A. GROTHENDIECK

SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Tôhoku Mathematical Journal, second series,
vol. 9, № 2, 3, 1957

THE TÔHOKU UNIVERSITY
SENDAI, JAPAN

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

А. ГРОТЕНДИК

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Перевод с французского
Б. Б. ВЕНКОВА, А. В. РУКОЛАЙНЕ,
Б. В. СТЕПАНОВА

Под редакцией
А. Л. ОНИЩИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Публикуемая в этой брошюре работа А. Гротендика посвящена теории пучков — бурно развивающейся области современной алгебраической топологии, которая находит себе многочисленные приложения в различных вопросах алгебры, геометрии и анализа. Автор принадлежит к числу математиков, наиболее интенсивно работающих в данной области. Основная идея настоящей работы заключается в том, что теория когомологий с коэффициентами в пучках рассматривается в рамках гомологической алгебры в общих абелевых категориях. Более подробное изложение теории пучков можно найти в выпускаемой Издательством иностранной литературы монографии Годемана. Настоящая брошюра рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакция литературы
по математическим наукам

ВВЕДЕНИЕ[1])

I. Содержание работы.

Настоящая работа возникла из попытки использовать формальную аналогию между теорией когомологий пространства с коэффициентами в пучке [4], [5] и теорией производных функторов от функторов модулей [6] для того, чтобы найти общую схему, позволяющую объединить эти и другие теории.

Эта общая схема намечена в гл. I, тема которой совпадает с темой работы [3]. Однако эти два изложения нигде не перекрываются, за исключением п. 1.4. Я обращаю особое внимание на то, чтобы с помощью понятия бесконечных сумм и произведений в абелевых категориях дать удобные критерии для существования „достаточного количества“ инъективных или проективных объектов, без чего невозможно существенное приложение гомологической техники. Кроме того, для удобства читателя довольно большое место уделено изложению функторного языка (п. 1.1, 1.2, 1.3). В п. 1.3 до определения абелевой категории вводится понятие аддитивной категории (оно оказывается удобным, например, при изучении спектральных функторов в гл. II).

Глава II содержит очерк существенных моментов гомологического формализма в абелевых категориях. Появление книги [6] позволило мне быть очень кратким, так как техника Картана — Эйленберга переносится на нашу схему без всяких изменений. Однако п. 2.1 и 2.2 написаны так, чтобы не исключать абелевых категорий, не содержащих достаточно

[1]) Существенные результаты глав I, II, IV и частично главы III возникли весной 1955 г. в связи с семинаром по гомологической алгебре, который проводился в Канзасском университете.

большого количества инъективных или проективных объектов. В следующих пунктах используется в полную силу обычная техника резольвент. Пункты 2.4 и 2.5 содержат различные дополнения и являются необходимыми для понимания последующего. В частности, теорема 2.4.1 дает механический способ получать бо́льшую часть известных спектральных последовательностей (и во всяком случае, *все* спектральные последовательности, встречающиеся в этой работе).

В гл. III мы развиваем теорию когомологий пространства с коэффициентами в пучке, включая сюда классические спектральные последовательности Лере. Изложение здесь является более гибким, чем в [4], [15]. В частности, почти все существенные результаты этой главы (к следующим главам это не относится) получены без ограничений на природу рассматриваемых пространств. Поэтому теория приложима также и к неотделимым пространствам, которые встречаются в абстрактной алгебраической геометрии или „арифметической геометрии" [8], [15]. Очень ценными для развития теории были беседы с Р. Годеманом и А. Картаном. В частности, оказались очень полезными введенные Годеманом *вялые* и *мягкие пучки*, которые во многих вопросах выгодно заменяют тонкие пучки. Более полное изложение, к которому мы отсылаем за различными деталями, имеется в книге Р. Годемана [9], подготавливаемой к печати.

В гл. IV исследуется неклассический вопрос о функторах Ext для пучков модулей. В частности, там находится полезная спектральная последовательность, которая связывает „глобальные" функторы Ext с „локальными" функторами Ext. В гл. V рассматривается более сложная ситуация, когда на рассматриваемых пространстве X, пучке колец $\mathcal{O}$ над X и пучках модулей над $\mathcal{O}$ действует некоторая группа G. В частности, в п. 5.2 получен результат, который, как мне кажется, является окончательной формой „чеховской" когомологической теории пространств с группой (не топологической) операторов, допускающих неподвижные точки. Для его выражения нужно ввести новые функторы $H^n(X; G, \mathcal{A})$ (которые неявно рассматривались прежде во многих частных случаях). Найдены два спектральных функтора, сходящихся к $H^n(X; G, \mathcal{A})$, с замечательными начальными членами.

II. Приложения.

Из-за недостатка места я смог дать в этой работе очень мало приложений использованной техники (см. главным образом п. 3.4 и 3.6), указывая только мимоходом некоторые из них. Отметим еще следующие приложения:

a) Понятие функторов Ext для пучков модулей позволяет дать следующую наиболее общую формулировку „алгебраической теоремы двойственности" Серра. Если $\mathcal{A}$ — когерентный алгебраический пучок [15] над n-мерным проективным алгебраическим многообразием без особенностей, то двойственная к $H^p(X, \mathcal{A})$ группа канонически отождествляется с $\mathrm{Ext}^{n-p}_{\mathbf{O}}(X; \mathcal{A}, \mathbf{\Omega}^n)$, где $\mathbf{O}$ (соответственно $\mathbf{\Omega}^n$) — пучок ростков регулярных функций (соответственно регулярных n-форм) над X.

b) Весь формализм, развитый в гл. III — V, может быть применен к абстрактной алгебраической геометрии. В частности, он позволяет распространить на полные алгебраические многообразия различные результаты, доказанные Серром для проективных многообразий [15], [16], [17].

c) Кажется, что функторы $H^n(X; G, \mathcal{A})$ являются естественным средством для развития общей теории приведенных степеней Стинрода в пучках и теории когомологии симметрических степеней пространств. Последняя теория применима также в алгебраической геометрии для характеристики p.

III. Пробелы.

Чтобы не удлинять изложения, я обошел молчанием вопросы, связанные с мультипликативной структурой, несмотря на то, что они являются весьма существенными в приложениях понятий гл. III — V. Заметим, впрочем, что, по-видимому, в гомологической алгебре еще не существует удовлетворительной теории мультипликативных структур, которая имела бы необходимую степень общности и простоты (гл. XI из [6] может служить яркой иллюстрацией положения дел в этой области)[1]. Удовлетворительное изложение

[1]) П. Картье недавно нашел удовлетворительную общую формулировку для мультипликативных структур в гомологической алгебре. Изложение появится в своем месте.

умножений в когомологиях пучков можно найти в [9]. На многочисленные другие пробелы читатель сам обратит внимание.

В заключение я счастлив выразить благодарность Р. Годеману, А. Картану и Ж. П. Серру, интерес которых был необходимым стимулом при редактировании настоящей работы.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЯХ

1.1. Категории.

Напомним, что *категорией* называется непустой класс $\mathbf{C}$ объектов, на котором для любой пары $A, B \in \mathbf{C}$ задано множество $\mathrm{Hom}(A, B)$ (называемое множеством *морфизмов* объекта A в B) и для любой тройки объектов $A, B, C \in \mathbf{C}$ определено отображение $(u, v) \to vu$ множества $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C)$ в $\mathrm{Hom}(A, C)$ (называемое *композицией морфизмов*). При этом должны выполняться следующие две аксиомы: композиция морфизмов *ассоциативна*; для всякого $A \in \mathbf{C}$ в $\mathrm{Hom}(A, A)$ существует элемент I_A (называемый *тождественным морфизмом* объекта A), который является левой и правой единицами относительно композиции морфизмов (в этом случае I_A определен однозначно). Наконец, мы будем предполагать, что задание морфизма u однозначно определяет его „начальный" и „конечный" объекты, иными словами, если (A, B) и (A', B') — две различные пары объектов из $\mathbf{C}$, то множества $\mathrm{Hom}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}(A', B')$ не имеют общих элементов.

Если $\mathbf{C}$ — категория, то *дуальная категория* $\mathbf{C}^\circ$ определяется как категория, имеющая те же объекты, что и $\mathbf{C}$, но в которой множество $\mathrm{Hom}(A, B)^\circ$ морфизмов объекта A в B отождествляется с $\mathrm{Hom}(B, A)$; композиция морфизмов u и v в $\mathbf{C}^\circ$ определяется как композиция морфизмов v и u в $\mathbf{C}$. Всякое понятие или утверждение, относящееся к некоторой категории, допускает дуальное понятие или утверждение („процесс обращения стрелок"). Это будет полезно в приложениях, но окончательные формулировки будут чаще всего предоставляться читателю.

Пусть заданы категория $\mathbf{C}$ и морфизм $u: A \to B$ в $\mathbf{C}$. Для всякого $C \in \mathbf{C}$ определены отображение $v \to uv$: $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$ и отображение $w \to wu$: $\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$. Говорят, что u есть *мономорфизм* или что

и инъективен (соответственно u — ***эпиморфизм*** или ***суперъективен***), если первое (соответственно второе) из двух указанных отображений всегда инъективно[1]). Морфизм u называется *биективным*, если u одновременно инъективен и суперъективен. Элемент $v \in \mathrm{Hom}(B, A)$ называется ***левым*** (соответственно ***правым***) ***обратным*** для u, если $vu = I_A$ (соответственно $uv = I_B$); v называется ***обратным*** для u, если он одновременно является левым и правым обратным для u (в этом случае он определен однозначно). Морфизм u называется *изоморфизмом*, если u допускает обратный морфизм. Если u имеет левый (соответственно правый) обратный, то u инъективен (соответственно суперъективен); следовательно, изоморфизм всегда биективен (обратное, вообще говоря, неверно).

Композиция двух мономорфизмов (эпиморфизмов) снова есть мономорфизм (эпиморфизм). Следовательно, композиция двух биективных морфизмов снова биективна; точно так же композиция двух изоморфизмов есть изоморфизм. Если композиция двух морфизмов vu есть мономорфизм (соответственно эпиморфизм), то u (соответственно v) будет обладать тем же свойством. Хотя утверждения подобного типа будут, очевидно, необходимы в дальнейшем, мы часто не будем их воспроизводить в явном виде, ограничиваясь тем, что будем аккуратно формулировать определения.

Рассмотрим два мономорфизма $u: B \to A$ и $u': B' \to A$. Говорят, что u' *мажорирует* или *содержит* u, и пишут $u \leqslant u'$, если u разлагается в композицию $u'v$, где v — некоторый морфизм $B \to B'$ (который в этом случае определяется однозначно). Это дает отношение *квазипорядка*[2]) в классе мономорфизмов со значениями в A. Будем говорить, что два таких мономорфизма u и u' *эквивалентны*, если каждый из них мажорирует другой. В этом случае соответствующие морфизмы $B \to B'$ и $B' \to B$ являются обратными друг другу. Выберем (например, с помощью символа τ Гильберта) некоторый мономорфизм в каждом классе эквивалентных мономорфизмов; выбранные мономорфизмы назовем ***подобъектами*** объекта A. Итак, подобъектом объекта A является не просто объект категории $\mathbf{C}$, но объект B, снабженный мономорфизмом $u: B \to A$, который называется ***каноническим вложением*** объекта B в A. (Тем не менее чтобы не усложнять языка, подобъект часто обозначают символом соответствующего объекта из $\mathbf{C}$.) Отношение мажорирования определяет в классе подобъектов объекта A отношение *порядка* (а не только квазипорядка). Из сказанного выше следует, что подобъекты объекта A, содержащиеся в некотором подобъекте B, отождествляются с подобъектами объекта B, причем это отождествление сохраняет естественные отношения порядка. (Это не означает, конечно, что подобъект объекта B *равен* подобъекту объекта A, так как это влекло бы за собой $A = B$.)

Дуальным образом рассмотрение предпорядка на классах эпиморфизмов объекта A позволяет определить упорядоченный класс ***фактор-объектов*** объекта A.

Пусть $A \in \mathbf{C}$ и пусть $(u_i)_{i \in I}$ — непустое семейство морфизмов $u_i: A \to A_i$. Тогда для всякого $B \in \mathbf{C}$ отображения $v \to u_i v$ множества $\mathrm{Hom}(B, A)$ в $\mathrm{Hom}(B, A_i)$ определяют естественное отображение

$$\mathrm{Hom}(B, A) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(B, A_i).$$

Говорят, что u_i определяют *представление объекта A в качестве прямого произведения объектов A_i*, если для любого B предыдущее отображение биективно. Если это так и если A' — другой объект из $\mathbf{C}$, представленный как произведение объектов A'_i с помощью морфизмов $u'_i: A' \to A'_i$ (множество индексов то же самое), то для всякого семейства (v_i) морфизмов $v_i: A_i \to A'_i$ существует единственный морфизм $v: A \to A'$, такой, что $u'_i v = v_i u_i$ для всех i. Отсюда следует, что если v_i — изоморфизмы, то таково же и v. В частности, если v_i — тождественные морфизмы I_{A_i}, то два объекта A и A', представленные как произведение семейства объектов A_i, канонически изоморфны. Естественно выбрать из всех таких систем $(A, (u_i))$ одну систему (напри-

[1]) Отображение f множества A в B называется *инъективным* (соответственно *суперъективным*), если оно взаимно однозначно (соответственно отображает A на B). Отображение называется *биективным*, если оно одновременно инъективно и суперъективно. — *Прим. ред.*

[2]) Отношение $x \leqslant y$, заданное в некотором семействе F, называется отношением *квазипорядка*, если оно обладает следующими свойствами: $x \leqslant x$ $(x \in F)$; если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ $(x, y, z \in F)$. Семейство, в котором определено отношение квазипорядка, называется *квазиупорядоченным* семейством. — *Прим. ред.*

мер, с помощью символа τ Гильберта), которую и называют *произведением* семейства объектов $(A_i)_{i \in I}$. Таким образом, это не просто объект A из $\mathbf{C}$, но объект, снабженный семейством (u_i) морфизмов в A_i, которые называются *каноническими проекциями произведения* на сомножители A_i. Произведение объектов A_i (если оно существует) обозначают через $\prod_{i \in I} A_i$. Если I сводится к одному элементу i, то произведение отождествляется с A_i. Говорят, что $\mathbf{C}$ — *категория с произведениями*, если произведение любых двух объектов всегда существует (тогда существует произведение любого непустого конечного семейства объектов из $\mathbf{C}$). Говорят, что $\mathbf{C}$ — *категория с бесконечными произведениями*, если в $\mathbf{C}$ всегда существует произведение любого непустого семейства объектов. Мы уже видели, что если имеются два произведения $A = \prod_{i \in I} A_i$ и $B = \prod_{i \in I} B_i$, соответствующие одному и тому же множеству индексов I, то семейство (v_i) морфизмов $A_i \to B_i$ каноническим образом определяет морфизм $v: A \to B$, который называется *произведением* морфизмов v_i и иногда обозначается через $\prod_{i \in I} v_i$. Если v_i — мономорфизмы, то таково же и их произведение; аналогичное утверждение для эпиморфизмов неверно (как можно видеть на примере категории пучков на фиксированном топологическом пространстве).

Дуальные соображения позволяют ввести понятие *представления объекта A в качестве суммы* семейства объектов A_i с помощью морфизмов $u_i: A_i \to A$ (для всякого $B \in \mathbf{C}$ естественное отображение

$$\operatorname{Hom}(A, B) \to \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(A_i, B)$$

должно быть биективным). *Прямая сумма* $\bigoplus_{i \in I} A_i$ снабжена *каноническими вложениями* $A_i \to \bigoplus_{i \in I} A_i$ (которые могут и не быть мономорфизмами, несмотря на свое название). Аналогично определяется *сумма морфизмов* $u_i: A_i \to B_i$. Если u_i — эпиморфизмы, то такова же и их сумма.

1.2. Функторы.

Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ — две категории. Напомним, что *ковариантным функтором* из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ называют „функцию" F, которая каждому объекту $A \in \mathbf{C}$ сопоставляет объект $F(A)$ из $\mathbf{C}'$ и каждому морфизму $u: A \to B$ из $\mathbf{C}$ — морфизм $F(u): F(A) \to F(B)$ таким образом, что имеют место соотношения $F(I_A) = I_{F(A)}$ и $F(vu) = F(v)F(u)$. Аналогично определяются *контравариантные функторы* из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ (которые являются также ковариантными функторами из $\mathbf{C}^\circ$ в $\mathbf{C}'$ или из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'^\circ$). Можно также определить функторы от многих переменных, или *мультифункторы*, ковариантные по одним переменным и контравариантные по другим. Но мы здесь ограничимся для простоты функторами по одной переменной. Композиция функторов определяется как композиция „функций". Эта композиция ассоциативна, и „тождественные функторы" играют роль единиц.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — две фиксированные категории, F и G — два ковариантных функтора из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$. *Функторным морфизмом* f функтора F в G (некоторые авторы называют его также „естественным преобразованием" функтора F в G) называется „функция", которая каждому объекту $A \in \mathbf{C}$ сопоставляет морфизм $f(A): F(A) \to G(A)$ таким образом, что для любого $u: A \to B$ из $\mathbf{C}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \\ {\scriptstyle f(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(B)} \\ G(A) & \xrightarrow{G(u)} & G(B) \end{array}$$

Композиция функторных морфизмов $F \to G$ и $G \to H$ определяется очевидным образом. Эта композиция ассоциативна, и „тождественный морфизм" функтора F является единицей для композиции функторных морфизмов. (Следовательно, если $\mathbf{C}$ есть множество, то функторы из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ снова образуют категорию.) Заметим, наконец, что композиция GF двух функторов $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ и $G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$ формально может рассматриваться как бифунктор по отношению к аргументам G и F: функторный морфизм $G \to G'$ (соответственно $F \to F'$) определяет функторный морфизм $GF \to G'F$ (соответственно $GF \to GF'$).

Эквивалентностью категории $\mathbf{C}$ с категорией $\mathbf{C}'$ называется система (F, G, φ, ψ), образованная ковариантными функторами $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, $G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ и гомоморфизмами[1])

[1]) Иногда в дальнейшем автор употребляет для обозначения функторного морфизма термин „гомоморфизм". — *Прим. перев.*

функторов $\varphi: 1_{\mathbf{C}} \to GF$, $\psi: 1_{\mathbf{C}'} \to FG$ (где $1_{\mathbf{C}}$, $1_{\mathbf{C}'}$ суть тождественные функторы в $\mathbf{C}$, соответственно в $\mathbf{C}'$), такими, что для всяких $A \in \mathbf{C}$ и $A' \in \mathbf{C}'$ композиции морфизмов

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi(A))} FGF(A) \xrightarrow{\psi^{-1}(F(A))} F(A),$$

$$G(A') \xrightarrow{G(\psi(A'))} GFG(A') \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(A'))} G(A')$$

являются тождественными морфизмами объектов $F(A)$ и $G(A')$ соответственно. Тогда для каждой пары A, B объектов из $\mathbf{C}$ отображение $f \to F(f)$ множества $\mathrm{Hom}(A, B)$ в $\mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ биективно и обратным к нему является отображение $g \to G(g)$ множества $\mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ в множество $\mathrm{Hom}(GF(A), GF(B))$, которое отождествляется с $\mathrm{Hom}(A, B)$ при помощи изоморфизмов $\varphi(A): A \to GF(A)$ и $\varphi(B): B \to GF(B)$. Композиция эквивалентностей между категориями определяется как композиция функторов. Две категории называются *эквивалентными*, если между ними существует эквивалентность. Такие категории обычно не будут различаться в тексте. Полезно, однако, подчеркнуть различие между этим понятием и гораздо более узким понятием *изоморфизма* (которое определяется, если рассматриваемые категории являются множествами). Пусть $\mathbf{C}$ — непустое множество и пусть для каждой пары объектов A, $B \in \mathbf{C}$ множество $\mathrm{Hom}(A, B)$ содержит только один элемент. Тогда $\mathbf{C}$ превращается в категорию (с единственно возможным законом композиции $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$). Две построенные таким образом категории всегда будут эквивалентны, но они не будут изоморфны, если они не равномощны. Заметим, что ни одна из встречающихся на практике эквивалентностей категорий не является изоморфизмом.

1.3. Аддитивные категории.

Аддитивная категория — это категория $\mathbf{C}$, в которой для каждой пары (A, B) объектов из $\mathbf{C}$ на множестве $\mathrm{Hom}(A, B)$ определена структура абелевой группы таким образом, что композиция морфизмов является билинейным отображением. Кроме того, предполагается, что существуют сумма и произведение любых двух объектов A, B из $\mathbf{C}$. Впрочем, достаточно постулировать существование суммы *или* произведения объектов A и B. Существование другого объекта легко выводится отсюда, и, более того, оказывается,

что $A \oplus B$ канонически изоморфна произведению $A \times B$. (Предположим, например, что существует $A \times B$. Рассмотрим морфизмы $A \to A \times B$ и $B \to A \times B$, имеющие вид $(I_A, 0)$ и $(0, I_B)$ соответственно. Легко проверить, что они дают представление объекта $A \times B$ в виде прямой суммы объектов A и B.) Наконец, мы постулируем существование такого объекта A из $\mathbf{C}$, что $I_A = 0$. Будем называть его нулевым объектом или *нулем* категории $\mathbf{C}$. Это условие эквивалентно тому, что $\mathrm{Hom}(A, A) = 0$, или также следующему требованию: для каждого $B \in \mathbf{C}$ группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ [или $\mathrm{Hom}(B, A)$] состоит только из нуля. Если A и A' — два нулевых объекта, то существует единственный изоморфизм объекта A на A' [а именно, единственный нулевой элемент группы $\mathrm{Hom}(A, A')$!]. Отождествим все нулевые объекты из $\mathbf{C}$ с одним из них, который будем для сокращения записи обозначать через 0.

Категория, дуальная к аддитивной категории, также является аддитивной категорией.

Пусть $\mathbf{C}$ — аддитивная категория, u: $A \to B$ — морфизм в $\mathbf{C}$. Для того чтобы u был мономорфизмом (соответственно эпиморфизмом), необходимо и достаточно, чтобы не существовало ненулевого морфизма, композиция которого справа с u (соответственно слева с u) дает нуль. Назовем *обобщенным ядром* морфизма u всякий мономорфизм i: $A' \to A$, такой, что морфизмы $C \to A$, являющиеся правыми делителями нуля для u, совпадают с теми, которые разлагаются в композицию $C \to A' \xrightarrow{i} A$. Такой мономорфизм определен с точностью до эквивалентности (см. п. 1.1). Следовательно, среди обобщенных ядер морфизма u (если они существуют) имеется в точности одно, являющееся подобъектом объекта A. Назовем его *ядром* морфизма u и будем обозначать через $\mathrm{Ker}\, u$. Дуальным образом определяется *коядро* морфизма u (которое является фактор-объектом объекта B, если оно существует); обозначим его через $\mathrm{Coker}\, u$. Назовем *образом* (соответственно *кообразом*) морфизма u ядро его коядра (соответственно коядро его ядра), если оно существует [1]). Это,

[1]) Более естественное определение образа морфизма u получается, если взять минимальный из таких подобъектов B' объекта B (если такие существуют), что u возникает из некоторого морфизма $A \to B'$. Это определение эквивалентно определению в тексте только в том случае, когда $\mathbf{C}$ — *абелева* категория (см. п. 1.4).

следовательно, подобъект объекта B (соответственно фактор-объект объекта A); его обозначают через $\operatorname{Im} u$ (соответственно $\operatorname{Coim} u$). Если u имеет образ и кообраз, то существует единственный морфизм $\bar{u}$: $\operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$, такой, что u разлагается в композицию

$$A \to \operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u \to B,$$

где крайние морфизмы являются каноническими.

Функтор F на одной аддитивной категории $\mathbf{C}$ со значениями в другой аддитивной категории $\mathbf{C}'$ называется *аддитивным функтором*, если для любых двух морфизмов u, v: $A \to B$ из $\mathbf{C}$ имеем $F(u+v) = F(u) + F(v)$. Аналогичное определение дается для мультифункторов. Композиция аддитивных функторов является аддитивным функтором. Если функтор F аддитивен, то F преобразует конечную прямую сумму объектов A_i в прямую сумму объектов $F(A_i)$.

1.4. Абелевы категории.

Абелевой категорией называют аддитивную категорию $\mathbf{C}$, удовлетворяющую двум дополнительным аксиомам (которые являются автодуальными):

АВ 1). *Любой морфизм допускает ядро и коядро* (ср. п. 1.3).

АВ 2). *Пусть u — морфизм из* $\mathbf{C}$. *Тогда канонический морфизм* $\bar{u}$: $\operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$ (ср. п. 1.3) есть изоморфизм.

В частности, отсюда следует, что *биективный морфизм есть изоморфизм*. Заметим, что существуют многочисленные примеры аддитивных категорий, в которых выполнена аксиома АВ 1) и в которых морфизм

$$\bar{u}: \operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$$

всегда биективен, но не обязательно является изоморфизмом. Такова, например, аддитивная категория отделимых (хаусдорфовых) топологических модулей над заданным топологическим кольцом, имеющая в качестве морфизмов непрерывные гомоморфизмы, или категория абелевых групп с *фильтрацией*. Другой пример менее очевиден — это аддитивная категория голоморфных расслоенных пространств с векторным слоем над одномерным комплексным многообразием. Это все аддитивные, но не абелевы категории.

Если $\mathbf{C}$ — абелева категория, то можно развить привычный формализм диаграмм гомоморфизмов абелевых групп,

заменяя гомоморфизмы морфизмами из $\mathbf{C}$. Этот формализм пригоден лишь тогда, когда имеются в виду свойства „конечного характера“ в том смысле, что не используются бесконечные прямые суммы и произведения (для которых необходимы специальные предосторожности, см. п. 1.5). Мы ограничимся здесь указанием некоторых особенно важных фактов, отсылая за деталями к [3].

В дальнейшем мы действуем в фиксированной абелевой категории $\mathbf{C}$. Пусть $A \in \mathbf{C}$; сопоставим каждому подобъекту объекта A его коядро (которое, следовательно, есть фактор-объект объекта A) и каждому фактор-объекту объекта A его ядро (которое, следовательно, есть подобъект объекта A). При этом получается *взаимно однозначное соответствие между классом подобъектов объекта A и классом фактор-объектов объекта A*. Это соответствие является *антиизоморфизмом* для естественных отношений порядка. Кроме того, подобъекты (а, значит, и фактор-объекты) объекта A образуют *структуру*. Если P и Q — два подобъекта из A, то их верхняя грань sup определяется как образ прямой суммы $P \oplus Q$ при морфизме, компонентами которого являются канонические вложения объектов P и Q в A, а их нижняя грань inf определяется как ядро морфизма объекта A в произведение $(A/P) \times (A/Q)$, компонентами которого являются канонические эпиморфизмы объекта A на A/P и A/Q[1]). (Как обычно, мы обозначаем через A/P фактор-объект объекта A, который соответствует подобъекту P). По-видимому, для подобъекта из A, соответствующего фактор-объекту R, естественно употреблять дуальное обозначение $A \setminus R$. Имеются дуальные интерпретации для inf и sup двух фактор-объектов объекта A.

Пусть u: $A \to B$ — морфизм. Если A' — подобъект объекта A, то образ объекта A' при u [обозначаемый через $u(A')$] определяется как $\operatorname{Im}(ui)$, где i каноническое вложение $A' \to A$. Дуальным способом определяется обратный образ $u^{-1}(B')$ фактор-объекта B' объекта B; это некоторый фактор-объект объекта A. Если теперь B' — подобъект объекта B, то обратный образ объекта B' при u [обозначаемый через $u^{-1}(B')$] определяется как $\operatorname{Ker}(ju)$, где j — естественный эпиморфизм

[1]) В дальнейшем автор иногда использует обозначения $\sup(P, Q) = P + Q$, $\inf(P, Q) = P \cap Q$. — *Прим. ред.*

$B \to B/B'$. Дуальным способом определяется прямой образ $u(A')$ фактор-объекта A' объекта A; это некоторый фактор-объект объекта B. Для этих понятий доказываются все обычные формальные свойства.

Напомним, наконец, что пара $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ двух последовательных морфизмов называется *точной*, если $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$. Обобщая это определение, получаем понятие *точной последовательности* морфизмов. Для точности последовательности $0 \to A \to B \to C$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathbf{C}$ последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$0 \to \operatorname{Hom}(X, A) \to \operatorname{Hom}(X, B) \to \operatorname{Hom}(X, C)$$

была точной. Имеет место дуальный критерий точности последовательности $C \to B \to A \to 0$. Для точности последовательности $0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы u был мономорфизмом, а v — его обобщенным коядром.

Пусть F — ковариантный функтор из абелевой категории $\mathbf{C}$ в другую абелеву категорию $\mathbf{C}'$. Аналогично терминологии, введенной в [6], мы говорим, что F есть *полуточный* (соответственно *точный слева* или *точный справа*) *функтор*, если для любой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ из $\mathbf{C}$ последовательность соответствующих морфизмов $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$ является точной в члене $F(A)$ [соответственно точной в членах $F(A)$ и $F(A')$ или точной в членах $F(A)$ и $F(A'')$]. Функтор F называется *точным*, если F точен слева и справа, т. е. преобразует точную последовательность предыдущего типа опять в точную последовательность. Тогда F преобразует *любую* точную последовательность в точную последовательность. Если F точен слева, то F преобразует точную последовательность $0 \to A \to B \to C$ в точную последовательность $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$. Для функторов, точных справа, справедливо дуальное утверждение. Если F — контравариантный функтор, то говорят, что F полуточен (соответственно точен слева и т. д.), если F является таким, будучи рассматриваемым как ковариантный функтор из $\mathbf{C}^\circ$ в $\mathbf{C}'$. Композиция ковариантных точных слева (соответственно справа) функторов является таким же функтором. Мы отсылаем к [6] по поводу других понятий этого типа и по поводу свойств точности мультифункторов. В качестве важного примера отметим, что $\operatorname{Hom}(A, B)$ есть аддитивный бифунктор на $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ со значениями в абелевой категории абелевых групп, контравариантный по A и ковариантный по B, точный слева по обоим аргументам (т. е. точный слева бифунктор в терминологии книги [6]).

1.5. Бесконечные суммы и произведения.

В дальнейших конструкциях нам потребуются существование и некоторые свойства бесконечных прямых сумм и произведений. Вот наиболее употребительные аксиомы, расположенные в порядке усиления ограничений.

АВ 3). *Для любого семейства $(A_i)_{i \in I}$ объектов из* $\mathbf{C}$ *существует прямая сумма объектов* A_i (ср. п. 1.1).

Из этой аксиомы следует, что для любого семейства подобъектов A_i объекта $A \in \mathbf{C}$ существует $\sup A_i$; достаточно взять образ прямой суммы $\bigoplus A_i$ при морфизме, компонентами которого служат канонические вложения $A_i \to A$. Мы видели, что прямая сумма произвольного множества эпиморфизмов является эпиморфизмом (п. 1.1). На самом деле функтор $(A_i)_{i \in I} \to \bigoplus_{i \in I} A_i$, определенный на „произведении категорий" $\mathbf{C}^I$, со значениями в $\mathbf{C}$ *точен справа*. Он даже точен, если I конечно, но не обязательно точен, если I бесконечно, ибо прямая сумма бесконечного множества мономорфизмов не обязана быть мономорфизмом, что мы уже отметили в п. 1.1 (для дуальной ситуации). Отсюда возникает следующая аксиома:

АВ 4). *Справедлива аксиома* АВ 3) *и, кроме того, прямая сумма семейства мономорфизмов есть мономорфизм.*

Следующая аксиома является строго более сильной, чем АВ 4):

АВ 5). *Справедлива аксиома* АВ 3), *и, кроме того, если $(A_i)_{i \in I}$ — возрастающее направленное семейство*[1]) *подобъектов объекта $A \in \mathbf{C}$, а B — произвольный подобъект в A, то*

$$\left(\sum_i A_i\right) \cap B = \sum_i (A_i \cap B).$$

[1]) Частично упорядоченное (или даже квазиупорядоченное) семейство F называется *возрастающим* (соответственно *убывающим*) *направленным семейством*, если для любых $x, y \in F$ найдется такой $z \in F$, что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ (соответственно $z \leqslant x$, $z \leqslant y$). — *Прим. ред.*

(Здесь, как обычно, через $\sum A_i$ обозначен $\sup A_i$, а через $P \cap Q$ — $\inf$ подобъектов P и Q объекта A.) Аксиому AB 5) можно выразить еще так: *справедлива* AB 3), *и, кроме того, если* $A \in \mathbf{C}$ *есть* sup *возрастающего направленного семейства подобъектов* A_i *и если для любого* i *задан морфизм* u_i: $A_i \to B$, *такой, что для* $A_i \subset A_j$ *морфизм* u_i *индуцируется морфизмом* u_j, *то существует морфизм и* (очевидно, единственный) *объекта* A *в* B, *который индуцирует* u_i.

Отметим, наконец, следующую аксиому, которая еще больше усиливает AB 5), но которая не понадобится нам в этой работе.

AB 6). *Справедлива аксиома* AB 3), *и для любого* $A \in \mathbf{C}$ *и любого семейства* $(B^j)_{j \in J}$ *возрастающих направленных семейств* $B^j = (B^j_i)_{i \in I_j}$ *подобъектов* B^j_i *объекта* A *имеем*

$$\bigcap_{j \in J}\Big(\sum_{i \in I_j} B^j_i\Big) = \sum_{(i_j) \in \prod I_j}\Big(\bigcap_{j \in J} B^j_{i_j}\Big).$$

(Эта аксиома включает неявно существование $\inf$ любого семейства подобъектов объекта A.)

Мы оставляем читателю формулировку аксиом AB 3*), AB 4*), AB 5*) и AB 6*) относительно бесконечных произведений, дуальных предыдущим аксиомам. Укажем для примера, что категория абелевых групп (или, более общим образом, категория модулей над фиксированным кольцом с единицей) удовлетворяет относительно прямых сумм самой сильной аксиоме AB 6). Она удовлетворяет, кроме того, аксиомам AB 3*) и AB 4*), но не удовлетворяет AB 5*). Для дуальной категории, которая по закону двойственности Понтрягина изоморфна категории компактных топологических абелевых групп, имеем дуальные свойства. [Это показывает, что AB 5*) не есть следствие аксиомы AB 4*) и, следовательно, AB 5) не является следствием аксиомы AB 4).] Абелева категория пучков абелевых групп над фиксированным топологическим пространством X удовлетворяет аксиомам AB 5) и AB 3*), но не удовлетворяет AB 4*), ибо, как мы уже отметили, произведение эпиморфизмов не обязано быть эпиморфизмом. Отметим, наконец, что если категория $\mathbf{C}$ удовлетворяет сразу AB 5) и AB 5*), то $\mathbf{C}$ состоит только из нулевых элементов (так как в этом случае легко видеть, что для $A \in \mathbf{C}$ канонический морфизм $A^{(I)} \to A^I$ [1]) есть изоморфизм; проверяется, что это возможно только тогда, когда A есть нуль).

Предыдущие аксиомы будут полезны главным образом при изучении индуктивных и проективных пределов, которые понадобятся нам, чтобы получить удобные условия существования „инъективных“ и „проективных“ объектов (см. п. 1.10). Чтобы избежать повторений, мы изучим сейчас очень общий и очень полезный способ образования новых категорий с помощью диаграмм.

1.6. Категории диаграмм и свойства перманентности.

Схемой диаграммы называется тройка (I, Φ, d), образованная двумя множествами I и Φ и отображением d: $\Phi \to I \times I$. Элементы из I — это *вершины*, элементы из Φ — *стрелки* диаграммы. Если φ — стрелка диаграммы, то $d(\varphi)$ называется ее *направлением* и характеризуется *началом* и *концом* стрелки (которые являются вершинами схемы). *Композиция стрелок* с началом i и концом j — это по определению непустая конечная последовательность стрелок диаграммы, такая, что начало первой стрелки есть i, конец каждой стрелки является началом следующей и конец последней есть j. Если $\mathbf{C}$ — категория, то *диаграммой в* $\mathbf{C}$ *со схемой* S называют функцию D, которая связывает с каждым $i \in I$ объект $D(i) \in \mathbf{C}$ и с каждой стрелкой φ с началом i и концом j морфизм $D(\varphi)$: $D(i) \to D(j)$. Класс таких диаграмм обозначается через $\mathbf{C}^S$. Его можно рассматривать как категорию, если в качестве морфизмов диаграммы D в D' взять семейства морфизмов v_i: $D(i) \to D'(i)$, такие, что для любой стрелки φ с началом i и концом j диаграмма

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "D(\varphi)"'] & D'(i) \arrow[d, "D'(\varphi)"] \\ D(j) \arrow[r, "v_j"] & D'(j) \end{tikzcd}$$

[1]) Здесь и в дальнейшем автор обозначает через A^I прямое произведение семейства $(A_i)_{i \in I}$ объектов, идентичных объекту A, а через $A^{(I)}$ — прямую сумму этого семейства. — *Прим. ред.*

является коммутативной. Композиция морфизмов диаграмм определяется очевидным образом, аксиомы категории проверяются тривиально. Если D — диаграмма со схемой S, то для любой композиции стрелок $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ из S положим $D(\varphi)=D(\varphi_k) \ldots D(\varphi_1)$. Это морфизм объекта $D(i)$ в $D(j)$, где i и j — начало и конец композиции φ соответственно. Диаграмма D называется *коммутативной*, если $D(\varphi)=D(\varphi')$ всякий раз, когда φ и φ' — композиции стрелок с одними и теми же началом и концом. Вообще если R есть некоторое множество, состоящее из пар (φ, φ') композиций стрелок с одними и теми же началом и концом и из композиций стрелок, у которых начало равно концу, то можно рассматривать подкатегорию $\mathbf{C}^{S,R}$ категории $\mathbf{C}^S$, образованную диаграммами, которые удовлетворяют следующим *условиям коммутирования*: $D(\varphi)=D(\varphi')$ для $(\varphi, \varphi')\in R$, $D(\varphi)$ есть тождественный морфизм объекта $D(i)$, если $\varphi\in R$ имеет i началом и концом.

Приходится рассматривать и другие типы коммутирования для диаграмм, различные для различных категорий. Описанный ниже тип, по-видимому, покрывает все наиболее важные случаи. Для каждого $(i, j)\in I\times I$ зададимся некоторым множеством R_{ij}, состоящим из формальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами композиций стрелок с началом i и концом j и, при $i=j$, некоторого вспомогательного элемента e_i. Если D — диаграмма со значениями в аддитивной категории $\mathbf{C}$, то для любого $L\in R_{ij}$ можно определить морфизм $D(L)$: $D(i)\to D(j)$, заменяя в выражении элемента L композицию стрелок φ на $D(\varphi)$, а e_i — на тождественный морфизм объекта $D(i)$. Обозначим через R объединение множеств R_{ij}. Говорят, что D является R-коммутативной, если все $D(L)$ $(L\in R)$ равны нулю. Назовем *схемой диаграммы с соотношениями коммутирования* пару $(S, R)=\Sigma$, образованную некоторой схемой диаграммы и множеством R описанного выше вида. Тогда для любой аддитивной категории $\mathbf{C}$ можно рассматривать подкатегорию $\mathbf{C}^\Sigma$ категории $\mathbf{C}^S$, образованную R-коммутативными диаграммами.

Предложение 1.6.1. *Пусть Σ — схема диаграммы с соотношениями коммутирования, $\mathbf{C}$ — аддитивная категория. Тогда категория $\mathbf{C}^\Sigma$ есть аддитивная категория, и если $\mathbf{C}$ — категория с бесконечными прямыми произведениями (соответственно с бесконечными прямыми суммами), то такова же и $\mathbf{C}^\Sigma$. Кроме того, если $\mathbf{C}$ удовлетворяет одной из аксиом* АВ 1) — АВ 6), АВ 3*) — АВ 6*), *то тем же свойством обладает и $\mathbf{C}^\Sigma$.*

Если $D, D'\in\mathbf{C}^\Sigma$ и если u — морфизм диаграммы D в D', то его ядро (соответственно коядро, образ, кообраз) есть диаграмма, образованная ядрами (соответственно коядрами и т. д.) его компонент u_i, причем морфизмы в этой диаграмме, соответствующие стрелкам схемы, получаются из морфизмов диаграммы D (соответственно D' и т. д.) путем ограничения (соответственно перехода к фактор-объектам). Аналогичным образом интерпретируются прямая сумма и прямое произведение семейств диаграмм. Подобъекты D' диаграммы D отождествляются с такими семействами $(D'(i))$ подобъектов из $D(i)$, что для любой стрелки φ с началом i и концом j имеем $D(\varphi)(D'(i))\subset D'(j)$. Тогда $D'(\varphi)$ определяется как морфизм $D'(i)\to D'(j)$, определенный при помощи морфизма $D(\varphi)$. Фактор-объекты диаграммы D определяются дуальным образом.

Если S — схема диаграммы, то *дуальной схемой*, обозначаемой через S°, называют схему, имеющую те же вершины и то же множество стрелок, что S, но в которой начала и концы стрелок из S переставлены. Если, кроме того, задано множество R соотношений коммутирования для S, то это же множество соотношений можно рассматривать для S°. Тогда для аддитивной категории $\mathbf{C}$ категория, дуальная к $\mathbf{C}^\Sigma$, отождествляется с $(\mathbf{C}^\circ)^{\Sigma^\circ}$.

Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ — две аддитивные категории, Σ — схема диаграммы с соотношениями коммутирования. Тогда для любого функтора F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ очевидным образом определяется функтор F^Σ из $\mathbf{C}^\Sigma$ в $\mathbf{C}'^\Sigma$, который называется *каноническим продолжением функтора F на диаграммы*. Отметим, что F^Σ ведет себя формально как функтор по отношению к аргументу F, в частности, функторный морфизм $F\to F'$ определяет функторный морфизм $F^\Sigma\to F'^\Sigma$. Заметим, наконец, что для композиции функторов имеем $(GF)^\Sigma=G^\Sigma F^\Sigma$ и что свойства точности функтора сохраняются при продолжении на класс диаграмм.

1.7. Примеры категорий, определенных схемами диаграмм.

a) Предположим, что I состоит из одного элемента, а множество стрелок пусто. В этом случае соотношения коммутирования имеют вид $n_i e = 0$ и, следовательно, можно ограничиться одним отношением $ne = 0$. Тогда $\mathbf{C}^{\Sigma}$ есть подкатегория $\mathbf{C}$, образованная объектами, которые аннулируются целым числом n. Если $n = 0$, то эта сама $\mathbf{C}$.

b) Пусть I — произвольное множество, а стрелок и соотношений коммутирования нет. Тогда $\mathbf{C}^{\Sigma}$ отождествляется с произведением категорий $\mathbf{C}^{I}$. Если соотношения коммутирования заданы, то получаем произведение категорий того типа, который рассматривался в примере a).

c) Пусть I состоит из двух элементов a и b с единственной стрелкой, начало которой есть a, а конец — b. Получаем категорию морфизмов u: $A \to B$ между объектами из $\mathbf{C}$. Введение соотношений коммутирования эквивалентно тому, что рассматриваются только A, B, u, которые аннулируются некоторыми заданными целыми числами.

d) *Категории функторов*. Пусть $\mathbf{C}'$ — другая категория; предположим, что она является множеством. Тогда ковариантные функторы из $\mathbf{C}'$ в $\mathbf{C}$ образуют категорию, морфизмами которой являются функторные морфизмы (ср. п. 1.1). Эту категорию можно интерпретировать как категорию $\mathbf{C}^{\Sigma}$, где $I = \mathbf{C}'$, стрелками с началом A' и концом B' являются по определению элементы множества $\mathrm{Hom}(A', B')$, а соотношения коммутирования — это соотношения, выражающие две аксиомы функтора. Если, кроме того, $\mathbf{C}'$ — аддитивная категория, то совокупность всех *аддитивных* функторов из $\mathbf{C}'$ в $\mathbf{C}$ также можно интерпретировать как категорию $\mathbf{C}^{\Sigma}$ (добавляя необходимые соотношения коммутирования).

e) *Комплексы со значениями в* $\mathbf{C}$. $I = \mathbf{Z}$ (множество целых чисел), множество стрелок есть множество $(d_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, где d_n имеет начало n и конец $n+1$, соотношения коммутирования суть $d_{n+1} d_n = 0$. Можно еще добавить соотношения вида $e_n = 0$, если мы хотим ограничиться комплексами с положительными или отрицательными степенями. Аналогичным способом можно получить двойные комплексы и т. д.

f) *Категория* $\mathbf{C}^{G}$ (G — *группа*). Пусть G — группа, $\mathbf{C}$ — категория (не обязательно аддитивная). *Объектом из* $\mathbf{C}$ *с группой операторов* G называется пара (A, r), образованная объектом $A \in C$ и представлением r группы G в группе автоморфизмов объекта A. Если (A', r') — вторая такая пара, то морфизмом первой пары во вторую называют морфизм объекта A в A', который перестановочен с операторами из G. Это определение превращает класс $\mathbf{C}^{G}$ объектов из $\mathbf{C}$ с группой операторов G в категорию. Ее можно интерпретировать как категорию $\mathbf{C}^{\Sigma}$, где в качестве $\Sigma = \Sigma(G)$ взята следующая схема с соотношениями: множество вершин состоит из одного элемента i_0, множество стрелок есть G, соотношения коммутирования суть $(s)(t) = (st)$ (в левой части стоит композиция стрелок) и $(e) = e_{i_0}$ (где e — единица группы G). В частности, если $\mathbf{C}$ — аддитивная категория, то такова же и $\mathbf{C}^{G}$; в этом случае наша конструкция содержится в примере g) (что видно из рассмотрения группового кольца группы G).

g) *Категория* $\mathbf{C}^{U}$ (U — *кольцо с единицей*). Рассмотрим аддитивную категорию пар (A, r), где $A \in \mathbf{C}$, а r — унитарное представление кольца U в кольце $\mathrm{Hom}(A, A)$ (морфизмы этой категории определяются очевидным образом). Она интерпретируется как категория $\mathbf{C}^{\Sigma(U)}$, где $\Sigma(U)$ — схема с соотношениями, имеющая одну вершину U в качестве множества стрелок и соотношения коммутирования, которые мы не будем выписывать.

h) *Индуктивные и проективные системы.* Возьмем в качестве множества вершин *квазиупорядоченное* множество I, а в качестве стрелок с началом i и концом j — пары (i, j) вершин, для которых $i \leqslant j$. Соотношения коммутирования определим формулами $(i, j)\ (j, k) = (i, k)$ и $(i, i) = e_i$. Соответствующие диаграммы (для заданной категории $\mathbf{C}$, не обязательно аддитивной) известны под названием *индуктивных систем* над I со значениями в $\mathbf{C}$. Если изменить квазипорядок в I на противоположный или заменить $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}^{\circ}$, то получим *проективные системы* над I со значениями в $\mathbf{C}$. Важным является случай, когда I — множество открытых подмножеств топологического пространства X, упорядоченное относительно включения. В этом случае получается понятие *предпучка* над X со значениями в $\mathbf{C}$.

1.8. Индуктивные и проективные пределы.

Мы будем говорить только об индуктивных пределах, так как понятие проективного предела дуально этому понятию. Пусть $\mathbf{C}$ — категория, I — квазиупорядоченное множество, $\mathbf{A}=(A_i, u_{ij})$ — индуктивная система на I со значениями в $\mathbf{C}$ (u_{ij} — это морфизм $A_j \to A_i$, определенный для $i \geqslant j$). *Индуктивным пределом* (обобщенным) системы $\mathbf{A}$ называют систему, состоящую из объекта $\overline{\mathbf{A}} \in \mathbf{C}$ и семейства (u_i) морфизмов u_i: $A_i \to \overline{\mathbf{A}}$ и удовлетворяющую следующим условиям: a) для $i \leqslant j$ имеем $u_i = u_j u_{ji}$; b) для всякого объекта $B \in \mathbf{C}$ и всякого семейства (v_i) морфизмов $v_i: A_i \to B$, такого, что для любой пары (i, j), удовлетворяющей условию $i \leqslant j$, имеем $v_i = v_j u_{ji}$, можно найти, и притом единственный, морфизм v: $\overline{\mathbf{A}} \to B$, для которого $v_i = vu_i$ при любом $i \in I$. Если $(\overline{\mathbf{A}}, (u_i))$ — индуктивный предел системы $\mathbf{A}=(A_i, u_{ij})$, $(\overline{\mathbf{B}}, (v_i))$ — индуктивный предел другой индуктивной системы $\mathbf{B}=(B_i, v_{ij})$ и $w=(w_i)$ — морфизм системы $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, то существует, и притом единственный, морфизм $\overline{w}$ объекта $\overline{\mathbf{A}}$ в $\overline{\mathbf{B}}$, для которого $\overline{w}u_i = v_i w_i$ при любом $i \in I$. В частности, два индуктивных предела одной и той же системы канонически изоморфны (в очевидном смысле). Поэтому естественно выбрать для индуктивной системы, допускающей индуктивные пределы, один такой индуктивный предел (например, используя символ τ Гильберта). Обозначим его через $\varinjlim \mathbf{A}$ или $\varinjlim_{i \in I} A_i$ и будем называть *индуктивным пределом* данной индуктивной системы. Если I и $\mathbf{C}$ таковы, что $\varinjlim \mathbf{A}$ существует для *всякой* индуктивной системы $\mathbf{A}$ на I со значениями в $\mathbf{C}$, то из предыдущего можно заключить, что $\varinjlim \mathbf{A}$ есть ковариантный функтор, определенный на категории индуктивных систем на I в $\mathbf{C}$, со значениями в $\mathbf{C}$.

Предложение 1.8.1. *Пусть $\mathbf{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая аксиоме* AB 3) (*существование любых прямых сумм*), *и пусть I — возрастающее направленное квазиупорядоченное множество. Тогда для всякой индуктивной системы $\mathbf{A}$ на I со значениями в $\mathbf{C}$ существует индуктивный предел $\varinjlim \mathbf{A}$, причем он является точным справа аддитивным функтором по $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{C}$ удовлетворяет аксиоме* AB 5) (см. п. 1.5), *то этот функтор даже точен и, кроме того, ядро канонического морфизма u_i: $A_i \to \varinjlim \mathbf{A}$ есть* sup *ядер морфизмов u_{ji}: $A_i \to A_j$ для $j \geqslant i$. (В частности, если u_{ji} — мономорфизмы, то тем же свойством обладают u_i.)*

Для построения индуктивного предела системы (A_i, u_{ij}) положим $S = \bigoplus_{i \in I} A_i$ и для любой пары (i, j), удовлетворяющей условию $i \leqslant j$, рассмотрим морфизм $w_{ij}: A_i \to S$, возникающий из морфизма $A_i \to A_i \oplus A_j$ составляющими которого являются I_{A_i} и u_{ji}. Пусть $N_{ij} = w_{ij}(A_i)$, N — подобъект объекта S, являющийся верхней гранью подобъектов N_{ij} [которая существует в силу аксиомы AB 3)], $\overline{\mathbf{A}} = S/N$, $u_i: A_i \to \overline{\mathbf{A}}$ — морфизм, индуцированный каноническим морфизмом $S \to S/N$. Ясно, что $(\overline{\mathbf{A}}, u_i)$ является индуктивным пределом системы $\mathbf{A}$. Мы предоставляем читателю доказать остальные части предложения 1.8.1. Впрочем, эти доказательства хорошо известны.

1.9. Образующие и кообразующие.

