.

(a) (Хохшильд) Показать, что алгебра A сепарабельна тогда и только тогда, когда A^e есть k-расщепляемо-расщепляющаяся алгебра. В этом случае алгебра A также k-расщепляемо-расщепляющаяся.

(b) Если k — поле и A конечномерна, то показать, что условие a) характеризует сепарабельные алгебры.

7. Говорят, что алгебра A над коммутативным кольцом k есть **алгебра Адзумаи**, если A конечно порождена, центральна и сепарабельна над k. В этом случае имеют место канонический изоморфизм $A^e \approx \mathrm{End}_k A$ и k-линейная эквивалентность $\mathrm{mod}\text{-}A^e \approx \mathrm{mod}\text{-}k$. Верно и обратное.

8. Алгебра A является алгеброй Адзумаи тогда и только тогда, когда для каждого максимального идеала Q кольца k канонически определенная (k/Q)-алгебра A/QA центральна и проста и A — конечно порожденный проективный точный модуль над k.

9. Алгебра A над k называется **идеальной**, если *идеальное отображение* $Q \mapsto QA$ идеалов кольца k в идеалы алгебры A является биекцией. Алгебра A является алгеброй Адзумаи тогда и только тогда, когда ее обертывающая алгебра A^e идеальна, а модуль A_k конечно порожден. Каждая алгебра Адзумаи идеальна. (Ср. Рао [72].)

10. (a) Говорят, что две алгебры Адзумаи A и B **подобны**, если существует k-линейная эквивалентность $\mathrm{mod}\text{-}A \approx \mathrm{mod}\text{-}B$. Это эквивалентно существованию изоморфизма k-алгебр

$$A \underset{k}{\otimes} \mathrm{End}_k P \approx B \underset{k}{\otimes} \mathrm{End}_k M$$

для подходящих конечно порожденных проективных точных k-модулей P и M.

(b) Группа Брауэра коммутативного кольца (Адзумая [51]), Ауслендер и Голдман [60]). Пусть (A) обозначает класс подобия алгебры Адзумаи A над k. Множество $\mathrm{Br}\,(k)$ всех классов подобия является абелевой группой относительно операции

$$(A)\,(B) = (A \otimes B).$$

Показать, что $\mathrm{Br}\,(k)$ — периодическая группа (Гротендик [65]; ср. Кнус и Оянгурен [72]).

11. Говорят, что центральная алгебра A над k **централизуема**, если каноническое отображение $A \underset{k}{\otimes} \mathscr{C}_B(A) \to B$ является изоморфизмом для каждой центральной алгебры B над k, содержащей A. Любая алгебра Адзумаи и, в частности любая центральная простая конечномерная алгебра, централизуема. Обратно, если A конечно порождена и проективна над k и A централизуема, то A является алгеброй Адзумаи.

Замечания к гл. 13

Теоремы этой главы являются классическими, многие их обобщения обсуждаются в упражнениях. Так что «замечания» могут показаться излишними. Тем не менее мы воспользуемся представляющейся возможностью и обсудим некоторые относящиеся к теме результаты из других публикаций.

Простая центральная алгебра A конечной размерности над k называется **скрещенным произведением**, если в A существует сепарабельное нормальное максимальное подполе N. В этом случае каждый элемент g_i группы Галуа $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ расширения N/k индуцируется внутренним автоморфизмом I_{u_i} алгебры A, $i = 1, \ldots, n$, и $\{u_1, \ldots, u_n\}$ является базисом векторного пространства A над N. Алгебра A называется **циклической**, если A есть скрещенное произведение и группа G циклическая. Циклические алгебры были открыты Диксоном (см., например, его книгу [23], озаглавленную «Алгебры и их арифметика») и в результате их обобщения Брауэром и Нётер (ср. Дейринг [48, стр. 53, 55, 56 и предисловие]) появились скрещенные произведения. **Рациональной алгеброй** называется алгебра конечной размерности над полем k алгебраических чисел (т. е. над конечным расширением k поля $\mathbb{Q}$). Каждая рациональная простая центральная алгебра является циклической (теорема Брауэра — Нётер — Хассе; ср. Дейринг [48, стр. 118]). Первые нециклические алгебры были обнаружены Албертом (в 1938 г. в статье в *Bull. Amer. Math. Soc.*[1]), а первая «нескрещенная» алгебра — Амицуром (см. Амицур [72/73]).

А. В. Ройтер [68] доказал **гипотезу Брауэра — Тролла**: Пусть A — конечномерная алгебра над полем k, и допустим, что суще-

[1]) **44** (1938), 576—579.— *Прим. перев.*

ствует целое число N, такое, что каждый неразложимый правый A-модуль M имеет $\dim_k M < N$. Тогда множество классов изоморфных конечно порожденных неразложимых правых A-модулей конечно. [Кроме того, ввиду двойственности между конечно порожденными правыми и конечно порожденными левыми модулями (определенной в гл. 12, упр. 8) множество классов изоморфных конечно порожденных неразложимых левых A-модулей конечно.] В действительности, хотя А. В. Ройтер доказывает эти результаты для конечномерных алгебр, он *утверждает*, что они верны для артиновых колец, при этом предполагается, что число N больше числа элементов минимальной системы образующих любого неразложимого модуля [1]). (Ср. замечания к гл. 20. О гипотезе Брауэра — Тролла для групповых алгебр см. Януш [69]).

Данное нами определение R-порядка B в алгебре A над полем k эквивалентно определению Ауслендера — Голдмана [60a], если R является целозамкнутой областью целостности. В этом случае при предположении, что A — центральная простая алгебра, B содержится в максимальном порядке. (Басс [73] это доказал при несколько иных предположениях. См. его теорему 8.5, стр. 132.) Если R — дедекиндова область, то любой максимальный порядок в центральной простой алгебре A является наследственным нётеровым кольцом (об этом, а также о частичном обращении см., например, Ауслендер — Голдман [60a, стр. 8, теорема 2.9] и Басс [73, стр. 136, теорема 8.7]. Ср. также Дейринг [48] и Джекобсон [47]).

Форманек [72] [2]) доказал, что если B — правый порядок в конечномерной простой алгебре A, то центр кольца B является порядком в центре алгебры A. Более того, если B — правый порядок в теле A и G — конечная группа автоморфизмов кольца B, канонически расширенная до конечной группы автоморфизмов тела A, то подкольцо неподвижных относительно G элементов кольца B есть правый порядок в подкольце неподвижных относительно G элементов тела A (Фейс [72c]).

Обобщением теоремы о полупростоте групповой алгебры kG конечной группы G над полем k характеристики 0 является утверждение, установленное Амицуром [56] (и другими) о том, что kG имеет нулевой радикал для любого несчетного поля характеристики 0 [3]). (См. гл. 26.) Для счетных полей проблема все еще остается открытой. Форманек [72b] доказал, что kS, где $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, полупроста над любым полем k. Форманек — Снайдер [72] доказали существование примитивных групповых алгебр, воспользовавшись для этого результатом Коннела [63], выясняющим, когда групповое кольцо $R[G]$ первично. (Это имеет место тогда и только тогда, когда R первично, а G не имеет конечных нормальных подгрупп.)

[1]) Тем не менее создается впечатление, что само доказательство не проходит для артинова случая без доказательства некоторых дополнительных лемм.

[2]) См. также В. Т. Марков, *Изв. АН СССР*, серия мат., 37 (1973), стр. 284—288.— *Прим. перев.*

[3]) И любой группы G.— *Прим. перев.*

Ссылки

Адзумая [51], Амицур [56], [72], Ауслендер [57], Ауслендер — Голдман [60a], Брауэр [63], Веддербёрн [08], [37], Вудс [71], Гротендик [65], Джекобсон [47], [64], Дейринг [48], Диксон [23], Кнус и Оянгурен [72], Коннел [63], Кэртис — Райнер [69], Машке [98], Рао [72], Ройтер [68], Фейс [72c], Форманек [72a], [72b], Форманек и Снайдер [72], Хохшильд [56], [58], Януш [69].

Часть IV

СТРОЕНИЕ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ

Абелева категория C с копроизведениями является кополной (6.3) и называется AB3-категорией. Тогда для каждого объекта существуют суммы любого семейства его подобъектов. Если к тому же пересечение дистрибутивно относительно суммы в том смысле, что

$$\sum_{i\in I} A_i \cap B = \sum_{i\in I} (A_i \cap B),$$

где $\{A_i\}_{i\in I}$ — любое направленное семейство подобъектов произвольного объекта A категории C и B — любой подобъект объекта A, то говорят, что категория C является AB5-категорией (Гротендик [57]). (AB5-категория, в которой произвольные пересечения дистрибутивны относительно суммы, называется AB6-категорией. См. гл. 15, упражнения.) AB3-категория является AB5-категорией тогда и только тогда, когда она имеет точные прямые пределы (14.6) или, эквивалентно, прямой предел любого направленного семейства подобъектов есть подобъект (и в этом случае прямой предел равен сумме).

Категорией Гротендика называется AB5-категория с образующим. В такой категории каждый объект обладает инъективной оболочкой (14.17). Это свойство необходимо для доказательства главного результата гл. 14 — теоремы 14.21 (Фрейда, Лабкина) о вложении, которая утверждает, что каждая малая абелева категория C допускает точное ковариантное вложение $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$. Теорема 15.30 (Митчелла) о полном вложении утверждает, что малая абелева категория C допускает полное точное вложение $C \rightsquigarrow \text{mod-}A$ для подходящего кольца A. (Она также дает и точное вложение $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$.)

Факторкатегории вводятся в гл. 15. Полная подкатегория $\mathcal{S}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ называется классом Серра, если для каждой точной последовательности $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ в $\mathcal{A}$ верно, что

$Y \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда X, $Z \in \mathcal{S}$. Если $\mathcal{A}$ локально мала, то существует категория $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, объекты которой суть объекты категории $\mathcal{A}$, а морфизмы определяются равенством

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(X,Y) = \varinjlim \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X', Y/Y'),$$

$$Y',\ X/X' \in \mathcal{S}.$$

Категория $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ является абелевой (15.7) и называется факторкатегорией. Подкатегория Серра $\mathcal{S}$ называется локализующей подкатегорией, если канонический функтор T: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ имеет правый сопряженный S: $\mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ (называемый функтором сечений), а их произведение $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ называется локализующим функтором. Если $\mathcal{A}$ — категория Гротендика, то для существования локализующего функтора необходимо и достаточно, чтобы подкатегория $\mathcal{S}$ обладала произвольными копроизведениями или, эквивалентно, чтобы прямые пределы направленных семейств объектов подкатегории $\mathcal{S}$, вычисляемые в $\mathcal{A}$, принадлежали $\mathcal{S}$. В этом случае для каждого объекта M категории $\mathcal{A}$ существует точная последовательность

$$0 \to X \to M \xrightarrow{u} N \to Y \to 0,$$

где X, $Y \in \mathcal{S}$ и N $\mathcal{S}$-замкнут в смысле 15.15. Пусть C — полная подкатегория $\mathcal{S}$-замкнутых объектов. Тогда локализующий функтор индуцирует эквивалентность

$$\psi(N)\colon\ N \to STN$$

и существует эквивалентность категорий $\mathcal{A}/\mathcal{S} \approx C$. Морфизм u: $M \to N$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности категории $\mathcal{A}$ и называется $\mathcal{S}$-оболочкой объекта M. Она обозначается через $u_{\mathcal{S}}$: $M \to M_{\mathcal{S}}$. Если $\mathcal{A} = \text{mod-}A$ для некоторого кольца A, то $A_{\mathcal{S}}$ — кольцо. В классических ситуациях (16.8), когда локализующий функтор точен, он естественно эквивалентен функтору $\otimes_A A_{\mathcal{S}}$ и существует эквивалентность категорий

$$\text{mod-}A/\mathcal{S} \approx \text{mod-}A_{\mathcal{S}}.$$

Эта ситуация имеет место в теореме 16.15 о локализации, обобщающей на категории Гротендика теоремы о локализации для коммутативных колец. Этот метод применяется также к частичным правым кольцам частных (16.9), обобщающим правые кольца частных гл. 9 и 10, и к максимальным правым кольцам частных в смысле Джонсона антисингулярных справа колец (16.12). (Ср. также гл. 19.)

Классическое направление теории модулей состоит в установлении связи между внутренними свойствами кольца A и внешними (для A) свойствами категории mod-A. Например, (1) каждый модуль полупрост тогда и только тогда, когда A классически полупросто (8.12); (2) если A не является классически полупростым кольцом, то

$$\text{r.gl.dim } A = \sup\{\text{h.dim } I | I \subseteq R\} + 1$$

(8.21); (3) характеризация 11.24 колец, над которыми все модули плоские, как регулярных колец, т. е. колец, каждый главный правый идеал которых порождается идемпотентом. Эти примеры могут быть по желанию приумножены, так как в известном смысле это и есть теория колец (и модулей).

В этом направлении, естественно, возникает вопрос о внутренней связи локализующих подкатегорий категории mod-A с кольцом A. Ответ на него дает теорема 16.3 Габриеля, которая устанавливает соответствие

$$C \mapsto \mathcal{F}(C) = \{I \subseteq A \mid A/I \in \text{Obj } C\}$$

между локализующими подкатегориями категории mod-A и семействами правых идеалов кольца A. Множество $\mathcal{F}(C)$ является идемпотентным и топологизирующим радикальным фильтром в смысле 16.3. Обратно, любое идемпотентное и топологизирующее множество F правых идеалов кольца A соответствует локализующей подкатегории $\mathcal{S}(F)$ категории mod-A, состоящей из всех модулей M, таких, что для каждого $x \in M$ правый идеал $\text{ann}_A x$ принадлежит F. Более того, в силу изложенного выше для категорий Гротендика, факторкатегория mod-$A/\mathcal{S}$ эквивалентна полной подкатегории C категории mod-A, состоящей из $\mathcal{S}$-замкнутых модулей, или подкатегории, состоящей из делимых модулей без кручения в терминологии теории кручений, появляющихся в гл. 16. То же самое соответствие может быть использовано для характеризации классов Серра и классов замкнутых полных подкатегорий категории mod-A (16.2). В этих случаях $\mathcal{S}(F)$-оболочка $M_{\mathcal{S}(F)}$ модуля M обозначается через M_F и, в частности, $A_{\mathcal{S}(F)}$ обозначается через A_F.

Глава 15 содержит теорему 15.26 Попеску — Габриеля, которая характеризует категории Гротендика как факторкатегории категорий модульного типа.

Глава 16 завершается теоремой 16.20 супругов Уокер, утверждающей, что категория mod-A определяется в очень сильном смысле кольцом эндоморфизмов любого собственного образующего. Этот результат обобщает известные теоремы для областей главных правых идеалов и квазифробениусовых колец. (Ср. гл. 24.)

Глава 14

КАТЕГОРИИ ГРОТЕНДИКА

Гротендик [57] ввел следующие обозначения свойств абелевых категорий:

AB3. Абелева категория с копроизведениями или, эквивалентно, кополная абелева категория.

AB4. Категория, являющаяся AB3-категорией, в которой любое копроизведение $\coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} B_i$ мономорфизмов $\{A_i \to B_i\}_{i\in I}$ есть мономорфизм.

AB5. Категория, являющаяся AB3-категорией, в которой для любого направленного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ подобъектов произвольного объекта X и любого его подобъекта B

$$\left(\sum_{i\in I} A_i\right) \cap B = \sum_{i\in I} (A_i \cap B).$$

ABX*. Свойство, дуальное к ABX, X = 3, 4, 5.

Сумма любого линейно упорядоченного семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ подобъектов произвольного объекта X называется их **объединением** и обозначается через $\bigcup_{i\in I} A_i$. Если это семейство конечно и состоит из $A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_n$, то $\bigcup_{i\in I} A_i = A_n$.

14.1. Предложение и определение. AB5-*категория с образующим называется* ***категорией Гротендика***. *Любая категория Гротендика является локально малой* [1]).

Доказательство. Кополная абелева категория с образующим локально мала (см. 5.23). □

14.2. Теорема. *Если C — абелева категория одного из следующих пяти типов*: AB3-*категория*, AB4-*категория*, AB5-*категория*, *локально малая категория либо категория Гротендика, то такой же является и категория C^L для любой малой категории L. Если же C — категория одного из первых четырех типов и L аддитивна, то такой же будет категория (L, C) аддитивных функторов $L \rightsquigarrow C$; в случае $C = \text{mod-}\mathbb{Z}$ (L, C) — категория Гротендика.*

Доказательство. Свойство AB3 наследуется категорией C^L в силу 6.16 и 6.18. Сохранение свойства AB4 вытe-

[1]) Локально малые категории были определены перед 5.22.

кает из того, что копроизведения в C^L определяются поточечно, и из утверждения 6.17 о том, что для точной категории тем же свойством обладают мономорфизмы. Если C — AB5-категория и $\{H_i\}_{i\in I}$ — семейство объектов категории C^L, то для любого объекта K категории C^L и объекта A категории C

$$\left(K \cap \sum_{i\in I} H_i\right) A = KA \cap \left(\sum_{i\in I} H_i\right) A = KA \cap \sum_{i\in I} H_i A =$$
$$= \sum_{i\in I} (KA \cap H_i A) = \left(\sum_{i\in I} (K \cap H_i)\right) A.$$

Поэтому C^L является AB5-категорией[1]). Если C локально мала, то такова же и категория C^L, ввиду 6.16 (9). Аналогичные результаты имеют место для категории (L, C), если категория L мала и аддитивна. (Ср. 6.17 и 6.18.) Более того, в случае когда $C = \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$, категория (L, C) имеет образующий (6.20). Таким образом, если $C = \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$, то (L, C) является категорией Гротендика. (Ср. 6.25.) □

14.3. Упражнение.

14.3.1. Пусть $T\colon C \rightsquigarrow D$ — вполне унивалентный функтор из абелевой категории в абелеву, обладающий точным левым сопряженным $S\colon D \rightsquigarrow C$. Тогда C наследует каждое из следующих свойств категории D: AB3, AB4, AB5 и AB3*. Если, кроме того, T точен, то категорией C наследуются свойства AB4* и AB5*.

14.3.2. Пусть C — инъективно богатая абелева категория, а категория D абелева. Тогда вполне унивалентный функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$, сохраняющий инъективные объекты, удовлетворяет условиям предыдущего упражнения, т. е. каждый левый сопряженный к функтору T точен.

14.3.3 (Митчелл [65, стр. 84]). Если $\{A_i, \pi\}_{i\in L}$ — направленное семейство объектов в AB5-категории и $\{f_i\colon A \to A_i\}_{i\in L}$ — финальный объект в категории compat π (таким образом, $A = \varinjlim \pi$), то

$$\ker f_n = \sum_{i\leqslant n} \ker f_i.$$

14.3.4. Если категория C удовлетворяет условиям AB5 и AB5*, то $C = 0$.

---

[1]) Тот факт, что C^L является категорией Гротендика, если такова категория C, следует теперь из того, что функтор $F\colon L \rightsquigarrow C$, для которого $F(X) = G$ — образующий категории C при всех $X \in \mathrm{Obj}\, L$ и $F(f) = 0$ для всех $f \in \mathrm{Mor}\, L$, является образующим в категории C^L. — *Прим. перев.*

14.4. Предложение. *Пусть C есть* AB3*-категория и $\{u_i\colon A_i \to A\}_{i\in I}$ — семейство мономорфизмов, направленное по включению. Тогда $\{A/A_i\}_{i\in I}$ — направленное семейство, и*

$$\varinjlim A/A_i = A/\sum_{i\in I} A_i.$$

Доказательство. Тот факт, что семейство $\{u_i\colon A_i \to A\}_{i\in I}$ направлено по включению, означает, что I становится направленным множеством, если его упорядочить по такому правилу: $i \leqslant j$ тогда и только тогда, когда $u_i \leqslant u_j$. Если $p_i\colon A \to A/A_i$ — коядро морфизма $u_i\colon A_i \to A$ для каждого $i \in I$, то по первой теореме Нётер (5.34) об изоморфизме последовательность

$$0 \to A_j/A_i \to A/A_i \to A/A_j \to 0$$

точна, если $i \leqslant j$. Поэтому $\{A/A_i\}_{i\in I}$ — направленное семейство. Поскольку функтор прямого предела сохраняет коядра (см. 5.43), то из точной последовательности

$$0 \to A_i \to A \to A/A_i \to 0$$

получаем точную последовательность

$$\varinjlim A_i \xrightarrow{u} A \longrightarrow \varinjlim A/A_i \longrightarrow 0,$$

где $u = \varinjlim u_i$. По 5.29 образ морфизма u равен $\sum_{i\in I} A_i$, следовательно, последовательность

$$0 \to \sum_{i\in I} A_i \to A \to \varinjlim A/A_i \to 0$$

точна, что и требовалось. □

Говорят, что абелева категория C имеет ***точные прямые пределы****, если для каждого направленного множества L имеют место следующие эквивалентные условия:*

(1) *Функтор копредела $C^L \rightsquigarrow C$ точен.*

(2) *Если $0 \to F \to G$ — точная последовательность в C^L, то последовательность $0 \to \varinjlim F \to \varinjlim G$ точна в C.*

14.5. Предложение. *Если C — инъективно богатая абелева категория, то C имеет точные прямые пределы тогда и только тогда, когда для любого направленного множества L постоянный функтор $C \rightsquigarrow C^L$ сохраняет инъективные объекты.*

Доказательство. Если категория C инъективно богата, то по 6.28 функтор $T\colon C \rightsquigarrow D$, обладающий левым сопряженным, имеет точный левый сопряженный тогда и только тогда, когда T сохраняет инъективные объекты. □

14.6. Предложение. *Следующие условия на* AB3*-категорию* C *эквивалентны*:

(a) C *есть* AB5*-категория.*

(b) C *имеет точные прямые пределы.*

(c) *Полные прообразы коммутируют с суммами. Таким образом, для каждого морфизма* $f\colon B \to A$ *и направленного семейства* $\{A_i\}_{i\in L}$ *подобъектов объекта* A *выполняется равенство*

$$f^{-1}\Big(\sum_{i\in L} A_i\Big) = \sum_{i\in L} f^{-1}(A_i).$$

(d) *Для любого направленного множества* L, *если* A *— объект категории* C *и* $0 \to F \to c(A)$ [1]) *— точная последовательность в* C^L, *то* $0 \to \varinjlim F \to A$ *точна в* C.

(e) *Если* $\{F(i)\colon A_i \to A\}_{i\in L}$ *— произвольное направленное семейство подобъектов объекта* A *категории* C, *то*

$$\varinjlim_{i\in L} A_i = \sum_{i\in L} A_i.$$

(f) *Прямой предел любого направленного семейства подобъектов произвольного объекта* A *категории* C *также является его подобъектом.*

Доказательство. Большей частью доказательство использует аргументы Митчелла [65, стр. 82—85].

(c) $\Rightarrow$ (a). Если f обозначает включение подобъекта B в объект A и $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство подобъектов объекта A, то $B \cap A_i = f^{-1}A_i$, так что из (c) вытекает

$$B \cap \sum_{i\in I} A_i = f^{-1}\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) \sum_{i\in I} f^{-1}(A_i) = \sum_{i\in I} B \cap A_i.$$

(b) $\Rightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f). По 5.29 в AB3-категории образ канонического морфизма $\varinjlim_{i\in L} A_i \to A$, где $\{A_i\}_{i\in L}$ — направленное семейство подобъектов объекта A, равен сумме $\sum_{i\in L} A_i$. Это устанавливает эквивалентность условий (d) и (e). Более того, условие (f) есть просто переформулировка условия (d), тогда как (d) — частный случай условия (b). Итак, (b) $\Rightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f).

(b) $\Rightarrow$ (c). Поскольку полный прообраз есть расслоенное произведение (см. пример 5.8.7, непосредственно предшествующий 5.9) и так как из точности функтора прямого предела вытекает сохранение им конечных пределов, то отсюда следует, что

$$f^{-1}(\varinjlim_{i\in L} A_i) = \varinjlim_{i\in L} f^{-1}(A_i).$$

Теперь, поскольку (b) $\Rightarrow$ (e), применение (e) дает (c).

((a) и (e)) $\Rightarrow$ (c). Пусть $J = \operatorname{im} f$. Если $X \to A$ — мономорфизм, то последовательность

$$0 \to f^{-1}X \to B \to J/(X \cap J) \to 0$$

точна. Итак, для каждого $i \in I$ последовательность

$$0 \to f^{-1}A_i \to B \to J/(J \cap A_i) \to 0$$

точна. Поэтому в силу (e) точна последовательность

$$0 \to \varinjlim_{i\in I} f^{-1}A_i \to B \to \varinjlim_{i\in I} J/(J \cap A_i) \to 0,$$

т. е., ввиду 5.29 и 14.4, последовательность

$$0 \to \sum_{i\in I} f^{-1}A_i \to B \to J/\sum_{i\in I}(J \cap A_i) \to 0$$

точна. По второй теореме (5.36) Нётер об изоморфизме для точных категорий имеем

$$\sum_{i\in I} f^{-1}A_i = f^{-1}\sum_{i\in I}(J \cap A_i) = f^{-1}\Big(J \cap \Big(\sum_{i\in I} A_i\Big)\Big) = f^{-1}\Big(\operatorname{im} f \cap \sum_{i\in I} A_i\Big) = f^{-1}\sum_{i\in I} A_i.$$

((a) и (c)) $\Rightarrow$ (b). Пусть $h\colon F \to G$ — мономорфизм в C^L, где L — направленное множество. Пусть, далее, $A = \varinjlim F$, $B = \varinjlim G$ и $u\colon A \to B$ — индуцированный морфизм пределов. Существуют канонические морфизмы $\{a_i\colon F(i) \to A\}_{i\in L}$, $\{b_i\colon G(i) \to B\}_{i\in L}$, причем по 5.29 $A = \sum_{i\in L} A'_i$, где $A'_i = \operatorname{im} a_i$ для всех $i \in L$. Для того чтобы установить точность функтора прямого предела, необходимо и достаточно доказать его точность слева, поскольку, ввиду 5.43, функтор прямого предела сохраняет копределы [1]). Итак, достаточно показать, что морфизм $u = \varinjlim h$ является мономорфизмом. Мы покажем, что предположение $K = \ker u \neq 0$ приводит к противоречию. Действительно, тогда

$$A'_k \cap K \neq 0 \text{ и } M = a_k^{-1}(A_k \cap K) \neq 0$$

[1]) Здесь через $c(A)$ обозначен постоянный функтор со значением A.—*Прим. перев.*

[1]) И, следовательно, точен справа.—*Прим. перев.*

для некоторого $k \in L$. Кроме того,

$$b_k(h(k)(M)) = u(a_k(M)) \subseteq u(A'_k \cap K) \subseteq u(K) = 0,$$

т. е. $h(k)(M)$ содержится в $\sum_{k \leqslant n} L_{kn} = \ker b_k$, где $L_{kn} = \ker G(f_{kn})$ и $f_{kn}\colon k \to n$ (см. упр. 14.3.3). Так как C есть AB5-категория, то

$$h(k)(M) = \sum_{k \leqslant n} L_{kn} \cap h(k)(M).$$

Поскольку, ввиду (c), суммы коммутируют с прообразами, отсюда следует, что

$$M = h(k)^{-1} h(k)(M) = h(k)^{-1}\left(\sum_{k \leqslant n} L_{kn} \cap h(k)(M)\right) =$$
$$= \sum_{k \leqslant n} h(k)^{-1}(L_{kn} \cap h(k)(M)).$$

Так как $h(i)$ — мономорфизм для всех $i \in L$, то

$$F(f_{kn})(h(k)^{-1}(L_{kn} \cap h(k)(M))) = 0$$

для всех $n \geqslant k$ и поэтому $a_k(h(k)^{-1}(L_{kn} \cap h(k)(M))) = 0$ для всех $n \geqslant k$. Поскольку морфизмы перестановочны с суммами (см. 5.28), то выписанное выше представление объекта M в виде суммы показывает, что $a_k(M) = 0$. Но a_k — мономорфизм. Поэтому $M = 0$, и мы получаем противоречие. Итак, $K = 0$, и, следовательно, u — мономорфизм.

(a) $\Rightarrow$ (e). Пусть $\{f_i\colon A_i \to A\}$ — направленное семейство мономорфизмов категории C, $f\colon L \to A$ — прямой предел семейства морфизмов $\{f_i\}_{i \in I}$, и пусть $\{g_i\colon A_i \to L\}_{i \in I}$ — канонические морфизмы. По 5.29 L есть сумма $\sum_{i \in I} g_i(A_i)$ образов семейства $\{g_i\}_{i \in I}$ и $\operatorname{im} f = \sum_{i \in I} A_i$. Если $\ker f \neq 0$, то $\ker f \cap g_i(A_i) \neq 0$ для некоторого $i \in I$ и тогда $g_i^{-1}(\ker f) \neq 0$. Итак, $\ker f_i \neq 0$, что противоречит предположению о том, что f_i — мономорфизм.

(e) $\Rightarrow$ (a). Допустим, что прямой предел направленного семейства подобъектов $\{A_i\}$ есть подобъект. Тогда для подобъекта B семейство $\{A_i + B\}$ также направлено и сумма $\sum_i (A_i + B) = (\sum A_i) + B$ равна прямому пределу этого семейства. Так как прямой предел сохраняет коядра, то последовательности

$$0 \to B \to A_i + B \to (A_i + B)/B \to 0$$

индуцируют точную последовательность

$$B \to (\sum A_i) + B \to \varinjlim (A_i + B)/B \to 0,$$

т.е.

$$\varinjlim (A_i + B)/B = ((\sum A_i) + B)/B.$$

Аналогично, последовательности

$$0 \to A_i \cap B \to A_i \to (A_i + B)/B \to 0$$

индуцируют точную последовательность прямых пределов

$$0 \to \sum_i (A_i \cap B) \to \sum A_i \to ((\sum A_i) + B)/B \to 0^1).$$

Но поскольку точна также и последовательность

$$0 \to (\sum A_i) \cap B \to \sum A_i \to ((\sum A_i) + B)/B \to 0$$

(первая теорема Нётер об изоморфизме (5.34)), то условие AB5 $\sum_i (A_i \cap B) = (\sum_i A_i) \cap B$ выполняется. □

14.7. Следствие для категории Гротендика. *Каждый объект A категории Гротендика C является прямым пределом направленного семейства конечно порожденных подобъектов объекта A.*

Доказательство. По 14.1 C локально мала, поэтому класс подобъектов объекта A есть множество. Поскольку сумма $A_1 + A_2$ двух подобъектов есть образ морфизма из их копроизведения $A_1 \oplus A_2 \to A$, то объект $A_1 + A_2$ конечно порожден, если конечно порождены A_1 и A_2. Следовательно, семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ конечно порожденных подобъектов является направленной системой и канонический морфизм f прямого предела $L \to A$ — мономорфизм в силу предложения 14.6. Если f — не эквивалентность, то существует морфизм $h\colon U \to A$, не пропускающийся через f. С другой стороны, поскольку $\operatorname{im} h$ конечно порожден, то $\operatorname{im} h$ меньше f, т. е. h пропускается через f, и мы получили противоречие. □

14.8. Упражнение. Категория C называется **локально нётеровой**, если C есть категория Гротендика, обладающая таким множеством образующих $\{U_i\}_{i \in I}$, что U_i — нётеров объект категории C для всех $i \in I$.

