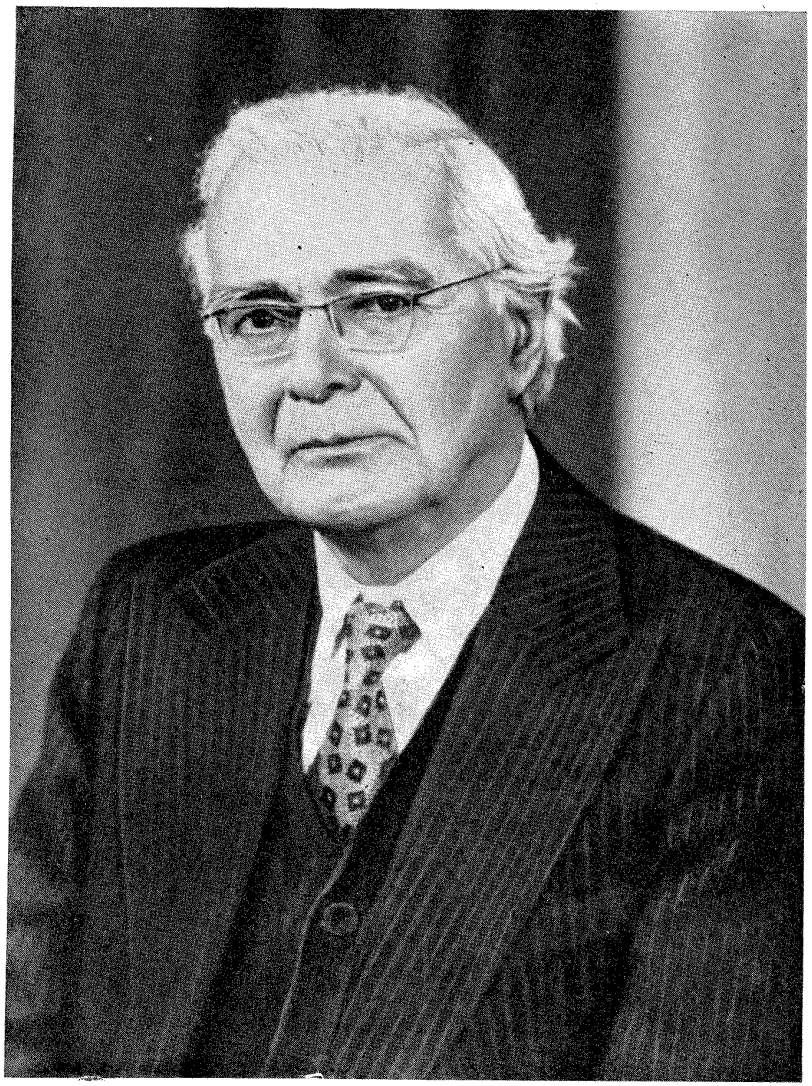

Автор?

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Избранные труды

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1984

В161.622 л44

УДК 517.9
Л771
Теория общих граничных задач / Избр. тр. Лопатинский Я. Б.— Киев : Наук. думка, 1984.— 316 с.

В книге представлены важнейшие работы Я. Б. Лопатинского по алгебраической теории линейных дифференциальных операторов, фундаментальным решениям дифференциальных уравнений эллиптического типа, общим краевым задачам для эллиптических систем уравнений, а также по теории интегральных уравнений, теории гиперболических уравнений, применениям теории Морса в нелинейных эллиптических уравнениях, конечно-разностных уравнениях эллиптического типа.

Для научных работников, аспирантов, преподавателей и студентов математических факультетов вузов.

Редакционная коллегия

И. В. Скрыпник (ответственный редактор),
И. И. Данилюк, А. И. Вольперт,
О. И. Панич, Г. И. Данилюк,
А. И. Марковский (ответственный секретарь)

-9352-

БИБЛИОТЕКА
Вычислительного центра
СО АН СССР
г. Красноярск

Редакция физико-математической литературы

Л $\frac{1702050000-372}{М221(04)-84}$ 134-84

© Издательство «Наукова думка», 1984

ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Основные работы видного советского ученого-математика, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Государственной премии УССР, действительного члена Академии наук УССР, Ярослава Борисовича Лопатинского (9.11.1906—10.3.1981 гг.) относятся к уравнениям в частных производных. В области дифференциальных уравнений в частных производных Я. Б. Лопатинский начал работать во время Великой Отечественной войны в Баку. В этот период он интенсивно занимался алгебраической теорией линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Он глубоко изучил кольцо дифференциальных операторов с коэффициентами в поле отношений кольца формальных степенных рядов, исследовал идеалы этого кольца, а также более общие образования — k-членные его модули. Оказалось, что каждый такой модуль обладает конечным базисом. Была вскрыта тесная связь между теорией дифференциальных модулей и многообразием решений систем дифференциальных уравнений — интегральным многообразием. Эти и другие алгебраические результаты составили содержание докторской диссертации Я. Б. Лопатинского «Линейные дифференциальные операторы», защищенной им в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова в 1946 г. До настоящего времени многие результаты этой работы не были опубликованы. Теперь этот пробел восполняется публикацией полного текста диссертации Я. Б. Лопатинского.

С 1946 по 1963 г. Лопатинский заведует кафедрой дифференциальных уравнений Львовского государственного университета им. И. Я. Франко. В этот период им были получены фундаментальные результаты по теории эллиптических систем уравнений в частных производных и краевым задачам для таких систем, что во многом определило направление развития данной области математики и принесло Лопатинскому поистине мировую известность. Не имея возможности охарактеризовать каждую из работ в отдельности, выделим три больших цикла работ, выполненных им во Львове.

К первому из них относятся работы по построению и исследованию фундаментальных матриц и нормальных фундаментальных матриц для общих эллиптических систем уравнений. В качестве приложения полученных результатов Лопатинский исследует поведение решения линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особенности. Именно он показал, что решение эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки выражается через производные от фундаментального решения. Его результаты по нормальным фундаментальным решениям были использованы в дальнейшем для доказательства того, что всякое обобщенное решение эллиптической системы на самом деле является обычным решением.

Второй цикл исследований посвящен общим краевым задачам для общих систем дифференциальных уравнений эллиптического типа. Центральной в нем является работа «Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям», опубликованная в «Украинском математическом журнале» (1953, № 2). В ней впервые в мировой литературе было получено условие согласования коэффициентов системы уравнений с коэффициентами граничных операторов, достаточное для сводимости граничной задачи общего вида к регулярным интегральным уравнениям. Это условие названо условием Лопатинского. В этой же работе Я. Б. Лопатинский описал метод сведения граничной задачи в ограниченной выпуклой области к системе регулярных интегральных уравнений при помощи построенных и исследованных им потенциалов. Ранее подобный метод применяла З. Я. Шапиро для систем с постоянными коэффициентами в трехмерной области.

Позднее Лопатинский с помощью разработанных им методов исследовал задачу Дирихле для системы эллиптических уравнений второго порядка, изучив разрешимость за-

дачи, непрерывную зависимость решений от правых частей, коэффициентов системы и области их задания, свойства гладкости решений вплоть до границы.

В дальнейшем развитии теории эллиптических уравнений и систем центральным был вопрос нетеровости соответствующей граничной задачи. С граничной задачей обычно естественным образом связывается некоторый оператор в подходящих банаховых пространствах. Он называется нетеровским, если его ядро конечномерно, образ замкнут и имеет конечную коразмерность. Как советскими, так и зарубежными учеными было установлено, что для того чтобы граничная задача для эллиптической системы уравнений была нетеровской, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Лопатинского. В дальнейших исследованиях методами функционального анализа граничных задач для псевдодифференциальных эллиптических уравнений доказано, что условие Лопатинского также необходимо и достаточно для нетеровости таких задач.

Аналог этого условия появляется и при исследовании эллиптических граничных задач, зависящих от параметра, важных для спектральной теории, а также для изучения общих краевых задач для параболических уравнений. Это было показано в работах Ш. Агмона, М. И. Вишика и М. С. Аграновича, Т. Я. Загорского, С. Д. Эйдельмана и др. При изучении смешанных задач для систем гиперболических уравнений существенную роль играет равномерное условие Лопатинского, используемое Сакамото и др.

Третий цикл работ Лопатинского относится к интегральным уравнениям — как регулярным, с аналитическим ядром, так и сингулярным, отвечающим краевой задаче для эллиптической системы уравнений, рассматриваемой в плоской области, граница которой имеет угловые точки. Лопатинский был одним из первых математиков, кто начал в общей постановке исследовать такие задачи. Он мастерски использовал результаты только что созданной теории нетеровских операторов, показав, что в некотором специально подобранном функциональном пространстве система интегральных уравнений, отвечающая краевой задаче в области с угловыми точками, порождает нетеровский оператор. При этом он указал формулы для вычисления индекса такого оператора, опираясь на работы М. Г. Крейна и И. Ц. Гохберга, а также получил формулу для радиуса Фредгольма, найденную ранее другими методами Радоном.

С 1963 по 1966 г. Я. Б. Лопатинский работал в Институте нефтехимической и газовой промышленности им. акад. И. М. Губкина в Москве, а затем — с 1966 г.— заведующим отделом уравнений в частных производных Института прикладной математики и механики АН УССР в Донецке.

Ряд работ Лопатинского посвящен изучению разрешимости задачи Коши для операторных уравнений в банаховом пространстве. Здесь им обобщены известные результаты Като в случае, когда область определения оператора зависит от временной переменной. Эти результаты Я. Б. Лопатинский использовал в исследовании смешанной задачи типа Дирихле для гиперболической системы уравнений. Он обосновал применимость к этой задаче (при выполнении условия Лопатинского) метода Кальдерона, показав однозначную разрешимость задачи. В начале донецкого периода Я. Б. Лопатинского интересовали применения теории Морса к вариационным эллиптическим задачам. В двух статьях, посвященных этим вопросам, он доказал разрешимость задачи Дирихле почти для всех областей. При этом не делалось предположений о близости функционала к квадратичному и не предполагалась его полуограниченность.

В последние годы Лопатинский увлеченно работал над вопросами разрешимости «почти всегда» общих нелинейных и линейных эллиптических граничных задач. В частности, в его публикациях изучались условия однозначной разрешимости краевых задач для модельных уравнений в шаре. Условия однозначной разрешимости удалось записать в алгебраическом (в принципе — проверяемом) виде.

Склонный всегда рассматривать проблему в общей постановке, Лопатинский одну из последних своих работ (публикуется впервые в настоящем издании) посвятил применению метода конечных разностей к эллиптическим уравнениям общего вида. В ней он выделил класс эллиптически продолжаемых операторов, для которых их конечно-разностные приближения оказываются эллиптическими и допускают априорные оценки.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Я. Б. ЛОПАТИНСКОГО

1929

1. О равномерной сходимости.— Изв. Азерб. ун-та, № 8, с. 81—82.

1934

2. Вмещение риманова пространства в евклидово.— Изв. Азерб. индустр. ин-та, № 6 (13), с. 151—158.
3. К вопросу о кризисе обоснования математики.— Изв. Азерб. индустр. ин-та, 6 (13), с. 159—165.— Соавт. : Фридолина И. П.

1935

4. Предельные значения аналитической функции на множестве особых точек меры больше нуля, расположенных на спрямляемой кривой.— Изв. Азерб. индустр. ин-та, № 7 (14), с. 37—40.

1939

5. К вопросу о решении уравнений $y' = f(x, y)$.— Труды Азерб. ун-та, № 1, с. 88—106.

1942

6. Об одном применении метода Римана.— Тр. Азерб. ун-та, сер. мат. № 1.
7. Элементы теории групп. Баку (на азерб. языке).— Соавт.: Джавадов М.

1945

8. Об одном семействе решений волнового уравнения.— Тр. Азерб. ун-та, № 5, с. 95—99. Соавт.: Ибадов Т. Г.
9. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов.— Мат. сб., 17 (59), с. 267—288.

1946

10. Об одном классе решений волнового уравнения.— Тр. сек. матем. АН Азерб. ССР, № 2, с. 23—31.
11. Теорема о базисе.— Тр. сек. матем. АН Азерб. ССР, 2, с. 32—34.
12. Интегральные многообразия систем линейных дифференциальных уравнений.— УМН, 1 : 3—4, с. 201.

1947

13. О некоторых свойствах кольца дифференциальных операторов.— Научн. зап. Львовск. ун-та. Сер. физ.-мат., т. 5, № 2, с. 101—107.
14. О некоторых преобразованиях системы линейных дифференциальных уравнений.— Докл. и сообщ. Львовск. гос. ун-та, (1947), вып. 1, с. 150.

1949

15. Фундаментальное решение уравнения $\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} u = 0$.— Тр. НИИ матем. и физ. Азерб. ун-та, № 1, с. 22—26.
16. Об одном обобщении понятия аналитической функции.— Докл. АН СССР, 64, с. 155—158.

1950

17. Об одном обобщении понятия аналитической функции.— Укр. мат. журн., 2, № 2, с. 56—73.
18. Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Докл. АН СССР, 71, с. 433—436.

1951

19. Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Укр. мат. журн., 3, № 1, с. 3—38.
20. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Укр. мат. журн., 3 : 3, 290—316.
21. Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Докл. АН СССР, 78, 865—867.
22. Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки.— Докл. АН СССР, 79, с. 727—730.