Пусть $\mathbf{C}$ — некоторая категория и $(U_i)_{i \in I}$ — семейство объектов из $\mathbf{C}$. Говорят, что это семейство есть *семейство образующих* категории $\mathbf{C}$, если для любого объекта $A \in \mathbf{C}$ и его подобъекта $B \neq A$ можно найти $i \in I$ и морфизм $u: U_i \to A$, не получающийся ни из какого морфизма $U_i \to B$. В этом случае для всякого $A \in \mathbf{C}$ подобъекты в A образуют *множество*. Действительно, любой подобъект B из A вполне определяется множеством тех морфизмов объектов U_i в A, которые получаются из морфизмов $U_i \to B$. Говорят, что объект $U \in \mathbf{C}$ является *образующей* категории $\mathbf{C}$, если семейство $\{U\}$ есть семейство образующих.

Предложение 1.9.1. *Предположим, что $\mathbf{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая аксиоме* AB 3) (*существование бесконечных прямых сумм*). *Пусть $(U_i)_{i \in I}$ — семейство объектов из $\mathbf{C}$ и $U = \bigoplus U_i$ — его прямая сумма. Следующие условия эквивалентны:*

a) *(U_i) есть семейство образующих категории $\mathbf{C}$.*

b) *U есть образующая категории $\mathbf{C}$.*

c) *Всякий объект $A \in \mathbf{C}$ изоморфен фактор-объекту некоторой прямой суммы $U^{(I)}$ объектов, совпадающих с U.*

Эквивалентность условий a) и b) есть почти непосредственное следствие определения. Условие b) влечет за собой c), так как достаточно взять в качестве I множество $\operatorname{Hom}(U, A)$ и рассмотреть морфизм объекта $U^{(I)}$ в A, составляющая которого для каждого $u \in I$ совпадает с u. Образ B этого морфизма равен A, так как в противном случае существовал бы такой $u \in \operatorname{Hom}(U, A) = I$, что $u(A) \not\subset B$, а это невозможно. Таким образом, A изоморфен фактор-объекту объекта $U^{(I)}$. Условие c) влечет за собой b), так как если A есть фактор-объект объекта $U^{(I)}$, то для любого подобъекта B объекта A, отличного от A, существует такой i, что канонический образ i-го слагаемого суммы $U^{(I)}$ в A не содержится в B. Отсюда видно, что существует морфизм $U \to A$, не получающийся ни из какого морфизма $U \to B$. (Заметим, что аддитивная структура категории $\mathbf{C}$ в действительности не играет здесь роли.)

Примеры. Если $\mathbf{C}$ — абелева категория левых унитарных модулей над кольцом U с единицей, то U, рассматриваемое как левый U-модуль, является образующей категории $\mathbf{C}$. Если $\mathbf{C}$ — категория пучков абелевых групп над фиксированным топологическим пространством X и если для всякого открытого $U \subset X$ обозначить через $\mathbf{Z}_U$ пучок над X, равный нулю на $\complement U$[1]) и совпадающий с постоянным пучком целых чисел на U, то семейство пучков $\mathbf{Z}_U$ является системой образующих категории $\mathbf{C}$. Этот пример немедленно обобщается на случай, когда на X задан пучок колец $\mathcal{O}$ и рассматривается категория пучков $\mathcal{O}$-модулей на X. Другие примеры содержатся в следующем утверждении.

Предложение 1.9.2. *Пусть Σ — схема диаграммы с соотношениями коммутирования (см. п. 1.6), $\mathbf{C}$ — абелева категория, $(U_i)_{i \in I}$ — семейство образующих категории $\mathbf{C}$. Предположим, что для всякой стрелки из Σ начало и конец различны и что в соотношениях коммутирования не участвуют тождественные морфизмы e_s (где s — некоторая вершина)*[2]). *Тогда для любого $A \in \mathbf{C}$ и любой*

[1]) $\complement U$ — дополнение к множеству U. — *Прим. ред.*

[2]) Категория $\mathbf{C}^{\Sigma}$ индуктивных систем в $\mathbf{C}$, построенная над *упорядоченным* множеством индексов I, относится к этому случаю. Действительно, чтобы получить эту категорию, достаточно рассмотреть в примере 1.7 h) стрелки (i, j) для $i < j$ и соотношения коммутирования $(i, j)(j, k) = (i, k)$, в которые не входят морфизмы e_s.

вершины s схема диаграммы $\varepsilon_s(A)$, значение которой равно A в вершине s и 0 во всех других вершинах и которая принимает на каждой стрелке значение 0, принадлежит к $\mathbf{C}^{\Sigma}$. Более того, семейство диаграмм $\varepsilon_s(U_i)$ (s, i — переменные) есть система образующих для $\mathbf{C}^{\Sigma}$.

Первое утверждение доказывается немедленно. Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что морфизмы диаграммы $\varepsilon_s(A)$ в диаграмму D отождествляются с морфизмами объекта A в $D(s)$.

Мы оставляем читателю возможность развить двойственное понятие *семейства кообразующих* в абелевой категории. Можно показать, что если $\mathbf{C}$ — абелева категория, удовлетворяющая аксиоме AB 5) (см. п. 1.5), то существование образующей влечет за собой существование кообразующей (мы не будем пользоваться этим результатом). Таким образом, категория левых унитарных модулей над кольцом U с единицей всегда допускает кообразующую. Если, например, $U = \mathbf{Z}$ (кольцо целых чисел), то в качестве кообразующей можно взять фактор-группу группы рациональных чисел по подгруппе $\mathbf{Z}$ (или окружность $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$).

1.10. Инъективные и проективные объекты.

Напомним, что объект M абелевой категории $\mathbf{C}$ называют *инъективным*, если функтор $A \to \operatorname{Hom}(A, M)$ (который во всяком случае является точным слева) точен, т. е. если для всякого морфизма u подобъекта B объекта $A \in \mathbf{C}$ в M существует морфизм объекта A в M, являющийся продолжением морфизма u. Морфизм $A \to M$ называется *инъективным погружением* (объекта A), если это мономорфизм и если для всякого мономорфизма $B \to C$ и всякого морфизма $B \to A$ можно найти такой морфизм $C \to M$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} B & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \to & M. \end{array}$$

Таким образом, для того чтобы тождественный морфизм объекта M был инъективным погружением, необходимо и достаточно, чтобы M был инъективен. Всякий мономорфизм в инъективный объект является инъективным погружением.

Теорема 1.10.1. *Если* $\mathbf{C}$ *удовлетворяет аксиоме* AB 5) (*см. п.* 1.5) *и допускает образующую* (*см. п.* 1.9), *то для любого* $A \in \mathbf{C}$ *существует мономорфизм объекта* A *в некоторый инъективный объект* M.

Мы построим даже функтор $M: A \to M(A)$ (не аддитивный в общем случае!) из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$ и гомоморфизм f тождественного функтора в M, такой, что для всякого $A \in \mathbf{C}$ объект $M(A)$ инъективен и $f(A)$ есть мономорфизм объекта A в $M(A)$. Доказательство этого факта в основном известно, и мы наметим лишь его основные моменты.

Лемма 1. *Если* $\mathbf{C}$ *удовлетворяет аксиоме* AB 5), *то объект* $M \in \mathbf{C}$ *инъективен тогда и только тогда, когда для всякого подобъекта* V *образующей* U *и всякого морфизма* v: $V \to M$ *существует продолжение морфизма* v *до морфизма* $U \to M$.

Необходимость условия очевидна, докажем его достаточность. Пусть u — морфизм подобъекта B объекта $A \in \mathbf{C}$ в M. Покажем, что существует продолжение морфизма u до морфизма $A \to M$. Рассмотрим множество P продолжений морфизма u на подобъекты из A, содержащие B (это действительно множество, так как в силу существования образующей подобъекты объекта A образуют множество). Упорядочим его при помощи отношения продолжения. В силу второй формулировки аксиомы AB 5) (см. п. 1.5), это множество индуктивно[1]) и поэтому допускает максимальный элемент. Значит, остается рассмотреть случай, когда сам u максимален, и показать, что в этом случае $B = A$. Докажем, что если $B \neq A$, то существует продолжение морфизма u на некоторый подобъект $B' \neq B$. Пусть j — морфизм объекта U в A, такой, что $j(U) \not\subset B$, и положим $B' = j(U) + B$ (тогда $B' \neq B$). Пусть $V = j^{-1}(B)$ и j': $V \to B$ — морфизм, индуцированный морфизмом j. Рассмотрим последовательность морфизмов $V \xrightarrow{\varphi'} U \times B \xrightarrow{\varphi} B' \to 0$, в которой морфизм φ' имеет составляющими каноническое вложение объекта V в U и $-j'$, а φ имеет составляющими j и каноническое вложение объекта B в B'. Ясно, что эта последовательность точна. Следовательно, для определения морфизма v: $B' \to M$ достаточно определить морфизм w: $U \times B \to M$ так, чтобы $w\varphi' = 0$. Пусть k — продолжение морфизма $uj' : V \to M$ на U; возьмем в качестве w морфизм объекта $U \times B$ в M с составляющими k и u. Легко проверить, что $w\varphi' = 0$ и что морфизм v: $B' \to M$, определенный посредством w, является продолжением морфизма u. Доказательство леммы 1 закончено.

[1]) Квазиупорядоченное множество называется индуктивным, если всякое его возрастающее направленное подмножество имеет в нем максимальный элемент. — *Прим. ред.*

Пусть $A \in \mathbf{C}$ и пусть $I(A)$ — множество всех морфизмов u_i подобъектов V_i объекта U в A. Рассмотрим морфизм $\bigoplus V_i \to A \times U^{(I(A))}$, ограничение которого на слагаемое V_i имеет составляющими морфизм $-u_i$: $V_i \to A$ и каноническое вложение объекта V_i в i-е слагаемое прямой суммы $U^{(I(A))}$. Пусть $M_1(A)$ — коядро рассматриваемого морфизма, $f(A)$: $A \to M_1(A)$ — морфизм, индуцированный каноническим эпиморфизмом объекта $A \times U^{(I(A))}$ на его фактор-объект. Тогда $f(A)$ есть мономорфизм [это легко следует из того, что канонический морфизм $\bigoplus V_i \to U^{(I(A))}$ есть мономорфизм в силу AB 4)] и, кроме того, всякий морфизм $u_i : V_i \to A$ „продолжается“ до некоторого морфизма $U \to M_1(A)$ [а именно морфизма, индуцированного на i-ом слагаемом суммы $U^{(I(A))}$ каноническим эпиморфизмом объекта $A \times U^{(I(A))}$ на его фактор-объект $M_1(A)$]. Определим с помощью трансфинитной индукции для всех порядковых чисел i объект $M_i(A)$ и для двух порядковых чисел $i \leqslant j$ *инъективный* морфизм $M_i(A) \to M_j(A)$ таким образом, чтобы $M_i(A)$ для $i < i_0$ (i_0 фиксировано) образовывали индуктивную систему. Для $i = 0$ положим $M_0(A) = A$, для $i = 1$ объект $M_1(A)$ и морфизм $M_0(A) \to M_1(A)$ уже определены. Если построение осуществлено для всех порядковых чисел $< i$ и если i имеет вид $j + 1$, то положим $M_i(A) = M_1(M_j(A))$ и определим морфизм $M_j(A) \to M_{j+1}(A)$ как $f(M_j(A))$ (этим мы определяем одновременно морфизмы $M_k(A) \to M_i(A)$ для $k \leqslant i$). Если i — предельное порядковое число, то положим $M_i(A) = \varinjlim_{j<i} M(A)$ и возьмем в качестве морфизмов $M_j(A) \to M_i(A)$ ($j < i$) канонические морфизмы, которые инъективны (предложение 1.8.1). Пусть теперь k — наименьшее порядковое число, мощность которого строго больше мощности множества подобъектов из U.

Положим $M(A) = M_k(A)$. Нам остается доказать, что M_k инъективен, а для этого достаточно проверить, что он удовлетворяет условию леммы 1. В обозначениях этой леммы покажем, что $v(V)$ содержится в некотором M_i, где $i < k$, что и завершит доказательство. Действительно, из равенства $M_k = \sup M_i$ следует, что $V = \sup_{i<k} v^{-1}(M_i)$ [в силу AB 5)]. Так как множество подобъектов из V имеет мощность, меньшую мощности k, и так как всякое множество порядковых чисел $< k$, имеющее k своим пределом, имеет мощность, равную мощности k (поскольку мощность k не является предельным порядковым числом), то отсюда следует, что $v^{-1}(M_i)$ остается постоянным, начиная с некоторого $i_0 < k$. Значит, $V = v^{-1}(M_{i_0})$, и доказательство закончено.

Замечания. 1. Вариант теоремы 1.10.1. Если **C** удовлетворяет аксиомам AB 3), AB 4) и AB 3*) и допускает кообразующую T, то любой объект $A \in \mathbf{C}$ допускает инъективное погружение. Мы не будем использовать этот результат.

2. То, что $M(A)$ есть функтор по A, может оказаться удобным, например, для доказательства того, что всякий объект $A \in \mathbf{C}^{G}$ (т. е. объект $A \in \mathbf{C}$ с группой операторов G, см. п. 1.7, пример f)), инъективный в $\mathbf{C}^{G}$, инъективен и в **C**.

3. В большом числе случаев существование мономорфизма объекта A в инъективный объект можно увидеть непосредственно. Теорема 1.10.1 имеет то преимущество, что она применима в самых разных случаях. Кроме того, условия теоремы сохраняются при переходе к некоторым категориям диаграмм (см. предложения 1.6.1 и 1.9.2), где существование достаточного количества инъективных объектов не так-то легко заметить.

4. Можно рассматривать также *проективные* объекты и *проективные отображения* (это — понятия, дуальные к понятиям инъективного объекта и инъективного погружения). Мы оставляем читателю формулировку и доказательство дуальных утверждений, относящихся к этим понятиям.

1.11. Фактор-категории.

Несмотря на то что в нашей работе рассуждения этого пункта применяться не будут, они оказываются удобными в различных приложениях. Мы имеем в виду так называемый „язык по модулю **C**“ Серра [17].

Пусть **C** — категория. *Подкатегорией* категории **C** называют категорию **C**$'$, объекты которой являются объектами из **C**, такую, что для любых $A, B \in \mathbf{C}'$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B)$ морфизмов A в B в смысле **C**$'$ является подмножеством множества $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ морфизмов A в B в смысле **C**. При этом требуется, чтобы композиция морфизмов в **C**$'$ индуцировалась композицией морфизмов в **C**, а тождественными морфизмами в **C**$'$ были тождественные морфизмы в **C**. Эти два последних условия означают, что „функция“, сопоставляющая каждому объекту или морфизму категории **C**$'$ тот же объект или морфизм категории **C**, является ковариантным функтором из **C**$'$ в **C** (он называется *каноническим вложением категории* **C**$'$ *в* **C**).

Если **C**, **C**$'$ — аддитивные категории, то **C**$'$ называют *аддитивной подкатегорией* категории **C**, если в дополнение к предыдущим условиям группы $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B)$ являются подгруппами групп $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$. Предположим, что **C** — абелева категория. Тогда **C**$'$ называется *полной подкатегорией*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) *Для* $A, B \in \mathbf{C}'$ *имеем* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

2) *Если в некоторой точной последовательности* $A \to B \to C \to D \to E$ *четыре крайних члена принадлежат к* **C**$'$, *то тем же свойством обладает средний член* D.

В силу 1) **C**$'$ вполне определяется классом своих объектов. Условие 2) равносильно тому, что ядро и коядро любого морфизма $P \to Q$, где $P, Q \in \mathbf{C}'$, принадлежат к **C**$'$, и что в любой точной последовательности $0 \to R' \to R \to R'' \to 0$, где $R', R'' \in \mathbf{C}'$, объект R также принадлежит к **C**$'$. Легко проверяется, что в этом случае **C**$'$ сама является абелевой категорией и что для любого морфизма $u: A \to B$ в **C**$'$ ядро и коядро (соответственно образ и кообраз) совпадают с ядром и коядром (соответственно образом и кообразом), рассматриваемыми в категории **C**.

Подкатегория **C**$'$ категории **C** называется *плотной*, если она удовлетворяет условию 1) и следующему усилению условия 2):

3) *Если в точной последовательности* $A \to B \to C$ *крайние члены принадлежат к* **C**$'$, *то и средний член принадлежит к* **C**$'$.

Если **C** — абелева категория абелевых групп, то возникает так называемый „класс абелевых групп“ [17]. Легко видеть, как и в [17], что 3) эквивалентно конъюнкции следующих трех условий: всякий нулевой объект принадлежит $\mathbf{C}'$; всякий объект, изоморфный подобъекту или фактор-объекту объекта из $\mathbf{C}'$, лежит в $\mathbf{C}'$; всякое расширение двух объектов из $\mathbf{C}'$ принадлежит $\mathbf{C}'$.

Пусть $\mathbf{C}$ — абелева категория, $\mathbf{C}'$ — плотная подкатегория в $\mathbf{C}$. Мы определим сейчас новую абелеву категорию, которая обозначается через $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ и называется *фактор-категорией* категории $\mathbf{C}$ по $\mathbf{C}'$. Объектами категории $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ являются, по определению, объекты категории $\mathbf{C}$. Определим теперь морфизмы объекта A в объект B в категории $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$, называя их „морфизмами объекта A в B по модулю $\mathbf{C}'$“. Будем говорить, что подобъект A' объекта A равен объекту A по модулю $\mathbf{C}'$ или квазиравен объекту A, если $A/A' \in \mathbf{C}'$. Тогда любой подобъект из A, содержащий A', также будет квазиравен объекту A. Кроме того, inf двух подобъектов из A, квазиравных A, также квазиравен A. Вводится дуальное понятие фактор-объекта объекта B, квазиравного B: фактор-объект B/N квазиравен B, если $N \in \mathbf{C}'$. Морфизм объекта A в объект B по модулю $\mathbf{C}'$ определяется морфизмом f' некоторого подобъекта A' из A, квазиравного A, в некоторый фактор-объект B' объекта B, квазиравный B. При этом считается, что морфизм $f''\colon A'' \to B''$ (удовлетворяющий тем же условиям) определяет тот же морфизм по модулю $\mathbf{C}'$ тогда и только тогда, когда можно найти такие $A''' \leqslant \inf(A', A'')$ и $B''' \leqslant \inf(B', B'')$, что A''' квазиравен A, B''' квазиравен B и морфизмы $A'' \to B'''$, определенные морфизмами f' и f'', совпадают. Это последнее соотношение между f' и f'' является, конечно, соотношением эквивалентности, поэтому предшествующее определение морфизмов по модулю $\mathbf{C}'$ корректно. Предположим, что для всякого $A \in \mathbf{C}$ подобъекты объекта A образуют множество (это справедливо для всех известных нам категорий). Тогда можно рассмотреть множество морфизмов из A в B по модулю $\mathbf{C}'$, которое обозначается через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, B)$. Множество $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, B)$ является индуктивным пределом абелевых групп $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B')$, где A' (соответственно B') пробегает все подобъекты объекта A (соответственно фактор-объекты объекта B), квазиравные A (соответственно B), и, следовательно, может рассматриваться как абелева группа. Отображение $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, C)$ определяется следующим образом. Пусть $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B')$ — представитель морфизма $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, B)$ и $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B'', C')$ — представитель морфизма $v' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(B, C)$. Пусть Q — образ канонического морфизма $B'' \to B'$ подобъекта B'' из B в фактор-объект B'. Тогда Q изоморфен кообразу этого морфизма и является, следовательно, одновременно подобъектом объекта B' и фактор-объектом объекта B''. Уменьшая в случае надобности подобъект A' объекта A и фактор-объект C' объекта C, можно считать, что u и v получаются из морфизмов (обозначаемых теми же буквами) $A' \to Q$ и $Q \to C'$ соответственно. Можно, следовательно, взять композицию $vu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', C')$. Проверяется, что элемент из $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, C)$, определяемый этой композицией, зависит только от u' и v'. Обозначим его через $v'u'$. Нетрудно доказать, что так определенный закон композиции билинеен, ассоциативен и что класс тождественного морфизма I_A в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, A)$ является универсальной единицей, т. е. что $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ является аддитивной категорией. Наконец, проверяется, что это даже абелева категория. Мы не будем приводить здесь весьма скучную проверку справедливости этих утверждений. Итак, $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ *оказывается абелевой категорией, и, кроме того, тождественный функтор F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ точен* (и, в частности, перестановочен с переходом к ядру, коядру, образу, кообразу), *$F(A)$ равен нулю тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{C}'$, и всякий объект из $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ имеет вид $F(A)$*, где $A \in \mathbf{C}$. Эти факты (которые в основном характеризуют фактор-категорию) позволяют применять язык „по модулю $\mathbf{C}'$“ с полной безопасностью. Этот язык означает просто, что мы переходим к фактор-категории. Он удобен, в частности, в том случае, когда мы имеем спектральную последовательность (см. п. 2.4) в категории $\mathbf{C}$. Если некоторые члены этой спектральной последовательности принадлежат к $\mathbf{C}'$, то, приводя ее по модулю $\mathbf{C}'$ (т. е. применяя функтор F), мы получим спектральную последовательность в категории $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$, у которой соответствующие члены равны нулю. Применяя затем обычные критерии для получения точных последовательностей из спектральных последовательностей, содержащих среди своих членов нули, можно получить точные последовательности по модулю $\mathbf{C}'$.

ГЛАВА II

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА В АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЯХ

2.1. ∂-функторы и ∂^*-функторы.

Пусть **C** — абелева категория, **C**$'$ — аддитивная категория, a и b — два целых числа (которые могут равняться $+\infty$ или $-\infty$), таких, что $a+1<b$. *Ковариантным ∂-функтором из* **C** *в* **C**$'$, *определенным в степенях* $a<i<b$, называется система ковариантных аддитивных функторов $T=(T^i)$ из **C** в **C**$'$ $(a<i<b)$ вместе с заданием для всякого такого i, что $a<i<b-1$, и всякой точной последовательности $0\to A'\to A\to A''\to 0$ в **C** морфизма

$$\partial\colon\ T^i(A'')\to T^{i+1}(A')$$

(который называется граничным или связывающим гомоморфизмом). При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

1) Если имеется вторая точная последовательность $0\to B'\to B\to B''\to 0$ и гомоморфизм первой последовательности во вторую, то соответствующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

коммутативны.

2) Для всякой точной последовательности

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

связанная с ней последовательность морфизмов[1])

$$\ldots\to T^i(A')\to T^i(A)\to T^i(A'')\to T^{i+1}(A')\to\ldots \qquad (2.1.1)$$

[1]) Морфизмы этой последовательности определяются следующим образом: морфизмы $T^i(A')\to T^i(A)$ и $T^i(A)\to T^i(A'')$ получаются из заданных морфизмов $A'\to A$ и $A\to A''$ под действием функтора T^i, а морфизмы $T^i(A'')\to T^{i+1}(A')$ — это морфизмы ∂. — *Прим. ред.*

есть комплекс, т. е. композиция двух соседних морфизмов этой последовательности равна нулю.

Аналогично определяется ковариантный ∂^*-функтор. Единственная разница состоит в том, что ∂^* в отличие от ∂ должен уменьшать степень на единицу. Аналогично определяются контравариантные ∂- и ∂^*-функторы. Они являются контравариантными аддитивными функторами, и их граничные операторы отображают $T^i(A')$ в $T^{i+1}(A'')$ или $T^{i-1}(A'')$. Если изменить знак у степеней в T^i или заменить категорию **C**$'$ дуальной, то ∂^*-функторы перейдут в ∂-функторы. Таким образом, всегда можно свести дело к изучению ковариантных ∂-функторов. Заметим, что если $a=-\infty$, $b=+\infty$, то ∂-функтор есть „связанная последовательность функторов" в смысле [6], гл. III.

Если заданы два ∂-функтора T и T', определенные для одних и тех же степеней, то *морфизмом* (или естественным преобразованием) функтора T в T' называется система $f=(f^i)$ функторных морфизмов $f^i\colon T^i\to T'^i$, подчиненная естественным условиям перестановочности с ∂: для всякой точной последовательности $0\to A'\to A\to A''\to 0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T'^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T'^{i+1}(A') \end{array}$$

должна быть коммутативной. Сумма и композиция морфизмов ∂-функторов определяются очевидным образом.

Предположим, что **C**$'$ — также абелева категория. Тогда ∂-функтор называется *точным*, если для всякой точной последовательности $0\to A'\to A\to A''\to 0$ в **C** соответствующая последовательность (2.1.1) точна. *Когомологическим* (соответственно *гомологическим*) *функтором* называется *точный* ∂-функтор (соответственно ∂^*-функтор), определенный для всех степеней.

2.2. Универсальные ∂-функторы.

Пусть $T=(T^i)$ $(0\leqslant i\leqslant a)$ — ковариантный ∂-функтор из **C** в **C**$'$, причем $a>0$. Функтор T называется *универсальным* ∂-функтором, если для всякого ∂-функтора $T'=(T'^i)$, определенного для тех же степеней, что T, и для всякого функторного морфизма f^{i_0} функтора T^{i_0} в T'^{i_0} существует, и притом единственный, морфизм f функтора T в T', который совпадает с f^{i_0} в степени i_0. То же определение дается для контравариантного ∂-функтора. В случае ∂^*-функторов нужно рассматривать морфизмы функтора T' в T, а не T в T'.

По самому определению, для заданного ковариантного функтора F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ и заданного $a > 0$ может существовать, с точностью до канонического изоморфизма, только один универсальный ∂-функтор, определенный в степенях $0 \leqslant i \leqslant a$ и сводящийся к F в степени 0. Составляющие этого функтора обозначаются через S^iF и называются *правыми сателлитами* функтора F. Если $i < 0$, то полагают $S^iF = S_{-i}F$, где S_iF — *левые сателлиты* функтора F, которые определяются так же, как S^iF, но путем рассмотрения универсального ∂^*-функтора, определенного для степеней $0 \leqslant i \leqslant a$ и такого, что $T^0 = F$. Сразу же проверяется, что если для заданного i функтор S^iF существует, то он не зависит от выбора числа a.

Во всех известных мне случаях сателлиты существуют для любого аддитивного функтора F. Впрочем, если $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ заданы, то, чтобы доказать, что для всякого аддитивного ковариантного функтора F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ существует универсальный ∂-функтор, определенный для всех степеней и равный F в степени 0 (т. е., что все сателлиты S^iF существуют), достаточно доказать существование функторов S^1F и $S^{-1}F$. Это следует из формул $S^1(S^iF) = S^{i+1}F\,(i \geqslant 0)$, $S^{-1}(S^iF) = S^{i-1}F\,(i \leqslant 0)$, доказательство которых тривиально. Исследование функтора S^1F и функтора $S^{-1}F$ — это две дуальные задачи, т. к. эти два функтора меняются местами, если заменить $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ дуальными категориями.

Аддитивный функтор F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$ называется *стирающим*, если для всякого $A \in \mathbf{C}$ можно найти такой мономорфизм u: $A \to M$, что $F(u) = 0$. Если категория $\mathbf{C}$ такова, что всякий объект $A \in \mathbf{C}$ допускает инъективное погружение (ср. п. 1.10, замечание 1), то это все равно, что сказать, что $F(u) = 0$ для всякого инъективного погружения u. Если, наконец, $\mathbf{C}$ такова, что всякий объект $A \in \mathbf{C}$ допускает мономорфизм в инъективный объект M (ср. теорему 1.10.1), то это все равно, что сказать, что $F(M) = 0$ для всякого инъективного объекта M. Дуальным образом, F называется

костирающим, если для всякого $A \in \mathbf{C}$ можно найти такой эпиморфизм u: $P \to A$, что $F(u) = 0$.

Предложение 2.2.1. *Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — две абелевы категории, $T = (T^i)(0 \leqslant i < a)$ — точный ∂-функтор (ковариантный или контравариантный) из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$, $a > 0$. Если T^i является стирающим для всех $i > 0$, то T — универсальный ∂-функтор. Обратное также верно, если в $\mathbf{C}$ всякий объект допускает инъективное погружение.*

Для доказательства прямого утверждения достаточно показать, например, что если (T'^0, T'^1) — функтор, определенный для степеней 0, 1, и f^0 — функторный морфизм $T^0 \to T'^0$, то существует единственный морфизм (f^0, f^1): $(T^0, T^1) \to (T'^0, T'^1)$, сводящийся к f^0 в степени 0 (мы предположили для определенности, что T ковариантен). Пусть $A \in \mathbf{C}$. Рассмотрим точную последовательность $0 \to A \to M \to A' \to 0$, такую, что морфизм $T^1(A) \to T^1(M)$ равен нулю. Если бы мы смогли построить f^1, то имели бы коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T^0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(A') \arrow[r] \arrow[d] & T^1(A) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(M) \\
T'^0(M) \arrow[r] & T'^0(A') \arrow[r] & T'^1(A) &
\end{tikzcd}$$

Так как верхняя строка точна, то мы видим, что морфизм $T^0(A') \to T^1(A)$ суперъективен и, следовательно, что морфизм $f^1(A)$: $T^1(A) \to T'^1(A)$ получается из морфизма $f^0(A')$: $T^0(A) \to T'^0(A')$ путем перехода к фактор-объектам. Тем самым доказана единственность морфизма $f^1(A)$. Впрочем, из того, что композиция двух морфизмов нижней строки в предыдущей диаграмме равна нулю, следует, что эта диаграмма без $f^1(A)$ позволяет сразу определить морфизм $f^1(A)$ единственным образом из условия, чтобы диаграмма оставалась коммутативной. Стандартные рассуждения показывают, что так определенный морфизм не зависит от специального выбора точной последовательности $0 \to A \to M \to A' \to 0$, что этот морфизм является функторным и „коммутирует с ∂". Это доказывает первую часть предложения. Вторая часть содержится в следующей теореме существования.

Теорема 2.2.2. *Пусть $\mathbf{C}$ — абелева категория, в которой всякий объект допускает инъективное погружение* (*ср. п.* 1.10). *Тогда для всякого аддитивного ковариантного* *функтора F на* **C** *сателлиты $S^iF\,(i\geqslant 0)$ существуют и при $i>0$ являются стирающими функторами. Для того чтобы универсальный ∂-функтор $(S^iF)\,(i\geqslant 0)$ был точным, необходимо и достаточно, чтобы F удовлетворял следующим условиям: F полуточен и для $P\subset Q\subset R$ из* **C** *ядро морфизма $F(Q/P)\to F(R/P)$ содержится в образе морфизма $F(Q)\to F(Q/P)$ (эти условия всегда выполнены, если F точен слева или точен справа)* [1]).

Доказательство по существу содержится в [6], гл. III. Для доказательства первой части достаточно доказать существование функтора S^1F. Пусть $A\in$ **C**. Рассмотрим точную последовательность $0\to A\to M\to A'\to 0$, где первый морфизм есть инъективное погружение объекта A, и положим $S^1F(A)=F(A')/\operatorname{Im}F(M)$. Так же, как в [6], проверяется, что правая часть этого равенства не зависит от специального выбора точной последовательности (с точностью до канонического изоморфизма) и что ее можно рассматривать как функтор от A. Определение граничного гомоморфизма, проверка аксиом 1) и 2) п. 2.1, а также доказательство того, что полученный ∂-функтор (F, S^1F) универсален, являются стандартными. Доказательство критерия точности мы также опустим.

Отметим дуальное утверждение. *Если в* **C** *всякий объект допускает проективное отображение, то существуют сателлиты $S^iF\,(i\leqslant 0)$, которые являются костирающими функторами. Условие точности ∂-функтора $(S^iF)\,(i\leqslant 0)$ формулируется так же, как в теореме* 2.2.2. Следовательно, если в **C** каждый объект допускает инъективное погружение и проективное отображение, то всякий ковариантный аддитивный функтор F обладает сателлитами S^iF для всех i; для того чтобы универсальный ∂-функтор (S^iF) был точным, необходимо и достаточно, чтобы F удовлетворял условию, указанному в формулировке теоремы 2.2.2. Если F — контравариантный функтор, то в формулировках, приведенных выше, нужно поменять местами случаи $i\leqslant 0$ и $i\geqslant 0$ и заменить условие точности дуальным условием.

Замечание. Отметим другой случай, сильно отличающийся от указанного в теореме 2.2.2, когда можно построить сателлиты произвольного функтора из **C** в **C**$'$. Предположим, что можно найти такое *множество* $\mathbf{C}_0\subset\mathbf{C}$, что всякий объект $A\in\mathbf{C}$ изоморфен объекту из $\mathbf{C}_0$, и предположим, что **C**$'$ — абелева категория, в которой существуют бесконечные прямые суммы. В этом случае для всякого аддитивного функтора F из **C** в **C**$'$ существуют сателлиты $S^iF\,(i\geqslant 0)$. Кроме того, если **C**$'$ удовлетворяет аксиоме AB 5) (см. п. 1.5) и если F удовлетворяет условию конца теоремы 2.2.2, то ∂-функтор $(S^iF)(i\geqslant 0)$ *точен*. Так как, в частности, категория абелевых групп удовлетворяет условию AB 5), то предыдущие результаты можно применить к функтору $\operatorname{Hom}(A, B)$ со значениями в категории абелевых групп. В качестве сателлитов функтора $\operatorname{Hom}(A, B)$, рассматриваемого как ковариантный функтор от B или как контравариантный функтор от A, получатся при этом функторы $\operatorname{Ext}^i(A, B)$. (В этом случае остается еще доказать, что эти два пути приводят к одному и тому же результату.) Условие, наложенное на категорию **C**, выполнено в категориях, объекты которых подчинены некоторым условиям конечности (и где, вообще говоря, не существуют бесконечные прямые суммы). Примером является абелева категория алгебраических групп (не обязательно связных), определенных над фиксированным полем k характеристики 0, которые полны как алгебраические многообразия и абелевы как группы, т. е. категория алгебраических абелевых групп, определенных над k, у которых связная компонента единичного элемента есть „абелево многообразие“. (Мы обязаны требовать, чтобы характеристика поля была равна 0, ибо в противном случае биективный гомоморфизм может не быть изоморфизмом.) Отметим, что при доказательстве сформулированного выше результата объект $S^1F(A)$ строится как индуктивный предел объектов $F(M/A)/\operatorname{Im}(F(M))$ для „всех“ мономорфизмов $A\to M$ в **C**, снабженных следующим отношением квазипорядка: мономорфизм $A\to M$ мажорируется мономорфизмом $A\to M'$, если найдется морфизм $M\to M'$, индуцирующий на A тождественный морфизм.

[1]) Эти условия автоматически выполняются также в том случае, когда в **C** всякий объект изоморфен подобъекту некоторого инъективного объекта (см. [6], гл. III).

2.3. Производные функторы.

Пусть **C** и **C**$'$ — две абелевы категории. Теория производных функторов для заданного аддитивного функтора F из **C** в **C**$'$ строится так же, как в [6], гл. V, за исключением того, что нужно предполагать, смотря по обстоятельствам, чтобы всякий объект $A \in \mathbf{C}$ был изоморфен или подобъекту инъективного объекта, или фактор-объекту проективного объекта, или то и другое вместе. Так, для определения *правых* производных *ковариантного* функтора или *левых* производных *контравариантного* функтора нужно предполагать, что всякий объект $A \in \mathbf{C}$ изоморфен подобъекту некоторого инъективного объекта. Действительно, в этом случае всякий $A \in \mathbf{C}$ допускает инъективную резольвенту [1]) $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \ldots$, с помощью которой определяются $R^iF(A) = H^i(F(C))$ (где через C обозначен комплекс с компонентами C^i). Для определения левых производных ковариантного функтора или правых производных контравариантного функтора нужно предполагать, что всякий объект категории $\mathbf{C}$ изоморфен фактор-объекту некоторого проективного объекта. И, наконец, для определения производных смешанных функторов от нескольких переменных нужно накладывать соответствующие условия на категорию каждой из переменных. С учетом этих замечаний изложение, данное в [6], переносится без изменений. В частности, если, например, F — ковариантный функтор и если можно образовать правые производные функторы R^iF, то (полагая $R^iF = 0$ при $i < 0$) получим, что $RF = (R^iF)$ есть когомологический функтор (называемый *правым производным когомологическим функтором* от F) и что существует канонический морфизм ∂-функторов с положительными степенями $SF \to RF$ (где $SF = (S^iF)$ — универсальный ∂-функтор, определенный в положительных степенях и являющийся сателлитом функтора F, который существует в силу теоремы 2.2.2). Этот последний морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда F точен слева. Заметим, что рассмотрение функторов R^iF, по-видимому, представляет какой-то интерес только в том случае, когда F точен слева, т. е. когда эти функторы

[1]) Назовем *правой резольвентой* объекта $A \in \mathbf{C}$ комплекс C (определенный для положительных степеней), снабженный „дополняющим гомоморфизмом" $A \to C$ (A рассматривается здесь как комплекс, равный нулю в ненулевых степенях), таким, что последовательность $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \ldots$ точна. Резольвента называется *инъективной*, если все C^i инъективны. *Левые резольвенты* объекта A, и в частности *проективные резольвенты*, определяются дуальным образом.

совпадают с сателлитами. Однако одновременное определение функторов R^iF с помощью инъективных резольвент более удобно, чем рекуррентное определение сателлитов S^iF. В частности, оно лучше приспособлено к построению наиболее важных спектральных последовательностей (см. п. 2.4).

Пусть $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}'$ — три абелевы категории и пусть $T(A, B)$ — аддитивный бифунктор из $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ в $\mathbf{C}'$, который мы предположим для определенности контравариантным по A и ковариантным по B. Предположим, что всякий объект из $\mathbf{C}_2$ изоморфен подобъекту некоторого инъективного объекта. Тогда можно построить частные производные функторы (правые) функтора T по отношению ко второй переменной B

$$R_2^iT(A, B) = H^i(T(A, C(B))),$$

где $C(B)$ — комплекс, определяемый правой инъективной резольвентой объекта B. Разумеется, R_2^iT суть бифункторы. *Теперь предположим, что для всякого инъективного объекта $B \in \mathbf{C}_2$ функтор $A \to T(A, B)$, определенный на $\mathbf{C}_1$, точен.* Покажем, что тогда *для произвольного* $B \in \mathbf{C}_2$ последовательность $(R_2^iT(A, B))$ может рассматриваться как когомологический функтор от A. Действительно, пусть $C(B)$ — комплекс, определяемый правой инъективной резольвентой объекта B. Для всякой точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ в $\mathbf{C}_1$ последовательность гомоморфизмов комплексов $0 \to T(A'', C(B)) \to T(A, C(B)) \to T(A', C(B)) \to 0$ точна (в силу свойств функтора T, т. к. члены комплекса $C(B)$ инъективны). Таким образом, она определяет точную последовательность когомологий, т. е. точную последовательность

$$\ldots \to R_2^iT(A'', B) \to R_2^iT(A, B) \to R_2^iT(A', B) \xrightarrow{\partial} R_2^{i+1}T(A'', B) \to \ldots$$

Сразу же проверяется, что гомоморфизм ∂ этой последовательности не зависит от специального выбора комплекса $C(B)$ и перестановочен с гомоморфизмами точных последовательностей. Тем самым доказано, что $(R_2^iT(A, B))$ при фиксированном B есть когомологический функтор от A. Впрочем, сразу же видно, что для морфизма $B \to B'$ в $\mathbf{C}_2$ соответствующие морфизмы $R_2^iT(A, B) \to R_2^iT(A, B')$ определяют морфизм ∂-функторов от A. Если вдобавок предположить, что в $\mathbf{C}_1$ всякий объект изоморфен фактор-объекту некоторого проективного объекта и что для всякого проективного объекта $A \in \mathbf{C}_1$ функтор $T(A, B)$ точен по B (будем говорить тогда, следуя терминологии книги [6], что T „сбалансирован справа“), то $R_2^i T(A, B)$ будут также правыми производными $R^i T(A, B)$ функтора T и будут совпадать с частными производными $R_1^i T(A, B)$. В этом случае граничные гомоморфизмы, построенные выше, суть не что иное, как естественные граничные гомоморфизмы функторов $R^i T$ и $R_1^i T$ по отношению к первой переменной.

Предшествующие рассуждения проводились для случая абелевой категории $\mathbf{C}$, в которой всякий объект изоморфен подобъекту инъективного объекта, причем не предполагалось, что всякий объект изоморфен фактор-объекту проективного объекта. Возьмем $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}$, и пусть $\mathbf{C}'$ — категория абелевых групп, а $T(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$. По самому определению инъективного объекта функтор $\mathrm{Hom}(A, B)$ точен по A, если B инъективен. Обозначим через $\mathrm{Ext}^p(A, B)$ его правые производные функторы по отношению к B. Из изложенного видно, что $\mathrm{Ext}^p(A, B)$ образуют когомологический функтор по B и по A. Мы имеем $\mathrm{Ext}^0(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$, поскольку $\mathrm{Hom}(A, B)$ точен слева. Легко видеть, что $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ можно интерпретировать как группу классов расширений объекта A (фактор-объект) с помощью B (подобъект) ([6], гл. XIV).

Важным частным случаем абелевой категории $\mathbf{C}$, содержащей достаточное количество инъективных объектов, но не содержащей достаточного количества проективных объектов, является случай категории пучков модулей над заданным пучком колец на топологическом пространстве X. В гл. IV мы изучим подробнее группы $\mathrm{Ext}^p(A, B)$ в этом случае.

2.4. Спектральные последовательности и спектральные функторы.

Что касается теории спектральных последовательностей, то мы отсылаем читателя к [6], гл. XV и XVII, а здесь только уточним терминологию и установим наиболее важные для дальнейшего общие случаи, в которых можно написать спектральную последовательность.

Пусть $\mathbf{C}$ — абелева категория. Если $A \in \mathbf{C}$, то *фильтрацией* (убывающей) объекта A называется семейство $(F^n(A))$

подобъектов из A ($n \in \mathbf{Z}$), такое, что $F^n(A) \subset F^{n'}(A)$ при $n \geqslant n'$ (через $\mathbf{Z}$ здесь, как и всюду, обозначена группа целых чисел). *Объектом с фильтрацией* в $\mathbf{C}$ называется объект из $\mathbf{C}$, снабженный фильтрацией. Если A, B — два объекта с фильтрацией в $\mathbf{C}$, то говорят, что морфизм u: $A \to B$ совместим с фильтрацией, если $u(F^n(A)) \subset F^n(B)$ для каждого n. При таком определении морфизма объекты с фильтрацией в $\mathbf{C}$ образуют аддитивную категорию (но не обязательно абелеву, так как может случиться, что биективный морфизм этой категории не будет изоморфизмом!). *Присоединенным градуированным объектом* для объекта с фильтрацией A называют семейство $G(A) = (G^n(A))$, где $G^n(A) = F^n(A)/F^{n+1}(A)$ [1]. Тогда $G(A)$ является ковариантным функтором по отношению к объекту A с фильтрацией.

Спектральной последовательностью в категории $\mathbf{C}$ называется система $E = \left(E_r^{p,q}, E^n\right)$, образованная

a) объектами $E_r^{p,q} \in \mathbf{C}$, определенными для любых целых p, q, r при $r \geqslant 2$ (можно было бы заменить 2 на произвольное целое число r_0, но для приложений представляются интересными только случаи $r = 2$ и $r = 1$);

b) морфизмами $d_r^{p,q}$: $E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,\, q-r+1}$, такими, что $d_r^{p+r,\, q-r+1} d_r^{p,q} = 0$;

c) изоморфизмами $\alpha_r^{p,q}$: $\mathrm{Ker}\left(d_r^{p,q}\right)/\mathrm{Im}\left(d_r^{p-r,\, q+r-1}\right) \to E_{r+1}^{p,q}$;

d) объектами E^n с фильтрацией из категории $\mathbf{C}$, определенными для каждого целого n.

---

[1]) Эти определения не являются автодуальными. Мы получим дуальные понятия, если свяжем с каждой „убывающей фильтрацией“ объекта A подобъектами $F^n(A)$ „присоединенную убывающую кофильтрацию“, которая определяется фактор-объектами $F'_n(A) = A/F_{1-n}(A)$. Тогда при переходе к дуальной категории эти две фильтрации перейдут соответственно в убывающую кофильтрацию и присоединенную убывающую фильтрацию. Можно также положить $F_n(A) = F^{1-n}(A)$ и $F'^n(A) = F'_{1-n}(A)$ (это *возрастающие* фильтрация и кофильтрация, присоединенные к предыдущим фильтрациям) и, смотря по обстоятельствам, рассматривать ту из четырех фильтраций, которая наиболее удобна. Положим $G^n(A) = \mathrm{Coker}\,[F^n(A) \to F^{n-1}(A)]$, $G_n(A) = \mathrm{Ker}\left[F'_n(A) \to F'_{n-1}(A)\right]$. Тогда будем иметь $G^n(A) = G_{-n}(A)$. Функторы G^n и G_n переходят друг в друга при переходе от категории $\mathbf{C}$ к дуальной категории.

Предполагается, что для каждой фиксированной пары (p, q) имеем $d_r^{p,q}=0$ и $d_r^{p-r,\,q+r-1}=0$ для достаточно больших r. Отсюда следует, что $E_r^{p,q}$ не зависит от r при достаточно больших r; обозначим этот объект через $E_\infty^{p,q}$. Предположим, кроме того, что для каждого фиксированного n объект $F^p(E^n)$ равен E^n, когда p достаточно мало, и равен 0, когда p достаточно велико. Наконец, предположим, что заданы

e) изоморфизмы $\beta^{p,q}$: $E_\infty^{p,q}\to G^p\left(E^{p+q}\right)$.

Семейство (E^n) (без фильтраций) называют *пределом* спектральной последовательности E. *Морфизм и одной спектральной последовательности* $E=\left(E_n^{p,q}, E^n\right)$ *в другую* $E'=\left(E_r'^{p,q}, E'^n\right)$ состоит, по определению, из системы морфизмов $u_r^{p,q}$: $E_r^{p,q}\to E_r'^{p,q}$ и u^n: $E^n\to E'^n$, совместимых с фильтрациями, причем эти морфизмы должны быть перестановочны с морфизмами $d_r^{p,q}$, $\alpha_r^{p,q}$ и $\beta^{p,q}$. Спектральные последовательности в $\mathbf{C}$ образуют аддитивную (но, конечно, не абелеву) категорию. Назовем *спектральным функтором* аддитивный функтор, определенный на абелевой категории, со значениями в некоторой категории спектральных последовательностей [1]. Спектральная последовательность называется *когомологической спектральной последовательностью*, если $E_r^{p,q}=0$ для $p<0$ и для $q<0$. Тогда имеем $E_r^{p,q}=E_\infty^{p,q}$ для $r>\max(p,\ q+1)$, $E^n=0$ для $n<0$, $F^m(E^n)=0$ при $m>n$, $F^m(E^n)=E^n$ для $m\leqslant 0$.

Пусть, например, K — *бикомплекс* [2] в категории $\mathbf{C}$, $K=\left(K^{p,q}\right)$. Предположим, что для каждого целого n существует лишь конечное число таких пар (p, q), что $p+q=n$ и $K^{p,q}\neq 0$. Тогда можно построить две спектральные последовательности, сходящиеся к $H(K)=(H^n(K))$ (когомологии простого комплекса (K^n), связанного с K, который опреде-

[1]) По-видимому, для всех известных спектральных функторов предел является когомологическим функтором. Стоило бы исследовать связи между граничными гомоморфизмами предела и другими составляющими спектрального функтора.

[2]) В отличие от терминологии, введенной в [6], мы предполагаем, что два граничных оператора d' и d'' бикомплекса K перестановочны, и поэтому в качестве полного граничного оператора берем оператор $d=d'+\bar d''$, где $\bar d''x=(-1)^p d''x$ для $x\in K^{p,q}$.

ляется формулой $K^n=\bigoplus\limits_{p+q=n}K^{p,q}$). Начальные члены этих последовательностей имеют вид

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(K)=H_{\mathrm{I}}^pH_{\mathrm{II}}^q(K),\quad \mathrm{II}_2^{p,q}(K)=H_{\mathrm{II}}^pH_{\mathrm{I}}^q(K) \qquad (2.4.1)$$

(в обозначениях книги [6], гл. XV, п. 6). Эти спектральные последовательности являются спектральными функторами от K. Они являются *когомологическими* спектральными последовательностями, если степени в K положительны.

Пусть F — ковариантный функтор из одной абелевой категории $\mathbf{C}$ в другую $\mathbf{C}'$. Предположим, что в $\mathbf{C}$ каждый объект изоморфен подобъекту инъективного объекта. Пусть $K=(K^n)$ — комплекс в $\mathbf{C}$, ограниченный слева (т. е. $K^n=0$, когда n достаточно мало). Тогда рассуждения из [6], гл. XVII, позволяют построить две спектральные последовательности $\left(\mathrm{I}\,F_r^{p,q}(K),\ \ \mathrm{I}\,F^n(K)\right)$ и $\left(\mathrm{II}\,F_r^{p,q}(K),\ \mathrm{II}\,F^n(K)\right)$, сходящиеся к одному и тому же градуированному объекту $\mathfrak{R}F(K)=(\mathfrak{R}^nF(K))$ (для двух надлежащих фильтраций этого объекта), начальные члены которых соответственно равны

$$\mathrm{I}\,F_2^{p,q}(K)=H^p\left(R^qF(K)\right),\quad \mathrm{II}\,F_2^{p,q}(K)=R^pF\left(H^q(K)\right) \qquad (2.4.2)$$

(как обычно, через $F(K)$ обозначается комплекс, полученный применением функтора F к каждому из членов комплекса K). Эти спектральные последовательности являются функторами по отношению к K. Таким образом, мы определили на категории комплексов в $\mathbf{C}$, ограниченных слева, два спектральных функтора. Их называют *правыми производными спектральными функторами для* F или *спектральными функторами гипергомологий* (правых) *для* F. Функторы $\mathfrak{R}^nF(K)$ называются *функторами гипергомологий* для F.

Напомним принцип построения этих последовательностей, ограничиваясь для определенности случаем, когда K имеет положительные степени. Пусть $L=\left(L^{p,q}\right)$ — положительный бикомплекс, снабженный дополнением, т. е. гомоморфизмом бикомплексов $K\to L$ (где K рассматривается как бикомплекс с нулевыми вторыми степенями). Предположим, что для каждого p комплекс $L^{p,*}=\left(L^{p,q}\right)_q$ есть *резольвента* для K^p и что для любых p, q имеем $R^nF\left(L^{p,q}\right)=0$ при $n>0$. Вот два способа (тождественные с точностью до гомотопической эквивалентности бикомплексов) для построения такого бикомплекса.

a) Будем рассматривать K как объект абелевой категории $\mathfrak{K}$ комплексов в категории $\mathbf{C}$, имеющих положительные степени, и возьмем за L *инъективную* резольвенту объекта K. Легко видеть, что инъективными объектами в $\mathfrak{K}$ являются такие комплексы $A=(A^i)$ с положительными степенями, что A^i инъективны, $H^i(A)=0$ для $i>0$ и что A^i „расщепляются" (т. е. подобъекты циклов $Z(A^i)$ являются прямыми слагаемыми в A^i). Кроме того, всякий объект из $\mathfrak{K}$ можно вложить в инъективный объект.

b) Возьмем „инъективную резольвенту" комплекса K в смысле [6], гл. XVII (кавычки необходимы, так как терминология в [6] явно двусмысленна), т. е. предположим, что $L^{p,q}$ инъективны и что если для фиксированного p взять циклы (соответственно границы, когомологии) в $L^{p,*}$ по отношению к первому граничному оператору, то получится инъективная резольвента объекта, образованного циклами (соответственно границами, когомологиями) в K^p.