Если C — категория Гротендика, M — ее нётеров объект и $P = \varinjlim P_i$ — объект, являющийся прямым пределом направ-

---

[1]) Так как, ввиду (e), $\sum_i (A_i \cap B)$ является прямым пределом.— *Прим. перев.*

ленного семейства $\{P_i\}_{i\in I}$ своих подобъектов, то канонический морфизм

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_C(M, P_i) \to \mathrm{Mor}_C(M, \varinjlim_{i\in I} P_i)$$

есть эквивалентность. Вывести отсюда, что в локально нётеровой категории копроизведения инъективных объектов инъективны.

Инъективные оболочки

В этом параграфе C будет обозначать абелеву категорию. Если A — объект категории C, то **расширением** объекта A называется мономорфизм $A \to E$. Расширение $A \to E$ называется **собственным**, если оно не является эквивалентностью, **тривиальным**, если $A \to E$ расщепляется, и **существенным**, если $A' \cap A \neq 0$ для любого ненулевого мономорфизма $A' \to E$.

14.9. Предложение. *Расширение $A \to E$ является существенным тогда и только тогда, когда каждый морфизм $E \to B$, такой, что $A \to E \to B$ — мономорфизм, является мономорфизмом.*

Доказательство. Если $\ker(E \to B) \neq 0$, то $0 \neq \ker(E \to B) \cap A = \ker(A \to B)$. Обратно, предположим, что $A \cap A' = 0$ для некоторого ненулевого мономорфизма $A' \to E$. Тогда ясно, что $A \to E \to E/A'$ — мономорфизм, но $E \to E/A'$ таковым не является. □

14.10. Предложение. *Объект A в C инъективен тогда и только тогда, когда все его расширения тривиальны (т. е. каждый мономорфизм $A \to E$ расщепляется).* □

Это предложение дуально к 6.8.1.

14.11. Теорема. *В локально малой* AB5*-категории C объект A инъективен в том и только том случае, когда он не имеет собственных существенных расширений.*

Доказательство. Каждое расширение инъективного объекта тривиально. Следовательно, если оно собственное, то не может быть существенным.

Допустим теперь, что A не имеет собственных существенных расширений и $A \to E$ — произвольное расширение. Так как C есть AB5-категория, то упорядоченное множество S подобъектов A' объекта E, таких, что $A' \cap A = 0$, индуктивно, т. е.

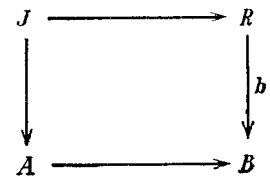
$$\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) \cap A = \sum_{i\in I} (A_i \cap A) = 0$$

для каждой возрастающей цепи $\{A_i \mid i \in I\}$ в S. По лемме Цорна в S существует максимальный элемент A'. Тогда A' — подобъект

объекта E и $A \to E \to E/A'$ — существенное расширение. Оно является эквивалентностью тогда и только тогда, когда A есть ретракт объекта E. (Ср. 3.59.) □

14.12. Критерий Бэра. *Пусть R — кольцо и A — объект категории* mod-R. *Тогда A инъективен в том и только том случае, если отображение $h_A(R) \to h_A(I)$ является эпиморфизмом для каждого правого идеала I кольца R.*

Доказательство (Фрейд). Если $a \in A$, то пусть $R \xrightarrow{a} A$ — отображение, определяемое соответствием $1 \mapsto a$. Мы покажем, что из условий предложения вытекает отсутствие у A собственных существенных расширений. Пусть $A \subset B$, $b \in B$, $b \notin A$, и рассмотрим коуниверсальный квадрат



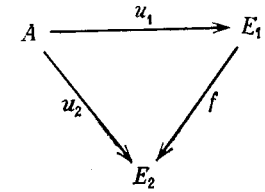
По 5.10.2 отображение $J \to R$ — мономорфизм. Поэтому по предположению существует $a \in A$, такой, что $(J \to R \xrightarrow{a} A) = (J \to A)$. Тогда $b - a \neq 0$ и $(b - a)\, R \cap A = 0$. Таким образом, B не является существенным расширением объекта A. □

14.13. Лемма. *Если $A \to E$ и $E \to B$ — расширения, то $(A \to B) = (A \to E \to B)$ существенно тогда и только тогда, когда $A \to E$ и $E \to B$ оба существенны.*

Доказательство предоставляется читателю. □

Инъективной оболочкой объекта A называется существенное расширение $A \to E$, в котором E инъективен.

14.14. Предложение. *Если $u_i\colon A \to E_i$, $i = 1, 2$, — инъективные оболочки объекта A, то существует эквивалентность $f\colon E_1 \to E_2$, такая, что диаграмма*



коммутативна.

Доказательство. Морфизм $f\colon E_1 \to E_2$ существует в силу инъективности объекта E_2. Так как $fu_1 = u_2$ — мономорфизм и u_1 существен, то f — мономорфизм по 14.9. Поскольку u_2 — также существенный, то по предыдущей лемме существен морфизм f. По 14.11 расширение $f\colon E_1 \to E_2$ не может быть собственным, т. е. f — эквивалентность. □

14.15. Предложение. *Пусть C есть* AB5*-категория. Если $\{u_i\colon A_i \to A\}$ — направленное семейство подобъектов объекта A категории C и $\{B \to A_i\}$ — существенное расширение для каждого i, то $B \to \sum_{i\in I} A_i$ — существенное расширение.*

Доказательство. Здесь $(B \to \sum A_i) = (B \to A_j \to \sum A_i)$ для любого j. Если X — ненулевой подобъект суммы $\sum A_i$, то по свойству AB5 $X = \sum (A_i \cap X)$. Поэтому $A_i \cap X \neq 0$ для некоторого i. Но $B \to A_i$ — существенное расширение, откуда следует, что $B \cap (A_i \cap X) \neq 0$. Таким образом, $B \cap X \neq 0$. □

14.16. Следствие. *Если C — локально малая* AB5*-категория, то объект A обладает инъективной оболочкой тогда и только тогда, когда A имеет инъективное расширение X.*

Доказательство. Объект X является расширением каждого существенного расширения объекта A. Обозначим через E функцию $\mathrm{Obj}\, C \to \mathrm{Obj}\, C$, такую, что EY является существенным расширением объекта Y для всех $Y \in \mathrm{Obj}\, C$, причем $EY = Y$ тогда и только тогда, когда объект Y инъективен. Для каждого ординального числа α положим

$$E_{\alpha+1}A = E(E_\alpha A),$$

а если α — предельное ординальное число, то определим

$$E_\alpha A = \varinjlim_{\beta<\alpha} E_\beta A = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta A.$$

По предыдущему результату $E_\alpha A$ — существенное расширение объекта A для всех $A \in \mathrm{Obj}\, C$ и α. Если α — ординальное число, мощность которого больше мощности множества всех подобъектов объекта X, то для всех $\gamma \geqslant \alpha$ обязательно $E_\gamma A = E_\alpha A$. Но тогда $E_\alpha A$ не имеет собственных существенных расширений и, следовательно, является инъективной оболочкой объекта A. □

14.17. Теорема. *Пусть C — категория Гротендика. Тогда C инъективно богата, обладает кообразующим, и каждый объект имеет инъективную оболочку.*

Комментарии к доказательству. (1) По лемме 14.16 и следствию 6.6 достаточно показать, что C инъективно богата.

(2) Митчелл [65, стр. 89—90] доказывает это, рассматривая вложение $h^U\colon C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$, где U — образующий категории C, и используя тот факт, что каждый объект категории mod-$\mathbb{Z}$ имеет инъективную оболочку.

(3) По теоремам 4.29 и 5.70 Попеску и Габриеля функтор h^U индуцирует полное вложение $T\colon C \rightsquigarrow \text{mod-}A$, где $A = \mathrm{End}_C U$. Более того, T — коретракция (см. 5.70), т. е. T обладает левым сопряженным S и $ST \approx 1_C$. Можно показать (см. 15.24), что существуют факторкатегория mod-A/ker S, обладающая инъективными оболочками, и в силу 15.26 эквивалентность $C \approx$ $\approx$ mod-A/ker S.

С этими замечаниями доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. □

14.18. Предложение. *Если C — малая абелева категория и T — инъективный объект категории* Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, *то функтор T точен справа.*

Доказательство. Если $A' \to A \to A'' \to 0$ — точная последовательность в C, то по 6.23 последовательность $0 \to$ $\to h^{A''} \to h^A \to h^{A'}$ точна в $F = \mathrm{Adfunct}\,(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$. В силу инъективности в F объекта T функтор $\mathrm{Mor}_F(\ , T)$ является точным. Поэтому последовательность

$$\mathrm{Mor}_F(h^{A'}, T) \to \mathrm{Mor}_F(h^A, T) \to \mathrm{Mor}_F(h^{A''}, T) \to 0$$

точна. Тогда естественный изоморфизм $\mathrm{Mor}_F(h^B, T) \approx TB$, установленный в предложении 2.3.1, показывает, что последовательность $TA' \to TA \to TA'' \to 0$ точна. Итак, T точен справа. □

14.19. Упражнение (Габриель [62, стр. 357]). Если C — нётерова категория, то верно и обратное (к 14.18).

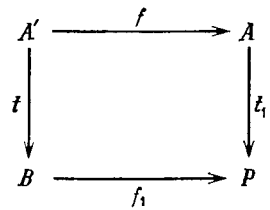
14.20. Лемма. *Пусть C — малая абелева категория и $M \to E$ — существенное расширение в* Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$. *Если M — монофунктор, то и E — монофунктор.*

Доказательство (Фрейд). Предположим, что $f\colon A' \to$ $\to A$ — мономорфизм в C, а $E(f)$ им не является. Если элемент x из EA' не равен нулю и $E(f)\,x = 0$, то определим подобъект F объекта E, полагая

$$FB = \{E(t)\,x \mid t \in \mathrm{Mor}_C(A', B)\}$$

для всех объектов B в C. Тогда, если $g\colon B' \to B$, то $E(g)\,FB' \subseteq FB$. Поэтому можно определить $F(g)$ как ограничение морфизма $E(g)$ на FB'. Так как FB есть подгруппа группы EB, то F — функтор со значениями в категории абелевых групп (он равен образу морфизма функторов $\eta\colon h^{A'} \to E$, где $\eta(1_{A'}) = x$). Поскольку $F \neq 0$,

существует $B \in \mathrm{Obj}\, C$, такой, что $FB \cap MB \neq 0$, т. е. существует морфизм $t\colon A' \to B$, для которого $0 \neq E(t)\, x \in MB$. Если



— кодекартов квадрат, то из 6.2.7 следует, что f_1 является мономорфизмом, поскольку f — мономорфизм. Учитывая, что $E(f)\, x = 0$, имеем

$$0 = E(t_1)\, E(f)\, x = E(f_1)\, E(t)\, x = M(f_1)\, E(t)\, x.$$

Так как M — монофунктор, то $M(f_1)$ — мономорфизм, и поэтому $E(t)\, x = 0$, что противоречит предположению. □

14.21. Теорема о точном вложении (Фрейд [60], Лабкин [60]). *Если C — малая абелева категория, то существует точное ковариантное вложение $C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$.*

Доказательство. По 14.2 Adfunct $(C, \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z})$ является категорией Гротендика, и поэтому в силу 14.7 каждый объект этой категории имеет инъективную оболочку. Кроме того, по 6.20 категория Adfunct $(C, \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z})$ обладает проективным образующим G, таким, что $G\colon C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$ является вложением. Тогда если H — инъективная оболочка объекта G, то в силу 14.18 и 14.20 функтор H точен справа и является монофунктором. Поэтому H является искомым точным вложением категории C в категорию $\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$. □

***14.22.** Упражнение.

14.22.1. Абелева категория C с образующим и кообразующим обладает точным вложением $C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$.

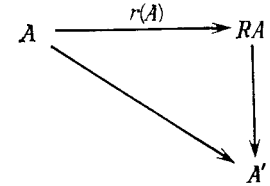
14.22.2. Каждая малая аддитивная категория A эквивалентна полной подкатегории C категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ для некоторого кольца R. Более того, включение $C \rightsquigarrow \mathrm{mod}\text{-}R$ сохраняет пределы, и C является множеством образующих категории $\mathrm{mod}\text{-}R$, состоящим из проективных модулей. (Ср. 6.20, стр. 389.)

Корефлективные категории

Пусть C' — подкатегория категории C. Если $A \in \mathrm{Obj}\, C$, то **корефлекцией** объекта A в C' называется морфизм

$$r(A)\colon A \to RA,$$

такой, что $RA \in \mathrm{Obj}\, C'$ и для каждого объекта A' категории C' и морфизма $A \to A'$ категории C существует единственный морфизм $RA \to A'$, такой, что диаграмма



коммутативна или, эквивалентно, имеет место биекция

$$\mathrm{Mor}_{C'}(RA, A') = \mathrm{Mor}_{C}(A, 1^{C}_{C'} A')$$

для каждого $A' \in \mathrm{Obj}\, C'$, где $1^{C}_{C'}\colon C' \rightsquigarrow C$ — функтор включения. Категория C' называется **корефлективной**, если выполнены два следующих эквивалентных условия:

R_1. Каждый объект A категории C обладает корефлекцией RA в C'.

R_2. Функтор вложения $C' \rightsquigarrow C$ имеет левый сопряженный $R\colon C \rightsquigarrow C'$, называемый **корефлектором** подкатегории C' в категорию C.

Если это так, то объект RA, где $R\colon C' \rightsquigarrow C$ — функтор и A — объект категории C, есть **корефлекция** объекта A в C'. Если категория C' полна и корефлективна, то она называется **вполне корефлективной** [1]).

Двойственно, скажем, что подкатегория C' **рефлективна**, если функтор включения имеет правый сопряженный.

Упражнения к гл. 14

1. Если C' — вполне корефлективная подкатегория категории C, $F\colon L \rightsquigarrow C'$ — функтор, а $F'\colon L \rightsquigarrow C$ — индуцированный функтор, то

$$\lim_{L, C'} F = R(\lim_{L, C} F').$$

***2.** Вполне корефлективная подкатегория C' категории C абелева (и обладает свойством AB5), если категория C абелева (и обладает свойством AB5), а корефлектор $R\colon C \rightsquigarrow C'$ точен. (Для любой категории C функтор $R\colon C \rightsquigarrow C'$ всегда сохраняет копределы.)

[1]) Здесь мы придерживаемся терминологии Митчелла [65]. Тем не менее в других источниках (например, Маклейн [72, стр. 89]) вместо термина «корефлективная» используется термин «рефлективная».

*3. Если C — малая абелева категория, то каждый объект F категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ обладает корефлектором в полной подкатегории Sex $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, состоящей из точных слева функторов.

*4. Если C — малая абелева категория, то полная подкатегория Sex $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, состоящая из всех точных слева функторов $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$, корефлективна, причем корефлектор точен и сохраняет копределы. Кроме того, Sex $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$ есть AB5-категория с образующим и инъективным кообразующим.

*5. Если C — малая абелева категория, то полная подкатегория категории Adfunct $(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, состоящая из всех точных справа функторов, рефлективна.

Замечания к гл. 14

Введение в книге Митчелла, заметки Маклейна [66], [72] и послесловие Фрейда [64] составляют краткую историю абелевых категорий. Габриель [62, стр. 363] приписывает теорему 14.21 о вложении «студентам Эйленберга», а на подаренном мне оттиске своей работы Габриель приписал авторство П. Фрейду и С. Лабкину. Эта же теорема в книге Басса [72, стр. 22] приписывается Фрейду, Гротендику и Лабкину, но никаких ссылок не дается.

Ссылки

Букур и Деляну [68], Габриель [62], Гротендик [57], Лабкин [60], Маклейн [66], [72], Митчелл [65], Попеску и Габриель [64], Такэути [71], Фрейд [60], [64].

Глава 15
ФАКТОРКАТЕГОРИИ И ЛОКАЛИЗУЮЩИЕ ФУНКТОРЫ

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория. **Классом или подкатегорией Серра** категории $\mathscr{A}$ называется непустая полная подкатегория $\mathscr{S}$, такая, что для каждой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

в $\mathscr{A}$ верно, что

$$B \in \mathscr{S} \Leftrightarrow A \in \mathscr{S} \;\&\; C \in \mathscr{S}.$$

Таким образом, объект B лежит в $\mathscr{S}$ тогда и только тогда, когда каждый его подобъект и каждый его факторобъект принадлежат $\mathscr{S}$. Пересечение любого семейства классов Серра является классом Серра.

15.1. Примеры.

15.1.1. Подкласс категории mod-A, состоящий из нётеровых (соотв. артиновых) A-модулей является классом Серра.

15.1.2. Если $F\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{B}$ — функтор, то **ядро** функтора F определяется как полная подкатегория

$$\ker F = \mathscr{S} = \{A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A} \mid FA = 0\} = \{A \in \operatorname{Obj} \mathscr{A} \mid F(1_A) = 0\}.$$

Если F точен, то ядро функтора F является классом Серра.

15.1.3. Если $\mathscr{F}$ — семейство инъективных объектов в $\mathscr{A}$, то можно определить класс Серра

$$\mathscr{S} = \{A \in \mathscr{A} \mid h_E(A) = 0 \text{ для всех } E \in \mathscr{F}\} = \bigcap_{E \in \mathscr{F}} \ker h_E.$$

Этот класс замкнут относительно копроизведений.

Класс Серра в примере 15.1.3 является пересечением классов Серра $\ker h_E$, определенных для каждого из точных функторов h_E. Если $\{A_i \mid i \in I\}$ — семейство объектов в $\mathscr{S}$, то, поскольку h_E превращает копроизведения в произведения (5.42), мы имеем

$$h_E\Big(\coprod_i A_i\Big) \approx \prod_i h_E(A_i) = 0.$$

Поэтому $\coprod_i A_i \in \mathscr{S}$. Следовательно, категория $\mathscr{S}$ в примере 15.1.3 обладает произвольными копроизведениями, если они существуют в категории $\mathscr{A}$.

15.1.4. Следующие подкатегории категории mod-$\mathbb{Z}$ являются классами Серра: (a) все периодические группы; (b) все конечно порожденные группы; (c) все конечные группы; (d) все p-группы.

15.1′. Упражнения.

15.1′.1. Непустая полная подкатегория $\mathcal{S}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ является классом Серра тогда и только тогда, когда из того, что последовательность

$$A \to B \to C$$

точна в $\mathcal{A}$, а A и C — объекты категории $\mathcal{S}$, следует, что $B \in \mathcal{S}$.

15.1′.2. Если $\mathcal{S}$ — подкатегория Серра категории $\mathcal{A}$, то говорят, что морфизм $f\colon A \to B$ есть **$\mathcal{S}$-мономорфизм** (соотв. **$\mathcal{S}$-эпиморфизм**, **$\mathcal{S}$-эквивалентность**) в том и только том случае, когда $\ker f \in \mathcal{S}$ (соотв. $\operatorname{coker} f \in \mathcal{S}$, f одновременно является $\mathcal{S}$-мономорфизмом и $\mathcal{S}$-эпиморфизмом). Доказать, что если последовательность $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ точна в $\mathcal{A}$, то

(a) из того, что f и g являются $\mathcal{S}$-(...), следует, что gf есть $\mathcal{S}$-(...) (заполните скобки).

(b) Если gf есть $\mathcal{S}$-(...), то таков же и f.

(c) Если f есть $\mathcal{S}$-эквивалентность, то g является $\mathcal{S}$-(...) тогда и только тогда, когда таков gf.

(d) Если g — $\mathcal{S}$-эквивалентность, то f является $\mathcal{S}$-(...) тогда и только тогда, когда таков gf.

15.2. Предложение. *Если $\mathcal{A}$ — абелева категория, то любая ее подкатегория Серра также абелева.*

Доказательство. Если $A_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2$, где $\mathcal{S}$ — подкатегория Серра, то имеет место точная последовательность

$$0 \to A_1 \xrightarrow{u_1} \coprod_{i=1}^{2} A_i \xrightarrow{p_2} A_2 \to 0,$$

которая показывает, что $\coprod_{i=1}^{2} A_i \in \mathcal{S}$. По индукции $\mathcal{S}$ имеет конечные произведения (копроизведения). Поэтому $\mathcal{S}$ аддитивна. Категория $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям, входящим в определение абелевой категории (см. 6.1), так как ядра и коядра морфизмов категории $\mathcal{S}$ существуют в $\mathcal{A}$ и принадлежат $\mathcal{S}$. Отсюда вытекают свойства (Ab1), (Ab2), (Ab3) предложения 6.1. □

Понятие класса Серра $\mathcal{S}$ категории $\mathcal{A}$ используется далее для того, чтобы определить **факторкатегорию** $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ (по Гротендику [57]). Объекты категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ суть объекты категории $\mathcal{A}$, а морфизмы категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ определяются с помощью 15.3.

Вместо обозначения $\operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ воспользуемся его сокращениями $_{\mathcal{A}}(A, B)$ или (A, B). Если A, B, A', B' — объекты категории $\mathcal{A}$ и $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, то канонические эпиморфизм $p_{B/B'}\colon B \to B/B'$ и мономорфизм $i^A_{A'}\colon A' \to A$ определяют гомоморфизм

$$(i^A_{A'},\ p_{B/B'})\colon (A, B) \to (A', B/B'), \tag{1}$$

который переводит $f\colon A \to B$ в $p_{B/B'} \circ f_0$, где $f_0\colon A' \to B$ — морфизм, индуцированный f.

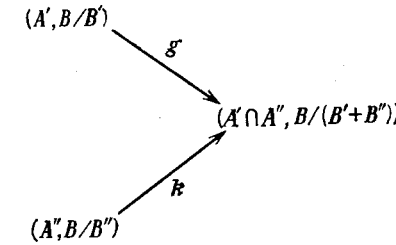
Пусть I обозначает класс упорядоченных пар $\langle A', B'\rangle$, где $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ и $A/A' \in \mathcal{S}$, $B' \in \mathcal{S}$. Упорядочим I по правилу

$$\langle A', B'\rangle \leqslant \langle A'', B''\rangle \Leftrightarrow A' \supseteq A'' \,\&\, B' \subseteq B''.$$

Класс I оказывается направленным относительно этого упорядочения, так как $\langle A' \cap A'', B' + B''\rangle$ принадлежит I и следует как за $\langle A', B'\rangle$, так и за $\langle A'', B''\rangle$ в смысле этого порядка. Кроме того, гомоморфизмы (1) упорядочивают класс групп

$$\{(A', B/B') \mid A/A' \in \mathcal{S},\ B' \in \mathcal{S}\}. \tag{2}$$

Этот класс направлен по только что определенному классу I, т. е. $(A' \cap A'', B/(B' + B''))$ следует за $(A', B/B')$ и $(A'', B/B'')$ в мысле упорядочения (2). Итак,



где g определяется по формуле (1) проекцией $B/B' \to (B/B')/((B' + B'')/B') \approx B/(B' + B'')$ и инъекцией $A' \cap A'' \to A'$. Аналогично определяется k. Это показывает, что класс (2), упорядоченный с помощью гомоморфизмов (1), является направленным по I.

Мы можем теперь дать следующее определение:

15.3. Определение.

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(A, B) = {}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(A, B) = \varinjlim_{\substack{A/A' \in \mathcal{S} \\ B' \in \mathcal{S}}} (A', B/B')\ ^{1}).$$

Если $f'\colon A' \to B/B'$ и $f''\colon A'' \to B/B''$ — морфизмы категории $\mathcal{A}$,

[1]) Это определение имеет смысл лишь в том случае, когда $\mathcal{A}$ — локально малая категория.— *Прим. перев.*

где $\langle A', B'\rangle$ и $\langle A'', B''\rangle$ — элементы класса I, то мы скажем, что $f' \equiv f'' \pmod{\mathscr{S}}$ в том и только том случае, когда существует пара $\langle A''', B'''\rangle$ в I, следующая как за $\langle A', B'\rangle$, так и за $\langle A'', B''\rangle$ и такая, что f' и f'' индуцируют один и тот же морфизм $A''' \to B/B'''$. Ясно, что тем самым в $\mathrm{Mor}\,\mathscr{A}$ определено отношение эквивалентности. Пусть G обозначает множество всех классов $\{f\}$ эквивалентности относительно этого отношения. Если $f_i\colon A_i \to B/B_i$, где $\langle A_i, B_i\rangle \in I$, $i = 1, 2$, то определим в G сложение по правилу

$$\{f_1\} + \{f_2\} = \{\bar{f}_1 + \bar{f}_2\},$$

где $\bar{f}_i$ обозначает морфизм $A_1 \cap A_2 \to B/(B_1 + B_2)$, индуцированный морфизмом f_i, $i = 1, 2$. Это определение не зависит от выбора представителей f_i в $\{f_i\}$, $i = 1, 2$, и G превращается в абелеву группу относительно этой операции. Для каждого $\langle A_1, B_1\rangle \in I$ мы имеем отображение

$$\begin{cases} \mathrm{Mor}\,(A_1, B/B_1) \to C \\ f \mapsto \{f\}. \end{cases}$$

Эти отображения образуют семейство, согласованное с нашей направленной системой. Более того, G является ее прямым пределом, т. е. имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(A, B) = \varinjlim_{\langle A', B'\rangle \in I} \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A', B/B') \approx G.$$

Пусть L обозначает только что определенный изоморфизм $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(A, B) \to G$. Если $t \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(A, B)$ и $L(t) = \{f\}$, то скажем, что t **представляется** морфизмом $f\colon A' \to B/B'$, где $A/A' \in \mathscr{S}$ и $B' \in \mathscr{S}$. Другая терминология для этого: *t возникает из описанного выше морфизма f* или *t есть образ этого морфизма в прямом пределе.*

Определим произведение отображений в $\mathscr{A}/\mathscr{S}$. Пусть $\bar{f} \in \in_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(A, B)$, $\bar{g} \in_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(B, C)$. Тогда $\bar{f}$ возникает из $f \in_{\mathscr{A}}(A', B/B')$, а $\bar{g}$ возникает из $g \in_{\mathscr{A}}(B'', C/C')$, где A/A', B', B/B'', $C' \in \mathscr{S}$. Если $A'' = f^{-1}((B'' + B')/B')$, то $A/A'' \in \mathscr{S}$ и f индуцирует отображение $f' \in_{\mathscr{A}}(A'', (B'' + B')/B')$. Если $C''/C' = g(B'' \cap B')$, то $C'' \in \mathscr{S}$ и g индуцирует отображение $g' \in_{\mathscr{A}}(B''/(B'' \cap B'), C/C'')$. Пусть теперь h есть произведение отображений

$$A'' \xrightarrow{f'} (B'' + B')/B' \approx B''/(B'' \cap B') \xrightarrow{g'} C/C''.$$

Так как A/A'' и C'' принадлежат подкатегории $\mathscr{S}$, то h определяет элемент $\bar{h} \in_{\mathscr{A}/\mathscr{S}}(A, C)$. Определенный таким образом элемент $\bar{h}$ единствен. Равенство $\bar{g} \circ \bar{f} = \bar{h}$ определяет билинейное умножение, превращающее $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ в аддитивную категорию. Это представляет собой набросок части доказательства следующей леммы.

15.4. Лемма. *Если $\mathscr{A}$ — локально малая абелева категория и $\mathscr{S}$ — класс Серра, то $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ является аддитивной категорией. Функтор $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\mathscr{S}$, который отображает A в A для каждого объекта $A \in \mathscr{A}$, а каждый морфизм $f\colon A \to B$ отображает в предел Tf в прямом пределе $\varinjlim_{\mathscr{A}}(A', B/B')$, является аддитивным и называется* ***каноническим.***

Доказательство. Для того чтобы показать, что категория $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ аддитивна, осталось только показать, что существуют конечные копроизведения. Это, однако, следует из леммы 15.6, которая показывает, что T сохраняет точные последовательности. Любой точный функтор сохраняет конечные копроизведения. Поэтому T аддитивен (см. 3.38 и 3.40.1) и аддитивна категория $\mathscr{A}/\mathscr{S}$. □

На самом деле категория $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ абелева (см. 15.7).

15.5. Лемма. *Если $f\colon A \to B$ — морфизм категории $\mathscr{A}$, то*

(a) *$Tf = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{im}\, f \in \mathscr{S}$;*

(b) *Tf — мономорфизм в том и только том случае, если $\ker f \in \mathscr{S}$;*

(c) *Tf — эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\mathrm{coker}\, f \in \mathscr{S}$.*

Доказательство. (a) Если $\mathrm{im}\, f \in \mathscr{S}$, то образ морфизма f в $_{\mathscr{A}}(A, B/\mathrm{im}\, f)$ равен нулю. Следовательно, образ морфизма f в прямом пределе $\varinjlim_{\mathscr{A}}(A', B/B')$ нулевой, т. е. $Tf = 0$. Обратно, если $Tf = 0$, то существуют $A' \subset A$, $B' \subset B$, такие, что f индуцирует нулевой морфизм $A' \to B/B'$. Следовательно, f отображает A' на $f(A') \subseteq B'$. Тогда $f(A') \in \mathscr{S}$, и из точности последовательности

$$0 \to f(A') \to \mathrm{im}\, f \to A/(A' + \ker f) \to 0$$

следует, что $\mathrm{im}\, f \in \mathscr{S}$.

(b) Если Tf — мономорфизм и $i\colon \ker f \to A$ — включение, то $f \circ i = 0$ и $Tf \circ Ti = 0$. Поэтому $Ti = 0$, откуда $\ker f = \mathrm{im}\, i \in \mathscr{S}$. Обратно, пусть $\bar{f}\colon TC \to TA$ — ненулевой морфизм в $\mathscr{A}/\mathscr{S}$, являющийся образом морфизма $f'\colon C' \to A/A'$, где C/C', $A' \in \mathscr{S}$. Заменив A' на $A' + \ker f$, мы можем предположить, что $\ker f \subseteq A'$. Тогда f индуцирует мономорфизм $f''\colon A/A' \to B/f(A')$. Так как $\bar{f} \neq 0$, то $\mathrm{im}\, f'$ и $\mathrm{im}\,(f'' \circ f')$ не лежат в $\mathscr{S}$ и, следовательно, $Tf \circ \bar{f} \neq 0$. Итак, Tf — мономорфизм.