1952

23. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к системе регулярных интегральных уравнений.— Докл. АН УССР, 5, с. 381—388.

1953

24. Об одной граничной задаче для гармонических функций.— Научн. зап. Львовского ун-та, сер. мат.-физ., 22, № 5, с. 5—11.
25. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., № 5, с. 123—151.

1954

26. Основы линейной алгебры.— Львов : Изд-во Львовского ун-та.

1955

27. О некоторых условиях применимости метода Фурье.— Труды Азерб. ун-та, сер. физ-мат., № 3, с. 85—92.

1956

28. Разложение полиномиальной матрицы на множители.— Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, сер. физ-мат., 38, 2, с. 3—7.
29. Условия существования решений первой граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.— Докл. АН УССР, № 1, с. 5—9.
30. Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.— Докл. АН УССР, № 2, с. 107—112.
31. Зависимость решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа от коэффициентов системы.— Докл. АН УССР, № 3, с. 211—213.
32. Об одном методе решения основной задачи теории упругости.— Тр. III Всес. мат. съезда, 1, с. 59.
33. Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений.— Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, сер. физ-мат., 38, № 2, с. 8—12.

1957

34. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений в частных производных.— Укр. мат. журн., № 9, с. 389—393.
35. Интегральные уравнения с аналитическим ядром.— Научн. зап. Львовск. ун-та, сер. мех.-мат., 44, № 8, с. 200—203.

1958

36. Об обдном методе решения второй основной задачи теории упругости.— Теор. и прикл. мат., вып. 1, с. 22—27.
37. Единственность решения задачи Коши для уравнения типа Шредингера.— Докл. АН УССР, № 2, с. 119—122,
38. Единственность решения задачи Коши для одного класса уравнений эллиптического типа.— Докл. АН УССР, № 7, с. 689—693.

1959

39. Поведение решений системы дифференциальных уравнений эллиптического типа в окрестности бесконечно удаленной точки.— Докл. АН УССР, № 9, с. 931—935.
40. Основы линейной алгебры, Львов (на укр. языке).

1961

41. Теория общих эллиптических систем дифференциальных уравнений.— Тр. 4-го Всесоюзн. мат. съезда, т. 1 (1961), т. 2 (1964), с. 531.

1963

42. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений.— Теор. и прикл. мат., вып. 2, с. 53—57.
43. Сведение системы дифференциальных уравнений к каноническому виду.— Теор. и прикл. матем., вып. 2, с. 58—64.

1966

44. Об одном классе эволюционных уравнений.— Докл. АН УССР, № 6, с. 711—714.
45. Об одном типе эволюционных уравнений.— Тезисы и сообщения научн. конф., Донецк (1966), с. 189.

1968

46. Теория Морса и ее применение к дифференциальным уравнениям в частных производных.— Тез. докл. секций мат. и мех. I сессия Донец. научн. центра АН УССР, № 1.
47. Об одном применении методов Морса в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Докл. АН УССР, сер. А, № 6, с. 515—518.

1969

48. Георгий Дмитриевич Суворов (к 50-летию со дня рождения).— Укр. мат. журн., 21, № 3, с. 361—364.— Соавт.: Александров И. А., Белый В. И., Гутлянский В. Я., Данилюк И. И.

1970

49. Смешанная задача типа Коши — Дирихле для уравнений гиперболического типа.— Докл. АН УССР, Сер. А, № 7, с. 592—594.
50. Задача Коши для уравнений гиперболического типа.— В кн.: Мат. физика, вып. 7, с. 122—129.

1971

51. Дифференцируемые многообразия (тексты лекций).— Донецк : Изд-во Донецкого ун-та.— 143 с.

1975

52. Об одном классе граничных задач в шаре для дифференциальных уравнений эллиптического типа.— Докл. АН УССР, сер. А, № 8, с. 684—688.
53. Данилюк Иван Ильич.— Вестн. АН УССР, № 6, с. 97—98.
54. Дефектные числа самосопряженных дифференциальных операторов эллиптического типа.— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, № 4, с. 110—115.

1976

55. Дефектные числа операторов Фредгольма.— Укр. мат. журн. 28, № 3, с. 405—408.

1978

56. Некоторые свойства сферических функций.— В кн.: Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев : Наук. думка, с. 78—95.

1979

57. О некоторых свойствах полиномиальных матриц.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Киев : Наук. думка, 108—116.

1980

58. Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев : Наук. думка,— 216 с.
59. Донецкая конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных,— Донецк. УМН, 35, № 1, с. 235—240.

СОДЕРЖАНИЕ

От редакционной коллегии 3

Линейные дифференциальные операторы 5
О некоторых свойствах кольца дифференциальных операторов 76
Об одном обобщении понятия аналитической функции 81
Об одном обобщении понятия аналитической функции 85
Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа 100
Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений 103
Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа 134
Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа 158
Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки 161
Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к системе регулярных интегральных уравнений 165
Об одной граничной задаче для гармонических функций 172
Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям 178
О некоторых условиях применимости метода Фурье 204
Разложение полиномиальной матрицы на множители 210
Условия существования решения первой граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа 213
Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа 218
Зависимость решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа от коэффициентов системы 224
Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений 226
О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений в частных производных 230
Интегральные уравнения с аналитическим ядром 235
Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости 238
Единственность решения задачи Коши для уравнения типа Шредингера 242
Единственность решения задачи Коши для одного класса уравнений эллиптического типа 245
Поведение в бесконечности решений системы дифференциальных уравнений эллиптического типа 249
Об одном типе сингулярных интегральных уравнений 253
Об одном классе эволюционных уравнений 258
Об одном применении методов Морса в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа 262
Задача Коши для уравнений гиперболического типа 266
Смешанная задача типа Коши — Дирихле для уравнения гиперболического типа 274
Дефектные числа самосопряженных дифференциальных операторов эллиптического типа 277
Об одном классе граничных задач в шаре для дифференциальных уравнений эллиптического типа 282
Дефектные числа операторов Фредгольма 287
Конечно-разностные приближения в теории линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа 290

Список печатных работ Я. Б. Лопатинского 312

Я РОСЛАВ БОРИСОВИЧ ЛОПАТИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Избранные труды

Утверждено к печати ученым советом Института прикладной математики и механики АН УССР

Редактор
Т. С. Мельник
Оформление художника
Б. И. Бродского
Художественный редактор
И. П. Антонюк
Технический редактор
М. А. Притыкина
Корректоры
И. В. Точиненко,
Э. Я. Белокопытова

Информ. бланк № 6512

Сдано в набор 13.10.83.
Подп. в печ. 28.06.84.
БФ 26443.
Формат 70×100/16. Бум. тип. № 1.
Обыкн. нов. гарн. Выс. печ.
Усл. печ. л. 25,83. Усл. кр.-отт. 26,32.
Уч.-изд. л. 25,66. Тираж 1300 экз.
Заказ 4-294. Цена 4 р. 20 к.

Издательство «Наукова думка».
252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3 на книжной фабрике «Коммунист». 310012, г. Харьков 12, ул. Энгельса, 11.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук, Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова, 1946 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Применение алгебраических методов в теории дифференциальных уравнений, отчетливо намеченное в работах Ли, Фробениуса, Пикара, развивалось в основном в следующих направлениях.

1. Теория Галуа. Это направление, берущее начало в работах Ли и Пикара, было посвящено главным образом методам интегрирования дифференциальных уравнений, основанным на использовании непрерывных групп преобразований, в форме, близкой к классической теории Галуа.

В настоящее время под влиянием работ Ритта снова возник интерес к этой области: проводится изучение дифференциальных полей в связи с переносом на них артиновой формы теории Галуа (Кольчин, Рейденбух, Риблет).

2. Теоремы существования. В связи с общей теорией систем аналитических дифференциальных уравнений (Мерай, Рикье) возникло применение гильбертовой теории алгебраических форм для установления канонических форм таких систем, для характеристики «общего решения» и т. п. (Деласье, Н. М. Гюнтер).

Особое место занимает применение кососимметрических дифференциальных форм к системам пфаффовых уравнений, являющееся основой их исследования (Фробениус, Картан).

3. Теория линейных дифференциальных операторов. Теория, начатая Фробениусом, главным образом изучала теорию разложения операторов (операторных идеалов), что привело к переносу некоторых теорем о разложении полиномиальных идеалов (Леви, Нетер, Оре).

4. Интегральные многообразия. Направление, начатое Риттом, изучает в основном множества интегралов системы алгебраических дифференциальных уравнений («интегральное многообразие» этой системы). На этом пути получено расщепление интегрального многообразия на неприводимые компоненты (с некоторой их характеристикой), по аналогии с алгебраическими многообразиями, и дана по-новому классификация интегралов — почти исключительно для случая одного аргумента.

Настоящая работа примыкает к последнему направлению. Однако объект ее изучения — системы линейных дифференциальных уравнений, в связи с их интегральными многообразиями — потребовал привлечения иных приемов и полученные результаты значительно отличаются от результатов Ритта и его последователей.

В работе общим методом охватывается произвольное количество дифференцирований и результаты представлены в возможно общей форме.

Областью коэффициентов рассматриваемых линейных дифференциальных операторов является произвольное дифференциальное поле, их интегральные многообразия определяются в дифференциальной группе

общего вида; ограничения в дальнейшем накладываются по мере необходимости. (Получаемые результаты оказываются при этом справедливыми в классическом «аналитическом» случае.) Исследование развивалось по схеме, соответствующей теории полиномиальных идеалов, с переходом от теории колец дифференциальных операторов (полиномиальных колец) к теории интегральных многообразий (алгебраических многообразий).

Начало работы (§ 2—5) посвящено изучению свойств матриц и модулей из кольца дифференциальных операторов. Здесь изложены также и известные ранее результаты — например, теорема о базисе (Нетер), теорема о разложении модуля (Леви, Нетер), которые, однако, доказывались иным методом, в результате чего удалось получить некоторые их усиления.

При рассмотрении операторных матриц установлено (§ 2), что кольцо дифференциальных операторов обладает полем отношений (обобщение аналитической теоремы Оре — для случая одного дифференцирования). Это позволило перенести теорию линейной зависимости Штейница и элементарные свойства числовых матриц на операторные матрицы (например, совпадение левого и правого рангов матриц). Доказательство теоремы о базисе и ее уточнениям приведено в § 3. Здесь указана лемма (лемма 6), из частного случая которой следует теорема о резольвенте Ритта — Колчина, а также доказательство ряда результатов § 3, 4. Лемма верна для кольца дифференциальных операторов с коэффициентами из поля, которое (при n дифференцированиях) содержит n элементов с ненулевым якобианом («полное» поле).

В этом предположении доказана простота кольца дифференциальных операторов (для одного дифференцирования,— у Джекобсона). Далее оказалось, что всякий модуль ранга r обладает базисом длины не большей $r+1$; в частности, каждый идеал имеет базис, содержащий не более двух элементов (соответствующий эквивалент для дифференциальных уравнений очевиден). Наконец, используя понятие эквивалентности модулей (Леви, Нетер), доказано, что неприводимый k-членный модуль ранга k эквивалентен неприводимому идеалу. Последнее предложение позволяет свести изучение интегральных многообразий модулей к интегральным многообразиям неприводимых идеалов (§ 6, 7), если эти многообразия определяются в некоторой дифференциальной группе («замкнутой»), подчиненной естественным ограничениям.

Именно в этом случае интегральное многообразие модуля оказывается (групповой) суммой интегральных многообразий его неприводимых компонент (обобщение Даламберова расщепления решения уравнения колебаний струны); эти последние, в свою очередь, определяются (и притом, вообще, взаимно однозначно) интегральными многообразиями неприводимых идеалов. При этом соответствие между модулями и их интегральными многообразиями является взаимно однозначным (что, как известно, не имеет места в полиномиальном случае). Указываются также некоторые другие преобразования модулей (§ 5), которые применяются к преобразованию систем дифференциальных уравнений (§ 7).

В частности, выяснены условия сводимости решения системы с несколькими неизвестными к независимому решению уравнений с одним неизвестным каждое (в обобщение одного наблюдения А. И. Лурье). Можно отметить также, что из получаемых результатов легко устанавливаются, например, условия независимости некоторых из искомых функций от некоторых из свободных членов системы уравнений (для постоянных коэффициентов и одного дифференцирования указано Н. Н. Лузиным), условия разрешимости системы при любых свободных членах и т. п.

Как показано в § 11, все действия над модулями (матрицами, уравнениями), приводимые в § 2—5,7 (за исключением разложения модуля в пересечение), осуществимы посредством ограниченного заранее конечного количества алгебраических действий и дифференцирований.

Вторая часть работы в основном посвящена разложению интегрального многообразия на части разной размерности. Такое разложение оказалось тесно связанным с некоторыми понятиями, введенными в теорию полиномиальных колец Хентцельтом.

В § 8 вводится понятие размерности модуля и показывается его инвариантность относительно некоторой группы линейных преобразований операторов дифференцирования и также преобразований эквивалентности модуля.

В § 9, 10 определяются «сопутствующие» модули и характеры модуля и также доказывается их инвариантность (в предыдущем смысле).