Если L — описанный выше бикомплекс, то $HF(L)$ по существу не зависит от выбора L и может быть отождествлен с $R(FH^0)(K)$ (где H^0 рассматривается как точный слева ковариантный функтор $\mathfrak{K}\to\mathbf{C}$, а FH^0 есть композиция функторов). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять инъективную резольвенту L' комплекса K [в смысле пункта a)]. Тогда существует гомоморфизм (единственный с точностью до гомотопии) резольвенты L в резольвенту L', откуда следует гомоморфизм $F(L)\to F(L')$, который индуцирует *изоморфизм* $\mathrm{I}_2^{p,q}(F(L))\to \mathrm{I}_2^{p,q}(F(L'))$ [эти два члена на самом деле отождествляются с $H^p(R^qF(K))$]. Следовательно, имеем *изоморфизм* объекта $HF(L)$ на $HF(L')$. Последний объект можно получить с помощью второй спектральной последовательности бикомплекса $F(L')$. Сразу же видно, что $H_{\mathrm{I}}^q(F(L'))=0$ для $q>0$. Следовательно, получаем, что $H^nF(L')=H^n(H^0(L'^{*,n}))$, где правая часть есть по определению $R^n(FH^0)(A)$. Отсюда следует определение и общий способ вычисления гипергомологий $\Re F(K)=R(FH^0)(K)$ функтора F по отношению к комплексу K. Отсюда же следует определение первой спектральной последовательности, сходящейся к гипергомологиям, второй член которой есть $\mathrm{I}F_2^{p,q}(K)=H^p(R^qF(K))$. Если теперь взять в качестве L „инъективную резольвенту" комплекса K, описанную в b), то вторая спектральная последовательность бикомплекса $F(L)$ по существу не зависит от L (потому что L единственна с точностью до гомотопической эквивалентности). Она сходится к $\Re F(K)$, и ее второй член дается формулой (2.4.2). Впрочем, для того чтобы вторая спектральная последовательность комплекса $F(L)$ была спектральной последовательностью, определяемой формулой (2.4.2), достаточно вместо инъективности потребовать в пункте b), чтобы $R^nF(L^{p,q})=0$ для $n>0$. Заметим еще, что если степени в K положительны, то две производные спектральные последовательности для функтора F являются *когомологическими* спектральными последовательностями. Производные спектральные последовательности для функтора F над K можно определить и не предполагая, что степени в K ограничены снизу, но тогда *нужно, чтобы функтор F имел конечную инъективную размерность*, т. е. $R^pF=0$ для некоторого p. Этот факт, по-видимому, не содержится в [6], но, поскольку он нам не понадобится в дальнейшем, мы ограничимся указанием на него без доказательства. Ясно, что можно было бы определить также левые производные спектральные функторы от ковариантного функтора F в предположении, что $\mathbf{C}$ содержит достаточно много проективных объектов. Аналогично можно рассмотреть случай контравариантного функтора F. В [6] рассмотрен также случай, когда F есть мультифунктор, но он нам не понадобится.

Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ — три абелевы категории. Рассмотрим два ковариантных функтора F: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ и G: $\mathbf{C}'\to\mathbf{C}''$. Предположим, что каждый объект из $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ изоморфен подобъекту инъективного объекта, так что можно рассмотреть правые производные функторы для функторов F, G, GF. Постараемся установить некоторые соотношения между этими производными функторами. Пусть $A\in\mathbf{C}$ и $C(A)$ — комплекс, связанный с некоторой правой инъективной резольвентой объекта A. Рассмотрим комплекс $F(C(A))$ в $\mathbf{C}'$. При изменении комплекса $C(A)$ он заменяется гомотопно эквивалентным комплексом. Отсюда немедленно следует, что спектральные последовательности, определенные функтором G и комплексом $F(C(A))$, зависят только от A и являются поэтому когомологическими спектральными функторами на категории $\mathbf{C}$, обладающими одинаковыми пределами. Назовем их *спектральными функторами композиции функторов* GF. Формулы, данные ранее, позволяют указать их вторые члены:

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(A)=\left(R^p\left(\left(R^q G\right)F\right)\right)(A), \quad \mathrm{II}_2^{p,q}(A)=R^p G\left(R^q F(A)\right).$$

Заметим, что наиболее важным случаем, при котором получаются нетривиальные спектральные последовательности, является тот, когда F переводит инъективные объекты в объекты, аннулируемые функторами $R^q G$ $(q \geqslant 1)$ (такие объекты называются *G-ациклическими*), и когда $R^0 G = G$ (т. е. G точен слева). Тогда $\mathrm{I}_2^{p,q}=0$, если $q>0$, и $\mathrm{I}_2^{p,0}=R^p(GF)$, откуда следует, что общий предел этих двух спектральных последовательностей совпадает с правым производным функтором для GF. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ — три абелевы категории. Предположим, что каждый объект из $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ изоморфен подобъекту некоторого инъективного объекта. Рассмотрим ковариантные функторы F: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ и G: $\mathbf{C}'\to\mathbf{C}''$ и допустим, что G точен слева, а F переводит инъективный объект в G-ациклический [т. е. аннулирующийся функторами $R^q G$ $(q>0)$]. Тогда существует когомологический спектральный функтор на $\mathbf{C}$ со значениями в $\mathbf{C}''$, сходящийся к правому производному функтору $R(GF)$ для GF (снабженному надлежащей фильтрацией), второй член которого имеет вид*

$$E_2^{p,q}(A)=R^p G\left(R^q F(A)\right). \tag{2.4.3}$$

Замечания. 1. Второе предположение о паре (F, G) означает, что функторы $(R^p G)F$ $(p>0)$ являются стирающими (ср. п. 2.2), т. е. для каждого $A \in \mathbf{C}$ найдется такой мономорфизм u: $A \to M$, что $(R^p G)(F(M))=0$ для $p>0$. Именно в такой форме мы чаще всего будем проверять это предположение.

2. Заметим, что для того, чтобы вычислить вторую спектральную последовательность для композиции функторов (т. е. спектральную последовательность, которая рассматривается в теореме 2.4.1), достаточно взять какую-либо резольвенту $C(A)$ объекта A, в которой C^i являются F-ациклическими (но не обязательно инъективными), и рассмотреть вторую спектральную последовательность гипергомологий функтора G по отношению к комплексу $FC(A)$.

3. Укажем два важных частных случая, когда одна из двух спектральных последовательностей гипергомологий функтора F по отношению к комплексу K вырождается. *Если K есть резольвента*[1]) *объекта A из $\mathbf{C}$, то* $\mathfrak{R}^n F(K)=R^n F(A)$. Следовательно, градуированный объект $(R^n F(A))$ есть предел спектральной последовательности с начальным членом $\mathrm{I}_2^{p,q}(K)=H^p(R^q F(K))$. *Если K^n являются F-ациклическими* (т. е. $R^m F(K^n)=0$ для $m>0$), *то* $\mathfrak{R}^n F(K)=H^n(F(K))$, т. е. градуированный объект $(H^n(F(K)))$ есть предел спектральной последовательности с начальным членом $\mathrm{II}_2^{p,q}(K)=R^p F(H^q(K))$. Комбинируя эти два результата, получаем, что *если K есть резольвента объекта A, состоящая из F-ациклических объектов, то* $R^n F(A)= H^n(F(K))$. Полученные таким образом изоморфизмы совпадают, впрочем, с морфизмами, индуцированными гомоморфизмом комплекса K в инъективную резольвенту объекта A. Следовательно, они совпадают также с точностью до знака с гомоморфизмами, определенными с помощью „итерированного связывающего гомоморфизма“ в K ([6], гл. V, § 7).

2.5. Резольвентные функторы.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — абелевы категории. Предположим, что любой объект из $\mathbf{C}$ изоморфен подобъекту инъективного объекта. Пусть F — ковариантный точный слева функтор из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$. *Резольвентным функтором* для F называют ковариантный функтор $\mathbf{F}$, определенный на $\mathbf{C}$, со значениями в категории комплексов с положительными степенями над $\mathbf{C}'$ [так что $\mathbf{F}(A)=(\mathbf{F}^n(A))$], снабженный дополнением $F\to\mathbf{F}$ (т. е. гомоморфизмом функтора F в функтор $Z^0\mathbf{F}^0$ коциклов функтора $\mathbf{F}^0$) и удовлетворяющий следующим условиям: 1) функтор $\mathbf{F}$ точен; 2) $F\to Z^0\mathbf{F}^0$ есть изоморфизм; 3) если A инъективен, то $\mathbf{F}(A)$ ацикличен в степенях >0.

Пусть $\mathbf{F}$ — резольвентный функтор для F. Рассмотрим функторы $H^n\mathbf{F}(A)$ на $\mathbf{C}$ со значениями в $\mathbf{C}'$. Из условия 1)

[1]) См. примечание 1 на стр. 42.

следует, что они образуют когомологический функтор. В силу 2) последний совпадает с F в размерности 0. Наконец, в силу 3) $H^n\mathbf{F}(A)$ для $n > 0$ являются стирающими функторами. Следовательно, имеем

Предложение 2.5.1. *Если* $\mathbf{F}$ — *резольвентный функтор для* F, *то для любого* $A \in \mathbf{C}$ *имеем единственный изоморфизм* $H^n\mathbf{F}(A) = R^nF(A)$, *определяющий изоморфизм когомологических функторов, который сводится в размерности* 0 *к изоморфизму дополнения.*

Мы дадим сейчас другое доказательство предыдущего предложения, указывающее удобный способ для вычисления этого изоморфизма.

Предложение 2.5.2. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *резольвентный функтор для* F. *Пусть* $A \in \mathbf{C}$ *и* $C = (C^p(A))$ — *правая резольвента для* A, *состоящая из* F-*ациклических объектов. Рассмотрим бикомплекс* $\mathbf{F}C(A) = (\mathbf{F}^qC^p(A))_{p,q}$ *и естественные гомоморфизмы*

$$F(C(A)) \to \mathbf{F}(C(A)) \leftarrow \mathbf{F}(A), \qquad (2.5.1)$$

определенные дополнениями $F \to \mathbf{F}$ *и* $A \to C(A)$ *соответственно. Тогда соответствующие гомоморфизмы*

$$H^nF(C(A)) = R^nF(A) \to H^n\mathbf{F}(C(A)) \leftarrow H^n\mathbf{F}(A) \qquad (2.5.2)$$

суть изоморфизмы, и соответствующий изоморфизм $H^n\mathbf{F}(A) = R^nF(A)$ *есть в точности изоморфизм предложения* 2.5.1.

Будем рассматривать $F(C(A))$ [соответственно $\mathbf{F}(A)$] как бикомплекс, вторая (соответственно первая) степень которого равна нулю. Первая спектральная последовательность комплекса $\mathbf{F}(C(A))$ имеет начальным членом $H(F(C(A)))$ (ибо $H^q_{\mathrm{II}}(\mathbf{F}(C(A))) = 0$ при $q > 0$ и отождествляется с $F(C(A))$ при $q = 0$ в силу предложения 2.5.1 и того, что $C^p(A)$ являются F-ациклическими). Следовательно, первый гомоморфизм диаграммы (2.5.1) индуцирует изоморфизм начальных членов спектральной последовательности I и, значит, индуцирует изоморфизм когомологий. Далее, $H_{\mathrm{I}}(\mathbf{F}(C(A))^{p,q}$ есть нуль для $p > 0$ и равен $\mathbf{F}(A)$ для $p = 0$ (так как $\mathbf{F}$ — точный функтор и $C(A)$ — резольвента объекта A). Следовательно, второй гомоморфизм диаграммы (2.5.1) индуцирует изоморфизм начальных членов спектральных последовательностей II и, значит, также индуцирует изоморфизм когомологий.

Чтобы показать, что полученный изоморфизм объекта $H^n\mathbf{F}(A)$ на $R^nF(A)$ есть в точности изоморфизм из предложения 2.5.1, можно взять *инъективную* резольвенту $C'(A)$ объекта A, гомоморфизм резольвенты $C(A)$ в $C'(A)$ и рассмотреть индуцированный им гомоморфизм диаграммы (2.5.2) в аналогичную диаграмму, связанную с $C'(A)$. Это показывает, что полученный изоморфизм не зависит от выбора $C(A)$. С другой стороны, ограничиваясь впредь инъективными резольвентами, немедленно видим, что полученные изоморфизмы являются функторными и перестановочны с граничными гомоморфизмами. Кроме того, они сводятся в размерности 0 к дополняющему изоморфизму (или, вернее, изоморфизму, обратному к дополняющему). Следовательно, они совпадают с изоморфизмами из предложения 2.5.1.

Примеры. а) Рассмотрим тождественный функтор I из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$. Резольвентный функтор для I (мы будем называть его *резольвентой тождественного функтора* в $\mathbf{C}$) — это *точный* ковариантный функтор C из $\mathbf{C}$ в категорию комплексов с положительными степенями в $\mathbf{C}$, снабженный дополнением $A \to C(A)$, которое является изоморфизмом объекта A на $Z^0C(A)$, и такой, что $C(A)$ есть резольвента объекта A, если A инъективен. Тогда в силу предложения 2.5.1 $C(A)$ есть резольвента объекта A для любого A (действительно, так как функтор I точен, то $R^nI = 0$ для $n > 0$). Пусть C — резольвента тождественного функтора в $\mathbf{C}$, F — точный слева ковариантный функтор из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$. *Предположим, что* $R^nF(C^i(A)) = 0$ *для всех* $n > 0$ (т. е. что $C^i(A)$ являются F-ациклическими). *Тогда* $\mathbf{F}(A) = F(C(A))$ *есть резольвентный функтор для* F. В самом деле, этот функтор является точным, так как, если имеется точная последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, то получаем из нее точную последовательность $0 \to C^i(A') \to C^i(A) \to C^i(A'') \to 0$, откуда в силу равенства $R^1F(C^i(A')) = 0$ следует точная последовательность

$$0 \to F(C^i(A')) \to F(C^i(A)) \to F(C^i(A'')) \to 0.$$

Итак, 1) выполнено. Точно так же выполнено 2), так как F — точный слева, а C — точный функтор. Выполнено и 3), так как имеем $H^n(C(A)) = R^nF(A)$ [ибо $C(A)$ является F-ациклической резольвентой объекта A], что равно нулю, если $n > 0$ и если A инъективен. Удобный способ построения резольвенты тождественного функтора в **C** состоит в следующем. Возьмем точный функтор $C^0(A)$ из **C** в **C** и *мономорфизм* функторов $A \to C^0(A)$. Затем определим по индукции функторы $C^n(A)$ $(n \geqslant 0)$ и гомоморфизмы d^{n-1}: $C^{n-1} \to C^n$, полагая $C^1(A) = C^0(C^0(A)/\operatorname{Im} A)$ и $C^n(A) = C^0(C^{n-1}(A)/\operatorname{Im} C^{n-2}(A))$ (для $n \geqslant 2$) и определяя d^{n-1} с помощью дополняющего гомоморфизма объекта $Q = C^{n-1}(A)/\operatorname{Im} C^{n-2}(A)$ в $C^0(Q)$. При этом действительно получается резольвента тождественного функтора. Для того чтобы $C^i(A)$ были F-ациклическими, достаточно, чтобы таким был $C^0(A)$.

b) Пусть $P = (P_n)$ — проективная резольвента объекта $A \in \mathbf{C}$. Пусть F — функтор $F(B) = \operatorname{Hom}(A, B)$ из **C** в категорию абелевых групп. Тогда F допускает резольвентный функтор $\operatorname{Hom}(P, B)$.

Мы покажем теперь, как с помощью резольвентных функторов можно вычислять наиболее важные спектральные последовательности. Пусть $\mathbf{F}$ — резольвентный функтор точного слева функтора F из **C** в **C'**. Пусть K — комплекс в **C** со степенями, ограниченными слева. Рассмотрим бикомплекс $\mathbf{F}(K) = (\mathbf{F}^q(K^p))_{p,q}$. Он функторно зависит от K, и, следовательно, тем же свойством обладают две его спектральные последовательности и их пределы. Начальные члены этих двух спектральных последовательностей легко выписать. Воспользовавшись точностью функтора $\mathbf{F}$ и предложением 2.5.1, получаем

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(\mathbf{F}(K)) = H^p(R^qF(K)), \qquad \mathrm{II}_2^{p,q}(\mathbf{F}(K)) = R^pF(H^q(K)). \tag{2.5.3}$$

Мы имеем здесь функторные изоморфизмы с начальными членами спектральных последовательностей (2.4.2) гипергомологий функтора F по отношению к комплексу K.

Предложение 2.5.3. *Изоморфизмы* (2.5.3) *продолжимы до функторных изоморфизмов первой (соответственно второй) спектральной последовательности бикомплекса* $\mathbf{F}(K)$ *с первой (соответственно второй) спектральной последовательностью гипергомологий функтора* F *по отношению к комплексу* K.

Для этих изоморфизмов будет дано явное выражение в последующем доказательстве. Пусть $C(K) = (C^{p,q}(K))_{p,q}$ — „инъективная резольвента“ комплекса K в смысле [6], гл. XVII. Рассматривая K как бикомплекс со второй степенью, равной нулю, имеем дополняющий гомоморфизм $K \to C(K)$. Рассмотрим теперь бикомплекс $M(K) = \mathbf{F}(C(K))$, определенный формулой

$$M^{p,q}(K) = \bigoplus_{q'+q''=q} \mathbf{F}^{q''}(C^{p,q'}(K)).$$

Бикомплекс $M(K)$ не определяется комплексом K однозначно. Тем не менее две спектральные последовательности бикомплекса $M(K)$ и их общий предел однозначно определены [так как $C(K)$ определен с точностью до гомотопической эквивалентности бикомплексов]; они являются спектральными функторами от переменной K. Положим $N(K) = F(C(K))$. Дополняющие гомоморфизмы $K \to C(K)$ и $F \to \mathbf{F}$ определяют гомоморфизмы бикомплексов

$$N(K) = F(C(K)) \to M(K) = \mathbf{F}(C(K)) \leftarrow \mathbf{F}(K),$$

откуда получаем *функторные* гомоморфизмы для соответствующих спектральных последовательностей [эти гомоморфизмы не зависят от выбора резольвенты $C(K)$]:

$$\mathrm{I}N(K) \to \mathrm{I}M(K) \leftarrow \mathrm{I}\mathbf{F}(K), \qquad \mathrm{II}N(K) \to \mathrm{II}M(K) \leftarrow \mathrm{II}\mathbf{F}(K). \tag{2.5.4}$$

Они определяют такие же гомоморфизмы для пределов

$$HN(K) \to HM(K) \leftarrow H\mathbf{F}(K).$$

Для начальных членов гомоморфизмы (2.5.4) дают

$$\begin{gathered} \mathrm{I}_2^{p,q}N(K) \to \mathrm{I}_2^{p,q}M(K) \leftarrow \mathrm{I}_2^{p,q}\mathbf{F}(K), \\ \mathrm{II}_2^{p,q}N(K) \to \mathrm{II}_2^{p,q}M(K) \leftarrow \mathrm{II}_2^{p,q}\mathbf{F}(K). \end{gathered} \tag{2.5.5}$$

Мы докажем сейчас, что гомоморфизмы (2.5.5) являются изоморфизмами и что возникающие отсюда изоморфизмы между крайними членами в (2.5.5) (которые являются начальными членами спектральных последовательностей гипергомологий функтора F относительно K и бикомплекса $\mathbf{F}(K)$ соответственно) совпадают с изоморфизмами формул (2.5.3). Отсюда будет следовать, что гомоморфизмы в (2.5.4) являются изоморфизмами, что дает изоморфизмы между крайними членами. Очевидно, что это и будут требуемые изоморфизмы. Следовательно, все сводится к доказательству того, что средние члены в (2.5.5) имеют вид $H^p(R^q(F(K))$ и $R^pF(H^q(K))$ соответственно (проверка того, что гомоморфизмы в (2.5.5) являются естественными изоморфизмами, проводится тогда чисто механически и, по существу, неявно содержится в последующем доказательстве).

Докажем, что $H_{\mathrm{II}}(M)^{p,q} = R^qF(K^p)$ [откуда сейчас же будет следовать, что $\mathrm{I}_2^{p,q}(M) = H^p(R^qF(K))$]. Для фиксированного p комплекс $M^{p,*} = (M^{p,q})_q$ есть простой комплекс, связанный с бикомплексом $(\mathbf{F}^{q''}(C^{p,q'}(K)))_{q',q''} = \mathbf{F}(C(K^p))$, где через $C(K^p)$ обозначен комплекс $C^{p,*}(K)$, который является инъективной резольвентой объекта K^p. Следовательно, $H^q(M^{p,*}) = H^q(\mathbf{F}(C(K^p)))$, а последний член отождествляется с $R^qF(K^p)$ в силу предложения 2.5.2.

Осталось вычислить средний член второй строки в (2.5.5). Имеем прежде всего

$$H_{\mathrm{I}}(M)^{p,q} = \bigoplus_{q'+q''=q} H^p(\mathbf{F}^{q''}(C^{*,q'}(K))).$$

Так как $\mathbf{F}^{q''}$ — точный функтор, то для общего члена суммы в правой части получаем выражение $\mathbf{F}^{q''}(H^p(C^{*,q'}(K))) = \mathbf{F}^{q''}(C^{q'}(H^p(K)))$, где через $C(H^p(K))$ обозначена инъективная резольвента объекта $H^p(K)$ (вспомните определение „инъективной резольвенты“ $C(K)$ комплекса K!). Следовательно, имеем $(H_{\mathrm{II}}(H_{\mathrm{I}}(M)))^{p,q} = H^q(\mathbf{F}(C(H^p(K))))$, что отождествляется с $R^qF(H^p(K))$ в силу предложения 2.5.2. Тем самым наше утверждение доказано.

Пусть $\mathbf{F}$ — резольвентный функтор для точного слева функтора F из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$. Предположим, кроме того, что имеется ковариантный функтор G из $\mathbf{C}'$ в абелеву категорию $\mathbf{C}''$ и что в $\mathbf{C}'$ каждый объект изоморфен подобъекту инъективного объекта. Для каждого $A \in \mathbf{C}$ рассмотрим вторую спектральную последовательность гипергомологий функтора G по отношению к комплексу $\mathbf{F}(A)$; это спектральный функтор по A, начальный член которого сразу же вычисляется с помощью предложения 2.5.1 и имеет вид

$$\mathrm{II}_2^{p,q}G(\mathbf{F}(A)) = R^pG(R^qF(A)). \qquad (2.5.6)$$

Мы имеем здесь функторный изоморфизм с начальным членом второй спектральной последовательности композиции функторов GF.

Предложение 2.5.4. *Изоморфизм (2.5.6) получается из некоторого функторного изоморфизма второй спектральной последовательности гипергомологий функтора G по отношению к комплексу $\mathbf{F}(K)$ со второй спектральной последовательностью композиции функторов GF.*

Пусть $C(A)$ — инъективная резольвента объекта A. Рассмотрим $\mathbf{F}(C(A))$ как простой комплекс в $\mathbf{C}'$ и рассмотрим естественные гомоморфизмы (2.5.1), которые индуцируют гомоморфизмы вторых спектральных последовательностей гипергомологий функтора G:

$$\mathrm{II}G(F(C(A))) \to \mathrm{II}G(\mathbf{F}(C(A))) \leftarrow \mathrm{II}G(\mathbf{F}(A)).$$

Все снова сводится к доказательству того, что это изоморфизмы. Для этого достаточно доказать, что соответствующие гомоморфизмы начальных членов являются изоморфизмами. Однако в силу предложения 2.5.1 гомоморфизмы $H(F(C(A))) \to H(\mathbf{F}(C(A))) \leftarrow H(\mathbf{F}(A))$ являются изоморфизмами, откуда сразу же следует нужное заключение.

Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{C}'''$ — четыре абелевы категории. Предположим для первых трех, что любой их объект изоморфен подобъекту инъективного объекта. Рассмотрим ковариантные функторы F, G, F', G', образующие диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{G'} & \mathbf{C}''' \\ {\scriptstyle F,\,\mathbf{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F',\,\mathbf{F}'} \\ \mathbf{C}' & \xrightarrow[G]{} & \mathbf{C}'' \end{array}$$

Предположим, что заданы резольвентный функтор $\mathbf{F}$ для F и резольвентный функтор $\mathbf{F}'$ для F', удовлетворяющие условию коммутирования $\mathbf{F}'G' = G\mathbf{F}$ [подразумевается, что этот изоморфизм является функторным и сохраняет граничный гомоморфизм в комплексах $\mathbf{F}'G'(A)$ и $G\mathbf{F}(A)$]. Предположим, кроме того, что $\mathbf{F}$ преобразует инъективные объекты в G-ациклические объекты.

Предложение 2.5.5. *Пусть выполнены предыдущие условия. Для любого $A \in \mathbf{C}$ рассмотрим две спектральные последовательности гипергомологий функтора G по* *отношению к комплексу* $\mathbf{F}(A)$; *это спектральные функторы по* A. *Они изоморфны вторым спектральным функторам композиций функторов* $F'G'$ *и* GF *соответственно.*

Наше утверждение для композиции GF является только другой формулировкой предложения 2.5.4. Что касается второй спектральной последовательности композиции $F'G'$, то это, по определению, вторая спектральная последовательность функтора F' по отношению к комплексу $G'(C(A))$ (где через $C(A)$ обозначена инъективная резольвента объекта A). Следовательно, она отождествляется в силу предложения 2.5.3 со второй спектральной последовательностью бикомплекса $\mathbf{F}'G'(C(A))$ [первой степенью которого является та степень, которая получается из $C(A)$]. Но мы имеем $\mathbf{F}'G' = G\mathbf{F}$, так что достаточно вычислить спектральную последовательность $\mathrm{II}(G\mathbf{F}(C(A)))$. Для любого фиксированного q комплекс $\mathbf{F}^q(C(A))$ является резольвентой объекта $\mathbf{F}^q(A)$ (так как $\mathbf{F}^q$ — точный функтор), состоящей из G-ациклических объектов. Следовательно, бикомплекс $\mathbf{F}(C(A))$, если поменять местами две его степени, будет резольвентой объекта $\mathbf{F}(A)$, состоящей из G-ациклических объектов. В силу п. 2.4 отсюда следует, что вторая спектральная последовательность бикомплекса $G(\mathbf{F}(C(A)))$ отождествляется с первой спектральной последовательностью гипергомологий функтора G по отношению к комплексу $\mathbf{F}(A)$.

Следствие. *Пусть* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{C}'''$ *и* F, G, F', G' *обладают перечисленными выше свойствами (см. диаграмму). Предположим, что заданы резольвентные функторы* $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}'$, $\mathbf{G}'$ *для* F, G, F', G', *что* $\mathbf{F}'^i\mathbf{G}'^j = \mathbf{G}^j\mathbf{F}^i$ *(функторные изоморфизмы, совместимые с операторами дифференцирования в резольвентных функторах) и что* $\mathbf{F}$ *(соответственно* $\mathbf{G}'$*) преобразует инъективные объекты в* G*-ациклические (соответственно* F'*-ациклические) объекты. Тогда для любого* $A \in \mathbf{C}$ *вторые спектральные последовательности композиций* $F'G'$ *и* GF *для* A *отождествляются с первой и второй спектральными последовательностями гипергомологий функтора* F' *относительно комплекса* $\mathbf{G}'(A)$ *или же с первой и второй спектральными последовательностями гипергомологий функтора* G *относительно комплекса* $\mathbf{F}(A)$ *или, наконец, с той или другой из двух спектральных последовательностей бикомплекса* $\mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}'(A))$.

ГЛАВА III

КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПУЧКАХ

3.1. Общие сведения о пучках.

Пусть X — топологическое пространство (не обязательно хаусдорфово). Напомним [п. 1.7, пример h)], что *предпучком множеств* над X называют любую индуктивную систему множеств, определенную на множестве открытых в X непустых подмножеств, упорядоченном при помощи отношения включения. Таким образом, предпучок состоит в задании для каждого открытого множества $U \subset X$ некоторого множества $\mathcal{F}(U)$ и для всякой пары непустых открытых подмножеств U, V, удовлетворяющих условию $U \supset V$, *отображения ограничения* φ_{VU}: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. При этом должны выполняться следующие условия: φ_{UU} — тождественное отображение множества $\mathcal{F}(U)$; $\varphi_{WV}\varphi_{VU} = \varphi_{WU}$, если $U \supset V \supset W$. Говорят, что предпучок $\mathcal{F}$ является *пучком*, если для любого покрытия (U_i) открытого множества U в X открытыми непустыми подмножествами U_i и любого семейства (f_i) элементов $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, такого, что $\varphi_{U_{ij}U_i} f_i = \varphi_{U_{ij}U_j} f_j$ для всякой пары (i, j), удовлетворяющей условию $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, существует, и притом единственный, элемент $f \in \mathcal{F}(U)$, для которого $\varphi_{U_iU} f = f_i$ для всех i. Если в предшествующих определениях предположить, что $\mathcal{F}(U)$ — группы (соответственно кольца и т. п.) и что φ_{VU} являются гомоморфизмами этих групп (соответственно колец и т. п.), то получим понятие *предпучка* (или *пучка*) *групп* (соответственно *колец* и т. п.). Вообще можно ввести понятие предпучка со значениями в произвольной категории (см. п. 1.1) [1]). Предпучки или пучки над X со значениями

[1]) В то же время понятие *пучка* со значениями в категории $\mathbf{C}$ можно, по-видимому, ввести только в том случае, когда объекты категории $\mathbf{C}$ являются множествами, а морфизмы — отображениями этих множеств. — *Прим. ред.*

в данной категории образуют категорию, в которой морфизмами являются морфизмы индуктивных систем. Предпучки или пучки над X со значениями в *аддитивной* категории, например в категории абелевых групп, образуют аддитивную категорию, а в случае предпучков или пучков абелевых групп — даже абелеву категорию (для краткости мы будем говорить об *абелевом пучке* и *абелевом предпучке* в случае пучка или предпучка абелевых групп). Необходимо, однако, заметить, что тождественный фактор, ставящий в соответствие абелевому пучку абелев предпучок, точен слева, но не точен: если имеется гомоморфизм пучков $u: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, то его коядро как коядро гомоморфизма предпучков есть предпучок $\mathcal{C}(U) = \mathcal{G}(U)/\mathrm{Im}\,\mathcal{F}(U)$, который, вообще говоря, не является пучком. Его коядро как коядро гомоморфизма пучков является пучком, *связанным* с предпучком $\mathcal{C}$ (см. ниже). Мы не будем останавливаться на этих вопросах, в настоящее время достаточно хорошо известных (см. [4] и книгу Годемана [9]).

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок множеств над X. Для всякого $x \in X$ положим $\mathcal{F}(x) = \varinjlim \mathcal{F}(U)$, где индуктивный предел берется по направленной системе открытых окрестностей U точки x. На множестве $\overline{\mathcal{F}}$, полученном объединением всех $\mathcal{F}(x)$, введем топологию, порожденную подмножествами в $\overline{\mathcal{F}}$, имеющими вид $A(f)$, где через $A(f)$ для всякого открытого $U \subset X$ и всякого $f \in \mathcal{F}(U)$ обозначается множество канонических образов $f(x)$ элемента f в $\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in U$. Если $\overline{\mathcal{F}}$ снабжено этой топологией, то естественное отображение множества $\overline{\mathcal{F}}$ в X является локальным гомеоморфизмом (т. е. любая точка из $\overline{\mathcal{F}}$ имеет открытую окрестность, гомеоморфно отображающуюся на открытое множество в X). Мы говорим (следуя Годеману), что $\overline{\mathcal{F}}$ есть накрывающее пространство [1]) над X. Заметим, что любое накрывающее пространство E над X определяет естественным образом некоторый пучок $\mathfrak{F}(E)$, а именно пучок, который каждому открытому множеству U сопоставляет

[1]) Автор употребляет здесь термин „espace étalé". Мы пользуемся выражением „накрывающее пространство", хотя в нашей литературе оно обычно употребляется в более узком смысле.— *Прим. ред.*

множество непрерывных „сечений" пространства E над U. Более того, накрывающее пространство $\overline{\mathfrak{F}(E)}$, связанное с пучком $\mathfrak{F}(E)$, канонически отождествляется с E. Если $\mathcal{F}$ — предпучок над X, то, с другой стороны, имеем канонический гомоморфизм $\mathcal{F} \to \mathfrak{F}(\overline{\mathcal{F}})$, так как всякий $f \in \mathcal{F}(U)$ определяет непрерывное сечение $x \to f(x)$ над U в накрывающем пространстве $\overline{\mathcal{F}}$. Этот гомоморфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ — пучок. Эти рассуждения показывают, что

(1) *Понятие пучка множеств над X эквивалентно понятию накрывающего пространства над X (точнее, существует эквивалентность категории пучков множеств над X с категорией накрывающих пространств над X).*

(2) *Всякому предпучку $\mathcal{F}$ над X соответствуют некоторый пучок $\mathfrak{F}(\overline{\mathcal{F}})$ и гомоморфизм $\mathcal{F} \to \mathfrak{F}(\overline{\mathcal{F}})$, который является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ — пучок.* (Заметим, что $\mathfrak{F}(\overline{\mathcal{F}})$ является *функтором* от $\mathcal{F}$ и гомоморфизм $\mathcal{F} \to \mathfrak{F}(\overline{\mathcal{F}})$ является функторным.)

Если мы хотим интерпретировать понятие пучка групп (или пучка абелевых групп и т. д.) в терминах накрывающих пространств, то нужно задать на каждом „слое" накрывающего пространства групповую операцию (соответственно структуру абелевой группы и т. д.), так, чтобы удовлетворялось естественное условие непрерывности. При этом получается определение, данное в [4], сообщение XIV [1]). При переходе к соответствующим накрывающим пространствам сразу видно, когда гомоморфизм пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ является мономорфизмом или эпиморфизмом: для этого необходимо и достаточно, чтобы на каждом „слое" $\mathcal{F}(x)$ соответствующий гомоморфизм $\mathcal{F}(x) \to \mathcal{G}(x)$ был мономорфизмом или эпиморфизмом соответственно. Далее, слой над точкой x ядра, коядра, образа, кообраза гомоморфизма пучков получается как ядро, коядро, образ, кообраз гомоморфизма абелевых групп $\mathcal{F}(x) \to \mathcal{G}(x)$.

Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец с единицей над X. *Пучок левых $\mathcal{O}$-модулей*, или, коротко, *левый $\mathcal{O}$-модуль над X*, есть пучок $\mathcal{F}$ абелевых групп с заданной на $\mathcal{F}(U)$ для каждого открытого $U \subset X$ структурой левого унитарного $\mathcal{O}(U)$-

[1]) Это определение см. также в [15]. — *Прим. ред.*

модуля, такой, что операции ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ совместимы с действием колец $\mathcal{O}(U)$ и $\mathcal{O}(V)$ на $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{F}(V)$ соответственно. (Это можно выразить также, сказав, что задан гомоморфизм пучка колец $\mathcal{O}$ в пучок колец, являющийся пучком ростков эндоморфизмов пучка абелевых групп $\mathcal{F}$.) Аналогично определяются правые $\mathcal{O}$-модули. Для краткости мы будем называть левые $\mathcal{O}$-модули просто $\mathcal{O}$-модулями. Понятие гомоморфизма $\mathcal{O}$-модулей, а также композиции и суммы таких гомоморфизмов очевидно. Таким образом, получается *аддитивная категория $\mathcal{O}$-модулей над X*, которую мы обозначим через $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$. Например, если k — заданное кольцо с единицей, то можно рассмотреть на X соответствующий постоянный пучок колец, обозначаемый через k_X. Категория k_X-модулей является не чем иным, как категорией пучков k-модулей над X. Если, например, $k = \mathbf{Z}$, то получаем категорию пучков абелевых групп. Напомним следующие факты, о которых упоминалось в п. 1.5 и 1.9.

Предложение 3.1.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец с единицей над X. Тогда аддитивная категория $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$, состоящая из $\mathcal{O}$-модулей над X, есть абелева категория, удовлетворяющая аксиомам* AB 5) *и* AB 3*) *и допускающая образующую.*

Заметим, что прямая сумма $\mathcal{S}$ семейства $(\mathcal{F}_i)$ пучков $\mathcal{F}_i$ строится следующим образом. Для каждого открытого U нужно взять прямую сумму модулей $\mathcal{F}_i(U)$ и затем перейти от полученного предпучка к связанному с ним пучку. Этот же процесс годен и для построения произведения $\mathcal{P}$ пучков $\mathcal{F}_i$. Существенным различием между этими случаями является то, что для любого $x \in X$ модуль $\mathcal{S}(x)$ есть прямая сумма модулей $\mathcal{F}_i(x)$, но $\mathcal{P}(x)$ *не является* прямым произведением модулей $\mathcal{F}_i(x)$. Легко также убедиться в том, что аксиома AB 4*), вообще говоря, не удовлетворяется (можно взять, например, в качестве $\mathcal{O}$ постоянный пучок $\mathbf{Z}_X$). Наконец, напомним, что если для всякого открытого $U \subset X$ обозначить через $\mathcal{O}_U$ пучок $\mathcal{O}$-модулей, равный 0 на $\complement U$ и совпадающий с $\mathcal{O}$ на U ([4], сообщение XVII, предложение 1 [1])), то семейство $\mathcal{O}_U$ есть система образующих категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$. Это легко следует из определения 1.9 и из того, что гомоморфизмы пучка $\mathcal{O}_U$ в $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{F}$ отождествляются с элементами модуля $\mathcal{F}(U)$. Используя также теорему 1.10.1, получаем

[1]) См. также [9], гл. 2, теорема 2.9.2. — *Прим. ред.*

Следствие. *Всякий $\mathcal{O}$-модуль изоморфен $\mathcal{O}$-подмодулю некоторого инъективного $\mathcal{O}$-модуля.*

Приведем прямое доказательство этого следствия, данное Годеманом. Возьмем для каждого $x \in X$ некоторый $\mathcal{O}(x)$-модуль M_x и обозначим через $\mathcal{M}$ пучок над X, определенный группами $\mathcal{M}(U) = \prod_{x \in U} M_x$. Отображения ограничения и действие кольца $\mathcal{O}(U)$ на $\mathcal{M}(U)$ определяются очевидным образом. Пучок $\mathcal{M}$ есть $\mathcal{O}$-модуль над X, по построению изоморфный произведению $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{M}^x$ $(x \in X)$, которые получаются, если положить $\mathcal{M}^x(U)$ равным M_x для $x \in U$ и 0 для $x \notin U$. Из этого замечания немедленно следует, что для всякого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{F}$ гомоморфизмы пучка $\mathcal{F}$ в $\mathcal{M}$ отождествляются с семействами $(u_x)_{x \in X}$, где u_x есть $\mathcal{O}(x)$-гомоморфизм модуля $\mathcal{F}(x)$ в M_x. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.1.2. *Если M_x есть инъективный $\mathcal{O}(x)$-модуль для всякого $x \in X$, то определенный выше пучок $\mathcal{M}$ является инъективным $\mathcal{O}$-модулем.*

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — произвольный $\mathcal{O}$-модуль. Хорошо известно (это следует, впрочем, из теоремы 1.10.1), что $\mathcal{F}(x)$ для любого $x \in X$ можно погрузить в некоторый инъективный $\mathcal{O}(x)$-модуль M_x. Следовательно, получается погружение пучка $\mathcal{F}$ в инъективный $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{M}$, определенный модулями M_x.

Отметим также полезное для дальнейшего

Предложение 3.1.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — инъективный $\mathcal{O}$-модуль над X, U — открытое подмножество в X, $\mathcal{O}_U$ (соответственно $\mathcal{M}_U$) — ограничение пучка $\mathcal{O}$ (соответственно $\mathcal{M}$) на U. Тогда $\mathcal{M}_U$ есть инъективный $\mathcal{O}_U$-модуль.*

Пучок $\mathcal{M}_U$, очевидно, является $\mathcal{O}_U$-модулем. Пусть $\mathcal{F}$ — $\mathcal{O}_U$-модуль, $\mathcal{G}$ — его подмодуль, u — гомоморфизм пучка $\mathcal{G}$ в $\mathcal{M}_U$. Покажем, что u можно продолжить до гомоморфизма пучка $\mathcal{F}$ в $\mathcal{M}_U$. Для всякого $\mathcal{O}_U$-модуля $\mathcal{H}$ над U обозначим через $\overline{\mathcal{H}}$ $\mathcal{O}$-модуль, полученный в терминах накрывающих пространств „тривиальным продолжением пучка $\mathcal{H}$ на $\complement U$“ (см. [4], сообщение XVII, предложение 1).

Задание гомоморфизма $\mathcal{O}_U$-модулей $u\colon \mathcal{G} \to \mathcal{M}_U$ эквивалентно заданию гомоморфизма $\mathcal{O}$-модулей $\bar{u}\colon \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{M}$. Так как $\bar{\mathcal{G}}$ есть подмодуль $\bar{\mathcal{F}}$ и так как $\mathcal{M}$ инъективен, то $\bar{u}$ можно продолжить до гомоморфизма пучка $\bar{\mathcal{F}}$ в $\mathcal{M}$, который индуцирует искомый гомоморфизм пучка $\mathcal{F}$ в $\mathcal{M}_U$. Заметим, что предложение 3.1.3 становится *ложным*, если предполагать U не открытым, а *замкнутым* в X. Совершенно аналогичным способом доказывается

Предложение 3.1.4. *Пусть $\mathcal{M}$ — инъективный $\mathcal{O}$-модуль над замкнутым подмножеством $Y \subset X$. Тогда $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{M}^X$, совпадающий с $\mathcal{M}$ на Y и равный нулю на $\complement Y$, инъективен.*

3.2. Определение групп $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$.

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через $\mathbf{C}^X$ абелеву категорию $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}_X$ пучков абелевых групп над X. Если $\mathcal{F}$ — такой пучок и A — подмножество в X, то через $\Gamma(A, \mathcal{F})$ обозначим группу сечений пучка $\mathcal{F}$ (рассматриваемого как накрывающее пространство) над A. Кроме того, положим $\Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ (так что $\Gamma(A, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F} \mid A)$, где через $\mathcal{F} \mid A$ обозначается ограничение пучка $\mathcal{F}$ на A). Более общим образом, пусть Φ — непустое возрастающее направленное семейство замкнутых подмножеств пространства X, такое, что из $A \in \Phi$, $B \subset A$ следует $B \in \Phi$. Для краткости будем называть такое семейство *антифильтром замкнутых подмножеств пространства X*. Обозначим через $\Gamma_\Phi(\mathcal{F})$ подгруппу группы $\Gamma(\mathcal{F})$, образованную сечениями f, носитель которых принадлежит Φ (носителем сечения f называется дополнение максимального открытого подмножества в X, на котором f равно нулю). Немедленно проверяется, что $\Gamma_\Phi(\mathcal{F})$ является точным слева функтором, определенным на категории $\mathbf{C}^X$, со значениями в категории абелевых групп. Таким образом, можно рассматривать его правые производные функторы, совпадающие с правыми сателлитами (см. п. 2.3), которые существуют в силу следствия из предложения 3.1.1. Обозначим их через $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$, где p — произвольное целое число. Согласно теории производных функторов, будем иметь

Предложение 3.2.1. *Система функторов $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ $(-\infty < p < +\infty)$ характеризуется следующими свойствами: эти функторы образуют когомологический функтор на $\mathbf{C}^X$ со значениями в категории абелевых групп, $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ равен нулю для $p < 0$, совпадает с $\Gamma_\Phi(\mathcal{F})$ при $p = 0$ и является стирающим функтором (т. е. равен нулю для инъективных пучков $\mathcal{F}$) при $p > 0$.*

Для вычисления групп $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ нужно взять правую резольвенту для $\mathcal{F}$, состоящую из инъективных пучков $\mathcal{L}^i$ или, более общим образом, из таких пучков, о которых заранее известно, что $H^p_\Phi(X, \mathcal{L}^i) = 0$ для всех $p > 0$ (такие пучки $\mathcal{L}^i$ называются Γ_Φ-ациклическими). Если рассмотреть комплекс $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, образованный пучками $\mathcal{L}^i$, то будем иметь

$$H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^p \Gamma_\Phi(\mathcal{L}(\mathcal{F})).$$

Чтобы применять этот метод, важно иметь критерии, указывающие, когда пучок является Γ_Φ-ациклическим; такие критерии будут даны ниже (см. п. 3.3).

Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y. Для всякого пучка $\mathcal{F}$ над Y естественным образом определяется *обратный образ* пучка $\mathcal{F}$ при отображении f (обозначаемый $f^{-1}(\mathcal{F})$): если рассматривать $\mathcal{F}$ как накрывающее пространство, то достаточно воспользоваться определением обратного образа расслоенного пространства [1]). При этом получается точный аддитивный ковариантный функтор из $\mathbf{C}^Y$ в $\mathbf{C}^X$, который мы обозначим через $\mathbf{g}$. Для всякого $\mathcal{F} \in \mathbf{C}^Y$ имеется очевидный гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathbf{g}(\mathcal{F}))$, функторно зависящий от $\mathcal{F}$ и, следовательно, являющийся гомоморфизмом функторов

[1]) Под *расслоенным пространством* автор понимает здесь тройку (E, X, p), где E, X — топологические пространства, $p\colon E \to X$ — непрерывное отображение. Пусть задано непрерывное отображение $f\colon Y \to X$. Обозначим через E' подпространство пространства $E \times Y$, состоящее из таких пар (e, y) $(e \in E,\ y \in Y)$, что $p(e) = f(y)$, и определим отображение $p'\colon E' \to Y$ формулой $p'(e, y) = y$. Тогда (E', Y, p') — расслоенное пространство, которое называется *обратным образом* расслоенного пространства (E, X, p) (или расслоенным пространством, *индуцированным при отображении* f). Другое определение обратного образа пучка см. в [9], гл. II, п. 1.12. — *Прим. ред.*

$\Gamma^Y \to \Gamma^X \mathbf{g}$ (верхние индексы указывают пространства, относительно которых рассматривается функтор Γ). Более общим образом, рассмотрим антифильтр Φ замкнутых подмножеств пространства X и антифильтр Ψ замкнутых подмножеств в Y, такой, что для любого $B \in \Psi$ имеем $f^{-1}(B) \in \Phi$. Тогда для всякого $\mathcal{F} \in \mathbf{C}^Y$ гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathbf{g}(\mathcal{F}))$ отображает $\Gamma_\Psi(\mathcal{F})$ в $\Gamma_\Phi(\mathbf{g}(\mathcal{F}))$, откуда получается функторный гомоморфизм $\Gamma_\Psi \to \Gamma_\Phi \mathbf{g}$. Так как функтор $\mathbf{g}$ *точен*, то функтор $(R\Gamma_\Phi)\mathbf{g}$ можно рассматривать как *когомологический функтор* на категории $\mathbf{C}^Y$, сводящийся к $\Gamma_\Phi^X \mathbf{g}$ в размерности 0. Поскольку когомологический функтор $R\Gamma_\Psi^Y$ универсален (предложение 2.2.1), то функторный гомоморфизм $\Gamma_\Psi^Y \to \Gamma_\Phi^X \mathbf{g}$ можно однозначно продолжить до гомоморфизма когомологических функторов $R\Gamma_\Psi \to (R\Gamma_\Phi)\mathbf{g}$. Таким образом, доказано

Предложение 3.2.2. *Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, Φ (соответственно Ψ) — антифильтр замкнутых подмножеств в X (соответственно в Y), причем если $B \in \Psi$, то $f^{-1}(B) \in \Phi$. Тогда для всякого пучка $\mathcal{F}$ абелевых групп над Y существуют, и притом единственные, гомоморфизмы*

$$H_\Psi^p(Y, \mathcal{F}) \to H_\Phi^p(X, f^{-1}(\mathcal{F})) \qquad (-\infty < p < +\infty),$$

определяющие гомоморфизм когомологических функторов, который сводится в размерности 0 к естественному гомоморфизму.

Будем называть эти гомоморфизмы естественными. Из их единственности следует очевидное свойство транзитивности, формулировку которого мы предоставляем читателю.

В частности, если Y — *подпространство* пространства X и если положить $H_\Psi^p(Y, \mathcal{F}) = H_\Psi^p(Y, \mathcal{F} \mid Y)$, где $\mathcal{F} \mid Y$ — ограничение пучка $\mathcal{F}$ на Y, то получим „гомоморфизмы *ограничения*“ $H_\Phi^p(X, \mathcal{F}) \to H_{\Phi \cap Y}^p(Y, \mathcal{F})$, где $\Phi \cap Y$ обозначает *след* семейства Φ на Y [1]).

---

[1]) То есть семейство множеств вида $S \cap Y$, где $S \in \Phi$. — *Прим. ред.*

3.3. Критерии ацикличности.

Результаты этого пункта, очень удобные для дальнейшего, принадлежат Годеману и подробно изложены в его книге [9], цитированной во введении.

Лемма 3.3.1. *Пусть F — ковариантный функтор из абелевой категории $\mathbf{C}$ в абелеву категорию $\mathbf{C}'$ и пусть в категории $\mathbf{C}$ каждый объект изоморфен подобъекту инъективного объекта. Пусть $\mathbf{M}$ — класс объектов из $\mathbf{C}$, удовлетворяющий следующим условиям:* 1) *для всякого $A \in \mathbf{C}$ существует мономорфизм объекта A в объект $M \in \mathbf{M}$;* 2) *всякий объект $A \in \mathbf{C}$, изоморфный прямому сомножителю некоторого объекта $M \in \mathbf{M}$, принадлежит $\mathbf{M}$;* 3) *для всякой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ в $\mathbf{C}$, в которой M', $M \in \mathbf{M}$, имеем $M'' \in \mathbf{M}$, и последовательность $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ также точна. При этих условиях всякий инъективный объект из $\mathbf{C}$ принадлежит $\mathbf{M}$ и для всякого $M \in \mathbf{M}$ имеем $R^pF(M) = 0$ для $p > 0$.*

Пусть сначала I — инъективный объект из $\mathbf{C}$. Согласно условию 1), I можно погрузить в некоторый объект M из $\mathbf{M}$. Так как I инъективен, то он будет там прямым сомножителем. Поэтому из 2) следует, что I принадлежит $\mathbf{M}$. Пусть $M \in \mathbf{M}$; докажем, что $R^pF(M) = 0$ для $p > 0$. Для этого рассмотрим правую резольвенту объекта M, состоящую из инъективных объектов $L^i (i \geqslant 0)$. Пусть Z^i — подобъект циклов в L^i. Достаточно доказать точность последовательностей $0 \to F(M) \to F(L^0) \to F(Z^1) \to 0$, $0 \to F(Z^0) \to F(L^0) \to F(Z^1) \to 0$ и т. д. В силу 3) для этого достаточно доказать, что L^i и Z^i принадлежат $\mathbf{M}$. Это уже доказано для L^i, так как они инъективны, а для Z^i это можно вывести из 3) индукцией по i.

Следствие. *Для всякого $A \in \mathbf{C}$ объекты $R^pF(A)$ можно вычислять с помощью резольвенты (произвольной) объекта A, состоящей из $L^i \in \mathbf{M}$.*

Действительно, такая резольвента существует в силу (1). Она позволяет вычислять $R^pF(A)$, так как L^i являются F-ациклическими по лемме.