(c) доказывается рассуждением, двойственным к (b). □

15.6. Лемма. *Пусть последовательность*

$$0 \to K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} Q \to 0$$

точна в $\mathcal{A}$.

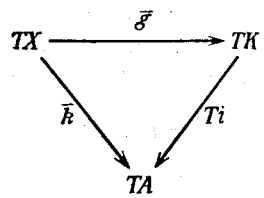
15.6.1. *Тогда*

$$0 \to TK \xrightarrow{Ti} TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tq} TQ \to 0$$

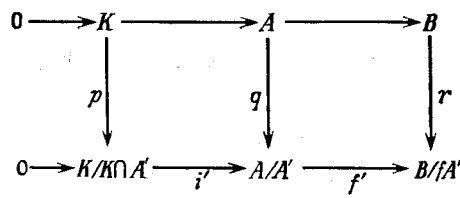
— точная последовательность в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$; *другими словами,* T: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ *— точный функтор.*

15.6.2. *Морфизм* Tf *является эквивалентностью в* $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда* $\ker f \in \mathcal{S}$ *и* $\operatorname{coker} f \in \mathcal{S}$.

Доказательство 15.6.1. По предыдущей лемме Ti есть мономорфизм. Если $\overline{k}$: $TX \to TA$ — такой морфизм, что $Tf \circ \overline{k} = 0$, то мы должны показать, что для некоторого морфизма $\overline{g}$ диаграмма



коммутативна. Чтобы это сделать, заметим, что $\overline{k}$ есть образ морфизма k: $X' \to A/A'$, где X' — подобъект в X, X/X' и A' лежат в $\mathcal{S}$. Диаграмма



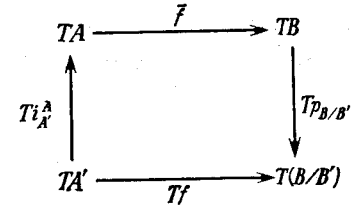
где p, q и r — канонические морфизмы, коммутативна. Так как $Tf \circ \overline{k} = 0$, то $f' \circ k\ (X') \in \mathcal{S}$. Пусть $X'' = k^{-1}(\operatorname{im} i')$. Тогда X'/X'' и X/X'' лежат в $\mathcal{S}$, а ограничение k на X'' равно произведению морфизмов $X'' \xrightarrow{g} K/(K \cap A') \xrightarrow{i'} A/A'$. Поэтому $Ti \circ \overline{g} = \overline{k}$, где $\overline{g}$ — образ морфизма g в $\mathcal{A}/\mathcal{S}(X, K)$. Двойственным образом доказывается часть утверждения 15.6.1, касающаяся коядер.

Доказательство 15.6.2. Если Tf — эквивалентность, то $\ker f \in \mathcal{S}$ и $\operatorname{coker} f \in \mathcal{S}$, ввиду 15.5. Обратно, предположим, что это так. Пусть q: $A \to \operatorname{coim} f$, j: $\operatorname{im} f \to B$ и h: $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ — канонические морфизмы. Тождественный морфизм $\operatorname{coim} f \to \operatorname{coim} f$ принадлежит $\mathcal{A}(\operatorname{coim} f, A/i\,(K))$, а его образ в $\mathcal{A}/\mathcal{S}(\operatorname{coim} f, A)$ имеет обратный Tq. Аналогично, эквивалентностью является Tj, а следовательно, и $Tf = Tj \circ Th \circ Tq$. □

15.7. Теорема. *Если* $\mathcal{S}$ *— класс Серра локально малой абелевой категории* $\mathcal{A}$, *то факторкатегория* $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ *абелева и канонический функтор* $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ *точен.*

Доказательство. Пусть f: $TA \to TB$ — любой морфизм в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$. Тогда $\overline{f}$ представляется некоторым морфизмом $f \in \mathcal{A}(A', B/B')$, где A/A', $B' \in \mathcal{S}$.

Коммутативная диаграмма



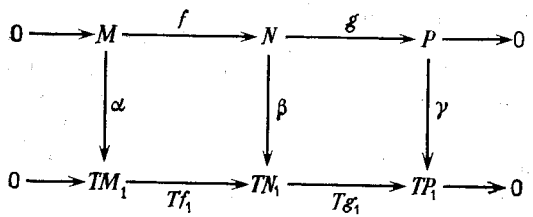
и тот факт, что $Ti^{A}_{A'}$ и $Tp_{B/B'}$ являются эквивалентностями, доказывают, что $\overline{f}$ имеет ядро и коядро тогда и только тогда, когда их имеет Tf. Но Tf имеет ядро и коядро по лемме 15.6. Это доказывает (Ab1). Аналогично с помощью 15.6.1 устанавливаются (Ab2) и (Ab3). □

15.8. Следствие. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— класс Серра категории* $\mathcal{A}$. *Если дана точная последовательность*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0,$$

где M, N, $P \in \operatorname{Obj} \mathcal{A}/\mathcal{S}$, *то существует точная последовательность* $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_1} P_1 \to 0$ *в* $\mathcal{A}$ *и эквивалентности* α, β *и* γ *в* $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, *такие, что:*

(a) *диаграмма*

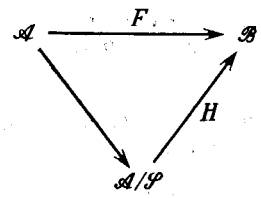


коммутативна;

(b) *нижняя строка этой диаграммы точна.*

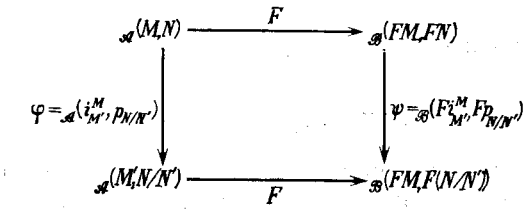
Доказательство. Морфизм f является образом элемента $f' \in_{\mathcal{A}} (M', N/N')$ в прямом пределе, где M/M', $N' \in \mathcal{S}$. Так как Tf' — мономорфизм, то $\ker f' \in \mathcal{S}$ по предыдущей лемме. Пусть q: $M' \to \operatorname{coim} f'$ — канонический морфизм, $M_1 = \operatorname{coim} f'$, $N_1 = N/N'$. Пусть далее f_1 — морфизм, индуцированный морфизмом f', $P_1 = \operatorname{coker} f_1$ и g_1: $N_1 \to P_1$ — канонический морфизм. Положим $\alpha = Tq \circ (Ti^M_{M'})^{-1}$, $\beta = Tp_{N/N'}$, а γ равным морфизму, индуцированному произведением $(Tg_1) \circ \beta$. □

15.9. Следствие. *Пусть F: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ — точный функтор из локально малой абелевой категории в абелеву, такой, что класс $\{X \in \operatorname{Obj} \mathcal{A} \mid FX = 0\}$ содержит класс Серра $\mathcal{S}$. Тогда существует единственный функтор H: $\mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B}$, такой, что треугольник*



где $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{S}$ — канонический функтор, коммутативен. Другими словами, функтор H таков, что существует естественная эквивалентность $H \circ T \approx F$ функторов, где функтор T: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ канонический. Если H' — другой такой функтор, то $H \approx H'$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму



где φ определяется по формуле (1), следующей за 15.2, и M/M', $N' \in \mathcal{S}$. Тогда ψ биективно, и мы имеем отображение

$$\psi^{-1} \circ F\colon \varinjlim_{\mathcal{A}} (M', N/N') \to {}_{\mathcal{B}}(FM, FN).$$

Итак,

$$H \begin{cases} \mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B} \\ M \mapsto FM \\ {}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(M, N) \mapsto {}_{\mathcal{B}}(FM, FN) \end{cases}$$

— требуемый функтор. Если к тому же $H' \circ T \approx F$, то $H(TX) \approx H'(TX)$, т.е. $H(X) \approx H'(X)$ для каждого объекта X категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ [1]). Поэтому $H \approx H'$. □

15.10. Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — абелевы категории, причем $\mathcal{A}$ локально мала, а $\mathcal{S}$ — класс Серра в $\mathcal{A}$, и пусть H: $\mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ — функтор. Тогда H точен в том и только том случае, когда произведение*

$$\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S} \overset{H}{\rightsquigarrow} \mathcal{B},$$

где первый из функторов канонический, является точным функтором.

Доказательство. Поскольку канонический функтор T: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ точен, то $H \circ T$ является точным, если точен H. Обратно, допустим, что $H \circ T$ точен. Если $0 \to M \overset{f}{\to} N \overset{g}{\to} P \to 0$ точна в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, то в обозначениях следствия 15.9 последовательность

$$0 \to HTM_1 \overset{HTf_1}{\to} HTN_1 \overset{HTg_1}{\to} HTP_1 \to 0$$

[1]) И эти изоморфизмы естественны по X.— *Прим. перев.*

точна и поэтому

$$0 \to HM \xrightarrow{Hf} HN \xrightarrow{Hg} HP \to 0$$

— точная последовательность. □

Функтор сечений

Пусть $\mathscr{S}$ — класс Серра локально малой абелевой категории $\mathscr{A}$, и допустим, что канонический функтор $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\mathscr{S}$ обладает правым сопряженным $\mathscr{A}/\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{A}$. Любые два функтора, сопряженные к T, эквивалентны (см. 5.3). Выберем какой-нибудь функтор $S\colon \mathscr{A}/\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{A}$, сопряженный справа к T, и назовем его **функтором сечений**. Подкатегория Серра $\mathscr{S}$ есть абелева категория. Если существует функтор сечения $S\colon \mathscr{A}/\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{A}$, то $\mathscr{S}$ называется **локализующей подкатегорией** категории $\mathscr{A}$. Тогда композиция $ST\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}$ функторов называется **локализующим функтором**.

15.11. Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — категория Гротендика и $\mathscr{S}$ — ее подкатегория Серра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *$\mathscr{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathscr{A}$.*

(b) *Полная подкатегория $\mathscr{S}$ категории $\mathscr{A}$ обладает произвольными копроизведениями.*

(c) *Категория $\mathscr{S}$ кополна.*

(d) *Прямой предел в $\mathscr{A}$ направленного семейства объектов подкатегории $\mathscr{S}$ принадлежит $\mathscr{S}$.*

(e) *Канонический функтор $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\mathscr{S}$ непрерывен справа.*

Доказательство. Абелева категория кополна тогда и только тогда, когда она имеет копроизведения (см. 6.3). Отсюда и из (15.7) имеем (b) $\Leftrightarrow$ (c).

(b) $\Leftrightarrow$ (d). Пусть $A_i \xrightarrow{u_i} \coprod_{\mathscr{S}} A_i$ (соотв. $A_i \xrightarrow{u_i'} \coprod A_i$) — копроизведение в $\mathscr{S}$ (соотв. в $\mathscr{A}$) семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ объектов категории $\mathscr{S}$. Тогда в $\mathscr{A}$ существует морфизм $h\colon \coprod A_i \to \coprod_{\mathscr{S}} A_i$, такой, что $u_i = h \cdot u_i'$ для всех $i \in I$. Поскольку u_i — мономорфизмы в $\mathscr{S}$, а следовательно, и в $\mathscr{A}$ (см. 15.2), то h — также мономорфизм, откуда $\coprod A_i \in \mathscr{S}$. Поэтому (b) справедливо тогда и только тогда, когда копроизведение в $\mathscr{A}$ любого семейства объектов подкатегории $\mathscr{S}$ принадлежит $\mathscr{S}$. Поскольку копроизведение является прямым пределом (см. 5.8), а прямой предел есть коядро копроизведения (см. 5.11), мы получаем, что (b) $\Leftrightarrow$ (d).

(c) $\Leftrightarrow$ (e). Предположив справедливость (e), имеем

$$\coprod_i TA_i \approx T\left(\coprod_i A_i\right) \in \operatorname{Obj} \mathscr{S}$$

для любого семейства объектов $\{TA_i\}$ подкатегории $\mathscr{S}$. Поэтому $\mathscr{S}$ имеет (произвольные) копроизведения. Обратно, если $\coprod_i TA_i \in \operatorname{Obj} \mathscr{S}$ и

$$f\colon \coprod_i TA_i \to T\left(\coprod_i A_i\right)$$

— канонический морфизм в категории $\mathscr{A}$, то, поскольку его ядро и коядро, будучи нулями, принадлежат $\mathscr{S}$, образ Tf является изоморфизмом в $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ в силу 15.5. Таким образом, T непрерывен справа.

Пусть $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{B}$ — функтор из абелевой категории в абелеву. Если $\mathscr{A}$ имеет образующий и является кополной и колокально малой, то T обладает правым сопряженным тогда и только тогда, когда T непрерывен справа (см. 5.52). По условию теоремы, ввиду 14.17, $\mathscr{A}$ имеет (инъективный) кообразующий и, следовательно, колокально мала. Поэтому (a) $\Leftrightarrow$ (e). □

15.12. Предложение. *Пусть M — объект категории $\mathscr{A}$ и $\mathscr{S}$ — класс Серра категории $\mathscr{A}$. Тогда говорят, что M **$\mathscr{S}$-замкнут**, если M удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

(a) *Если $f\colon P \to Q$ — морфизм, такой, что $\ker f$ и $\operatorname{coker} f$ принадлежат $\mathscr{S}$, то $h_M(f)\colon h_M(Q) \to h_M(P)$ — биекция.*

(b) *Любой подобъект объекта M, принадлежащий $\mathscr{S}$, равен нулю, и для каждого $P \in \operatorname{Obj} \mathscr{S}$ любая точная последовательность*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \to P \to 0$$

расщепляется.

(c) *Для каждого $P \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$ канонический функтор $T\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\mathscr{S}$ индуцирует биективное отображение*

$$T(P, M)\colon h_M(P) \to h_{TM}(TP).$$

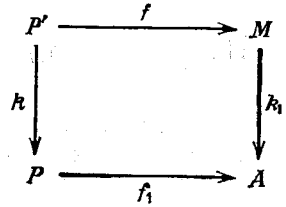
Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Если $K \subseteq M$ и $K \in \operatorname{Obj} \mathscr{S}$, то положим в (a) $P = M$ и, взяв в качестве $f\colon M \to M/K$ канонический морфизм, запишем $1_M = v \circ f = h_M(f)$, где $v\colon M/K \to M$. Таким образом, f — мономорфизм, откуда $K = 0$.

Аналогично, для выписанной точной последовательности в силу (a) существует морфизм $g\colon N \to M$, такой, что $gf = 1_M$. Поэтому f расщепляется.

(b) $\Rightarrow$ (c). Если $P, M \in \operatorname{Obj} \mathscr{A}$, то в силу (b) мы можем записать

$$\mathscr{A}/\mathscr{S}(TP, TM) = \varinjlim_{P/P' \in \mathscr{S}} \mathscr{A}(P', M).$$

Поэтому каждый элемент в $_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(TP, TM)$ является образом морфизма $f\colon P' \to M$. В силу 6.2.7 универсальный квадрат

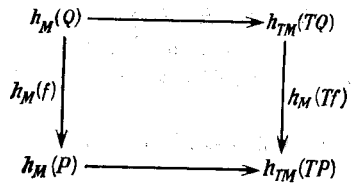


где k — каноническое отображение, дает мономорфизм $k_1\colon M \to A$, такой, что $\operatorname{coker} k_1 \approx P/P'$. Следовательно, ввиду (b), существует такой морфизм $v\colon A \to M$, что $v \circ k_1 = 1_M$. Тогда

$$f = 1_M f = v \circ (k_1 f) = v \circ (f_1 k) = (v \circ f_1)\, k.$$

Поэтому T индуцирует наложение $h_M(P) \to h_{TM}(TP)$. Если $g\colon P \to M$ не равен нулю, то $\operatorname{im} g \notin \operatorname{Obj} \mathcal{S}$ по (b) и, следовательно, $Tg\colon TP \to TM$ — также не нуль. Итак, T индуцирует биективное отображение.

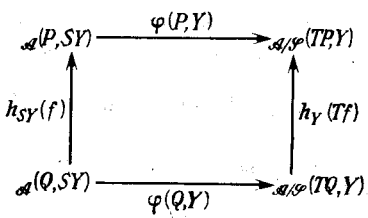
(c) $\Rightarrow$ (a). Если дан морфизм $f\colon P \to Q$, то диаграмма



коммутативна и горизонтальные отображения биективны. Если $\ker f$ и $\operatorname{coker} f$ принадлежат $\mathcal{S}$, то Tf и, следовательно, $h_M(f)$ — эквивалентность. □

15.13. Следствие. *Если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$ и $S\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ — функтор сечений, то каждый объект категории $\mathcal{A}$ вида SY является $\mathcal{S}$-замкнутым.*

Доказательство. Пусть $f\colon P \to Q$ имеет ядро и коядро в $\mathcal{S}$. Диаграмма



коммутативна, а горизонтальные отображения являются изоморфизмами. Поскольку Tf — изоморфизм, то отображение $h_Y(Tf)$ биективно, поэтому биективно и $h_{SY}(f)$. Итак, 15.12 (a) справедливо. □

Так как S сопряжен к T, то по 5.67 мы имеем естественный изоморфизм

$$\varphi = \varphi_{(X, Y)}\colon {}_{\mathcal{A}}(X, SY) \to {}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(TX, Y)$$

с обратным

$$\psi = \psi_{(X, Y)}\colon {}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(TX, Y) \to {}_{\mathcal{A}}(X, SY)$$

и естественные преобразования функторов

$$\Phi\colon T \circ S \to 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}},$$
$$\Psi\colon 1_{\mathcal{A}} \to S \circ T.$$

15.14. Предложение. *Пусть $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$, и пусть $S\colon \mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ — функтор сечений. Тогда:*

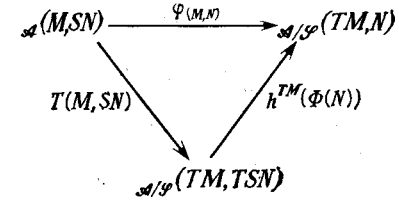
15.14.1. *Естественное преобразование*

$$\Phi\colon TS \to 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$$

является эквивалентностью.

15.14.2. *$\mathcal{S}$ содержит* $\ker \Psi(M)$ *и* $\operatorname{coker} \Psi(M)$ *для всех $M \in \mathcal{A}$.*

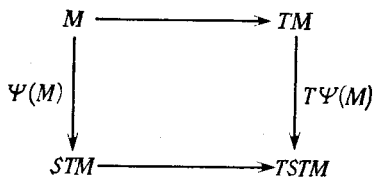
Доказательство 15.14.1. Если $M \in \mathcal{A}$ и $N \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$, то диаграмма



коммутативна. По следствию 15.13 объект SN $\mathcal{S}$-замкнут, поэтому по предложению 15.12 отображение $T(M, SN)$ биективно. Так как $\varphi_{(M, N)}$ — изоморфизм, то отсюда следует, что $h^{TM}(\Phi(N))$ биективно для всех M. Поскольку каждый объект категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ эквивалентен объекту вида TM, то $\Phi(N)$ — эквивалентность.

Доказательство 15.14.2. По 5.67.2 (a) произведение морфизмов $T\Psi(M)$ и $\Phi(TM)$ равно тождественному морфизму

объекта TM. Так как $\Phi(TM)$ — изоморфизм, то из этого следует, что $T\Psi(M)$ — изоморфизм, диаграмма



коммутативна и $\ker \Psi(M) \in \ker T = \mathscr{S}$. Аналогично, $\operatorname{coker} \Psi(M) \in \mathscr{S}$. □

15.15. Следствие. *Если $\mathscr{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathscr{A}$, то объект M категории $\mathscr{A}$ является $\mathscr{S}$-замкнутым тогда и только тогда, когда*

$$\Psi(M)\colon M \to STM$$

— эквивалентность. Более того, $\ker \Psi(M)$ для любого объекта M является наибольшим подобъектом в M, принадлежащим $\mathscr{S}$ и обозначаемым через $\mathscr{S}(M)$, при этом $\Psi(M/\mathscr{S}(M))$ есть мономорфизм.

Доказательство. По предыдущему следствию любой объект из образа функтора S $\mathscr{S}$-замкнут. Таким образом, из $M \approx STM$ следует, что M $\mathscr{S}$-замкнут. Обратно, поскольку $\ker \Psi(M)$ принадлежит $\mathscr{S}$ для любого M, то $\ker \Psi(M)$ непременно равен нулю, если M $\mathscr{S}$-замкнут. Двойственным образом морфизм $STM \to \operatorname{coker} \Psi(M)$ расщепляется по 15.12 (b). Так как каждый подобъект объекта STM, принадлежащий $\mathscr{S}$, равен нулю, то $\operatorname{coker} \Psi(M)=0$ и $\Psi(M)$ является эквивалентностью. Поскольку Ψ — естественное преобразование функторов, то $\Psi(M/\mathscr{S}(M))$ — мономорфизм для любого объекта M категории $\mathscr{A}$. Поскольку $ST(M/\mathscr{S}(M))$ является $\mathscr{S}$-замкнутым, $M/\mathscr{S}(M)$ не имеет ненулевых подобъектов, принадлежащих $\mathscr{S}$ (см. 15.12). Отсюда следует, что $\mathscr{S}(M)$ содержит каждый подобъект объекта M, принадлежащий $\mathscr{S}$. □

15.16. Следствие. *Если $\mathscr{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathscr{A}$ и $\{U_i \mid i \in I\}$ — семейство образующих категории $\mathscr{A}$, то $\{TU_i \mid i \in I\}$ — семейство образующих категории $\mathscr{A}/\mathscr{S}$.*

Доказательство остается в качестве упражнения. □

15.17. Упражнение.

15.17.1. Если $\mathscr{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathscr{A}$, а C — полная подкатегория категории $\mathscr{A}$, состоящая из класса всех $\mathscr{S}$-замкнутых объектов категории $\mathscr{A}$, то C является корефлективной подкатегорией и функтор включения $C \rightsquigarrow \mathscr{A}$ имеет левый сопряженный, который каждому объекту M ставит в соответствие $\mathscr{S}$-замкнутый объект, изоморфный $\mathscr{S}$-оболочке объекта M. (См. определение 15.19.A.) Вывести отсюда, что C — абелева категория (но необязательно абелева подкатегория категории $\mathscr{A}$).

15.17.2. Пусть C — малая абелева категория. Ковариантный аддитивный функтор $F\colon C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$ называется **уточняющим** [1]), если для всех объектов A категории C и каждого $x \in F(A)$ существует мономорфизм $0 \to A \xrightarrow{f} B$, такой, что $F(f)\,x = 0$.

Полная подкатегория $\mathscr{S}$ категории $\operatorname{Adfunct}(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, состоящая из всех уточняющих функторов, является локализующей подкатегорией. Более того, объекты полной подкатегории категории $\operatorname{Adfunct}(C, \text{mod-}\mathbb{Z})$, состоящей из $\mathscr{S}$-замкнутых объектов, являются точными слева функторами $C \rightsquigarrow \text{mod-}\mathbb{Z}$. (Ср. упражнения к гл. 14, в частности упр. 4.)

*15.17.3 (Митчелл). Пусть C — малая абелева категория. Существует точный вполне унивалентный функтор $C \rightsquigarrow \text{mod-}A$ для некоторого кольца A. (15.30; ср. Суон [68, стр. 14—22].)

15.18. Предложение. *Пусть*

$$T_1\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{B}$$

— точный функтор из локально малой абелевой категории в абелеву, а функтор

$$S_1\colon \mathscr{B} \rightsquigarrow \mathscr{A}$$

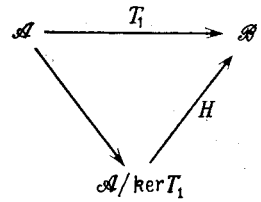
сопряжен к T_1 в ситуации $(\varphi_1, T_1, S_1, \mathscr{A}, \mathscr{B})$. Допустим, что естественное преобразование

$$\Phi_1\colon T_1 \circ S_1 \to 1_{\mathscr{B}},$$

определенное естественным преобразованием φ, является эквивалентностью. Тогда $\ker T_1$ — локализующая подкатегория категории $\mathscr{A}$, и существует эквивалентность $H\colon \mathscr{A}/\ker T_1 \approx \mathscr{B}$ катего-

[1]) В оригинале «weakly effaceable».— *Прим. перев.*

рий, такая, что диаграмма



где левый функтор канонический, коммутативна. (Тогда говорят, что H *—* ***эквивалентность, индуцированная функтором*** T_1.)

Доказательство. Так как T_1 точен, то $\ker T_1 = \{X \in \mathrm{Obj}\, A \mid T_1X = 0\}$ является классом Серра. Пусть J: $\mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\ker T_1$ — канонический функтор и H: $\mathscr{A}/\ker T_1 \rightsquigarrow \mathscr{A}/\ker T_1$ — единственный функтор (см. 15.10), такой, что $T_1 = H \circ J$. Если f — морфизм в $\mathscr{A}$, то $T_1 f$ — эквивалентность тогда и только тогда, когда и $J(\ker f)$, и $J(\mathrm{coker}\ f)$ равны нулю или, эквивалентно, в силу 15.6.2, если Jf — эквивалентность. Применим это замечание к $\Psi_1(M)$: $M \to S_1 \circ T_1(M)$, где $M \in \mathrm{Obj}\, \mathscr{A}$. Тогда

$$T_1\Psi_1(M) \circ \Phi_1(T_1M) = 1_{T_1M}.$$

Так как $\Phi_1(T_1M)$ — эквивалентность, мы видим, что $T_1\Psi_1(M)$ — эквивалентность, откуда по предыдущему замечанию таковой же является и $J\Psi_1(M)$. Поскольку каждый объект M категории $\mathscr{A}/\ker T_1$ имеет вид JM, морфизм

$$J\Psi_1(M)\colon JM \to JS_1T_1(M) = JS_1HJ(M)$$

определяет естественную эквивалентность функторов

$$\mathscr{A}/\ker T_1 \approx (JS_1)\circ H.$$

Поскольку Φ: $T_1S_1 \approx 1_{\mathscr{B}}$ дает естественную эквивалентность $H\circ(JS_1) \approx 1_{\mathscr{B}}$, то H: $\mathscr{A}/\ker T_1 \approx \mathscr{B}$ является эквивалентностью категорий (с обратным JS_1).

Остается только показать, что $\ker T_1$ — локализующая подкатегория. Мы докажем это в предположении, что $\mathscr{A}$ — категория Гротендика, оставляя общий случай в качестве упражнения [1]). Поскольку функтор T_1 имеет сопряженный, он сохраняет ко-

[1]) Для этого достаточно установить справедливость приведенного ниже замечания.— *Прим. перев.*

произведения (см. 5.43). Так как $T_1 = H\circ J$ и H — эквивалентность, то отсюда следует, что J сохраняет копроизведения и поэтому $\ker T_1$ — локализующая подкатегория (см. 15.11). □

Замечание. $S_1\circ H$ сопряжен к J.

15.19A. Предложение. *Пусть* $\mathscr{S}$ *— класс Серра локально малой абелевой категории* $\mathscr{A}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\mathscr{S}$ *— локализующая подкатегория категории* $\mathscr{A}$.

(b) *Каждый объект* M *категории* $\mathscr{A}$ *содержит подобъект* $\mathscr{S}(M)$, *являющийся наибольшим в классе подобъектов объекта* M, *принадлежащих* $\mathscr{S}$. *Если* $\mathscr{S}(M) = 0$, *то существует мономорфизм* $M \to N$, *где* N *есть* $\mathscr{S}$*-замкнутый объект.*

(c) *Для каждого объекта* M *категории* $\mathscr{A}$ *существует точная последовательность*

$$0 \to A' \to M \xrightarrow{u} N \to A''' \to 0,$$

где $A' \in \mathscr{S}$ & $A''' \in \mathscr{S}$ *и* N $\mathscr{S}$*-замкнут. При этом морфизм* u *называется* ***$\mathscr{S}$-оболочкой*** *объекта* M.

Доказательство. (a) ⇒ (b). По 15.14 $\mathscr{S}(M) = \ker \Psi(M)$ — наибольший подобъект объекта M, принадлежащий $\mathscr{S}$. Если $\ker \Psi(M) = 0$, то $\Psi(M)$: $M \to STM$ — мономорфизм, а объект STM $\mathscr{S}$-замкнут.

(b) ⇒ (c). Пусть M' — максимальный подобъект объекта M, принадлежащий $\mathscr{S}$, и i: $M/M' \to F$ — мономорфизм, где F $\mathscr{S}$-замкнут. Пусть N — полный прообраз в F максимального подобъекта объекта $\mathrm{coker}\ i$, принадлежащего $\mathscr{S}$. Тогда N $\mathscr{S}$-замкнут в силу 15.12(a). Так как $i(M/M') \subseteq N$, то i индуцирует морфизм j: $M/M' \to N$ и

$$j \circ p_{M/M'}\colon M \to N$$

является $\mathscr{S}$-оболочкой объекта M.

(c) ⇒ (a). По определению подкатегория $\mathscr{S}$ является локализующей, если канонический функтор T: $\mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}/\mathscr{S}$ имеет сопряженный S: $\mathscr{A}/\mathscr{S} \rightsquigarrow \mathscr{A}$. Если $N \in \mathrm{Obj}\, \mathscr{A}/\mathscr{S}$, то пусть $u(N)$: $N \to SN$ есть $\mathscr{S}$-оболочка объекта N. Тогда отображение

$$\mathscr{A}/\mathscr{S}(TM, N) = \mathscr{A}/\mathscr{S}(TM, TN) \xrightarrow{\mathrm{Mor}(TM,\, Tu(N))} \mathscr{A}/\mathscr{S}(TM, TSN)$$

биективно, ввиду 15.5. В силу 15.12 (c) отображение

$$\mathscr{A}(M, SN) \xrightarrow{T(M,\, SN)} \mathscr{A}/\mathscr{S}(TM, TSN)$$

также биективно, и произведение этих двух отображений дает естественный изоморфизм

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(T(\ ), N) \approx \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\ , SN).$$

Поэтому функтор $h_N \circ T = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}(T(\ ), N)$ представим, и, следовательно, функтор T имеет сопряженный в силу утверждения, двойственного к 5.4. □

15.19B. Предложение. *Если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$, то канонический функтор T: $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ индуцирует эквивалентность T': $C \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ из полной подкатегории C, состоящей из всех $\mathcal{S}$-замкнутых объектов, в категорию $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, а обратная эквивалентность S' индуцируется функтором сечений S: $\mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{A}$.*

Доказательство. Так как по 15.13 каждый объект SY $\mathcal{S}$-замкнут, то, как и утверждалось, S индуцирует функтор S'. Кроме того, эквивалентность $TS \approx 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$, установленная в 15.14.1, дает эквивалентность $T'S' \approx 1_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$. Поскольку, в силу 15.15, $\Psi(M)$: $M \to STM$ является эквивалентностью для каждого $\mathcal{S}$-замкнутого объекта M, то Ψ индуцирует естественную эквивалентность Ψ': $1_C \to S'T'$, что и требовалось. □

Отсюда вытекает, что две любые $\mathcal{S}$-оболочки u_i: $M \to N_i$, $i = 1,2$, объекта M категории $\mathcal{A}$ эквивалентны, так как из 15.15 мы имеем, что $ST(N) \approx N$ для любого $\mathcal{S}$-замкнутого объекта N, и поэтому, используя 15.19A и 15.5, получаем

$$ST(M) \approx ST(N_i) \approx N_i,$$

$i = 1, 2$, откуда $N_1 \approx N_2$.