В дальнейшем устанавливается связь этих понятий со строением интегрального многообразия.

Именно в § 12 для одного типа дифференциальных групп вводятся понятия размерного многообразия, сопутствующих многообразий и характеров и исследуются некоторые их свойства. В § 13 доказывается, что интегральные многообразия модулей, определенных в группах, в которых разрешимы «нормальные» задачи Коши («группы Коши»), размерны. При этом размерность и соответствующие характеры модуля и его интегрального многообразия совпадают; сопутствующие многообразия оказываются интегральными многообразиями соответствующих сопутствующих модулей, что переносит доказанные для модулей «теоремы инвариантности» на интегральные многообразия.

Получается следующее: если $\sum_{t=0}^{n} u_t$ есть разложение интегрального многообразия в сумму многообразий (групповую) разной размерности (t), то многообразия вида $\sum_{t\geq s} u_t$ оказываются также интегральными многообразиями ($s = 0, 1, \ldots, n$) и именно сопутствующих модулей. Характеры совпадают с минимальными количествами произвольных функций (различного количества аргументов), определяющих интегральное многообразие модуля (общее решение системы уравнений). Попутно получается утвердительное решение одной проблемы Жанэ (в несколько измененной формулировке): система k операторно независимых уравнений с k неизвестными или однозначно разрешима, или имеет несмешанное $(n-1)$-мерное (при n аргументах) интегральное многообразие.

Согласно идее Жанэ в § 11 вводится понятие производного модуля (соответствующего уравнениям, связывающим «начальные» значения искомых функций), с помощью которого указываются методы эффективного определения размерности, характеров, сопутствующих модулей и также компонент (упоминающихся ранее u_t) равных размерностей интегрального многообразия.

Попутно получаются также методы определения базиса пересечения модулей и базиса линейных операторных зависимостей между операторными комплексами. В частности, получается также новое решение аналогичной задачи для полиномиальных комплексов (впервые решенной Гильбертом). Также переносится на операторные модули известная теорема Гильберта о характеристической функции дополнительного модуля.

Из результатов § 11 вытекает возможность определения по характеристике модуля количества «независимых» линейно-операторных начальных условий, совместных с системой уравнений (соответствующей базису

этого модуля). В § 12 рассматриваются операторные эндоморфизмы интегрального многообразия. Оказывается, в случае неприводимого модуля такие эндоморфизмы или нильпотентные, или отображают многообразие на себя. При этом множество нильпотентных эндоморфизмов образует нильпотентный двухсторонний идеал (радикал) кольца операторных эндоморфизмов, показатель нильпотентности не превышает больше чем на единицу суммы характеров модуля.

Некоторые результаты настоящей работы, определенные в более общей алгебраической форме, приведены в приложениях 1—3.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Дифференциальное кольцо и кольцо дифференциальных операторов

Кольцо Γ будет называться дифференциальным[1], если оно коммутативно, имеет характеристику нуль, имеет единицу, не содержит делителей нуля и, наконец, обладает n отображениями $\partial_1, \ldots, \partial_n$ (которые будут записываться как левые операторы) со свойствами: если $a, b \in \Gamma$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $\partial_i a \in \Gamma$,

$$\partial_i (a + b) = \partial_i a + \partial_i b, \ \partial_i (ab) = a\partial_i b + b\partial_i a, \ \partial_i (\partial_j a) = \partial_j (\partial_i a). \qquad (1)$$

При этом $\partial_i^0 = \partial_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ обозначает тождественный автоморфизм кольца. В дальнейшем иногда будет предполагаться, что ∂_i отображает Γ в некоторое надкольцо с сохранением прочих предположений (дифференциальное кольцо в обобщенном смысле). Абелева группа Γ' без кручения с кольцом (левых) операторов Γ будет называться дифференциальной группой, если существует n отображений $\partial_1, \ldots, \partial_n$, относительно которых Γ является дифференциальным кольцом, причем если $a \in \Gamma$, $f, g \in \Gamma'$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $\partial_i f \in \Gamma'$, $\partial_i (f + g) = \partial_i f + \partial_i g$, $\partial_i (af) = (\partial_i a) f + a\partial_i f$, $\partial_i (\partial_j f) = \partial_j (\partial_i f)$, единица ∂_0 — единичный оператор в Γ'. Топологическое кольцо (группа) будет называться дифференциальным топологическим кольцом, если в дополнение к свойствам дифференциального кольца отображения $\partial_1, \ldots, \partial_n$ непрерывны и кольцо (группа) является T_1-пространством (см. Хаусдорф [1]).

Дифференциальное кольцо обладает полем отношений. Операторы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ известным образом распространяются на элементы этого поля, которое оказывается дифференциальным полем.

Если Γ — дифференциальное кольцо (поле) и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — неопределенные, то присоединяя к Γ все полиномы (рациональные функции) неопределенных $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \varphi_j, \ldots$ с коэффициентами из Γ, получим расширение (трансцендентное) дифференциального кольца (поля), которое само является дифференциальным кольцом (полем).

Элемент a дифференциального кольца Γ называется постоянным, если $\partial_i a = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из $\partial_i 0 = \partial_i (0 + 0) = 2\partial_i 0$, $\partial_i 1 = \partial_i (1 \cdot 1) = 2\partial_i 1$ следует, что 0, 1 и поэтому всякое рациональное число является постоянным. Пусть кольцо Γ (с операторами $\partial_1, \ldots, \partial_n$) содержит n «неза-

[1] Понятие дифференциального поля (в более частной форме) впервые введено Пикаром. В дальнейшем иногда дифференциальное кольцо будет коротко называться кольцом. У Нетер и Шмейдлера [1] рассматривается более общий случай: $\partial_i (ab) = a_i \partial_i b + a_i' b$, где $a_i = 0$ эквивалентно $a = 0$. Этим охвачен и конечно-разностный случай.

висимых» элементов $a_1, \ldots, a_n$ (таких, что якобиан $|\partial_i a_j|$ отличен от нуля) такое кольцо будет называться полным.

Важность этого типа колец показывает следующая лемма.

Лемма 1[2]. *Пусть* $f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \ldots, f_l(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ *суть ненулевые полиномы неопределенных* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \varphi_j, \ldots$ *с коэффициентами из полного кольца* Γ. *Тогда существуют элементы* $b_1, \ldots, b_k \in \Gamma$ *такие, что* $f_1(b_1, \ldots, b_k), \ldots, f_l(b_1, \ldots, b_k)$ *отличны от нуля*[3].

Доказательство. Вводя в рассмотрение $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \ldots f_l(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, можно без ограничения общности полагать $l = 1$. Доказательство проводится индукцией по k.

Пусть сначала $k = 1$ $(l = 1)$. Степенью одночлена $a(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \varphi)^j$ $(a \in \Gamma;\ a \neq 0)$ назовем $j(i_1 + \ldots + i_n)$; степенью произведения таких одночленов — сумму их степеней; наконец, степенью полинома $g(\varphi)$ — максимальную из степеней его слагаемых (в несократимой записи полинома).

Рассмотрим множество N таких полиномов $g(\varphi)$ с коэффициентами из Γ, что для всякого $a \in \Gamma$ $g(a) = 0$. Множество N обладает следующими свойствами: $0 \in N$; если $g(\varphi)$, $g_1(\varphi) \in N$ и $h(\varphi)$ — произвольный полином с коэффициентами из Γ, то $g(\varphi) + g_1(\varphi) \in N$, $h(\varphi)\ g(\varphi) \in N$, $g(h(\varphi)) \in N$; если $g(\varphi) \in N$ не содержит φ и его производных, то $g(\varphi) = 0$.

Достаточно теперь доказать, что N состоит только из нуля.

Пусть это не имеет места; тогда среди ненулевых полиномов из N существует полином $f_0(\varphi)$ минимальной степени s.

Пусть $h(\varphi)$ — полином с произвольными целыми коэффициентами, не содержащий производных φ. Тогда $f_0(h(\varphi))$ имеет вид

$$f_0(h(\varphi)) = \omega_{-1}(\varphi) + \omega_0(\varphi) h(\varphi) + \omega_1(\varphi) h'(\varphi) + \cdots + \omega_s(\varphi) h^{(s)}(\varphi);$$

здесь $h^{(i)}\varphi$ — производная $h(\varphi)$ по φ; $\omega_i(\varphi)$ $(i = -1, 0, \ldots, s)$ — полином от φ, который может содержать только $h^{(i)}\varphi$ при $j \leqslant i$ и притом алгебраически. Полагая $h(\varphi) = 0$, получаем $\omega_{-1}(\varphi) \in N$; так как $\omega_{-1}(\varphi)$ очевидно не зависит от φ, то $\omega_{-1}(\varphi) = 0$.

Полагая $h(\varphi) = \varphi + m$, заключаем, что $\omega_0\varphi$ не содержит $h(\varphi)$ и $\omega_0(\varphi) = 0$ (из-за минимальности $f_0(\varphi)$). Если $h(\varphi) = m\varphi$, то $\omega_1(\varphi) \in N$ (после подстановки $h(\varphi) = m\varphi$ и, следовательно, без подстановки). Тогда $\omega_2(\varphi) h''(\varphi) + \ldots + \omega_s(\varphi) h^{(s)}(\varphi) \in N$. Так как степень этого полинома меньше степени $f_0(\varphi)$, то он при всяком $h(\varphi)$ равен нулю.

Легко видеть, что это возможно только если $f_0(\varphi)$ содержит производные φ не выше первой. По формуле

$$f_0(h(\varphi)) = \omega_1(\varphi) h'(\varphi),$$

полагая $h(\varphi) = \varphi + m$ и далее $h(\varphi) = m\varphi$, заключаем, что $f_0(\varphi)$ есть однородный полином $\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi$ с коэффициентами из Γ положительной степени

$$f_0(\varphi) = F(\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi).$$

---

[2] Нетрудно показать, что эта лемма обратима.

[3] Эта лемма хорошо известна для недифференциальных полиномов (оговорка о якобиане излишня). Для дифференциальных полиномов одного аргумента с существенным ограничением лемма доказана Риттом (см. Ритт [1, с. 30]. В общем случае (для поля) лемма доказана другим методом Кольчиным [1].

Пусть $F_i(\varphi)$ обозначает частную производную F по $\partial_i\varphi$. Делая замену $\varphi = \varphi + ma_i$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(\varphi)\, \partial_j a_i \in N \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда из минимальности $f_0(\varphi)$ следует

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(\varphi)\, \partial_j a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а так как $|\partial_j a_i| \neq 0$, то $F_j(\varphi) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Отсюда, наконец, вытекает, что $f_0(\varphi)$ не зависит от φ и $f_0(\varphi) = 0$, что приводит к противоречию.

Поэтому каждому ненулевому полиному $f(\varphi)$ соответствует элемент $a \in \Gamma$ такой, что $f(a) \neq 0$. Это доказывает лемму при $k = 1$ и $l = 1$, а следовательно, при $k = 1$ и любом l.

Продолжая индукцию, предполагаем, что лемма верна для $k = s - 1$ при любом l.

Пусть $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ — ненулевой полином; коэффициенты его при разных произведениях φ_s и его производных являются полиномами $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$, не равными нулю в совокупности; но тогда, по предложению, их можно заменить элементами $b_1, \ldots, b_{s-1} \in \Gamma$ так, что неравенство нулю сохранится.

Следовательно, $f(b_1, \ldots, b_{s-1}, \varphi_s) \neq 0$; но тогда существует такое $b_s \in \Gamma$, что $f(b_1, \ldots, b_s) \neq 0$. Это доказывает лемму при $k = s$ и $l = 1$ и, следовательно, при любом l; вместе с тем этим завершается индуктивное доказательство.

Дифференциальная группа (кольцо, поле), обладающая элементами $x_1, \ldots, x_n$ такими, что $\partial_i x_j = 1$ при $i = j$, $\partial_i x_j = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots n)$, будет называться группой (кольцом, полем) функций аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Очевидно, кольцо (поле) функций полное. В дальнейшем будет иметь большое значение кольцо расширения поля функций специального вида.

Пусть $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \Gamma(x)$ — дифференциальное поле функций; пусть $\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — операторно-изоморфное поле с соответствующими аргументами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и операторами дифференцирования $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$. Рассматривается дифференциальное кольцо $\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)[x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n] = \Gamma(\xi)[x - \xi]$ формальных степенных рядов $\sum_{i_1 \ldots i_n = 0}^{\infty} \frac{f_{i_1 \ldots i_n}}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n}$, где $f_{i_1 \ldots i_n} \in \Gamma(\xi)$, с естественно определенными операциями сложения, умножения и дифференцирования[4]. Сопоставляя каждому $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \in \Gamma(x)$ ряд $\sum_{i_1 \ldots i_n = 0}^{\infty} \frac{\delta_1^{i_1} \ldots \delta_n^{i_n}}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n} \in \Gamma(\xi)[x - \xi]$, получают, как легко видеть, операторно-изоморфное отображение $\Gamma(x)$ в $\Gamma(\xi)[x - \xi]$. При отождествлении соответствующих элементов $\Gamma(x)$ будет в дальнейшем рассматриваться как часть $\Gamma(\xi)[x - \xi]$. Поле $\Gamma' = \Gamma(\xi)[x - \xi]$ можно рассматривать, пользуясь этим отождествлением, как дифференциальную группу с $\Gamma(x)$, как поле (левых) операторов.