Пучок множеств $\mathcal{F}$ над пространством X называется *вялым* (соответственно *мягким*), если для всякого открытого (соответственно замкнутого) подмножества A пространства X всякое сечение пучка $\mathcal{F}$ над A является ограничением некоторого сечения пучка $\mathscr{F}$ над X. Например, если задать для каждого $x \in X$ некоторое множество E_x, то пучок $\mathscr{E}$, у которого множество сечений над открытым U есть $\mathscr{E}(U)=\prod_{x\in U} E_x$ (отображения ограничения определяются очевидным образом, ср. пример, рассмотренный перед предложением 3.1.2), является вялым и мягким. Отсюда следует, что всякий пучок множеств можно погрузить в вялый пучок множеств. Точно так же всякий пучок абелевых групп (соответственно $\mathscr{O}$-модулей, если $\mathscr{O}$ — пучок колец над X) можно погрузить в вялый пучок абелевых групп (соответственно $\mathscr{O}$-модулей). Заметим, что если замкнутое подмножество A пространства X допускает паракомпактную окрестность, то всякое сечение над A пучка $\mathscr{F}$, определенного над X, является ограничением сечения, заданного над некоторой окрестностью множества A [1]). Отсюда немедленно вытекает, что *если X паракомпактно, то вялый пучок является мягким пучком*. Пусть теперь Φ — семейство замкнутых подмножеств пространства X, удовлетворяющее условиям, которые рассматривались в п. 3.2. Пучок абелевых групп $\mathscr{F}$ над X называется Φ-*мягким*, если для всякого $A \in \Phi$ и всякого сечения пучка $\mathscr{F}$ над A найдется $f \in \Gamma_\Phi(\mathscr{F})$, индуцирующее заданное сечение. Будем говорить, что Φ является *паракомпактифицирующим семейством*, если, кроме уже наложенных условий, Φ удовлетворяет следующим дополнительным условиям (впервые они были введены в [4]): *всякое $A \in \Phi$ паракомпактно и допускает окрестность $B \in \Phi$*. Тогда легко видеть, как и выше, что *для произвольного паракомпактифицирующего семейства Φ вялый пучок абелевых групп является Φ-мягким*. Отсюда вытекает, в частности, что всякий пучок абелевых групп можно погрузить в Φ-мягкий пучок (поскольку он вкладывается даже в вялый пучок). Предыдущие определения интересны в связи со следующим предложением:

Предложение 3.3.2. *Пусть X — топологическое пространство, снабженное „семейством Φ". Рассмотрим функтор Γ_Φ, определенный на категории $\mathbf{C}^X$ пучков абелевых групп над X и принимающий значения в категории абелевых групп. Тогда условия леммы* 3.3.1 *выполнены в каждом из следующих двух случаев:*

1) $\mathbf{M}$ — *семейство вялых пучков над X.*

2) Φ — *паракомпактифицирующее семейство и $\mathbf{M}$ — семейство Φ-мягких пучков над X.*

Следствие. *$H^p_\Phi(X, \mathscr{F})=0$ для $p>0$, если $\mathscr{F}$ — вялый пучок или если $\mathscr{F}$ — Φ-мягкий пучок, а семейство Φ паракомпактифицирующее.*

Условие 1) леммы 3.3.1 уже было проверено, условие 2) проверяется тривиально и только условие 3) требует доказательства, за которым мы отсылаем к книге Годемана (или предлагаем его читателю в качестве упражнения).

Замечание. Если семейство Φ — паракомпактифицирующее, то легко проверяется, что тонкие пучки (см. [4], сообщение XV) являются Φ-мягкими и, следовательно, удовлетворяют условию $H^p_\Phi(X, \mathscr{F})=0$ $(p>0)$. Отсюда вытекает, что теория когомологий, развитая в [4] для паракомпактифицирующих семейств Φ, является частным случаем теории, рассматриваемой здесь. Мы отсылаем читателя к книге Годемана за весьма красивым определением тонких пучков в терминах мягких пучков.

Резольвента тождественного функтора. Для всякого пучка $\mathscr{F}$ обозначим через $\mathscr{C}^0(\mathscr{F})$ произведение пучков, определенное семейством множеств $\mathscr{F}(x)$ (см. стр. 68). Имеем функторный гомоморфизм $\mathscr{F} \to \mathscr{C}^0(\mathscr{F})$, который инъективен. Если ограничиться пучками $\mathscr{F}$ из категории пучков абелевых групп над X, то метод пункта 2.5, пример а), позволяет построить резольвенту тождественного функтора $\mathscr{C}(\mathscr{F})$, которая в размерности 0 сводится к $\mathscr{C}^0(\mathscr{F})$ и задается соотношением

$$\mathscr{C}^n(\mathscr{F})=\mathscr{C}^0(\mathscr{C}^{n-1}(\mathscr{F})/\operatorname{Im}\mathscr{C}^{n-2}(\mathscr{F}))$$

при $n \geqslant 2$. Пучки $\mathscr{C}^n(\mathscr{F})$ являются вялыми и, следовательно, Γ_Φ-ациклическими для любого антифильтра Φ замкнутых множеств. Таким образом, $\Gamma_\Phi\mathscr{C}(\mathscr{F})$ является резольвентным функтором для Γ_Φ и, следовательно, $H^n_\Phi(X, \mathscr{F})=H^n(\Gamma_\Phi\mathscr{C}(\mathscr{F}))$. Резольвента $\mathscr{C}(\mathscr{F})$ называется *канонической резольвентой* пучка $\mathscr{F}$ (она была введена и систематически использовалась Годеманом [9]). Если семейство Φ — паракомпактифицирующее, то можно построить другой

[1]) Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 3.3.1 из 2-й главы книги [9]. — *Прим. ред.*

резольвентный функтор функтора Γ_Φ. Для этого возьмем фиксированную резольвенту $\mathcal{C}$ постоянного пучка $\mathbf{Z}$, состоящую из *тонких пучков без кручения*, и рассмотрим для всякого $\mathcal{F}$ комплекс пучков $\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}$. Это резольвента пучка $\mathcal{F}$ (так как $\mathcal{C}$ не имеет кручения) и точный функтор от $\mathcal{F}$ (по той же причине). Кроме того, пучки $\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}^n$ также являются тонкими и, следовательно, Γ_Φ-ациклическими. Значит, функтор $\Gamma_\Phi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C})$ является резольвентным функтором для Γ_Φ и, в частности, $H^n_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^n(\Gamma_\Phi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}))$. Резольвента $\mathcal{F} \otimes \mathcal{C}$ будет называться резольвентой Картана пучка $\mathcal{F}$. Напомним, что ею можно пользоваться только в том случае, когда Φ — паракомпактифицирующее семейство.

Забавный пример. Пространство X называется *неприводимым*, если оно не является объединением двух собственных замкнутых подмножеств, т. е. если пересечение двух его непустых открытых подмножеств непусто. Это же можно выразить, сказав, что всякое открытое подмножество пространства X связно. В этом случае всякий *постоянный* пучок $\mathcal{F}$ над X, очевидно, является вялым (обратное тоже верно, если X связно; достаточно взять постоянный пучок со слоем, отличным от точки). В частности, *если $\mathcal{F}$ — постоянный пучок абелевых групп над неприводимым пространством X*, то $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ *для* $p > 0$.

3.4. Приложения к вопросу о подъеме структурной группы [1]).

Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k (см. гл. II работы [15], терминологии которой мы следуем), $\mathbf{O}$ — его пучок локальных колец (т. е. пучок ростков регулярных функций на X), $\mathbf{K}$ — пучок ростков рациональных функций на X. Тогда $\mathbf{K}$ является постоянным пучком ([15], предложение 9). Пусть $\mathbf{O}^*$ и $\mathbf{K}^*$ — подпучки пучков $\mathbf{O}$ и $\mathbf{K}$ соответственно, образованные ростками, имеющими обратные. Очевидно, что $\mathbf{K}^*$ есть постоянный пучок абелевых групп и что $\mathbf{O}^*$ является его подпучком.

Фактор-пучок $\mathbf{K}^*/\mathbf{O}^* = \mathbf{D}$ есть *пучок ростков локально главных дивизоров* над X. Он совпадает с *пучком ростков*

[1]) Чтение этого пункта не обязательно для понимания дальнейшего.

дивизоров над X, если локальные кольца $\mathbf{O}(x)$ многообразия X являются кольцами с разложением [1]) (например, если X — многообразие без особенностей), что в дальнейшем будет предполагаться. С другой стороны, легко видеть, что пучок $\mathbf{D}$ ростков дивизоров на многообразии X является *вялым* пучком. Действительно, сечение пучка $\mathbf{D}$ над непустым открытым подмножеством $U \subset X$ есть формальная линейная комбинация $\sum_i n_i V_i$ неприводимых гиперповерхностей V_i в U и, значит, является ограничением сечения $\sum_i n_i \overline{V}_i$ [2]) пучка $\mathbf{D}$ над всем X. Следовательно, точная последовательность

$$0 \to \mathbf{O}^* \to \mathbf{K}^* \to \mathbf{D} \to 0 \to 0 \to \dots$$

есть резольвента пучка $\mathbf{O}$, состоящая из вялых пучков ($\mathbf{K}^*$ — вялый пучок, так как он постоянен и так как X — неприводимое пространство, см. конец п. 3.3). Эта резольвента позволяет вычислить группы $H^p(X, \mathbf{O}^*)$ (мы опускаем значок Φ в том случае, когда в качестве Φ рассматривается семейство всех замкнутых подмножеств из X). Мы имеем

$$H^1(X, \mathbf{O}^*) = \Gamma(\mathbf{D})/\mathrm{Im}(\Gamma(\mathbf{K}^*)) =$$

$=$ группе классов дивизоров по модулю главных дивизоров (хорошо известный факт, который легко выводится из рассмотрения точной когомологической последовательности) и

$$H^i(X, \mathbf{O}^*) = 0 \quad \text{при} \quad i \geqslant 2$$

(результат, который я получил сначала значительно менее простым способом по методу покрытий Чеха). Заметим, что этот результат переносится без изменений на тот случай, когда X есть „схема многообразия" в смысле [5 bis], и даже на более общий случай „арифметических многообразий", определенных с помощью „склеивания" спектров коммутативных колец [8]. Приложение, которое дается ниже, также

[1]) *Кольцом с разложением* называется область целостности, каждый ненулевой элемент которой однозначно (с точностью до обратимых элементов) разлагается в произведение неразложимых элементов. — *Прим. ред.*

[2]) Через $\overline{V}_i$ здесь обозначено замыкание подмножества $V_i \subset X$ в смысле топологии Зариского. — *Прим. ред.*

может быть сформулировано для случая арифметических многообразий.

Предложение 3.4.1. *Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие (над алгебраически замкнутым полем k), локальные кольца которого являются кольцами с разложением (например, многообразие без особенностей). Тогда $H^i(X, \mathbf{O}^*) = 0$ для $i \geqslant 2$. Если E — локально тривиальное алгебраическое расслоение над X, структурная группа которого есть проективная группа* $\mathrm{GP}(n-1, k)$ *(см.* [20]*), то E изоморфно расслоенному пространству, ассоциированному с локально тривиальным алгебраическим расслоенным пространством, структурная группа которого есть линейная группа* $\mathrm{Gl}(n, k)$.

Пусть G — алгебраическая группа. Обозначим через $\mathbf{O}(G)$ пучок групп, являющийся пучком ростков регулярных отображений многообразия X в G. Тогда первое утверждение доказываемого предложения запишется в виде $H^i(X, \mathbf{O}(k^*)) = 0$ [1]) при $i \geqslant 2$ и уже доказано. Второе утверждение можно выразить, используя определения и обозначения работы [11], следующим образом: каноническое отображение

$$H^1(X, \mathbf{O}(\mathrm{Gl}(n, k))) \to H^1(X, \mathbf{O}(\mathrm{GP}(n-1, k)))\ ^{2)}$$

---

[1]) Через k^* обозначается мультипликативная группа поля k. — *Прим. ред.*

[2]) Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{F}$ — пучок групп (не обязательно абелевых) над X. Приведем определение множества $H^1(X, \mathscr{F})$. Пусть $\mathrm{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X. Положим

$$C^0(\mathrm{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathscr{F}), \quad C^1(\mathrm{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i, j} \Gamma(U_{ij}, \mathscr{F}),$$

где $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Обозначим через $Z^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ подмножество в $C^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$, состоящее из таких коцепей $(f_{ij})_{i, j \in I}$, что $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$ $(i, j \in I)$ и $f_{ij}f_{jk}f_{ki} = e$ $(i, j, k \in I)$. Группа $C^0(U, \mathscr{F})$ действует на множестве $Z^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ по формуле $(f \cdot g)_{ij} = g_i^{-1} f_{ij} g_j$ $(i, j \in I)$, где $f = (f_{ij}) \in Z^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$, $g = (g_i) \in C^0(\mathrm{U}, \mathscr{F})$. Обозначим через $H^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ множество классов транзитивности группы $C^0(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ в $Z^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$. Тогда множество $H^1(X, \mathscr{F})$ определяется как предел $\lim H^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ по направленному семейству всех открытых покрытий пространства X. В множестве $H^1(X, \mathscr{F})$ не существует естественной групповой операции. Однако в нем имеется элемент e, который опре-

является суперъективным. Чтобы доказать это, рассмотрим точную последовательность алгебраических групп

$$e \to k^* \to \mathrm{Gl}(n, k) \to \mathrm{GP}(n-1, k) \to e,$$

где первый гомоморфизм есть естественный мономорфизм группы k^* на центр группы $\mathrm{Gl}(n, k)$. Легко устанавливается, что расслоение группы $\mathrm{Gl}(n, k)$ на классы смежности по подгруппе k^* локально тривиально (т. е. обладает рациональным сечением). Следовательно, предыдущая точная последовательность порождает точную последовательность пучков

$$e \to \mathbf{O}(k^*) \to \mathbf{O}(\mathrm{Gl}(n, k)) \to \mathbf{O}(\mathrm{GP}(n-1, k)) \to e,$$

где $\mathbf{O}(k^*)$ лежит в центре пучка $\mathbf{O}(\mathrm{Gl}(n, k))$. Предложение вытекает теперь из того, что $H^2(X, \mathbf{O}(k^*)) = 0$, и из следствия приведенного ниже результата, обобщающего следствие из предложения 5.7.2 работы [11], где мы были вынуждены ограничить себя условием паракомпактности.

Предложение 3.4.2. *Пусть X — топологическое пространство,*

$$e \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to e$$

— точная последовательность пучков групп над X, причем $\mathscr{F}$ — абелев пучок. Пусть E — расслоенное пространство над X со структурным пучком $\mathscr{H}$ (см. [11], *гл. IV), $\mathscr{F}^E$ — пучок групп, ассоциированный с E и с действием*

деляется единицей группы $C^1(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ и называется нейтральным элементом.

Нетрудно показать, что элементы множества $H^1(X, \mathscr{F})$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с классами расслоенных пространств над X, имеющих $\mathscr{F}$ в качестве структурного пучка [11].

В частности, пусть $\mathscr{F} = \mathbf{O}(G)$, где G — топологическая группа (соответственно группа Ли, комплексная группа Ли или алгебраическая группа), а $\mathbf{O}(G)$ — пучок ростков непрерывных (соответственно дифференцируемых, голоморфных или регулярных) отображений пространства (соответственно дифференцируемого, комплексно-аналитического или алгебраического многообразия) в G. Элементы множества $H^1(X, \mathbf{O}(G))$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами локально тривиальных расслоенных пространств (соответственно дифференцируемых, комплексно-аналитических или алгебраических локально тривиальных расслоенных пространств) над X, имеющих G в качестве структурной группы. — *Прим. ред.*

пучка $\mathscr{H}$ на $\mathscr{F}$, индуцированным внутренними автоморфизмами пучка $\mathscr{G}$ (которые переводят подпучок $\mathscr{F}$ в себя). Тогда можно определить „кограничный элемент“ $\partial E \in H^2(X, \mathscr{F}^E)$ „функторным“ способом так, что $\partial E = 0$ тогда и только тогда, когда класс $c(E)$ расслоенного пространства E в $H^1(X, \mathscr{H})$ (см. [11], гл. V) принадлежит образу множества $H^1(X, \mathscr{G})$ в $H^1(X, \mathscr{H})$.

Это утверждение упрощается в том случае, когда $\mathscr{F}$ лежит в центре пучка $\mathscr{G}$, так как тогда $\mathscr{F}^E = \mathscr{F}$ не зависит от расслоения E. В этом случае получаем

Следствие. *Пусть $e \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to e$ — точная последовательность пучков групп над пространством X, причем $\mathscr{F}$ лежит в центре пучка $\mathscr{G}$. Тогда можно построить такое отображение („функторное“) $\partial: H^1(X, \mathscr{H}) \to H^2(X, \mathscr{F})$, что $\partial^{-1}(0) = \operatorname{Im}(H^1(X, \mathscr{G}))$.*

Доказательство предложения 3.4.2. Заметим, что всякий пучок $\mathscr{M}$ над X можно вложить в пучок $\overline{\mathscr{M}}$, множество сечений которого над открытым U есть множество $\prod_{x \in U} \mathscr{M}(x)$. Пучок $\overline{\mathscr{M}}$ является *вялым*, и $\mathscr{M}$ можно отождествить с подпучком в $\overline{\mathscr{M}}$. Если $\mathscr{M}$ — пучок групп (соответственно абелевых групп), то тогда таким же будет и $\overline{\mathscr{M}}$. С другой стороны, легко убедиться в том, что если $\mathscr{L}$ — вялый пучок групп (не обязательно абелевых), то $H^1(X, \mathscr{L})$ состоит только из нейтрального элемента [другими словами, всякий *главный* пучок относительно $\mathscr{L}$ (см. [11], определение 3.4.2) допускает сечение; это сечение легко построить, применив лемму Цорна к множеству сечений над открытыми множествами в X]. Из этого факта следует, что для пучка $\mathscr{F}$ абелевых групп группа $H^1(X, \mathscr{F})$ в том смысле, в каком она определена в [11] (по методу Чеха), естественно изоморфна группе $H^1(X, \mathscr{F})$, определенной аксиоматически в настоящей работе (т. е. изоморфна первому правому сателлиту $S^1\Gamma$ функтора Γ на категории $\mathbf{C}^X$).

Вернемся теперь к условиям предложения 3.4.2. Мы имеем гомоморфизм следующих точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccccc}
e & \to & \mathscr{F} & \to & \mathscr{G} & \to & \mathscr{H} & \to & e \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
e & \to & \overline{\mathscr{F}} & \to & \overline{\mathscr{G}} & \to & \overline{\mathscr{H}} & \to & e,
\end{array} \qquad \overline{\mathscr{F}} \cap \mathscr{G} = \mathscr{F},$$

где $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$ суть подпучки групп в пучке $\overline{\mathscr{G}}$, причем $\overline{\mathscr{F}}$ — пучок нормальных делителей. Пусть $\mathscr{P} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{G}$ — подпучок групп в $\overline{\mathscr{G}}$, порожденный подпучками $\mathscr{G}$ и $\overline{\mathscr{F}}$, и пусть $\mathscr{F}' = \overline{\mathscr{F}}/\mathscr{F}$. Очевидным образом определяется точная последовательность гомоморфизмов пучков групп

$$e \to \overline{\mathscr{F}} \to \mathscr{P} \to \mathscr{H} \to e.$$

Покажем, что *соответствующее отображение*

$$H^1(X, \mathscr{P}) \to H^1(X, \mathscr{H})$$

биективно. Его инъективность следует из точной когомологической последовательности, указанной в [11], предложение 5.6.2, если принять во внимание, что $H^1(X, \mathscr{L})$ состоит только из нейтрального элемента в случае, когда $\mathscr{L}$ локально изоморфен пучку $\overline{\mathscr{F}}$ (так как легко видеть, что пучок, локально изоморфный вялому пучку, является вялым пучком). Докажем, что оно сюръективно. Пусть (h_{ij}) есть 1-коцикл с коэффициентами в $\mathscr{H}$ относительно открытого покрытия (U_i) пространства X. Так как $H^1(X, \overline{\mathscr{H}})$ состоит только из нейтрального элемента, то существуют такие $\bar{h}_i \in \Gamma(U_i, \overline{\mathscr{H}})$, что $h_{ij} = \bar{h}_i^{-1}\bar{h}_j$. С другой стороны, очевидно, что $\bar{h}_i$ можно поднять до сечений $\bar{g}_i$ пучка $\overline{\mathscr{G}}$ (достаточно вспомнить определения пучков $\overline{\mathscr{G}}$ и $\overline{\mathscr{H}}$!). Полагая $p_{ij} = \bar{g}_i^{-1}\bar{g}_j$, мы видим, что сечение пучка $\overline{\mathscr{H}}$ над U_{ij}, определенное с помощью p_{ij}, есть h_{ij}. Отсюда следует, что $p_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{P})$, т. е. (p_{ij}) есть 1-коцикл с коэффициентами в пучке $\mathscr{P}$, дающий коцикл (h_{ij}) при переходе к фактор-пучку.

Из полученного результата следует, что расслоение E изоморфно расслоению, ассоциированному с некоторым расслоением Q со структурным пучком $\mathscr{P}$, которое определено однозначно с точностью до изоморфизма. Заметим, что если определить действие пучка $\mathscr{P} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{G}$ на пучке $\overline{\mathscr{G}}$ при помощи внутренних автоморфизмов, то пучок $\overline{\mathscr{F}}$ будет инвариантен относительно $\mathscr{P}$ (так как $\overline{\mathscr{F}}$ действует на $\overline{\mathscr{F}}$ тривиально и так как $\mathscr{F}$ — инвариантный подпучок в $\mathscr{G}$). Таким образом, $\mathscr{P}$ естественным образом действует на $\overline{\mathscr{F}}$. Более того, $\mathscr{F}$ также остается инвариантным при действии пучка $\mathscr{P}$, причем действие пучка $\mathcal{P}$ на $\mathcal{F}$ можно получить, рассматривая композицию гомоморфизма $\mathcal{P} \to \mathcal{H}$ и естественного представления пучка $\mathcal{H}$ операторами в $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что ассоциированный пучок $\mathcal{F}^E$ отождествляется с ассоциированным пучком $\mathcal{F}^Q$. Далее, действие пучка $\mathcal{P}$ переходит также на фактор-пучок $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$. Эти представления пучка $\mathcal{P}$ ростками автоморфизмов пучков $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}'$ мы будем обозначать через σ. Заметим теперь, что имеет место следующая точная последовательность пучков:

$$e \to \mathcal{G} \to \mathcal{P} \xrightarrow{u} \mathcal{F}' \to e,$$

где гомоморфизм $\mathcal{G} \to \mathcal{P} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{G}$ есть гомоморфизм вложения и, следовательно, является гомоморфизмом пучков групп, а гомоморфизм u: $\mathcal{P} \to \mathcal{F}'$ определяется следующим образом: произведение $\bar{f}g$ [где $\bar{f} \in \overline{\mathcal{F}}(x)$, $g \in \mathcal{G}(x)$] отображается в класс элемента $\bar{f}$ в $\mathcal{F}'(x)$ (это определение корректно, так как $\mathcal{G} \cap \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$). Этот последний гомоморфизм, вообще говоря, *не сохраняет* мультипликативную структуру, но удовлетворяет следующим условиям:

1) u есть эпиморфизм, причем два элемента из $\mathcal{P}$ имеют один и тот же образ в том и только в том случае, когда они сравнимы по модулю $\mathcal{G}$ при действии пучка $\mathcal{G}$ справа на $\mathcal{P}$ (т. е. когда они определяют один и тот же элемент в $\mathcal{P}/\mathcal{G}$);

2) u есть скрещенный гомоморфизм пучка $\mathcal{P}$ в $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{P}$ действует на $\mathcal{F}'$ так, как указывалось выше), т. е. в каждом слое $\mathcal{P}(x)$ имеем

$$u(e) = e \quad \text{и} \quad u(pp') = u(p)\,\sigma(p)\,u(p').$$

Отправляясь от этой ситуации и от расслоения Q со структурным пучком $\mathcal{P}$, мы построим сейчас элемент $d(Q) \in H^1(X, \mathcal{F}'^Q)$ (где $\mathcal{F}'^Q$ есть пучок, ассоциированный с Q и с заданным действием пучка $\mathcal{P}$ на $\mathcal{F}'$) таким образом, что $d(Q) = 0$ тогда и только тогда, когда класс $c(Q) \in H^1(X, \mathcal{P})$ расслоения Q содержится в образе множества $H^1(X, \mathcal{G})$. Тем самым предложение 3.4.2 будет доказано (если не считать проверки естественности, которая производится немедленно). Действительно, указанное условие является необходимым и достаточным для того, чтобы класс $c(E) \in H^1(X, \mathcal{H})$

содержался в образе множества $H^1(X, \mathcal{G})$. (Это сразу видно из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{G}) & \to & H^1(X, \mathcal{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, \mathcal{G}) & \to & H^1(X, \mathcal{H}), \end{array}$$

вертикальные стрелки которой биективны.) С другой стороны, группа $H^1(X, \mathcal{F}'^Q)$ канонически изоморфна группе $H^2(X, \mathcal{F}^Q) = H^2(X, \mathcal{F}^E)$. В самом деле, из точной последовательности $0 \to \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}' \to 0$ возникает точная последовательность $0 \to \mathcal{F}^Q \to \overline{\mathcal{F}}^Q \to \mathcal{F}'^Q \to 0$. При этом $\overline{\mathcal{F}}^Q$ является вялым пучком, так как он локально изоморфен вялому пучку $\overline{\mathcal{F}}$, и, следовательно, $H^i(X, \overline{\mathcal{F}}^Q) = 0$ $(i > 0)$. Таким образом, достаточно положить $\partial(E) = -d(Q) \in H^2(X, \mathcal{F}^E)$, чтобы требуемые условия были выполнены. Для завершения доказательства осталось только определить $d(Q)$ так, чтобы были выполнены требуемые свойства функторности и „точности". Это и будет сделано ниже в более общих условиях, причем обозначения будут несколько изменены.

Пусть $\mathcal{P}$ — пучок групп над X, $\mathcal{A}$ — пучок групп, на котором $\mathcal{P}$ действует слева. Оператор, определенный элементом $p \in \mathcal{P}$, будем обозначать через $\sigma(p)$. Пусть u — скрещенный гомоморфизм пучка $\mathcal{P}$ в $\mathcal{A}$, т. е. такой гомоморфизм пучков, что на каждом слое $\mathcal{P}(x)$ имеем

$$u(e) = e, \quad u(pp') = u(p)\,\sigma(p)\,u(p').$$

Тогда подпучок $\mathcal{G}$ в $\mathcal{P}$, являющийся полным прообразом нулевого сечения пучка $\mathcal{A}$ при гомоморфизме u, есть подпучок групп, причем два элемента из $\mathcal{P}$ имеют один и тот же образ в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда они определяют один и тот же правый класс смежности по $\mathcal{G}$. С другой стороны, для любых $x \in X$, $p \in \mathcal{P}(x)$, $a \in \mathcal{A}(x)$ положим

$$\rho(p)\,a = u(p)(\sigma(p)\,a).$$

Поскольку u — скрещенный гомоморфизм, эта формула определяет представление ρ пучка $\mathcal{P}$ в пучке ростков автоморфизмов *пучка множеств* $\mathcal{A}$. При этом гомоморфизм пучков множеств $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, определенный с помощью умножения в пучке $\mathcal{A}$, совместим с представлениями ρ, σ, ρ пучка $\mathcal{P}$ соответственно, т. е.

$$\rho(p)(ab) = (\rho(p)\,a)(\sigma(p)\,b).$$

Отсюда вытекает, что для каждого расслоения E со структурным пучком $\mathcal{P}$ имеем гомоморфизм ассоциированных пучков множеств

$$\mathcal{A}(\rho)^E \times \mathcal{A}(\sigma)^E \to \mathcal{A}(\rho)^E.$$

Немедленно проверяется, что этот гомоморфизм позволяет рассматривать $\mathcal{A}(\rho)^E$ как пучок множеств, на котором справа действует $\mathcal{A}(\sigma)^E$. Точнее, $\mathcal{A}(\rho)^E$ есть *главный* пучок (правый) относительно $\mathcal{A}(\sigma)^E$. Мы можем рассмотреть его класс $c(\mathcal{A}(\rho)^E) \in H^1(X, \mathcal{A}(\sigma)^E)$, который обозначим через $d(E)$. Обращение в нуль элемента $d(E)$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовало сечение пучка $\mathcal{A}(\rho)^E$.

Заметим, что мономорфизм $\mathcal{P}/\mathcal{G} \to \mathcal{A}$, индуцированный гомоморфизмом u, совместим с операторами из пучка $\mathcal{P}$, действующего на $\mathcal{P}/\mathcal{G}$ каноническим образом и на $\mathcal{A}$ с помощью представления ρ. Отсюда получается естественный мономорфизм ассоциированных пучков

$$(\mathcal{P}/\mathcal{G})^E \to \mathcal{A}(\rho)^E,$$

который биективен тогда и только тогда, когда u суперъективен. Следовательно, существование сечения в пучке $(\mathcal{P}/\mathcal{G})^E$, которое является необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $c(E) \in H^1(X, \mathcal{P})$ расслоения E содержался в образе множества $H^1(X, \mathcal{G})$, влечет за собой существование сечения в пучке $\mathcal{A}(\rho)^E$, т. е. обращение в нуль элемента $d(E)$. Верно и обратное, если u является эпиморфизмом пучка $\mathcal{P}$ на $\mathcal{A}$.

Тем самым доказательство предложения 3.4.2 полностью завершено.

Замечания. 1. Знак минус употреблен в формуле $\partial(E) = -d(Q)$, данной в доказательстве предложения 3.4.2, для того, чтобы в случае, когда $\mathcal{G}$ (а следовательно, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$) абелевы, получался обычный граничный оператор

точной последовательности когомологий, связанной с точной последовательностью

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0.$$

В этом случае имеет место коммутативная диаграмма, горизонтальные и вертикальные последовательности в которой точны:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \overline{\mathcal{F}} & \to & \overline{\mathcal{G}} & \to & \overline{\mathcal{H}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{G}' & \to & \mathcal{H}' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Из нее следует (см. [6], гл. III, предложение 4.1), что соответствующая диаграмма граничных гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc}
H^0(X, \mathcal{H}') & \to & H^1(X, \mathcal{F}') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(X, \mathcal{H}) & \to & H^2(X, \mathcal{F})
\end{array}$$

антикоммутативна. Первый вертикальный гомоморфизм есть эпиморфизм; легко проверяется, что в описанной выше конструкции элемент $d(Q)$ можно получить из класса $c(E) \in H^1(X, \mathcal{H})$ путем перехода к фактор-группе в композиции гомоморфизмов

$$H^0(X, \mathcal{H}') \to H^1(X, \mathcal{F}') \to H^2(X, \mathcal{F}),$$

т. е. что $d(Q) = -\partial c(E)$.

2. Не следует забывать, что для применения предложения 3.3.1 к проективному алгебраическому расслоению необходимо проверить, что оно локально тривиально. К сожалению, эта проверка, когда не известно a priori, как поднять структурную группу, часто оказывается затруднительной. Пусть, например, дано *голоморфное* расслоение E над комплексным проективным многообразием без особенностей, слоем которого является проективное пространство (как

показали Кодайра и Борель, в этом случае E — также алгебраическое многообразие). Получается ли это расслоение из какого-либо векторного голоморфного расслоения? В силу предложения 3.4.1 ответ является утвердительным, если E локально тривиально с алгебраической точки зрения. Впрочем, верно и обратное, так как (см. [16]) каждое голоморфное векторное расслоение над X является локально тривиальным алгебраическим расслоением.

3. Описанная выше ситуация, когда имеется скрещенный гомоморфизм пучков $u: \mathcal{P} \to \mathcal{A}$, встречается в различных интересных случаях. Например, пусть X — голоморфное многообразие, G — комплексная группа Ли, V — ее алгебра Ли, $\mathcal{P}$ — пучок ростков голоморфных отображений многообразия X в G, $\mathcal{A}$ — пучок ростков голоморфных дифференциальных 1-форм на X со значениями в V, на котором $\mathcal{P}$ действует с помощью присоединенного представления. Положим $u(g) = (dg)\,g^{-1}$. Наша конструкция позволяет сопоставить каждому голоморфному расслоению E над X со структурной группой G класс $d(E) \in H^1(X, \Omega^1(\mathrm{ad}(E)))$, где $\mathrm{ad}(E)$ — векторное расслоение со слоем V, „присоединенное" к E, $\Omega^1(\mathrm{ad}(E))$ — пучок ростков голоморфных дифференциальных 1-форм со значениями в $\mathrm{ad}(E)$. Ядро гомоморфизма u есть подпучок пучка $\mathcal{P}$, образованный ростками постоянных отображений многообразия X в G. Отсюда видно, что обращение в нуль класса $d(E)$ является необходимым условием для того, чтобы структурный пучок расслоения E можно было сократить до *постоянного* пучка G, т. е. для того, чтобы на E существовала интегрируемая голоморфная связность. Это условие является достаточным в случае, когда X имеет комплексную размерность 1, так как тогда u — эпиморфизм. Инвариант $d(E)$ был впервые введен Вейлем [21]. Более геометрическое определение дал Атия [1], который доказал, что обращение в нуль класса $d(E)$ есть в общем случае необходимое и достаточное условие для того, чтобы на E существовала голоморфная связность (не обязательно интегрируемая).

3.5. Точная последовательность, связанная с замкнутым подпространством.

Пусть Y — локально замкнутое подпространство (т. е. пересечение открытого и замкнутого подмножеств) про-

странства X. Для любого абелева пучка $\mathcal{F}$ над Y существует, и притом единственный, абелев пучок над X, ограничение которого на Y есть $\mathcal{F}$, а на $\complement Y$ равно 0. Доказательство этого факта легко сводится к случаю, когда Y открыто или замкнуто, а в этом случае проверка нашего утверждения сделана в [4], сообщение XVII, предложение 1[1]. Этот пучок над X мы будем обозначать через $\mathcal{F}^X$. Соответствие $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^X$ есть точный функтор $\mathbf{C}^Y \to \mathbf{C}^X$. Кроме того, если $Z \subset Y \subset X$ (Z локально замкнуто в Y и, следовательно, в X) и если $\mathcal{F}$ — абелев пучок над Z, то имеем $(\mathcal{F}^Y)^X = \mathcal{F}^X$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — абелев пучок над X; положим $\mathcal{F}_Y = (\mathcal{F} \mid Y)^X$. Это пучок над X, который характеризуется тем, что его ограничение на Y совпадает с ограничением пучка $\mathcal{F}$, а ограничение на $\complement Y$ равно 0. Тогда F_Y — точный функтор $\mathbf{C}^X \to \mathbf{C}^X$, причем выполнено условие транзитивности $(\mathcal{F}_Y)_Z = \mathcal{F}_Z$, если $Z \subset Y \subset X$ такие же, как выше. Если Y замкнуто, то $U = \complement Y$ открыто и получаем хорошо известную точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0$$

для любого абелева пучка $\mathcal{F}$ над X. Напомним, что $\Gamma(\mathcal{F}_Y) = \Gamma(Y, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F} \mid Y)$, тогда как $\Gamma(\mathcal{F}_U)$ отождествляется с подгруппой группы $\Gamma(\mathcal{F})$, образованной сечениями, носители которых содержатся в U. Пусть Φ — антифильтр замкнутых подмножеств в X. Для каждого множества $Z \subset X$ обозначим через Φ_Z „индуцированный" антифильтр, образованный теми $A \in \Phi$, которые содержатся в Z (не путать со следом $\Phi \cap Z$ семейства Φ на Z!). Легко проверяется, что если Z локально замкнуто и Φ — паракомпактифицирующее семейство, то Φ_Z — также паракомпактифицирующее семейство. Если Z локально замкнуто, а Φ произвольно, то из приведенных выше формул легко выводится следующая, более общая формула (справедливая, в частности, в случае, когда Z открыто или замкнуто):

$$\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}_Z) = \Gamma_{\Phi_Z}(Z, \mathcal{F} \mid Z),$$

[1]) По этому поводу см. также [9], гл. 2, теорема 2.9.1.— *Прим. ред.*

верная для любого абелева пучка $\mathscr{F}$ над X. Впрочем, эта формула эквивалентна формуле

$$\Gamma_{\Phi_Z}(Z, \mathscr{G}) = \Gamma_\Phi(X, \mathscr{G}^X),$$

справедливой для любого абелева пучка $\mathscr{G}$ над Z. Так как $\mathscr{G}^X$ — *точный* функтор от $\mathscr{G}$, то группы $H^p_\Phi(X, \mathscr{G}^X)$ образуют когомологический функтор на $\mathbf{C}^Z$, а поскольку универсальный когомологический функтор $(H^p_{\Phi_Z}(Z, \mathscr{G}))$ совпадает с предыдущим функтором в размерности 0, то получаем *канонические гомоморфизмы*

$$H^p_{\Phi_Z}(Z, \mathscr{G}) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{G}^X)$$

(которые характеризуются тем, что определяют гомоморфизм когомологических функторов, сводящийся в размерности 0 к гомоморфизму, рассмотренному выше). Если отправляться от пучка $\mathscr{F}$ над X, то получается гомоморфизм

$$H^p_{\Phi_Z}(Z, \mathscr{F} \mid Z) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{F}_Z).$$

Теорема 3.5.1. *Предыдущие гомоморфизмы являются изоморфизмами в каждом из следующих двух случаев:*

1) Z *замкнуто;*

2) Φ — *паракомпактифицирующее семейство,* Z *открыто.*

Доказательство. В каждом из этих двух случаев достаточно проверить, что функторы $H^p_\Phi(X, \mathscr{G}^X)$ на $\mathbf{C}^Z$ являются стирающими для $p \geqslant 1$. Если Z замкнуто, то это следует из того факта, что если $\mathscr{G}$ инъективен, то $\mathscr{G}^X$ также инъективен (предложение 3.1.4). Если Z открыто, а Φ — паракомпактифицирующее семейство, то таково же и Φ_Z. Следовательно, любой $\mathscr{G} \in \mathbf{C}^Z$ вкладывается в Φ_Z-мягкий пучок (ср. п. 3.3). Поэтому достаточно заметить, что если $\mathscr{G}$ есть Φ_Z-мягкий пучок, то $\mathscr{G}^X$ есть Φ-мягкий пучок (проверка этого непосредственна), и применить следствие из предложения 3.3.2.

Вернемся теперь к точной последовательности $0 \to \mathscr{F}_U \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_Y \to 0$, связанной с замкнутым подпространством Y и его открытым дополнением U. Она порождает точную

последовательность когомологий, которую можно записать, используя предыдущую теорему, в виде

$$\ldots \to H^p_\Phi(X, \mathscr{F}_U) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{F}) \to$$
$$\to H^p_{\Phi_Y}(Y, \mathscr{F}) \to H^{p+1}_\Phi(X, \mathscr{F}_U) \to \ldots$$

(где для простоты написано $\mathscr{F}$ вместо $\mathscr{F} \mid Y$ в третьем члене). Если Φ — паракомпактифицирующее семейство, то можно, кроме того, заменить члены вида $H^p(X, \mathscr{F}_U)$ на $H^p_{\Phi_U}(U, \mathscr{F})$. Тогда получается хорошо известная точная последовательность из [4], сообщение XVII.

3.6. О когомологической размерности некоторых пространств[1]**.**

Предложение 3.6.1. *Пусть X — топологическое пространство, (T^p) — ковариантный когомологический функтор, определенный на категории $\mathbf{C}^X$ пучков абелевых групп над X, со значениями в категории $\mathbf{C}'$. Предположим, что $\mathbf{C}'$ удовлетворяет условию* AB 4) (*см. п.* 1.5), *которое включает в себя существование индуктивных пределов (предложение* 1.8.1), *и предположим, что T^p перестановочны с индуктивными пределами. Пусть $\mathscr{F} \in \mathbf{C}^X$. Тогда $T^p(\mathscr{F})$ принадлежит каждой плотной (ср. п.* 1.11) *подкатегории $\mathbf{C}''$ в $\mathbf{C}'$, содержащей бесконечные прямые суммы своих объектов и все объекты вида $T^i(\mathbf{Z}_U)$, где U — любое открытое подмножество в X, а i равно p, $p+1$ или $p+2$.*

(Символ $\mathbf{Z}_U$ обозначает то же, что в предыдущем пункте.) Рассмотрим семейство $(f_i)_{i \in I}$ сечений пучка $\mathscr{F}$ над открытыми множествами U_i. Каждое f_i определяет гомоморфизм пучка $\mathbf{Z}_{U_i}$ в $\mathscr{F}$; следовательно, (f_i) определяют гомоморфизм прямой суммы $\bigoplus\limits_i \mathbf{Z}_{U_i}$ в $\mathscr{F}$. Мы говорим, что (f_i) есть *система образующих* пучка $\mathscr{F}$, если этот гомоморфизм есть эпиморфизм. Тривиально проверяется, что для заданного пучка $\mathscr{F}$ всегда существует система образующих.

[1]) Чтение этого пункта не обязательно для понимания дальнейшего.

Отсюда тотчас получаем, что $\mathcal{F}$ является индуктивным пределом некоторого возрастающего направленного семейства подпучков $\mathcal{F}_j$, каждый из которых имеет *конечную* систему образующих. Так как $\mathbf{C}''$ — плотная подкатегория, содержащая бесконечные прямые суммы семейств своих объектов, то она содержит и индуктивные пределы этих семейств (поскольку индуктивный предел семейства объектов из $\mathbf{C}'$ изоморфен некоторому фактор-объекту его прямой суммы). Мы имеем $T^p(\mathcal{F}) = \varinjlim_j T^p(\mathcal{F}_j)$, так что для доказательства соотношения $T^p(\mathcal{F}) \in \mathbf{C}''$ достаточно проверить, что $T^p(\mathcal{F}_j) \in \mathbf{C}''$ для каждого j. Этим все сводится к случаю, когда $\mathcal{F}$ допускает *конечную* систему образующих $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Обозначим через $\mathcal{F}_n (0 \leqslant n \leqslant k)$ подпучок в $\mathcal{F}$, порожденный сечением $f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Пучки $\mathcal{F}_n$ образуют конечную возрастающую последовательность подпучков в $\mathcal{F}$, каждый из последовательных факторов которой $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1} (1 \leqslant n \leqslant k)$ допускает *одну* образующую. Применяя индукцию по длине этой последовательности и используя полуточность функтора T^p, можно свести все к доказательству соотношения $T^p(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1}) \in \mathbf{C}''$ для всех n. Итак, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{F}$ порожден *одной* образующей, т. е. когда существует точная последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathbf{Z}_U \to \mathcal{F} \to 0,$$

где $\mathcal{R}$ — подпучок пучка $\mathbf{Z}_U$, а следовательно, и пучка $\mathbf{Z}$. Отсюда получаем точную последовательность $T^p(\mathbf{Z}_U) \to$ $\to T^p(\mathcal{F}) \to T^{p+1}(\mathcal{R})$, и так как по предположению $T^p(\mathbf{Z}_U) \in \mathbf{C}''$, то остается проверить, что $T^{p+1}(\mathcal{R}) \in \mathbf{C}''$. Но подпучок $\mathcal{R}$ постоянного пучка $\mathbf{Z}$ порожден семейством $(f_i)_{i \in I}$ *постоянных* сечений n_i пучка $\mathbf{Z}$ над открытыми множествами U_i. Поступая так же, как раньше, убеждаемся в том, что можно ограничиться случаем, когда это семейство конечно. Можно, разумеется, предположить, что $n_i > 0$. Более того, можно считать f_i выбранными так, что для каждого $x \in X$ среди чисел n_i, для которых U_i содержит x, существует образующая подгруппы $R(x)$ группы $\mathbf{Z}(x) = \mathbf{Z}$ (здесь $\mathbf{Z}$ — группа целых чисел). Для этого достаточно для каждого подмножества $(i_1, \ldots, i_p)$ множества $[1, k]$ первых k целых положительных чисел рассмотреть сечение $f_{i_1, \ldots, i_p}$ пучка $\mathcal{F}$ над $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$, значение которого равно о.н.д. $(n_{i_1}, \ldots, n_{i_p})$, и добавить эти сечения к системе образующих. Итак, предположим, что выполнено наше предположение о сечениях f_i и что $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$. Если обозначить через $\mathcal{R}_m (0 \leqslant m \leqslant k)$ подпучок в $\mathcal{R}$, порожденный сечениями $f_i (1 \leqslant i \leqslant m)$, то $\mathcal{R}_m$ образуют конечную возрастающую последовательность подпучков в $\mathcal{R}$. Применяя, как и раньше, индукцию по k и используя полуточность функтора T^{p+1}, получаем, что для доказательства соотношения $T^{p+1}(\mathcal{R}) \in \mathbf{C}''$ достаточно показать, что $T^{p+1}(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}) \in \mathbf{C}''$ для $1 \leqslant m \leqslant k$. Пусть теперь V_m — объединение множеств U_i для $1 \leqslant i \leqslant m$ и пусть $Y_m = U_m \cap \complement V_{m-1}$. Я утверждаю, что пучок $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}$ *изоморфен* $\mathbf{Z}_{Y_m}$. В самом деле, его ограничение на дополнение к V_m, очевидно, равно нулю (так как уже $\mathcal{F}_m$ обладает этим свойством). То же можно сказать об его ограничении на V_{m-1}. Достаточно проверить изоморфизм в каждой точке $x \in \complement V_{m-1} \cap U_m$. Но по предположению среди чисел n_i, относящихся к множествам U_i, содержащим x, фигурирует их о.н.д. n_{i_0}, который должен одновременно делить числа n_m и n_i для некоторого $i < m$ (нужно взять индекс $i < m$, для которого $x \in U_i$; он существует, так как $x \in V_{m-1}$). Тогда либо $i_0 < m$, откуда следует, что $f_{nm}(x) \in \mathcal{F}_{m-1}(x)$, либо $i_0 \geqslant m$, откуда $n_{i_0} \geqslant n_m$ и $n_{i_0} = n_m$; следовательно, n_m (делящее число n_i и $\geqslant n_i$) равно n_i, откуда снова $f_{nm}(x) \in \mathcal{F}_{m-1}(x)$. Итак, в обоих случаях $\mathcal{F}_{m-1}(x) =$ $= \mathcal{F}_m(x)$. Следовательно, ограничение пучка $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}$ на объединение множеств $\complement V_m$ и V_{m-1}, т. е. на $\complement Y_m$, равно нулю. С другой стороны, ограничение пучка $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}$ на $Y_m = U_m \cap \complement V_{m-1}$ изоморфно ограничению пучка $\mathcal{F}_m$ (так как ограничение пучка $\mathcal{F}_{m-1}$ равно нулю) и порождено там ограничением сечения f_m; следовательно, оно изоморфно постоянному пучку $\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}$ изоморфен пучку $\mathbf{Z}_{Y_m}$, и нам осталось проверить, что $T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y) \in \mathbf{C}''$, если Y — локально замкнутое множество в X. Мы имеем тогда $Y = V \cap \complement U$, где U и V — открытые множества в X. Пусть $W = U \cup V$. Тогда имеет место очевидная точная последовательность: $0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z}_W \to \mathbf{Z}_Y \to 0$, откуда получается точная последовательность $T^{p+1}(\mathbf{Z}_W) \to \to T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y) \to T^{p+2}(\mathbf{Z}_U)$. По предположению внешние члены этой точной последовательности содержатся в $\mathbf{C}''$. Следовательно, и $T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y) \in \mathbf{C}''$, чем и заканчивается доказательство предложения.

Предложение 3.6.2. *Пусть* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ — *две абелевы категории, удовлетворяющие аксиоме* АВ 5) (*ср. п.* 1.5). *Предположим, что* $\mathbf{C}$ *допускает образующую* (*ср. п.* 1.9). *Пусть* T — *ковариантный функтор из* $\mathbf{C}$ *в* $\mathbf{C}'$. *Тогда для перестановочности правых производных функторов* R^pT *с индуктивными пределами достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

a) *T перестановочен с индуктивными пределами*;

b) *если* $M = \varinjlim_i M_i$ *в* $\mathbf{C}$, *где* M_i — *инъективные объекты, то объект* M *является* T-*ациклическим, т. е.* $R^pT(M) = 0$ *при* $p > 0$.

[Условие b), очевидно, необходимо для справедливости утверждения; то же можно сказать об условии a), если T точен слева и, следовательно, $R^0T = T$.] Заметим сначала, что в силу теоремы 1.10.1 функторы R^pT определены. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — индуктивная система в $\mathbf{C}$, A — ее индуктивный предел. Мы хотим доказать, что естественные морфизмы $\varinjlim R^pT(A_i) \to R^pT(A)$ биективны. Покажем сначала, что *существует индуктивная система* $(C_i)_{i \in I}$ *комплексов* (*со значениями в* $\mathbf{C}$) *и „дополнение"* $(A_i) \to (C_i)$, *такие, что* $A_i \to C_i$ *для каждого* $i \in I$ *есть правая резольвента объекта* A, *состоящая из инъективных объектов*. В самом деле, рассмотрим категорию $I(\mathbf{C})$ индуктивных систем на I со значениями в $\mathbf{C}$. Она является категорией диаграмм и поэтому в силу предложения 1.6.1 удовлетворяет тем же предположениям, что $\mathbf{C}$. Согласно теореме 1.10.1, каждый объект этой категории допускает правую резольвенту, состоящую из инъективных объектов. Но сразу же проверяется, что если (M_i) — инъективный объект категории $I(\mathbf{C})$, то M_i — инъективные объекты в $\mathbf{C}$ (это верно для любой категории диаграмм со схемой Σ, удовлетворяющей общим условиям предложения 1.9.2). Рассмотрим теперь правую резольвенту $0 \to (A_i) \to (C_i^0) \to (C_i^1) \to \ldots$ объекта (A_i), состоящую из инъективных объектов категории $I(\mathbf{C})$. Для каждого i обозначим через C_i комплекс $0 \to C_i^0 \to C_i^1 \to \ldots$. Тогда видно, что система (C_i) удовлетворяет нашим требованиям. Так как функтор $\varinjlim$ на $I(\mathbf{C})$ точен (предложение 1.8.1), то получаем резольвенту C объекта A, состоящую из объектов $C^p = \varinjlim_i C_i^p$. Из условия b) следует, что C^p являются T-ациклическими, откуда $R^pT(A) = H^p(T(C))$. Так как, согласно a), T перестановочен с индуктивными пределами, то $T(C) = \varinjlim T(C_i)$. Отсюда, используя точность функтора $\varinjlim$ на $I(\mathbf{C}')$ (вытекающую из аксиомы АВ 5) и предложения 1.8.1), получаем $H^p(T(C)) = \varinjlim H^p(T(C_i))$. Но C_i — комплекс, связанный с инъективной резольвентой объекта A_i. Поэтому $H^pT(C_i) = R^pT(A_i)$, откуда следует требуемое заключение $R^pT(A) = \varinjlim R^pT(A_i)$.

Предложение 3.6.3. *Пусть* X — *топологическое пространство с антифильтром* Φ *замкнутых множеств. Тогда функторы* $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ *на* $\mathbf{C}^X$ *перестановочны с индуктивным пределом в следующих двух случаях*:

1) *X локально компактно,* Φ — *семейство компактных подмножеств*;

2) *X пространство Зариского,* Φ — *семейство всех замкнутых подмножеств*.

(*Пространством Зариского* мы называем пространство, в котором всякая убывающая последовательность замкнутых множеств стационарна, ср. [15], п. 30.) Достаточно проверить условия a) и b) предложения 3.6.2 для функтора Γ_Φ. Проверка условия a) — это легкое упражнение на свойства компактных пространств и оставляется читателю (см. также [9], гл. 2, п. 4.12). Условие b) получается из следствия предложения 3.3.1 и доказанной ниже леммы.