В формулируемом ниже следствии вводится терминология, которая будет использована в теории кручений, обсуждаемой в гл. 16.

15.19C. Следствие и определение. *Если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$, то говорят, что объект M является $\mathcal{S}$-**периодическим** или просто **периодическим** (соотв. $\mathcal{S}$-**полупростым** или **без $\mathcal{S}$-кручения**, или **без кручения**, или **не имеющим $\mathcal{S}$-кручения**), если $M = \mathcal{S}(M)$ (соотв. $\mathcal{S}(M) = 0$). Пусть M есть $\mathcal{S}$-полупростой объект. Тогда мономорфизм u: $M \to N$ является $\mathcal{S}$-оболочкой в том и только том случае, когда N $\mathcal{S}$-замкнут, а N/M — периодический объект. В этом случае (1) u — существенный мономорфизм; (2) если E — существенное расширение объекта N, то E и E/N полупросты. Обратно, если справедливы (1) и (2) и N/M — периодический объект, то u является $\mathcal{S}$-оболочкой. Более того,*

если предположить, что существует инъективная оболочка $\hat{M}$ и M — полупростой объект, то его $\mathcal{S}$-оболочка есть наибольший среди таких подобъектов D объекта M, что D/M — периодический объект. Таким образом, $\mathcal{S}$-полупростой объект M $\mathcal{S}$-замкнут тогда и только тогда, когда $\hat{M}/M$ $\mathcal{S}$-полупрост.

Доказательство. Если u: $M \to N$ есть $\mathcal{S}$-оболочка и K — подобъект объекта N, такой, что $K \cap M = 0$, то K канонически вкладывается в объект N/M, который по определению 15.19A является объектом подкатегории $\mathcal{S}$. Таким образом, K принадлежит $\mathcal{S}$. Но $\mathcal{S}(N) = 0$, поэтому $K = 0$. Это доказывает, что u — существенный мономорфизм. Аналогично, любое существенное расширение E объекта N $\mathcal{S}$-полупросто. Далее, если p: $E \to E/N$ — канонический морфизм и $P = \mathcal{S}(E/N)$, то для подходящего подобъекта H объекта E имеет место точная последовательность $0 \to N \to H \to P \to 0$, которая расщепляется, поскольку H $\mathcal{S}$-замкнут и $P \in \mathcal{S}$. Так как H — существенный подобъект объекта H, это может произойти, только если $N = H$ и $P = 0$. Это доказывает (2). Обратно, так как N/M — периодический объект, нам только нужно показать, что N $\mathcal{S}$-замкнут. Поскольку объект N полупрост, то, ввиду 15.12, нам остается показать, что любая последовательность $0 \to N \to P \to Q \to 0$, где $P \in \mathcal{S}$, расщепляется. Если, однако, K максимален в множестве таких подобъектов объекта Q, что $K \cap N = 0$, то канонический мономорфизм $N \to Q/K$ существен. Таким образом, $(N + K)/K$ — существенный подобъект объекта Q/K. Если предположить, что (2) справедливо, то факторобъект объекта Q/K по подобъекту $(N + K)/K$ должен быть $\mathcal{S}$-полупростым, т. е. $Q/(N + K)$ $\mathcal{S}$-полупрост. С другой стороны, $Q/(N + K)$ является факторобъектом объекта $P \approx Q/N$. Так как $P \in \mathcal{S}$, то $Q/(N + K)$ — периодический объект. Поэтому $Q/(N + K) = 0$, т. е. $Q = N + K = N \oplus K$, что дает требуемое расщепление. Это доказывает, что N $\mathcal{S}$-замкнут, а u является $\mathcal{S}$-оболочкой.

Итак, обратное утверждение доказано. Из (2) вытекает, что ни для какого собственного существенного расширения E объекта N факторобъект E/N не является периодическим. Это доказывает необходимость предпоследнего утверждения. Достаточность следует из того факта, что D/M является периодическим и D удовлетворяет (1) и (2). Последнее утверждение следствия легко вытекает отсюда. □

15.20. Упражнение. *Если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$, то следующие условия эквивалентны:*

15.20.1. *Локализующий функтор точен.*

15.20.2. *Если $N \subseteq M$ и N и M $\mathcal{S}$-замкнуты, то M/N $\mathcal{S}$-замкнут.*

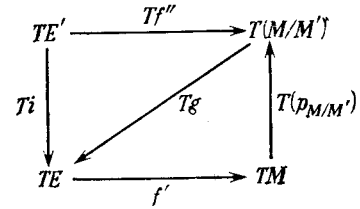
Напомним определение: мономорфизм $f\colon M \to N$ называется **существенным**, если $f(M) \cap P \neq 0$ или, эквивалентно, если $f^{-1}P \neq 0$ для любого ненулевого подобъекта P объекта N.

15.21. Предложение. *Пусть $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$. Пусть $f\colon M \to N$ — морфизм и M' (соотв. N') — максимальный подобъект объекта M (соотв. N), принадлежащий $\mathcal{S}$, и пусть $f'\colon M/M' \to N/N'$ обозначает морфизм, индуцированный морфизмом f. Тогда $Tf\colon TM \to TN$ является существенным расширением в том и только том случае, когда существенным расширением является $f'\colon M/M' \to N/N'$.*

Доказательство. По 15.5 $Tp_{M/M'}\colon TM \to T(M/M')$ и $Tp_{N/N'}\colon TN \to T(N/N')$ являются эквивалентностями. Поэтому Tf — существенный мономорфизм тогда и только тогда, когда таковым является Tf'. Следовательно, предложение достаточно доказать для случая, когда $M' = N' = 0$. Если f — существенный мономорфизм, то $f^{-1}P \neq 0$ и $f^{-1}P \notin \mathcal{S}$ для любого ненулевого подобъекта TP объекта $N = TN$. Тогда $(Tf)^{-1}TP \approx T(f^{-1}P)$ не равен нулю, и поэтому Tf — существенный мономорфизм. Обратно, если Tf — существенный мономорфизм и P — ненулевой подобъект объекта N, то $TP \neq 0$, поскольку из $N' = 0$ вытекает, что $P \notin \mathcal{S}$. Таким образом, $f^{-1}P \neq 0$. □

15.22. Предложение. *Пусть $\mathcal{S}$ — класс Серра локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$ и $u\colon M \to E$ — инъективная оболочка в $\mathcal{A}$ объекта M категории $\mathcal{A}$. Если M не имеет ненулевых подобъектов, принадлежащих $\mathcal{S}$, то E $\mathcal{S}$-замкнут и $Tu\colon TM \to TE$ — инъективная оболочка в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ объекта TM, где $T\colon \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ — канонический функтор.*

Доказательство. Если N — подобъект объекта E, принадлежащий $\mathcal{S}$, то $M \cap N \in \mathcal{S}$ и $M \cap N \subseteq M$. Следовательно, $M \cap N = 0$. Так как u — существенный морфизм, то N непременно равен нулю и поэтому E $\mathcal{S}$-замкнут в силу 15.19С. Кроме того, $E' = M' = 0$ в обозначениях предложения 15.21, поэтому Tu — существенный мономорфизм. Чтобы доказать, что TE инъективен, рассмотрим в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ мономорфизм $f'\colon TE \to TM$, являющийся образом морфизма $f''\colon E' \to M/M'$, где E/E' и M' принадлежат $\mathcal{S}$. Поскольку Tf'' — мономорфизм, то $\ker f'' \in \mathcal{S}$ и, следовательно, $\ker f'' = 0$. Пусть $i\colon E' \to E$ — включение. Так как объект E инъективен, то существует $g\colon M/M' \to E$, такой, что $i = gf$. Тогда коммутативна диаграмма



Поскольку Ti и $T(p_{M/M'})$ являются эквивалентностями, то f' расщепляется и поэтому TE инъективен. □

15.23. Следствие. *Пусть $\mathcal{S}$ — класс Серра локально малой абелевой категории $\mathcal{A}$, имеющей инъективные оболочки [1]). Тогда следующие условия эквивалентны:*

15.23.1. *$\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$.*

15.23.2. *Каждый объект M категории $\mathcal{A}$ содержит наибольший подобъект, принадлежащий $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Применить 15.22 и 15.19С. □

15.24. Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ — локально малая абелева категория с инъективными оболочками и $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория. Тогда*

15.24.1. *Категория $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ обладает инъективными оболочками, и каждый ее инъективный объект имеет вид TE, где E — инъективный объект категории $\mathcal{A}$. Кроме того, функтор сечений $\mathcal{A}/\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ сохраняет инъективность объектов.*

15.24.2. *Если E инъективен в $\mathcal{A}$, а E_1 — инъективная оболочка максимального в E подобъекта M_1, принадлежащего $\mathcal{S}$, то $E \approx E_1 \oplus SE_2$, где E_2 — инъективный объект категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$. Кроме того, E_1 и E_2 единственны с точностью до эквивалентностей категории $\mathcal{A}$.*

15.24.3. *Если инъективная оболочка каждого объекта X подкатегории $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathcal{S}$, то канонический функтор $T\colon \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}/\mathcal{S}$ сохраняет инъективные объекты, т. е. TE инъективен в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, если E инъективен в $\mathcal{A}$.*

Доказательство 15.24.1. Ввиду 15.6.2, каждый объект X категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ эквивалентен объекту TM, где M — такой объект категории $\mathcal{A}$, что $\mathcal{S}(M) = 0$. По 15.22 если $u\colon M \to E$ — инъективная оболочка в $\mathcal{A}$, то $T(u)\colon TM \to TE$ — инъективная оболочка в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$. Поскольку $X \approx TM$, то заключаем, что $\mathcal{A}/\mathcal{S}$

[1]) Это означает, что каждый объект категории имеет инъективную оболочку.— *Прим. ред.*

имеет инъективные оболочки. Если X инъективен в $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, то $X \approx TM \approx TE$. Тогда $SX \approx STE \approx E$ по 15.15, и поэтому S сохраняет инъективность объектов. (Ср. 6.28.)

Доказательство 15.24.2. Так как E инъективен и $M_1 \to E_1$ — существенное расширение, то мономорфизм $M_1 \to E$ может быть расширен до мономорфизма $E_1 \to E$. Поскольку $E_1 \to E$ расщепляется, то $E \approx E_1 \oplus F$, где $\mathcal{S}(F) = 0$. В силу 15.22 $E_2 = TF$ — инъективный объект категории $\mathcal{A}/\mathcal{S}$, а по 15.15 $F \approx STF = SE_2$.

Доказательство. 15.24.3. По условию в обозначениях следствия 15.24.2 имеем $E_1 \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{S}$, откуда $TE_1 = 0$ и каждый из объектов

$$TE \approx TSE_2 \approx TF \approx E_2$$

инъективен в $\mathcal{S}$. □

15.25. Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ — категория Гротендика. Если $\mathcal{F}$ — семейство инъективных объектов категории $\mathcal{A}$, то*

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \{X \in \mathcal{A} \mid h_E(X) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}\}$$

— локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$. Обратно, если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathcal{S})),$$

где $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ — семейство $\mathcal{S}$-замкнутых инъективных объектов категории $\mathcal{A}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из 15.11 и из того, что $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ имеет копроизведения (см. 15.1). Обратно, если $\mathcal{S}$ — локализующая подкатегория, то $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ обладает инъективными оболочками (потому что ими обладает $\mathcal{A}$). В этом случае объект M категории $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, E) = 0$ для всех $E \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$. □

Характеризация категорий Гротендика

15.26. Теорема (Попеску — Габриель [64]) (третий вариант). *Пусть C — категория Гротендика. Пусть $U \in \mathrm{Obj}\,C$, $A = \mathrm{End}_C U$. Пусть $T = h^U$ — функтор со значениями в категории* mod-A, *индуцированный объектом U, а S обозначает функтор, сопряженный слева к T. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *U — образующий категории C.*

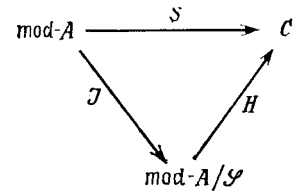
(b) *T вполне унивалентен.*

(c) *Естественное преобразование функторов*

$$\Psi\colon ST \to 1_C,$$

определенное ситуацией сопряжения $(\eta, T, S, C, \mathrm{mod}\text{-}A)$, *является эквивалентностью и S — точный функтор.*

(d) *S точен, т. е. $\mathcal{S} = \ker S$ является локализующей подкатегорией категории* mod-A, *и S индуцирует эквивалентность H:* mod-$A/\mathcal{S} \rightsquigarrow C$, *такую, что диаграмма*



где J: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-$A/\mathcal{S}$ — *канонический функтор, коммутативна. (Таким образом, $H \circ J \approx S$.)*

Доказательство. Импликации (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) очевидны, а (c) $\Leftrightarrow$ (d) следует из 15.18 и 15.14. Мы теперь докажем импликацию (a) $\Rightarrow$ (c).

(a) $\Rightarrow$ (c). По 5.69 и 5.70 ситуация сопряжения порождает естественную эквивалентность $ST \approx 1_C$. Следовательно, остается только доказать, что функтор S точен. Это осуществлено Попеску и Габриелем в длинной последовательности лемм. Детали доказательств этих лемм были написаны Попеску для книги Букура и Деляну [72, леммы 6.26—6.30, стр. 171—180].

Вместо этого мы приведем короткое доказательство Такэути, использующее свойства так называемых левых производных функторов (появляющихся в первый и последний раз в книге!). (См. также короткое доказательство Ламбека [71b].)

15.26.1. **Лемма.** *Если $Y \subseteq TX$, то $SY \subseteq X \approx STX$, т. е. $SY \to X$ — мономорфизм.*

Доказательство. Так как $TX = \mathrm{Mor}_C(U, X)$, то существует канонический морфизм $U^{(Y)} \to X$. Для образа I этого морфизма справедливо, что $Y \subseteq TI \subset TX$. Применяя метод доказательства утверждения в 4.24 о том, что h^U: $C \rightsquigarrow$ mod-A — полный функтор, мы видим, что произведение

$$\mathrm{Mor}_C(I, Z) \xrightarrow{T} \mathrm{Hom}_A(TI, TZ) \to \mathrm{Hom}_A(Y, TZ)$$

является биективным отображением для любого объекта Z категории C. Следовательно, I может быть отождествлен с SY. Тогда $I \subseteq X$ означает, что $SY \to X$ — мономорфизм. □

15.26.2. **Лемма.** *Если Y — подобъект свободного объекта F категории* mod-A, *то $SY \to SF$ — мономорфизм.*

Доказательство. Существует направленное семейство $\{F_\alpha\}$ конечно порожденных свободных подмодулей модуля F, такое, что $F = \sum_a F_a$. Тогда $Y = \sum_a (Y \cap F_a)$. Поскольку для каждого a существует целое число n_a, такое, что

$$F_a \approx A^{n_a} = (TU)^{n_a} \approx T(U^{n_a}),$$

то лемма 15.26.1 показывает, что $S(Y \cap F_a) \to SF_a$ — мономорфизм. Так как C имеет прямые пределы, а S перестановочен с прямыми пределами то

$$SY = \varinjlim S(Y \cap F_a) \leqslant \varinjlim SF_a = SF.$$

15.26.3. **Лемма.** *Если* $0 \leftarrow Y \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \ldots$ *— проективная резольвента и* F_i *свободны при* $i \geqslant 0$, *то последовательность* $0 \leftarrow SY \leftarrow SF_0 \leftarrow SF_1 \leftarrow \ldots$ *точна.*

Доказательство. S точен справа (как функтор, сопряженный слева к h^U), и поэтому лемма 15.26.2 дает нужный результат. □

Это завершает доказательство теоремы 15.26, поскольку последняя лемма показывает, что n-й левый производный функтора S равен нулю для $n > 0$. (См., например, Маклейн [66, стр. 494].) □

15.27. Следствие. *Категория Гротендика является категорией с инъективными оболочками и инъективным кообразующим* (см. 14.17).

Доказательство. Применить 15.24 к 15.26. □

15.28. Следствие (Габриель [62], Митчелл [64]). *Категория* C *эквивалентна категории* mod-A *для некоторого кольца* A *тогда и только тогда, когда* C *есть* AB3*-категория с малым проективным образующим* U. *В этом случае функтор* $h^U : C \to \text{mod-End}_C U$ *является эквивалентностью, а* C *будет* AB5*-категорией.* □

15.29. Следствие (Попеску — Габриель). *Категория* C *эквивалентна* AB5*-категории с образующим тогда и только тогда, когда существуют кольцо* A, *локализующая подкатегория* $\mathscr{S}$ *категории* mod-A *и эквивалентность* $C \approx \text{mod-}A/\mathscr{S}$. *Более того, в этом случае* C *эквивалентна полной подкатегории категории* mod-A, *состоящей из* $\mathscr{S}$*-замкнутых модулей.* □

15.30. Теорема о полном точном вложении (Митчелл [64]). *Любая малая абелева категория* C *обладает полным точным ковариантным вложением* $C \to \text{mod-}A$ [1]) *для некоторого кольца* A.

[1]) То есть $C \to \text{mod-}A$ — полный унивалентный и точный функтор.— *Прим. ред.*

Доказательство (*в котором предполагается, что* C *обладает полным точным контравариантным вложением* T: $C \to C_1$ *в категорию Гротендика* C_1 *с образующим* U, *таким, что* TX *является факторобъектом объекта* U *для каждого объекта* X *категории* C. Ср. доказательство Попеску в Букур — Деляну [72, стр. 181] и Митчелл [65, стр. 151].) Тогда C_1 содержит инъективный кообразующий V, такой, что каждый TX есть подобъект объекта V. Поэтому дуальная категория C_1^{op} содержит проективный образующий $G = V^*$. Если A — кольцо эндоморфизмов объекта G в C_1^{op}, то по теореме 6.33 из книги Букура — Деляну [72, стр. 181] существует точный функтор T_1: $C_1^{\text{op}} \to \text{mod-}A$, такой, что для любых объектов X, Y из C морфизм

$$T_1(DTX, DTY)\colon \operatorname{Hom}_{C_1^{\text{op}}}(DTX, DTY) \to \operatorname{Hom}_A(T_1DTX, T_1DTY),$$

где D: $C_1 \to C_1^{\text{op}}$ — канонический функтор дуализации, есть изоморфизм. Тогда произведение

$$C \to C_1 \to C_1^{\text{op}} \approx \text{mod-}A,$$

где функтор $C_1 \to C_1^{\text{op}}$ канонический, является полным точным вложением. □

15.31. Следствие. *Если* $\mathscr{A}$ *— категория Гротендика и* $\mathscr{S}$ *— локализующая подкатегория, то* $\mathscr{A}/\mathscr{S}$ *— категория Гротендика.*

Доказательство предоставляется в качестве упражнения. Ср. Габриель [62, стр. 378]. □

AB6-категории

Говорят, что AB3-категория C является AB6-категорией, если для любого семейства $\{\{C_{\alpha\beta}\}_{\beta\in I_\alpha}\}_{\alpha\in J}$ направленных семейств подобъектов объектов категории C канонический морфизм

$$\sum_{\beta\in I_\alpha} \bigcap_{\alpha\in J} C_{\alpha\beta} \to \bigcap_{\alpha\in J} \sum_{\beta\in I_\alpha} C_{\alpha\beta}$$

является изоморфизмом при условии существования пересечений.

Упражнения к гл. 15

1. (Роос [65]; ср. Роос [67].) Следующие условия на абелеву категорию C эквивалентны:

1.1. C является AB4*- и AB6-категорией с образующим.

1.2. Существуют кольцо A и локализующая подкатегория B категории mod-A, эквивалентная категории mod-A_0 для некото-

рого кольца A_0, такие, что категории C и $(\text{mod-}A)/B$ эквивалентны.

1.3. В категории C существует образующий U, такой, что ядро точного функтора

$$S\colon \text{mod-}A \rightsquigarrow C, \text{ где } A = \text{End}_C\, U,$$

являющегося сопряженным слева к каноническому функтору $C \rightsquigarrow \text{mod-}A$, задаваемому функтором $\text{Mor}_C(U,)$, эквивалентно категории $\text{mod-}A_0$ для некоторого кольца A_0.

1.4. Категория C эквивалентна категории вида $\text{mod-}(A, a)$, где a — идемпотентный идеал кольца A и $\text{mod-}(A, a)$ — полная подкатегория категории mod-A, состоящая из всех объектов M, для которых канонический гомоморфизм

$$M \approx \text{Hom}_A(A, M) \to \text{Hom}_A(a, M)$$

является изоморфизмом.

2. Пусть R — произвольное кольцо и $\mathscr{S}$ — полная подкатегория категории mod-R, состоящая из всех модулей M, таких, что R является рациональным расширением (см. 4.5) аннулятора любого элемента модуля M. Показать, что $\mathscr{S}$ — локализующая подкатегория. Если $\overline{M}$ есть значение локализующего функтора на объекте M категории mod-R, то показать, что $\overline{M}$ является максимальным рациональным расширением объекта M (в смысле 4.5) и что $\overline{R}$ — кольцо. Еще раз доказать 4.5 и упр. 1 гл. 9 [1]). Рассмотреть также в качестве частных случаев случаи полупервичных правых колец Голди и правых областей Оре.

3 (Попеску — Габриель). Если C — категория Гротендика с образующим U, то существуют корефлективная подкатегория C_1 категории mod-A с точным корефлектором и эквивалентность $C \approx C_1$. Говорят, что правый A-модуль N **пренебрежим,** если для каждого объекта X в C и морфизма $f\colon A \to N$ функтор h_{TX} отображает мономорфизм $K \to A$ в биективное отображение $h_{TX}(f)\colon h_{TX}(A) \to h_{TX}(K)$, где $T = h^U$, $K = \ker f$. Пусть B обозначает полную подкатегорию пренебрежимых модулей. Тогда B — локализующая подкатегория категории mod-A и C эквивалентна подкатегории C_1 всех B-замкнутых модулей.

Замечания к гл. 15

Замечания к этой главе были включены во введение к ч. IV. Мне не удалось найти в книге Габриеля [62] явно сформулированного утверждения 15.19B, хотя его доказательство, как и большинство материала главы, заимствовано из этого источника. Тем не менее предложение 15.19B было установлено для категорий модульного типа Попеску и Габриелем [64] (см. упр. 3, а также предложение 16.8C). Характеризация $\mathscr{S}$-замкнутых объектов в 15.19C была подсказана соответствующим результатом для категорий модульного типа (ср. Ламбек [71, стр. 10]).

[1]) Вероятно, имеется в виду доказательство, использующее технику гл. 15. — *Прим. перев.*

Ссылки

Букур — Деляну [72], Габриель [62], Габриель — Попеску [64], Ламбек [71b], Митчелл [64], Такэути [71].

Глава 16

ТЕОРИЯ КРУЧЕНИЙ, РАДИКАЛЫ И ИДЕМПОТЕНТНЫЕ ТОПОЛОГИЗИРУЮЩИЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Эта глава содержит приложения локализующих функторов и факторкатегорий, определенных в предыдущей главе. Применение их к мультипликативным множествам S кольца R и соответствующим (частичным) кольцам частных R_S относительно S дает предложение 16.9. Теорема 16.12 определяет максимальное правое кольцо $\hat{R}$ частных Джонсона антисингулярнго справа кольца R (ср. гл. 19). Если R полупервично и удовлетворяет условиям максимальности для аннуляторных правых идеалов и прямых сумм правых идеалов, то $\hat{R}$ является классическим правым кольцом частных.

Предложение 16.3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом всех локализующих подкатегорий категории mod-R и классом, состоящим из идемпотентных и топологизирующих множеств идеалов кольца R в смысле, который вскоре будет указан. (Если R — антисингулярное справа кольцо, то таким множеством является множество существенных правых идеалов.) Кручением в категории Гротендика $\mathcal{A}$ называется упорядоченная пара (B, C) подкатегорий, таких, что, полагая $(\ ,\ ) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\ ,\ )$, имеем

$X \in B$ тогда и только тогда, когда $(X, \hat{Y}) = 0$ для всех $Y \in C$, где $\hat{Y}$ — инъективная оболочка объекта Y.

$Y \in C$ тогда и только тогда, когда $(X, \hat{Y}) = 0$ для всех $X \in B$.

В этом случае объекты подкатегории B называются периодическими, а объекты подкатегории C — объектами без кручения или полупростыми. Между кручениями (B, C) и локализующими подкатегориями категории $\mathcal{A}$ существует биективное соответствие (16.18B).

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество правых идеалов кольца A. Тогда говорят, что $\mathcal{F}$ — **топологизирующее множество**, если выполнены следующие условия:

F. 1. A принадлежит $\mathcal{F}$, и каждый правый идеал, содержащий правый идеал из $\mathcal{F}$, принадлежит $\mathcal{F}$.

F.2. Пересечение любых двух правых идеалов из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

F.3. Если $I \in \mathcal{F}$ и $a \in A$, то $\{b \mid b \in A,\ ab \in I\} \in \mathcal{F}$.

Для краткости правый идеал

$$\{b \in A \mid ab \in I\}$$

будем обозначать через $(a/I)^{\perp}$ или $\mathrm{ann}_A\,(a/I)$. (В других источниках используется также обозначение $a^{-1}I$.) Для последующих ссылок сформулируем здесь условие

F.4. Если $J \in \mathcal{F}$ и $\mathrm{ann}_A\,(a/I) \in \mathcal{F}$ для всех $a \in J$, то $I \in \mathcal{F}$.

Говорят, что A-модуль M является **$\mathcal{F}$-периодическим** [1] ($\mathcal{F}$-пренебрежимым по Габриелю), если аннулятор любого элемента модуля M принадлежит $\mathcal{F}$. Таким образом, M является $\mathcal{F}$-периодическим тогда и только тогда, когда для каждого $x \in M$ найдется $I \in \mathcal{F}$, такой, что $xI = 0$.

Говорят, что полная подкатегория C абелевой категории $\mathcal{A}$ **замкнута**, если выполнены следующие условия:

C.1. Если $Y \in \mathrm{Obj}\ C$, то каждый подобъект и каждый факторобъект объекта Y принадлежат C.

C.2. Подкатегория C содержит копроизведение (вычисленное в $\mathcal{A}$) любой пары своих объектов.

C.3. Прямой предел (вычисленный в категории $\mathcal{A}$) любого направленного семейства объектов категории C принадлежит C.

16.1. Упражнение и определение.

16.1.1. Если $M \in \mathrm{Obj}\ \mathcal{A}$, а C — замкнутая подкатегория, то M содержит подобъект CM, являющийся наибольшим среди подобъектов объекта M, принадлежащих C, и $f(CM) \subseteq CN$ для всех морфизмов $f\colon M \to N$ категории $\mathcal{A}$. Вывести отсюда, что функтор $T\colon \mathcal{A} \rightsquigarrow C$, отображающий каждый объект M в CM, точен слева и сопряжен справа к функтору вложения $C \rightsquigarrow A$.

16.1.2. Показать, что топологизирующее множество $\mathcal{F}$ правых идеалов кольца A является базисом окрестностей нуля для некоторой топологии на кольце A.

16.1.3. Показать, что если $A \in \mathcal{F}$, то F.2 вытекает из F.3 и F.4.

16.1.4. Показать, что систему условий, входящих в определение замкнутой подкатегории, можно заменить более простой [2].

Если G — множество правых идеалов кольца A, то полную подкатегорию категории mod-A, состоящую из всех G-периодических модулей, обозначим через $\mathcal{S}(G)$.

16.2. Лемма. *Отображение $\mathcal{S}$, которое сопоставляет каждому топологизирующему множеству G правых идеалов кольца A подкатегорию $\mathcal{S}(G)$, является биекцией между классом всех топологи-*

[1] Здесь $\mathcal{F}$ — произвольное множество правых идеалов кольца A.— *Прим. перев.*

[2] Вероятно, автор имеет в виду возможность замены условий C.2 и C.3 требованием замкнутости C относительно произвольных копроизведений.— *Прим. перев.*

зирующих множеств правых идеалов и классом всех замкнутых подкатегорий категории mod-A. *Обратное отображение* $\mathscr{F}$ *сопоставляет подкатегории* C *категории* mod-A *множество*

$$\mathscr{F}(C) = \{I \mid I \subseteq A \;\&\; A/I \in \mathrm{Obj}\, C\}.$$

Доказательство. Пусть C — замкнутая подкатегория категории mod-A и $F = \mathscr{F}(C)$. Если $A \supseteq I \supseteq J$ и $A/J \in C$, то из точности последовательности

$$0 \to I/J \to A/J \to A/I \to 0 \tag{1}$$

следует, что $I \in F$. Таким образом, условие F.1 выполнено [1]). Далее, пусть A/I и A/J лежат в C. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to I \cap J \to A \to A/I \times A/J$$

(морфизм в произведение определен естественными проекциями). Она индуцирует точную последовательность

$$0 \to A/(I \cap J) \to A/I \times A/J, \tag{2}$$

откуда следует справедливость условия F.2. Чтобы доказать справедливость условия F.3, предположим, что $A/I \in C$. Тогда, если $J = \mathrm{ann}_A\, a/I$, то определен мономорфизм

$$\begin{cases} A/J \to A/I \\ b + J \mapsto ab + I. \end{cases} \tag{3}$$

Поэтому из C.1 следует, что $A/J \in C$, откуда $J \in F$, чем и доказывается F.3.