---

[4] Это же построение независимо ввел Шевалле [1].

Наибольшее из целых положительных чисел k (или ∞) со свойством $f_{i_1 \ldots i_n} = 0$ при $i_1 + \cdots + i_n < k$ будет называться степенью элемента $\sum\limits_{i_1 \ldots i_n = 0}^{\infty} \frac{f_{i_1 \ldots i_n}}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n} \in \Gamma(\xi)[x - \xi]$; ∞ — степень нулевого элемента. Поле $\Gamma(\xi)[x - \xi]$ будет рассматриваться как дифференциальное топологическое кольцо со следующим определением предела: $f_m \to f$ $(m = 1, 2, \ldots)$, если степень $f_m - f$ неограниченно растет. Кольцо $\Gamma(\xi)[x - \xi]$ нормируемо со следующим, например, определением нормы: если степень $f \in \Gamma(\xi)[x - \xi]$ равна k, то $|f| = 2^{-k}$; полагается $2^{-\infty} = 0$, так что $|0| = 0$. Как легко видеть, $|f + g| \leqslant \max\{|f|, |g|\}$, $|fg| = |f||g|$[5].

С каждым дифференциальным кольцом Γ связывается кольцо дифференциальных (левых) операторов $\Delta(\Gamma)$, действующих на элементы Γ. Отображениям $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n$ в Γ сопоставляются операторы из $\Delta(\Gamma)$ с тем же действием на элементы Γ; это позволяет сохранить для них те же обозначения. Эти операторы обладают свойствами: $\partial_0 \partial_i = \partial_i \partial_0 = \partial_i$, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ $(i, j = 0, 1, \ldots n)$. Далее $\Delta(\Gamma)$ состоит из всех полиномов вида $\sum\limits_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}$, $a_{i_1 \ldots i_n} \in \Gamma$, сумма которых определяется очевидным образом, в представлении $\sum\limits_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}$ последовательности индексов $(i_1, \ldots, i_n)$ в различных членах можно считать, таким образом, различными (каноническая форма). Равенство нулю такого полинома равносильно равенству нулю всех коэффициентов его канонической формы. Степенью такого ненулевого полинома называется наибольшее целое число p, имеющее свойство: существует коэффициент $a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$, $i_1 + \ldots + i_n = p$; степень нуля, как обычно, принимается -1. Произведение операторов из $\Delta(\Gamma)$ определяется законами ассоциативности и дистрибутивности и правилами: $\partial_0 \alpha = \alpha \partial_0 = \alpha$ для любого $\alpha \in \Delta(\Gamma)$; $\partial_i (a \partial_0) = a \partial_i + (\partial_i a) \partial_0$ $(a \in \Gamma;\ i = 1, \ldots, n)$. Наконец, для любых $a \in \Gamma$; α, $\beta \in \Delta(\Gamma)$ $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a)$. Легко видеть, что эти условия согласованы со свойствами отображений $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n$[6].

Кольцо $\Delta(\Gamma)$ вообще не коммутативно; в случае и только, если $\partial_i \tau = \{0\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\Delta(\Gamma)$ коммутативно.

В дифференциальном топологическом кольце Γ операторы из $\Delta(\Gamma)$, очевидно, непрерывны. Действие операторов кольца $\Delta(\Gamma)$ естественно продолжается на элементы дифференциальной группы Γ', допускающей $\partial_0, \ldots, \partial_n$ и элементы Γ в качестве левых операторов.

В кольце $\Delta(\Gamma)$ имеется инволютивный обратный автоморфизм I, указанный Фробениусом [1]:

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \to \sum_{i_1 \ldots i_n} (-1)^{i_1 + \cdots + i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \partial_0,$$

$J^2 = 1$, $J(\lambda\mu) = J(\mu) J(\lambda)$ $(\lambda, \mu \in \Delta(\Gamma))$. Это — переход к сопряженному оператору.

Пример 1. Пусть $J[x]$ — кольцо функций аргументов $x_1, \ldots, x_n$, аналитических в некоторой точке (области), $\Gamma(x)$ — соответствующее поле отношений. Отображение $\Gamma(x)$ в $\Gamma(\xi)[x - \xi]$ соответствует переходу к «точке общего положения» $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которая может быть специализирована для любого конечного (не более чем счетного) множества

[5] Построенное пространство топологически эквивалентно бэровскому (см. Хаусдорф [1]).

[6] В записи оператора $a\partial_0$ $(a \in \Gamma)$ ∂_0 не будет опускаться.

элементов $\Gamma(x)$ так, что соответствующие этим элементам образы в $\Gamma(\xi) \times [x - \xi]$ представят аналитическое продолжение этих элементов.

Пример 2. Пусть Γ — множество абсолютно интегрируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций, со свойством: для любого натурального m и любой функции $f(x) \in \Gamma$ $x^m f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Сложение в Γ определяется обычным образом, умножение — формулой: $(f \times g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) \times g(t)\, dt$. Относительно этих операций кольцо Γ является коммутативным без делителей нуля (и без единицы); отображение $\partial : f(x) \to xf(x)$ удовлетворяет аксиомам дифференциального кольца (единицей будет функция Дирака)[7].

Пример 3. Пусть $J(x)$ — множество неограниченно дифференцируемых в отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ действительных функций. В $J(x)$ вводится (по Банаху) норма: при $a \in \Gamma[x]$ $\|a\| = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} \frac{\sup|\partial^i a|}{1 + \sup|\partial^i a|}$; тогда для любого действительного числа t $\|ta\| \leqslant (1 + |t - 1|)\|a\|$ и $\|\partial_i a\| \leqslant 4\|a\|$. При соответствующей топологии $J[x]$ оказывается поэтому дифференциальной топологической группой, полем (непрерывных) операторов для которой является поле действительных чисел.

Пример 4. Пусть $\Gamma[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо функций комплексных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, аналитических в $|x_1| < R_1, \ldots, |x_n| < R_n$; топология в $\Gamma[x_1, \ldots, x_n]$ определяется условием: сходимость $a_n \to a$ в $\Gamma[x_1, \ldots, x_n]$ есть равномерная сходимость $a_n \to a$ на любом замкнутом подмножестве области $[x_1] < R_1, \ldots, |x_n| < R_n$; $\Gamma[x_1, \ldots, x_n]$ является дифференциальным топологическим кольцом.

2. Матрицы в кольце дифференциальных операторов

Здесь основные свойства числовых матриц будут перенесены на матрицы с элементами из кольца дифференциальных операторов. В дальнейшем, без особой оговорки, при рассмотрении суммы и произведения матриц будет предполагаться допустимость соответствующих операций.

Элементы $\Delta(\Gamma)$, как обычно, будут отождествляться с матрицами первого порядка.

Матрица $\overline{A}$, полученная из матрицы A заменой ее элементов сопряженными операторами и транспонированием, будет называться сопряженной матрице A. Легко проверяемые свойства $\overline{\overline{A}} = A$, $(\overline{AB}) = \overline{B} \cdot \overline{A}$ будут использованы для получения «правых» свойств матрицы из ее «левых» свойств и обратно[8].

Матрица A с k столбцами и l строками будет иногда обозначаться ${}_lA^k$[9].

В дальнейшем будет рассматриваться кольцо $\Delta\Gamma = \Delta$, соответствующее дифференциальному полю Γ.

Лемма 2. *Матрица ${}_lA^k$ при $l > k$ $(l < k)$ является правым (левым) делителем нуля.*

[7] Это следует из результатов Райкова, приведенных в его работе «Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров».— Тр. Матем. ин-та им. И. А. Стеклова, 1945, 14, с. 29, 36—37, 46.

[8] Это понятие введено Фробениусом [1].

[9] Обозначение предложено Р. Султановым.

Доказательство. Пусть $l > k$; максимальная степень элементов ${}_lA^k$ (как дифференциальных операторов) равна p («степень» матрицы); ${}_1B^l$ — матрица с неопределенными элементами степени q. Число неопределенных коэффициентов в операторах из ${}_1B^l$ равно $l\binom{n+q}{n}$. Соотношение ${}_1B^l{}_lA^k = {}_10^k$ (так как произведение операторов степеней p, q есть оператор степени $p+q$)[10] приводит не более чем к $k\binom{n+p+q}{n}$ однородным уравнениям с коэффициентами (и неизвестными) из Г.

При достаточно большом q очевидно

$$l\binom{n+q}{n} > k\binom{n+p+q}{n},$$

и, следовательно, эта система уравнений нетривиально разрешима. Это определяет ${}_1B^l \neq {}_10^l$ так, что ${}_1B^l{}_lA^k = {}_10^k$, и доказывает первое утверждение леммы. Полезно отметить, что ${}_1B^l$ определяется посредством алгебраических действий и дифференцирований; для q получается оценка: $q > \frac{k^{1/n}}{l^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}}(n+p)$. Пусть теперь $l < k$ и ${}_kB^1$ — неопределенная матрица. Условие ${}_lA^k{}_kB^1 = {}_l0^1$ равносильно ${}_1\overline{B}^k{}_k\overline{A}^l = {}_10^l$, что приводит к рассмотренному уже случаю. Коэффициенты операторов из ${}_kB^1$ определяются, таким образом, посредством рациональных операций и дифференцирований, что и требовалось доказать. Из этой леммы получается важное следствие, если положить $k = 1$, $l = 2$ или $k = 2$, $l = 1$.

Лемма 3. *Для любых двух элементов α, β из Δ существуют две ненулевые пары элементов γ, δ; ε, $\varkappa$ такие, что $\gamma\alpha = \delta\beta$ и $\alpha\varepsilon = \beta\varkappa$.*

Более того, аналогичным подсчетом легко доказать, что если β не зависит от $\partial_1, \ldots, \partial_i$, то γ, ε можно также полагать не зависящими от $\partial_1, \ldots, \partial_i$. Согласно предыдущему γ, δ, ε, $\varkappa$ определяются рациональными действиями и дифференцированиями.

Так как Δ не имеет, кроме того, делителей нуля, то отсюда, на основании одной теоремы Оре [1], следует такая теорема.

Теорема 1. *Кольцо Δ обладает полем отношений*[11].

Поле отношений будет обозначаться (Δ). Строки $A_1, \ldots, A_k$ одинаковой длины с элементами из Δ будут называться линейно зависимыми над Π (Π — надкольцо Δ), слева, если существуют элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Pi$, по крайней мере один из которых отличен от нуля, такие, что $\alpha_1A_1 + \ldots + \alpha_kA_k = 0$ (нулевая строка). Аналогично определяется линейная зависимость столбцов (справа).

Пусть M — произвольное множество строк (столбцов) из Δ одинаковой длины k, Произвольное множество элементов M, линейно независимых над Π[12], которое не может быть расширено с сохранением этого свойства, называется линейно независимым базисом M (над Π).

Теорию линейной зависимости Штейница можно перенести в множество M на основании следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть M — произвольное множество строк (столбцов) из Δ. Длина r линейно независимого базиса M над Δ определяется однозначно (r — ранг M над Δ) и при этом равняется длине линейно независимого базиса M над (Δ), $r \leqslant k$. Произвольное множество линейно независимых над Δ элементов M может быть дополнено до линейно независимого базиса M над Δ. r линейно независимых над Δ, произвольных элементов из M образуют базис в M. При дополнении M произвольным множеством элементов, каждый из которых линейно зависим над Δ с элементами из M, ранг не меняется.*

Доказательство. Все утверждения теоремы, как известно, справедливы при замене линейной зависимости над Δ линейной зависимостью над (Δ) (см. Ван-дер-Варден [1, § 28]).

Но так как каждое левое отношение элементов из Δ может быть заменено правым отношением и обратно (следует из леммы 3), то линейно зависимые над (Δ) элементы оказываются линейно зависимыми над Δ (и обратно). Из сделанных замечаний следует справедливость теоремы.

Левым рангом (s) матрицы ${}_lA^k$ из Δ называется ранг[13] множества ее строк; правым рангом (r) — ранг множества ее столбцов. По предыдущей теореме $r \leqslant k$, $s \leqslant l$. С помощью этих понятий лемма 2 поддается уточнению.

Теорема 3. *Ранг множества строк (столбцов), уничтожающих матрицу ${}_lA^k$ слева (справа), равен $l - s$ ($k - r$), где s (r) есть левый (правый) ранг ${}_lA^k$.*

Доказательство. Достаточно доказать первый вариант. Пусть $A_1, \ldots, A_l$ — строки матрицы ${}_lA^k$. Пусть M — модуль с множеством левых операторов Δ, порожденный строками $A_1, \ldots, A_l$. По теореме 2 ранг M равен s. Пусть E — модуль линейных форм, с тем же множеством операторов, с образующими $u_1, \ldots, u_l$; его ранг равен l. Отображение

$$\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_lu_l \to \alpha_1A_1 + \cdots + \alpha_lA_l$$

есть операторный гомоморфизм E на M; ядро этого гомоморфизма N очевидно изоморфно множеству P, состоящему из l-строк, уничтожающих ${}_lA^k$ слева; таким образом, ранг N равен рангу P, т. е. — p.