Лемма 3.6.4. *При условии* 1) *любой индуктивный предел* Φ-*мягких пучков есть* Φ-*мягкий пучок. При условии* 2) *любой индуктивный предел вялых пучков есть вялый пучок.*

Пусть условие 1) выполнено. Пусть $(\mathscr{F}_l)$ — индуктивная система мягких пучков над X, $\mathscr{F}$ — ее индуктивный предел, f — сечение пучка $\mathscr{F}$ над $A \in \Phi$, т. е. над компактным множеством A. Применяя а) к компактному пространству A, получаем, что f порождено некоторым сечением f_l пучка $\mathscr{F}_l$ над A. Так как $\mathscr{F}_l$ есть Φ-мягкий пучок, то это f_l есть ограничение некоторого $g_l \in \Gamma_\Phi(\mathscr{F}_l)$. Следовательно, f есть ограничение сечения $g \in \Gamma_\Phi(\mathscr{F})$, определенного с помощью g_l. Случай 2) рассматривается совершенно аналогично. Нужно только заметить, что подмножество U пространства Зариского есть снова пространство Зариского, так что а) к нему также применимо.

Будем говорить, что пространство X имеет *когомологическую размерность* $\leqslant n$, если $H^l(X, \mathscr{F}) = 0$ при $l > n$ для любого абелева пучка $\mathscr{F}$ над X. Соединяя предложение 3.6.1 и предложение 3.6.3, получаем

Следствие. *Пусть X — пространство, которое компактно (или является пространством Зариского), пусть n — целое неотрицательное число. Для того чтобы X имело когомологическую размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы $H^l(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ для $l > n$ и всех открытых множеств U из X.*

Перейдем теперь к наиболее существенному результату этого пункта. Пусть X — пространство Зариского; говорят, что X имеет *комбинаторную размерность* $\leqslant n$, если любая строго возрастающая последовательность *неприводимых* замкнутых множеств в X имеет не более чем $n+1$ элементов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.6.5. *Если X — пространство Зариского комбинаторной размерности $\leqslant n$, то X имеет когомологическую размерность $\leqslant n$, т. е. имеем $H^l(X, \mathscr{F}) = 0$ при $l > n$ для всех абелевых пучков $\mathscr{F}$ над X.*

Применим индукцию по комбинаторной размерности n пространства X. Теорема тривиальна, если $n = 0$ (тогда X — дискретное конечное множество). Предположим, что теорема доказана для пространств комбинаторной размерности $\leqslant n-1$, где $n \geqslant 1$, и докажем ее в случае, когда X имеет комбинаторную размерность $\leqslant n$. Пусть X_k — неприводимые компоненты пространства X ([15], гл. II, предложение 2). Если $\mathscr{F}$ — абелев пучок над X, то имеем естественный

мономорфизм пучка $\mathscr{F}$ в прямую сумму пучков $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}_{X_k}$. Отсюда получается точная последовательность

$$0 \to \mathscr{F} \to \bigoplus \mathscr{F}_k \to \mathscr{R} \to 0,$$

где $\mathscr{R}$ — пучок, носитель которого содержится в подмножестве $Y = \bigcup_{k \neq l} (X_k \cap X_l)$, комбинаторная размерность которого $\leqslant n-1$. Следовательно, имеем точную последовательность

$$H^{l-1}(X, \mathscr{R}) \to H^l(X, \mathscr{F}) \to \bigoplus_k H^l(X, \mathscr{F}_k).$$

Если $l > n$, т. е. $l-1 > n-1$, то имеем $H^{l-1}(X, \mathscr{R}) = H^{l-1}(Y, \mathscr{R}) = 0$ в силу предположения индукции. Поэтому для доказательства равенства $H^l(X, \mathscr{F}) = 0$ достаточно показать, что $H^l(X, \mathscr{F}_k) = 0$. Мы имеем $H^l(X, \mathscr{F}_k) = H^l(X_k, \mathscr{F})$, так что достаточно доказать теорему для неприводимого пространства X_k. Предположим теперь, что X неприводимо. В силу следствия из предложения 3.6.3 достаточно доказать, что $H^l(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ для $l > n$ и всех открытых множеств U из X. Можно предположить, что $U \neq \varnothing$. Тогда $Y = \complement U$ есть замкнутое множество, отличное от X, и, значит, имеет комбинаторную размерность $\leqslant n-1$. Так как $\mathbf{Z}$ — вялый пучок (ср. конец п. 3.3), то из точной последовательности $0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_Y \to 0$ вытекает, что $H^l(X, \mathbf{Z}_U) = H^{l-1}(X, \mathbf{Z}_Y) = H^{l-1}(Y, \mathbf{Z})$, но последняя группа равна нулю в силу предположения индукции.

Замечания. 1. Предыдущая теорема обобщает одну теорему Серра [18].

2. Можно построить пространство Зариского когомологической размерности нуль, но бесконечной или сколь угодно большой комбинаторной размерности. Достаточно рассмотреть частично упорядоченное множество X, конечное или бесконечное, и ввести на нем топологию, замкнутыми множествами в которой являются множества X_x, где через X_x $(x \in X)$ обозначено множество таких $y \in X$, что $y < x$.

3.7. Спектральная последовательность Лере непрерывного отображения.

Пусть f — непрерывное отображение пространства Y в пространство X. Предположим, что в Y задан антифильтр Ψ

замкнутых множеств. Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество. Обозначим через $\Psi(U)$ антифильтр замкнутых подмножеств пространства $f^{-1}(U)$, состоящий из таких $A \subset f^{-1}(U)$, что для любой точки $x \in U$ найдется ее окрестность $V \subset U$, для которой замыкание множества $A \cap f^{-1}(V)$ принадлежит Ψ. В частности, $\Psi(X)$ есть некоторый антифильтр замкнутых подмножеств пространства Y. Пусть $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп над Y. Рассмотрим для любого открытого множества $U \subset X$ группу $\Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathscr{F})$. Легко проверить, что для очевидных отображений ограничения (связанных с включениями $V \subset U$) эти группы образуют *пучок* над X. Обозначим этот пучок через $f_\Psi(\mathscr{F})$ и будем называть его *прямым образом пучка* $\mathscr{F}$ *при отображении* f *относительно* Ψ. Если Ψ — семейство всех замкнутых подмножеств Y, то вместо $f_\Psi(\mathscr{F})$ будем писать просто $f_*(\mathscr{F})$ и называть $f_*(\mathscr{F})$ *прямым образом пучка* $\mathscr{F}$ *при отображении* f. Заметим, что в этом случае $\Psi(U)$ есть множество всех замкнутых подмножеств пространства $f^{-1}(U)$ и $\Gamma(U, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{F})$ (с помощью этой формулы можно определить пучок $f_*(\mathscr{F})$ и в том случае, когда $\mathscr{F}$ является просто пучком множеств). По определению мы имеем в общем случае

$$\Gamma(U, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathscr{F}).$$

Легко проверить, что имеет место формула

$$\operatorname{supp}_X(\varphi) = \overline{f(\operatorname{supp}_Y(\varphi))}$$

для всякого $\varphi \in \Gamma(f_\Psi(\mathscr{F})) = \Gamma_{\Psi(X)}(\mathscr{F})$ [через $\operatorname{supp}_X(\varphi)$ и $\operatorname{supp}_Y(\varphi)$ здесь обозначены носители сечения φ, рассматриваемого как сечение над X или над Y соответственно]. Пусть Φ — некоторый антифильтр замкнутых подмножеств в X. Обозначим через Ψ' антифильтр замкнутых подмножеств $A \subset Y$, принадлежащих $\Psi(X)$, и таких, что замыкание множества $f(A)$ принадлежит Φ. Тогда предшествующие формулы приводят к формуле

$$\Gamma_\Phi(f_\Psi(\mathscr{F})) = \Gamma_{\Psi'}(\mathscr{F}).$$

(Мы будем говорить, что семейства Φ и Ψ *согласованы относительно* f, если $\Psi = \Psi'$. Это имеет место, например,

в случае, когда Φ и Ψ состоят из всех замкнутых подмножеств в X и Y соответственно.)

Заметим, что f_Ψ является *точным слева функтором* из категории $\mathbf{C}^Y$ абелевых пучков над Y в категорию $\mathbf{C}^X$ абелевых пучков над X. Более того, предыдущая формула является *функторным изоморфизмом*. Ее можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_{\Psi'} = \Gamma_\Phi f_\Psi.$$

Мы хотим применить к этим функторам теорему 2.4.1. Для этого надо дать условия, при которых f_Ψ преобразует инъективный пучок в Γ_Φ-ациклический пучок.

Лемма 3.7.1. 1) *Если Ψ — антифильтр всех замкнутых подмножеств в Y, то f_Ψ преобразует инъективный пучок в инъективный пучок.*

2) *Если Φ — паракомпактифицирующее семейство, то f_Ψ преобразует вялый пучок в Φ-мягкий пучок.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathscr{F}$ — инъективный пучок, $\mathscr{M}(y)$ — инъективная абелева группа, содержащая $\mathscr{F}(y)$ $(y \in Y)$, и пусть $\mathscr{M}$ — произведение пучков, определенное группами $\mathscr{M}(y)$ (см. п. 3.1). Тогда $\mathscr{F}$ является подпучком пучка $\mathscr{M}$. Поскольку $\mathscr{F}$ инъективен, он является прямым сомножителем в $\mathscr{M}$. Значит, $f_\Psi(\mathscr{F})$ является прямым сомножителем в $f_\Psi(\mathscr{M})$. Остается доказать, что $f_\Psi(\mathscr{M})$ — инъективный пучок. Для любого $x \in X$ обозначим через $\mathscr{N}(x)$ произведение групп $\mathscr{M}(y)$ для всех $y \in f^{-1}(x)$. Из определений непосредственно следует, что $f(\mathscr{M})$ совпадает с произведением пучков $\mathscr{N}$, определенным группами $\mathscr{N}(x)$. Но каждая группа $\mathscr{N}(x)$ является инъективной абелевой группой, будучи прямым произведением инъективных групп. Значит, $\mathscr{N}$ является инъективным пучком (предложение 3.1.2) и, следовательно, $f(\mathscr{M})$ — инъективный пучок.

2) Пусть $\mathscr{F}$ является вялым пучком. Надо показать, что $f_\Psi(\mathscr{F})$ есть Φ-мягкий пучок. Пусть g — сечение пучка $f_\Psi(\mathscr{F})$ над $B \in \Phi$. Мы должны найти сечение $h \in \Gamma_\Phi(f_\Psi(\mathscr{F})) = \Gamma_{\Psi'}(\mathscr{F})$, ограничение которого на B совпадает с g. Так как Φ — паракомпактифицирующее семейство, то B допускает паракомпактную окрестность $B' \in \Phi$. Поэтому g является ограничением некоторого сечения g'

пучка $f_\Psi(\mathcal{F})$, определенного на подходящей окрестности $U \subset B'$ множества B. Так как B' нормально, то существует *замкнутая* окрестность B_1 множества B, содержащаяся в U. Пусть U_1 — ее внутренность. Рассмотрим g' как элемент группы $\Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathcal{F})$. Тогда его носитель A есть замкнутое подмножество в $f^{-1}(U)$; значит, $A \cap f^{-1}(B_1)$ замкнуто в Y и, следовательно, имеет открытое дополнение. Пересечение этого дополнения с открытым множеством $f^{-1}(U_1)$ содержится в $\complement A$, причем на нем g' равно нулю. Следовательно, существует сечение g_1 пучка $\mathcal{F}$ над открытым объединением множеств $f^{-1}(U_1)$ и $\complement(A \cap f^{-1}(B_1))$, совпадающее с g' на первом множестве и равное нулю на втором. Наконец, так как $\mathcal{F}$ является вялым пучком, то существует сечение h пучка $\mathcal{F}$ над Y, продолжающее g_1. Носитель сечения h содержится в $A \cap f^{-1}(B_1)$, откуда сразу следует, что он принадлежит Ψ'. Следовательно, h можно рассматривать как элемент группы $\Gamma_\Phi(f_\Psi(\mathcal{F}))$. Очевидно, этот элемент индуцирует на U_1 то же сечение, что g', и, значит, индуцирует на B сечение g.

Следствие из предложения 3.3.1 показывает, что при любом из условий леммы 3.7.1 к композиции функторов $\Gamma_{\Psi'} = \Gamma_\Phi f_\Psi$ можно применить теорему 2.4.1. Значит, существует когомологический спектральный функтор на $\mathbf{C}^Y$, сходящийся к градуированному функтору $(H^n_{\Psi'}(Y, \mathcal{F}))$, с начальным членом

$$E_2^{p,q} = H^p_\Phi(X, (R^q f_\Psi)(\mathcal{F})).$$

Остается вычислить пучки $(R^q f_\Psi)(\mathcal{F})$. Имеет место следующая общая лемма.

Лемма 3.7.2. *Пусть T — ковариантный функтор на абелевой категории $\mathbf{C}$ со значениями в категории $\mathbf{C}^X$ абелевых пучков над X. Предположим, что любой объект из $\mathbf{C}$ изоморфен подобъекту инъективного объекта, так что правые производные функторы R^qT существуют. Тогда для любого $A \in \mathbf{C}$ пучок $R^qT(A)$ отождествляется с пучком, связанным с тем предпучком (см. п. 3.1), который всякому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставляет группу $R^q(\Gamma^U T)(A)$ (где Γ^U — функтор $\mathcal{F} \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ на $\mathbf{C}^X$).*

Действительно, пусть $C(A)$ — комплекс, связанный с правой резольвентой объекта A, состоящей из инъективных объектов. Тогда мы имеем $R^qT(A) = H^q(T(C(A)))$. Но q-й пучок когомологий комплекса пучков $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^i)$ является пучком, связанным с предпучком, который сопоставляет открытому множеству U группу $H^q(\Gamma(U, \mathcal{K}))$. Таким образом, $R^qT(A)$ есть пучок, связанный с предпучком $U \to H^q(\Gamma(U, T(C(A)))) = R^q(\Gamma^U T)(A)$, что и доказывает лемму.

В нашем случае $T = f_\Psi$. Мы получаем, что $R^q f_\Psi(\mathcal{F})$ есть пучок, связанный с предпучком $U \to R^q(\Gamma^U f_\Psi)(\mathcal{F}) = R^q\Gamma_{\Psi(U)}(\mathcal{F})$. Но, как мы уже заметили, из предложения 3.1.3 непосредственно следует, что производные функторы функтора $\Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ совпадают с $H^q_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathcal{F})$. Имеем, таким образом, следующую теорему:

Теорема 3.7.3. *Пусть f — непрерывное отображение пространства Y в пространство X. Предположим, что на X и Y определены антифильтры замкнутых множеств Φ и Ψ соответственно. Обозначения $\Psi(U)$, f_Ψ, Ψ' будут пониматься в смысле, указанном в начале этого пункта. Предположим также, что Φ — паракомпактифицирующее семейство или что Ψ — множество всех замкнутых подмножеств в Y. Тогда существует когомологический спектральный функтор на категории $\mathbf{C}^Y$ абелевых пучков $\mathcal{F}$ над Y, сходящийся к градуированному функтору $(H^n_\Psi(Y, \mathcal{F}))$, начальный член которого есть*

$$E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = H^p_\Phi(X, R^q f_\Psi(\mathcal{F})).$$

В этой формуле $R^q f_\Psi(\mathcal{F})$ есть пучок над X, связанный с предпучком, который сопоставляет открытому подмножеству $U \subset X$ группу $H^q_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), \mathcal{F})$.

Наиболее простым является случай, когда Φ и Ψ — семейства всех замкнутых подмножеств пространств X, Y соответственно. В этом случае *мы получаем без каких-либо* *предположений относительно X, Y, f спектральный функтор, сходящийся к $\left(H^n(Y, \mathscr{F})\right)$, с начальным членом $H^p\left(X, R^q f_*(\mathscr{F})\right)$, где $R^q f_*(\mathscr{F})$ есть пучок, связанный с предпучком $U \to H^q\left(f^{-1}(U), \mathscr{F}\right)$.* Это утверждение может применяться, например, в теории когомологий алгебраических многообразий (снабженных топологией Зариского).

Мы ограничились здесь формулировкой естественных условий существования спектральной последовательности Лере, не имея возможности для более глубокого ее изучения.

3.8. Сравнение с когомологиями Чеха.

Мы отсылаем читателя к [15] за определением „групп когомологий" пространства X с коэффициентами в абелевом пучке $\mathscr{F}$ в смысле Чеха. Обозначим эти группы через $\check{H}^p(X, \mathscr{F})$ в отличие от групп $H^p(X, \mathscr{F})$, введенных в п. 3.2. (Для простоты мы не будем рассматривать „семейств Ф", отличных от множества всех замкнутых подмножеств.) Отметим, что группы $\check{H}^p(X, \mathscr{F})$ могут быть определены и в том случае, когда $\mathscr{F}$ — только *предпучок* абелевых групп: для всякого открытого покрытия $\mathbf{U} = (U_i)$ пространства X можно образовать комплекс $C(\mathbf{U}, \mathscr{F}) = \bigoplus\limits_p C^p(\mathbf{U}, \mathscr{F})$ коцепей покрытия $\mathbf{U}$ со значениями в предпучке $\mathscr{F}$, положить $H^p(\mathbf{U}, \mathscr{F}) = H^p(C(\mathbf{U}, \mathscr{F}))$ и рассмотреть группы

$$\check{H}^p(X, \mathscr{F}) = \varinjlim H^p(\mathbf{U}, \mathscr{F}),$$

где индуктивный предел берется по направленному семейству „классов открытых покрытий" пространства X (два открытых покрытия считаются эквивалентными, если каждое из них вписано в другое).

К сожалению, функторы $\check{H}^p(X, \mathscr{F})$ в общем случае не образуют когомологического функтора на категории $\mathbf{C}^X$ пучков абелевых групп над X (см. пример в конце этого пункта). Однако пара $\left(\check{H}^0, \check{H}^1\right)$ образует точный ∂-функтор ([11], [15]). Кроме того, $\check{H}^p$ являются *стирающими* функторами для $p > 0$; для доказательства этого достаточно, например, показать, что если $\mathscr{M}$ — произведение пучков, определенное семейством абелевых групп $(M_x)_{x \in X}$ (см. п. 3.1),

то $\check{H}^p(X, \mathscr{M}) = 0$ для $p > 0$. В действительности с помощью хорошо известного оператора гомотопии, используемого в классическом случае, когда $\mathscr{M}$ — тонкий пучок, а X — паракомпактно, можно доказать даже, что $H^p(\mathbf{U}, \mathscr{M}) = 0$ для любого открытого покрытия $\mathbf{U}$. Отсюда вытекает, что *если пространство X таково, что $\check{H}^p$ можно рассматривать как составляющие когомологического функтора, то $\check{H}^p$ канонически изоморфны функторам H^p. Так будет в случае, когда X паракомпактно* (см., например, [15], п. 25), или для произвольного X, если ограничиться значениями $p = 0$ и $p = 1$ (как мы уже отмечали в п. 3.4).

Более точные результаты связаны со спектральной последовательностью Картана — Лере для покрытия. На это обратил мое внимание А. Картан, идеям которого я здесь следую. Пусть $\mathbf{U}$ — фиксированное открытое покрытие пространства X. Для любого пучка $\mathscr{F}$ положим $C(\mathscr{F}) = C(\mathbf{U}, \mathscr{F})$. Мы получим ковариантный точный слева функтор из категории $\mathbf{C} = \mathbf{C}^X$ в категорию $\mathbf{C}'$ комплексов абелевых групп с положительными степенями. Кроме того, как мы видели, функторы $H^p(C(\mathscr{F}))$ являются стирающими. Отсюда легко построить спектральный функтор, сходящийся к правому производному $R\left(H^0 C\right)$ функтора $H^0 C$ и имеющий начальный член $E_2^{p,q} = H^p\left(R^q C\right)$. Чтобы получить этот функтор, можно взять инъективную резольвенту пучка $\mathscr{F} \in \mathbf{C}$ и рассмотреть спектральные последовательности бикомплекса, получающегося в результате преобразования этой резольвенты с помощью функтора C. Можно также заметить, что если рассматривать $H^0(K)$ как точный слева функтор на $\mathbf{C}'$ со значениями в категории абелевых групп, то его правые производные функторы суть $H^p(K)$, так что искомая спектральная последовательность является простым частным случаем теоремы 2.4.1. Разумеется, $\left(R^q C\right)(\mathscr{F})$ есть комплекс, составляющими которого являются $\left(R^q C^p\right)(\mathscr{F})$, где C^p — составляющие комплекса C. Остается найти явное выражение для $R^q C^p$ в том случае, которым мы занимаемся. В силу соотношения

$$C^p \mathscr{F} = \prod_{\sigma^p} \Gamma\left(U_{\sigma^p}, \mathscr{F}\right)$$

(где произведение берется по всем последовательностям $\sigma^p = (i_0, \ldots, i_p)$ из $p+1$ индексов покрытия $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$) легко видеть, что

$$R^q C^p(\mathcal{F}) = \prod_{\sigma^p} R^q(\Gamma(U_{\sigma^p}, \mathcal{F})).$$

Далее, если V — открытое подмножество пространства X, то легко найти правые производные функтора $\Gamma(V, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F} \mid V)$, так как функтор ограничения $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \mid V$ из $\mathbf{C}^X$ в $\mathbf{C}^Y$ точен и преобразует инъективные объекты в инъективные (предложение 3.1.3). Имеем $R^q(\Gamma(V, \mathcal{F})) = (R^q\Gamma^V)(V \mid \mathcal{F}) = H^q(V, \mathcal{F})$. Обозначим через $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ *предпучок* $V \to H^q(V, \mathcal{F})$ над пространством X. Тогда получим

$$R^q C^p(\mathcal{F}) = \prod_{\sigma^p} \Gamma(U_{\sigma^p}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) = C^p(\mathbf{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})).$$

Разумеется, дифференциал в $R^q C(\mathcal{F}) = \bigoplus_p R^q C^p(\mathcal{F})$ совпадает с дифференциалом в $C(\mathbf{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}))$, откуда окончательно $E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = H^p(\mathbf{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}))$. Наша спектральная последовательность сходится к правому производному функтору от $H^0 C(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, т. е. к функтору $(H^n(X, \mathcal{F}))$. Итак, имеет место

Теорема 3.8.1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathbf{U}$ — открытое покрытие пространства X. Тогда существует когомологический спектральный функтор, определенный на категории $\mathbf{C}^X$ пучков абелевых групп над X, сходящийся к градуированному функтору $(H^n(X, \mathcal{F}))$ и имеющий начальный член*

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})),$$

где через $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ обозначен (для всякого пучка $\mathcal{F} \in \mathbf{C}^X$) предпучок $V \to H^q(V, \mathcal{F})$ над X.

Заметим, что эта спектральная последовательность построена здесь без всяких предположений о паракомпактности пространства X или о локальной конечности покрытия $\mathbf{U}$.

Построенная спектральная последовательность дает функторные гомоморфизмы

$$H^p(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}).$$

Следствие 1. *Предыдущие гомоморфизмы являются изоморфизмами, если все $U_{i_0 \ldots i_p}$ $\mathcal{F}$-ацикличны (т. е. удовлетворяют условию $H^p(U_{i_0 \ldots i_p}, \mathcal{F}) = 0$ для всех $p > 0$).*

Ограничимся теперь покрытиями $\mathbf{U} = (U_x)_{x \in X}$, индексами которых являются точки x пространства X, причем $x \in U_x$ для всех x. Упорядочим их, считая $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{U}'$, если $U_x \subset U'_x$ для всех x. Если $C_{\mathbf{U}}$ и $C_{\mathbf{U}'}$ — соответствующие функторы-комплексы на категории $\mathbf{C}^X$, то мы будем иметь функторный гомоморфизм $C_{\mathbf{U}} \to C_{\mathbf{U}'}$, который дает гомоморфизм соответствующих спектральных функторов. Непосредственный переход к индуктивному пределу приводит к следующему результату.

Следствие 2. *Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда на категории $\mathbf{C}^X$ пучков абелевых групп над X существует спектральный функтор, сходящийся к градуированному функтору $(H^n(X, \mathcal{F}))$, начальный член которого равен*

$$E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = \check{H}^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}))$$

(где $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ — предпучок, определенный в теореме 3.5.1). При этом

$$E_2^{0,q}(\mathcal{F}) = 0 \quad \textit{для всех} \quad q > 0.$$

Эта последняя формула следует из определения групп $H^0(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}))$ и из следующего факта:

Лемма 3.8.2. *Пусть U — окрестность точки x и пусть $c^q \in H^q(U, \mathcal{F})$. Тогда найдется такая окрестность $V \subset U$ точки x, что образ элемента c^q в $H^q(U, \mathcal{F})$ равен нулю.*

Для доказательства этого утверждения достаточно взять инъективную резольвенту пучка $\mathcal{F} \mid U$. Пусть $\mathcal{C}$ — соответствующий комплекс. Представим c^q элементом из $H^q(\Gamma(U, \mathcal{C}))$, который определяется коциклом $z \in \Gamma(U, \mathcal{C}^q)$. Из ацикличности комплекса $\mathcal{C}$ в размерности q вытекает, что ограничение сечения z на подходящую окрестность V точки x

является кограницей. Отсюда получается нужный результат, если заметить, что в силу предложения 3.1.3 $\mathcal{C} \mid V$ является инъективной резольвентой пучка $\mathcal{F} \mid V$, так что $H^q(V, \mathcal{F}) = H^q(\Gamma(\mathcal{C}, V))$.

Спектральная последовательность следствия 2 дает функторные гомоморфизмы

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}),$$

а формула $E_2^{0,1} = 0$ показывает, что имеет место

Следствие 3. *Указанные выше гомоморфизмы биективны при $p = 0$ и $p = 1$ (как мы уже знаем) и являются мономорфизмами при $p = 2$.*

Заметим, что отсюда снова получаются изоморфизмы $\check{H}^p = H^p$ для *паракомпактного* пространства X. Точнее, указанные выше *канонические гомоморфизмы являются в этом случае изоморфизмами*. Действительно, в этом случае можно проверить (пользуясь тем фактом, что пучок, связанный с предпучком $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$, равен нулю при $q > 0$), что $E_2^{p,q} = 0$ для $q > 0$ (см. [9], гл. 2, п. 5.10).

Следствие 3 может быть обобщено следующим образом: *если $\check{H}^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) = 0$ для $0 < q < n$, то гомоморфизм $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$ является изоморфизмом при $i \leqslant n$ и мономорфизмом при $i = n + 1$.* Отсюда получаем (вместе с А. Картаном)

Следствие 4. *Пусть $\mathbf{U}$ — множество открытых подмножеств пространства X, образующее базу для его топологии, и пусть $\mathcal{F}$ — такой абелев пучок над X, что для всякой непустой последовательности $(U_1, \ldots, U_k)$ открытых множеств из $\mathbf{U}$ их пересечение U удовлетворяет условию $\check{H}^i(U, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > 0$. Тогда имеем $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$ и для всякого открытого подмножества V из X естественный гомоморфизм $\check{H}^i(V, \mathcal{F}) \to H^i(V, \mathcal{F})$ является изоморфизмом.*

Достаточно доказать, что $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$. Действительно, V обладает произвольно мелкими покрытиями $\mathbf{R}$, состоящими из множеств, принадлежащих $\mathbf{U}$. Из следствия 1 видно, что для такого $\mathbf{R}$ гомоморфизм $H^i(\mathbf{R}, \mathcal{F}) \to H^i(V, \mathcal{F})$ является изоморфизмом. Но отсюда в то же время следует (так как $\mathbf{R}$ можно взять сколь угодно мелким), что отображение $\check{H}^i(V, \mathcal{F}) \to H^i(V, \mathcal{F})$ является изоморфизмом.

Для доказательства того, что $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$, докажем индукцией по n, что $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$ для $0 < i \leqslant n$ и для всех U, имеющих указанный вид. Это тривиально для $n = 0$; поэтому пусть $n \geqslant 1$ и пусть утверждение доказано для $n' = n - 1$. Имеются произвольно мелкие покрытия $\mathbf{R}$ множества U открытыми подмножествами из $\mathbf{U}$. Для такого $\mathbf{R}$ имеем $C(\mathbf{R}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) = 0$ при $0 < q < n$, согласно индуктивному предположению. Следовательно, $H^p(\mathbf{R}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) = 0$ для таких q. В силу замечания, предшествовавшего следствию 4, отсюда вытекает, что $H^n(U, \mathcal{F}) = \check{H}^n(U, \mathcal{F})$, т. е. равна нулю.

Следствие 4 применимо, например, к случаю, когда X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зариского, $\mathbf{U}$ — множество аффинных открытых подмножеств в X, $\mathcal{F}$ — когерентный алгебраический пучок над X [15]. Действительно, согласно [15], аффинные открытые подмножества образуют базу для топологии пространства X, пересечение двух аффинных открытых подмножеств снова является аффинным открытым подмножеством, и если U — аффинное открытое подмножество, то $\check{H}^i(U, \mathcal{F}) = 0$ для $i > 0$. Таким образом, $H^i(X, \mathcal{F}) = \check{H}^i(X, \mathcal{F})$, и, кроме того, следствие 1 показывает, что $H^i(X, \mathcal{F})$ можно вычислить с помощью *одного* произвольного покрытия пространства X аффинными открытыми множествами.

Замечание. Кроме случая, рассмотренного в теореме 3.8.1, имеются и другие случаи, когда имеет место спектральная последовательность Лере. Наиболее известным *является случай локально конечного покрытия паракомпактного пространства X замкнутыми множествами* (это случай, рассмотренный Лере). Он рассматривается так же, как и рассмотренный выше случай открытых покрытий. При этом используется тот факт, что ограничение мягкого пучка на замкнутое множество является снова мягким пучком (это заменяет предложение 3.1.3). Другой случай, рассмотренный Годеманом другим методом, — это *случай конечного покрытия пространства X замкнутыми множествами* (без предположения паракомпактности). Когда имеют место одновременно оба этих случая, соответствующие спектральные последовательности совпадают.

Пример. В заключение этого пункта мы укажем простой пример, когда мономорфизм $\check{H}^2(X, \mathcal{F}) \to H^2(X, \mathcal{F})$ не является изоморфизмом и когда даже $\check{H}^2(X, \mathcal{F}) = 0$, а $H^2(X, \mathcal{F}) \neq 0$. Так как из следствия 2 к теореме 3.8.1 вытекает точная последовательность

$$0 \to \check{H}^2(X, \mathcal{F}) \to H^2(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) \to 0,$$

то достаточно *указать случай, когда* $H^2(X, \mathcal{F}) \neq 0$ *и* $H^2(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathcal{F}))$ *является изоморфизмом.*

Пусть X — неприводимое пространство (см. конец пункта 3.3), Y_1 и Y_2 — два замкнутых неприводимых подмножества пространства X, пересекающихся в точности в двух точках x_1 и x_2 (например, две пересекающиеся окружности на плоскости, снабженной топологией Зариского), и пусть Y — их объединение. Обозначим через $\mathbf{Z}$ постоянный пучок целых чисел над пространством X и рассмотрим в обозначениях п. 3.5 точную последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{Z}_{\complement Y} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_Y \to 0.$$

Я утверждаю, что пучок $\mathcal{F} = \mathbf{Z}_{\complement Y}$ удовлетворяет требуемым условиям. Прежде всего, так как $H^p(X, \mathbf{Z}) = 0$ для $p > 0$, согласно концу п. 3.3, то $H^2(X, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^1(X, \mathbf{Z}_Y) = H^1(Y, \mathbf{Z})$. Докажем, что эта группа отлична от нуля (точнее, изоморфна группе $\mathbf{Z}$). Действительно, мы имеем естественный мономорфизм постоянного пучка $\mathbf{Z}$ над $\mathbf{Y}$ в прямую сумму пучков $\mathbf{Z}_{Y_1}$ и $\mathbf{Z}_{Y_2}$, откуда получается точная последовательность пучков над Y

$$0 \to \mathbf{Z}_Y \to (\mathbf{Z}_{Y_1} \oplus \mathbf{Z}_{Y_2}) \to \mathbf{Z}_{Y_1 \cap Y_2} \to 0.$$

Но Y_i неприводимы; поэтому $H^p(Y, \mathbf{Z}_{Y_i}) = H^p(Y_i, \mathbf{Z}) = 0$ для $p > 0$, откуда $H^1(Y, \mathbf{Z}) = \Gamma(\mathbf{Z}_{Y_1 \cap Y_2})/\mathrm{Im}(\Gamma(\mathbf{Z}_{Y_2}))$. Это есть коядро гомоморфизма групп $\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$, задаваемого формулой $(n_1, n_2) \to (n_1 - n_2, n_1 - n_2)$, т. е. группа, изоморфная $\mathbf{Z}$. Итак,

$$H^2(X, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^1(Y, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Остается доказать, что $\check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathbf{Z}_{\complement Y}))$ изоморфна $\mathbf{Z}$ [тогда в силу предыдущего соотношения эпиморфизм $H^2(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathcal{F}))$ будет обязательно изоморфизмом]. Вычислим предпучок $\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}_{\complement Y})$. Для всякого открытого V группа $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y})$ может быть найдена из следующей точной последовательности пучков *над* V:

$$0 \to \mathbf{Z}_{\complement Y} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{Y'} \to 0,$$

где $Y' = Y \cap V$. Так как V также неприводимо, то отсюда заключаем, что $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^0(Y', \mathbf{Z})/\mathrm{Im}\, H^0(V, \mathbf{Z}) = \overline{H}^0(Y', \mathbf{Z})$, где последняя группа есть целочисленная *приведенная* группа когомологий размерности 0, т. е. в данном случае свободная абелева группа, порожденная связными компонентами пространства Y' по модулю диагональной подгруппы. Здесь $Y' = Y \cap V$ является открытым подмножеством пространства $Y = Y_1 \cup Y_2$ и имеет, следовательно, 0, 1 или 2 связные компоненты, причем последний случай представляется в точности тогда, когда V пересекается с Y_1 и Y_2, в то же время не пересекаясь с их пересечением. Имеем $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = 0$, за исключением этого последнего случая.

Для вычисления группы $\check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) = \varinjlim H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F}))$ можно ограничиться такими покрытиями $\mathfrak{U} = (U_x)_{x \in X}$, что U_x пересекается не более чем с одним из множеств Y_1, Y_2, если x отлично от каждой из двух точек x_1 и x_2, составляющих $Y_1 \cap Y_2$. В последнем случае будем считать, что U_{x_i} не содержит второй точки. Для такого покрытия $\mathfrak{U}$ сразу же видно, что $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) = 0$. Следовательно, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F}))$ отождествляется с группой $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F}))$, состоящей из 1-коциклов $(f_{x,y})_{x, y \in X}$ покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{H}^1(\mathcal{F})$. Но $\Gamma(U_x \cap U_y, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) = 0$, за исключением случаев $x = x_1$, $y = x_2$ или $x = x_2$, $y = x_1$. Отсюда $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) \approx \mathbf{Z}^2$, и сразу же видно, что коциклы $f_{x,y}$ отождествляются с парами $(n, -n)$ противоположных целых чисел. Таким образом, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) = \mathbf{Z}$, откуда, переходя к пределу, получаем $\check{H}^1(X, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) = \mathbf{Z}$, что и заканчивает доказательство.

3.9. Критерии ацикличности, основанные на методе покрытий[1]).

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{S}$ — непустая совокупность подмножеств из X. Предположим, что для

[1]) Чтение этого пункта не обязательно для понимания дальнейшего.

каждого $A \in \mathfrak{S}$ задано непустое множество $\mathfrak{R}(A)$ покрытий $\mathbf{R}$ пространства A множествами, которые принадлежат к $\mathfrak{S}$ вместе с их конечными пересечениями, и что для любых $B \in \mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ след $\mathbf{R}_B$ покрытия $\mathbf{R}$ на множестве B принадлежит к $\mathfrak{R}(B)$. Кроме того, предположим, что выполнено одно из следующих трех условий (которые позволяют написать спектральную последовательность Лере — Картана для каждого покрытия $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, где $A \in \mathfrak{S}$): 1) множества $A \in \mathfrak{S}$ открыты; 2) множества $A \in \mathfrak{S}$ замкнуты и покрытия $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ конечны; 3) множества $A \in \mathfrak{S}$ замкнуты, X паракомпактно и $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ локально конечны.

Теорема 3.9.1. *Пусть указанные условия выполнены. Предположим, что даны абелев пучок $\mathscr{F}$ над X и натуральное число n. Пусть также выполнены следующие условия*:

$A(n): H^i(\mathbf{R}, \mathscr{F}) = 0$ *для* $1 \leqslant i \leqslant n$ *и для всех* $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, *где* $A \in \mathfrak{S}$;

$B(n-1)$: *для каждого* $A \in \mathfrak{S}$ *и каждого* $c^i \in H^i(A, \mathscr{F})$ (*при* $1 \leqslant i \leqslant n-1$) *существует такое конечное подмножество L из $\mathfrak{R}(A)$, что если $\mathbf{R}^L$ — покрытие, являющееся „пересечением“ покрытий $\mathbf{R} \in L$, то ограничение элемента c^i на любое множество $B \in \mathbf{R}^L$ равно нулю.*

При этих условиях для каждого $A \in \mathfrak{S}$ имеем

$$H^i(A, \mathscr{F}) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

а если $c^n \in H^n(A, \mathscr{F})$, то c^n равен нулю тогда и только тогда, когда найдется хотя бы одно конечное подмножество L в $\mathfrak{R}(A)$, такое, что ограничение элемента c^n на любое $B \in \mathbf{R}^L$ равно нулю.

Укажем сразу наиболее интересные следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы* 3.9.1, *для того чтобы $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ для всякого $A \in \mathfrak{S}$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия $A(n)$ и $B(n)$.*

Действительно, достаточность немедленно следует из теоремы 3.9.1. Обратно, пусть $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ для $A \in \mathfrak{S}$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $B(n)$ тривиальным образом выполнено; проверим $A(n)$. Спектральная последовательность Лере для покрытия $\mathbf{R}$ пространства A (теорема 3.8.1 и замечание из п. 3.8) сходится к $H^*(A, \mathscr{F})$ и имеет начальный член $E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{R}, \mathscr{H}^q(\mathscr{F}))$, который равен нулю, если $1 \leqslant q \leqslant n$, потому что $C(\mathbf{R}, \mathscr{H}^q(\mathscr{F})) = 0$ для таких значений q (пересечение конечного числа множеств из $\mathbf{R}$ содержится в $\mathfrak{S}$). Отсюда, как обычно, следует, что $H^i(A, \mathscr{F}) = H^i(\mathbf{R}, \mathscr{F})$ для $0 \leqslant i \leqslant n$. Значит, $H^i(\mathbf{R}, \mathscr{F}) = 0$ для этих i.

Следствие 2. *Предположим, что в обозначениях теоремы* 3.9.1 *для каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждого открытого покрытия пространства A можно найти более мелкое покрытие вида $\mathbf{R}^L$, где L — конечное подмножество из $\mathfrak{R}(A)$. Тогда, чтобы $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ для любого $A \in \mathfrak{S}$ и при $1 \leqslant i \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы $H^i(\mathbf{R}, \mathscr{F}) = 0$ для всякого $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, где $A \in \mathfrak{S}$, и при $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Действительно, условие $B(n)$ выполнено (для любого $n > 0$) в силу леммы 3.8.2. Поэтому достаточно применить следствие 1.

Следствие 3. *Пусть выполнены предварительные условия предыдущего следствия. Кроме того, предположим, что покрытия $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ имеют нерв размерности $\leqslant n$. Тогда из эквивалентных условий предыдущего следствия вытекает даже, что $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ при $A \in \mathfrak{S}$ и $i > 0$.*

В самом деле, автоматически получаем, что $H^i(\mathbf{R}, \mathscr{F}) = 0$ для любого $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ и $i > n$, а значит, и для каждого i, т. е. условие $A(m)$ выполняется для *всех* m. Поэтому достаточно применить следствие 2 при большом n.

Доказательство теоремы 3.9.1. Мы будем проводить индукцию по целому числу n. Утверждение теоремы очевидно для $n = 0$. Предположим, что $n \geqslant 1$ и что теорема доказана для целых чисел $n' < n$. Из индуктивного предположения сразу же следует, что $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Поэтому остается доказать, что элемент $c^n \in H^n(A, \mathscr{F})$ равен 0 при том условии, что существует такое конечное подмножество L из $\mathfrak{R}(A)$, что ограничение элемента c^n на всякое $B \in \mathbf{R}^L$ равно нулю. Мы убедимся в этом при помощи индукции по k, где k есть число элементов в L. Этот факт очевиден при $k = 0$; докажем его для $k = 1$. По предположению существует такое $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, что ограничение элемента c^n на любое $B \in \mathbf{R}$ равно нулю. Так как все $B \in \mathbf{R}$ принадлежат $\mathfrak{S}$ (откуда $H^i(B, \mathscr{F}) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$), то член $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности Лере, связанной с $\mathbf{R}$, равен нулю для $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Отсюда, как обычно, получается точная последовательность

$$\ldots \to H^n(\mathbf{R}, \mathscr{F}) \to H^n(A, \mathscr{F}) \to H^0(\mathbf{R}, \mathscr{H}^n(\mathscr{F})) \to \ldots .$$

Так как первый член равен нулю в силу $A(n)$, то второй гомоморфизм есть мономорфизм. Но по предположению образ элемента при этом гомоморфизме равен нулю. Значит, c^n равен нулю. Предположим теперь, что $k \geqslant 2$ и что доказываемый факт имеет место для всех $k' < k$. Пусть $L = (\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^k)$. Достаточно (в силу того, что уже доказано) показать, что ограничение c_B^n элемента c^n на любое $B \in \mathbf{R}^1$ равно нулю. Но для $l = 2, \ldots, k$ ограничение $\mathbf{R}_B^l$ покрытия $\mathbf{R}^l$ на множество B принадлежит к $\mathfrak{R}(B)$. С другой стороны, ограничение элемента c_B^n на любое множество, входящее в пересечение покрытий $\mathbf{R}_B^l (2 \leqslant l \leqslant k)$, равно нулю в силу предположения о c^n. Применяя наше индуктивное предположение при $k' = k-1$ к c_B^n и B, получаем $c_B^n = 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Предложение 3.9.2. *Предварительные условия следствия 2 выполнены в следующем случае: X — квазикомпактно; множества $A \in \mathfrak{S}$ замкнуты; $X \in \mathfrak{S}$; покрытия $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$ конечны; для двух различных точек x и y из X найдется такое $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$, что ни одно множество из $\mathbf{R}$ не содержит одновременно точек x и y.*

(Определение квазикомпактного пространства отличается от определения компактного пространства тем, что в него не входит требование отделимости.)

Доказательство. Для любого покрытия $\mathbf{R}$ пространства X и любой точки $x \in X$ обозначим через $E_x(\mathbf{R})$ (*звезда* покрытия $\mathbf{R}$ в точке x) объединение тех множеств $A \in \mathbf{R}$, которые содержат x. Пусть $O_x(\mathbf{R})$ — дополнение объединения множеств $A \in \mathbf{R}$, не содержащих x. Тогда $x \in O_x(\mathbf{R}) \subset E_x(\mathbf{R})$. Кроме того, для каждого $y \in O_x(\mathbf{R})$ имеем $E_y(\mathbf{R}) \subset E_x(\mathbf{R})$. Если $\mathbf{R}$ — конечное покрытие пространства X замкнутыми множествами, то $O_x(\mathbf{R})$ — *открытая окрестность* точки x. Пусть выполнены условия предложения и пусть $\mathbf{U}$ — открытое покрытие пространства X, $U_x \in \mathbf{U}$ и $x \in U_x$. Пересечение множеств $E_x(\mathbf{R})$, взятое по всем покрытиям $\mathbf{R}$, входящим в $\mathfrak{R}(X)$, состоит по условию только из точки x. Отсюда в силу квазикомпактности следует, что существует такое конечное подмножество L_x из $\mathfrak{R}(X)$, что пересечение множеств $E_x(\mathbf{R})$ по всем $\mathbf{R} \in L_x$, т. е. $E_x(\mathbf{R}^{L_x})$, содержится в U_x. Множества $O_x(\mathbf{R}^{L_x})$ образуют открытое покрытие пространства X. Следовательно, существует такое конечное множество $Y \subset X$, что множества $O_x(\mathbf{R}^{L_x})$, соответствующие точкам $x \in Y$, покрывают X. Пусть L — объединение всех L_x для $x \in Y$. Я утверждаю, что покрытие $\mathbf{R}^L$ пространства X вписано в $\mathbf{U}$. Действительно, пусть A — непустое множество из $\mathbf{R}^L$ и пусть $a \in A$. Тогда существует такой $x \in Y$, что $a \in O_x(\mathbf{R}^{L_x})$, откуда $E_a(\mathbf{R}^{L_x}) \subset E_x(\mathbf{R}^{L_x}) \subset U_x$. Следовательно, $A \subset E_a(\mathbf{R}^L) \subset E_a(\mathbf{R}^{L_x})$ содержится в U_x, что и доказывает наше утверждение. Применяя этот результат к множеству покрытий любого $A \in \mathfrak{S}$, индуцированных покрытиями $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$, получим нужное утверждение.

Наиболее замечательное применение следствия 3 состоит в следующем. Пусть X — компактный куб $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$, пусть $\mathfrak{S}$ — семейство компактных кубов A вида $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, содержащихся в X, и пусть $\mathfrak{R}(A)$ — семейство покрытий, каждое из которых состоит из двух множеств A, определенных с помощью гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям. Чтобы доказать, что $H^i(A, \mathscr{F}) = 0$ для $i > 0$ и для любого A, достаточно проверить, что для любого A и любого сечения f пучка $\mathscr{F}$ над $A_1 \cap A_2$ имеем $f = f_1 - f_2$, где f_i — некоторое сечение пучка $\mathscr{F}$ над A_i. Этот прием был использован А. Картаном в доказательстве основных теорем о многообразиях Штейна [5].

Замечание. Если $\mathscr{F}$ — пучок групп (не обязательно абелевых), то теорема 3.9.1 для $n = 1$ сохраняет смысл и может быть легко доказана непосредственно. Это позволяет упростить доказательство теоремы из [5] (сообщение XVII) об обратимых голоморфных матрицах.

3.10. Переходы к пределу в когомологиях пучков.

Мы приведем только два результата в этом направлении (один из них понадобится нам в гл. 5, п. 5.7). Оба они являются частными случаями следующего общего результата гомологической алгебры.

Предложение 3.10.1. *Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ — две абелевы категории. Предположим, что каждый объект из $\mathbf{C}$ изоморфен* *подобъекту инъективного объекта и что* $\mathbf{C}'$ *удовлетворяет аксиоме* AB 5) (*см. п.* 1.5), *которая позволяет, в частности, образовывать в* $\mathbf{C}'$ *индуктивные пределы* (*см. предложение* 1.8.1). *Пусть* $(F_i)_{i \in I}$ — *индуктивная система ковариантных аддитивных функторов из* $\mathbf{C}$ *в* $\mathbf{C}'$, $F = \varinjlim F_i$ — *функтор, являющийся индуктивным пределом системы* F_i, *т. е. определенный равенством* $F(A) = \varinjlim F_i(A)$ *для всякого* $A \in \mathbf{C}$. *Гомоморфизмы* $F_i \to F$ *определяют гомоморфизмы ∂-функторов* $(R^pF_i) \to (R^pF)$ *и, следовательно, гомоморфизм ∂-функторов*

$$\varinjlim R^pF_i(A) \to R^pF(A) \qquad (3.10.1)$$

(*кограничные гомоморфизмы для последовательности функторов* $\varinjlim R^pF_i$ *определяются как индуктивные пределы кограничных гомоморфизмов для ∂-функторов* (R^pF_i)). *Гомоморфизмы* (3.10.1) *являются изоморфизмами.*

Для доказательства достаточно рассмотреть инъективную резольвенту $C = C(A)$ объекта A. Тогда левая часть в (3.10.1) есть $\varinjlim H^p(F_iC(A))$, а правая — $H^p(\varinjlim F_iC(A))$. Эти объекты изоморфны, так как функтор $\varinjlim$, определенный на категории индуктивных систем над I со значениями в $\mathbf{C}'$, точен (см. предложение 1.8.1) и, в частности, перестановочен с операцией взятия гомологий комплекса.

Следствие 1. *Пусть* X — *пространство, снабженное паракомпактифицирующим семейством* Φ. *Тогда для каждого абелева пучка* $\mathcal{F}$ *над* X *имеем*

$$H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_U H^p(X, \mathcal{F}_U),$$

где индуктивный предел берется по направленному семейству открытых множеств U *из* X, *замыкание которых лежит в* Φ (*через* $\mathcal{F}_U$ *обозначен пучок над* X, *ограничение которого на* U *есть* $\mathcal{F} \mid U$, *а ограничение* на $\complement U$ *равно нулю*).

В силу теоремы 3.5.1 имеем $H^p(X, \mathcal{F}_U) = H^p_{\Phi_U}(U, \mathcal{F})$, где Φ_U — совокупность замкнутых в X подмножеств из U. Положим $\Gamma_{\Phi_U}(\mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}_U)$. Тогда можно также написать, что $H^p(X, \mathcal{F}_U) = R^p\Gamma_{\Phi_U}(\mathcal{F})$ (в силу предложения 3.1.3). Так как $\varinjlim \Gamma_{\Phi_U}(\mathcal{F}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{F})$, из предложения 3.10.1 вытекает, что $\varinjlim H^p(X, \mathcal{F}_U) = R^p\Gamma_\Phi(\mathcal{F})$, что и требовалось доказать.

Это следствие иногда помогает свести вычисление когомологий с носителями в Φ к вычислению когомологий с произвольными носителями. Оно было сообщено мне А. Картаном.

Следствие 2. *Пусть* X — *топологическое пространство,* Y — *подмножество в* X, *допускающее фундаментальную систему паракомпактных окрестностей* (*достаточно, например, чтобы* X *было метризуемым или локально компактным и паракомпактным*). *Тогда для всякого абелева пучка* $\mathcal{F}$ *над* X *имеем*

$$H^p(Y, \mathcal{F}) = \varinjlim H^p(U, \mathcal{F}),$$

где предел берется по убывающему направленному семейству открытых в X *окрестностей множества* Y.

Действительно, из наших предположений следует, что $H^0(Y, \mathcal{F}) = \varinjlim H^0(U, \mathcal{F})$ (см. [11], предложение 2.2.1 [1])). Кроме того, производными функторами для функтора $\mathcal{F} \to H^0(U, \mathcal{F})$ являются $H^p(U, \mathcal{F})$. Таким образом, следствие 2 есть частный случай предложения 3.10.1.

Заметим, что равенство $H^0(Y, \mathcal{F}) = \varinjlim H^0(U, \mathcal{F})$ и вместе с тем следствие 2 справедливы также в том случае, когда Y *замкнуто* и допускает *паракомпактную* окрестность (доказательство аналогично данному в [9] и [11]; там же указан простой противоречащий пример, относящийся к случаю, когда условие паракомпактности не выполнено).

Для полноты укажем без доказательства следующий результат, являющийся частным случаем общего результата о проективных системах. Пусть X — локально компактное пространство. Рассмотрим возрастающее направленное множество относительно компактных открытых подмножеств U в X. Тогда для всякого абелева пучка $\mathcal{F}$ над X гомоморфизмы ограничения $H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(U, \mathcal{F})$ определяют

[1]) См. также [9], гл. 2, теорема 3.3.1. — *Прим. ред.*

канонические гомоморфизмы (которые являются, очевидно, гомоморфизмами ∂-функторов)

$$H^p(X, \mathcal{F}) \to \varprojlim H^p(U, \mathcal{F}). \qquad (3.10.2)$$

Они, очевидно, биективны при $p=0$.