Обратно, допустим, что G — топологизирующее множество, и пусть $C = \mathscr{S}(G)$. Пусть

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{4}$$

— точная последовательность A-модулей и $Y \in C$. Тогда модуль X также G-периодичен. Если $a \in Y$, то $\mathrm{ann}_A\,(a/X) \supseteq \mathrm{ann}_A\, a$, откуда, ввиду F.1, следует, что $\mathrm{ann}_A\,(a/X) \in G$. Тем самым доказано, что модуль $Z \approx Y/X$ является G-периодическим. Поэтому C.1 выполнено. Пусть $Y = \coprod_{t \in T} X_t$ — копроизведение объектов категории C. Каждый $y \in Y$ является конечной суммой $y = \sum_t x_t$ элементов $x_t \in X_t$. Поэтому $\mathrm{ann}_A\, y$ содержит [2]) конечное пересечение $I = \bigcap_t \mathrm{ann}_A\, x_t$. Так как $\mathrm{ann}_A\, x_t \in G$ для каждого t, то $I \in G$, ввиду F.2.

[1]) То что $A \in F$ следует из того, что любая замкнутая подкатегория в силу C.3 содержит 0.— *Прим. перев.*

[2]) На самом деле равен.— *Прим. перев.*

Применяя теперь F.1, получаем, что $\mathrm{ann}_A\, y \in G$ и, таким образом, $Y \in G$. Это доказывает C.2. Так как в mod-A прямые пределы являются факторобъектами копроизведений, то отсюда же следует справедливость свойства C.3.

Тот факт, что $\mathscr{F} = \mathscr{S}^{-1}$, очевиден. □

Если C и D — замкнутые подкатегории категории $\mathscr{A}$, то **произведение** $C \cdot D$ определяется как полная подкатегория категории $\mathscr{A}$, состоящая из всех таких объектов X категории $\mathscr{A}$, что X/DX принадлежит C. Операция $(C, D) \to C \cdot D$, определенная на классе всех замкнутых подкатегорий, ассоциативна. Обычный способ для ассоциативных систем позволяет определить классы C^n для всех n.

16.3. Предложение и определение (Габриель [62]). *Пусть* A — *кольцо.*

16.3.1. *Если* F *и* G — *топологизирующие множества правых идеалов кольца* A, *то произведение* $\mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G)$ *замкнутых подкатегорий* $\mathscr{S}(F)$ *и* $\mathscr{S}(G)$ *является замкнутой подкатегорией. Обозначим через* $F \cdot G$ *топологизирующее множество правых идеалов, соответствующее* $\mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G)$. *Таким образом,*

$$\mathscr{S}(F \cdot G) = \mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G).$$

16.3.2. *Если* I — *правый идеал кольца* A, *то* $I \in F \cdot G$ *тогда и только тогда, когда существует* $J \in F$, *такой что* $\mathrm{ann}_A\,(a/I) \in G$ *для всех* $a \in J$. *Множество* F *называется* ***идемпотентным****, если* $F \circ F = F$ *или, эквивалентно, если выполнено условие*:

F.4. $$J \in F \;\&\; \mathrm{ann}_A\,(a/I) \in F \forall a \in J \Rightarrow I \in F.$$

16.3.3. *Отображение* $\mathscr{S}$ *осуществляет биективное отображение из класса всех идемпотентных топологизирующих множеств правых идеалов на класс всех локализующих подкатегорий категории* mod-A.

Доказательство 16.3.1. Пусть

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{1'}$$

— точная последовательность в mod-A. Если $Y \in \mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G)$, то $Y/\mathscr{S}(G)\, Y \in \mathscr{S}(F)$, где $\mathscr{S}(G)\, Y$ — наибольший подобъект объекта Y, принадлежащий $\mathscr{S}(G)$ (см. упр. 16.1). Теперь имеем $\mathscr{S}(G)\, X = \mathscr{S}(G)\, Y \cap X$ и

$$(X + \mathscr{S}(G)\, Y)/\mathscr{S}(G)\, Y \approx X/(X \cap \mathscr{S}(G)\, Y) = X/\mathscr{S}(G)\, X.$$

Поэтому $X/\mathscr{S}(G)\, X \in \mathscr{S}(F)$ в силу C.1, т. е. $X \in \mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G)$. Аналогично доказывается, что $Z \in \mathscr{S}(F) \cdot \mathscr{S}(G)$. Следовательно,

$\mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$ удовлетворяет условию С.1. Пусть $\{X_t \mid t \in T\}$ — семейство объектов подкатегории $\mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$. Тогда положим $Y = \coprod_{t\in T_i} X_t$ и $Z = \coprod_{t\in T} (X_t/\mathscr{S}(G)\, X_t)$. Теперь поскольку $\mathscr{S}(G)\, Y \approx \approx \coprod_{t\in T} \mathscr{S}(G)\, X_t$, то очевидное вложение

$$\coprod_{t\in T} X_t/\coprod_{t\in T} \mathscr{S}(G)\, X_t \to \coprod_{t\in T} (X_t/\mathscr{S}(G)\, X_t) = Z$$

индуцирует вложение $Y/\mathscr{S}(G)\, Y \to Z$. Так как $Z \in \mathscr{S}(F)$ и $\mathscr{S}(F)$ — замкнутая подкатегория, получаем, что $Y/\mathscr{S}(G)\, Y \in \mathscr{S}(F)$ и поэтому $Y \in \mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$. Это завершает доказательство замкнутости подкатегории $\mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$.

Доказательство 16.3.2. Пусть $I \in F\cdot G$. Тогда $A/I \in \mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$ и $A/I/D\,(A/I) \in \mathscr{S}(F)$, где $D = \mathscr{S}(G)$. По определению $D\,(A/I) = J/I$ — это наибольший подмодуль модуля A/I, принадлежащий D. Так как $J/I \in D$, то $\operatorname{ann}_A(a/I) \in G$ для всех $a \in J$ в силу F.3. Обратно, пусть существует правый идеал J, указанный в 16.32. Тогда $(J+I)/I \in \mathscr{S}(G) = D$, поскольку $\operatorname{ann}_A(a/I) \in G$ для всех $a \in (J+I)/I$. Следовательно, $D\,(A/I) \supseteq (J+I)/I$, и поэтому $(A/I)/D\,(A/I)$ является факторобъектом объекта $(A/I/((J+I)/I) \approx A/(J+I)$. Таким образом, $(A/I)/D\,(A/I) \approx A/Q$, где $Q \supseteq J+I$. Так как $J \in F$, то $Q \in F$ по F.1 и, следовательно, $(A/I)/\mathrm{D}\,(A/I) \in \mathscr{S}(F)$. Тем самым доказано, что $A/I \in \mathscr{S}(F)\cdot\mathscr{S}(G)$, т. е. $I \in F\cdot G$.

Доказательство 16.3.3. Ввиду 16.2, нам достаточно доказать, что множество F идемпотентно тогда и только тогда, когда $\mathscr{S}(F)$ — локализующая подкатегория. Предположим сначала, что F — идемпотентное (и топологизирующее) множество. Тогда справедливо условие С.1. Далее, предположим, что в точной последовательности (1') модули X и Z принадлежат $\mathscr{S}(F)$. Пусть $y \in Y$, $I = \operatorname{ann}_A y$ и $J = \operatorname{ann}_A(y/X) \in F$. Тогда $J \in F$ и поскольку $yJ \subseteq X$, то $\operatorname{ann}_A(a/I) \in F$ для всех $a \in J$. Применение F.4 теперь показывает, что $Y \in \mathscr{S}(F)$. Таким образом, $C = \mathscr{S}(F)$ является классом Серра. Поскольку C — замкнутая подкатегория, то C обладает произвольными копроизведениями (см. доказательство 16.2). Поэтому C — локализующая подкатегория в силу 15.11. Обратное утверждение доказывается аналогично. □

16.4. Определение. Радикальным фильтром кольца A называется идемпотентное топологизирующее множество правых идеалов кольца A. Для каждого $M \in \text{mod-}A$ выберем $\mathscr{S}(F)$-оболочку $u_M\colon M \to M_F$. [Ср. 15.19. Таким образом, M_F $\mathscr{S}(F)$ — замкнут

и $\ker u_M$ и $\operatorname{coker} u_M$ принадлежат $\mathscr{S}(F)$.] Для каждого $m \in M_F$ отображение

$$\begin{cases} m_s\colon A \to M_F \\ a \mapsto ma \end{cases}$$

обладает единственным расширением $\overline{m_s}\colon A_F \to M_F$. Отображение

$$\begin{cases} \varphi_M\colon M_F \times A_F \to M_F \\ \varphi_M\colon (m, x) \mapsto \overline{m}_s(x) \end{cases}$$

билинейно. Кроме того, A_F — кольцо относительно операции $\varphi_A\colon A_F \times A_F \to A_F$. При этом отображение φ_M превращает группу M_F в правый A_F-модуль. Наконец, если I — правый идеал кольца A, то I_F можно считать правым идеалом кольца A_F.

16.5. Определение и лемма. *Пусть F — радикальный фильтр кольца A и $\mathscr{S}(F)$ — соответствующая ему локализующая подкатегория. Пусть, далее, T: mod-$A \rightsquigarrow$ mod-$A/\mathscr{S}(F)$ — канонический функтор, а S': mod-$A/\mathscr{S}(F) \rightsquigarrow$ mod-A_F — функтор, индуцированный локализующим функтором. Тогда, если через ρ обозначить функтор* mod-$A_F \rightsquigarrow$ mod-A, *индуцированный гомоморфизмом колец $A \to A_F$, то функтор $\rho \circ S'$ сопряжен справа к T.*

Для каждых $M \in$ mod-A и $N \in$ mod-A_F отображение

$$\rho(N, M_F)\colon \operatorname{Hom}_{A_F}(N, M_F) \to \operatorname{Hom}_A(\rho N, \rho M_F)$$

биективно.

Доказательство. Все утверждения, кроме последнего, очевидны. Далее, каждый A_F-гомоморфизм $N \to M_F$ является A-гомоморфизмом, так что отображение $\rho(N, M_F)$ инъективно. Если $f\colon N \to M_F$ есть A-гомоморфизм, то для фиксированного $x \in N$ отображение $g\colon a \mapsto f(xa)$ для всех $a \in A_F$ является A-гомоморфизмом и таково же отображение $h\colon a \mapsto f(x)\, a$. Поскольку $gu_A = hu_A$, то $g = h$ (см. 15.12). Это доказывает, что $\rho(N, M_F)$ — наложение. □

16.6. Предложение. *Предположим, что условия леммы выполнены. Тогда множество F' правых идеалов I кольца A_F, таких, что $\rho(A_F/I)$ — F-периодический модуль, является радикальным фильтром кольца A_F; другими словами, $\mathscr{S}(F')$ — локализующая подкатегория категории* mod-A_F. *Пусть T :* mod-$A_F \rightsquigarrow$ mod-$A_F/\mathscr{S}(F')$ — *канонический функтор.*

16.6.1. *Функтор $T\circ\rho$ индуцирует эквивалентность*

$$\text{mod-}A_F/\mathscr{S}(F') \rightsquigarrow \text{mod-}A/\mathscr{S}(F).$$

16.6.2. *A_F-модуль N $\mathscr{S}(F')$-замкнут [соотв. $\mathscr{S}(F')$-замкнут и инъективен] тогда и только тогда, когда ρN $\mathscr{S}(F)$-замкнут [соотв. $\mathscr{S}(F)$-замкнут и инъективен].*

Доказательство. Пусть $B = \text{mod-}A/\mathscr{S}(F)$. Если $M \in \text{Obj } B$, $N \in \text{mod-}A_F$, то из сопряженности функторов $\rho \circ S'$ и T вытекает изоморфизм

$$\text{Mor}_B(T\rho N, M) \approx \text{Hom}_A(\rho N, \rho S' M),$$

который в силу леммы дает

$$\text{Mor}_B(T\rho N, M) = \text{Hom}_{A_F}(N, S'M).$$

Таким образом, $T\rho$ сопряжен слева к S'. Поэтому указанная эквивалентность категорий действительно имеет место в силу 15.18. В свою очередь 16.6.2 вытекает из 16.6.1 и 15.15. □

16.7A. Предложение. *Если F — радикальный фильтр кольца A, то локализующий функтор, определенный фильтром F или, что эквивалентно, локализующей подкатегорией $\mathscr{S}(F)$, естественно изоморфен функтору, определенному по правилу*

$$M \mapsto \varinjlim_{I \in F} \text{Hom}_A(I, M/\mathscr{S}(F)M).$$

Доказательство. Отождествим изоморфные A-модули $\rho(M_F)$ и $\text{Hom}_A(A, M_F)$. По доказательству предыдущего предложения [1])

$$\text{Hom}_A(A, M_F) \approx \text{Hom}_{\text{mod-}A/\mathscr{S}(F)}(A, M) = \varinjlim_{I \in F} \text{Hom}_A(I, M/\mathscr{S}(F)M).$$

Прямой предел можно выбрать таким образом, чтобы этот изоморфизм являлся изоморфизмом A-модулей. □

16.7B. Следствие. *Пусть F — радикальный фильтр кольца A, содержащий кофинальное [2]) подмножество G, состоящее из конечно порожденных идеалов, и пусть локализующий функтор, определенный фильтром F, точен. Тогда локализующий функтор естественно изоморфен функтору $\otimes_A A_F$ и индуцирует эквивалентность категорий*

$$(\text{mod-}A)/\mathscr{S}(F) \rightsquigarrow \text{mod-}A_F.$$

Доказательство. Следующие функторы сохраняют копроизведения:

(1) $M \mapsto \mathscr{S}(F)M$,

(2) $M \mapsto M/\mathscr{S}(F)M$,

[1]) Точнее в силу сопряженности функторов T и $\rho \cdot S'$.— *Прим. перев.*

[2]) См. пример 2 на стр. 304.— *Прим. перев.*

(3) $\text{Hom}_A(N, \ )$ для всех конечно порожденных $N \in \text{mod-}A$. (См. 4.25D.)

Таким образом, локализующий функтор индуцирует функтор

$$H \begin{cases} \text{mod-}A \rightsquigarrow \text{mod-}A_F \\ M \mapsto \varinjlim_{I \in G} \text{Hom}_A(I, M/\mathscr{S}(F)M), \end{cases}$$

перестановочный с копроизведениями и непрерывный справа [1]). Используя 5.54 и 5.56 (а также 12.9.4), получаем, что $H \approx \otimes_A A_F$.

Для доказательства второго утверждения положим $\mathscr{B} = \text{mod-}A/\mathscr{S}(F)$. Пусть T: $\text{mod-}A \rightsquigarrow \mathscr{B}$ — канонический функтор, а S — правый сопряженный функтора T. Поскольку

$$\text{Mor}_{\mathscr{B}}(A_F, \ ) \approx \text{Hom}_A(A, S(\ )),$$

из точности функтора S вытекает проективность объекта A_F в категории $\mathscr{B}$. Так как S перестановочен с копроизведениями, то этим же свойством обладает функтор $\text{Mor}_{\mathscr{B}}(A_F, \ )$ и, следовательно, A_F — малый объект категории $\mathscr{B}$ (см. 4.25D). Так как $\text{End}_{\mathscr{B}}(A_F) \approx A_F$ [2]), то $\text{Mor}_{\mathscr{B}}(A_F, \ )$ индуцирует эквивалентность категорий $\mathscr{B} \rightsquigarrow \text{mod-}A_F$ в силу 4.29. □

Теория кручений

Теперь мы, следуя описанию кручений в модулях, предложенному Ламбеком [71b], дадим краткий обзор (и обобщение) теории кручений, развитой Диксоном [66] и др.

Радикалом [3]) в абелевой категории $\mathscr{A}$ называется функция T, определенная на объектах категории $\mathscr{A}$, такая, что выполнены следующие условия:

R.1. $T(M) \subseteq M$,

R.2. если f: $M \to N$, то $f(T(M)) \subseteq TN$,

R.3. $T(M/T(M)) = 0$.

Радикал T называется **идемпотентным**, если T — идемпотентная функция, т. е. $T(T(M)) = M$ для всех объектов M категории $\mathscr{A}$. Например, для любого кольца R функция, сопоставляющая каждому R-модулю M его радикал $\text{rad } M$, а именно пересечение всех максимальных подмодулей модуля M, является радикалом

[1]) Это следует из точности локализующего функтора и того, что H перестановочен с копроизведениями.— *Прим. перев.*

[2]) И $A_F \approx TA$ — образующий категории $\mathscr{B}$.— *Прим. перев.*

[3]) В русской литературе (см., например, А. П. Мишина и Л. А. Скорняков [69]) под радикалом обычно понимают идемпотентный радикал (см. ниже).— *Прим. перев.*

в mod-R, но редко оказывается идемпотентным радикалом. (Тем не менее это так для важного класса колец — V-колец (см. 7.32A), хотя в этом случае он является нулевой функцией.) Однако если C — любая локализующая подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$, то существует идемпотентный радикал, который сопоставляет объекту M подобъект CM (определенный в 16.1.1). Примерами таких подкатегорий являются подкатегория лоевых [1]) модулей (над любым кольцом) и подкатегория периодических модулей над коммутативными областями целостности. (Полная аналогия с периодическими модулями проясняется в 16.8B.)

Используя сокращение (X, Y) для обозначения $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, определим для любого класса B категории $\mathcal{A}$ класс

$$B^{\perp} = \{Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A} \mid (X, Y) = 0 \text{ для всех } X \in B\}.$$

Симметрично определяется для любого подкласса C категории $\mathcal{A}$ класс ${}^{\perp}C$. Кроме того, в предположении, что в категории $\mathcal{A}$ существуют инъективные объекты, положим

$$B^{R} = \{Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A} \mid (X, \hat{Y}) = 0 \text{ для всех } X \in B\},$$

где $\hat{Y}$ обозначает инъективную оболочку объекта Y. Для любого подкласса C категории $\mathcal{A}$ положим

$$C^{L} = \{X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{A} \mid (X, \hat{Y}) = 0 \text{ для всех } Y \in C\}.$$

Говорят, что непустой подкласс B категории $\mathcal{A}$ является **слабым классом Серра или слабой подкатегорией Серра** [2]), если выполнена первая часть условия из определения класса Серра, а именно: если $0 \to X \to M \to Y \to 0$ — точная последовательность в $\mathcal{A}$ и X и Y принадлежат B, то $M \in B$.

16.8A. Предложение. *Если B и C — полные подкатегории категории Гротендика $\mathcal{A}$, то следующие условия эквивалентны:*

PTF.1. $B = {}^{\perp}C$ *и* $C = B^{\perp}$.

PTF.2. B *— слабый класс Серра, содержащий факторобъекты объектов из B и копроизведения любых семейств объектов из B, и* $C = B^{\perp}$.

PTF.3. C *— слабый класс Серра, содержащий подобъекты объектов из C и произведения любых семейств объектов из C, и* $B = {}^{\perp}C$.

---

[1]) То есть модулей, любой ненулевой фактормодуль которых содержит простой подмодуль.— *Прим. перев.*

[2]) Ламбек [71] использует термин «класс, замкнутый относительно групповых расширений».

PTF. 4. *B категории $\mathcal{A}$ существует идемпотентный радикал T, такой, что*

$$B = \{X \mid T(X) = X\} \text{ и } C = \{Y \mid T(Y) = 0\}.$$

Если эти условия выполнены, то C является корефлективной T, а B — рефлективной подкатегориями категории $\mathcal{A}$ и левый сопряженный к функтору естественного вложения $C \rightsquigarrow \mathcal{A}$ переводит каждый объект X в $X/T(X)$.

Доказательство. Импликация PTF.1 $\Rightarrow$ PTF.3 — следствие утверждения 5.41 и того, что функтор h^{X} при любом X сохраняет пределы. Двойственно доказывается импликация PTF.1 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ PTF.2. Для того чтобы показать справедливость импликации PTF.2 $\Rightarrow$ PTF.4, достаточно положить $T(M)$ равным сумме всех подобъектов объекта M, принадлежащих B. Двойственным образом доказывается импликация PTF.3 $\Rightarrow$ PTF.4 [1]). Если выполнено условие PTF.4, то для любого морфизма $f\colon X \to Y$, где $X \in B$ и $Y \in C$, справедливо $f(T(X)) = f(X) = 0$. Таким образом, ${}^{\perp}C \supseteq B$ и $B^{\perp} \supseteq C$. Если $X \in {}^{\perp}C$, то, поскольку $X/TX \in C$, мы получаем, что $(X, X/TX) = 0$, откуда $X = T(X) \in B$. Итак, $B = {}^{\perp}C$ и двойственным образом, $C = B^{\perp}$. Поэтому условие PTF.1 справедливо, чем завершается доказательство эквивалентности условий PTF.1 — PTF.4. Кроме того, поскольку $(TX, Y) = 0$, из точности слева функтора $(\ , Y)$ вытекает

$$(X/T(X), Y) = (X, Y)$$

для любой пары $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in C$. Итак, функтор естественного включения $C \rightsquigarrow \mathcal{A}$ обладает указанным в условии левым сопряженным. Поэтому подкатегория C корефлективна (см. гл. 14, стр. 606; ср. также 5.51).

Упорядоченная пара (B, C), удовлетворяющая условиям предложения 16.18A, называется **предкручением**. В дополнение к уже приводившимся примерам хорошо известными примерами предкручений в категории абелевых групп являются упорядоченные пары (периодические, без кручения) и (делимые, редуцированные), где под редуцированной понимается группа, не содержащая ненулевых делимых подгрупп. Ясно, что любой подкласс A категории $\mathcal{A}$ определяет предкручение $({}^{\perp}(A^{\perp}), A^{\perp})$, называемое **предкручением, порожденным классом** A.

16.8B. Предложение и определение. *Упорядоченная пара (B, C) полных подкатегорий категории Гротендика $\mathcal{A}$ называется* ***кручением****, если выполнены следующие эквивалентные условия:*

---

[1]) В этом случае $T(M)$ полагается равным пересечению всех таких подобъектов X объекта M, для которых $M/X \in C$.— *Прим. перев.*

TF.1. $B = C^L$ *и* $C = B^R$.

TF.2. B *— локализующая подкатегория и* $C = B^{\perp}$.

TF.3. C *— слабый класс Серра, содержащий инъективные оболочки объектов из* C *и произведения любых семейств объектов из* C *и удовлетворяющий условию* $B = {}^{\perp}C$.

TF.4. *В категории* $\mathcal{A}$ *существует радикал* T, *такой, что* $B = \{M \mid T(M) = M\}$, $C = \{M \mid T(M) = 0\}$ *и, более того,* $M \cap T(N) = T(M)$, *если* $M \subseteq N$.

Кроме того, если $\mathcal{A} = \text{mod-}R$ *для некоторого кольца* R, *то эти условия эквивалентны условию*

TF.5. *Существует радикальный фильтр* F *кольца* R, *такой, что* $B = \mathcal{S}(F)$.

Доказательство. Сделаем несколько предварительных замечаний:

(1) TF.1 $\Rightarrow$ $(B = {}^{\perp}C)$.

(2) TF.2 = (PTF.2 и (2′)), где (2′): класс B замкнут относительно подобъектов.

(3) TF.3 = (PTF.3 и (3′)), где (3′): класс C замкнут относительно инъективных оболочек.

(4) TF.4 = (PTF.4 и (4′)), где (4′): $T(M) = T(N) \cap M$ для всех подобъектов M любого объекта N.

(5) TF.5 эквивалентно TF.2 в силу 16.3.3.

Импликация (1) справедлива, поскольку из TF.1 вытекает, что подкатегория $C = B^R$ замкнута относительно инъективных оболочек. Из эквивалентности условий PTF.2 — PTF.4 сразу следует эквивалентность условий TF.2 — TF.4, т. е. условий (2) — (4). Например, импликация (2) $\Rightarrow$ (4) справедлива, поскольку при выполнении PTF.4 из 15.19 получаем, что $T(Y)$ для любого объекта Y является наибольшим его подобъектом, принадлежащим B. Таким образом, если $M \subseteq N$, то $T(M) \subseteq T(N)$ по R.2 (и поэтому $T(M) \subseteq M \cap T(N)$), тогда как обратное включение вытекает из того, что $M \cap T(N)$, являясь подобъектом объекта $T(N)$, принадлежит в силу (2′) подкатегории B и, следовательно, лежит в $T(M)$.

Так же просто доказываются и другие импликации. Докажем, например, импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Мы можем предположить, что TF.4 справедливо. Если $Y \in C$, то $\hat{Y} \in C$, поскольку $T(\hat{Y}) \cap Y = T(Y) = 0$, откуда $T(\hat{Y}) = 0$. Поскольку, таким образом, C замкнута относительно инъективных оболочек (между прочим это доказывает импликацию TF.4 $\Rightarrow$ TF.3), то $B^R \supseteq C$, а обратное включение вытекает из левой точности функтора h^X, а именно если $h^X(Y) = 0$, то $h^X(\hat{Y}) = 0$. Итак, $B^R = C$. Тогда, как уже было отмечено, $C^L = {}^{\perp}C$. Теперь $B = {}^{\perp}C$, ввиду PTF.3, и мы получаем, что $B = C^L$.

По 16.8A подкатегория C корефлективна, и так как естественное вложение $C \rightsquigarrow \mathcal{A}$ сохраняет инъективность, то корефлектор подкатегории C точен. (См. 6.28.) □

В условиях предложения 16.8B, так же, как и в 15.19C, объекты подкатегории B называются **периодическими**, объекты подкатегории C — **полупростыми** либо **объектами без кручения**, а объект $T(M)$ — **периодической частью** объекта M. Радикал T, удовлетворяющий условию TF.4, называется **кручением** [1]) или **наследственным радикалом**. Кроме того, говорят, что объект M **делим** (относительно кручения), если $\hat{M}/M$ — полупростой объект. По 15.19C делимость полупростого объекта M равносильна его $\mathcal{S}$-замкнутости. Поэтому впредь для категории mod-R мы будем пользоваться термином «делимый», который более соответствует интуиции, чем «$\mathcal{S}$-замкнутый». (Отметим, что тем не менее для кручения, порожденного нулем, каждый объект «делим».) Кроме того, мы будем говорить о **делимой оболочке** вместо $\mathcal{S}$-оболочки.

Переформулируем в этой терминологии следствие 15.29.

16.8C. Предложение. *Категория* C *эквивалентна полной подкатегории полупростых делимых модулей относительно некоторого кручения в некоторой категории модульного типа тогда и только тогда, когда* C *— категория Гротендика.* □

Если радикальный фильтр F данного кручения состоит из правых **плотных** идеалов I, т. е. таких идеалов, что R является рациональным расширением идеала I, то делимая оболочка модуля M есть не что иное, как его максимальное рациональное расширение. Если, с другой стороны, F содержит каждый существенный правый идеал, то полупростой модуль M делим тогда и только тогда, когда M инъективен, т. е. $M = \hat{M}$. (См. упр. к гл. 16.)

Мультипликативные множества

Пусть S — подмножество кольца A. Тогда S называется **мультипликативным**, если $ab \in S$ для всех $a \in S$, $b \in S$. В этом случае множество

$$F_S = \{I \subseteq A \mid \forall a \in A \exists x \in S\ (as \in I)\}$$

правых идеалов кольца A является радикальным фильтром. Таким образом, A-модуль M является F_S-периодическим тогда и только

[1]) Напомним, что упорядоченная пара (B, C), удовлетворяющая TF.1, также называется кручением.— *Прим. перев.*

тогда, когда каждый $m \in M$ аннулируется некоторым элементом $s \in S$. Если $I \in F_S$, то $I \cap S \neq 0$, т. е. I содержит элемент из S. (В 16.9 обратное условие обозначено через $S.1$.)

Определение. Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и S — мультипликативное множество кольца A. Тогда B называется **правым кольцом частных кольца A относительно S**, если выполнены следующие условия:

Q.1. $\ker \varphi$ является F_S-периодическим или, эквивалентно,

$$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \exists s \in S\ (as = 0)$$

Q.2. $\varphi(S)$ состоит из обратимых элементов кольца B.

Q.3. $B = \{\varphi(a)\,\varphi(s)^{-1} \mid a \in A,\ s \in S\}$.

Для правого кольца частных будет использоваться обозначение (B, φ).

Таким образом, если S — множество регулярных элементов кольца A, то (B, φ) — классическое правое кольцо частных кольца A, рассматривавшееся в гл. 9. Для любого $M \in \mathrm{mod}\text{-}A$ обозначим M_{F_S} (см. 16.4) через M_S.

16.9. Предложение. *Пусть A — кольцо и S — мультипликативное подмножество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *A имеет правое кольцо частных относительно S.*

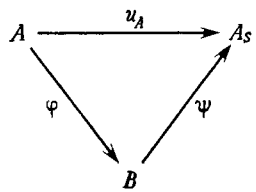
(b) *S удовлетворяет следующим двум условиям:*

S.1. $\forall s \in S,\ \forall a \in A,\ \exists t \in S,\ \exists b \in A\ (at = sb)$;

S.2. $a \in A,\ s \in S\ \&\ sa = 0 \Rightarrow \exists t \in S\ (at = 0)$.

(c) *Если $u_A\colon A \to A_S$ — канонический гомоморфизм колец (напомним, что $A_S = A_{F_S}$), то $u_A(S)$ состоит из обратимых элементов кольца A_S.*

Если эти условия выполнены и (B, φ) — правое кольцо частных кольца A относительно S, то существует единственный кольцевой изоморфизм $\psi\colon B \to A_S$, такой, что треугольник



коммутативен. В этом случае локализующий функтор $M \mapsto M_S$ точен и естественно эквивалентен функтору $\otimes_A A_S$.

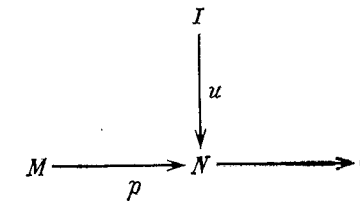
Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Для проверки справедливости условия S.2 положим $sa = 0$. Тогда $\varphi(s)\,\varphi(a) = 0$, откуда $\varphi(a) = 0$. Поэтому $at = 0$ для некоторого $t \in S$ по свойству Q.1.

Для проверки условия S.1 запишем

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(a) = \varphi(c)\,\varphi(r)^{-1}$$

для подходящих $r \in S$, $c \in A$. Тогда $\varphi(a)\,\varphi(r) = \varphi(s)\,\varphi(c)$, откуда $ar - sc \in \ker \varphi$, и, следовательно, по Q.1 существует $u \in S$, такой, что $aru - scu = 0$. Теперь $t = ru$, $b = cu$ удовлетворяют S.1.

(b) $\Rightarrow$ (c). Покажем сначала, что локализующий функтор точен [1]). Пусть



— диаграмма с точной строкой и такая, что $I \in F_S$, а M и $\ker p$ F_S-замкнуты.