Из-за изоморфизма $M \simeq E/N$, $s = l - p$.

Итак, $p = l - s$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Левый и правый ранги каждой матрицы из Δ (Γ) равны между собой.*

Это позволит говорить о ранге матрицы.

Доказательство. Пусть левый (правый) ранг матрицы ${}_lA^k$ равен s (r). Пусть P есть множество всех строк, уничтожающих ${}_lA^k$ слева; ранг P равен по теореме 3 $l - s$. Пусть ${}_lA^r$ — матрица, полученная из ${}_lA^k$ удалением зависимых столбцов; пусть левый ранг этой матрицы равен s', правый — r. Очевидно, множество уничтожающих ${}_lA^r$ слева строк совпадает с P; поэтому $l - s = l - s'$ и $s = s'$. Точно так же, при удалении из ${}_lA^r$ зависимых строк получают матрицу ${}_sA^r$ с левым рангом s и правым рангом r. По лемме 2 матрица ${}_sA^r$ должна быть квадратной. Итак $r = s$, что и требовалось доказать. Квадратная матрица, порядок и ранг которой совпадают, будет называться неособенной.

Известным образом доказываются следующие леммы.

Лемма 4. *Ранг произведения матриц A, B не превышает рангов множителей. Если при этом строки (столбцы) B (A) независимы (в част-*

---

[10] Таким образом, $\Delta\Gamma$ не имеет нетривиальных делителей нуля.

[11] Частный случай этой теоремы доказан Оре для случая, когда Γ есть дифференциальное поле с одним дифференцированием [1].

[12] Из леммы 2 следует, что такое множество содержит не более k элементов.

[13] В дальнейшем, при отсутствии оговорки, ранг и линейная зависимость рассматриваются относительно Δ.

ности, если B (A) — неособенная матрица), то ранг произведения матриц равен рангу A (B).

Лемма 5. *Если матрица A содержит квадратную подматрицу B порядка и ранга r и если любая квадратная матрица порядка $r+1$, содержащаяся в A и содержащая B, имеет ранг r, то ранг A равен r.*

Эта лемма позволяет определять ранг матрицы (а также выделять ее независимые строки и столбцы) рассмотрением последовательно расширяющихся квадратных подматриц. По замечанию к лемме легко заметить, что это определение возможно посредством алгебраических действий и дифференцирований. Посредством тех же действий можно далее определить линейно независимый базис множества строк (столбцов), уничтожающих матрицу слева (справа).

3. Модули в кольце дифференциальных операторов. Теоремы о базисе

В дальнейшем будут рассмотрены модули двух типов: левый модуль, являющийся множеством строк одинаковой длины с элементами из Δ, образующих группу относительно матричного сложения, для которой все элементы Δ служат левыми операторами (произведение элемента на строку также матричное); правый модуль, являющийся множеством столбцов (из Δ) одинаковой длины, образующих группу относительно матричного сложения, для которой Δ есть множество правых операторов; Γ предполагается полем.

Если длина строк (столбцов) модуля равна k, модуль будет называться k-членным. Левые (правые) идеалы в Δ будут рассматриваться как одночленные левые (правые) модули.

Исследование свойств модулей будет проводиться для левых модулей. При переходе к сопряженным операторам [14] (см. § 1) левые модули переходят в правые (и наоборот); это позволит из свойств левых модулей получать соответствующие свойства правых модулей.

Ранг r модуля M определяется согласно § 2 как длина линейно независимого базиса M; он не превосходит длины строк M. При расширении поля Γ и соответствующем расширении M ранг M не меняется. Поскольку M включаемо в поле, то, как известно, имеет место следующее свойство: если p, q, r, s суть ранги соответственно модулей $M, N, (M, N), (M \cap N)$ [15], то $p+q=r+s$. Пусть M — левый модуль; подмножество N из M называется базисом M, если любой элемент $A \in M$ можно представить в виде

$$A = \alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_l B_l \, (\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta;\ B_1, \ldots, B_l \in N).$$

Нетер, используя метод Гордана, доказала, что любой идеал в Δ обладает конечным базисом [1]. Отсюда легко выводится, что каждый модуль также обладает конечным базисом. Здесь будет приведено другое доказательство этого утверждения, позволяющее несколько уточнить результат.

Теорема 5. *Любой модуль обладает конечным базисом. При этом базис $A_1, \ldots, A_l$ (левого) модуля может быть выбран так, что для любого элемента A модуля возможно представление $A = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_l A_l$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta$), в котором степени* [16] *$\alpha_1 A_1, \ldots, \alpha_l A_l$ не превосходят степени A* [17].

Доказательство. Пусть M — k-членный модуль. Пусть N — множество всех k-строк специального вида: каждая строка из N содержит только один ненулевой элемент (например, на i-м месте), который имеет вид $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}$; такая строка будет обозначаться $U_{ii_1 \ldots i_n}$. В множестве N вводится следующее полное упорядочение: $U_{ii_1 \ldots i_n}$ предшествует $U_{jj_1 \ldots j_n}$ ($\neq U_{ii_1 \ldots i_n}$), если первая из ненулевых разностей $\sum_{l=1}^{n} (j_l - j_l), j - i, j_n - j_n, \ldots$ $\ldots, j_1 - i_1$ положительна. $U_{ii_1 \ldots i_n}$ называется делителем $U_{jj_1 \ldots j_n}$, если $i = j$, $i_1 \leqslant j_1, \ldots, i_n \leqslant j_n$; если делитель не совпадает с кратным, то делитель предшествует кратному. Каждую k-строку можно представить в виде $\sum_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} \partial_0 U_{ii_1 \ldots i_n} = \sum_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} U_{ii_1 \ldots i_n}$.

Пусть M_p есть множество всех элементов M степени, меньшей p (p — натуральное число). Естественным образом M_p можно рассматривать как подмодуль модуля линейных форм над полем Γ с базисом $\{U_{ii_1 \ldots i_n}\}$ ($i = 1, \ldots, k$; $i_1 + \cdots + i_n < p$). Следовательно, M_p обладает линейно независимыми над Γ базисом $A_1, \ldots, A_{\varphi(p)}$ (см. Ван-дер-Варден [2]).

Очевидно, базисы для $M_1, M_2, \ldots$ можно индуктивно определить так, чтобы базис M_{p+1} служил продолжением базиса M_p ($p = 1, 2, \ldots$) и, кроме того, чтобы члены базиса M_{p+1} имели следующий вид: при $\varphi(p) < i \leqslant \varphi(p+1)$ или $A_i = \partial_l A_j$ ($j \leqslant \varphi(p)$), или главная составляющая A_i не являлась кратной главных составляющих A_j при $j \leqslant \varphi(p)$. Оказывается, что члены базиса второй категории, начиная с некоторого $p = p_0$, отсутствуют. Это следует из леммы, доказанной Рикье (см., например, Ритт [1], а также Гордон [1]): любая последовательность $U_{ii_1 \ldots i_n}$ такая, что ни один ее член не является делителем другого, обрывается; доказательство этой леммы легко проводится «от противного». Пусть теперь $B_1, \ldots, B_l$ все те из $A_1, \ldots, A_{\varphi(p_0)}$, которые принадлежат ко второй категории для одного из базисов M_p ($p \leqslant p_0$). $B_1, \ldots$ $\ldots, B_l$ образуют базис M, удовлетворяющий условиям теоремы. Очевидно, каждому натуральному i соответствует некоторое j ($1 \leqslant j \leqslant l$) такое, что $A_i = \partial_1^{i_1(i)} \ldots \partial_n^{i_n(i)} B_{j(i)}$. С другой стороны, каждый элемент $A \in M$ имеет представление $A = \sum_i c_i A_i$, $c_i \in \Gamma$. Очевидно, степень каждого $c_i A_i$ не превышает степени A. Тогда $A = \sum_i c_i \partial_1^{i_1(i)} \ldots \partial_n^{i_n(i)} B_{j(i)} = \sum_j \alpha_j B_j$, где $\alpha_j \in$ $\in \Delta$ и степень каждого $\alpha_j \beta_j$ не превышает степени A, что и требовалось доказать.

Гюнтер уточнил свойства базиса $B_1, \ldots, B_l$. Результат его (с небольшим видоизменением) состоит в следующем.

Пусть r_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$) — рациональные числа такие, что $|r_{ij}| \neq 0$. Операторы $\partial_i' = \sum_j^n r_{ij} \partial_j$, очевидно, обладают теми же свойствами, что и ∂_i

---

[14] Модули той же формы (и матричную запись их базиса) применил Штейниц для кольца целых алгебраических чисел.

[15] Если M, N — произвольные множества строк одинаковой длины, то (M, N) обозначает модуль, порожденный M и N; в частности, если M, N — модули, $M \cup N$ называется объединением модулей; $M \cap N$ обозначает пересечение множеств M, N.

[16] Степень матрицы есть максимальная степень составляющих ее элементов из Δ.

[17] Последнее утверждение теоремы (хорошо известное для полиномиальных колец) отсутствует в указанной работе Нетер и Шмейдлера. По существу оно (как и первое утверждение теоремы) вытекает из методов приведения системы (вообще, не линейных) дифференциальных уравнений к канонической («пассивной») форме, указанных Рикье в [1] и Трессом в [1]; однако формулировка для линейного случая, имеющая специфический характер, ими, по-видимому, не выделялась. Приводимое доказательство следует этому методу.

(«замена переменных»). Каждый элемент из M можно выразить через операторы $\partial_1', \ldots, \partial_n'$. Пусть базис $B_1', \ldots, B_l'$ построен по предыдущему, но с упорядочением относительно операторов $\partial_1', \ldots, \partial_n'$. Пусть $U_{i(q)i_1(q)\ldots i_n(q)}$ — главная составляющая B_q' $(q = 1, \ldots, l')$. Тогда числа r_{ij} могут быть подобраны так, что $|r_{i_i}| \neq 0$ и множество составляющих при $i_p(q) > 0$ $(p = 2, \ldots, n)$ содержит, кроме $U_{i(q)i_1(q)\ldots i_n(q)}$, также для каждого $p' = 1, \ldots, p-1$ составляющую $U_{i(q')i_1(q')\ldots i_n(q')}$ со свойством: $i(q') = i(q)$, $i_p(q') = i_p(q) - 1$, $i_{p'}(q') = i_{p'}(q) + 1$; при $s \neq p$, $p', i_s(q') = i_s(q)$ (см. Гюнтер [1]).

Опираясь на теорему 5, удобно обозначать базис левого модуля с базисом $A_1, \ldots, A_l$ в виде матрицы со строками $A_1, \ldots, A_l$ («базисная матрица»). Если ${}_lA^k$ является базисной матрицей левого модуля M, то любой элемент M можно представить в виде ${}_1B^l{}_lA^k$; любую конечную совокупность элементов M — в виде ${}_pB^l{}_lA^k$ [18].

Единичный k-членный модуль (модуль, содержащий все k-строки) можно характеризовать единичной матрицей k-порядка $\begin{pmatrix} \partial_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial_0 \end{pmatrix}$. Модуль не определяет однозначно базисную матрицу. Очевидно, две матрицы A, B определяют один и тот же (левый) модуль в том и только в том случае, если существуют матрицы C, D такие, что $A = DB$ и $B = CA$.

Вообще, если M — подмодуль левого модуля M', а A, A' — их матрицы, то существует матрица B такая, что $A = BA'$. Если, далее, P есть модуль с матрицей B, то $M = PA'$. Пусть теперь M — левый k-членный модуль, ${}_lA^k = A$ — матрица. Множество l-строк B таких, что $BA \in M$, очевидно, образует левый l-членный модуль. Этот модуль будет обозначаться $M : A$ и иметь существенное значение при изучении модуля M.

Можно сделать относительно модулей вида $M : A$ следующие легко проверяемые замечания.

Если строки матрицы A принадлежат левому модулю M, то $M : A$ есть единичный модуль (это имеет, например, место, если M — единичный модуль или $A = 0$); $0 : A$ (0 — нулевой модуль) есть модуль всех строк, уничтожающих A слева. Если A, B — суть матрицы и M — модуль, то $M : (AB) = (M : B) : A$. Если $\{M_q\}$ — произвольное множество (одинаковочленных) модулей, A — матрица, то $(\bigcap_\eta M_\eta) : A = \bigcap_\eta (M_\eta : A)$ ($\bigcap$ — знак пересечения множеств) [19].

Если матрица A не является правым делителем нуля, то ранги модулей M, MA, $M : A$ равны между собой (ср. с леммой 4).

Если M, N — модули, A — матрица, (A) — левый модуль с базисной матрицей A, то соотношение $M : A = N : A$ равносильно $M \cap (A) = N \cap (A)$.

Теорему о базисе можно дополнить.

Прежде всего будет доказана следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть основное поле* Γ *полное. Пусть* $A_1, \ldots, A_k$ — *независимые* k-*строки*, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — *ненулевые операторы из* Δ. *Тогда существуют такие элементы* $a_1, \ldots, a_k \in \Gamma$, *что левый модуль, порожденный строками* $A = (\alpha_1 a_1 \partial_0, \ldots, \alpha_k a_k \partial_0)$ *единичный* [20].