Предложение 3.10.2. *Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности. Тогда гомоморфизмы* (3.10.2) *(где проективный предел берется по возрастающему направленному множеству открытых, относительно компактных подмножеств U в X) являются эпиморфизмами. Если $p>1$, то для того, чтобы они были изоморфизмами, достаточно, чтобы для каждого открытого, относительно компактного U существовало другое такое $V \supset U$, что для любого открытого, относительно компактного W, содержащего V, образ группы $H^{p-1}(W, \mathcal{F})$ в $H^{p-1}(U, \mathcal{F})$ при гомоморфизме ограничения совпадает с образом группы $H^{p-1}(V, \mathcal{F})$. Наконец, для того чтобы гомоморфизм $H^1(X, \mathcal{F}) \to \varprojlim H^1(U, \mathcal{F})$ был изоморфизмом, достаточно, чтобы все $H^0(U, \mathcal{F})$ можно было снабдить топологией, в которой они были бы полными метризуемыми топологическими группами, причем такими, что гомоморфизмы ограничения непрерывны и что для всякого открытого, относительно компактного U существует другое такое $V \supset U$, что для каждого открытого, относительно компактного W, содержащего V, образ группы $H^0(W, \mathcal{F})$ в $H^0(U, \mathcal{F})$ плотен в образе группы $H^0(V, \mathcal{F})$.*

(Само собой разумеется, что в этой формулировке можно было бы заменить относительно компактные открытые множества на компактные). Это предположение, которое доказывается по методу аппроксимации Миттаг-Леффлера, играет, например, важную роль в доказательстве основных теорем о многообразиях Штейна [5]. При $p=1$ оно остается справедливым и для случая, когда $\mathcal{F}$ есть пучок групп (не обязательно абелевых) в следующей форме: если указанное условие аппроксимации выполнено (для случая $p=1$), то всякий элемент из левой части в (3.10.2), образ которого есть нейтральный элемент, является нейтральным элементом.

ГЛАВА IV

ФУНКТОРЫ EXT ДЛЯ ПУЧКОВ МОДУЛЕЙ

4.1. Функторы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пусть X — топологическое пространство, наделенное пучком $\mathcal{O}$ колец с единицей, и пусть $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ — абелева категория $\mathcal{O}$-модулей (левых) над X (ср. п. 3.1). Для двух $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ группу $\mathcal{O}$-гомоморфизмов первого модуля во второй (эта группа на самом деле является модулем над центром кольца $\Gamma(\mathcal{O})$). Для произвольного подмножества U пространства X положим

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U;\ \mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\,|\,U}(\mathcal{A}\,|\,U, \mathcal{B}\,|\,U)$$

(где через $\mathcal{F}\,|\,U$, как обычно, обозначено ограничение пучка $\mathcal{F}$ на U). Если $V \subset U$, то, очевидно, имеется естественный гомоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U;\ \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V;\ \mathcal{A}, \mathcal{B})$. Легко проверяется, что если ограничиться открытыми подмножествами $U \subset X$, то группы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U;\ \mathcal{A}, \mathcal{B})$ образуют *пучок* над X, который мы обозначим через $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Таким образом, по определению имеем

$$\Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U;\ \mathcal{A}, \mathcal{B}). \qquad (4.1.1)$$

В частности, при $U=X$ получаем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \Gamma(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})). \qquad (4.1.2)$$

Заметим, что $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ можно также рассматривать как пучок модулей над *центром* $\mathcal{O}^{\natural}$ пучка $\mathcal{O}$.

Напомним, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является *точным слева аддитивным функтором* от двух аргументов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории абелевых групп. Следовательно, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ можно рассматривать, как точный слева функтор от двух аргументов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории $\mathbf{C}^X$ абелевых пучков над X (или даже со значениями в категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}^{\natural}}$). Все гомоморфизмы, которые будут появляться в дальнейшем, будут „функторными". В этом пункте будут изложены некоторые вспомогательные свойства рассматриваемых функторов, нужные для изучения их производных функторов.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ и $x \in X$. Для любого открытого множества U, содержащего точку x, естественным образом определяется гомоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$. Переходя к индуктивному пределу по семейству всех открытых окрестностей точки x, получаем естественный гомоморфизм

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)), \qquad (4.1.3)$$

который мы сейчас изучим. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *пучок конечного типа в точке* x, если можно найти такую открытую окрестность U точки x, что пучок $\mathcal{A} \mid U$ изоморфен фактор-пучку пучка $(\mathcal{O} \mid U)^n$ (где n — целое положительное число). Пучок $\mathcal{A}$ называется *псевдокогерентным в точке* x, если можно найти открытую окрестность U точки x и точную последовательность гомоморфизмов $\mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^n \to \mathcal{A} \to 0$ над U (где m и n — целые положительные числа). Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *пучок конечного типа* (соответственно *псевдокогерентный* пучок), если $\mathcal{A}$ является таковым в каждой точке.

Предложение 4.1.1. *Гомоморфизм* (4.1.3) *является мономорфизмом, если $\mathcal{A}$ — пучок конечного типа в точке x, и является изоморфизмом, если $\mathcal{A}$ псевдокогерентен в точке x.*

Предположим, что $\mathcal{A}$ — пучок конечного типа в точке x. Тогда, ограничиваясь в случае необходимости подходящей окрестностью точки x, получим точную последовательность $\mathcal{O}^n \to \mathcal{A} \to 0$, которая дает точную последовательность $0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^n, \mathcal{B})$. Далее, точная последовательность $\mathcal{O}^n(x) \to \mathcal{A}(x) \to 0$ дает точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{O}^n(x), \mathcal{B}(x))$. Отсюда получается гомоморфизм точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) & \to & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^n, \mathcal{B})(x) \\
& \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{O}^n(x), \mathcal{B}(x)).
\end{array}$$

Но в силу естественного изоморфизма

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \mathcal{B}) = \mathcal{B} \qquad (4.1.4)$$

имеем

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^n, \mathcal{B}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \mathcal{B})^n = \mathcal{B}^n.$$

Следовательно, группы в правом столбце диаграммы отождествляются соответственно с $\mathcal{B}(x)^n$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{O}(x), \mathcal{B}(x))^n = \mathcal{B}(x)^n$. Поэтому правый вертикальный гомоморфизм является изоморфизмом, откуда непосредственно следует, что левый гомоморфизм является мономорфизмом. Предположим теперь, что пучок $\mathcal{A}$ псевдокогерентен в точке x, т. е. что имеется точная последовательность $\mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^n \to \mathcal{A} \to 0$ (над подходящей окрестностью точки x). Используя точность функтора Hom слева, получаем также гомоморфизм точных последовательностей

$$\begin{array}{cccccc}
0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) & \to & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^n, \mathcal{B})(x) & \to & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^m, \mathcal{B})(x) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{O}^n(x), \mathcal{B}(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{O}^m(x), \mathcal{B}(x)).
\end{array}$$

Как мы уже отмечали, два правых вертикальных гомоморфизма биективны, откуда непосредственно следует, что и первый вертикальный гомоморфизм является изоморфизмом.

Предположим теперь, что пучок $\mathcal{B}$ является инъективным объектом абелевой категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$. Можно ли тогда утверждать, что $\mathcal{B}(x)$ является инъективным $\mathcal{O}(x)$-модулем? В силу леммы 1 п. 1.10 достаточно проверить, что для любого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца $\mathcal{O}(x)$ любой $\mathcal{O}(x)$-гомоморфизм модуля $\mathfrak{a}$ в $\mathcal{B}(x)$ можно продолжить до $\mathcal{O}(x)$-гомоморфизма модуля $\mathcal{O}(x)$ в $\mathcal{B}(x)$. Так как ограничение инъективного $\mathcal{O}$-модуля на открытое множество также инъективно (предложение 3.1.3), то для этого достаточно найти окрестность U точки x, подпучок идеалов $\mathcal{A}$ пучка $\mathcal{O} \mid U$ и гомоморфизм u пучка $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B} \mid U$ так, чтобы $\mathcal{A}(x) = \mathfrak{a}$ и чтобы гомоморфизм $\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$, индуцированный гомоморфизмом u, совпадал с заданным гомоморфизмом $\mathfrak{a} \to \mathcal{B}(x)$. Впрочем, если пучок $\mathcal{A}$ псевдокогерентен в точке x, то существование гомоморфизма u автоматически следует из предложения 4.1.1. Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что $\mathcal{O}$ — когерентный пучок колец* ([15], гл. 1, § 2). *Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{O}$-модуль („когерентный пучок модулей" в терминологии статьи* [15]) *и пусть* $\mathfrak{n}$ — *подмодуль конечного типа* *в модуле $\mathcal{M}(x)$. Тогда над некоторой открытой окрестностью U точки x существует такой когерентный подпучок $\mathcal{N}$ пучка $\mathcal{M}$, что $\mathcal{N}(x) = \mathfrak{n}$.*

Пусть (n_i) — конечная система образующих модуля $\mathfrak{n}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Так как $n_i \in \mathcal{M}(x)$ при любом i, то $n_i = f_i(x)$, где f_i — сечение пучка $\mathcal{M}$, определенное над некоторой открытой окрестностью точки x. Можно считать, что все f_i определены над одной и той же открытой окрестностью U. Тогда они определяют над U гомоморфизм $\mathcal{O}^k \to \mathcal{M}$. В качестве $\mathcal{N}$ возьмем образ этого гомоморфизма, который когерентен как подпучок конечного типа в когерентном пучке $\mathcal{M}$.

Используя, кроме того, соображения, предшествующие лемме 1, получаем

Предложение 4.1.2. *Предположим, что $\mathcal{O}$ — когерентный пучок нётеровых слева колец*[1]). *Тогда для любого инъективного $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{B}$ и любой точки $x \in X$ модуль $\mathcal{B}(x)$ является инъективным $\mathcal{O}(x)$-модулем.*

Отметим также следующее утверждение:

Предложение 4.1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два $\mathcal{O}$-модуля. Если пучок $\mathcal{B}$ инъективен, то $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является вялым пучком* (ср. п. 3.3).

Действительно, сечение этого пучка над открытым множеством U можно отождествить с гомоморфизмом $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{A}_U$ в $\mathcal{B}$ (где символ $\mathcal{A}_U$ имеет тот же смысл, что и в п 3.5). Так как $\mathcal{B}$ инъективен, то этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма пучка $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, т. е. до сечения пучка $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ над всем X.

4.2. Функторы $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и основная спектральная последовательность.

Следствие из предложения 3.1.1 позволяет рассматривать производные функторы для любого аддитивного ковариантного функтора, определенного на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$. В частности, можно рассмотреть функторы $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, которые определяются, как правые производные функторы от функтора $\mathcal{B} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$, принимающего значения в категории абелевых групп. Во избежание недоразумений

[1]) Кольцо называется *нётеровым слева*, если каждый его левый идеал имеет конечное число образующих. — *Прим. ред.*

мы будем обозначать эти функторы через $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ (указывая как пространство X, так и пучок колец $\mathcal{O}$). Положим для любого подмножества U из X

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}\,|\,U}(U; \mathcal{A}\,|\,U, \mathcal{B}\,|\,U). \tag{4.2.1}$$

Используя предложение 3.1.3 и точность функтора $\mathcal{B} \to \mathcal{B}\,|\,U$, получаем, что функторы $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ являются правыми производными функторами от функтора $\mathcal{B} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ на $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$. Функторные гомоморфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(V; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ определяют гомоморфизмы правых производных функторов

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(V; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (V \subset U). \tag{4.2.2}$$

В силу этих гомоморфизмов система групп $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(U; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ для переменного открытого множества U определяет *абелев предпучок* над пространством X, который мы будем обозначать через $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(—; \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Можно также рассмотреть правые производные функторы от $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ относительно $\mathcal{B}$, которые будем обозначать через $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Используя предложение 3.1.3 и очевидное соотношение

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,|\,U = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}\,|\,U}(\mathcal{A}\,|\,U, \mathcal{B}\,|\,U),$$

получаем изоморфизмы

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,|\,U = \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}\,|\,U}(\mathcal{A}\,|\,U, \mathcal{B}\,|\,U) \tag{4.2.3}$$

поэтому в обозначениях можно не указывать, над каким пространством рассматривается этот пучок). Образно говоря, *функторы $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ имеют локальную природу* (в противоположность функторам $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$, сугубо „глобальным“). В силу леммы 3.7.2 пучок $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ можно также рассматривать как пучок, связанный с определенным выше предпучком $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(—; \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Как показывают рассуждения, приведенные в конце п. 2.3, функторы $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ являются не только *ковариантными когомологическими функторами по от-*

ношению к $\mathcal{B}$, но также и ***контравариантными когомологическими функторами по отношению к*** $\mathcal{A}$, так как для инъективного пучка $\mathcal{B}$ функторы $\mathcal{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ являются точными (второе утверждение вытекает непосредственно из первого в силу предложения 3.1.3).

Наконец, отметим, что $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ являются модулями над центром кольца $\Gamma(\mathcal{O})$, а $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ являются пучками модулей над пучком колец $\mathcal{O}^{\natural}$ — центром пучка $\mathcal{O}$.

Если обозначить через $h_{\mathcal{A}}$ (соответственно $\mathfrak{h}_{\mathcal{A}}$) ковариантный функтор на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории абелевых групп (соответственно в категории $\mathbf{C}^X$), определенный равенством $h_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (соответственно $\mathfrak{h}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), то формулу (4.1.2) можно записать следующим образом:

$$h_{\mathcal{A}} = \Gamma \mathfrak{h}_{\mathcal{A}}. \tag{4.2.4}$$

Таким образом, функтор $h_{\mathcal{A}}$ представлен в виде композиции функторов, к которой в силу предложения 4.1.3 и следствия из предложения 3.3.1 применима теорема 2.4.1. Поэтому получается следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть X — топологическое пространство, наделенное пучком $\mathcal{O}$ колец с единицей. Пусть $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ — категория $\mathcal{O}$-модулей над X и $\mathcal{A} \in \mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ — фиксированный $\mathcal{O}$-модуль. Тогда существует когомологический спектральный функтор, определенный на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$, сходящийся к градуированному функтору $(\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}))$ и имеющий вторым членом*

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})). \tag{4.2.5}$$

В частности, получаем *краевые гомоморфизмы*

$$\begin{aligned} &H^p(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \to \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}), \\ &\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to H^0(X, \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

(последний гомоморфизм можно получить также, рассматривая $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ как пучок, связанный с предпучком

$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(-; \mathcal{A}, \mathcal{B})$) и точную последовательность из пяти членов

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \\ \to H^0(X, \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) &\to H^2(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \to \\ &\to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Эта точная последовательность, в частности, ***выясняет структуру группы*** $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ ***классов расширений*** $\mathcal{O}$***-модуля*** $\mathcal{A}$ (*фактор-модуль*) ***при помощи*** $\mathcal{O}$***-модуля*** $\mathcal{B}$ (*подмодуль*).

Для того чтобы можно было использовать полученную спектральную последовательность, необходимо научиться вычислять пучки $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Поскольку функтор $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(x)$, сопоставляющий абелеву пучку $\mathcal{F}$ группу $\mathcal{F}(x)$ над точкой x, является ***точным*** функтором, то при фиксированном $\mathcal{A}$ и переменных $\mathcal{B}$ и p можно рассматривать $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x)$ как универсальный ковариантный когомологический функтор от $\mathcal{B}$, совпадающий в размерности 0 с $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x)$. Аналогично функторы $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$ образуют когомологический функтор относительно $\mathcal{B}$, совпадающий в размерности 0 с $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$. Поэтому (по определению универсального функтора) в силу функторного гомоморфизма (4.1.3) получаем гомоморфизмы

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \to \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) \tag{4.2.8}$$

(которые характеризуются тем, что определяют гомоморфизм когомологических функторов, совпадающий в размерности 0 с гомоморфизмом (4.1.3)). Для того чтобы при фиксированном $\mathcal{A}$ и произвольных $\mathcal{B}$ и p эти гомоморфизмы были изоморфизмами, необходимо и достаточно, чтобы 1) это свойство имело место при $p = 0$, 2) $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) = 0$ в случае, когда $p > 0$ и $\mathcal{B}$ — инъективный $\mathcal{O}$-модуль. Предложения 4.1.1 и 4.1.2 позволяют проверить эти условия. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2.2. *Предположим, что $\mathcal{O}$ — когерентный пучок нётеровых слева колец и что $\mathcal{A}$ — когерентный*

$\mathcal{O}$-модуль. Тогда гомоморфизмы (4.2.8) *являются изоморфизмами, каковы бы ни были пучок $\mathcal{B}$ и целое число p.*

Отметим также следующий тривиальный случай, в котором гомоморфизмы (4.2.8) являются изоморфизмами, причем обе группы равны нулю.

Предложение 4.2.3. *Предположим, что $\mathcal{A}$ локально изоморфен пучку $\mathcal{O}^n$ (где n — фиксированное целое положительное число). Тогда $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ для всякого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{B}$ и для любого $p > 0$.*

Действительно, в силу локального характера функтора $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ можно считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{O}^n$. Но тогда $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^n$ представляет собой *точный* функтор относительно $\mathcal{B}$, откуда и получаем требуемый результат.

Следствие. *Если пучок $\mathcal{A}$ локально изоморфен пучку $\mathcal{O}^n$, то*

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) = H^p(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$$

для всякого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{B}$.

Этот результат непосредственно следует из спектральной последовательности теоремы 4.2.1. В частности при $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ получаем формулу

$$H^p(X, \mathcal{B}) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{O}, \mathcal{B}), \tag{4.2.9}$$

справедливую без каких-либо ограничений на пучок $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{B}$. Впрочем, эта формула тривиально следует из того, что $H^p(X, \mathcal{B})$ являются производными функторами функтора $\Gamma(\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ (в силу предложения 4.1.3).

В заключение мы укажем „метод вычисления“ спектральной последовательности теоремы 4.2.1, более удобный, чем тот, который получается при непосредственном применении определения.

Предложение 4.2.4. *Пусть $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_i)$ — левая резольвента пучка $\mathcal{A}$, составленная из $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{L}_i$, локально изоморфных $\mathcal{O}^{n_i}$. Рассмотрим функтор $\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}$ на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории положительных комплексов над $\mathbf{C}^X$, определенный следующим образом: $\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})$. Положим также $\mathfrak{h}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Тогда $\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}$ является резольвентным функтором (ср. п. 2.5) для функтора $\mathfrak{h}_{\mathcal{A}}$.

Действительно, $\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}$ есть точный функтор (предложение 4.2.3). Кроме того, $H^0(\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}(\mathcal{B})) = \mathfrak{h}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, так как функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ точен слева. Наконец, если пучок $\mathcal{B}$ инъективен, то $\mathfrak{h}_{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ является ациклическим в положительных размерностях комплексом, так как в этом случае функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ точен.

Следствие 1. *В условиях предыдущего предложения имеем*

$$\mathcal{E}xt^n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})), \tag{4.2.10}$$

откуда

$$\mathcal{E}xt^n(\mathcal{A}, \mathcal{B})(x) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)). \tag{4.2.10 bis}$$

Для доказательства достаточно использовать предложение 2.5.1.

Применяя теперь предложение 2.5.4, получаем

Следствие 2. *В условиях предыдущего предложения спектральный функтор теоремы 4.2.1 изоморфен спектральному функтору $\mathrm{II}\Gamma(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B}))$. В частности, имеем*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathfrak{R}^n\Gamma\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})$$

(где правая часть является n-мерной группой гипергомологий функтора Γ по отношению к комплексу $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})$, ср. п. 2.4).

Так как мы располагаем также резольвентным функтором для функтора Γ, например функтором $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{F})$ (где $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ — *каноническая резольвента* пучка $\mathcal{F}$, ср. п. 2.3), то для спектральной последовательности $\mathrm{II}\Gamma(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B}))$ можно найти явное выражение. Это первая спектральная последовательность бикомплекса $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B}))$ (где в качестве первой степени берется та степень, которая отвечает комплексу $\mathcal{C}$). Имеет место функторный изоморфизм

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\mathcal{B})). \tag{4.2.11}$$

Действительно, для любого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{M}$ имеется гомоморфизм (функторный)

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{B})) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}(\mathcal{B})) \tag{4.2.12}$$

(где в правой части пучок $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ рассматривается очевидным образом как $\mathcal{O}$-модуль). Он определяется при помощи индукции по размерности компонент комплекса $\mathcal{C}$, начиная с естественного гомоморфизма $\mathcal{C}^0(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{B})) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^0(\mathcal{B}))$, который получается из естественного гомоморфизма $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{B})(x) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}(x)}(\mathcal{M}(x), \mathcal{B}(x))$. Последний гомоморфизм является изоморфизмом, если пучок $\mathcal{M}$ псевдокогерентен (предложение 4.1.1). Отсюда следует, что в этом случае (4.2.12) является изоморфизмом, что и устанавливает, в частности, формулу 4.2.11. Следовательно, $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\mathcal{B}))$, откуда вытекает

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{L}$ — такая же резольвента, как в предложении* 4.2.4. *Тогда спектральный функтор теоремы* 4.2.1 *задается первой спектральной последовательностью* $\mathrm{I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\mathcal{B}))$ *бикомплекса* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\mathcal{B}))$, *где* $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ — *каноническая резольвента (ср. п.* 2.3) *абелева пучка* $\mathcal{B}$ *(градуировка этой резольвенты взята в качестве первой степени бикомплекса). В частности, имеем*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{C}(\mathcal{B})).$$

Замечания. 1) Можно также определить функторы $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}, \Phi}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ как правые производные функторы функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}, \Phi}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ по отношению к $\mathcal{B}$ (где Φ — антифильтр замкнутых подмножеств пространства X). Изложенная выше теория справедлива и в этом случае. Пользоваться этим нам, однако, не придется.

2) Условие конечности, наложенное на пучок $\mathcal{A}$ в теореме 4.2.2, является существенным. Если, например, $\mathcal{A} = \mathcal{O}^{(I)}$, где I бесконечно, то правая часть в формуле (4.2.8) равна нулю при всех x и любом $p > 0$. В то же время равенство $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, вообще говоря, *неверно*, так как функтор $\mathcal{B} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{(I)}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}^{(I)}$, вообще говоря, не является точным.

4.3. Случай постоянного пучка колец

Предположим, что $\mathcal{O}$ является постоянным пучком колец, определенным кольцом с единицей O. Пусть M — некоторый O-модуль и пусть $\mathcal{M}$ — постоянный $\mathcal{O}$-модуль, определенный модулем M. Тогда для каждого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{A}$ имеется естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_O(M, \Gamma(\mathcal{A})). \tag{4.3.1}$$

Это функторный изоморфизм, который можно также записать следующим образом:

$$h_{\mathcal{M}} = h_M \Gamma, \tag{4.3.2}$$

где, как и в предыдущем пункте, $h_{\mathcal{M}}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $h_M(N) = \mathrm{Hom}_O(M, N)$ для любого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{A}$ и любого O-модуля N. Функтор Γ рассматривается как функтор на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории $\mathbf{C}^O$ левых O-модулей, а h_M — как функтор на категории $\mathbf{C}^O$ со значениями в категории абелевых групп. Можно применить теорему 3.4.1, благодаря следующему утверждению.

Лемма. *Если пучок $\mathcal{A}$ является инъективным $\mathcal{O}$-модулем, то модуль $\Gamma(\mathcal{A})$ является инъективным O-модулем.*

Нужно показать, что функтор $M \to \mathrm{Hom}_O(M, \Gamma(\mathcal{A}))$ точен, что немедленно следует из формулы (4.3.1), так как функтор $M \to \mathcal{M}$ точен.

Используя теорему 3.4.1 и замечая, что производные функтора Γ не зависят от того, рассматривать ли Γ как функтор со значениями в категории $\mathbf{C}^O$ или в категории $\mathbf{C}$ абелевых групп, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.3.1. *Пусть X — пространство, O — кольцо с единицей, M — некоторый O-модуль, $\mathcal{O}$ и $\mathcal{M}$ — постоянные пучки над X, определенные кольцом O и модулем M. Тогда существует когомологический спектральный функтор на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$, сходящийся к градуированному функтору $(\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{M}, \mathcal{A}))$ и имеющий начальным членом*

$$\mathrm{II}^{p,q}_2(\mathcal{A}) = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(M, H^p(X, \mathcal{A})). \tag{4.3.3}$$

Как обычно, отсюда получаются краевые гомоморфизмы и точная последовательность из 5 членов, написать которые мы предоставляем читателю. Для вычисления этого спектрального функтора мы применим следствие 1 из предложения 2.5.3, используя резольвентный функтор $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})$ функтора Γ (который здесь рассматривается как ковариантный функтор на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}}$ со значениями в категории $\mathbf{C}^O$), где $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ — каноническая резольвента пучка $\mathcal{A}$ (ср. п. 2.3), и резольвентный функтор h_L функтора h_M, где L — левая резольвента модуля M, состоящая из свободных O-модулей. Отсюда вытекает первая часть следующего утверждения.

Предложение 4.3.2. *Предполагая выполненными условия теоремы* 4.3.1, *выберем левую резольвенту L модуля M, состоящую из свободных O-модулей. Тогда спектральную последовательность теоремы* 4.3.1 *можно вычислить, взяв вторую спектральную последовательность бикомплекса* $\mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, *где* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ — *каноническая резольвента пучка* $\mathcal{A}$ (*ср. п.* 2.3). *Если предположить, что L_i изоморфны модулям O^{n_i} (n_i — целые положительные числа), то первая спектральная последовательность этого бикомплекса совпадает со спектральным функтором теоремы* 4.2.1.

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть резольвенту $\mathcal{L}$ пучка $\mathcal{M}$, полученную из L, и применить к ней следствие 3 из предложения 4.2.4. Предыдущее предложение сводит вычисление функтора $\mathrm{Ext}_6(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ и его спектральных последовательностей к классической задаче типа Кюннета. Отсюда получаем

Следствие 1. *Предположим, что $\mathcal{A}$ аннулируется двусторонним идеалом I кольца O, таким, что O/I является полупростым кольцом*[1]) *K. Тогда обе спектральные последовательности бикомплекса* $\mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ *тривиальны и их начальные члены каноническим образом отождествляются с гомологиями* $\mathrm{Ext}_6(X; \mathcal{M}, \mathcal{A})$ *этого бикомплекса; точнее, имеют место канонические изоморфизмы*

$$\mathrm{Ext}_6^n(X; \mathcal{M}, \mathcal{A}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_K\left(\mathrm{Tor}_p^O(K, M), H^q(X, \mathcal{A})\right). \quad (4.3.4)$$

Действительно, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ и, следовательно, $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})$ будут также аннулироваться идеалом I, откуда вытекает, что

$$\mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})) = \mathrm{Hom}_K(K \otimes_O L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})). \quad (4.3.5)$$

Так как K — полупростое кольцо, то можно применить наиболее простой случай теоремы Кюннета (благодаря тому, что бифунктор Hom_K точен). Мы получаем тривиальность спектральных последовательностей и, кроме того, формулу

[1]) Кольцо называется *полупростым*, если оно разлагается в прямую сумму простых левых идеалов. — *Прим. ред.*

$$H(\mathrm{Hom}_K(K \otimes_O L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A}))) = \mathrm{Hom}_K(H(K \otimes_O L), H(\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A}))),$$

что является не чем иным, как формулой (4.3.4).

Предположим по-прежнему, что $\mathcal{A}$ аннулируется двусторонним идеалом I, но не будем ничего предполагать относительно кольца $K = O/I$. Тогда имеем (4.3.5), что приводит к рассмотрению спектральных последовательностей гипергомологий бифунктора Hom_K относительно комплексов $K \otimes_O L$ и $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})$. В первой спектральной последовательности начальный член $H^p\left(\mathrm{Ext}_K^q(K \otimes_O L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A}))\right)$ равен нулю для $q > 0$, так как модуль $K \otimes_O L$ является K-свободным. Следовательно, предельный член канонически отождествляется с группой $H(\mathrm{Hom}_K(K \otimes_O L, \Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})))$, вычислением которой мы занимаемся. Во второй спектральной последовательности начальный член равен $\bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Ext}_K^p\left(H^{q'}(K \otimes_O L), H^{q''}\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})\right)$.

Поэтому получаем

Следствие 2. *Предположим, что 6-модуль $\mathcal{A}$ аннулируется двусторонним идеалом I; положим $K = O/I$. Тогда* $\left(\mathrm{Ext}_6^n(X; \mathcal{M}, \mathcal{A})\right)$ *является также предельным членом некоторого третьего спектрального функтора, начальный член которого равен*

$$\mathrm{III}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Ext}_K^p\left(\mathrm{Tor}_{q'}^O(K, M), H^{q''}(X, \mathcal{A})\right). \quad (4.3.6)$$

В частности, если K является наследственным слева кольцом[1]) ([6], *гл.* 1, § 5) (*например, кольцом главных идеалов*), *то имеем каноническую точную последовательность*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}_K^1\left(\mathrm{Tor}_p^O(K, M), H^q(X, \mathcal{A})\right) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}_6^n(X; \mathcal{M}, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_K\left(\mathrm{Tor}_p^O(K, M), H^q(X, \mathcal{A})\right) \to 0.$$

Замечания. 1. Предположим, что модули L_i изоморфны O^{n_i}. Тогда (предложение 4.3.2) первая спектральная последовательность гипергомологий функтора $\mathrm{Hom}_O(M, —)$ для комплекса $\Gamma\mathcal{C}(\mathcal{A})$ совпадает со спектральной последова-

[1]) Кольцо K называется *наследственным слева*, если всякий его левый идеал является проективным K-модулем. — *Прим. ред.*

тельностью теоремы 4.2.1, начальный член которой имеет замечательную интерпретацию (4.2.5). Однако обратим внимание на то, что этот факт был получен из следствия 3 к предложению 4.2.4 и его вывод существенно опирался на формулу (4.2.11), т. е. *на то, что „канонический резольвентный" функтор $\mathcal{C}$ перестановочен с функтором* $\mathrm{Hom}_{6}(\mathcal{L}, -)$, если L является O-модулем, изоморфным некоторому O^n (заметим, что при этом мы находимся в условиях следствия из предложения 2.5.2). Между тем это утверждение остается справедливым (по другим причинам), если заменить $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ „резольвентой Картана" $\mathcal{A}\otimes_Z\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ —„фундаментальный пучок" над пространством X, которое предполагается паракомпактным.

2. Пусть $x\in X$. Мы уже видели в п. 4.2, что тогда $\mathcal{E}xt_6^p(\mathcal{M}, \mathcal{A})(x)=\varinjlim \mathrm{Ext}_6^p(U; \mathcal{M}, \mathcal{A})$, где индуктивный предел берется по направленному семейству открытых окрестностей U точки x. Для каждого U можно написать спектральные последовательности II и III. Переходя к пределу, легко получаем отсюда, что $(\mathcal{E}xt_6^p(\mathcal{M}, \mathcal{A})(x))$ является *пределом двух спектральных последовательностей*, начальные члены которых имеют вид

$$\mathrm{II}_2^{p,q}=\varinjlim \mathrm{Ext}_O^p(M, H^q(U, \mathcal{A})),$$

$$\mathrm{III}_2^{p,q}=\bigoplus_{q'+q''=q}\varinjlim \mathrm{Ext}_K^p\left(\mathrm{Tor}_{q'}^K(K, M), H^{q''}(U, \mathcal{A})\right).$$

(Во второй из этих спектральных последовательностей предполагается, что $\mathcal{A}$ аннулируется двусторонним идеалом I и что $K=O/I$). Отсюда следует, что всякий раз, когда в одной из этих спектральных последовательностей знак $\varinjlim$ можно поставить непосредственно перед $H(U, \mathcal{A})$ в каждой компоненте начального члена, имеет место формула $\mathcal{E}xt_6^p(\mathcal{M}, \mathcal{A})(x)=\mathrm{Ext}_O^p(M, \mathcal{A}(x))$ (a priori справедливость этой формулы обеспечена только в том случае, когда M допускает проективную резольвенту, состоящую из модулей O^{n_i} конечного типа). Вот два типичных примера, когда это можно сделать: а) $\mathcal{A}$ является *постоянным* пучком, определенным некоторым O-модулем N, X является HLC-пространством [1]) (рассматривается первая спектральная последовательность); b) пучок $\mathcal{A}$ аннулируется таким идеалом I, что кольцо $O/I=K$ нётерово, и модули $\mathrm{Tor}_q^O(K, M)$ имеют конечный тип над кольцом K. Предположим теперь, что $\mathcal{A}$ — постоянный пучок, определенный некоторым O-модулем N, который аннулируется идеалом I; допустим для простоты, что $K=O/I$ является полем. Тогда $\mathcal{E}xt_6^n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ является пучком, связанным с предпучком, определенным группами $\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Hom}_K\left(\mathrm{Tor}_p^O(K, M), H^q(U, N)\right)$. Легко построить примеры (в которых $M=N=K$, $p=1$, O является алгеброй $K(G)$ некоторой группы G, а I — пополняющим идеалом), где этот пучок отличен от постоянного пучка, связанного с $\mathrm{Ext}_O^p(M, N)\left(=H^p(G, K)\right)$. Следовательно, в этом случае утверждение теоремы 4.2.2 неверно.

4.4. Случай пучка с группой операторов.

Пусть G — группа, k — коммутативное кольцо с единицей. Положим $O=k(G)$ (алгебра группы G с коэффициентами из k). Тогда O является алгеброй с дополнением. Пополняющий идеал мы будем обозначать через I, так что k отождествляется с O-модулем O/I [2]). Пучок 6-модулей $\mathcal{A}$ — это не что иное, как пучок k-модулей, допускающий G в качестве группы операторов. Если $\mathcal{A}$ аннулируется идеалом I, то это значит, что G тривиально действует на $\mathcal{A}$. Мы повторим сейчас вкратце обозначения и существенные результаты предыдущих пунктов для этого случая (это важно для следующей главы). Фиксируя раз и навсегда кольцо k (обычно k будет либо кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, либо полем),

[1]) Топологическое пространство X называется HLC-*пространством* (или гомологически локально связным пространством), если для всякого открытого множества $U\subset X$ найдется такое открытое $V\subset U$, что естественные гомоморфизмы групп гомологий $H_q(\overline{V}, \mathbf{Z})\to H_q(\overline{U}, \mathbf{Z})$ тривиальны для всех $q>0$. — *Прим. ред.*

[2]) Напомним, что алгебра $k(G)$ определяется как свободный k-модуль, порожденный элементами из G, умножение в котором задается формулой $(kg)\cdot(k'g')=(kk')\cdot(gg')$ $(k, k'\in K,\ g, g'\in G)$. Пополняющий гомоморфизм ε: $k(G)\to k$ определяется формулой $\varepsilon\left(\sum_i k_i g_i\right)=\sum_i k_i$ $(k_i\in k,\ g_i\in G)$. Следовательно, его ядро I есть k-модуль, порожденный элементами $g-e$ $(g\in G,\ e$ — единица группы $G)$ (см. [6], гл. X, § 4). — *Прим. ред.*

мы будем называть $\mathscr{G}$-модули G-модулями или G-пучками. Если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — два G-пучка, то мы пишем $\mathrm{Hom}_G(\mathscr{B}, \mathscr{A})$, $\mathscr{H}om_G(\mathscr{B}, \mathscr{A})$, $\mathrm{Ext}^p_G(X, \mathscr{B}, \mathscr{A})$ и $\mathscr{E}xt^p_G(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ (указывая в качестве индекса группу G вместо пучка $\mathscr{G}$). В случае, когда $\mathscr{B} = k$ (единственно важный случай для дальнейшего), указанные объекты будут обозначаться также через $\Gamma^G(\mathscr{A})$, $\mathscr{A}^G$, $H^p(X; G, \mathscr{A})$ и $\mathscr{H}^p(G, \mathscr{A})$. Таким образом, Γ^G есть функтор h_k в предыдущих обозначениях. Мы имеем $\Gamma^G(\mathscr{A}) = \Gamma(\mathscr{A})^G$ (группа элементов из $\Gamma(\mathscr{A})$, инвариантных относительно G) $= \Gamma(\mathscr{A}^G)$, где через $\mathscr{A}^G$ обозначен подпучок пучка $\mathscr{A}$, образованный ростками сечений, инвариантных относительно G. (Если группа G допускает *конечную* систему образующих, то $\mathscr{A}^G$ совпадает с множеством элементов пучка $\mathscr{A}$, инвариантных относительно G.) Пучки $\mathscr{H}^p(G, \mathscr{A})$ $(-\infty < p < +\infty)$ являются функторами от пучка $\mathscr{A}$ и образуют когомологический функтор, являющийся производным от функтора $\Gamma^G(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^G$. Имеем канонические гомоморфизмы

$$\mathscr{H}^p(G, \mathscr{A})(x) \to H^p(G, \mathscr{A}(x))\ ^{1)},$$

которые биективны во всех случаях, которые мы будем рассматривать, и, во всяком случае, тогда, когда группа G конечна (в силу теоремы 4.2.2 или следствия 1 из предложения 4.2.4, на выбор!). Эти функторы имеют локальный характер, т. е. перестановочны с операторами ограничения на открытые множества. Модули $H^p(X; G, \mathscr{A})$ образуют когомологический функтор, производный от функтора $\Gamma^G(\mathscr{A})$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. *Существуют два когомологических спектральных функтора на категории G-пучков, у которых предельный член равен градуированному функтору $(H^n(X; G\ \mathscr{A}))$, а начальные члены имеют вид*

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2^{p,q}(\mathscr{A}) &= H^p(X, \mathscr{H}^q(G, \mathscr{A})), \\ \mathrm{II}_2^{p,q}(\mathscr{A}) &= H^p(G, H^q(X, \mathscr{A})). \end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

[1]) Здесь и в дальнейшем через $H^p(G, A)$ (соответственно $H_p(G, A)$), где G — группа, A — некоторый G-модуль, обозначается p-мерная группа когомологий (соответственно гомологий) группы G с коэффициентами в A (см. [6], гл. X). Употребляются также обозначения $H^*(G, A) = \bigoplus_p H^p(G, A)$, $H_*(G, A) = \bigoplus_p H_p(G, A)$. — *Прим. ред.*

Они совпадают также с двумя спектральными последовательностями для „комплекса с операторами" $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, где $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ — каноническая резольвента пучка $\mathscr{A}$, и с двумя спектральными последовательностями гиперкогомологий пространства X по отношению к комплексу $\mathscr{C}(G, \mathscr{A})$ — комплексу „коцепей группы G с коэффициентами в пучке $\mathscr{A}$". Эти спектральные последовательности тривиальны, если группа G тривиально действует на $\mathscr{A}$ и если, кроме того, $\mathscr{A}$ является пучком векторных пространств над полем k. В этом случае имеет место канонический изоморфизм

$$H^n(X; G, \mathscr{A}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_k(H_p(G, k), H^q(X, \mathscr{A})). \qquad (4.4.2)$$

Если предполагать только, что группа G тривиально действует на $\mathscr{A}$, то следствие 2 *из предложения* 4.3.2 *приводит к канонической точной последовательности*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(H_p(G, \mathbf{Z}), H^q(X, \mathscr{A})) \to$$
$$\to H^n(X; G, \mathscr{A}) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_p(G, \mathbf{Z}), H^q(X, \mathscr{A})) \to 0. \qquad (4.4.3)$$

Замечания. 1. В последней формуле подразумевается, что $k = \mathbf{Z}$. Однако это не имеет значения, так как если k — произвольное кольцо и $\mathscr{A}$ — пучок k-модулей, на котором действует группа G, то пучок $\mathscr{H}^p(G, \mathscr{A})$ и модуль $H^p(X; G, \mathscr{A})$ не зависят от того, рассматривается ли $\mathscr{A}$ как пучок $k(G)$-модулей или как пучок $\mathbf{Z}(G)$-модулей. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $\mathscr{A}$ является инъективным пучком $k(G)$-модулей, то $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(X; \mathbf{Z}, \mathscr{A}) = 0$ и $\mathscr{E}xt^n_{\mathbf{Z}(G)}(\mathbf{Z}, \mathscr{A}) = 0$ (постоянные пучки, определяемые кольцами $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}(G)$, мы обозначаем теми же символами) при $n > 0$. Что касается первого равенства, то оно следует из спектральной последовательности II, которая показывает, что модуль $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(X; \mathbf{Z}, \mathscr{A})$ изоморфен модулю $H^n(G, \Gamma(\mathscr{A}))$. Последний равен нулю, так как $\Gamma(\mathscr{A})$ является инъективным k-модулем (в этом случае нужный нам результат хорошо известен). Так как $\mathscr{E}xt^n_{\mathbf{Z}(G)}(\mathbf{Z}, \mathscr{A})$ — это пучок, связанный с предпучком $U \to \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(U; \mathbf{Z}, \mathscr{A})$, который, как замечено выше, равен нулю (поскольку пучок $\mathcal{A}|U$ также инъективен), то наше утверждение доказано.

2. Предположим, что $\mathcal{A}$ является *постоянным* пучком, определенным G-модулем M. Тогда мы будем писать $H^p(X; G, M)$ и $\mathcal{H}^p(G, M)$ вместо $H^p(X; G, \mathcal{A})$ и $\mathcal{H}^p(G, \mathcal{A})$. Если группа G действует тривиально на модуле M, то $H^p(X; G, M)$ полностью вычисляется по формуле 4.4.3 или по формуле 4.4.2 (в случае, когда M является векторным пространством над полем k). В этом последнем случае и в предположении, что X является HLC-пространством, получаем следующий результат: пространство $H^*(X; G, M)$ совпадает с пространством всех билинейных отображений пространства $H_*(G, k) \times H_*(X, k)$ в M. Обратим внимание на то, что, вообще говоря, пучок $\mathcal{H}^p(G, M)$ не является постоянным пучком, определенным модулем $H^p(G, M)$ (ср. с замечанием 2 из п. 4.3).

ГЛАВА V

КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ С ОПЕРАТОРАМИ

5.1. Общие сведения о G-пучках.

В этой главе предметом нашего изучения является топологическое пространство X, на котором действует группа G (для определенности слева). Преобразование, определенное элементом $g \in G$, будет обозначаться через $x \to g \cdot x$. Мы не предполагаем, что G действует эффективно, и, в частности, будем рассматривать случай, когда G действует тривиально. Обозначим через $X(G)$ пространство X вместе с дополнительной структурой, определенной действием группы G. Пространство траекторий X/G, снабженное фактор-топологией, обозначим через Y, а каноническое отображение пространства X на Y — через f. Заметим, что f является открытым и непрерывным отображением. Можно считать, что на Y также действует группа G, причем это действие тривиально. Обозначение $Y(G)$ будет относиться к этой последней структуре на Y.

G-пучком над $X = X(G)$ мы будем называть пучок (множеств) $\mathcal{A}$ над X, на котором G действует совместимым образом с ее действием на X. Чтобы придать смысл этому определению, можно, например, рассматривать $\mathcal{A}$ как накрывающее пространство над X (см. п. 3.1). Аналогичным образом определяются *G-пучки групп* или *колец*, *абелевы* G-пучки (т. е. G-пучки абелевых групп) и т. д. Образно можно сказать, что если на X задана некоторая структура и если пучок $\mathcal{A}$ на X определяется в терминах этой структуры, то $\mathcal{A}$ является естественным образом G-пучком, если преобразования пространства X, определенные группой G, являются автоморфизмами. Например, постоянный пучок можно всегда рассматривать как G-пучок („*тривиальный G-пучок*“). То же относится к пучку ростков произвольных (или непрерывных) отображений пространства X в заданное

множество, к пучку ростков голоморфных функций, если X — комплексное многообразие и если преобразования из G являются автоморфизмами многообразия X, и т. д. Назовем *G-гомоморфизмом* одного пучка в другой гомоморфизм пучков, который перестановочен с преобразованиями из G. Если рассматриваемые пучки являются, например, пучками групп, то подразумевается, что гомоморфизм сохраняет эту структуру. При таком определении гомоморфизмов G-пучки множеств (соответственно G-пучки групп и т. д.) образуют *категорию* (см. п. 1.1), свойства которой аналогичны свойствам соответствующей категории без группы операторов G (впрочем, последняя категория является частным случаем первой, отвечающим тривиальной группе G).

В частности, абелевы G-пучки образуют аддитивную категорию, некоторые свойства которой мы сейчас укажем. Более общим образом, пусть $\mathcal{O}$ — G-пучок колец с единицей. Рассмотрим пучки $\mathcal{A}$ над X, которые являются одновременно и абелевыми G-пучками, и $\mathcal{O}$-модулями, причем действие пучка $\mathcal{O}$ на $\mathcal{A}$ совместимо с преобразованиями из G (т. е. естественный гомоморфизм пучков множеств $\mathcal{O}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ является G-гомоморфизмом). Такие пучки мы будем называть *G-$\mathcal{O}$-модулями*. Назовем *G-$\mathcal{O}$-гомоморфизмом* такой гомоморфизм пучков, который одновременно является и G-гомоморфизмом, и $\mathcal{O}$-гомоморфизмом. Очевидно, что сумма и композиция двух G-$\mathcal{O}$-гомоморфизмов являются G-$\mathcal{O}$-гомоморфизмами. Таким образом, G-$\mathcal{O}$-модули образуют *аддитивную категорию*, которую мы обозначим через $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$. Если $\mathcal{O}$ — постоянный пучок, слой которого есть кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ (с тривиальными преобразованиями из G), то мы вновь получаем категорию абелевых G-пучков, которая обозначается через $\mathbf{C}^{X(G)}$. Если G тривиально действует на X, то категория $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ представляет собой категорию $\mathcal{O}'$-модулей, где $\mathcal{O}'$ — некоторый соответствующим образом выбранный пучок колец. Так, например, если G действует тривиальным образом и на $\mathcal{O}$, то $\mathcal{O}'=\mathcal{O}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}(G)$ (где $\mathbf{Z}(G)$ — групповая алгебра группы G над кольцом $\mathbf{Z}$, точнее, постоянный пучок, который она определяет). С небольшими изменениями остаются справедливыми результаты п. 3.1.

Предложение 5.1.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — произвольный G-пучок колец над X. Тогда аддитивная категория $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ G-$\mathcal{O}$-модулей является абелевой категорией, удовлетворяющей аксиомам* AB 5) *и* AB 3 *) *из п.* 1.5, *и допускает образующую*[1]).

Проверка этих свойств тривиальна, за исключением доказательства существования образующей, для которой мы дадим сейчас конструкцию, обобщающую конструкцию из п. 3.1. Для всякого открытого множества U из X обозначим через $\mathcal{L}(U)$ $\mathcal{O}$-модуль, равный прямой сумме $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{O}_{g\cdot U}$ для всех $g\in G$. Пучок $\mathcal{L}(U)$, очевидно, можно рассматривать как G-пучок, причем $\mathcal{L}(U)$ оказывается даже G-$\mathcal{O}$-модулем. Если $\mathcal{A}$ — произвольный G-$\mathcal{O}$-модуль, то G-$\mathcal{O}$-гомоморфизм пучка $\mathcal{L}(U)$ в $\mathcal{A}$ однозначно определяется его ограничением на подпучок $\mathcal{O}_U$, которое является $\mathcal{O}$-гомоморфизмом пучка $\mathcal{O}_U$ в $\mathcal{A}$, причем последний может быть выбран произвольно. Задание такого гомоморфизма равносильно заданию некоторого сечения пучка $\mathcal{A}$ над U. Если $\mathcal{B}$ — G-$\mathcal{O}$-подмодуль пучка $\mathcal{A}$, отличный от $\mathcal{A}$, то над подходящим открытым множеством U найдется сечение пучка $\mathcal{A}$ над U, которое не будет сечением пучка $\mathcal{B}$. Следовательно, семейство пучков $\mathcal{L}(U)$ является семейством образующих категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$, а их прямая сумма (когда U пробегает все открытые множества из X) является образующей.

Из предложения 4.1 вытекает, в частности, что всякий G-$\mathcal{O}$-пучок изоморфен подпучку некоторого инъективного G-$\mathcal{O}$-модуля. В дальнейшем нам понадобится удобный способ для явного построения „достаточного количества" инъективных объектов. Его можно получить, обобщая конструкцию, изложенную в п. 3.1. Пусть $(A_x)_{x\in X}$ — семейство $\mathcal{O}(x)$-модулей A_x. Рассмотрим произведение $\mathcal{O}$-модулей, которое

---

[1]) Это предложение, а также некоторые последующие результаты можно сформулировать и при более общих условиях. А именно: пусть заданы категория $\mathbf{C}$, группа G и „представление группы G функторами в $\mathbf{C}$", т. е. для каждого $g\in G$ задан функтор F_g: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, причем F_e — тождественный функтор и $F_g\cdot F_{g'}=F_{gg'}$ (с точностью до некоторых функторных изоморфизмов, удовлетворяющих определенным условиям согласованности, в которые мы не будем вдаваться). Тогда можно построить категорию $\mathbf{C}^G$ „объектов из $\mathbf{C}$ с группой операторов G" таким же образом, каким строится категория $\mathbf{C}^{X(G)}$ [$X(G)$ — пространство с группой операторов] по категории $\mathbf{C}^X$ (частный случай см. в примере 1.7f)). Заметим, что многие свойства категории $\mathbf{C}$ сохраняются при переходе к $\mathbf{C}^G$.

они определяют (см. п. 3.1). Для того чтобы задать на этом произведении структуру G-$\mathcal{O}$-модуля, достаточно для любых $x \in X$ и $g \in G$ определить такой гомоморфизм $a \to g \cdot a$ абелевой группы A_x в абелеву группу $A_{g \cdot x}$, что $g \cdot (ua) = (g \cdot u)(g \cdot a)$ $(u \in \mathcal{O}(x),\ a \in A_x)$ и что $e \cdot a = a$, $g \cdot (g' \cdot a) = (gg') \cdot a$ $(g, g' \in G,\ a \in A_x)$. Введем вспомогательное кольцо U_x, порожденное алгеброй $\mathbf{Z}(G_x)$ группы G_x [1]) и кольцом $\mathcal{O}(x)$, которые связаны соотношением перестановочности $gug^{-1} = u^g$ для $u \in \mathcal{O}(x)$, $g \in G_x$ (где через u^g, во избежание недоразумений, обозначен образ элемента u при преобразовании $g \in G_x$). Группы A_x являются, очевидно, U_x-модулями, причем любой $g \in G$ определяет изоморфизм $a \to g \cdot a$ группы A_x на $A_{g \cdot x}$, удовлетворяющий условиям $g \cdot (ua) = (g \cdot u)(g \cdot a)$ $(u \in U_x,\ a \in A_x)$. Отсюда легко выводится, что если произвольным образом выбрать элемент $\xi(y)$ на траектории $y \in Y$ и положить $U_y = U_{\xi(y)}$, то указанная выше конструкция однозначно определяется заданием семейства $(A_y)_{y \in Y}$ U_y-модулей $A_y = A_{\xi(y)}$.

Модули A_x $(x \in y)$ можно определить по модулям A_y следующим образом. Пусть $\bar{A}_y$ — G-модуль, *индуцированный* G_y-модулем [2]) A_y, т. е. G-модуль $\mathrm{Hom}_{G_y}(\mathbf{Z}(G), A_y)$, полученный из G_y-модуля A_y „контравариантным расширением скаляров“. Тогда A_y отождествляется с фактор-группой группы $\bar{A}_y$ по абелевой подгруппе, инвариантной относительно G_y, и $\bar{A}_y$ отождествляется с произведением модулей $g \cdot A_y$ $(g \in G/G_y)$. Введем также G-модуль $\bar{O}_y$, индуцированный модулем $O_y = \mathcal{O}(\xi(y))$. Тогда немедленно получаем, что $\bar{A}_y$ есть $\bar{O}_y$-модуль, отождествляющийся с произведением $g \cdot O_y$-модулей $g \cdot A_y$ $(g \in G/G_y)$. Имеют место канонические гомоморфизмы $g \cdot O_y = \mathcal{O}(g \cdot \xi(y))$ и $g \cdot A_y = A_{g \cdot \xi(y)}$. Обозначим через $\mathscr{P}(A)$ G-$\mathcal{O}$-модуль над X, определенный семейством $A = (A_y)$ U_y-модулей A_y. Пусть $\mathscr{B}$ — некоторый G-$\mathcal{O}$-модуль. Всякий $\mathcal{O}$-гомоморфизм G-$\mathcal{O}$-модуля $\mathscr{B}$ в $\mathscr{P}(A)$ отождествляется с семейством $(v_x)_{x \in X}$, состоящим из $\mathcal{O}(x)$-гомоморфизмов $\mathscr{B}(x) \to A_x$ (как мы уже отмечали в п. 3.1).