Достаточно показать, что I содержит правый идеал $J \in F_S$, такой, что $u \mid J = p \circ v$, где $v\colon J \to M$ [2]). Если $s \in I \cap S$, то $u(s) = p(m)$ для некоторого $m \in M$. Кроме того, ввиду S.2, $sa = 0$ влечет за собой $ma = 0$, следовательно, $J = sA$ и отображение $v\colon sa \mapsto ma$ обладает требуемыми свойствами.

Если $t \in S$ и $t_s\colon a \mapsto ta$ — гомотетия, то $\mathrm{coker}\ t_s$ F_S-периодичен, поэтому $\overline{t_s}\colon A_S \to A_S$ — эпиморфизм [3]), т. е. $u_A(t)$ обратим справа. Пусть t' — такой элемент, что $u_A(t) \cdot t' = 1$. Тогда

$$u_A(t)\,(t' u_A(t) - 1) = 0.$$

Поскольку $u_A(t)$ не является делителем нуля в A_S, то $t' u_A(t) = 1$ и, таким образом, $u_A(t)$ — обратимый элемент в A_S.

---

[1]) По 16.7В отсюда с учетом того, что F_S (по условию S.2) содержит кофинальное подмножество главных правых идеалов sA, $s \in S$, следует, что локализующий функтор естественно эквивалентен функтору $\otimes_A A_S$. — *Прим. перев.*

[2]) Действительно, это означает, что p индуцирует эпиморфизм $M_S = \varinjlim_{I \in F_S} \mathrm{Hom}_A(I, M/\mathscr{S}(F_S)\,M) \to \varinjlim_{I \in F_S} \mathrm{Hom}_A(I, N/\mathscr{S}(F_S)\,N) = N_S$, откуда, поскольку $M_S \approx M$, следует, что $u_N\colon N \to N_S$ — эпиморфизм. Из F_S-замкнутости модуля $\ker p$ вытекает, что $u_N\colon N \to N_S$ — изоморфизм, т. е. N F_S-замкнут. Теперь применение предложения 15.20 показывает, что локализующий функтор точен. — *Прим. перев.*

[3]) На самом деле $\overline{t_s}$ — изоморфизм, поскольку $\ker t_s$ F_S-периодичен по S.2. Отсюда сразу следует, что $u_A(t)$ — обратимый элемент кольца A_S. — *Прим. перев.*

(c) $\Rightarrow$ (a). Кольцо (A_S, u_A) является правым кольцом частных кольца A относительно S, и оно единственно в смысле коммутативности соответствующей треугольной диаграммы. □

16.10. Упражнение.

16.10.1. Показать, что условия S.1 и S.2 выполняются, если $S \subseteq \mathscr{C}(A)$.

16.10.2. Если кольцо A коммутативно и F — радикальный фильтр, то кольцо A_F также коммутативно и отображение

$$P \mapsto P_F$$

множества простых идеалов P кольца A, не принадлежащих F, на множество простых идеалов кольца A_F, не принадлежащих F' [1]), биективно (ср. 27.4).

Пусть M и N — правые A-модули. Напомним обозначения из гл. 4: $M \rhd N$ означает, что N — существенный подмодуль модуля M. Кроме того,

$$\operatorname{sing} A = \{a \in A \mid A \rhd \operatorname{ann}_A a\}$$

обозначает идеал кольца A (9.6). Далее, (loc. cit.) кольцо A называется **антисингулярным справа**, если $\operatorname{sing} A = 0$.

16.11. Упражнение. Если $\operatorname{sing} A = 0$, то $F = \{I \subseteq A \mid A \rhd I\}$ — радикальный фильтр.

16.12. Теорема и определение. *Пусть A — антисингулярное справа кольцо и $F = \{I \subseteq A \mid A \rhd I\}$ — радикальный фильтр. Тогда кольцо A_F регулярно, самоинъективно справа и является инъективной оболочкой правого A-модуля A. Кольцо A_F называется* ***максимальным правым кольцом частных в смысле Джонсона кольца*** *A и обозначается через $\hat{A}$.*

Доказательство (Габриель [62]). (a) Докажем сначала, что A_F — инъективный A-модуль. Пусть $f\colon I \to A_F$ — гомоморфизм A-модулей, причем I — правый идеал кольца A, и пусть J — дополнительный правый идеал для правого идеала I. Тогда $I + J \approx I \oplus J$, так что f можно продолжить до $f\colon I + J \to A_F$. Поскольку $I + J \in F$, то $\overline{f}$ можно продолжить до гомоморфизма $A \to A_F$. Поэтому A-модуль A_F инъективен. Так как $A_F \rhd A$, то A_F — инъективная оболочка A-модуля A.

Чтобы доказать, что A_F регулярно, докажем сначала справедливость такого свойства: (b) каждый $\mathscr{S}(F)$-замкнутый A-модуль $M \subseteq A_F$ является A_F-прямым слагаемым модуля A_F. Действительно, если A-модуль N — дополнительный подмодуль модуля $M \cap A$ в A, то $M \cap A + N \in F$ и поэтому $A_F/(M + N)$ F_S-периодичен.

[1]) См. обозначение предложения 16.6.— *Прим. перев.*

Тогда вложение $M + N \to A_F$ является $\mathscr{S}(F)$-оболочкой модуля $M + N$. Таким образом,

$$A_F = (M + N)_F \approx M_F \oplus N_F = M \oplus N_F.$$

Докажем теперь, что кольцо A_F регулярно, т. е. что каждый главный правый идеал aA_F порождается идемпотентом. Отображение

$$\begin{cases} A_F \longrightarrow \operatorname{End} A_F \\ f \longmapsto f_s, \end{cases}$$

(где f_s — левая гомотетия кольца A_F, определенная элементом $f \in A_F$) является гомоморфизмом колец. Так как A_F есть F-замкнутый A-модуль, то таков же и $\ker f_s$. Поэтому в силу (b) $\ker f_s$ — прямое слагаемое правого A_F-модуля. Прямое дополнение M модуля $\ker f_s$ в A_F инъективно по (a), в силу чего f_s индуцирует изоморфизм модуля M на прямое слагаемое правого A_F-модуля. Отсюда вытекает, что aA_F — прямое слагаемое в A_F и, следовательно, порождается идемпотентом. Тем самым доказана регулярность кольца A_F. Кроме того, по 16.6.2 A_F — инъективный A_F-модуль. □

16.13. Упражнение.

16.13.1. Если A — область целостности или простое кольцо, то $\operatorname{sing} A = 0$ и $\hat{A}$ — простое кольцо.

16.13.2. Если $\operatorname{sing} A = 0$, то $\operatorname{sing} \hat{A} = 0$.

16.13.3. Если $\operatorname{sing} A = 0$, то кольцо $\hat{A}$ классически полупросто тогда и только тогда, когда A удовлетворяет условию максимальности для прямых сумм правых идеалов.

16.13.4. Если A полупервично и удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных правых идеалов, то $\operatorname{sing} A = 0$.

16.14. Теорема. (Ср. 9.9.) *Если A — полупервичное кольцо, удовлетворяющее условиям максимальности для прямых сумм правых идеалов и для аннуляторных правых идеалов, то кольцо $\hat{A}$ классически полупросто и является правым кольцом частных кольца A.*

Доказательство (Габриель [62]). Классическая полупростота кольца $\hat{A}$ вытекает из упражнения 16.13. Мы предоставляем читателю проверить, что (A_F, u_A) — правое кольцо частных кольца A относительно множества S неделителей нуля кольца A, используя следующие указания. Если $t \in S$, то $t_s\colon A \to A$, а с ним и $u_A t_s\colon A \to A_F$ — мономорфизмы. Поскольку последний из них может быть продолжен до автоморфизма кольца A_F, этим доказывается обратимость t в A_F. По 16.12 нам остается только показать,

что идеал I является существенным тогда и только тогда, когда I пересекается с S. Читатель может проверить это в качестве упражнения или обратиться к доказательству 9.9. □

16.15. Предложение. *Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с семейством образующих и точными прямыми пределами. Пусть $C = \mathcal{C}(\mathcal{A})$ (кольцо, состоящее из всех естественных преобразований $1_{\mathcal{A}} \rightsquigarrow 1_{\mathcal{A}}$), P — мультипликативное подмножество элементов кольца C и $\mathcal{A}_P$ — полная подкатегория категории $\mathcal{A}$, состоящая из всех объектов M, представимых как сумма таких своих подобъектов N, что $s(N) = 0$ для некоторого $s \in P$.*

(a) *Тогда $\mathcal{A}_P$ — локализующая подкатегория категории $\mathcal{A}$.*

(b) *Объект M категории $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}_P$-замкнут тогда и только тогда, когда $s(M)$ — автоморфизм объекта M для всех $s \in P$.*

Доказательство. (a) очевидно. (См. 15.11.)

(b) Пусть M — некоторый $\mathcal{A}_P$-замкнутый объект. Тогда из определения ясно, что $s(M)$ — мономорфизм. Поэтому $\operatorname{im} s(M)$ также $\mathcal{A}_P$-замкнут, и отсюда в силу 15.12 (b) подобъект $\operatorname{im} s(M)$ выделяется в M прямым слагаемым. Поскольку $\operatorname{coker} s(M)$ принадлежит $\mathcal{A}_P$, то $\operatorname{coker} s(M) = 0$. Таким образом, $\operatorname{im} s(M) = M$ и $s(M)$ — автоморфизм.

Обратно, если $s(M)$ — автоморфизм для всех s, то 0 — единственный подобъект объекта M, принадлежащий $\mathcal{A}_P$. Пусть $j_M\colon M \to M_P$ — $\mathcal{A}_P$-оболочка объекта M, и предположим, что N — подобъект объекта M_P, содержащий M и такой, что $\operatorname{im} s(N) \subseteq M$ для некоторого $s \in P$. Если $i\colon M \to N$ — включение, то $1_M = s(M)^{-1} \circ s(N) \circ i$, так что морфизм $i\colon M \to N$ расщепляется. Поэтому $M = N$, откуда $M = M_P$. □

16.16. Следствие. *Локализующий функтор $M \rightsquigarrow M_P$ точен.*

Доказательство. *Воспользоваться* 15.20. □

Кольца эндоморфизмов собственных образующих

16.17. Определение (К. и Э. Уокеры [65]). Образующий U абелевой категории C называется **собственным**, если для каждого подобъекта V объекта U отображение h_U

$$\operatorname{Mor}_C(V, U) \leftarrow \operatorname{Mor}_C(U, U),$$

индуцированное включением $V \to U$, биективно тогда и только тогда, когда $V = U$.

16.18. Пример. Если G — образующий и C — кообразующий, то $U = G \coprod C$ — собственный образующий, поскольку для каждого подобъекта $V \neq U$ существует морфизм $f\colon U/V \to U$, такой, что композиция его с каноническим морфизмом $q\colon U \to U/V$ не равна нулю. С другой стороны, если $k\colon V \to U$ — включение, то $h_U(k)(fq) = 0$ и, таким образом, $h_U(k)$ не биективно.

16.19. Упражнение.

16.19.1. Любая область главных правых идеалов A является собственным образующим категории $\operatorname{mod}\text{-}A$.

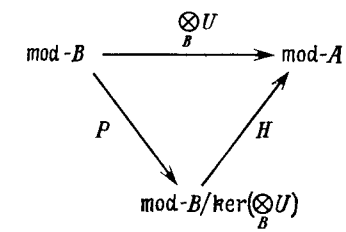
*16.19.2 (Уокеры (loc.cit., стр. 419). Образующий G в категории абелевых p-групп, где p — простое число, является собственным, если G содержит ненулевую делимую подгруппу, либо является прямой суммой циклических подгрупп.

16.20. Теорема (К. и Э. Уокеры [65]). *Пусть A и R — кольца, U — собственный образующий категории $\operatorname{mod}\text{-}A$, а V — собственный образующий категории $\operatorname{mod}\text{-}R$. Если существует кольцевой изоморфизм $\varphi\colon \operatorname{End} U_A \to \operatorname{End} V_R$, то имеет место категорная эквивалентность $F\colon \operatorname{mod}\text{-}A \rightsquigarrow \operatorname{mod}\text{-}R$, такая, что $FU = V$ и F индуцирует φ.*

Доказательство (Уокеры). Пусть $B = \operatorname{End} U_A$. Поскольку U — образующий в $\operatorname{mod}\text{-}A$, то по 15.26 функтор $T = \operatorname{Hom}_A(U, \ )$ обладает левым сопряженным

$$\underset{B}{\otimes} U\colon \operatorname{mod}\text{-}B \rightsquigarrow \operatorname{mod}\text{-}A,$$

для которого имеет место коммутативная диаграмма



где H — эквивалентность категорий, а P — канонический функтор. Пусть $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}(\ker(\underset{B}{\otimes} U))$ — радикальный фильтр правых идеалов кольца B, определенный локализующей подкатегорией $\ker(\underset{B}{\otimes} U)$. Таким образом, по 16.3

$$I \in \mathcal{F}_U \Leftrightarrow (B/I) \underset{B}{\otimes} U = 0.$$

Так как функтор $\underset{B}{\otimes} U$ точен, то точна последовательность

$$0 \to I \underset{B}{\otimes} U \to B \underset{B}{\otimes} U \to (B/I) \underset{B}{\otimes} U \to 0,$$

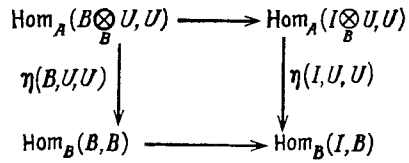
откуда

$$(B/I) \underset{B}{\otimes} U = 0 \Leftrightarrow I \underset{B}{\otimes} U = B \underset{B}{\otimes} U.$$

Учитывая теперь, что $B \underset{B}{\otimes} U \approx U$ — собственный образующий категории mod-A, получаем, что последнее условие равносильно биективности отображения, индуцированного функтором

$$\mathrm{Hom}_A (B \otimes U, U) \to \mathrm{Hom}_A (I \otimes U, U).$$

Наконец, по ассоциативности сопряженности (11.4) коммутативен квадрат



откуда вытекает эквивалентность следующих условий на правый идеал I кольца B:

(a) $I \in \mathscr{F}_U$;

(b) отображение $\mathrm{Hom}_B (B, B) \to \mathrm{Hom}_B (I, B)$, индуцированное функтором h_B, биективно. Итак, радикальный фильтр $\mathscr{F} = \mathscr{F} (\ker (\underset{B}{\otimes} U))$ полностью определяется кольцом $B = \mathrm{End}\, U_A$. Отождествляя B с $\mathrm{End}\, V_R$, мы видим, что $\mathscr{F}_U = \mathscr{F}_V$. Следовательно,

$$K = \ker (\underset{B}{\otimes} U) = \mathscr{S} (\mathscr{F}_U) = \mathscr{S} (\mathscr{F}_V) = \ker (\underset{B}{\otimes} V)$$

и

$$\text{mod-}A \approx \text{mod-}B/K \approx \text{mod-}R.$$

Первая эквивалентность равна H^{-1}, а вторая индуцирована функтором $\underset{B}{\otimes} V$ (обозначим ее через H'). Тогда $F = H' \cdot H^{-1}$ — искомая эквивалентность. □

Упражнения к гл. 16

Большинство следующих упражнений заимствовано из работ Ламбека [71] и [72].

1. Кручения можно упорядочить по правилу $(B, C) \leqslant (B', C')$, если $B \subseteq B'$ или, эквивалентно, $C' \subseteq C$.

1.1. Если дан класс A модулей, то $(A^L, A^{LR} = A^{L\perp})$ является наибольшим кручением, относительно которого все модули из A полупросты. Двойственно, (A^{RL}, A^R) является наименьшим кручением, относительно которого все модули из A периодичны.

1.2. Множество плотных правых идеалов кольца R является радикальным фильтром F, и соответствующее ему по 16.18B кручение есть наибольшее из кручений, для которых модуль R полупрост. Для любого модуля M его $\mathscr{S}(F)$-оболочка совпадает с максимальным рациональным расширением модуля M.

1.3. Показать, что для любого кручения существует R-модуль M, такой, что это кручение является наибольшим среди кручений, относительно которых M полупрост. Если I — инъективная оболочка модуля M, то модуль X периодичен в том и только том случае, если $\mathrm{Hom}_R (X, I) = 0$.

1.4. Любое кручение имеет вид (A^{RL}, A^R), где A — множество циклических периодических модулей. (Другими словами, любое кручение порождается циклическими модулями.)

1.5. Любое кручение имеет вид (A^L, A^{LR}), где A — множество инъективных оболочек циклических модулей без кручения.

2.1. Существует взаимно однозначное соответствие между кручениями и полными подкатегориями категории mod-R, обладающими точными корефлекторами: каждому кручению соответствует категория делимых модулей без кручения.

2.2. Пусть A — полная подкатегория делимых модулей без кручения относительно кручения (B, C) в mod-R и Q — корефлектор подкатегории A (Q является произведением левых сопряженных к естественным вложениям $A \rightsquigarrow C$ и $C \rightsquigarrow \text{mod-}R$). Тогда если делимую оболочку модуля X обозначить через $D(X)$, то

$$Q(M) = D(M/T(M))$$

для всех $M \in \text{mod-}R$ и $Q(M)$ называется **модулем частных модуля** M. Более того, $Q(R)$ — кольцо, называемое **кольцом частных кольца** R относительно кручения (B, C).

2.3. Пусть F — радикальный фильтр, соответствующий кручению (B, C). Для каждого F-полупростого правого R-модуля M положим (как и в 15.3)

$$L(M) = \varinjlim_{I \in F} \mathrm{Hom}_R (I, M).$$

Тогда L — функтор из C в mod-R и для каждого правого R-модуля M

$$Q(M) \approx L(M/T(M)).$$

Показать, что функтор включения $A \rightsquigarrow C$ обладает левым сопряженным D, который каждому полупростому модулю сопоставляет его делимую оболочку.

2.4 (Габриель [62, стр. 376], Голдман [69]). Пусть, как и в упражнении 2.2, A — категория полупростых делимых R-модулей. Вложение $A \rightsquigarrow \text{mod-}R$ — точный функтор тогда и только тогда, когда A замкнута относительно коядер или, эквивалентно, когда каждый факторобъект X/X' объекта X категории A делим. (Достаточным условием для этого является правая наследственность кольца R.)

3.1 (Ламбек [72]). Пусть $g\colon R \to Q$ — канонический гомоморфизм кольца R в кольцо $Q = Q(R)$, определенное в упражнении 2.2. Пусть также $h\colon R \to S$ — канонический гомоморфизм кольца R в кольцо S биэндоморфизмов такого инъективного модуля I, что (B, C) является наибольшим кручением, относительно которого модуль I полупрост (см. упр. 1.3). Показать, что S содержит Q и $\ker g = \ker h$. Если, кроме того, I конечно порожден над $\operatorname{End} I_R$ (эндоконечен), то $Q = S$. (По поводу результатов, сравнивающих Q и S, см. Ламбек [71, стр. 52].)

3.2. Правый идеал K является периодической частью модуля R для некоторого кручения mod-R тогда и только тогда, когда K — идеал и $K = \operatorname{ann}_R \widehat{R/K}$ (или, эквивалентно, когда $\widehat{R/K}$ является R/K-модулем). В этом случае K — ядро канонического гомоморфизма $h\colon R \to Q(R)$.

3.3 (Силвер [67]). Морфизм $h\colon R \to S$ колец является эпиморфизмом в RINGS в том и только том случае, если mod-h: mod-$S \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ mod-R — полный функтор или, эквивалентно, если $S \underset{R}{\otimes} S \approx$ $\approx S$ канонически.

3.4 (Ламбек [71, стр. 45]). Если $h\colon R \to S$ — **плоский эпиморфизм** колец (это означает, что h — эпиморфизм колец, т. е. $S \underset{R}{\otimes} S \approx S$ канонически и S — плоский левый R-модуль), то (S, h) — кольцо частных кольца R относительно наибольшего кручения (B, C), для которого вложение mod-h: mod-$S \rightsquigarrow$ mod-R отображает каждый S-модуль в полупростой R-модуль.

3.5. Пара (S, h), где $h\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, является кольцом частных кольца R (относительно некоторого кручения; см. 2.2) тогда и только тогда, когда существует инъективный правый R-модуль I, кольцо биэндоморфизмов которого равно S, h — канонический гомоморфизм $R \to S$ и I — циклический модуль над $\operatorname{End} I_R$.

3.6. Если S — точное кольцо частных кольца R (это означает, что $\ker h = 0$ в 3.5), то S — кольцо биэндоморфизмов R-модуля $\hat{S} \oplus \hat{S}/S$.

4. Идеал P коммутативного кольца R является простым, если его дополнение $R - P$ — мультипликативное множество. В этом случае, если $P \neq 0$, кольцо частных относительно $R - P$ обозначается через R_P. (a) Показать, что R_P — локальное кольцо (называемое **локальным кольцом в точке** P). (b) Если K — полное кольцо частных кольца R [1]) и $R \to R_P$ — мономорфизм, то R_P изоморфно подкольцу $\{x \in K \mid \exists b \in R - P \;\&\; xb \in R\}$.

Замечания к гл. 16

Большинство материала этой главы заимствовано из работы Габриеля [62]. В изложении теории кручений мы следовали книге Ламбека [71b]. Я рекомендую в качестве обязательного чтения введение из его книги (см. стр. V и VI, а также § 0). Радикалы в категориях я обнаружил в статье Амицура [54, стр. 119—122] в ситуации «бикатегорий», введенных Маклейном в статье [50] («Двойственность в группах»). (А. Г. Курошу [2]) и др. также принадлежат работы в этом направлении.)

Я был далек от мысли исчерпать все темы, затронутые в диссертации Габриеля [62]. Вместо этого я изложил (в гл. 15 и 16) лишь самые основные понятия, необходимые для чтения всей работы, к чему я настоятельно призываю моих читателей. (Подобно работе Мориты [58], она дает поистине неисчерпаемый источник вдохновения и идей. См. также К. Уокер и Э. Уокер [72].)

Ссылки

Читатель отсылается к библиографии работы Ламбека [71b] за дополнительными ссылками.

Амицур [54], Габриель [62], Джонсон [51a], Диксон [66], Ламбек [71a], [71b], Маклейн [50], Морита [58], [70], Уокер К.— Уокер Э. [65], [72], Утуми [56].

[1]) То есть правое кольцо частных кольца R относительно множества всех регулярных элементов этого кольца.— *Прим. перев.*

[2]) См. Курош А. Г., *Матем. сб.*, 33, № 1 (1953), 13—26; *Докл. АН СССР*, 141 (1961), 789—791.—*Прим. перев.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абиан (Abian A.)
[65] The Theory of Sets and transfinite Arithmetic, Philadelphia, Saunders, 1965.

Адзумая (Azumaya G.)
[50] Corrections and supplimentaries to my paper concerning Krull-Remak — Schmidt's theorem, *Nagoya Math. J.*, 1 (1950), 117—124.
[51] On maximally central algebras, *Nagoya Math. J.*, 2 (1951), 119—150.
[59] A duality theory for injective modules (Theory of quasi-Frobenius modules), *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 249—278.
[66] Completely faithful modules and self-injective rings, *Nagoya Math. J.*, 27 (1966), 697—708.

Айзенбуд, Гриффитс (Eisenbud D., Griffith P.)
[71] Serial rings, *J. Algebra*, 17 (1971), 389—400.

Айзенбуд, Робсон (Eisenbud D., Robson J. C.)
[70] Hereditary noetherian prime rings, *J. Algebra*, 16 (1970), 86—104.

Алберт (Albert A. A.)
[39] Structure of Algebras, Colloquium Publication, Vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, 1939.

Альбрехт (Albrecht F.)
[61] On projective modules over semi-hereditary rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 638—639.

Амицур (Amitsur S. A.)
[54] A general theory of radicals, II, Radicals in rings and bicategories, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 100—125.
[56a] Algebras over infinite fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 35—48.
[56b] Radicals of polynomial rings. *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 355—361.
[57] Derivations in simple rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) 7 (1957), 87—112.
[68] Rings with involution, *Israel J. Math.*, 6 (1968), 99—106.
[72] On central division algebras, *Israel J. Math.*, 12 (1972), 408—420.

Артин (Artin E.)
[27a] Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5 (1927), 251—260.
[27b] Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5 (1927), 261—289.
[50] The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56 (1950), 65—72.
[55] Calois Theory, South Bend, Notre Dame University, 1955.
[59] Theory of Algebraic Numbers, Mathematical Institute, Göttingen, 1959.
[69] Геометрическая алгебра, «Наука», М., 1969.

Артин, Несбит, Тролл (Artin E., Hesbitt E., Thrall R.)
[44] Rings with Minimum Condition, Ann. Arbor, University of Michigan Press, 1944.

Артин, Уэйплс (Artin E., Whaples G.)
[43] The theory of simple rings, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 87—107.

Ауслендер (Auclander M.)
[55] On the dimension of modules and algebras, III, *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 67—77.
[57] On regular group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 658—664.
[66] Coherent functors, In: Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla 1965), Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1966, pp. 189—231.

Ауслендер, Буксбаум (Auslander M., Buchsbaum D.)
[57] Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), 390—405.

Ауслендер, Голдман (Auslander M., Goldman O.)
[60a] Maximal orders, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 1—24.
[60b] The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 367—409.

Бальцежик (Balcerzyk S.)
[66] On projective dimension of direct limits of modules, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Sér. Sci. Math. Astron. Phys., 14 (1966), 241—244.

Бамби (Bumby R. T.)
[65] Modules which are isomorphic to submodules of each other, *Arch. math.*, 16 (1965), 184—185.

Бар-Хиллел, Френкель см. Френкель, Бар-Хиллел.

Басс (Bass H.)
[60] Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 466—488.
[62] The Morita Theorems (Lecture Notes), Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, 1962.
[64] Projective modules over free groups are free, *J. Algebra*, 1 (1964), 367—373.
[67] Lectures on Algebraic *K*-Theory, Tata Institute for Advanced Study, Colaba, 1967.
[73] Алгебраическая *K*-теория, «Мир», М., 1973.

Бергман (Bergman G. M.)
[64] A ring primitive on the right but not the left, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1965), 473—475.
[74] Some examples in P. I. ring theory, *Israel J. Math.*, 18 (1974), 257—277.

Биркгоф (Birkhoff G.)
[52] Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, М., 1952. [Русский перевод II изд. [67] 1948 г.]
[67] Lattice Theory, Colloquium Publication, Vol. 25 (revised), Amer. Math. Soc., Providence, 1967.

Биркгоф, Маклейн (Birkhoff G., MacLane S.)
[67] Algebra, New York, Macmillan, 1967.

Бойл (Boyle A. K.)
[71] Ph. D. Thesis, 1971, Rutgers University, New Brunswick.

Брауэр (Brauer R.)
[63] Representations of finite groups, Lectures on Modern Mathematics, Vol. I (T. L. Saaty, Ed.), New York, Wiley, 1953, pp. 133—175.

Брауэр, Вейс (Brauer R., Weiss E.)
[64] Non-commutative Rings, Part I (Lecture Notes), Mathematics Department, Harvard University, Cambridge, 1964.

Букур, Деляну (Bucur I., Deleanu A.)
[72] Введение в теорию категорий и функторов, «Мир», М., 1972.

Бурбаки (Bourbaki N.)
[63] Théorie des Ensembles, chap. 3 (ASINo. 1243), Paris, Hermann, 1963.
[65] Теория множеств, «Мир», М., 1965.
[66] Алгебра, «Наука», М., 1966.
[71] Коммутативная алгебра, «Мир», М., 1971.

Буксбаум (Buchsbaum D. A.)
[55] Exact categories and duality, Trans. Amer. Math. Soc, 80 (1955), 1—34.

Буксбаум, Ауслендер см. Ауслендер, Буксбаум.

Бэр (Baer R.)
[40] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group., *Bull. Amer. Math.*, **46** (1940), 800—806.

Ван-дер-Варден (Van der Waerden B. L.)
[47] Современная алгебра, т. 1 и 2, ИЛ, М., 1947. [Русский перевод I изд. [48] 1939 г.]
[48] Modern Algebra, Vols. 1 and 2, New York, Ungar, 1948.

Васконселос (Vasconcelos W. V.)
[69] On finitely generated flat modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138** (1969), 505—512.
[70a] Flat modules over commutative noetherian rings,. *Trans. Amer. Math. Soc..*, **152** (1970), 137—143.
[70b] Simple flat extensions, *J. Algebra*, **16** (1970), 106—107.

Вебер (Webber D. B.)
[70] Ideals and modules of simple Noetherian hereditary rings, *J. Algebra*, **16** (1970), 239—242.

Веддербёрн (Wedderburn J. H. M.)
[08] On hypercomplex numbers, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2) **6** (1908), 77—117.
[09] On the direct product in the theory of finite groups, *Ann. Math.*, **10** (1909), 173—176.
[14] A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **15** (1914), 162—166.
[37] A note on algebras, *Ann. Math.*, 38 (1937), 854—856.

Вейль (Weyl H.)
[44] David Hilbert and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 612—654.
[46] The Classical Groups (revised), Princeton, Princeton University Press, 1946.
[47] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947. [Русский перевод I изд. [46], 1939 г.]

Виланд (Wieland H.)
[64] Finite Permutation Groups, New York, Academic Press, 1964.

Вудс (Woods S. M.)
[71] On perfect group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 49—52.

Габриель (Gabriel P.)
[62] Des catégories abeliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 323—348.

Габриель, Попеску см. Попеску, Габриель.

Габриель, Цисман (Gabriel P., Zisman M.)
[71] Категории частных и теория гомотопий, «Мир», М., 1971.

Гёдель (Gödel K.)
[40, 58] The Consistency of the Continuum Hypothesis, Princeton, Princeton University Press, 1940, 1958.

[64] The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, Ann. of Math. Studies, No. 3 (Sixth Printing), Princeton, Princeton University Press, 1964.

Голди (Goldie A. W.)
[58] The structure of prime rings under ascending chain conditions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 8 (1958), 589—608.
[60] Semi-prime rings with maximum condition, *Proc. Lond. Math., Soc.*, **10** (1960), 201—220.
[61] Rings with maximum condition (Lecture Notes), Yale University Math. Dept., 1961.
[62] Non-commutative principal ideal rings, *Archiv. Math.*, **13** (1962), 213—221.
[67] Localization in non-commutative Noetherian rings, *J. Algebra*, 5 (1967), 89—105.
[69] Some aspects of ring theory, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **1** (1969), 129—154.