---

[18] В дальнейшем будет употребляться термин: матрица B принадлежит левому (правому) модулю M, если строки (столбцы) B принадлежат M.

[19] Это определение (и обозначение) хорошо известно для коммутативного кольца и обобщает понятие «трансформы» оператора (не модуля) с одним дифференцированием, введенное Оре [2].

[20] Лемма по своему содержанию и доказательству связана с одной теоремой Ритта (об интегральных многообразиях системы алгебраических дифференциальных уравнений с одним аргументом). Теорема Ритта перенесена Кольчиным на случай нескольких

Доказательство. Символы $V_{ii_1\ldots i_n}$, введенные при доказательстве теоремы 5, будут использованы и здесь.

Присоединяя к Γ неопределенные $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, получаем поле Γ_φ; для каждого φ_i будет введено упорядочение производных $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}\varphi_i$ такое же, как и при доказательстве теоремы 5.

Пусть $A_\varphi = (\alpha_1\varphi_1\partial_0, \ldots, \alpha_k\varphi_k\partial_0)$ и пусть наивысшая из степеней $A_1, \ldots, A_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ равна s.

Рассматриваются множества элементов вида

$$\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i = \sum_{jj_1\ldots j_n} a_{jj_1\ldots j_n}^{ii_1\ldots i_n} U_{jj_1\ldots j_n}, \tag{1}$$

$$\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_\varphi = \sum_{jj_1\ldots j_n} a_{jj_1\ldots j_n}^{i_1\ldots i_n}(\varphi)\, U_{jj_1\ldots j_n}; \tag{2}$$

здесь $i_1 + \cdots + i_n \leqslant m - s$, где m — натуральное число, большее s; $i, j = 1, \ldots, k$; $j_1 + \cdots + j_n \leqslant m$; $a_{jj_1\ldots j_n}^{ii_1\ldots i_n} \in \Gamma$; $a_{jj_1\ldots j_n}^{i_1\ldots i_n}(\varphi) \in \Gamma_\varphi$. Функции $a_{jj_1\ldots j_n}^{ii_1\ldots i_n}(\varphi)$, очевидно, являются полиномами относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и их производных; при этом, например, для φ_1 высшая производная $\partial_1^{i_1^*} \ldots \partial_n^{i_n^*}\varphi_1$ в разложении $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_\varphi$ входит только в коэффициент при $U_{10\ldots0}$ и отсутствует в остальных коэффициентах. Элементы (1) линейно независимы над Γ_φ. Действительно, в противном случае эта зависимость имела бы место и над Γ, что приводило бы к линейной зависимости $A_1, \ldots, A_k$ над $\Delta(\Gamma)$. Пусть элементы

$$\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i - a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} U_{10\ldots0} \tag{3}$$

линейно зависимы над Γ_φ (и, следовательно, над Γ). Тогда

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i - a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} U_{10\ldots0}) = 0,$$

где $c_{ii_1\ldots i_n}$ — элементы Γ, не равные нулю в совокупности. Следовательно, $\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n} a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} = g_1 \neq 0$ и $\sum_i \alpha_i A_i = g_1 U_{10\ldots0}$, где $\alpha_i \in \Delta(\Gamma)$.

Пусть теперь элементы (3) линейно независимы над Γ_φ; в этом случае будет получена зависимость того же вида.

При достаточно большом m элементы (1), (2), а следовательно, соответствующие элементы

$$\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i - a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} U_{10\ldots0}, \quad \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_\varphi - a_{10\ldots0}^{i_1\ldots i_n}(\varphi)\, U_{10\ldots0}$$

линейно зависимы над Γ_φ. Действительно, количество этих выражений $(k+1)\binom{n+m-s}{n}$ при $m > \dfrac{nk^{1/n} + s(k+1)^{1/n}}{(k+1)^{1/n} - k^{1/n}}$ превышает количество участвующих в них символов $U_{jj_1\ldots j_n}$, равное $k\binom{n+m}{n}$.

аргументов. Используя теорему существования решений дифференциальной системы, из теоремы Кольчина можно получить частный случай леммы 6 (при $\alpha_1 = \partial_0$).

Пусть $B_t = \partial_1^{i_1(t)} \ldots \partial_n^{i_n(t)} A_\varphi - a_{10\ldots0}^{i_1(t)\ldots i_n(t)}(\varphi) U_{10\ldots0}$ $(t = 1, \ldots, l)$ есть одна из минимальных таких систем, что выражения (3) и $B_1, \ldots, B_l$ зависимы над Γ_φ. Пусть $\partial_1^{i_1(1)} \ldots \partial_n^{i_n(1)} A_\varphi$ содержит производную $\partial_1^{\overset{*}{i_1}} \ldots \partial_n^{\overset{*}{i_n}} \varphi_1$, следующую за всеми другими производными φ_1, содержащимися в $\partial_1^{i_1(t)} \ldots \partial_n^{i_n(t)} A_\varphi$, $t > 1$ (это имеет место, так как все $\partial_1^{i_1(t)} \ldots \partial_n^{i_n(t)}$ различны).

Тогда все коэффициенты при $U_{jj_1\ldots j_n}$ в $\partial_1^{i_1(t)} \ldots \partial_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t = 1, \ldots, l)$, кроме $a_{10\ldots0}^{i_1(1)\ldots i_n(1)}(\varphi)$, не содержат $\partial_1^{\overset{*}{i_1}} \ldots \partial_n^{\overset{*}{i_n}} \varphi_1$; следовательно, можно предполагать, что не равные нулю в совокупности коэффициенты зависимости

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i - a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} U_{10\ldots0}) + \sum_{t=1}^{l} d_t(\varphi) B_t = 0,$$

также не содержат $\partial_1^{\overset{*}{i_1}} \ldots \partial_n^{\overset{*}{i_n}} \varphi_1$. По свойству минимальности l, $\partial_1(\varphi) \neq 0$. Далее из этой зависимости получаем

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi) \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} A_i + \sum_t d_t(\varphi) \partial_1^{i_1(t)} \ldots \partial_n^{i_n(t)} A_\varphi =$$

$$= \Big(\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi) a_{10\ldots0}^{ii_1\ldots i_n} + \sum_t d_t(\varphi) a_{10\ldots0}^{i_1(t)\ldots i_n(t)}(\varphi)\Big) U_{10\ldots0} = g_1(\varphi)(\partial_0, 0, \ldots, 0),$$

где согласно сделанным замечаниям $g_1(\varphi) \neq 0$.

Аналогично определяется $g_2(\varphi), \ldots, g_k(\varphi)$ (при замене $U_{10\ldots0}$ на $U_{20\ldots0}, \ldots, U_{k0\ldots0}$).

По лемме 1 определяются такие $a_1, \ldots, a_k \in \Gamma$, что $g_i(a)$ $(\in \Gamma)$ не равны нулю $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда последняя зависимость приведет к соответствиям вида

$$(0, \ldots, \partial_0, \ldots, 0) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{ij} A_j + \varepsilon_i A_a;$$

в левой части ∂_0 занимает i-е место; $i = 1, \ldots, k$; $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_i \in \Delta(\Gamma)$.

Тогда, полагая $A = (\alpha_1 a_1 \partial_0, \ldots, \alpha_k a_k \partial_0)$, получаем утверждение леммы, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Пусть поле Γ полное. Всякий модуль ранга r обладает базисом, длиною не больше чем $r + 1$. В частности, всякий идеал обладает базисом не более чем из двух элементов* [21].

Доказательство. Пусть M — левый модуль ранга r с базисом $A_1, \ldots, A_s$. Пусть при этом $A_1, \ldots, A_r$ линейно независимы над Δ. По теореме 3 максимальное количество линейно независимых s-строк, уничтожающих матрицу $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$ слева, равно $s - r$; пусть $B_1, \ldots, B_{s-r}$ — такие строки. Пусть $C_i = (0, \ldots, \partial_0, \ldots, 0)$ (длина C_i равна s; ∂_0 занимает i-е место).

Так как $C_i \begin{pmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_s \end{pmatrix} = A_i$, то легко заключить, что $B_1, \ldots, B_{s-r}, C_1, \ldots, C_r$ независимы. По лемме 6 существует s-строка $C = (a_1\partial_0, \ldots, a_s\partial_0)$ $(a_1, \ldots, a_s \in \Gamma)$

[21] Сходная с первой частью теоремы 6 теорема доказана Риттом (для случая одного аргумента).

и матрица $D = {}_sD^{s+1}$ такие, что

$$D \begin{pmatrix} B_1 \\ \ldots \\ B_{s-r} \\ C_1 \\ \ldots \\ C_r \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial_0 \end{pmatrix}.$$

где $\begin{pmatrix} \partial_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \partial_0 \end{pmatrix}$ — единичная матрица s-порядка.

Тогда

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} {}_{s-r}0^1 \\ A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r \\ a_1A_1 + \cdots + a_sA_s \end{pmatrix} = {}_sD^{r+1} \begin{pmatrix} A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r \\ a_1A_1 + \cdots + a_sA_s \end{pmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что $A_1, \ldots, A_r$, $A = a_1A_1 + \ldots + a_sA_s$ является также базисом M.

Это доказывает теорему с тем существенным уточнением, что базис длины $r + 1$ модуля M ранга r может быть проведен через любые r линейно независимых элементов M.

Поскольку в кольце Δ для случая одного дифференцирования имеет место алгоритм Евклида, то, как хорошо известно из теории элементарных делителей, модуль ранга r из Δ обладает линейно независимым базисом (следовательно, длиною r); в частности, всякий идеал является главным (см. Ван-дер-Варден [2, § 106]).

Пример 5. Пусть Γ — поле функций двух аргументов x_1, x_2. Левый идеал с базисом $\partial_1^2, \partial_1\partial_2, \partial_2^2$ не является главным; этот идеал обладает базисом $\partial_1^2, \partial_1\partial_2 + x_1\partial_2^2$.

Легко видеть, что, по крайней мере, если Γ есть поле функций аргументов, нахождение строки A_0 в лемме 6 и базиса, требуемого в теореме 6, практически осуществимо и притом посредством только алгебраических действий и дифференцирований [22].

Лемма 6 приводит и к другому важному заключению.

Теорема 7 [23]. *Если Γ — есть полное поле, то кольцо Δ простое, т. е. не содержит двухсторонних идеалов, отличных от нулевого и единичного* [24].

[22] Из теоремы 6 можно получить аналоги некоторых теорем теории алгебраических чисел.

[23] Джекобсон мимоходом доказал (другим методом) эту теорему для случая одного дифференцирования [1].

[24] Теорема обратима: если $\Delta(\Gamma)$ — простое кольцо, то Γ — полное поле.

Доказательство. Пусть k — максимальное количество элементов из Γ с ненулевым якобианом по операторам $\partial_1, \ldots, \partial_k$ $(k \leqslant n)$. Пусть $\Delta(\Gamma)$ — простое кольцо. Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$; $a_1, \ldots, a_k$ — эти элементы, $|\partial_i a_j| = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$.

Тогда для любого $a \in \Gamma$

$$\begin{vmatrix} \partial_1 a_1 & \ldots & \partial_k a_1 & \partial_{k+1} a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 a_k & \ldots & \partial_k a_k & \partial_{k+1} a_k \\ \partial_1 a & \ldots & \partial_k a & \partial_{k+1} a \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — двухсторонний идеал в Δ, отличный от нулевого. Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\alpha \neq 0$. По лемме 6 существует такой элемент $a \in \Gamma$, что левый идеал с базисом α, $\alpha\, a\, \partial_0$ — единичный; но тогда и $\mathfrak{A}$ есть единичный идеал, что и требовалось доказать.

4. Разложение модуля [25]

В этом параграфе Γ предполагается полем. Модуль называется неприводимым, если его нельзя представить в виде пересечения двух отличных от него модулей. В противном случае модуль будет приводим. Легко видеть, что нулевой идеал и единичный модуль неприводимы.

Из теоремы 5 обычным образом получается такая теорема.

Теорема 8. *Всякая последовательность расширяющихся модулей $M_1 \subseteq \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_m \subseteq \ldots$ начиная с некоторого m стабилизируется; всякий модуль является пересечением конечного числа неприводимых (см. Ван-дер-Варден [2]).*

Разложение модуля в пересечение неприводимых не определяется однозначно.

Тривиальным примером может служить случай, когда в разложении $M = M_0 \cap M_1 \cap \ldots \cap M_k$, например, $M_0 \supseteq M_1 \cap \ldots \cap M_k$, но это справедливо и тогда, когда ни одну из компонент нельзя удалить из разложения (несократимое представление).

Для выяснения инвариантов в таких разложениях полезна лемма.

Лемма 7 [26]. *Если M — неприводимый модуль, A — матрица, то модуль $M : A$ также неприводимый. Если M свободен от делителей, то $M : A$ также свободен от делителей* [27].

Доказательство. Пусть $M : A = P \cap Q$; $P, Q \neq M : A$. Тогда $(M, PA) \supset M$ [28], $(M, QA) \supset M$.