[1]) Через G_x обозначается стабилизатор точки x, т. е. подгруппа тех элементов группы G, которые оставляют на месте точку x. — *Прим. ред.*

[2]) Через G_y автор обозначает группу $G_{\xi(y)}$. — *Прим. ред.*

Этот $\mathcal{O}$-гомоморфизм совместим с G тогда и только тогда, когда v_x „перестановочны“ с G. Таким образом, задание G-$\mathcal{O}$-гомоморфизма пучка $\mathscr{B}$ в $\mathscr{P}(A)$ равносильно заданию семейства $(v_y)_{y \in Y}$, состоящего из U_y-гомоморфизмов $\mathscr{B}(\xi(y)) \to A_y$. Отсюда сразу же выводится

Предложение 5.1.2. *Пусть $(A_y)_{y \in Y}$ — семейство инъективных U_y-модулей. Тогда G-$\mathcal{O}$-модуль $\mathscr{P}((A_y))$, который оно определяет, инъективен. Более того, всякий G-$\mathcal{O}$-модуль изоморфен подпучку некоторого пучка указанного вида.*

Для доказательства последнего утверждения (наиболее важного для нас) достаточно для любого y вложить точечный модуль $\mathscr{B}(\xi(y))$ данного пучка $\mathscr{B}$ в некоторый инъективный U_y-модуль.

Прямой образ G-пучка. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок множеств над X. Напомним, что по определению прямой образ $f_*(\mathcal{A})$ пучка $\mathcal{A}$ есть пучок над Y, сечениями которого над открытым множеством $U \subset Y$ являются сечения пучка $\mathcal{A}$ над $f^{-1}(U)$. Если $\mathcal{A}$ — G-пучок, то группа G действует на $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{A})$, откуда легко следует, что *прямой образ $f_*(\mathcal{A})$ G-пучка $\mathcal{A}$ над X является G-пучком над Y* (напомним, что G тривиально действует на Y). Очевидно, что если $\mathcal{A}$ — G-пучок групп, колец и т. д., то таким же пучком будет и $f_*(\mathcal{A})$. Пусть $\mathcal{A}$ — G-пучок. Обозначим через $\mathcal{A}^G$ (или $f_*^G(\mathcal{A})$) пучок $\Gamma^G(f_*(\mathcal{A}))$ инвариантов G-пучка $f_*(\mathcal{A})$ над Y, т. е. пучок, сечениями которого над открытым в Y множеством U являются сечения пучка $\mathcal{A}$ над $f^{-1}(U)$, *инвариантные относительно G*. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ — G-пучок групп, колец и т. д., то $\mathcal{A}^G = f_*^G(\mathcal{A})$ будет таким же пучком. Заметим, что f_*^G можно рассматривать как *ковариантный функтор*, определенный на категории G-пучков над X, со значениями в категории пучков над Y (последние также можно рассматривать как G-пучки, на которых G действует тривиально). Пусть $\mathcal{O}$ — некоторый пучок колец; обозначим через $\mathcal{O}'$ пучок $f_*^G(\mathcal{O})$. Тогда для всякого G-$\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{A}$ над X пучок $f_*(\mathcal{A})$ является G-$\mathcal{O}'$-модулем над Y. Таким образом, f_* является *ковариантным функтором* из категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ в категорию $\mathbf{C}^{\mathcal{O}'(G)}$. При этом f_* аддитивен и, разумеется, точен слева. Функтор f_*^G представим в виде композиции $\Gamma^G f_*$, определенной на $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ и принимающей значения в категории $\mathbf{C}^{\mathscr{G}'}$, состоящей из $\mathscr{G}'$-модулей над Y. Здесь через Γ^{G} обозначен функтор $\mathbf{C}^{\mathscr{G}'(G)} \to \mathbf{C}^{\mathscr{G}'}$, сопоставляющий каждому G-$\mathscr{G}'$-пучку $\mathscr{B}$ над Y пучок $\mathscr{B}^{G}$ ростков сечений, инвариантных относительно G. Предположим теперь для простоты, что $\mathscr{G}$ (а, следовательно, и $\mathscr{G}'$) есть постоянный пучок $\mathbf{Z}$ (это равносильно тому, что мы вообще не будем рассматривать никакого пучка колец). Тогда имеет место

Предложение 5.1.3. *Функтор f_* преобразует инъективные объекты категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ в инъективные объекты категории $\mathbf{C}^{Y(G)}$.*

Действительно, достаточно доказать это для абелевого G-пучка $\mathscr{A}$, определенного семейством (A_y) инъективных G_y-модулей (предложение 5.1.2). Но, как видно из построения, проведенного перед предложением 5.1.2, пучок $f_*(\mathscr{A})$ является произведением пучков, определенным группами $\bar{A}_y = \prod_{x \in f^{-1}(y)} A_x$ (во введенных там обозначениях), причем структура G-пучка на $f_*(\mathscr{A})$ определяется структурой G-модуля на $\bar{A}_y$. Последний G-модуль получается из инъективного G_y-модуля A_y при помощи контравариантного расширения скаляров ν, следовательно, также инъективен (см. [6], гл. II, предложение 6.1a). Значит, $f_*(\mathscr{A})$ — инъективный пучок в силу предложения 3.1.2.

Следствие. *Если $\mathscr{A}$ — инъективный абелев G-пучок, то $\Gamma(\mathscr{A})$ есть инъективный G-модуль, а $\mathscr{A}^{G}$ — вялый пучок над Y.*

Действительно, так как $\Gamma(\mathscr{A}) = \Gamma(f_*(\mathscr{A}))$ и $f_*^{G}(\mathscr{A}) = \Gamma^{G}(f_*(\mathscr{A}))$, то достаточно применить лемму из п. 4.3 и предложение 4.1.3 (считая $\mathscr{G}$ постоянным пучком колец, определенным кольцом $\mathbf{Z}(G)$).

Обратный и прямой образы. Пусть $\mathscr{B}$ — пучок множеств над Y (без операторов). Тогда *его обратный образ* $f^{-1}(\mathscr{B})$ (изучавшийся в п. 3.2) *можно рассматривать как G-пучок* в силу очевидных соображений „переноса структуры“. Произвольное сечение пучка $\mathscr{B}$ над открытым множеством U имеет своим обратным образом сечение пучка $f^{-1}(\mathscr{B})$ над $f^{-1}(U)$, *инвариантное относительно G*, т. е. сечение пучка $f_*^{G}(f^{-1}(\mathscr{B}))$. Отсюда получается естественный гомоморфизм $\mathscr{B} \to f_*^{G}(f^{-1}(\mathscr{B}))$, который, как легко проверить, является изоморфизмом:

$$f_*^{G}(f^{-1}(\mathscr{B})) = \mathscr{B}. \tag{5.1.1}$$

Обратно, возьмем некоторый G-пучок $\mathscr{A}$ над X и рассмотрим пучок $f^{-1}(f_*^{G}(\mathscr{A}))$. Сечение этого пучка над открытым множеством V определяется заданием функции $g(x)$ на V, значение которой во всякой точке $x \in V$ является элементом множества

$$f_*^{G}(\mathscr{A})(f(x)) = \varinjlim_{U \ni f(x)} \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{A})^{G},$$

причем эта функция такова, что для всякого $x \in V$ существует открытая окрестность $V' \subset V$ точки x и сечение h пучка $f_*^{G}(\mathscr{A})$ над окрестностью U' точки $f(x)$ (т. е. инвариантное сечение h пучка A над $f^{-1}(U')$), для которых имеем $g(x) = h(x)$ для всякого $x \in V' \cap f^{-1}(U')$. Таким образом, определен канонический мономорфизм [1])

$$f^{-1}(f_*^{G}(\mathscr{A})) \to \mathscr{A}, \tag{5.1.2}$$

отождествляющий $f^{-1}(f_*^{G}(\mathscr{A}))$ с некоторым подпучком $\mathscr{A}'$ пучка $\mathscr{A}$. Как следует из формулы (5.1.1), $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ изоморфен G-пучку вида $f^{-1}(\mathscr{B})$. В этом случае для любого $x \in X$ группа G_x действует на $\mathscr{A}(x)$ тривиальным образом. Как легко проверить, обратное утверждение также справедливо, если G удовлетворяет сформулированному ниже (п. 5.3) условию (D). *Значит, если при этом подгруппы G_x состоят только из единицы* (т. е. если ни один элемент $g \neq e$ из G не имеет неподвижных точек), *то функторы f_*^{G} и f^{-1} являются взаимно обратными изоморфизмами между категорией G-пучков над X и категорией пучков над Y.*

Примеры прямых образов G-пучков. Если $\mathscr{A}$ — постоянный пучок над X, определенный множеством M, на котором G действует тривиально, то $\mathscr{A}^{G}$ есть постоянный пучок над Y, определенный тем же множеством M. Но если G

[1]) Вообще если f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, то для любого пучка $\mathscr{A}$ над X определен функторный мономорфизм $f^{-1}(f_*(\mathscr{A})) \to \mathscr{A}$. Мономорфизм (5.1.2) получается из этого мономорфизма и из вложения $\mathscr{A}^{G} \to f_*(\mathscr{A})$.

не тривиально действует на M и если мы не ограничиваемся случаем, когда G действует „без неподвижных точек", то пучок $f_*^G(\mathcal{A})$, вообще говоря, не будет даже локально постоянным. Предположим, что выполнено условие (D) из п. 5.3, и пусть $\mathcal{A}$ — пучок ростков отображений пространства X в множество M. Тогда $\mathcal{A}^G$ является пучком ростков отображений пространства Y в M. Если X — дифференцируемое многообразие (соответственно вещественно-аналитическое или комплексно-аналитическое пространство) и если $\mathcal{A}$ — пучок ростков дифференцируемых (соответственно вещественно-аналитических или комплексно-аналитических) функций (со значениями в пространстве той же природы), то $\mathcal{A}^G$ будет таким же пучком, связанным с пространством Y. Этот последний пример имеет особенно большое значение, причем аналогичное утверждение справедливо (по определению, как и предыдущие утверждения) в абстрактной алгебраической геометрии и даже для арифметических многообразий.

5.2. Функторы $H^n(X;\ G,\ \mathcal{A})$ и $\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A})$ и основные спектральные последовательности.

Для того чтобы избежать недоразумений, обозначим через Γ_X и Γ_Y функторы „образования сечений" для пучков над X и над Y соответственно и через Γ^G — функтор $M \to M^G$, сопоставляющий каждому множеству M, на котором действует G, подмножество инвариантов из M. Наконец, для G-пучка $\mathcal{A}$ над X положим

$$\Gamma_X^G(\mathcal{A}) = \Gamma_X(\mathcal{A})^G. \tag{5.2.1}$$

Следовательно, по определению выполняются равенства

$$\Gamma_X^G = \Gamma^G\Gamma_X = \Gamma_Y f_*^G. \tag{5.2.2}$$

Мы ограничимся теперь пучками $\mathcal{A}$ из категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ абелевых G-пучков над X. Тогда Γ_X^G будет аддитивным точным слева функтором из категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ в категорию $\mathbf{C}$ абелевых групп, а f_*^G — точным слева функтором из $\mathbf{C}^{X(G)}$ в категорию $\mathbf{C}^Y$ абелевых пучков (без операторов) над Y. Положим

$$H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) = R^n\Gamma_X^G(\mathcal{A}), \tag{5.2.3}$$

$$\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A}) = R^n f_*^G(\mathcal{A}). \tag{5.2.4}$$

Таким образом, для абелева G-пучка $\mathcal{A}$ объекты $H^n(X;\ G,\ \mathcal{A})$ являются абелевыми группами, а $\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A})$ — пучками над Y. И те, и другие образуют универсальные когомологические функторы от $\mathcal{A}$, которые при $n=0$ совпадают соответственно с $\Gamma_X^G(\mathcal{A})$ и с $\mathcal{A}^G$. Если G тривиальным образом действует на X, то мы возвращаемся к понятиям, введенным в п. 4.4. Легко доказывается (так же, как предложение 3.1.3), что если U открыто в Y и $\mathcal{A}$ — инъективный абелев G-пучок над X, то ограничение пучка $\mathcal{A}$ на $f^{-1}(U)$ является инъективным абелевым G-пучком над этим пространством. Это, как и в п. 4.2, приводит к следующему утверждению.

Предложение 5.2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — абелев G-пучок над X. Тогда для любого открытого в Y множества U имеем*

$$\mathcal{H}^p(G,\ \mathcal{A})\,|\,U = \mathcal{H}^p\bigl(G,\ \mathcal{A}\,|\,f^{-1}(U)\bigr).$$

Именно поэтому мы не указываем пространства X в обозначении пучка $\mathcal{H}^p(G,\ \mathcal{A})$. Сформулированное ниже следствие дает более сильную редукцию при вычислении пучка $\mathcal{H}^p(G,\ \mathcal{A})$.

Следствие. *Предположим, что $f^{-1}(U)$ является объединением попарно не пересекающихся открытых множеств $g\cdot V\ (g \in G/G_0)$, где V — открытое в X множество и G_0 — такая подгруппа в G, что $g_0\cdot V = V$ для $g_0 \in G_0$. Тогда $\mathcal{H}^p(G,\ \mathcal{A})\,|\,U = \mathcal{H}^p(G_0,\ \mathcal{A}\,|\,V)$ (при естественном отождествлении $U = V/G_0$).*

В силу предложения 2.5.1 можно считать, что $U=Y$ и, следовательно, $f^{-1}(U)=X$. Тогда можно утверждать, что категория G-пучков над X изоморфна категории G_0-пучков над V, причем этот изоморфизм совместим с функторами f_*^G и $f_*^{G_0}$. Отсюда сразу же вытекает требуемая формула.

Более явные вычисления будут проведены ниже [см. формулу (5.2.11) и теорему 5.3.1].

Формулы (5.2.2) дают два различных представления функтора Γ_X^G в виде композиции двух функторов, и в силу следствия из предложения 5.1.3 к этим двум случаям применима теорема 2.4.1. Значит, имеет место

Теорема 5.2.1. *На категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ абелевых G-пучков над X существуют два когомологических спектральных* *функтора, сходящиеся к градуированному функтору* $(H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}))$, *начальные члены которых имеют вид*

$$\mathrm{I}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = H^p(Y,\ \mathcal{H}^q(X,\ \mathcal{A})),\qquad (5.2.5)$$
$$\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = H^p(G,\ H^q(X,\ \mathcal{A})).$$

Для доказательства того, что член $\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathcal{A})$ имеет указанный вид, достаточно показать только, что производные функторы от Γ_X, рассматриваемого как функтор из $\mathbf{C}^{X(G)}$ в категорию G-модулей $\mathbf{C}^G$, совпадают с $H^q(X,\ \mathcal{A})$. Но это непосредственно следует из того, что всякий абелев G-пучок можно вложить в некоторый вялый абелев G-пучок (это мы показали в предшествующем пункте), который, следовательно, обращает в 0 функтор $H^q(X,\ \mathcal{A})$ при $q > 0$.

Эти спектральные последовательности позволяют определить краевые гомоморфизмы, играющие важную роль:

$$H^n(Y,\ \mathcal{A}^G) \to H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^0(Y,\ \mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A})),\qquad (5.2.6)$$
$$H^n(G,\ H^0(X,\ \mathcal{A})) \to H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^n(X,\ \mathcal{A})^G.\qquad (5.2.7)$$

Второе отображение в (5.2.6) допускает простую интерпретацию. Достаточно заметить, что в силу леммы 3.7.2 $\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A})$ есть пучок над Y, связанный с предпучком, образованным группами $H^n(f^{-1}(U);\ G,\ \mathcal{A})$. Композиция первого гомоморфизма первой строки со вторым гомоморфизмом второй строки совпадает с гомоморфизмом f^*, связанным с естественным вложением (5.1.2) пучка $f^{-1}(\mathcal{A}^G)$ в $\mathcal{A}$ (см. п. 3.2.).

Спектральные последовательности теоремы 5.2.1 определяют также две точные последовательности из 5 членов:

$$0 \to H^1(Y,\ \mathcal{A}^G) \to H^1(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to$$
$$\to H^0(Y,\ \mathcal{H}^1(G,\ \mathcal{A})) \to H^2(Y,\ \mathcal{A}^G) \to H^2(X;\ G,\ \mathcal{A}),\qquad (5.2.8)$$
$$0 \to H^1(G,\ \Gamma(\mathcal{A})) \to H^1(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^1(X,\ \mathcal{A})^G \to$$
$$\to H^2(G,\ \Gamma(\mathcal{A})) \to H^2(X;\ G,\ \mathcal{A}).\qquad (5.2.9)$$

Функтор Γ_X^G можно также представить третьим способом в виде композиции функторов, а именно $\Gamma_X^G = \Gamma_Y^G f_*$. При этом теорема 2.4.1 снова применима в силу предложения 5.1.3.

Следовательно, градуированный функтор $(H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}))$ является пределом также и третьей спектральной последовательности, второй член которой равняется

$$E_2^{p,q} = H^p(Y;\ G,\ R^q f_*(\mathcal{A})).$$

Эта спектральная последовательность определяет функторный гомоморфизм

$$H^n(Y;\ G,\ f_*(\mathcal{A})) \to H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}).\qquad (5.2.10)$$

Она не представляет большого интереса, так как, по-видимому, является патологической в тех случаях, когда не вырождена, т. е. когда не выполняются условия следующего предложения.

Предложение 5.2.2. *Предположим, что абелев G-пучок $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $R^q f_*(\mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$. Тогда гомоморфизмы* (5.2.10) *являются изоморфизмами. Кроме того, две спектральные последовательности теоремы* 5.2.1 *отождествляются в этом случае с двумя соответствующими спектральными последовательностями для G-пучка $f_*(\mathcal{A})$ над Y, причем имеет место равенство*

$$\mathcal{H}^q(G,\ \mathcal{A}) = \mathcal{H}^q(G,\ f_*(\mathcal{A})).\qquad (5.2.11)$$

Первое утверждение непосредственно следует из вида второго члена спектральной последовательности E, определяющей гомоморфизмы (5.2.10). Остальные утверждения вытекают из явного определения членов, которые нужно сравнивать, если заметить, что для всякой инъективной резольвенты $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ объекта $\mathcal{A}$ в $\mathbf{C}^{X(G)}$ комплекс $f_*(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ является *резольвентой* пучка $f_*(\mathcal{A})$ (как раз это и означает предположение $R^q f_*(\mathcal{A}) = 0$ для $q > 0$!), которая также инъективна в силу предложения 5.1.3.

Заметим, что мы определили $R^q f_*(\mathcal{A})$ как правые производные от функтора f_*, рассматриваемого как функтор из $\mathbf{C}^{X(G)}$ в $\mathbf{C}^Y$. Но, вычисляя эти производные функторы с помощью леммы 3.7.2 и вспоминая, что инъективные объекты категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ являются вялыми пучками, мы видим, что тот же результат получится, если рассматривать f_* как функтор из $\mathbf{C}^X$ в $\mathbf{C}^Y$, т. е. $R^q f_*(\mathcal{A})$ *является пучком над Y, связанным с предпучком, который образован группами* $H^q(f^{-1}(U),\ \mathcal{A})$.

Условие предложения 5.2.2 следует рассматривать как когомологический эквивалент „дискретности“ группы преобразований G пространства X. Другим важным случаем является случай, когда $\mathscr{H}^q(G, \mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$. Это условие следует рассматривать как когомологический эквивалент того, что „группа G действует без неподвижных точек“.

Предложение 5.2.3. *Предположим, что $\mathscr{H}^q(G, \mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$. Тогда группа $H^n(X; G, \mathcal{A})$ изоморфна группе $H^n(Y, \mathcal{A}^G)$ и, следовательно, $H^*(Y, \mathcal{A}^G)$ является пределом когомологической спектральной последовательности, второй член которой есть*

$$\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = H^p\big(G, H^q(X, \mathcal{A})\big).$$

Предложение 5.2.3 является непосредственным следствием первой спектральной последовательности теоремы 5.2.1. Мы приходим тем самым к теории пространств с операторами в ее классическом виде [4]. В следующем параграфе будут указаны условия применимости этого предложения в случае, когда G — дискретная группа преобразований пространства X без неподвижных точек. Другие условия его применимости связаны с характеристикой основного поля k пучка $\mathcal{A}$ и порядками стабилизаторов G_y. Отметим следующий простой случай (который, впрочем, легко рассматривается непосредственно и, без сомнения, хорошо известен).

Следствие. *Предположим, что $\mathscr{H}^q(G, \mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$, что G — группа конечного порядка m, что пространство X отделимо и что умножение на m в пучке $\mathcal{A}$ является автоморфизмом пучка $\mathcal{A}$ (например, $\mathcal{A}$ — пучок векторных пространств над полем, характеристика которого не делит m).* Тогда $H^n(Y, \mathcal{A}^G) = H^n(X, \mathcal{A})^G = H^n(X; G, \mathcal{A})$.

Укажем еще один интересный случай.

Предложение 5.2.4. *Предположим, что $H^q(X, \mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$. Тогда $H^n(X; G, \mathcal{A}) = H^n(G, \Gamma(\mathcal{A}))$ и, следовательно, $H^*(G, \Gamma(\mathcal{A}))$ является пределом спектральной последовательности, второй член которой есть* $\mathrm{I}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = H^q\big(Y, \mathscr{H}^q(G, \mathcal{A})\big)$.

Это предложение может быть использовано для вычисления когомологий некоторых групп, например, когомологий

с постоянными коэффициентами различных модулярных групп от одной переменной [10].

Замечания. 1. Предположим, что задан G-пучок $\mathcal{O}$, и ограничимся рассмотрением G-$\mathcal{O}$-модулей. Функтор Γ_X^G можно, следовательно, понимать как функтор из $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ в категорию модулей над $\Gamma(\mathcal{O})^G$. Тогда производные этого функтора совпадают с функторами $H^p(X; G, \mathcal{A})$. Это сразу же следует из того, что всякий инъективный объект из $C^{\mathcal{O}(G)}$ аннулируется функторами $H^n(X; G, \mathcal{A})$ при $n > 0$. Последний факт будет доказан ниже, в лемме 5.6.1.

2. Из двух точных последовательностей (5.2.8) и (5.2.9) можно исключить группу $H^*(X; G, \mathcal{A})$ так, чтобы получить соотношения между когомологиями пространства Y, пространства X и группы G. Вообще, пусть заданы две точные последовательности из 5 членов, как в данном случае (см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & A' \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "u"] & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dr, "u'"'] & H^1 \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "\gamma'"'] & C \arrow[r, "\delta'"'] & D \\
 & & B' \arrow[d, "\gamma"] & & & \\
 & & C \arrow[d, "\delta"] & & & \\
 & & D & & &
\end{tikzcd}$$

Положим $u = \beta'\alpha$, $u' = \beta\alpha'$. Мы имеем $A \cap A' = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u'$. Кроме того, определены следующие естественные гомоморфизмы:

$$\beta\beta'^{-1} : \operatorname{Ker} \gamma' \to \operatorname{Coker} u',$$
$$\beta'\beta^{-1} : \operatorname{Ker} \gamma \to \operatorname{Coker} u.$$

Эти гомоморфизмы дают следующие две точные последовательности (в которые уже не входит H^1):

$$\begin{array}{l} 0 \to \operatorname{Ker} u \to A' \to \operatorname{Ker} \gamma' \to \operatorname{Coker} u' \to C' \to D', \\ \quad \| \\ 0 \to \operatorname{Ker} u' \to A \to \operatorname{Ker} \gamma \to \operatorname{Coker} u \to C \to D. \end{array} \tag{5.2.12}$$

Например, в нашем случае получаем: пусть u — естественный гомоморфизм группы $H^1(Y, \mathcal{A}^G)$ в $H^1(X, \mathcal{A})^G$ и u' — естественный гомоморфизм группы $H^1(G, \Gamma(\mathcal{A}))$ в

$H^0(Y, \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A}))$; тогда *ядро гомоморфизма и изоморфно ядру u', а образ гомоморфизма и изоморфен ядру естественного гомоморфизма группы*

$$\operatorname{Ker}[H^1(X, \mathcal{A})^G \to H^2(G, \Gamma(\mathcal{A}))]$$

в Coker u'.

3. Условия предложения 5.2.2 выполняются в большинстве случаев, которые встречаются на практике. Оно интересно главным образом тем, что дает формулу (5.2.11), которую в случае, когда G конечна, можно записать также в виде

$$\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})(y) = H^q(G, f_*(\mathcal{A})(y)) \quad (y \in Y) \qquad (5.2.11 \text{ bis})$$

и использовать для вычисления пучка $\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})$. Предложение 5.2.2 применимо всякий раз, когда G конечна и X отделимо. Другой важный случай — это случай, когда G — конечная группа автоморфизмов абстрактного алгебраического многообразия X, причем $Y = X/G$ также является алгебраическим многообразием (например, G — группа Галуа накрытия X, разветвленного или нет, нормального многообразия Y). В этом случае условия предложения 5.2.2 выполняются, если *$\mathcal{A}$ — когерентный алгебраический G-пучок* или если $\mathcal{A}$ — мультипликативный пучок O_X^* ростков обратимых регулярных функций на X. Кроме того, если X не имеет ветвления над Y, то $\mathcal{H}^n(G, \mathcal{A}) = 0$ для всех $n > 0$ при условии, что $\mathcal{A}$ — когерентный алгебраический G-пучок. Поэтому можно применять также теорему 5.2.3. В этом случае можно показать также, что $\mathcal{H}^1(G, \mathrm{O}_X^*) = 0$. Аналогичные результаты справедливы и для арифметических многообразий.

5.3. Случай дискретной группы гомеоморфизмов.

Для краткости мы будем говорить, что *G — дискретная группа гомеоморфизмов* пространства X, если выполняется следующее условие:

(D) Для всякой точки $x \in X$ стабилизатор G_x конечен и существует такая окрестность V_x точки x, что для любого $g \in G \setminus G_x$ имеем $g \cdot V_x \cap V_x = \varnothing$.

Можно считать, очевидно, что V_x открыто и, кроме того, что $g \cdot V_x = V_x$ для любого $g \in G_x$ (в случае необходимости

нужно заменить множество V_x пересечением всех $g \cdot V_x$, $g \in G_x$). Условие (D) выполнено, например, в случае, когда G конечна и X отделимо. Если же X — неприводимое алгебраическое многообразие с топологией Зариского и G — конечная группа автоморфизмов многообразия X, то условие (D) *не выполняется* (если только G не действует тривиальным образом).

Теорема 5.3.1. *Предположим, что условие* (D) *выполнено. Пусть $\mathcal{A}$ абелев G-пучок над X, $y \in Y$ и x — элемент множества $f^{-1}(y)$. Тогда имеем канонический изоморфизм*

$$\mathcal{H}^n(G, \mathcal{A})(y) = H^n(G_x, \mathcal{A}(x)). \qquad (5.3.1)$$

Выберем V_x так, как указано в условии (D), и, кроме того, пусть V_x открыто и инвариантно относительно G_x. Тогда применимо следствие из предложения 5.2.1, которое позволяет свести все к случаю, когда $G = G_x$, $X = V_x$ (и, следовательно, G конечна). Покажем, что тогда $R^q f_*(\mathcal{A}) = 0$ для $q > 0$. Для любого $y \in Y$ имеем

$$R^q f_*(\mathcal{A})(y) = \varinjlim H^q(f^{-1}(U), \mathcal{A}),$$

где предел берется по семейству открытых окрестностей U точки x. Если ограничиться окрестностями $U \subset f(V_x)$, то $f^{-1}(U)$ будет конечным объединением открытых попарно не пересекающихся множеств $g \cdot U_x$ $(g \in G/G_x)$, где $U_x = V_x \cap f^{-1}(U)$. Следовательно, $H^q(f^{-1}(U), \mathcal{A})$ есть прямая сумма конечного числа групп, изоморфных $H^q(U_x, \mathcal{A})$. Когда U пробегает фундаментальную систему окрестностей точки y, U_x пробегает фундаментальную систему окрестностей точки x. Значит, $R^q f_*(\mathcal{A})$ является прямой суммой конечного числа групп, изоморфных $\varinjlim H^q(U_x, \mathcal{A})$. Но последняя группа равна нулю при $q > 0$ в силу леммы 3.8.2. Таким образом, $R^q f_*(\mathcal{A}) = 0$ при $q > 0$. В силу предложения 5.2.2 $\mathcal{H}^n(G, \mathcal{A})(y)$ отождествляется с группой $\mathcal{H}^n(G, f_*(\mathcal{A}))(y)$. Поскольку G конечна, последняя группа равна $H^n(G, f_*(\mathcal{A})(y))$ (как мы уже отмечали в п. 4.4). Вспоминая теперь, что можно считать $X = V_x$, так что $f^{-1}(y)$ состоит только из точки x, получаем $f_*(\mathcal{A})(y) = \mathcal{A}(x)$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Следствие 1. *Предположим, что для каждого $x \in X$ порядок n_x стабилизатора G_x таков, что умножение* *на n_x является автоморфизмом группы $\mathcal{A}(x)$. Тогда $H^*(X;\ G,\ \mathcal{A}) = H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$ и, следовательно, $H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$ является пределом спектральной последовательности, второй член которой есть $\mathrm{II}_2^{p,q} = H^p(G,\ H^q(X,\ \mathcal{A}))$.*

Действительно, по теореме 3.5.1 $\mathcal{H}^q(G,\ \mathcal{A}) = 0$ для $q > 0$ и, значит, применимо предложение 5.2.3. Это следствие особенно интересно в случае, когда $\mathcal{A}$ — пучок векторных пространств над полем характеристики p, не делящей ни одного из чисел n_x (что всегда выполнено, если характеристика равна 0). В других случаях можно использовать также следующий вариант.

Следствие 2. *Предположим, что n — наименьшее общее кратное для порядков n_x групп G_x. Пусть P — множество всех простых делителей числа n, $\mathbf{C}(P)$ — категория абелевых групп, у которых каждый элемент имеет конечный порядок, не делящийся на другие простые числа, кроме $p \in P$. Тогда (в терминологии п. 1.11) группа $H^*(X;\ G,\ \mathcal{A})$ изоморфна группе $H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$ по модулю $\mathbf{C}(P)$. Таким образом, $H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$ совпадает по* $\operatorname{mod}\mathbf{C}(P)$ *с пределом когомологической спектральной последовательности, второй член которой есть $H^p(G,\ H^q(X,\ \mathcal{A}))$.*

Действительно, приведем спектральные последовательности теоремы 5.2.1 по модулю $\mathbf{C}(P)$. Тогда $\mathrm{I}_2^{p,q} = 0$ $(\operatorname{mod}\mathbf{C}(P))$ для $q > 0$. Действительно, в силу теоремы 5.3.1 пучок $\mathcal{H}^q(G,\ \mathcal{A})$ обращается в 0 при умножении на n и, следовательно, $H^p(X,\ \mathcal{H}^q(G,\ \mathcal{A}))$ аннулируется числом n при любом p, т. е. равняется нулю по модулю $\mathbf{C}(P)$. Отсюда непосредственно вытекает следствие 2.

Если все n_x равны 1, т. е. если никакой элемент $g \in G$, $g \neq e$, не имеет неподвижных точек (в этом случае говорят просто, что G *действует без неподвижных точек*), то получаем, что $\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A}) = 0$ для всех $n > 0$. Значит, $H^*(X,\ G,\ \mathcal{A}) = H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$. Это ясно „a priori“ в силу изоморфизма, указанного в конце п. 5.1, между категорией пучков над Y и категорией G-пучков над X для случая, когда G — дискретная группа гомеоморфизмов без неподвижных точек. Таким образом, получаем следующий классический результат.

Следствие 3. *Если G действует без неподвижных точек, то группа $H^*(Y,\ \mathcal{A}^G)$ является пределом когомологической спектральной последовательности, второй член которой есть $H^p(G,\ H^q(X,\ \mathcal{A}))$.*

Замечание. По определению, вторая спектральная последовательность теоремы 5.2.1 может быть получена, если взять резольвенту $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ пучка $\mathcal{A}$, составленную из Γ_X-ациклических пучков, и рассмотреть вторую спектральную последовательность функтора Γ^G по отношению к комплексу $\Gamma_X(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Вообще говоря, первая спектральная последовательность функтора Γ^G по отношению к этому комплексу не совпадает с первой спектральной последовательностью теоремы 5.2.1 (достаточно взять какую-нибудь инъективную резольвенту пучка $\mathcal{A}$!). Однако эти две спектральные последовательности будут совпадать, если взять в качестве $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ каноническую резольвенту пучка $\mathcal{A}$ (см. п. 3.3). Это легко следует из соображений, аналогичных тем, которые использовались при доказательстве предложения 4.3.2. То же верно в случае, когда X и Y паракомпактны, если в качестве $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ взята резольвента Картана пучка $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes_Z \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — „фундаментальный пучок“ в смысле Лере — Картана. Это можно доказать, исходя из других соображений (впрочем, данное утверждение нам в дальнейшем не потребуется). Следовательно, спектральная последовательность I — это в точности спектральная последовательность из работы [10], второй член которой не был там явно вычислен.

5.4. Преобразование первой спектральной последовательности.

Мы будем теперь предполагать, что выполнено условие (D) предыдущего пункта (хотя это и не является абсолютно необходимым). Пусть Y_0 — замкнутое подмножество в Y, содержащее носители пучков $\mathcal{H}^n(G,\ \mathcal{A})$ для $n > 0$ (например, в силу теоремы 5.3.1 достаточно, чтобы Y_0 содержало совокупность тех $y \in Y$, для которых $G_y \neq e$). Пусть $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, V — дополнение к Y_0 и U — дополнение к X_0. Рассмотрим точные последовательности

$$0 \to \mathcal{A}_U \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{X_0} \to 0,$$
$$0 \to (\mathcal{A}^G)_V \to \mathcal{A}^G \to (\mathcal{A}^G)_{Y_0} \to 0.$$

Так как очевидно, что $(\mathcal{A}_U)^G = (\mathcal{A}^G)_V$, то получается следующая коммутативная диаграмма последовательностей когомологий:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots H^n(Y, (\mathcal{A}^G)_V) & \to & H^n(Y, \mathcal{A}^G) & \to & H^n(Y, (\mathcal{A}^G)_{Y_0}) & \to & H^{n+1}(Y, (\mathcal{A}^G)_V) & \to \ldots \\
\downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & \\
\ldots H^n(X; G, \mathcal{A}_U) & \to & H^n(X; G, \mathcal{A}) & \to & H^n(X; G, \mathcal{A}_{X_0}) & \to & H^{n+1}(X; G, \mathcal{A}_U) & \to \ldots
\end{array} \qquad (5.4.1)$$

Из определения множества Y_0 следует, что $\mathscr{H}^n(G, \mathcal{A}_U) = 0$ для всех $n > 0$. Действительно, это очевидно над открытым множеством V, но справедливо и над Y_0, так как в силу теоремы 5.3.1 $\mathscr{H}^n(G, \mathcal{A}_U)(y) = H^n(G_x, \mathcal{A}_U(x))$ для любого $y \in Y_0$ и $x \in y$. Поэтому из предложения 5.2.3 вытекает, что гомоморфизм $H^n(Y, (\mathcal{A}^G)_V) \to H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}_U)$ является изоморфизмом при всех n. Так же легко проверяется, что $H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}_{X_0})$ отождествляется с $H^n(X_0; G, \mathcal{A})$ и, кроме того, что $H^n(Y, (\mathcal{A}^G)_{Y_0}) = H^n(Y_0, \mathcal{A}^G)$. Просматривая предыдущую диаграмму, можно получить из нее следующую последовательность гомоморфизмов:

$$\to H^{n-1}(X;\ G,\ \mathcal{A}) \xrightarrow{\beta^{n-1}} H^{n-1}(X_0;\ G,\ \mathcal{A})/\operatorname{Im} H^{n-1}(Y_0,\ \mathcal{A}^G) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H^n(Y,\ \mathcal{A}^G) \xrightarrow{\alpha^n} H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) \xrightarrow{\beta^n}$$
$$\xrightarrow{\beta^n} H^n(X_0;\ G,\ \mathcal{A})/\operatorname{Im} H^n(Y_0,\ \mathcal{A}^G) \to \ldots . \qquad (5.4.2)$$

Она является комплексом (произведение двух последовательных гомоморфизмов равно нулю) и точна везде, за исключением, быть может, членов $H^n(Y, \mathcal{A}^G)$, причем дефект точности $\operatorname{Ker}\alpha^n/\operatorname{Im}\partial$ в этом члене канонически изоморфен ядру гомоморфизма $H^n(Y_0, \mathcal{A}^G) \to H^n(X_0; G, \mathcal{A})$. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Предложение 5.4.1. *Последовательность гомоморфизмов* (5.4.2) *определяет в группе $H^n(Y, \mathcal{A}^G)$ композиционный ряд длины 3, последовательные факторы которого изоморфны соответственно* $\operatorname{Coker}\beta^{n-1} =$
$= H^{n-1}(X_0;\ G,\ \mathcal{A})/(\operatorname{Im} H^{n-1}(X;\ G,\ \mathcal{A}) + \operatorname{Im} H^{n-1}(Y_0,\ \mathcal{A}^G))$, $\operatorname{Ker}[H^n(Y_0,\ \mathcal{A}^G) \to H^n(X_0;\ G,\ \mathcal{A})]$ и $\operatorname{Ker}\beta^n \subset H^n(X;\ G,\ \mathcal{A})$.

Таким образом, можно утверждать, что использование первой спектральной последовательности позволяет вычислить группу $H^*(Y, \mathcal{A}^G)$, если хорошо известны группы $H^*(X;\ G,\ \mathcal{A})$, $H^*(X_0;\ G,\ \mathcal{A})$, $H^*(Y_0,\ \mathcal{A}^G)$ и естественные гомоморфизмы $H^*(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^*(X_0;\ G,\ \mathcal{A}) \leftarrow H^*(Y_0,\ \mathcal{A}^G)$. Вычисление двух первых групп может быть проведено с помощью *второй* спектральной последовательности, в то время как вычисление группы $H^*(Y_0,\ \mathcal{A}^G)$ часто оказывается возможным, если удается выбрать Y_0 достаточно малым. Укажем на один весьма простой и важный случай.

Следствие. *Предположим, что G тривиально действует на X_0 (и, следовательно, G конечна), что $\mathcal{A}$ — пучок векторных пространств над полем k и что G тривиально действует на $\mathcal{A} \mid X_0$. Тогда последовательность* (5.4.2) *является точной и группа $H^n(X_0; G, \mathcal{A})$ канонически изоморфна группе* $\bigoplus_{p+q=n} [H^p(G,\ k) \otimes H^q(X_0,\ \mathcal{A})]$.

Действительно, последнее утверждение является частным случаем последнего утверждения теоремы 4.4.1. Следовательно, канонический гомоморфизм группы $H^n(Y_0, \mathcal{A}^G) = H^n(X_0,\ \mathcal{A})$ в $H^n(X_0;\ G,\ \mathcal{A})$ инъективен, и потому последовательность (5.4.2) точна.

Замечания. Предположим, что G — конечная группа простого порядка. Возьмем в качестве X_0 совокупность точек пространства X, неподвижных относительно G. Тогда $Y_0 = f(X_0)$ удовлетворяет условию, сформулированному в начале этого пункта. Пусть $\mathcal{A}$ — пучок векторных пространств, индуцированный некоторым пучком над Y (т. е. такой пучок, что G тривиально действует на $\mathcal{A} \mid X_0$). Тогда мы находимся в условиях применимости следствия. Отсюда, например, легко получить теорему Смита, относящуюся к случаю, когда X является конечномерной гомологической сферой по модулю p (где p — порядок группы G), т. е. доказать, что X_0 также является гомологической сферой по модулю p. Впрочем, такое „естественное“ доказательство, использующее общие спектральные последовательности, на самом деле близко к доказательству Бореля [2]. Разумеется, предположение компактности, сделанное в [2], совершенно излишне. Кроме того, применяя предыдущее следствие, можно легко доказать, что если конечная группа G

простого порядка p действует на пространстве X конечной размерности, ацикличном по модулю p, то множество X_0 неподвижных точек и фактор-пространство X/G также ацикличны по модулю p. Отсюда следует, что если X ациклично относительно некоторого поля коэффициентов k (произвольной характеристики, случай характеристики $\neq p$ тривиален), то X/G также ациклично. Так как поле k можно выбрать произвольно, то это утверждение остается справедливым, если заменить k на $\mathbf{Z}$. Простая индукция показывает, что это утверждение относительно X/G остается справедливым и в случае, когда G — разрешимая конечная группа. Наконец, результаты этого пункта можно использовать для изучения степеней Стинрода в пучках и когомологий симметрических степеней пространства. Заметим, что аналогичные вычисления проведены в одной неопубликованной работе Годемана о степенях Стинрода, которой этот пункт и обязан своим появлением.

5.5. Вычисление групп $H^n(X;\ G,\ \mathcal{A})$ с помощью покрытий.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 5.5.1. *Пусть* $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ — *три абелевы категории. Предположим, что в двух первых категориях всякий объект изоморфен подобъекту инъективного объекта. Пусть* F *и* G — *ковариантные функторы из* $\mathbf{C}_1$ *в* $\mathbf{C}_2$ *и из* $\mathbf{C}_2$ *в* $\mathbf{C}_3$ *соответственно. Предположим, что* F *переводит инъективные объекты в* G*-ациклические объекты. Пусть, наконец,* $\mathbf{K}$ — *ковариантный функтор из* $\mathbf{C}_1$ *в категорию* $\mathbf{K}(\mathbf{C}_2)$ *комплексов с положительными степенями над категорией* $\mathbf{C}_2$, *удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1) $H^0(\mathbf{K}(A)) = F(A)$ *(функторный изоморфизм),*

2) $\mathbf{K}(A)$ *ацикличен в размерностях* $n > 0$ *для любого инъективного объекта* A. *При этих условиях на категории* $\mathbf{C}_1$ *существует когомологический спектральный функтор, сходящийся к градуированному функтору* $(R^n(GF)(A))$, *начальный член которого равен*

$$E_2^{p,\,q}(A) = \mathfrak{R}^p G(R^q\mathbf{K}(A)). \tag{5.5.1}$$

Обозначим через H^0 ковариантный функтор $L \to H^0(L)$, определенный на $\mathbf{K}(\mathbf{C}_2)$, со значениями в $\mathbf{C}_2$. Тогда имеем

$GF = G(H^0\mathbf{K}) = (GH^0)\mathbf{K}$. При этом если A инъективен, то $\mathbf{K}(A)$ является (GH^0)-ациклическим, т. е. $\mathfrak{R}^n G(\mathbf{K}(A)) = 0$ для всех $n > 0$. Действительно, ввиду условий 1) и 2), $\mathbf{K}(A)$ является резольвентой объекта $F(A)$, и потому $\mathfrak{R}^n G(\mathbf{K}(A)) = R^n G(F(A))$. Но $R^n G(F(A)) = 0$ в силу условий, наложенных на F. Следовательно, к композиции $(GH^0)\mathbf{K}$ функторов применима теорема 2.4.1, которая и приводит к спектральному функтору, указанному в лемме.

Лемма 5.5.2. *Пусть* $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, F *и* G *удовлетворяют условиям предыдущей леммы. Тогда существует когомологический спектральный функтор на категории* $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$ *комплексов* C *с положительными степенями со значениями в категории* $\mathbf{C}_1$, *сходящийся к градуированному функтору* $(\mathfrak{R}^n(GF)(C))$ *и имеющий в качестве начального члена*

$$E_2^{p,\,q}(C) = \mathfrak{R}^p G(R^q F(C)). \tag{5.5.2}$$

Будем обозначать с помощью черточки над функтором такой функтор, который получен „продолжением" первоначального функтора на категорию комплексов с положительными степенями. Тогда справедливы равенства $\mathfrak{R}^n(GF) = R^n(H^0\overline{GF}) = R^n((H^0\overline{G})\overline{F})$. Но функтор $\overline{F}$: $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1) \to \mathbf{K}(\mathbf{C}_2)$ переводит инъективные объекты в $(H^0\overline{G})$-ациклические объекты; другими словами, если C — инъективный объект категории $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$, то $\mathfrak{R}^n G(\overline{F}(C)) = 0$ для всех $n > 0$. Действительно, в силу характеристического свойства инъективных объектов в $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$, отмеченного в п. 2.4, C ацикличен в размерностях $n > 0$ и является „расщепляемым". Кроме того, C^i и $Z^i(C)$ инъективны, откуда вытекает, что $\overline{F}(C)$ является резольвентой объекта $F(Z^0(C))$, и, следовательно, что $\mathfrak{R}^n G(\overline{F}(C)) = R^n G(\overline{F}(Z^0(C)))$. Так как $Z^0(C)$ инъективен, то правая часть равна нулю в силу предположения о функторе F. Таким образом, к композиции $(H^0\overline{G})\overline{F}$ функторов можно применить теорему 2.4.1. Из нее получается указанный в формулировке леммы спектральный функтор, если только принять во внимание, что $R^q\overline{F} = \overline{R^q F}$ (это соотношение непосредственно следует из определений).

Следствие. *При тех же условиях пусть* C — *резольвента объекта* $A \in \mathbf{C}_1$. *Тогда существует когомологическая спектральная последовательность, сходящаяся к градуи-*

рованному объекту $(R^n(GF)(A))$, *начальный член которой задается формулой* (5.5.2).

Действительно, в этом случае имеем $\mathfrak{R}^n(GF)(C) = R^n(GF)(A)$.

Вернемся теперь к пространству X с группой операторов G. Пусть $\mathbf{U} = (U_i)_{i\in I}$ — покрытие пространства X, причем G действует на множестве индексов I таким образом, что $g\cdot U_i = U_{g\cdot i}$ для всякого $i \in I$. В этом случае говорят, что $\mathbf{U}$ является *G-покрытием*. Если $\mathscr{P}$ — абелев предпучок над X, на котором действует G, то комплекс $C(\mathbf{U}, \mathscr{P})$ коцепей покрытия $\mathbf{U}$ с коэффициентами в $\mathscr{P}$ можно очевидным образом рассматривать как комплекс G-групп. Положим

$$H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P}) = \mathfrak{R}^n\Gamma^G(C(\mathbf{U},\ \mathscr{P})), \tag{5.5.3}$$

где правую часть можно представить также как группу $H^n(C(G,\ C(\mathbf{U},\ (\mathscr{P}))))$, обозначив через $C(G,\ C(U,\ \mathscr{P}))$ бикомплекс, образованный коцепями на G со значениями в комплексе $C(\mathbf{U},\ \mathscr{P})$. Этот бикомплекс мы будем обозначать также через $C(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P})$. Таким образом,

$$H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P}) = H^n(C(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P})). \tag{5.5.3 bis}$$

Предположим сначала, что G-покрытие $\mathbf{U}$ *открыто*. Применим лемму 5.5.1 к категориям $\mathbf{C}^{X(G)}$, $\mathbf{C}^G$ (категория G-модулей), $\mathbf{C}$ (категория абелевых групп) и к функторам Γ_X и Γ^G, полагая $\mathbf{K}(\mathscr{A}) = C(\mathbf{U},\ \mathscr{A})$. Функтор Γ_X переводит инъективные объекты в Γ^G-ациклические объекты (следствие из предложения 5.1.3). Кроме того, условия 1) и 2) леммы выполнены: условие 1) потому, что $\mathbf{U}$ открыто, а условие 2) — в силу того, что было сказано в п. 3.8 (второй абзац). Остается только вычислить $R^q\mathbf{K}(\mathscr{A})$. Непосредственным вычислением (кстати, оно было проделано и в п. 3.8) находим, что $R^q\mathbf{K}(\mathscr{A}) = C(\mathbf{U},\ \mathscr{H}^q(\mathscr{A}))$, где через $\mathscr{H}^q(\mathscr{A})$ обозначен предпучок $\mathscr{H}^q(\mathscr{A})(V) = H^q(V,\ \mathscr{A})$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5.5.3. *Пусть X — пространство, на котором действует группа преобразований G, и пусть $\mathbf{U} = \{U_i\}$ — открытое G-покрытие пространства X. Тогда на категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ абелевых G-пучков над X существует когомологический спектральный функтор, сходящийся к градуированному функтору $(H^n(X;\ G,\ \mathscr{A}))$ и имеющий начальным членом*

$$E_2^{p,q}(\mathscr{A}) = H^p(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{H}^q(\mathscr{A})) \tag{5.5.4}$$

(*где $\mathscr{H}^q(\mathscr{A})$ — это предпучок $\mathscr{H}^q(\mathscr{A})(V) = H^q(V, \mathscr{A})$ над X*).

Отсюда получаем, как обычно, краевые гомоморфизмы

$$H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{A}) \to H^n(X;\ G,\ \mathscr{A}) \tag{5.5.5}$$

и точную последовательность из пяти членов, из которой вытекает, между прочим, что *при $n = 1$ указанный гомоморфизм инъективен*. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. *Если все множества $U_{i_0\ldots i_p}$ $\mathscr{A}$-ацикличны, то гомоморфизмы* (5.5.5) *являются изоморфизмами.*

Следствие 2. *Предыдущая теорема остается в силе, если $\mathbf{U}$ — замкнутое G-покрытие, удовлетворяющее одному из двух следующих условий*: a) *$\mathbf{U}$ — локально конечное покрытие паракомпактного пространства X*; b) *$\mathbf{U}$ — конечное покрытие.*

В случае a) из того, что было сказано в п. 3.8 (см. замечание в конце пункта), вытекает, что условия 1) и 2) леммы 5.5.1 выполнены [что касается условия 1), то в силу локальной конечности покрытия $\mathbf{U}$ оно тривиально выполняется и без предположения о паракомпактности]. Следовательно, справедливо равенство $R^q\mathbf{K}(\mathscr{A}) = C(\mathbf{U}, \mathscr{H}^q(\mathscr{A}))$. В случае b) нужно следовать методу Годемана (развитому им для случая, когда G состоит только из единицы), который мы наметим в общих чертах ввиду возможных приложений к абстрактной алгебраической геометрии. Сначала, следуя идее П. Картье, введем комплекс пучков $\mathscr{C}(\mathbf{U},\ \mathscr{A})$, комплексом сечений которого над произвольным открытым множеством V является, по определению, $C(\mathbf{U}|V,\ \mathscr{A}|V)$ (где знак | означает, как и обычно, взятие ограничения на множество, стоящее после этого знака). Доказывается, что он является *резольвентой* пучка $\mathscr{A}$ (мы отсылаем читателя за деталями к книге Годемана [9]). Применим к нему следствие из леммы 5.5.2 (буквы, фигурирующие в формулировке этой леммы, будут употребляться в том же значении, что и выше). Остается только показать, что комплекс $R^qF(\mathcal{C}) = H^q(X, \mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathcal{A}))$ функторно изоморфен комплексу $\mathcal{C}(\mathbf{U}, H^q(\mathcal{A}))$. Доказательство этого факта не представляет трудностей благодаря *конечности* покрытия $\mathbf{U}$, если только использовать теорему 3.5.1.