Голдман (Goldman O.)
[51] Hilbert rings, and the Hilbert Nullstellensatz, *Math. Z.*, **54** (1951), 136—140.
[69] Rings and modules of quotients, *J. Algebra*, **13** (1969), 10—47.

Голдман, Ауслендер см. Ауслендер, Голдман.

Горенштейн (Gorenstein D.)
[68] Finite Groups, New York, Harper & Row, 1968.

Гриффитс, Айзенбуд см. Айзенбуд, Гриффитс.

Гриффитс, Робсон (Griffith P., Robson J. C.)
[70] A theorem of Asano and Michler, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 837—838.

Гротендик (Grothendieck A.)
[57[Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohohu Math. J.*, **9** (1957), 119—221. [Русский перевод: О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961.]
[65] Le groupe de Brauer I, Séminaire Bourbaki, exposé 290, Paris, Hermann, 1965.

Гротендик, Дьёдонне (Grothendieck A., Dieudonné J. A.)
[60—64] Eléments de Géometrie Algébrique, I—IV, Publications Institute des Hautes Etudes, Scientifiques, Le Bois-Marie-Bures-sur-Yvette (S.-et-O.), 1960—1964.

Гупта (Gupta R. N.)
[66] Another characterisation of semi-prime rings with right Goldie conditions, *J. Math. Sci.*, **1** (1966), 87—89.
[68] Characterisation of rings whose classical quotient rings are perfect rings, *Osaka J. Math.*, 5 (1968), 69—87.

Гупта, Саха (Gupta R. N., Saha F.)
[67] Remark on a paper of Small, *J. Math. Sci.*, **2** (1967), 7—16.

Дейд (Dade E. C.)
[71] Deux groupes finis distincts ayant la même algebre de groupe sur tout corps, *Math. Z.*, **119** (1971), 345—348.

Дейринг (Deuring M.)
[48] Algebren, New York, Chelsea, 1948.

Деляну, Букур, см. Букур, Деляну.

Джанс (Jans J. P.)
[64] Rings and Homology, New York, Holt, 1964.

[67] On orders in Quasi-Frobenius rings, *J. Algebra*, **7** (1967), 35—43.
[70] On the double centralizer property, *Math. Ann.*, **188** (1970), 85—89.

Джекобсон (Jacobson N.)
[45a] The radical and semisimplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 300—342.
[45b] The structure of simple rings without finiteness assumptions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 228—245.
[45c] Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 695—707.
[47] Теория колец, ИЛ, М., 1947.
[50] Some remarks on one-sided inverses, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 352—355.
[51, 53, 64] Lectures in Abstract Algebra, Vol. I—III, New York/Princeton, Van Nostrand, 1965, 1953, 1964.
[56, 64] Structure of Rings. Colloqium Publication, Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, 1956 (1964 revised).
[61] Строение колец, ИЛ, 1961. [Русский перевод I изд. [56] 1956 г.]

Дженингс (Jennings S. A.)
[41] The structure of the group ring of a p-group over a modular field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 175—185.

Джилмер (Gilmer R. W.)
[68] Multiplicative Ideal Theory, Part I and II, Queens Papers on Pure and Applied Math., vol. 12, Queen's U., Kingston, Ontario, 1968.

Джонсон (Johnson R. E.)
[51a] The extended centralizer of a ring over a module, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 891—895.
[51b] Prime rings, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 799—809.
[53] Representations of prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 351—357.
[69] Extended Malcev domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 211—213.

Джонсон, Уонг (Johnson R. E., Wong E. T.)
[59] Self-injective rings, *Canad. Math. Bull.*, **2** (1959), 167—173.
[61] Quasi-injective modules and irreducible rings, *J. Lond. Math. Soc.*, **36** (1961), 260—268.

Диксон (Dickson L. E.)
[23] Algebras and their Arithmetics, University of Chicago, 1923, and Stechert & Co. (reprint), 1938.
[66] A torsion theory for Abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 223—235.

Диксон, Фуллер (Dickson S. E., Fuller K. R.)
[70] Commutative QF-1 artinian rings are QF, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 667—670.

Длаб, Рингель (Dlab V., Ringel C. M.)
[72a] Balanced rings, *J. Algebra*, **22** (1972), 480—501.
[72b] Balanced rings, Proc. Tulane University Symposium in Ring Theory, New Orleans, Lecture Notes in Mathematics, No. 246, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, pp. 73—143, 1972.

Дьёдонне (Dieudonné J. A.)
[42] Les determinants sur un corps non-commutatif, *Bull. Soc. Math. France*, **70** (1942), 27—45.

Дьёдонне, Гротендик см. Гротендик, Дьёдонне.

Елизаров В. Л.
[69] Кольца частных, *Алгебра и логика*, 8 (1969), 219—243.

Жантиль (Gentile E.)
[60] On rings with one-sided fields of quotients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 380—384.

Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)
[63] Коммутативная алгебра, т. 1 и 2, ИЛ, М., 1963.

Зельманович (Zelmanowitz J. M.)
[67] Endomorphism rings of torsion-less modules, *J. Algebra*, **5** (1967), 325—341.
[69] A shorter proof of Goldie's theorem, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 597—602.

Икеда (Ikeda M.)
[52] A characterization of quasi-Frobenius rings, *Osaka J. Math.*, **4** (1952), 203—210.

Йонеда (Yoneda N.)
[54] On the homology theory of modules, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I (1954), 193—227.

Камилло (Camillo V. P.)
[70] Balanced rings and a problem of Thrall, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 143—153.

Камилло, Фуллер (Camillo V. P., Fuller K. R.)
[72] Balanced and QF—1 algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1972), 373—378.

Камке (Kamke E.)
[50] Theory of Sets, New York, Dover Publ., 1950.

Кан (Kan D.)
[58] Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 294—329.

Кантор (Cantor G.)
[42] Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover/New York, 1942.

Капланский (Kaplansky I.)
[52] Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 327—340.
[58a] Projective modules, *Ann. Math.*, 68 (1958), 372—377.
[58b] On the dimension of modules and algebras, X, A right hereditary ring which is not left hereditary, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 85—88.
[59] Homological dimension of rings and modules, Mimeographed notes, University of Chicago, 1969.
[66] The homological dimension of a quotient field, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 139—142.
[69a] Fields and Rings, Chicago Lectures in Mathematics. Chicago/London, University of Chicago Press, 1969.
[69b] Infinite Abelian Groups, 2nd Ed., Ann Arbor., University of Michigan Press, 1969.

Карагаполов М. И., Мерзляков Ю. И.
[76] Основы теории групп, Наука, М., 1976.

Картан, Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)
[60] Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.

Каш, Кнезер, Куппиш (Kasch F., Kneser M., Kuppisch H.)
[57] Unzerlegbare modulare Darstellungen endicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe, *Arch. Math.*, 8 (1957), 320—321.

Келли (Kelley J.)
[68] Общая топология, «Наука», М., 1968.

Кёлер (Koehler A.)
[70] Quasi-projective covers and direct sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 655—658.

Клиффорд, Престон (Clifford A. M., Preston G. B.)
[72] Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, «Мир», М., 1972.

Кнезер, Каш, Куппиш см. Каш, Кнезер, Куппиш.

Кнус (Knus M. A.)
[70] Algèbres d'Azumaya et modules projectifs, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 372—383.

Кнус, Оянгурен (Knus M. A., Ojanguren M.)
[72] On the torsion of the Brauer group, Preprint, Math. Inst. E.T.H., Zürich, 1972.

Коззенс (Cozzens J. H.)
[70] Homological properties of the ring of differential polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 75—79.
[72] Simple principal left ideal domains, *J. Algebra*, **23** (1972), 66—75.

Коззенс, Фейс (Cozzens J. H., Faith C.)
[73/74] Simple rings with ascending chain conditions: A survey.

Колби, Раттер (Colby R. R., Rutter E. A.)
[71] Π-Flat and Π-Projective modules, *Arch. Math.*, **22** (1971), 246—251.

Колчин (Kolchin E. R.)
[53] Galois theory of differential fields, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 753—824.

Кон (Cohn P. M.)
[62] On subsemigroups of free semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 347—351.
[64a] Free ideal rings, *J. Algebra*, **1** (1964), 47—69.
[64b] Subalgebras of free associative algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **14** (1964), 618—632.
[66] Morita Equivalence and Duality, University of London, Bookstore, Queen Mary College, Mile End Road, London, 1966.
[66b] Some remarks on the invariant basis property, *Topology*, 5 (1966), 215—228.
[68] Универсальная алгебра, «Мир», М., 1968.
[69] Free associative algebras, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **1** (1969), 1—39.
[75] Свободные кольца и их связи, «Мир», М., 1975.

Коннел (Connell I.)
[63] On the group ring, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 650—685.

Корнер (Corner A. L. S.)
[63] Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **13** (1963), 687—710.

Кох (Koh K.)
[66] On simple rings with maximal annihilator right ideal, *Canad. Math. Bull.*, 9 (1966), 667—668.

Коэн (Cohen P. J.)
[63, 64] The independence of the continuum hypothesis I, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 1143—1148; **51** (1964), 105—110.
[69] Теория множеств и континуум-гипотеза, «Мир», М., 1969.

Круазо, Лезьё см. Лезьё, Круазо.

Крулль (Krull W.)
[48] Idealtheorie, New York, Chelsea, 1948.

Ксеркс (Xerxes C.)
[300 B. C.] The Athenian plateau problem. *Archiv. Manuskriptus*, 1, 1—100 (300 B. C.).

Куппиш, Каш, Кнезер см. Каш, Кнезер, Куппиш.

Курош А. Г.
[67] Теория групп, «Наука», М., 1967.
[73] Лекции по общей алгебре, «Наука», М., 1973.

Куртер (Courter R. C.)
[65] The dimension of a maximal commutative subalgebra of K_n, *Duke Math. J.*, **32** (1965), 225—232.

Кэртис, Райнер (Curtis C. W., Reiner I.)
[69] Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. «Наука, М., 1969.

Лабкин (Lubkin S.)
[60] Imbedding of abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 410—417.

Лазар (Lazard D.)
[64] Sur les modules plats, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **258** (1964), 6313—6316.

Ламбек (Lambek J.)
[63] On Utumi's ring of quotients, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 363—370.
[64a] A module is flat if and only if its character module is injective, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 237—243.
[64b] Goursat's theorem and homological algebra, *Canad. Math. Bull.*, **7** (1964), 597—607.
[71a] Кольца и модули, «Мир», М., 1971.
[71b] Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, No. 177. Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1971.

Ламбек, Финдлей см. Финдлей, Ламбек.

Ланский (Lanski C.)
[69] Nil subrings of Goldie rings are nilpotent, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 904—907.

Леви (Levy L.)
[63a] Unique direct sums of prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 64—76.
[63b] Torsionfree and divisible modules over non-integral domains, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 132—151.

Левитт (Leavitt W.)
[57] Modules without invariant basis number, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**, (1957), 322—328.
[62] The module type of a ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 113—130.

Левицкий (Levitzki J.)
[45] Solution of a problem of G. Koethe, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 437—442.
[64] On nil subrings (Posthumous paper edited by S. A. Amitsur), *Israel J. Math*, **1** (1963), 215—216.

Лезьё, Круазо (Lesieur L., Croisot R.)
[58] Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif II, *Math. Ann.*, **134** (1958), 458—476.
[59] Sur les anneaux premiers noetheriens à gauche, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **76** (1959), 161—183.

Ленаган (Lenagan T. H.)
[71] Bounded Asano orders are hereditary, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **3** (1971), 67—69.

Ленг (Lang S.)
[68] Алгебра, «Мир», М., 1968.

Ленцинг (Lenzing H.)
[69] Endlich präsentierbare Moduln, *Arch. Math.*, **20** (1969), 262—266.

Литтлвуд (Littlewood D. E.)
[33] On the classification of algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2) **35** (1933), 200—240.

Лоувер (Lawvere F.)
[64] Elementary theory of the category of sets, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **52** (1964), 1506—1511.
[65] The category of categories as a foundation for mathematics, Proc. Conf. Categorical Algebra, Amsterdam, North-Holland Publ., 1965, pp. 1—20.

Маклейн (MacLane S.)
[50] Duality in groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485—516.
[66] Гомология, «Мир», М., 1966.
[71] Categorical Algebra and set-theoretical foundations, Amer. Math. Soc. Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. XIII, Part I, 1971, pp. 231—240.
[72] Categories for the working mathemacian, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1972.

Маклейн, Биркгоф см. Биркгоф, Маклейн.

Маклейн, Эйленберг см. Эйленберг, Маклейн.

Мальцев А. И.
[36] On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.*, **113** (1936), 686—691. [См. также Мальцев А. И., Избранные труды, т. I, Наука, М., 1976, 12—15.]
[70] Алгебраические системы, Наука, М., 1970.

Машке (Maschke H.)
[98] Über den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen, *Math. Ann.*, **50** (1898), 483—498.

Митчелл (Mitchell B.)
[64] The full embedding theorem, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 619—637.
[65] Theory of Categories, New York, Academic Press, 1965.
[72] Rings with several objects, *Advances in Math.*, 8 (1972), 1—161.

Михлер (Michler G.)
[69a] On quasi-local noetherian rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 222—224.

[69b] Structure of semiperfect hereditary Noetherian rings, *J. Algebra*, **13** (1969), 327—344.
[69c] Idempotent ideals in perfect rings, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 301—309.
[69d] Asano orders, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **19** (1969), 421—443.

Морита (Morita K.)
[58] Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Reports, Tokyo Kyoiku Daigaku, 6 (1958), 83—142.
[70, 71] Localizations in categories of modules, I; III, *Math. Z.*, **114** (1970), 121—144; **119** (1971), 313—320.
[71a] Flat modules, injective modules, and quotient rings, *Math. Z.*, **120** (1971), 25—40.

Мьюборн, Уинтон (Mewborn A. C., Winton C. N.)
[69] Orders in self-injective semi-perfect rings, *J. Algebra*, **13** (1969), 5—9.

Нагата (Nagata M.)
[62] Local Rings, New York, Interscience Publishers, 1962.

Накаяма, Эйленберг см. Эйленберг, Накаяма.

фон Нейман (von Neumann J.)
[36] On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **22** (1936), 707—713.
[60] Continuous Geometry, Princeton Mathematical Series, No. 25, Princeton, Princeton University, 1960.

Несбит, Тролл, Артин, см. Артин, Несбит, Тролл.

Норскотт (Northcott D. G.)
[60] Homological Algebra, Cambridge, Cambridge University Press, 1960.

Ope (Ore O.)
[31] Linear equations in non-commutative fields, *Ann. of Math.*, **32** (1931), 463—477.
[33] On a special class of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 559—584.

Орнстейн (Ornstein A. J.)
[67] Rings with restricted minimum condition, Ph. D. Thesis, Rutgers University, 1967.

Ософская (Osofsky B. L.)
[68a] Endomorphism rings of Quasi-injective modules, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 895—903.
[68b] Noncommutative rings whose cyclic modules have injective hulls, *Pacif. J. Math.*, **25** (1968), 331—340.
[68c] Homological dimensions and the continuum hypothesis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 217—230.
[68d] Upper bounds on homological dimensions, *Nagoya Math. J.*, **32** (1968), 315—322.
[69] A commutative local ring with finite divisors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 377—385.
[70] Homological dimension and cardinality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **151** (1970), 641—649.

Перлис (Perlis S.)
[42] A characterization of the radical of an algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 128—132.

Понтрягин Л. С.
[72] Непрерывные группы, «Наука», М., 1972.

Попеску, Габриель (Popesco N., Gabriel P.)
[64] Caractérisations des catégories abeliennes avec générateurs et limites inductives exactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 4188—4190.

Постников М. М.
[63] Теория Галуа, Физматгиз, М., 1963.

Престон, Клиффорд см. Клиффорд, Престон.

Прочези (Procesi C.)
[63] On a theorem of Goldie concerning the structure of prime rings with maximal condition (in Italian), *Acad. Naz. Lincei Rend.*, **34** (1963), 372—377.
[65] On a theorem of Faith and Utumi (in Italian), *Rend. Math. e. Appl.*, **24** (1965), 346—347.

Прочези, Смолл (Procesi C., Small L.)
[65] On a theorem of Goldie, *J. Algebra*, **2** (1965), 80—84.

Пуппе (Puppe D.)
[67] Über die Axiome für abelsche Kategorien, *Arch. Math.*, **7** (1967), 217—222.

Райнер, Кэртис см. Кэртис, Райнер.

Райнхарт (Rinchart G. S.)
[62] Note on the global dimension of a certain ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 341—346.

Рао (Rao M.L.R.)
[72] Azumaya, semisimple, and ideal algebras, *Bull. Amer. Math., Soc.*, **78**, (1972), 588—592.

Раттер, Колби см. Колби, Раттер.

Рингель, Длаб см. Длаб, Рингель.

Риффель (Riffel M. A.)
[65] A general Wedderburn theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **54** (1965), 1513.

Ричман (Richman F.)
[65] Generalized quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 794—799.

Робсон (Robson J. C.)
[67a] Artinian quotient rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **17** (1967), 600—616.
[67b] Pri-rings, and Ipri-rings, *Quarterly J. Math.*, **18** (1967), 125—145.
[68] Non-commutative Dedekind rings, *J. Algebra*, **9** (1968), 249—265.

Робсон, Айзенбуд см. Айзенбуд, Робсон.

Робсон, Гриффитс, см. Гриффитс, Робсон.

Ройтер А. В.
[68] Неограниченность размерности неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений, *Изв. Акад. наук СССР*, сер. мат., **32** (1968), 1275—1282.

Роос (Roos J.-E.)
[65] Caractérisation des catégories qui sont quotients des catégories des modules par des sous-catégories bilocalisantes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965), 4954—4957.
[67] Sur la condition AB6 et ses variantes dans les catégories abéliennes, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **264** (1967), 991—994.

[68] Sur l'anneau maximal de fractions des AW-algebras et des anneaux de Baer, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **266** (1968), 120—123.

Ротман (Rotman J.)
[65] The Theory of Groups, Boston Allyn & Bacon, 1965.

Сандомирский (Sandomierski F.)
[64] Relative injectivity and projectivity, Ph. D. Thesis, Penna, State University, University Park, 1964.
[67] Semisimple maximal quotient rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **128** (1967), 112—120.
[68] Nonsingular rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 225—230.

Саха, Гупта см. Гупта, Саха.

Селе (Szele T.)
[50] Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 167—192.

Серпинский (Sierpinski W.)
[47] L'Hipóthèse generalizée du continu et l'axiome du choik, *Fund. Math.*, **24** (1947), 1—5.
[58] Cardinal and Ordinal Numbers, Mathematical Monographs of the Polish Academy, Warszawa, 1958.

Сешадри (Seshadri C.)
[58] Triviality of vector bundles over the affine space K^2, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **44** (1958), 456—458.

Силвер (Silver L.)
[67] Noncommutative localizations and applications, *J. Algebra*, **7** (1967), 44—76.

Скотт (ред.) (Scott D.)
[71] Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 13, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, 1971.

Смолл (Small L. W.)
[65] An example in Noetherian rings, *Proc. Nat. Sci. USA*, **54** (1965), 1035—1036.
[66a] Hereditary rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **55** (1966), 25—27.
[66b] Orders in Artinian rings, *J. Algebra*, **4** (1966), 13—41; Corrections and addendum, *Ibid.*, **4** (1966), 505—507.
[66c] Remarks on the homological dimension of a quotient field, Mimeographed Notes. University of California, Berkeley, 1966.
[68] Orders in artinian rings, II, *J. Algebra*, **9** (1968), 266—273.

Смолл, Прочези см. Прочези, Смолл.

Снайдер, Форманек см. Форманек, Снайдер.

Снаппер (Snapper E.)
[50, 51, 52] Completely primary rings, I—IV, *Ann. Math.*, **52**; **53**; **55** (1950—1952), 666—693; 125—142; 207—234; 46—64.

Соловэй (Solovay R.)
[63] Independence results in the theory of cardinals (Preliminary Report), *Notices of the Amer. Math. Soc.*, **10** (1963), 595.

Суон (Swan R.)
[59] Projective modules over finite groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 365—367.
[68] Algebraic K-Theory, Lecture Notes in Mathematics, No 76, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1968.

Такэути (Takeuchi M.)
[71] A simple proof of Gabiriel and Popesco's theorem, *J. Algebra*, **18** (1971), 112—113.

Талинтайр (Talintyre T. D.)
[63] Quotient rings of rings with maximal condition for right ideals, *J. London. Math. Soc.*, 38 (1963), 439—450.
[66] Quotient rings with minimum condition on right ideals, *J. Lond. Math. Soc.*, **41** (1966), 141—144.

Томпсон, Фейт см. Фейт, Томпсон.

Тролл (Thrall R. M.)
[48] Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948), 173—183.

Тролл, Артин, Несбит, см. Артин, Несбит, Тролл.

Уиллард (Willard E.)
[65] Properties of generators, *Math. Ann.*, **158** (1965), 352—364.

Уинтон, Мьюборн см. Мьюборн, Уинтон.

Уитни (Whitney H.)
[44] Topics in the theory of abelian groups, I. Divisibility of homomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 129—144.

Уокер К. (Walker C. L.)
[66] Relative homological algebra and abelian groups, *Ill. J. Math.*, **10** (1966), 186—209.

Уокер Э., Уокер К. (Walker E. A., Walker C. L.)
[66] Quotient Categories of Modules, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1966.
[72] Quotient categories and rings of quotients, *Rocky Mountain J. Math.*, **2** (1972), 513—555.

Уокер Э., Фейс см. Фейс, Уокер Э.

Уонг, Джонсон см. Джонсон, Уонг.

Уотс [Watts C.)
[60] Intrinsic characterizations of some additive functors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 5—8.

Утуми (Utumi Y.)
[56] On quotient rings, *Osaka Math. J.*, 8 (1956), 1—18.
[63a]A theorem of Levitzki, *Math. Assoc. of Amer. Monthly*, **70** (1963), 286.
[63b]On rings of which any one-sided quotient ring are two-sided, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 141—147.
[63c]A note on rings of which any two-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 287—288.
[65] On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 158—173.

Утуми, Фейс см. Фейс, Утуми.

Уэйплс, Артин см. Артин, Уэйплс.

Фейс (Faith C.)
[64] Noetherian simple rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 730—731.
[65] Orders in simple artinian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 61—64.

[66] Rings with ascending condition on annihilators, *Nagoya Math. J.*, **27** (1966), 179—191.
[67a]Lectures on Injective Modules and Quotient Rings, Lecture Notes in Mathematics, No. 49, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1967.
[67b]A general Wedderburn theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 65—67.
[71a]A correspondence theorem for projective modules and the structure of simple noetherian rings, *Bull. Amer. Math., Soc.*, **77** (1971), 338—342.
[71b]Orders in semilocal rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1971), 960—962.
[72a]A correspondence theorem for projective modules, and the structure of simple Noetherian rings, Proceedings of the Conference on Associative Algebras, Nov. 1970, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposium Matematica 8, 1972, pp. 309—345.
[72b]Faith, C.: Modules finite over endomorphism ring, Proc. Tulane University, Symposium in Ring Theory, New Orleans, Lecture Notes in Mathematics, No. 246.
Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1972, pp. 145—190.
[72c]Galois subrings of Ore domains are Ore domains, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 1077—1080.
[73/74a] On a theorem of Chatters, Preprint, Rutgers University 1973/74.
[73/74b] Embedding modules in projectives, Preprint, Rutgers University, 1973/74.

Фейс, Коззенс см. Коззенс, Фейс.

Фейс, Уокер (Faith C., Walker E. A.)
[67] Direct sum representations of injective modules, *J. Algebra*, **5** (1967), 203—221.

Фейс, Утуми (Faith C., Utumi Y.)
[65a]On noetherian prime rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 53—60.
[65b]Maximal quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1084—1089.

Фейс, Чейз см. Чейз, Фейс.

Фейт (Feit W.)
[67] Characters of Finite Groups, New York, Benjamin, 1967.

Фейт, Томпсон (Feit W., Thompson J. G.)
[63] Solvability of groups of odd order, *Pacif. J. Math.*, **13** (1963), 775—1029.

Феллер, Своковский (Feller E. H., Swokowski E. W.)
[61a]Reflective N-prime rings with the ascending condition, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99** (1961), 264—271; Corrections, *ibid.*, p. 555.
[61b]Reflective rings with the ascending chain condition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 651—653.

Финдлей, Ламбек (Findlay G. D., Lambek J.)
[58] A generalized ring of quotients, I, II, *Canad. Math. Bull.*, **1** (1958), 77—85, 155—167.

Форманек (Formanek E.)
[72a]Central polinomials and orders, Carleton University preprint, Ottawa, 1972.
[72b]A problem of Passman on semisimplicity, Carleton University preprint, Ottawa, 1972.

Форманек, Снайдер (Formanek E., Snider R. L.)
[72] Primitive group rings, Carleton University and Miami University, preprint, Ottawa and Coral Gables, 1972.

Фрейд (Freyd P.)
[60] Functor Theory, Ph. D. Thesis, Columbia University, 1960.
[64] Abelian Categories, New York, Harper Row, 1964.

Френкель (Fraenkel A.)
[22] Über den Begriff «definit» und die Unabhängigkeit des Auswahl axioms, Sitzungsber, Preuss. Akad. wiss. Phil. Math., 1922, pp. 253—257.

Френкель, Бар-Хиллел (Fraenkel A., Bar-Hillel Y.)
[66] Основания теории множеств, «Мир», М., 1966.

Фукс (Fuch L.)
[74, 77] Бесконечные абелевы группы, «Мир», М., 1974, 1977.

Фуллер (Fuller K. R.)
[71] Primary rings and double centralizers, *Pacif. J. Math.*, **32** (1970), 379—383.

Фуллер, Диксон см. Диксон, Фуллер.

Фуллер, Камилло см. Камилло, Фуллер.

Халмош (Halmos P.)
[60] Naive Set Theory, New York, Van Nostrand, 1960.

Харада (Harada M.)
[56] Note on the dimension of modules and algebras, *J. Inst. Polytechnics Osaka City University*, Ser. A, **7** (1956), 17—27.

Харт (Hart R.)
[67] Simple rings with uniform right ideals, *J. Lond. Math.*, **42** (1967), 614—617.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
[37] Теория множеств, ОНТИ, М.—Л., 1937.

Херстейн (Herstein I. N.)
[64] Topics in Algebra, New York, Harper & Row, 1964.
[65] A counter example in Noetherian rings, *Proc. Nat. Acad., Sci.*, USA, **54**, (1965), 1036—1037.
[72] Некоммутативные кольца, «Мир», М., 1972.

Холл (Hall M.)
[62] Теория групп, ИЛ, М., 1962.

Хохшильд (Hochschild G.)
[56] Relative homological algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 246—269.
[58] Note on relative homological algebra, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 89—94.

Цаленко М. С., Шульгейдгер Е. Г.
[74] Основы теории категорий, Наука, М., 1974.

Цассенхауз (Zassenhaus H.)
[58] The Theory of Groups, 2nd Ed., New York, Chelsea, 1958.
[67] Orders as endomorphism rings of modules of the same rank, *J. Lond. Math. Soc.*, **42** (1967), 180—182.

Цермело (Zermelo E.)
[04] Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet kann, *Math. Ann.* **59** (1904), 514—516.
[08a] Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, **65** (1908), 107—128.

[08b] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Math. Ann.*, **65** (1908), 261—281.

Цисман, Габриель см. Габриель, Цисман.

Чаттерс (Chatters A. W.)
[70] The restricted minimum condition in Noetherian hereditary rings, *J. Lond. Math. Soc.*, **4** (1971), 83—87.
[72] A decomposition theorem for Noetherian hereditary rings, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **4** (1972), 125—126.

Чейз (Chase S. U.)
[60] Direct products of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 457—473.
[62a] On direct product and sums of modules, *Pacif. J. Math.*, **12** (1962), 847—854.
[62b] A remark on direct products of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 214—216.

Чейз, Фейс (Chase S. U., Faith C.)
[65] Quotient rings and direct products of full linear rings, *Math. Z.*, 88 (1965), 250—264.

Шевалле (Chevalley C.)
[55] The Construction and Study of Certain Important Algebras, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1955.
[56] Fundamental Concepts of Algebra, New York, Academic Press, 1956.

Шефердсон (Shepherdson J. C.)
[51] Inverse and zero divisors in matrix rings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **61** (1951), 71—85.

Шок (Shock R. C.)
[71a] Injectivity, annihilators, and orders, *J. Algebra*, **19** (1971), 96—103.
[71b] Nil subrings in finiteness conditions, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 741—748.
[72a] Orders in self injective cogenerator rings, preprint, 1972.
[72b] Polynomial rings over finite dimensional rings, preprint, Southern Illinois University, Carbondale, 1972.

Шопф, Экман см. Экман, Шопф.

Шпекер (Spekcer E.)
[50] Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, *Portugaliae Math.*, 9 (1950), 131—140.

Штейниц (Steinitz E.)
[48] Algebraische Theorie der Körper, New York, Chelsea, 1948.

Штенштрём (Stenstrom B.)
[71] Rings and modules of quotients, Lecture Notes in Mathematics, No. 237, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1971.

Эйленберг (Eilenberg S.)
[56] Homological dimension and syzygies, *Ann. Math.*, **64** (1956), 328—336.
[60] Abstract description of some basic functors, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 221—234.

Эйленберг, Картан см. Картан, Эйленберг.

Эйленберг, Маклейн (Eilenberg S., Maclane S.)
[42] Natural isomorphisms in group theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **28** (1942), 537—543.

[45] General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 (1945), 231—294.

Эйленберг, Накаяма (Eilenberg S., Nakayama T.)
[55] On the dimension of modules and algebras, II (Frobenius algebras and Quasi-Frobenius rings,) *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 1—16.

Эйленберг, Розенберг, Зелинский (Eilenberg S., Rosenberg A., Zelinsky D.)
[57] On the dimension of modules and algebras. VIII. Dimension of tensor products, *Nagoya Math. J.*, 12 (1957), 71—93.
[62] On flat modules over commutative rings, *J. Math. Soc. Japan*, 14 (1962), 284—291.

Экман, Шопф (Eckmann B., Schopf A.)
[53] Über injektive Moduln, *Archiv Math.*, 4 (1953), 75—78.

Эндо (Endo S.,)

Януш (Janusz G. J.)
[69] Indecomposable modules for finite groups. *Ann. of Math.* 89 (1969), 209—241.