Пусть теперь $B \in (M, PA) \cap (M, QA)$. Тогда $B = M_1 + P_1 A = M_2 + Q_1 A$, где $M_1, M_2 \in M$; $P_1 \in P$, $Q_1 \in Q$; следовательно, $(P_1 - Q_1) A \in M$ и $P_1 - Q_1 \in M : A$. Значит, $P_1 \in P \cap Q = M : A$ и $B = M_1 + P_1 A \in M$. Итак, $M = (M, PA) \cap (M, QA)$ и M приводим. Это доказывает первое утверждение леммы.

Пусть теперь $M : A \subset P \subset (I)$ ((I) — единичный модуль). Тогда, по предыдущему, $M \subset (M, PA)$; достаточно доказать, что $(M, PA) \neq (I)$.

Левую часть можно рассматривать как линейный оператор первой степени из $\Delta(\Gamma) : \alpha = b_1 \partial_1 a + \ldots + b_k \partial_k a + b \partial_{k+1}$ $(b \neq 0)$. Но тогда, для всякого оператора $\beta \in \Delta(\Gamma)$ $\alpha\beta \equiv 0 \pmod{\partial_1, \ldots, \partial_{k+1}}$ и двухсторонний идеал (α) не содержит единицы, что и требовалось доказать. Это доказывает возможность обращения леммы 1.

[25] По определенной Риттом неприводимости всякая линейная система неприводима [1]. Действительно, если gH содержит многообразие линейной системы, u, v — ее интегралы, принадлежащие только g и только H, $au + bv$ при достаточно малых a, $1 - b$ должно быть интегралом H; но тогда должно быть интегралом при всех a, b и, в частности, это должно быть верно для u $(a = 1, b = 0)$. Нужно отметить, что свойство оставаться неприводимым при увеличении числа неизвестных, при расширении Γ — поля постоянных — до $\Gamma(x)$, имеющее место в теории Ритта, здесь не верно. Например, 1) (∂) неприводим, $((\partial, 0)) = ((\partial, 0), (0, \partial_0)) \cap ((\partial_0, 0))$; 2) (∂^2) неприводим при $\Gamma = \{$поле постоянных$\}$; $(\partial^2) = (\partial) \cap (x - \partial_0)$ в $\Gamma(x)$.

[26] Если $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$, где M_α свободны от делителей, то $M : A$ также имеет подобное представление (см. аналог у Оре [2]). Что можно сказать о надмодулях такого «вполне приводимого» модуля? Для одного дифференцирования такой надмодуль также вполне приводим и может служить компонентой разложения своего надмодуля [2].

[27] Модуль M свободен от делителей, если он не имеет надмодулей, отличных от единичного и от M.

[28] (,) — объединение модулей.

Пусть $(M, PA) = (I)$. Тогда, если M есть k-членный модуль и $A = {}_lA^k$, должны существовать матрицы $B = {}_kB^k \in M$, $C = {}_kC^l \in P$ такие, что $B + CA = 1$ (единичная матрица k-го порядка). Отсюда $(1 - AC) = AB \in M$ и $1 - AC \in M : A$. Следовательно, $1 \in (M : A, AC) \subseteq (M : A, P) = P$, что противоречит предположению $P \neq (I)$. Итак, $M \subset (M, PA) \subset (I)$, что доказывает второе утверждение леммы.

Большое значение в дальнейшем имеет понятие эквивалентности модулей [29].

Модуль M называется эквивалентным модулю N $(M \sim N)$, если существует матрица A такая, что $N = M : A$ и $(M, A) = (I)$ [30].

Лемма 8. *Соотношение эквивалентности рефлективно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Очевидно, $M \sim M$ (рефлективность). Пусть теперь $M \sim N$; тогда $N = M : A$; далее, существуют матрицы $B \in M$ и C такие, что $B + CA = 1$. Тогда $N : C = M : CA = M : (1 - B) = M$. Кроме того, $(1 - AC) A = AB \in M$ и $1 - AC \in M : A = N$.

Следовательно, $1 \in (N, AC)$ и $(N, C) = (I)$. Итак, $N \sim M$ (симметричность).

Пусть $M \sim N$ и $N \sim P$; тогда существуют матрицы A, B такие, что $(M, A) = (I)$, $(N, B) = (I)$ и $N = M : A$, $P = N : B$. Таким образом, $P = N : B = M : BA$.

Далее, из $1 \in (N, B)$ следует $A \in (NA, BA) \subseteq (M, BA)$; так как $M \subseteq (M, BA)$, то $(M, A) \subseteq (M, BA)$. Значит, $(M, BA) = (I)$ и $M \sim P$ (транзитивность).

С помощью этих результатов можно получить теперь следующую теорему разложения.

Теорема 9. *Два несократимых разложения модуля на неприводимые модули состоят из одинакового количества компонент. При этом компонента одного разложения может быть заменена, по крайней мере, одной из компонент другого разложения. В частности, если компоненты обоих несократимых разложений свободны от делителей* [31], *то они попарно эквивалентны. Больше того, если каждая компонента одного разложения эквивалентна только одной компоненте второго разложения, то оба разложения совпадают* [32].

Доказательство. Пусть два несократимых разложения модуля P на неприводимые имеют вид: $M = P_1 \cap \ldots \cap P_s = Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$, при

[29] Впервые введено Пуанкаре в [1, с. 212] для линейных уравнений одинакового порядка с одним дифференцированием. В более общем виде дано Леви [1] (для линейных уравнений с одним дифференцированием) и [2] (для нормальных систем уравнений с одним дифференцированием). В своеобразной форме — у Оре в [2, с. 489] (для операторов с одним дифференцированием). Определение Леви перенесено Нетер и Шмейдлером [1] на идеалы в Δ с несколькими дифференцированиями.

Определение в тексте объединяет определения Оре и Нетер — Шмейдлера. У Хефтера [1] (в обобщение Фукса, рассматривавшего только случай рационального поля $T = T(x)$ от одного аргумента): если $P = Q : A$, то P (полином) принадлежит тому же классу, что и Q; им показана также эквивалентность (в смысле многообразий) P и $P : A$, $(P, A) = (I)$. Леви [3, с. 554—555] отмечает то же.

[30] Нетер и Шмейдлером [1] установлено, что если M, N — модули и (I) — единичный модуль (той или иной длины строк), то соотношение $M \sim N$ эквивалентно (I) — $M \cong (I) - N$ (N — изоморфизм, операторный над $\Delta(\tau)$).

[31] Модуль, обладающий таким разложением, следуя Леви, будет называться приводимым.

[32] Для вполне приводимых идеалов теорема о разложениях последнего типа доказана Леви [1] (для одного дифференцирования) и Нетер и Шмейдлером [1] (для нескольких дифференцирований). Ряд теорем о разложении приводится Оре [2] (также для одного дифференцирования). Теорема 9 (без последнего заключения) является частным случаем «структурной теоремы Куроша». В тексте дано другое доказательство (близкое к доказательству Оре), так как оно позволяет сделать дополнительные заключения.

этом s будет предполагаться минимальным среди всех подобных разложений. Теорема будет доказываться индукцией по s. При $s = 1$ она очевидна.

Пусть теперь $s > 1$, $t > s$. Пусть $A_{i_1 \ldots i_m}$ $(B_{i_1 \ldots i_m})$ есть базисная матрица модуля $P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_m}$ $(Q_{i_1} \cap \ldots \cap Q_{i_m})$. Из равенства обоих разложений следует

$$M : A_1 = (P_2 : A_1) \cap \cdots \cap (P_s : A_1) = (Q_1 : A_1) \cap \cdots \cap (Q_t : A_1)$$

и компоненты остаются неприводимыми (лемма 7).

По предположению индукции, правое разложение может быть сокращено до длины $t' - 1 \leqslant s - 1$; пусть, например, $M : A_1 = (Q_2 : A_1) \cap \ldots \cap (Q_{t'} : A_1)$. Тогда согласно замечаниям § 3 $M = M \cap P_1 = P_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_{t'} = (Q_1 \cap \ldots \cap Q_t)$ из-за минимальности s $t' = s$. Отсюда

$$M : B_{2 \ldots s} = P_1 : B_{2 \ldots s} = (Q_1 : B_{2 \ldots s}) \cap (Q_{s+1} : B_{2 \ldots s}) \cap \cdots \cap (Q_t : B_{2 \ldots s})$$

и правое разложение сократимо до одной компоненты (например, $Q_1 : B_{2 \ldots s}$). Тогда $M = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s = Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ и второе разложение сократимо, что приводит к противоречию. Итак, $s = t$, что завершает индукцию.

Таким же образом

$$M : A_{1 \ldots s-1} = P_s : A_{1 \ldots s-1} = (Q_1 : A_{1 \ldots s-1}) \cap \cdots \cap (Q_s : A_{1 \ldots s-1}).$$

Правое разложение сократимо, например, до $Q_s : A_{1 \ldots s-1}$. Итак, $P_1 \cap \ldots \cap P_s = P_1 \cap \ldots \cap P_{s-1} \cap Q_s$, что показывает заменимость P_s на Q_s.

Из хода доказательства видно, что для проводимости разложения модуля M через неприводимый надмодуль P (с матрицей A) необходимо и достаточно, чтобы $M : A$ имело разложение меньшей длины, чем M.

Пусть теперь M вполне приводим и $M = P_1 \cap \ldots \cap P_s = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ его несократимые разложения на компоненты, свободные от делителей.

Тогда $(P_1, P_2 \cap \ldots \cap P_s) = (I)$; следовательно, существуют матрицы $C \in P_1$, $D \in P_2 \cap \ldots \cap P_s$ также, что $C + D = 1$. Таким образом, $M : D = P_1 : D = (Q_1 : D) \cap \ldots \cap (Q_s : D)$; при этом $P_1 : D = P_1$.

Второе разложение сократимо, например, до $Q : D$; итак, $P_1 = Q : D$ и, следовательно, $D \bar{\in} Q_1$. Поэтому из-за отсутствия у Q_1 делителей $(Q_1, D) = (I)$ и $P_1 \sim Q_1$. Остается доказать последнее утверждение теоремы.

Пусть каждая из компонент $P_1, \ldots, P_s$ $(s > 1)$ эквивалентна только одной из компонент $Q_1, \ldots, Q_s$: $P_1 \sim Q_1, \ldots, P_s \sim Q_s$.

Тогда по лемме 8 верно и обратное заключение. Кроме того, среди $P_1, \ldots, P_s$ $(Q_1, \ldots, Q_s)$ не содержится эквивалентных между собой компонент. Доказательство снова проводится индукцией по s. При $s = 1$ справедливость утверждения очевидна.

Из данных разложений выводят

$$(P_1 : A_s) \cap \cdots \cap (P_{s-1} : A_s) = (Q_1 : A_s) \cap \cdots \cap (Q_s : A_s).$$

Здесь компоненты также свободны от делителей, причем первое разложение несократимо. Если $A_s \in Q_i$, то $P_s \subseteq Q_i$ и, следовательно, $i = s$, $P_s = Q_s$. Таким образом, при $i \neq s$ $A_s \bar{\in} Q_i$ (и также $A_s \bar{\in} P_i$); следовательно, $P_i : A_s \sim P_i \sim Q_i \sim Q_i : A_s$. Далее, если $P_i \sim P_i : A_s \sim Q_j : A_s$, то $A_s \bar{\in} Q_j$ и $Q_j : A_s \sim Q_j$ и, наконец, $i = j$. Таким образом, в (1) второе разложение сократимо именно на $Q_s : A_s$. Остающиеся компоненты удовлетворяют условиям теоремы и, по предложению индукции, $P_i : A_s = Q_i : A_s$ и $P_i \cap P_s = Q_i \cap P_s$ $(i = 1, \ldots, s - 1)$. Отсюда $(P_i : B_i) \cap (P_s : B_i) = P_s : B_i$ и $P_i : B_i \supseteq P_s : B_i$, из $P_i : B_i = P_s : B_i$ следует, по предыдущему, $P_i \sim P_s$. Итак, $P_i : B_i = (I)$ и $Q_i \subseteq Pi$ и, наконец, $P_i = Q_i$. Это завершает индукцию и доказывает теорему полностью.

Можно отметить еще следующее свойство несократимых разложений на неприводимые модули (в частности, на модули, свободные от делителей). Очевидно, длина такого разложения для $M : A$ не превышает длины подобного разложения для M. Отсюда следует, что длины таких разложений для эквивалентных модулей равны. Больше того, каждому разложению одного модуля соответствует разложение эквивалентного модуля с соответственно эквивалентными компонентами. Далее, несократимое разложение модуля M можно провести через надмодуль N (с матрицей A) тогда и только тогда, если длина разложения $M : A$ меньше, чем для M. Далее приводятся некоторые свойства приводимых и неприводимых модулей.

Полным модулем называется модуль, не имеющий собственных надмодулей того же ранга [33].

Полные модули характеризуются свойством: если M — полный k-членный модуль, A — k-строка, $d \subset \Delta$, то из $dA \in M$ и $d \neq 0$ следует $A \in M$.

Полными идеалами являются только нулевой и единичный идеалы. Очевидно, нулевой модуль полный.