Будем говорить, что *G-покрытие $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$ есть покрытие без неподвижных точек*, если G действует на I без неподвижных точек, т. е. если из $g \neq e$ следует, что $g \cdot i \neq i$ для всех $i \in I$. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторый G-предпучок. Тогда имеем

$$C^n(\mathbf{U}, \mathcal{P}) = \prod_{(i_0, \ldots, i_n)} \prod_{g \in G} \mathcal{P}(g \cdot U_{i_0 \ldots i_n}), \qquad (5.5.6)$$

где первое перемножение производится по полной системе представителей $(i_0, \ldots, i_n)$ элементов множества I^{n+1}/G. Во втором произведении каждый член канонически изоморфен группе $\mathcal{P}(U_{i_0 \ldots i_n})$, так что это произведение можно отождествить с группой отображений группы G в фиксированную группу $\mathcal{P}(U_{i_0 \ldots i_n})$, причем G действует на этой группе при помощи левых сдвигов. Хорошо известно, что такой G-модуль является Γ^G-ациклическим; следовательно, таким же будет и $C^n(\mathbf{U}, \mathcal{P})$. Обратим внимание на то, что формула (5.5.6) справедлива только в случае, когда $C(\mathbf{U}, \mathcal{P})$ — комплекс *произвольных* (не обязательно альтернированных) коцепей покрытия $\mathbf{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{P}$ (тогда как прежние рассмотрения были верны и для произвольных, и для альтернированных коцепей). Используя первую спектральную последовательность гипергомологий функтора Γ^G по отношению к комплексу $C(\mathbf{U}, \mathcal{P})$, получаем следующий результат.

Предложение 5.5.4. *Если $\mathbf{U}$ является G-покрытием без неподвижных точек, то для всякого G-предпучка $\mathcal{P}$ имеем*

$$H^n(\mathbf{U}; G, \mathcal{P}) = H^n(C(\mathbf{U}, \mathcal{P})^G), \qquad (5.5.7)$$

где через $C(\mathbf{U}, \mathcal{P})$ обозначен комплекс (с операторами) произвольных (не обязательно альтернированных) коцепей покрытия $\mathbf{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{P}$.

Принимая во внимание еще и следствие 1 из теоремы 5.5.3, приходим к следующему утверждению.

Следствие. *Пусть $\mathbf{U}$ — G-покрытие без неподвижных точек. Предположим, что либо $\mathbf{U}$ открыто, либо $\mathbf{U}$ замкнуто и X паракомпактно, либо, наконец, $\mathbf{U}$ замкнуто и конечно. Если $\mathcal{A}$ — такой G-пучок, что $H^n(U_{i_0 \ldots i_p}, \mathcal{A}) = 0$ для всех $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ и для всех $n > 0$, то имеют место следующие канонические изоморфизмы:*

$$H^n(X; G, \mathcal{A}) = H^n(C(\mathbf{U}, \mathcal{A})^G).$$

Найдем теперь явное выражение для комплекса $C(\mathbf{U}, \mathcal{P})^G$ в случае, когда $\mathbf{U}$ является G-покрытием без неподвижных точек. В этом случае множество индексов покрытия $\mathbf{U}$ изоморфно (как множество, на котором действует G) произведению $G \times I$, на котором G действует при помощи левых сдвигов в первом сомножителе, т. е. $g' \cdot (g, i) = (g'g, i)$. Условимся отождествлять i с (e, i). Пусть $(f_{g_0 i_0, \ldots, g_n i_n})$ — произвольная инвариантная n-коцепь с коэффициентами в $\mathcal{P}$. Положим

$$F_{i_0, g_1 i_1, \ldots, g_n i_n} = f_{e \cdot i_0, g_1 i_1, \ldots, g_n i_n}. \qquad (5.5.9)$$

Тогда F является функцией, которая зависит от $n+1$ аргумента $i_0, \ldots, i_n \in I$ и от n аргументов $g_1, \ldots, g_n \in G$ и принимает свои значения в $\mathcal{P}(U_{i_0} \cap g_1 U_{i_1} \cap \ldots \cap g_n U_{i_n})$. При этом данная инвариантная коцепь полностью определяется заданием такой *„неоднородной коцепи“* F. Действительно, формула

$$f_{g_0 i_0, \ldots, g_n i_n} = g_0 \cdot F_{i_0, g_0^{-1} g_1 i_1, \ldots, g_0^{-1} g_n i_n} \qquad (5.5.10)$$

для любой заданной неоднородной коцепи F определяет некоторую инвариантную коцепь f, причем неоднородная коцепь, связанная с f, представляет собой не что иное, как F. Остается получить выражение для оператора дифференцирования в комплексе $C(\mathbf{U}, \mathcal{P})^G$ непосредственно в терминах неоднородных коцепей. Прямой подсчет показывает, что

$$(\partial F)_{i_0, g_1 i_1, \ldots, g_{n+1} i_{n+1}} = g_1 \cdot F_{i_1, g_1^{-1} g_2 i_2, \ldots, g_1^{-1} g_{n+1} i_{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n+1} (-1)^{\alpha} F_{i_0, g_1 i_1, \ldots, \widehat{g_\alpha i_\alpha}, \ldots, g_{n+1} i_{n+1}}, \qquad (5.5.11)$$

где символ $\widehat{\ }$ означает, что находящиеся под ним буквы должны быть опущены. Особенно интересен случай, когда I

состоит только из одного элемента, т. е. когда имеется такое подмножество D в X, что $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$, и рассматривается покрытие $(g \cdot D)_{g \in G}$. Тогда неоднородные n-коцепи представляют собой системы $(F_{g_1, \ldots, g_n})$, где

$$F_{g_1, \ldots, g_n} \in \mathscr{P}(D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D),$$

и формула (5.5.11) принимает вид

$$(\partial F)_{g_1, \ldots, g_{n+1}} = g_1 \cdot F_{g_1^{-1} g_2, \ldots, g_1^{-1} g_{n+1}} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n+1} (-1)^\alpha F_{g_1, \ldots, \widehat{g_\alpha}, \ldots, g_{n+1}}. \qquad (5.5.11 \text{ bis})$$

Пусть теперь L — множество тех $g \in G$, для которых $g \cdot D \cap D \neq \varnothing$ (в „разумных" случаях это множество будет конечным). Тогда предыдущая формула показывает, что комплекс $C(\mathbf{U}, \mathscr{P})^G$, определяющий группы $H^n(\mathbf{U}; G, \mathscr{P})$, может быть построен, если известны только закон композиции $(g, g') \to g^{-1}g'$ в L (в случае, когда это произведение определено), пересечения $D \cap g \cdot D$ $(g \in L)$ и, разумеется, группы $\mathscr{P}(D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D)$ $(g_i \in L)$, их отображения ограничения и действие элементов $g_i \in L$ на них.

Замечания I. a) Предположим, что выполнены предыдущие условия, что $\mathscr{P}$ — постоянный пучок, определенный коммутативным кольцом k и что пересечения $D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots$ $\ldots \cap g_n \cdot D$ ацикличны относительно k и связны. Тогда значения коцепей $F_{g_1, \ldots, g_n}$ являются просто элементами кольца k (определенными для $D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D \neq \varnothing$), и комплекс таких коцепей приводит к когомологиям $H^*(X; G, k)$. Отсюда получается метод для явного вычисления группы $H^*(X; G, k)$, если только указанное выше множество L конечно (откуда следует, что $C(\mathbf{U}, k)^G$ — свободный комплекс конечного типа во всех размерностях). Кажется, что это может помочь, например, при вычислении когомологий модулярных групп многих переменных (в этом случае $H^*(X; G, \mathbf{Z}) = H^*(G, \mathbf{Z})$, так как X — стягиваемое открытое подмножество эвклидова пространства), если только известна достаточно простая фундаментальная область D (здесь не нужно обращать внимание на то, что происходит в кратных точках, как это делается

в методе работы [10], который, по-видимому, неприменим в случае слишком сложного множества неподвижных точек).

b) Возьмем $D = X$, тогда $\mathbf{U} = (g \cdot X)_{g \in G}$. В этом случае спектральная последовательность теоремы 5.5.3 совпадает со второй спектральной последовательностью теоремы 5.2.1 с начальным членом $H^p(G, H^q(X, \mathscr{A}))$. Заметим, что всегда существует канонический функторный гомоморфизм спектральной последовательности теоремы 5.5.3 во вторую спектральную последовательность теоремы 5.5.1, как легко следует из лемм 5.5.1 и 5.5.2.

В заключение этого пункта мы дадим некоторые указания относительно вычисления групп $H^n(X; G, \mathscr{A})$ методом Чеха, обобщающие те рассмотрения, которые делались в п. 3.8. Пусть $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — два G-покрытия, причем $\mathbf{V}$ вписано в $\mathbf{U}$. Определим для всякого абелева G-предпучка $\mathscr{P}$ канонические гомоморфизмы

$$H^n(\mathbf{U}; G, \mathscr{P}) \to H^n(\mathbf{V}; G, \mathscr{P}), \qquad (5.5.12)$$

функторные относительно $\mathscr{P}$. Положим сначала $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$ и $\mathbf{V} = (V_j)_{j \in J}$ и допустим, что существует такое отображение $\varphi: J \to I$, что $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ для всякого $j \in J$, *которое перестановочно с* G. Тогда классическим образом приходим к гомоморфизму $\bar{\varphi}: C(\mathbf{U}, \mathscr{P}) \to C(\mathbf{V}, \mathscr{P})$, который также перестановочен с G, откуда в силу (5.5.3) получаем гомоморфизм (5.5.12). *Последний не зависит от выбора отображения* φ. Действительно, пусть φ' — другое отображение, обладающее теми же свойствами. Построим хорошо известную классическую гомотопию s между $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}'$, так что $\bar{\varphi} - \bar{\varphi}' = \partial s + s\partial$. По очевидным соображениям „переноса структуры" отображение s перестановочно с G, откуда следует, что $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}'$ определяют один и тот же гомоморфизм (5.5.12). Отбросим теперь предположение о существовании отображения φ, обладающего указанными выше свойствами. Рассмотрим множество $I' = G \times I$ и определим на нем действие группы G формулой $g' \cdot (g, i) = (g'g, i)$. Рассмотрим также G-покрытие $\mathbf{U}' = (U'_{(g, i)})_{(g, i) \in G \times I}$ без неподвижных точек, определенное формулой $U'_{(g, i)} = U_{g \cdot i} = g \cdot U_i$. Отображение $\psi(g, i) = g \cdot i$ удовлетворяет указанным выше требованиям и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P}) \to H^n(\mathbf{U}';\ G,\ \mathscr{P}).$$

Таким образом, достаточно определить канонический гомоморфизм $H^n(\mathbf{U}';\ G,\ \mathscr{P}) \to H^n(\mathbf{V};\ G,\ \mathscr{P})$. Но теперь мы находимся в условиях случая, рассмотренного вначале, благодаря тому, что $\mathbf{U}'$ — G-покрытие *без неподвижных точек*, в которое вписано $\mathbf{V}$ [1]). Таким образом, определение гомоморфизмов (5.5.12) завершено. Кроме того, эти гомоморфизмы обладают очевидными свойствами транзитивности. Отсюда прежде всего следует, что если $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — эквивалентные G-покрытия, то гомоморфизмы (5.5.12) являются изоморфизмами, так что $H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P})$ зависит только от класса G-покрытия $\mathbf{U}$ (относительно эквивалентности, определенной следующим отношением квазипорядка: $\mathbf{V}$ вписано в $\mathbf{U}$). Положим теперь

$$\check{H}^n(X;\ G,\ \mathscr{P}) = \varinjlim H^n(\mathbf{U};\ G,\ \mathscr{P}), \qquad (5.5.13)$$

где индуктивный предел берется по упорядоченному множеству классов открытых G-покрытий пространства X. Гомоморфизмы (5.5.3) определяют для всякого $\mathscr{A} \in \mathbf{C}^{X(G)}$ функторные гомоморфизмы

$$\check{H}^n(X;\ G,\ \mathscr{A}) \to H^n(X;\ G,\ \mathscr{A}). \qquad (5.5.14)$$

Мы намерены указать некоторые условия, при которых эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Прежде всего, переход к индуктивному пределу в спектральных последовательностях, связанных с различными покрытиями $\mathbf{U}$ (теорема 5.5.3), показывает, что $H^*(X;\ G,\ \mathscr{A})$ является пределом когомологического спектрального функтора, начальный член которого равен

$$E_2^{p,q}(\mathscr{A}) = \check{H}^p(X;\ G,\ \mathscr{H}^q(\mathscr{A})) \qquad (5.5.15)$$

и что гомоморфизмы (5.5.14) представляют собой не что иное, как краевые гомоморфизмы этой спектральной последовательности. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 5.5.5. *Предположим, что Y паракомпактно, X отделимо и что G — дискретная группа гомеоморфизмов пространства X* (см. п. 5.3). *Если $\mathscr{P}$ — такой абелев G-предпучок, что связанный с ним пучок равен нулю, то $\check{H}^n(X;\ G,\ \mathscr{P}) = 0$ при любом $n > 0$.*

Очевидно, что при вычислении группы $\check{H}^n(X;\ G,\ \mathscr{P})$ по формуле (5.5.13) можно ограничиться G-покрытиями $\mathbf{U}$ без неподвижных точек. Но к последним применима теорема 5.5.4, так что достаточно доказать следующее утверждение: если $f^n \in C^n(\mathbf{U},\ \mathscr{P})^G$, где $\mathbf{U}$ — открытое G-покрытие без неподвижных точек, то существуют более мелкое открытое G-покрытие $\mathbf{V}$ без неподвижных точек и такое отображение φ: $J \to I$ множеств индексов, удовлетворяющее указанным выше условиям, что $\overline{\varphi}(f^n) = 0$. Сначала доказывается, что существуют сколь угодно мелкие открытые G-покрытия вида $(g \cdot U_i)_{(g,\,i) \in G \times I}$, где (U_i) — такое семейство открытых в X множеств, что стабилизатор G_i множества U_i конечен и из $g \notin G_i$ следует, что $gU_i \cap U_i = \varnothing$. Будем предполагать, что $\mathbf{U}$ — покрытие такого вида. Рассмотрим неоднородную коцепь $\left(F_{i_0,\, g_1 i_1,\, \dots,\, g_n i_n}\right)$, соответствующую коцепи f^n, и рассмотрим I как нерв покрытия $\left(f(U_i)\right) = \left(U'_i\right)$ пространства Y. Для всякого симплекса $s = (i_0,\ \dots,\ i_n)$ из I положим $U'_s = U'_{i_0, \dots, i_n}$. Для всякого n-симплекса s из I и для всякого $y \in U'_s$ обозначим через W^s_y такую открытую окрестность точки y, содержащуюся в U'_s, что для каждой системы $\mathbf{g} = (g_1,\ \dots,\ g_n)$, у которой проекция множества $U_{s,\mathbf{g}} = U_{i_0} \cap g_1 \cdot U_{i_1} \cap \dots \cap g_n \cdot U_{i_n}$ на Y содержит y, ограничение коцепи $F_{i_0,\, g_1 i_1,\, \dots,\, g_n i_n}$

---

[1]) В самом деле, нетрудно показать, что существует отображение $\varphi' : J \to I'$, перестановочное с G и удовлетворяющее условию $V_j \subset U'_{\varphi'(j)}$ $(j \in J)$. Однако проще доказать непосредственно, что если $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$ и $\mathbf{V} = (V_j)_{j \in J}$ — два G-покрытия, причем $\mathbf{V}$ вписано в $\mathbf{U}$, то существует отображение $\varphi : J \to I$, перестановочное с G и такое, что $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ $(j \in J)$. Поскольку $\mathbf{V}$ вписано в $\mathbf{U}$, существует отображение $\alpha : J \to I$, для которого $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ $(j \in J)$. Выберем в каждом классе транзитивности группы G в J по одному элементу и обозначим через $J_0 \subset J$ подмножество, состоящее из этих элементов. Для каждого $j \in J$ выберем некоторый элемент $\gamma(j) \in G$, удовлетворяющий условию $\gamma(j)^{-1} \cdot i \in J_0$. Определим теперь отображение $\varphi : J \to I$ формулой $\varphi(j) = \gamma(j) \cdot \alpha(\gamma(j)^{-1} \cdot j)$ $(j \in J)$. Легко проверить, что φ обладает всеми нужными свойствами.— *Прим. ред.*

на $U_{s,\,g} \cap f^{-1}(W_y^s)$ равно нулю. Такая окрестность W_y^s существует ввиду ограничений, наложенных на $\mathcal{P}$, а также в силу того, что на самом деле нужно рассматривать лишь конечное число систем $\mathbf{g}$ и что если W пробегает фундаментальную систему окрестностей точки y, то $U_{s,\,g} \cap f^{-1}(W)$ пробегает фундаментальную систему окрестностей конечного множества точек $x \in U_{s,\,g}$, проектирующихся в y. Так как Y паракомпактно, то из хорошо известной в теории Чеха леммы вытекает, что можно найти такое покрытие $\mathbf{V}' = (V'_j)_{j \in J}$ пространства Y и такое отображение φ': $J \to I$, что $V'_j \subset U'_{\varphi'(j)}$ для всех $j \in J$ и что для всякого n-симплекса t из J множество V'_t содержится по крайней мере в одном из множеств $W_y^{\varphi'(t)}$. Далее, пусть $V_j = U_{\varphi'(j)} \cap f^{-1}(V'_j)$ и пусть $\mathbf{V} = (g \cdot V_j)_{(g,\,j) \in G \times J}$. Рассмотрим отображение φ: $G \times J \to G \times I$, определенное отображением φ'. Легко проверяется, что $(\mathbf{V}, \varphi)$ удовлетворяет требуемым условиям. В частности, $\overline{\varphi}(F) = 0$, откуда следует, что $\overline{\varphi}(f^n) = 0$.

Пучок, связанный с предпучком $\mathcal{H}^q(\mathcal{A})$, равен нулю при $q > 0$ (лемма 3.8.2). Поэтому лемма 5.5.5 и спектральная последовательность со вторым членом (5.5.15) приводят к следующему результату:

Теорема 5.5.6. *Если G — дискретная группа гомеоморфизмов пространства X и если $Y = X/G$ паракомпактно, то для любого абелева G-пучка $\mathcal{A}$ гомоморфизмы*

$$\check{H}^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^n(X;\ G,\ \mathcal{A}) \tag{5.5.16}$$

являются изоморфизмами.

Замечания II. Из рассмотрения спектральной последовательности со вторым членом (5.5.15) можно вывести без всяких ограничений на X, G, $\mathcal{A}$, что

$$\check{H}^1(X;\ G,\ \mathcal{A}) = H^1(X;\ G,\ \mathcal{A})$$

(и что гомоморфизм $\check{H}^2(X;\ G,\ \mathcal{A}) \to H^2(X;\ G,\ \mathcal{A})$ инъективен, так как можно проверить, что $E_2^{0,\,n} = 0$ при любом $n > 0$). Но легко убедиться в том, что $\check{H}^1(X;\ G,\ \mathcal{A})$ можно интерпретировать геометрически как множество классов G-$\mathcal{A}$-расслоений над X (т. е. расслоений над X „со структурным пучком $\mathcal{A}$" [11], на которых G действует совместимым с этой структурой образом). Заметим, что $\check{H}^1(X;\ G,\ \mathcal{A})$ определено и допускает ту же самую геометрическую интерпретацию в случае, когда $\mathcal{A}$ — G-пучок не обязательно коммутативных групп. Теория, развитая в [11], в частности в гл. V этой работы, может быть слово в слово перенесена на более общий случай G-расслоений. Было бы естественным дать изложение „некоммутативной гомологической алгебры" в терминах функторов и категорий, которое объединило бы в одно целое эту теорию расслоений и тот алгебраический аппарат, относящийся к расширениям групп (групп Ли и других), который развит, например, в статьях Хохшильда и Шапиро (см. [12], [13], [19]).

5.6. Функторы $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},\,G}$ $(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$.

В этом пункте мы фиксируем G-пучок колец $\mathcal{O}$ и рассмотрим абелеву категорию $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$, состоящую из G-$\mathcal{O}$-модулей (см. п. 5.1). Группу G-$\mathcal{O}$-гомоморфизмов G-$\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{A}$ в G-$\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{B}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\,G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ или $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\,G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$, если нужно явно указать пространство, над которым рассматриваются $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (тем самым получает смысл также символ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\,G}(U;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$, где U — подмножество в X, инвариантное относительно G). Принимая во внимание, что пучок $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ является G-пучком и, следовательно, группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = \Gamma_X \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ является G-модулем, получаем формулы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\,G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = \Gamma_X^G(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})) = \Gamma^G \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}). \tag{5.6.1}$$

Положим

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O},\,G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}))^G. \tag{5.6.2}$$

Следовательно, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O},\,G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ — это пучок над $Y = X/G$, сечения которого над открытым множеством $U \subset Y$ образуют группу $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\,G}(f^{-1}(U);\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$, состоящую из G-$\mathcal{O}$-гомоморфизмов пучка $\mathcal{A}|f^{-1}(U)$ в $\mathcal{B}|f^{-1}(U)$. Положим также

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{O},\mathcal{A}}(\mathcal{B}) &= \mathscr{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}),\\ h_{\mathcal{O},\mathcal{A}}(\mathcal{B}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}),\\ \mathbf{h}_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}}(\mathcal{B}) &= \mathscr{H}om_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}),\\ h_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}}(\mathcal{B}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}).\end{aligned}\right\}\tag{5.6.3}$$

Таким образом, мы определили для фиксированного $\mathcal{A}$ четыре точных слева функтора, причем два последних связаны с двумя первыми (уже встречавшимися в гл. IV) функторными равенствами

$$\mathbf{h}_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}} = f_*^G\mathbf{h}_{\mathcal{O},\mathcal{A}},\tag{5.6.4}$$

$$h_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}} = \Gamma_Y\mathbf{h}_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}} = \Gamma^G\mathbf{h}_{\mathcal{O},\mathcal{A}} = \Gamma_X^G\mathbf{h}_{\mathcal{O},\mathcal{A}}.\tag{5.6.5}$$

Кроме того, положим

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B}) = R^n h_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}}(\mathcal{B}),\tag{5.6.6}$$

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B}) = R^n\mathbf{h}_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}}(\mathcal{B}).\tag{5.6.7}$$

Таким образом, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два G-$\mathcal{O}$-модуля, то $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$ являются абелевыми группами и образуют универсальный когомологический функтор от $\mathcal{B}$, совпадающий с $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$ в размерности 0. В то же время $\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ являются абелевыми пучками над Y и образуют универсальный когомологический функтор от $\mathcal{B}$, совпадающий в размерности 0 с $\mathscr{H}om_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$. Кроме того, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$ представляют собой общие группы Ext в категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ (очевидно, наши определения имеют смысл ввиду предложения 5.1.1). Так как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, а следовательно, и $\mathscr{H}om_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ является контравариантным точным функтором от $\mathcal{A}$ всякий раз, когда $\mathcal{B}$ — инъективный объект категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$, то мы видим (ср. п. 2.3), что $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$ [соответственно $\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$] образуют также контравариантный когомологический функтор от $\mathcal{A}$ (при фиксированном $\mathcal{B}$). Заметим, наконец, что, так же как и в п. 4.2 и 5.2 (где рассматривались частные случаи), легко доказать следующее соотношение:

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})\,|\,U = \mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A}\,|\,f^{-1}(U),\ \mathcal{B}\,|\,f^{-1}(U))\tag{5.6.8}$$

(указывающее на *локальную природу* функторов $\mathscr{E}xt$ по отношению к пространству Y). Отсюда следует утверждение, аналогичное следствию из предложения 5.2.1, которое позволяет свести случай *дискретной* группы гомеоморфизмов к случаю, когда G — конечная группа (см. п. 5.3). Тогда можно показать, используя соображения п. 4.1, что естественные гомоморфизмы

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\mathcal{B})(y)\to\mathrm{Hom}_{U_x}(\mathcal{A}(x),\mathcal{B}(x))\quad(f(x)=y)\tag{5.6.9}$$

(где U_x — кольцо, порожденное кольцами $\mathcal{O}(x)$ и $\mathbf{Z}(G)$, которое рассматривалось в п. 5.1) являются изоморфизмами, если $\mathcal{O}$ — *когерентный* пучок *нётеровых* слева колец и $\mathcal{A}$ когерентен как $\mathcal{O}$-модуль. Далее, при этих условиях на X, G, $\mathcal{O}$ U_x-модуль $\mathcal{B}(x)$ инъективен всякий раз, когда $\mathcal{B}$ — инъективный объект категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$. (Для доказательства этих утверждений следует заменить свободные $\mathcal{O}$-модули п. 4.1 на G-$\mathcal{O}$-модули типа $\mathcal{L}(U)$, введенные при доказательстве предложения 5.1.1). Отсюда непосредственно следует, что *естественные гомоморфизмы*

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})(y)\to\mathrm{Ext}^n_{U_x}(\mathcal{A}(x),\ \mathcal{B}(x)),\tag{5.6.10}$$

индуцированные гомоморфизмами (5.6.9), *являются изоморфизмами, если G — дискретная* (*в смысле п.* 5.3) *группа гомеоморфизмов, $\mathcal{O}$ — когерентный пучок нётеровых слева колец и $\mathcal{A}$ — G-$\mathcal{O}$-модуль, когерентный как $\mathcal{O}$-модуль.* Это утверждение содержит в качестве частных случаев теоремы 4.2.2 и 5.3.1 (постоянный пучок колец $\mathbf{Z}$ является когерентным и нётеровым!) и в наиболее важных случаях позволяет выяснить строение пучка $\mathscr{E}xt^n_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$.

Применяя к формулам (5.6.4) и (5.6.5) теорему 2.4.1, можно получить несколько спектральных последовательностей. Нас будут интересовать только спектральные последовательности, вытекающие из (5.6.5), которые сходятся к $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$. Нужно еще проверить, что для каждой из трех формул, представляющих $h_{\mathcal{O},G,\mathcal{A}}$ в виде композиции функторов, выполняется обычное условие ацикличности. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 5.6.1. *Предположим, что $\mathcal{B}$ — инъективный объект категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$. Тогда $\mathscr{H}om_{\mathcal{O},G}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ является* *вялым пучком над Y*, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — Γ^G*-ациклическим G-модулем, а* $\mathcal{H}om_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — Γ_X^G*-ациклическим G-пучком.*

Предложение 5.1.2 позволяет свести доказательство к случаю, когда $\mathcal{B}$ — произведение пучков, определенное некоторым семейством $(B_x)_{x\in X}$ инъективных U_x-модулей B_x. В этом случае абелев G-пучок $\mathcal{H} = \mathcal{H}om_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является произведением пучков, определенным семейством G-модулей $H_x = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}(x)}(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$. Далее, $\mathcal{H}om_{\mathfrak{G},G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является произведением пучков над Y, определенным семейством групп $H_y = \coprod (H_x)^{G_x}$ (произведение распространяется на те x, для которых $f(x) = y$), и, следовательно, есть вялый пучок. Допустим на время, что H_x являются Γ^{G_x}-ациклическими G_x-модулями (это будет доказано в приведенном ниже следствии). Тогда G-модуль $\overline{H}_x$, полученный из G_x-модуля H_x контравариантным расширением скаляров, является, как хорошо известно, Γ^G-ациклическим модулем. Следовательно, модуль $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \Gamma_X\mathcal{H} = \coprod_{x\in X/G} \overline{H}_x$ также Γ^G-ацикличен. Наконец, так как $\mathcal{H}$ — вялый (и, следовательно, Γ_X-ациклический) пучок, то из второй спектральной последовательности теоремы 5.2.1 вытекает, что $H^n(X; G, \mathcal{H}) = H^n(G, \Gamma_X\mathcal{H})$, а последняя группа, как мы уже видели, равна нулю при $n > 0$. Этим завершено доказательство леммы 5.6.1 в предположении, что доказан следующий ее частный случай.

Следствие. *Пусть O — кольцо с единицей, на котором действует группа G, и пусть U — кольцо, порожденное кольцами O и $\mathbf{Z}(G)$ с соотношениями перестановочности $g\lambda g^{-1} = \lambda^g$ ($g \in G$, $\lambda \in O$). Пусть A и B — два U-модуля, причем B инъективен. Тогда* $\mathrm{Hom}_O(A, B)$ *является* Γ^G*-ациклическим G-модулем. (Не следует думать, что он обязательно инъективен!)*

Пусть $B' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B)$ — группа отображений f группы G в B. Определим на B' действие группы G и кольца O формулами

$$(g'f)(g) = f(gg'), \quad (\lambda f)(g) = \lambda^g f(g).$$

Непосредственно проверяется, что B' становится U-модулем и что формула

$$\varphi(b)(g) = g\cdot b$$

определяет инъективный U-гомоморфизм $\varphi: B \to B'$. Таким образом, B вкладывается в U-модуль B'. Так как B инъективен, то он является прямым сомножителем в B'. Следовательно, $\mathrm{Hom}_O(A, B)$, рассматриваемый как G-модуль, является прямым сомножителем в $\mathrm{Hom}_O(A, B')$, так что достаточно показать, что последний Γ^G-ацикличен. Положим $H = \mathrm{Hom}_O(A, B)$, и будем рассматривать H как G-модуль, на котором G действует по формуле $u^g(a) = gu(g^{-1}a)$. Тогда легко проверяется, что имеет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_O(A, B') = \mathrm{Hom}_O(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B)) =$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), \mathrm{Hom}_O(A, B)),$$

если условиться, что структура G-модуля на последнем члене $H'' = \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}(G), H)$ определяется формулой $f^{g'}(g) = g'f(gg')$. Действительно, для каждого $u \in \mathrm{Hom}_O(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B))$ можно написать

$$u(a)(g) = g\cdot u_g(a).$$

Тогда u_g будут O-гомоморфизмами модуля A в B и u отождествляется с семейством гомоморфизмов u_g, которое определяет некоторый элемент группы $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), H)$. Рассмотрим также G-модуль H', который получается, если ввести на $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), H)$ структуру G-модуля по формуле $(g'f)(g) = f(gg')$. Если положить $\psi(f)(g) = g^f(g)$, то получится G-изоморфизм ψ модуля H' на H''. Но хорошо известно, что, каков бы ни был G-модуль H, G-модуль H' является Γ^G-ациклическим. Следовательно, таков же и H'', что и требовалось доказать.

Лемма 5.6.1 дает возможность получить из формул (5.6.5) три спектральные последовательности, сходящиеся к $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{G},G}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$. Для вычисления начальных членов двух последних из них необходимо лишь вычислить производные функторы от $h_{\mathfrak{G},\mathcal{A}}$ и $\mathbf{h}_{\mathfrak{G},\mathcal{A}}$, рассматриваемых как функторы на $\mathbf{C}^{\mathfrak{G}}(G)$. Если рассматривать эти функторы на категории $\mathbf{C}^{\mathfrak{G}}$ $\mathfrak{G}$-модулей (без операторов), то их производными функторами являются по определению (п. 4.2) функторы $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{G}}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{E}xt^n_{\mathfrak{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Тот же результат получится, если рассматривать их как функторы на категории $\mathbf{C}^{\mathfrak{G}(G)}$. Это сразу вытекает из определений и из следующей леммы.

Лемма 5.6.2. *Если $\mathscr{B}$ — инъективный G-$\mathscr{O}$-модуль, то он инъективен и как $\mathscr{O}$-модуль.*

Как и в лемме 5.6.1, можно ограничиться случаем, когда $\mathscr{B}$ является произведением пучков, определенным некоторым семейством $(B_x)_{x \in X}$ инъективных U_x-модулей B_x. Таким образом, достаточно доказать, что B_x являются также инъективными $\mathscr{O}(x)$-модулями, т. е. лемма сводится к случаю, когда X состоит из одной точки x. В действительности доказательство, по-видимому, не упрощается от этого. То доказательство, которое мы хотим предложить, применимо всякий раз, когда задана абелева категория $\mathbf{C}$ (такая, как $\mathbf{C}^{\mathscr{O}}$), на которой „действует" группа G (см. примечание на стр. 129), что позволяет перейти к соответствующей категории $\mathbf{C}(G)$ (в нашем случае $\mathbf{C}^{\mathscr{O}(G)}$) „объектов с операторами". Предположим, что $\mathbf{C}$ удовлетворяет аксиоме AB 5) и допускает образующую. Тогда *всякий инъективный объект A из $\mathbf{C}(G)$ будет инъективным также и в $\mathbf{C}$.* Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в том, что всякий объект A из $\mathbf{C}(G)$ может быть вложен в объект M из $\mathbf{C}(G)$, который инъективен в категории $\mathbf{C}$. Для этого достаточно рассмотреть данную в п. 1.10 конструкцию, позволяющую вложить A (как объект категории $\mathbf{C}$) в инъективный объект M из $\mathbf{C}$. В этой конструкции A вкладывается в модуль $M_1(A)$, который представляет собой функтор от A (не аддитивный!), причем гомоморфизм $A \to M_1(A)$ является *функторным*. Повторив трансфинитно этот процесс и перейдя к индуктивному пределу, получим инъективный объект $M(A)$, представляющий собой *функтор* от A, и вложение $A \to M(A)$, являющееся *функторным* гомоморфизмом. Эта конструкция вполне определена всякий раз, когда выбран некоторый образующий элемент U в категории $\mathbf{C}$ и подходящее кардинальное число. Кроме того, заменяя в случае необходимости U прямой суммой его образов под действием группы G (ср. с доказательством предложения 5.1.1), можно считать, что U порождается некоторым элементом категории $\mathbf{C}(G)$. Тогда из очевидных соображений „переноса структуры" следует, что если A — объект категории $\mathbf{C}(G)$, то G действует и на $M(A)$ [так что $M(A)$ является объектом из $\mathbf{C}(G)$] и вложение $A \to M(A)$ совместимо с преобразованиями из G. Это и есть искомое вложение объекта A в объект категории $\mathbf{C}(G)$, инъективный в категории $\mathbf{C}$. Тем самым доказательство закончено. Читателю, у которого все-таки остались сомнения, рекомендуется провести доказательство для случая $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathscr{O}}$, который рассматривается в лемме. При желании можно ограничиться чисто алгебраическим случаем, когда X состоит из одной точки.

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат этого пункта, доказанный предыдущими рассуждениями.

Теорема 5.6.3. *Пусть X — пространство с группой гомеоморфизмов G, $\mathscr{O}$ — G-пучок колец над X и $\mathscr{A}$ — G-$\mathscr{O}$-модуль. Тогда на категории $\mathbf{C}^{\mathscr{O}(G)}$, состоящей из G-$\mathscr{O}$-модулей, можно построить три когомологических спектральных функтора, сходящихся к градуированному функтору $(\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O},G}(X; \mathscr{A}, \mathscr{B}))$, и имеющих начальными членами соответственно*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_2^{p,q}(\mathscr{B}) &= H^p(Y, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O},G}(\mathscr{A}, \mathscr{B})),\\
\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathscr{B}) &= H^p(G, \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{A}, \mathscr{B})), \qquad (5.6.11)\\
\mathrm{III}_2^{p,q}(\mathscr{B}) &= H^p(X; G, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})).
\end{aligned}
$$

Если $\mathscr{O} = \mathscr{A}$, то две первые спектральные последовательности совпадают со спектральными последовательностями теоремы 5.2.1, а третья спектральная последовательность является новой. Если G состоит из одной единицы, то спектральные последовательности I и III тождественны друг другу и совпадают со спектральной последовательностью теоремы 4.2.1, а спектральная последовательность II тривиальна. Если X состоит только из одной точки, то спектральные последовательности II и III совпадают и, вообще говоря, нетривиальны (и, по-видимому, являются полезными), в то время как спектральная последовательность I тривиальна [1]).

[1]) Получающаяся при этом нетривиальная спектральная последовательность сходится к $\mathrm{Ext}^*_U(A, B)$, и ее начальный член равен $H^p(G, \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}}(A, B))$ (где A и B — U-модули, U — кольцо, порожденное кольцом $\mathbf{Z}(G)$ и G-кольцом O, с соотношениями перестановочности $g\lambda g^{-1} = \lambda^g$; $\lambda \in O$, $g \in G$). Отметим, что проще получить эту спектральную последовательность непосредственно. Для этого нужно использовать проективную резольвенту модуля A вместо инъективной резольвенты модуля B. Действительно, легко проверить, что если A — свободный U-модуль, то A — также свободный O-модуль и, следовательно, $\mathrm{Hom}_O(A, B)$ является Γ^G-ациклическим G-модулем.

Из указанных спектральных последовательностей получаются краевые гомоморфизмы и точные последовательности с пятью членами, которые мы не будем выписывать. Отметим только один частный вырожденный случай.

Следствие 1. *Если G-$\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{A}$ локально изоморфен как $\mathcal{O}$-модуль модулю $\mathcal{O}^n$, то имеют место канонические изоморфизмы*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{B}) = H^n(X;\ G,\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})). \quad (5.6.12)$$

Это вытекает из спектральной последовательности III, так как в этом случае $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = 0$ для $q > 0$ (предложение 4.2.3). В частности, полагая $A = \mathcal{O}$, получим

Следствие 2. *Для всякого G-$\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{B}$ имеют место канонические изоморфизмы*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},\ G}(X;\ \mathcal{O},\ \mathcal{B}) = H^n(X;\ G,\ \mathcal{B}). \quad (5.6.14)$$

Замечания. Укажем в двух частных случаях две другие спектральные последовательности, сходящиеся к $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},G}(X;\mathcal{A},\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{O}$ — постоянный G-пучок колец, порожденный кольцом O, на котором действует группа G, и пусть $\mathcal{M}$ — постоянный G-$\mathcal{O}$-пучок, определенный O-модулем M, на котором G действует совместимым образом с ее действием на O, т. е. $g\cdot(\lambda m) = g(\lambda)\cdot g(m)$ $(\lambda\in O,\ m\in M)$. Введем кольцо U, порожденное кольцами O и $\mathbf{Z}(G)$, подчиненными условиям перестановочности $g\lambda g^{-1} = g(\lambda)$. Тогда M является U-модулем. Рассмотрим функтор $h_{U,\ M}$ на категории U-модулей, определенный равенством $h_{U,\ M}(N) = \mathrm{Hom}_U(M,\ N)$. Так как для всякого G-$\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{B}$ имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\ G}(\mathcal{M},\ \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_U(M,\ \Gamma_X(\mathcal{B})),$$

то справедливо функторное тождество

$$h_{\mathcal{O},\ G,\ \mathcal{M}} = h_{U,\ M}\Gamma_X. \quad (5.6.5\ \text{bis})$$

Кроме того, легко проверяется, что Γ_X переводит инъективные объекты из $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ в инъективные U-модули, так что применима теорема 2.4.1. Она приводит к когомологическому спектральному функтору IV на категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$, который сходится к градуированному функтору $(\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O},\ G}(X;\ \mathcal{M},\ \mathcal{B}))$ и имеет начальным членом

$$\mathrm{IV}_2^{p,\ q}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ext}^p_U(M,\ H^q(X,\ \mathcal{B})). \quad (5.6.11\ \text{bis})$$

Если предположить, сверх того, что G тривиально действует на M, то будем иметь также

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\ G}(\mathcal{M},\ \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_U(M,\ \Gamma_X(\mathcal{B})) = \mathrm{Hom}_O(M,\ \Gamma^G_X(\mathcal{B})),$$

откуда вытекает функторное равенство

$$h_{\mathcal{O},\ G,\ \mathcal{M}} = h_{O,\ M}\Gamma^G_X. \quad (5.6.5\ \text{ter})$$

Можно показать и здесь, что Γ^G_X переводит инъективные объекты категории $\mathbf{C}^{\mathcal{O}(G)}$ в инъективные O-модули (для этого нужно проверить, что если N — инъективный U-модуль, то N^G — инъективный O-модуль). Таким образом, теорема 2.4.1 приводит к пятому когомологическому спектральному функтору, который сходится к тому же пределу, что и предыдущий, и имеет вторым членом

$$\mathrm{V}_2^{p,\ q}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(M,\ H^q(X;\ G,\ \mathcal{B})). \quad (5.6.11\ \text{ter})$$

Если G состоит только из единицы, то спектральные последовательности IV и V совпадают со спектральной последовательностью теоремы 4.3.1. Если X состоит только из одной точки, то спектральная последовательность IV тривиальна, а спектральная последовательность V, вообще говоря, не тривиальна и не сводится ни к одной из предыдущих [1]).

Пример. Предположим, что G — группа автоморфизмов некоторого комплексного многообразия или, более общим образом, некоторого „комплексного пространства" X, $\mathbf{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на X. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два когерентных аналитических пучка, на которых действует G. Так как всякий аналитический пучок, представляющий собой расширение пучка $\mathcal{A}$ с помощью пучка $\mathcal{B}$, когерентен, то классы G-$\mathbf{O}$-пучков, являющиеся когерентными расширениями пучка $\mathcal{A}$ с помощью $\mathcal{B}$, взаимно однозначно соответствуют элементам комплексного векторного пространства $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{O},\ G}(X;\mathcal{A},\mathcal{B})$. С другой стороны, если n — положительное целое число, то существует естественное соответствие между голоморфными векторными расслоениями E со слоем $\mathbf{C}^n$ [2]) и

[1]) Второй член этой спектральной последовательности равен (в обозначениях примечания на стр. 163) $\mathrm{Ext}^p_O(A,\ H^q(G,B))$.

[2]) Через $\mathbf{C}^n$ автор обозначает здесь n-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. — *Прим. ред.*

алгебраическими когерентными пучками $\mathcal{M}$ над X, которые локально изоморфны пучку $\mathbf{O}^n$: расслоению E сопоставляется пучок $\mathbf{O}(E)$ ростков голоморфных сечений расслоения E, а пучку $\mathcal{M}$ — голоморфное расслоение, слоем которого в точке $x \in X$ является $\mathcal{M}(x) \otimes_{\mathbf{O}(x)} \mathbf{C}$ [где $\mathbf{C}$ рассматривается как модуль над алгеброй с дополнением $\mathbf{O}(x)$]. Очевидно, что при этом соответствии голоморфные векторные расслоения со слоем $\mathbf{C}^n$, допускающие G в качестве группы автоморфизмов, соответствуют тем G-$\mathbf{O}$-модулям, которые как $\mathbf{O}$-модули локально изоморфны пучку $\mathbf{O}^n$. Следовательно, классы расширений голоморфного расслоения с операторами E с помощью другого расслоения F соответствуют естественным образом элементам группы $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{O}, G}(X;\ \mathbf{O}(E), \mathbf{O}(F))$, которая изоморфна в силу следствия 1 из теоремы 5.6.3 векторному пространству $H^1(X;\ G, \mathbf{O}(E' \otimes F))$ (где E' — расслоение, дуальное к E). Можно пойти еще дальше, если G — *дискретная* группа, так как тогда для случая характеристики 0 получаем в силу следствия 1 из теоремы 5.3.1, что

$$H^1(X; G, \mathcal{L}) = H^1(Y,\ \mathcal{L}^G)$$

для любого G-пучка $\mathcal{L}$ векторных пространств. Если при этом $\mathcal{L}$ — когерентный аналитический пучок, то таким же является и $\mathcal{L}^G$. В частности, $\mathbf{O}(E' \otimes F)^G$ — когерентный аналитический пучок над Y. Отсюда, например, следует в силу результатов работы [7], что если Y компактно, то векторное пространство классов голоморфных векторных G-расслоений, являющихся расширениями расслоения E с помощью F, имеет конечную размерность. [В действительности спектральная последовательность I показывает, что если Y компактно и $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два когерентных аналитических пучка с операторами, то пространства $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O}, G}(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ имеют конечную размерность.] Аналогичные результаты справедливы и в абстрактной алгебраической геометрии с той разницей, что равенство $H^*(X; G, \mathcal{L}) = H^*(Y, \mathcal{L}^G)$ можно написать лишь тогда, когда, например, порядок группы G взаимно прост с характеристикой или когда G действует без неподвижных точек.

5.7. Введение семейств Φ.

Пусть Φ — антифильтр замкнутых подмножеств пространства X. Рассмотрим функтор

$$\Gamma^G_\Phi(\mathcal{A}) = \Gamma_\Phi(\mathcal{A})^G \tag{5.7.1}$$

на категории $\mathbf{C}^{X(G)}$ абелевых G-пучков над X. Положим

$$H^p_\Phi(X;\ G,\ \mathcal{A}) = R^p\Gamma^G_\Phi(\mathcal{A}). \tag{5.7.2}$$

Если Φ — антифильтр, образованный всеми замкнутыми в X подмножествами, то мы возвращаемся к функторам $H^n(X, G, \mathcal{A})$ п. 5. 2. Пусть Φ' — семейство всех замкнутых в X подмножеств, каждое из которых содержится в некотором замкнутом подмножестве $F \in \Phi$, инвариантном относительно G. Тогда очевидно, что Φ' — антифильтр замкнутых в X множеств и что $\Gamma^G_\Phi = \Gamma^G_{\Phi'}$. Таким образом, можно предполагать в дальнейшем, что $\Phi = \Phi'$ или, что то же самое, что Φ *является семейством всех замкнутых подмножеств F пространства X, для которых $\overline{f(F)} \in \Psi$, где Ψ — некоторый антифильтр замкнутых подмножеств пространства Y*. Тогда выполняются следующие функторные равенства:

$$\Gamma^G_\Phi = \Gamma_\Psi f^G_* = \Gamma^G\Gamma_\Phi. \tag{5.7.3}$$

Так как f^G_* преобразует инъективные объекты из $\mathbf{C}^{X(G)}$ в вялые пучки (и, следовательно, в Γ_Ψ-ациклические объекты), то первое равенство приводит к *когомологическому спектральному функтору на категории $\mathbf{C}^{X(G)}$, который сходится к градуированному функтору $(H^n_\Phi(X;\ G,\ \mathcal{A}))$ и имеет начальным членом*

$$\mathrm{I}^{p,q}_2(\mathcal{A}) = H^p_\Psi(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})). \tag{5.7.4}$$

Вторая спектральная последовательность теоремы 5.2.1 не допускает такого непосредственного обобщения, так как, вообще говоря, нельзя утверждать, что если $\mathcal{B}$ — инъективный объект из $\mathbf{C}^{X(G)}$, то $\Gamma_\Phi(\mathcal{B})$ является Γ^G-ациклическим G-модулем. Предположим теперь, что *всякое множество из Ψ обладает окрестностью, которая принадлежит Ψ*. Для всякого открытого множества $U \subset Y$ обозначим через $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}_{f^{-1}(U)}$ абелев G-пучок над X, который равен нулю на $\complement f^{-1}(U)$ и совпадает с $\mathcal{A}$ на $f^{-1}(U)$. Тогда $\Gamma_\Phi(\mathcal{A}) = \varinjlim \Gamma_X(\mathcal{A}_U)$, где индуктивный предел берется по направленному множеству открытых подмножеств U из Y, для которых $\bar{U} \in \Psi$. Так как отображения $\Gamma_X(\mathcal{A}_U) \to \Gamma_X(\mathcal{A}_V)$ для $U \subset V$ инъективны, то функтор Γ^G перестановочен с индуктивным пределом, и мы получаем следующее функторное тождество:

$$\Gamma^G_\Phi(\mathcal{A}) = \varinjlim \Gamma^G_X(\mathcal{A}_U). \tag{5.7.5}$$

Отсюда в силу следствия 1 из предложения 3.10.1 имеем

$$H^n_\Phi(X; G, \mathcal{A}) = \varinjlim H^n(X; G, \mathcal{A}_U). \tag{5.7.6}$$

Но для любого U группа $H^*(X; G, \mathcal{A}_U)$ является пределом когомологической спектральной последовательности $\mathrm{II}(\mathcal{A}, U)$ со вторым членом

$$\mathrm{II}(\mathcal{A}, U)_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathcal{A}_U)),$$

и при переменном U эти спектральные последовательности образуют индуктивную систему. Поэтому из (5.7.6) следует, что $H^*_\Phi(X; G, \mathcal{A})$ *является пределом когомологической спектральной последовательности со вторым членом*

$$\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = \varinjlim_U H^p(G, H^q(X, \mathcal{A}_U)). \tag{5.7.7}$$

Разумеется, эта спектральная последовательность является даже спектральным функтором от $\mathcal{A}$. В наиболее важных случаях (которые указаны ниже) можно поменять местами символы $H^p(G, -)$ и $\varinjlim$. Поскольку $\varinjlim H^q(X, \mathcal{A}_U) = H^q(X, \mathcal{A})$ в силу следствия 1 из предложения 3.10.1, получаем тогда обычную форму второго члена

$$\mathrm{II}_2^{p,q}(\mathcal{A}) = H^p(G, H^q_\Phi(X, \mathcal{A})). \tag{5.7.7 bis}$$

Условия, при которых справедлива формула (5.7.7 bis):

a) G — конечная группа.

b) G тривиально действует на $H^q(X, \mathcal{A}_U)$ и группы $H_p(G, \mathbf{Z})$ имеют конечное число образующих.

c) Индуктивная система $(H^q(X, \mathcal{A}_U))$ обладает тем свойством, что существует конфинальная система (U_i), для которой гомоморфизмы $H^q(X, \mathcal{A}_{U_i}) \to H^q(X, \mathcal{A}_{U_j})$ являются изоморфизмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiyah M. F., Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), 181—207.

2. Borel A., Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith, *Comment. Math. Helv.*, 29 (1955), 27—39.

3. Buchsbaum D. A., Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1—34. (Имеется русский перевод, см. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., ИЛ, 1960, добавление.)

4. Cartan H., Séminaire E. N. S., 1950—1951.

5. Cartan H., Séminaire E. N. S., 1951—1952.

5 bis. Cartan H., Chevalley C., Séminaire E. N. S., 1955—1956.

6. Cartan H., Eilenberg S., Homological algebra, Princeton University Press, 1956. (Имеется русский перевод, см. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., ИЛ, 1960.)

7. Cartan H., Serre J. P., Un théorème de finitude, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237 (1953), 128—130.

8. Cartier P. (ссылок нет).

9. Godement R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, 1958. (Готовится русский перевод).

10. Godement R., Cohomologie des groupes discontinus, Séminaire Bourbaki, Mars 1954.

11. Grothendieck A., A general theory of fibre spaces with structure sheaf, University of Kansas, 1955.

12. Hochschild G., Group extensions of Lie groups I, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 96—109.

13. Hochschild G., Group extensions of Lie groups II, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 537—551.

14. MacLane S., Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56**, (1950), 485—516.

15. Serre J. P., Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, **61** (1955), 197—278. (Имеется русский перевод, см. „Расслоенные пространства и их приложения", стр. 372—450, М., ИЛ, 1958.)
16. Serre J. P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, VI (1955—1956), 1—42.
17. Serre J. P., Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Ann. of Math.*, **58** (1953), 258—294. (Имеется русский перевод, см. „Расслоенные пространства и их приложения", стр. 124—162, М., ИЛ., 1958.)
18. Serre J. P., Sur la cohomologie des variétés algébriques, *J. Math. pures et appl.*, **36** (1957), 1—16.
19. Shapiro A., Group extension of compact Lie groups, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 581—586.
20. Weil A., Fibre spaces in algebraic geometry (notes by A. Wallace), Chicago, 1952.
21. Weil A., Généralisation des fonctions abéliennes, *J. Math. pures et appl.*, **17** (1938), 47—87.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. Гротендик

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Художник *Л. Г. Ларский* Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 6/XII 1960 г. Подписано к печати 7/IV 1961 г.
Бумага 84×108¹/₃₂=2,8 бум. л. 9,0 печ. л. Уч.-изд. л. 8,9. Изд. № 1/0440.
Цена 62 к. Зак. № 2017.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.