Ятегаонкар (Jategoankar A. V.)
[69a] Ore domains and free algebras, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1 (1969), 45—46.
[69b] A counter-example in ring theory and homological algebra, *J. Algebra*, 12 (1969), 418—440.
[70a] Left Principal Ideal Rings, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 123, Berlin/Heidelberg/New York, Springer, 1970.
[70b] Orders in artinian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 1258—1259.
[72] Noetherian Prime Rings, Proceedings of Ring Theory Conference, New York, Academic Press, 1972, pp. 171—229.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$=$, $\sim$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ 28
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 29
$\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\varnothing$ 29, 30
$\to$, $\mapsto$ 30
$\cup$, $\cap$, $A - B$ 31, 32
Pow, $\times$ 34
$f \mid U$, 1_X 40
inf, sup, $\vee$, $\wedge$ 54
$\coprod$ 59, 136, 157
$\coprod$ 61, 137
$\mid A \mid$ 66
$\mathscr{C}_S(X)$, $\mathscr{U}(S)$ 74, 152
$\mathscr{C}(S)$, Map 75
$\mathscr{S}(X)$, S_n 76
$\Sigma\oplus X_i$ 77
X^I, $X^{(I)}$ 78
Hom 79
im, ker 80
$G : H$ 84
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 85
$\mathscr{N}_G(A)$ 87
Obj C, Mor C, $\mathrm{Mor}_C(A, B)$ 88
End 89, 154, 159
$\rightharpoonup$, C^{op}, C^* 90
1_C, SETS 91
MONOIDS, GROUPS, mod-$\mathbb{Z}$, DIVmod-$\mathbb{Z}$ 92
h^A, $\mathrm{Mor}^A(A,)$, $(A,)$, h_A, $\mathrm{Mor}(, A)$, $(, A)$ 93
source X 94
target X, Aut, Eqiv, $\approx$ 95
Funct, CAT 96
$[G, G]$, Aut, can(G) 97
T^*, T_* 98
In Aut, S^{op} 99
O_x, Stab x 111
fix g 111
$F(S)$, F_S 131
lim 143
RINGS 156
${}_RM$, M_R, (M, R, u), (R, M, u) 158
$[R, M, h]$, $[M, R, h]$, mod-R, $\mathscr{M}_R$, End M_R, R-mod 159
a_d, a_s, Biend, R_d, R_R 162
${}_sR$, ${}_RR$ 163
$\mathscr{J}(I)$ 169
rad R 173
$M_n(A)$ 177
M^* 181
M^{**} 182
$X^\perp$, ${}^\perp X$, $\mathrm{ann}_B X$ 187
$\mathrm{tr}_M G$, $\mathrm{ann}_R(X/N)$ 188
fix G 191
$\mathrm{End}_C X$ 196
Adfunct 197
im T 200
$\otimes M$ 215
B
$\triangleright$ 218
$\hat{M}$ 220
$\circ$ 223
$\mathscr{J}_S(A)$ 224
soc M, rad M 230
superfl M 231
Br (k) 242
$\overline{M}$, $\overline{R}$ 247
$\sim$ 275
$\mathscr{C}(C)$ 280
$\overset{Q}{\sim}$, $\overset{r}{\sim}$, $\overset{l}{\sim}$ 283
C^L 292
ORE DOM 295
(Y, T) 296
$\mathrm{compat}_L F$, colim 229
$\mathrm{cocompat}_L F$, $\overleftarrow{F}$, lim, $\overrightarrow{F}$, colim F, lim h 300

$\varprojlim_{X \in L} F(X)$, $\varinjlim_{X \in L} F(X)$ 303
eq (f_1, f_2) 305
coeq (f_1, f_2) 306
ker f, coker f 307, 308
ann f, coann f 308
TOP 315
$f \otimes g$ 348
sing M 352
bal (X, Y) 354
k-ALG 360
A-GROUP RINGS, A-MONOID RINGS 364
A-ABEL GROUP RINGS, A-ABEL MONOID RINGS, $A[S]$ 365
COM C 370
COM-k-ALG 371
$[C^L]$, $[L, C]$, Sex (L, C) 388
L^0S 394
$\mathscr{R}'(M)$, $\mathscr{R}''(M)$ 403
$M[x]$, $M\langle x \rangle$ 419
$A[y, D]$ 434
$D[x, \rho]$ 446
r. gl. dim, inj. dim, dim 456
(M_S) 523
$\mathrm{Pic}_k \mathscr{A}$, $\mathrm{Pic}_k A$ 554
A/k 570
$k(x)$ 571
A^e 588

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

автодуальное утверждение 50
— множество 50
автодуальный класс 51
автоморфизм 95, 555
— внутренний 555
автоэквивалентность 97
аксиома бесконечности 33
— выбора 34, 36
— выделения 33
— неупорядоченных пар 30
— подстановки 33, 36
— пустого множества 30
— регулярности 35, 36
— степени 34
— экстенсиональности 29
аксиомы Гёделя — Бернайса 35
— для множеств 35
— — образования классов 36
— объединения 31
— Цермело — Френкеля 29
алгебра Адзумаи 588
— алгебраическая 570
— групповая 363
— идеальная 588
— коммутативная 362
— над коммутативным кольцом 360
— обертывающая 588
— полугрупповая 363
— расщепляемо-расщепляющаяся 583
— рациональная 589
— свободная на множестве S 365
— с делением 565
— сепарабельная 575, 588
— точная 361
— трансцендентная 570
— централизуемая 589
— центральная 361
— циклическая 589
алгебраически замкнутое поле 565
алгебраический элемент 569
алгебры подобные 587
— Адзумаи подобные 588
аннулятор 187
— правый (левый) 187
аннуляторный правый идеал 187, 429
антигомоморфизм 49, 99
антиизоморфизм 49, 99
антисимметричность 48
антиэквивалентность 98
артинов объект 192
ассоциативная операция 72
ассоциативность сопряженности 355, 517
— умножения 39

базис 167
— дуальный 184
k-базис свободный 563
базисное число 167
биекция сопряжения 294
билинейное отображение 512
бимодуль 164
— обратимый 553
бинарное отношение 46
бипроизведение 139
бициклический моноид 100
биэндоморфизм 162
булеан 34

векторное пространство 163
взаимно однозначное отображение 41
— — — упорядоченных множеств 49
включение 40, 192
вложение 41, 192
— гомоморфное 81
— моноидов 81
— начальное 63
— частично упорядоченных множеств 49
вполне упорядоченное множество 52

гауссовы целые числа 154
гиперплоскость 185
гипотеза Брауэра — Тролла 589
— Серра 422
гомоморфизм инъективный 81
— кольцевой 153
— полугрупп 78
— существенный 218
— сюръективный 81
— частично упорядоченных множеств 49

гомоморфный образ 309
гомотетия 162, 403
грань верхняя 54
— — точная 54
— нижняя 54
— — точная 54
группа 74
— абелева 74
— — инъективная 113
— — проективная 114
— — свободная 86
— автоморфизмов 95
— аддитивная 195
— без кручения 86
— бихарактеров 215
— Брауэра 242, 588
— Галуа 578
— гамильтонова 112
— действительных чисел по модулю целых 81
— делимая 85
— диэдральная 112
— знакопеременная 110
— кватернионов 107
— коммутативная 74
— конечно порожденная 83
— локально конечная 585
— нильпотентная 109
— обратимых элементов 74, 152
— ограниченная 86
— периодическая 85
— Пикара 554
— рациональных чисел по модулю целых 81
— свободная 133
— свободно порожденная 135
— симметрическая степени n 76
— слов 136
— счетно порожденная 83
— характеров 130, 215
p-группа 85
групповая алгебра 363
групповое кольцо 363
— — целочисленное 371

двойственность 49, 98
U-двойственность 559
действие 72
делитель нуля 154, 166
дельта Кронекера 138
диаграмма коммутативная 38
— — функторов 211
— некоммутативная 211
дифференцирование 433
— внешнее 433
— внутреннее 433
$\mathscr{S}$-дифференцирование 433
дополнение 32, 486
— диаграммы 38
— относительное 32
— — подмодуля 486
дополнительный подмодуль 486
дуальное утверждение 50
дуальный порядок 50

единица 73, 88

закон дистрибутивности 151
замыкание алгебраическое 572
— нормальное 578
знакопеременная группа 110
значение функции на элементе 31

идеал 153
— аннуляторный 187, 429
— — максимальный 429
— — минимальный 429
— главный 166
— латеральный 258
— левый 165
— — в предкольце 472
— нильпотентный 166
— однородный 423
— первичный 452
— плотный 647
— правый 165
— — аннуляторный 187, 429
— — в предкольце 472
— — максимальный 407
— — минимальный 407
— — сингулярный 352, 482
— простой 452
— следа 188
идеализатор 224
идеалы взаимно простые 573
— комаксимальные 573
идемпотент 75
— проектирующий 102
идемпотентное множество идеалов 639
идемпотенты ортогональные 226
измельчение 424
— собственное 424
изометрия 109
изоморфизм категорий 97
— моноидов 95
— упорядоченных множеств 49
инвариантное подмножество 72
инволюция 98, 156
индекс нильпотентности 166, 167
— подгруппы 84

индуктивное множество 57
индуктивный класс 302—303
индукция математическая 65
— трансфинитная 65
инъективная размерность 456
— резольвента 456
инъективное отображение 41
инъекция 82
исключение 50

каноническая инъекция 82, 138, 140
— проекция 138, 140
кардинал 66
— множества 67
категория 88
— абелева 374
— абелевых групп 92
— аддитивная 195
— артинова 279
— вполне корефлективная 607
— высказываний 92
— Гротендика 596
— групп 92
— делимых групп 92
— дуальная 90
— идеальная 171
— инъективно богатая 216, 378
— категорий 96
— колец 156
— (конечно) замкнутая по Галуа 233
— (—) полная 312
— конкретная 92
— конормальная 316
— кополная 312
— (ко)рефлективная 607
— локально малая 320
— — нётерова 601
— малая 304
— множеств 91
— модульного типа 198
— моноидов 92
— нётерова 279
— нормальная 316
— порядковая 129
— последовательностей 93, 94
— проективно богатая 379
— противоположная 90
— сбалансированная 317
— с (конечными) (ко)произведениями 196
— — (—) суммами 326
— — левой записью морфизмов 161
— — правой записью морфизмов 161
— — прямыми пределами 303
— — точными прямыми пределами 380, 393, 597
— — (эпиморфными) образами 309
— точная 321
— центрально замкнутая 233
— частично упорядоченных множеств 92
AB3-, AB4-, AB5-категория 381, 595
AB6-категория 633
категории реверсивно эквивалентные 161
квадрат декартов 307
— кодекартов 307
— коуниверсальный 307
— универсальный 307
квантор всеобщности 28
— существования 28
Класс 35
— автодуальный 51
— дуальный 51
— замкнутый 50—51
— идеальный 171
— изоморфных объектов 95
— линейно упорядоченный 302
— направленный 302
— объектов категории, направленный по функтору (по категории) 303
— Серра 172, 609
— — слабый 644
— сопряженных элементов 111
— частично упорядоченный 302
— эквивалентности 47, 95
кокатегория 90
коллинеация 185
кольцо 151
— антисингулярное справа 485
— артиново слева 408
— — справа 192, 408
— без кручения 242
— биэндоморфизмов 162, 403
— булево 155
— — подмножеств 155
— всех линейных преобразований 163
— главных правых идеалов 169, 207
— Голди правое 438, 485
— групповое 363
— дедекиндово 462
— дифференциальных многочленов 464
— квазифробениусово 475, 560
— классически полупростое 287, 438
— когерентное слева 535
— коммутативное 152
— конечное по Дедекинду 431, 494
— косых многочленов 446
— — — обобщенное 446
— Ли 155

кольцо локальное 222, 223
— — в точке 657
— — относительно простого идеала 222
— матриц полное 177
— многочленов (полиномов) 158, 420
— многочленов от коммутирующих переменных 365
— наследственное справа 285
— некоммутативных многочленов 365
— нётерово справа 192, 411
— нулевое 151
— Ope правое 477
— первичное 166
— полугрупповое 363
— полулокальное 492, 502
— полупервичное 166
— полупримарное 538
— представимое 476
— примитивное 240, 447
— прюферово 462
— регулярное 232, 494, 529
— редуцированное 242
— самоинъективное 115, 351
— сбалансированное 242
— с инвариантным базисным числом 168
— скаляров 158
— формальных степенных рядов 420
— целостное 154, 166
— частных 495
— — относительно кручения 655
— — — мультипликативного множества 648
— — правое (классическое) 208, 282, 476, 493, 495
— — — максимальное (в смысле Джонсона) 650
— эндоморфизмов модуля 159
— — объекта 196
— $\mathscr{S}$-дифференцирований 464
FI-кольцо 371
gtp-кольцо 446
IBN-кольцо 168
ipri-кольцо 507
ipli-кольцо 507
PCI-кольцо 446
pri-кольцо 507
QI-кольцо правое 446
QF-кольцо 475
QF-1-кольцо 242
TF-кольцо правое 489
V-кольцо 437
кольца подобные 275, 406
— эквивалентные в смысле Мориты 275
кольцевое накрытие 471
комма-категория 296
коммутант 97
коммутирующие гомоморфизмы 144
— подмоноиды 144
композиция отображений 39
компонента 77
конгруэнтность 80
конечномерное представление 476
континуум-гипотеза 37, 67
константа 31, 75
кообразующий 126, 128
— наименьший 217
копредел 143
копроизведение 137
— множеств 61
— морфизмов 137
— отображений 61
корень многочлена 565
— примитивный 113
коретракция 113, 120
корефлектор 607
корефлекция 606
корреляция 185
коуниверсальный квадрат 307
коэффициент 419
коядро гомоморфизма 170
— морфизма 199, 308
критерий Бэра 207
кручение 645, 647

лемма Кёнига 69
— о бабочке 105
— о дуальном базисе 186
— о притяжении 523
— об унимодулярных строках 232
— Цорна 57
— Шура 169
— Экмана — Шопфа 213
линейно независимое семейство 167
— упорядоченное множество 52
— упорядоченный класс 302
линейное (однородное) D-дифференциальное уравнение 440
локализация кольца 571

максимальное подполе 587
— правое кольцо частных в смысле Джонсона 650
— существенное расширение 220
максимальный элемент 52
математическая индукция 65
матрица диагональная 140
— единичная 177

матрица конечно-столбцовая 140
— конечно-строчная 140
— нижняя строго треугольная 473
— нулевая 176
— подстановки 580
— транспонированная 176
$I \times J$-матрица 138
матричные единицы 177
минимальный элемент 52
многочлен 158, 419
— минимальный 570
— неприводимый 570
— приведенный 569
— сепарабельный 572
множество вполне упорядоченное 52
— линейно упорядоченное 52
— образующих категории 320
— прединициальное 316, 341
модуль антисингулярный 485
— артинов 192, 408
— без кручения 208, 479
— — — в смысле Басса 182
— бидуальный 182
— бихарактеров 215
— вполне проективный 246
— делимый 207
— дуальный 182
— инъективный 128, 205
— Σ-инъективный 223
— квазиинъективный 222
— конечно порожденный 165
— — представимый 531
— — связанный 531
— коточный 189
— левый 158
— неразложимый 222, 412
— нётеров 192, 411
— однородный 222
— определяющийся своим кольцом эндоморфизмов 241
— плоский 350
— полупростой 438
— полурефлексивный 182
— правый 158
— — над предкольцом 471
— пренебрежимый 634
— притягивающий 160, 523
— проективный 127, 170
— простой 406
— рационально-замкнутый 247
— рефлексивный 182
— сбалансированный 162, 403
— свободный 164, 167
— с инвариантным базисным числом 524
— счетно порожденный 165
— точный 162, 403
модуль характеров 215
— циклический 165
— частных 655
— $\mathscr{F}$-периодический 637
— I-полный 207,
моноид 73
— бициклический 100
— конечно порожденный 83
— мультипликативный 73
— простой 110
— противоположный 99
— счетно порожденный 83
— циклический 83
— эндоморфизмов 79, 88
мономорфизм 46, 127
— расщепляющийся 200
— собственный 127
— существенный 628
монофунктор 338
морфизм 88
— аннулирующийся другим морфизмом 308
— диагональный 137
— кодиагональный 137
— координатный 139
— копредела 299
— нулевой 119
— переводящий A в B 325
— предела 299
— предельный 299, 300
— пропускающийся через другой морфизм 118, 308
— — — объект 118
— разлагающийся 118
— расслоенный 307
— сопряжения 294
— функторов 96
$\mathscr{S}$-мономорфизм 610
морфизмы эквивалентные 192
мощность 66
мультипликативное подмножество 647

надкольцо 530
наибольший элемент 52
наименьший элемент 52
накрытие кольцевое 471
— проективное 115
наложение 41
— гомоморфное 81
— — расщепляющееся 113
— полугрупп 81
— упорядоченных множеств 49
направленное множество 304
— семейство 304
направленный класс 302
необразующий элемент 231

неподвижная точка 56
несущее множество 92
ниль-идеал 167
нильпотентный идеал 166
— элемент 167
нормализатор 87
носитель 77
— конечный 77
нуль левый 118
— многочлена 565
— правый 118

область главных правых идеалов 169, 207
— дедекиндова 462, 558
— значений 30, 88
— Коззенса 445
— определения 30, 88
— Оре правая 208, 423
— прюферова 462, 558
— целостности 154, 166
оболочка делимая 647
— инъективная 220, 603
$\mathscr{S}$-оболочка 625
образ 30, 31, 80, 309
— гомоморфный 309
образующий 126, 128
— собственный 652
обратимый элемент 73
обратный порядок 50
— предел функтора 303
— элемент 73
объединение 31, 595
— свободное 61
объект 88
— артинов 192
— без кручения 647
— — $\mathscr{S}$-кручения 626
— инициальный 118
— инъективный 128
— конечно порожденный относительно U 397
— конечный 118
— малый 202
— начальный 118
— не имеющий кручения 647
— — — $\mathscr{S}$-кручения 626
— нётеров 192
— нулевой 118
— однородный 260
— периодический 647
— $\mathscr{S}$-периодический 626
— полупростой 647
— $\mathscr{S}$-полупростой 626
— порожденный α элементами 165
— проективный 127
— простой 173
объект свободный 131
— счетно порожденный 165
— финальный 118
— $\mathscr{S}$-замкнутый 619
объекты эквивалентные 95
ограничение отображения 40
одиночка 30
оператор 72
операция 72
определяющие соотношения 135, 366
орбита 72
ординал 64
— конечный 67
— непредельный 65
— предельный 65
— счетный 67
— целый 65
ортогональное представление единицы 226
ортогональные идемпотенты 226
отношение антисимметричное 48
— бинарное 46
— рефлексивное 46
— симметричное 47
— транзитивное 47
— эквивалентности 46
отображение 30
— вычисляющее 545
— биаддитивное 353
— биективное 41
— билинейное 353, 512
— взаимно однозначное 41, 49
— диагональное 178
— идеальное 588
— инъективное 41
— обратное 42
— — левое 42
— — правое 42
— постоянное 31
— сбалансированное 354
— сюръективное 41
— тождественное 40
— эластичное 353

пара двойственности 98
— эквивалентности 96
парадокс Кантора 44
— Рассела 44
перенос 109
пересечения 31, 32, 308
перестановка 41
— нечетная 110
— четная 110
переменная 419
периодическая часть 86, 647
подгруппа 74

подгруппа единичная 74
— нормальная 80
— сопряженная 87
p-подгруппа силовская 112
подкатегория 89
— замкнутая 637
— кофинальная 304
— локализующая 618
— полная 89
— рефлективная 607
— Серра 609
— — слабая 644
подкольцо 152
— Галуа 191
подмодуль 165
— вполне инвариантный 222
— дополнительный 486
— замкнутый 464, 486, 497
— косущественный 223
— максимальный 406
— минимальный 406
— неприводимый относительно пересечения 412
— $\cap$-неприводимый 412
— собственный 165
— сингулярный 481
— существенный 218
подмножество 29
— инвариантное 72
— собственное 30
подмоноид 73
подобъект 165, 192
— конечно порожденный 165
— нормальный 316
подоперация 73
подполе Галуа 578
подполугруппа 73
поле 152
— алгебраически замкнутое 565
— Галуа 288
— разложения многочлена 570
— расщепления 587
— совершенное 576
— универсальное дифференциальное 443
полный прообраз 309
полугруппа 73
— абелева 74
— коммутативная 74
— конечно порожденная 83
— моногенная 83
— мультипликативная 73
— с сокращением 84
— счетно порожденная 83
— циклическая 83
полугрупповая алгебра 363
полугрупповое кольцо 363
полупростой модуль 438
— фактор 576
порядок 48
— дуальный 50
— полугруппы 84
— правый 282, 426
$\overset{l}{\sim}$-, $\overset{r}{\sim}$-, $\sim$-порядок максимальный 507
— элемента 84
R-порядок 584
последовательность короткая точная 204
— левая точная 204, 321
— неточная 203, 212
— правая точная 204, 321
— расщепляющаяся 120
— средняя точная 204
— точная 82, 203, 321
— элементов 31
правая глобальная размерность 456
правое умножение 162
правые порядки эквивалентные 283, 493
— — — слева 283, 493
— — — справа 283, 493
предел функтора 143
прединициальное множество 316, 341
предкольцо 469
предкообразующий 194
предкручение 645
предложение Мориты 405
— об идельности 171
— о строении прямой суммы 145
— — сужении 257
предобразующий 194
представление образующими и определяющими соотношениями для алгебры 366
— — — — — — — группы 135
— конечномерное 476
— левое регулярное 563
— объекта в виде произведения 138
— правое регулярное 563
преобразование естественное 95
— полулинейное 185, 560
принцип двойственности 51
— идеализации 413—414
продолжение отображения 40
проективная размерность 185
проективное накрытие 223
— пространство 185
проекция 85, 136
— произведения 136
произведение 136
— декартово 34
— кардинальное 68
— колец 157

произведение конечное 138
— матриц 176
— множеств 59
— морфизмов (объектов) 137
— ординальное 66
— отображений 39, 59
— подкатегорий 639
— полупрямое 148
— прямое 77
— — колец 157
— расслоенное 307
— скрещенное 589
— тензорное 513
— формальных степенных рядов 419
— элементов 74
производная подгруппа 97
прообразующий 246
противоположный элемент 73
прямая 185
прямое слагаемое 77, 113
прямой предел функтора 303
— сомножитель 77, 113
псевдонуль левый 316, 341
пустое множество 30

радикал Джекобсона 173
— идемпотентный 643
— категории 643
— модуля 230
— наследственный 647
радикальный фильтр 640
размерность векторного пространства 168
— глобальная правая 456
— Голди 260
— гомологическая 456
— инъективная 456
— проективная 456
ранг свободной группы 133
расширение Галуа 578
— группы 148
— конечное 577
— несепарабельное 573
— нормальное 577
— объекта 602
— — собственное 602
— — существенное 602
— — тривиальное 602
— рациональное 246
— сепарабельное 573
— скалярное 563
— существенное 218
— — максимальное 220
— универсальное 443
регулярный элемент 206
— слева элемент 206
— справа элемент 206
реверсивная эквивалентность 161
редуцированное слово 136
ретракт 120
ретракция 113, 120
рефлексивность 46
решетка 54

свойство вполне кольцевое 279
— инвариантное в смысле Мориты 278, 498
— категорное 119
сегмент 63
— начальный 63
семейство независимое 147
— подобъектов, порождающих объект 326
— свободное 32
— согласованное с функтором 299
— элементов (множеств), индексированных множеством 31
сепарабельный элемент 573
симметричность 47
система аксиом 50
— образующих 83, 135, 167, 366
ситуация предэквивалентности 546
— эквивалентности 546
скаляр 158
скрещенное произведение 589
след матрицы 579
— модуля 188
сложение 73
— покомпонентное 77
— покоординатное 77
— поточечное 77
смежный класс левый 80
сопряжение 111
сопряженная пара 294
составляющий морфизма 308
спаренные множества 187
степень 66, 158
— множества 34
структура 54
сумма кардинальная 68
— матриц 176
— ординальная 66
— подобъектов 326
— прямая 77, 144

тело 152
— частных правое 208, 423
тензорное произведение 513
теорема Бернсайда 568
— Веддербёрна — Артина 287, 453
— — — основная 408
— Гильберта о базисе 421
— — о нулях 572
— — — сизигиях 459

теорема Кантора 44
— Кёнига о графах 69
— Машке 580
— Мориты 243, 249, 269, 275, 549, 551, 554
— — и Попеску—Габриеля 269, 360, 630
— Нётер об изоморфизме вторая 104, 332
— — — — первая 103, 330
— Нильсона — Шраера о подгруппе 148
— о глобальной размерности 460
— — замене колец 457, 458, 523
— — неравенствах 457
— — полном точном вложении 632
— — соответствии 102
— — — для проективных модулей 249
— — сопряженном функторе общая 342
— — — — специальная 344
— — точном вложении 606
— основная Галуа 578
— — для абелевых групп 115
— — проективной геометрии 186
— Силова 111, 112
— Фейса — Утуми 499
— Шрёдера — Бернштейна 43
топологизирующее множество идеалов 636
топология конечная 175
точная последовательность 82, 203, 321
— — короткая 204
— — левая 204, 321
— — правая 204, 321
— — средняя 204
транзитивное множество 64
транзитивность 47
транспозиция 109
трансфинитная индукция 65

умножение 73
— матриц 176
— поточечное 77
универсальный квадрат 307
универсум 37
упорядоченная пара 30
упорядоченный подкласс 302
упорядочивание по включению 48
уравнитель 305
условие максимальности 53
— — для аннуляторных идеалов 430
— — — прямых сумм 424
— минимальности 53
— обрыва возрастающих цепей 53
условие обрыва убывающих цепей 53
— Оре 208

фактор полупростой 576
факторгруппа 81
факторкатегория 610
факторкольцо 153
фактормодуль 165
факторобъект 192
формальный степенной ряд 419
формула разложения на орбиты 111
формулы де Моргана 32
функтор 90
— аддитивный 196
— бихарактеров 130
— включения 91
— возведения в степень 179
— вполне унивалентный 120
— двойственности 91, 98
— диагональный 298
— дуальный второй 98
— — первый 98
— дуализирующий свойство 119
— забывающий 92
— канонический 613
— ковариантный 89
— — основной 92
— контравариантный 89
— — основной 93
— копредела 143, 299
— копредельный 143
— косопряженный 294
— локализующий 618
— непрерывный слева 333, 520
— наследственный 647
— обладающий свойством P поточечно 391
— обратного предела 303
— основной 92
— — со значениями в категории 93
— отражающий свойство 120
— перестановочный с копределами 272
— — — (малыми, конечными) пределами 333
— перехода к факторугруппе по коммутанту 97
— полный 90, 120
— полуточный 204, 322
— постоянный 298
— превращающий свойство P в P^* 120
— предела 143, 299
— предельный 143
— представимый 346
— представительный 120

функтор представления 124
— пропускающийся через категорию 211
— прямого предела 303
— свободы 131, 294
— сечения 618
— сопряженный 294
— — левый 519
— — слева 294, 519
— — справа 294
— составной 91
— сохраняющий копроизведения 272
— — (малые, конечные) пределы 333
— — нуль 120
— — свойство 119
— тождественный 91
— точный 204, 321
— — слева 170, 204, 321, 322
— — справа 170, 204, 322
— унивалентный 90, 120
— уточняющий 623
— k-линейный 362
— частный 293
функторы сопряженные 294
функция 30
— Йонеды 124
— следа 582

характеристика кольца 153

центр полугруппы 75, 99
— категории 280
— кольца 152
централизатор 74
центральный идемпотент 226
— ряд возрастающий 109
— — убывающий 109
центральный элемент 226
цепь 52
цикл 109
цоколь 230

частично упорядоченное множество 48
— — — полное сверху 56
— — — — — условно 56
— упорядоченный класс 302
число базисное 167
— кардинальное 66
— неэквивалентных объектов 95
— ординальное 64
— порядковое 64

экспонента 86
— по модулю n 42, 113
эквивалентность 95—97
— естественная 96
— обратная 97
$\mathscr{S}$-эквивалентность 610
эквивалентные множества 42
— категории 97
— морфизмы 192
— объекты 95
— правые порядки 288, 493
— слева правые порядки 288, 493
— слова 136
— справа правые порядки 288, 493
эндоморфизм 79
эпиморфизм 46, 127
— минимальный 223
$\mathscr{S}$-эпиморфизм 610
эпифунктор 338

ядро гомоморфизма 80
— морфизма 199, 307
— функтора 609

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
К русскому изданию 7
Предисловие 7
Благодарности 10
Введение 13
Рекомендации читателю 23
Предисловие к т. 1 25
Теоретико-множественное введение 27

Часть I

ВВЕДЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ:
ПОЛУГРУППА, МОНОИД, ГРУППА, КАТЕГОРИЯ,
КОЛЬЦО И МОДУЛЬ 72

Гл. 1. Операции: полугруппа, моноид, группа и категория 72
Гл. 2. Произведение и копроизведение 117
Гл. 3. Кольца и модули 150
Гл. 4. Теорема о соответствии для проективных модулей и строение простых нётеровых колец 238
Гл. 5. Пределы, сопряженные функторы и алгебры 291
Гл. 6. Абелевы категории 374

Часть II

СТРОЕНИЕ НЕТЕРОВЫХ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ 400

Гл. 7. Общие теоремы Веддербёрна 402
Гл. 8. Полупростые модули и гомологическая размерность 449
Гл. 9. Нётеровы полупервичные кольца 476
Гл. 10. Порядки в полулокальных кольцах матриц 492

Часть III

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА 511

Гл. 11. Тензорное произведение и плоские модули 512
Гл. 12. Теоремы Мориты и группа Пикара 541
Гл. 13. Алгебры над полями 562

Часть IV

СТРОЕНИЕ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ 592

Гл. 14. Категории Гротендика 595
Гл. 15. Факторкатегории и локализующие функторы 609
Гл. 16. Теория кручений, радикалы и идемпотентные топологизирующие и мультипликативные множества 636
Список литературы 658
Список обозначений 675
Предметный указатель 677

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ИБ № 962

К. Фейс

АЛГЕБРА: КОЛЬЦА, МОДУЛИ И КАТЕГОРИИ

(Т. 1)

Редакторы Д. Борисова и Г. Цукерман. Художник Е. Самойлов.
Художественный редактор В. Шаповалов. Технический редактор Н. Толстякова.
Корректор Т. Пашковская.

Сдано в набор 29/IV 1977 г. Подписано к печати 31/X 1977 г.
Бум. тип. № 1 $60\times90^{1}/_{16}=21{,}50$ бум. л. Печ. л. 43,00 Уч.-изд. л. 38,25
Изд. № 1/8492 Цена 3 р. 10 к. Зак. № 0217

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.