Теорема 10[34]. *Для того чтобы модуль M был полным, необходимо и достаточно, чтобы $M = 0 : A$ (0 — нулевой модуль, A — произвольная матрица).*

Доказательство. Пусть M есть k-членный полный модуль ранга r. Если $r = k$, то так как единичный k-членный модуль имеет тот же ранг, M является единичным модулем и $M = 0 : 0$. Если $r < k$, то по теореме 3 существуют $k - r$ независимых k-столбцов, уничтожающих M справа. Пусть ${}_kA^{k-r} = A$ есть матрица, составленная из этих столбцов и $N = 0 : A$. По теореме 3 ранг N равен $k - (k - r) = r$, и так как $N \supseteq M$, то $M = N = 0 : A$. Этим доказана необходимость условия леммы. Доказательство достаточности очевидно.

Лемма 9. *Для того чтобы полный модуль M был неприводим, необходимо и достаточно, чтобы существовало представление: $M = 0 : A$, где 0 — нулевой идеал, A — столбец. Для того, чтобы неприводимый k-членный модуль M имел ранг $r < k$, необходимо и достаточно, чтобы M являлся полным модулем и притом ранга $k - 1$.*

Доказательство. Здесь не будет доказываться необходимость в первом утверждении: это будет видно из следующей теоремы.

Пусть $M = 0 : A$ (0 — нулевой идеал, A — столбец). Нулевой идеал согласно лемме 3 неприводим. Тогда по лемме 7 M также неприводим. При этом, если $A = 0$, ранг k-членного модуля $M = 0 : A$ равен k, в противном случае — $k - 1$ (теорема 3).

Остается доказать, что если M — неприводимый k-членный модуль ранга $r < k$, то M есть полный модуль (и, следовательно, имеет ранг $k - 1$). Пусть N — полный надмодуль M того же ранга r; $A_1, \ldots, A_r$ — линейно независимые строки из M. Пусть $B_1, \ldots, B_{k-r}$ — строки, линейно независимые в совокупности с $A_1, \ldots, A_r$; $P = (M, B_1, \ldots, B_{k-r})$. Очевидно, ранг P равен k и, следовательно, $P \supset M$. Пусть $B \in N \cap P$; тогда существуют такие элементы $D \in M$; $\beta_1, \ldots, \beta_{k-r} \in \Delta$, что $B = D + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{k-r} B_{k-r}$ и $\beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{k-r} B_{k-r} = B - D \in N$. Отсюда по выбору $B_1, \ldots$

[33] Понятие полного модуля введено впервые Штейницем [1] (для числового алгебраического поля). В общем виде — введено Хентцельтом (см. Хентцельт и Нетер [1]).

[34] Следующий пример показывает существование полных модулей, у которых ранг не совпадает с длиною базиса. В случае двух дифференцирований пусть $M = 0 : \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 + x_1\partial_0 \end{pmatrix}$. Разложение по степеням $\alpha = \partial_2 + x_1\partial_0$, с учетом формулы $\alpha\partial_1 = \partial_1\alpha - \partial_0$ получено, что базис M состоит из $A = (\partial_1\partial_2 + x_1\partial_1 + 2\partial_0 - \partial_1^2)$ и $B = (\partial_2^2 + 2x_1\partial_2 + x_1^2\partial_0 - \partial_1\partial_2 - x_1\partial_1 + \partial_0)$, $(\partial_1 + x_1\partial_0)\, A = \partial_1 B$; ранг M равен единице.

..., B_{k-r} легко заключить, что $\beta_1, \ldots, \beta_{k-r} = 0$ и $B = D \in M$. Итак, $M = N \cap P$. В предположении неприводимости M получаем $M = N$. Как будет доказано далее, неприводимый полный модуль N должен иметь вид $0 : A$ (0 — нулевой идеал, A — ненулевой столбец, так как ранг M меньше k). Но тогда N и, следовательно, M имеют ранг $k - 1$, что и требовалось доказать.

В процессе доказательства получено разложение модуля M ранга $r < k$ вида $M = N \cap P$, где N — полный надмодуль ранга r модуля M, P имеет ранг k; это разложение нетривиальное, если M — неполный модуль.

Следующая теорема устанавливает разложение полного модуля.

Теорема 11. *Полный k-членный модуль M ранга r ($<k$) является несократимым пересечением $k - r$ неприводимых полных модулей.*

Доказательство. Теорему доказываем, опираясь на достаточное условие в первом утверждении леммы 9.

Как вытекает из доказательства теоремы 10, $M = 0 : A$, где $A = {}_kA^{k-r}$ и все столбцы A независимы; подматрица матрицы A, составленная из столбцов A с номерами $i_1, \ldots, i_m$, будет обозначаться $A_{i_1,\ldots,i_m}$. Очевидно, $0 : A = (0 : A_1) \cap \ldots \cap (0 : A_{k-r})$. По лемме 9 $0 : A_1, \ldots, 0 : A_{k-r}$ — неприводимые модули. Далее, $0 : A_{i_1,\ldots,i_m}$ ($i_p \neq i_q$) при $p \neq q$ имеет ранг $k - m$ (теорема 3).

Таким образом, при $m < k - r$ $0 : A_{i_1,\ldots,i_m} \supset 0 : A$ и полученное разложение несократимо, что и требовалось доказать.

Доказательство этой теоремы завершает и доказательство леммы 9. Полезно отметить, что так как неприводимый k-членный модуль ранга $k - 1$ полный, то его собственные надмодули должны иметь ранг k.

Наконец, можно отметить еще следующее свойство: разложение модуля в пересечение модулей.

Лемма 10. *Разложение модуля M в пересечение множества модулей произвольной мощности может быть сокращено до не более чем счетного множества компонент.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcap_\eta M_\eta$; η рассматривается как трансфинитный индекс; $\eta < \zeta$. Доказательство проводится трансфинитной индукцией.

Пусть $M^\alpha = \bigcap_\eta \mu_\eta (\eta < \alpha)$. Лемма тривиальна при η конечном. Если лемма верна для всех $\alpha < \beta$ и $\beta - 1$ существует, то $M^\beta = M^{\beta-1} \cap M^\beta$ и лемма верна для $\alpha = \beta$.

Пусть теперь $\beta - 1$ не существует, а $N(l)$ обозначает множество строк модуля N степени меньшей l ($l = 1, 2, \ldots$).

Очевидно, $M^\alpha(l) \supseteq M^{\alpha'}(l)$ при $\alpha < \alpha'$; с другой стороны, $M^\alpha(l)$ можно рассматривать как модуль линейных форм (с коэффициентами из поля Γ), и так как β — второго рода, последовательность $M^\alpha(l)$ стабилизируется на некотором $M^{\alpha_l}(l)$, $\alpha_l < \beta$. Очевидно, $\alpha_l \leqslant \alpha_{l+1}$; далее, $M^\beta = \bigcap_{l=1}^{\infty} M^{\alpha_l}$ и из предположения индукции следует справедливость леммы для M^β. Это завершает индукцию, что и требовалось доказать.

5. Преобразование модулей

Рассмотрим возможности упрощения модулей посредством некоторых преобразований [35]. Здесь Γ предполагается полем.

[35] Результаты настоящего параграфа будут перенесены в § 7 на дифференциальные уравнения.

Будут рассматриваться преобразования следующих типов [36]: $M \to MA$ (M — левый модуль, A — матрица такая, что $0 : A \subseteq M$ [37]) и преобразование: $M \to M : A$ (A — произвольная матрица). Отображению $M \to MA$ соответствует операторный гомоморфизм ($M_1 \to M_1A$, $M_1 \in M$) с ядром $0 : A$ и, следовательно, при $0 : A = 0$ — операторный изоморфизм. Очевидно, $MA : A = M$.

Лемма 11. *Если M — модуль ранга r, то существует такая неособенная матрица A, что только первые r элементов всех строк модуля MA могут отличаться от нуля. Модуль ранга r операторно изоморфен r-членному модулю ранга r.*

Доказательство. Пусть M — k-членный модуль. При $k = r$ лемма очевидна: A можно считать единичной матрицей.

Пусть $k > r$. По теореме 3 существует $k - r$ независимых столбцов $B_1, \ldots, B_{k-r}$, уничтожающих M справа. Положим, что $A_1, \ldots, A_r$ дополняют их до k линейно независимых столбцов; A — матрица, составленная из этих столбцов в порядке $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_{k-r}$. Очевидно, A — неособенная квадратная матрица, удовлетворяющая условиям леммы.

Элементу $M_1 \in M$ отвечают $M_1A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$. Множество r-строк $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, соответствующих элементам M, образует r-членный модуль N и $M_1 \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ есть операторно изоморфное отображение M на N; N, очевидно, должен иметь ранг r, что и требовалось доказать.

Следующая лемма обобщает теорему 10.

Лемма 12. *Если k-членный модуль M ранга r содержит полный подмодуль ранга s, то $M = N : A$, где N есть $(k - s)$-членный модуль [38] ранга $(r - s)$, A — матрица ранга $k - s$.*

Доказательство. Пусть P — полный подмодуль M ранга s; следовательно, $P = 0 : A$ и ранг A равен $k - s$. Можно полагать при этом, что A содержит $k - s$ столбцов. Модуль $N = MA$ тогда $(k - s)$-членный и, как легко видеть, имеет ранг $r - s$. Тогда $N : A = (M, 0 : A) = (M, P) = M$, что и требовалось доказать.

По теореме 6 модуль ранга r обладает базисом длиною не больше $r + 1$. Следующая теорема характеризует модули, обладающие базисом длиною, равной рангу.

Теорема 12 [39]. *Для того чтобы модуль M ранга r имел базис длиною r, необходимо и достаточно существование такой неособенной матрицы A, что модуль MA (также ранга r) обладает диагональной базисной матрицей. Модуль в этом случае операторно-изоморфен r-членному модулю с диагональной базисной матрицей.*

Доказательство. При $r = 0$ теорема очевидна. При $r > 0$, пользуясь леммой 11, можно ограничиться случаем r-членного модуля с квадратной неособенной базисной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1r} \\ \beta_{r1} & \ldots & \beta_{rr} \end{pmatrix}.$$

Доказательство проводится индукцией по r; при $r = 1$ теорема очевидно верна.

[36] Если $N = M : A$, то N принадлежит классу, определенному M (см. Леви [3]).

[37] Это условие выполнено, в частности, если $0 : A = 0$.

[38] В случае $s = k$ формулировка теряет прямой смысл; здесь M — единичный модуль.

[39] Теорема является аналогом теоремы Штейница [2]. Для того чтобы модуль ранга r обладал базисом длиной r необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал к «главному классу».

Пусть ненулевой столбец C уничтожает справа все строки, кроме первой; тогда $(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1r})\, C = \beta \neq 0$.

Пусть D — неособенная матрица, первым столбцом которой является C. Тогда

$$BD = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{r-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Так как $\beta \neq 0$, то существуют такие операторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1} \neq 0$ и операторы $\delta_1, \ldots, \delta_{r-1}$, что $\beta_i\gamma_i = \beta\delta_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$. Полагая

$$D_1 = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\delta_1 & -\delta_{r-1} \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_{r-1} \end{pmatrix},$$

получаем

$$BDD_1 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B' \\ 0 & \end{pmatrix},$$

где B' — матрица $(r-1)$-порядка; так как BDD_1 — неособенная матрица, то B' имеет ранг $r-1$. По предположению индукции, существует неособенная матрица D' порядка $r-1$ такая, что

$$B'D' = \begin{pmatrix} \beta' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$D_2 = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & D' \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad A = DD_1D_2,$$

получаем

$$BA = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta' & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого, согласно лемме 10.

В следующих двух теоремах Γ предполагается полным полем; $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Теорема 13. *Всякий k-членный модуль ранга r из Δ эквивалентен $(k-r+1)$-членному модулю ранга не выше единицы.*

Доказательство. Пусть M — k-членный модуль ранга r; пусть $A_1, \ldots, A_r$ образует его линейно независимый базис; $B_1, \ldots, B_{k-r}$ — произвольные строки такие, что $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_{k-r}$ независимы. По лемме 6 существует такая строка B, что модуль $(A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_{k-r}, B) = (I)$.

Пусть D есть матрица, составленная из строк $B_1, \ldots, B_{k-r}, B$. Тогда $(M, D) = (I)$ и $M \backsim N = M : D$.

Модуль N, очевидно, $(k-r+1)$-членный. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-r}, \alpha)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_{k-r}, \beta)$ — две ненулевые строки из N. Тогда $\alpha, \beta \neq 0$.

Действительно, предположение $\alpha = 0$ приводит к $\alpha_1B_1 + \ldots + \alpha_{k-r}B_{k-r} \in M$, что по выбору $B_1, \ldots, B_{k-r}$ возможно только при $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-r} = 0$; это противоречит предположению. Пусть теперь γ, δ — два ненулевых оператора из Δ такие, что $\gamma\alpha = \delta\beta$; тогда [40].

$$\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-r}, \alpha) - \delta(\beta_1, \ldots, \beta_{k-r}, \beta) = (\ldots, 0) \in N$$

и, следовательно,

$$\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-r}, \alpha) = \delta(\beta_1, \ldots, \beta_{k-r}, \beta).$$

Это показывает, что если N — ненулевой модуль, то ранг равен единице, что и требовалось доказать.

В соответствии с леммой 11 эта теорема позволяет свести изучение любого модуля к изучению идеала.

Следующая теорема является отчасти частным случаем предыдущей.

Теорема 14. *Всякий неприводимый модуль или эквивалентен неприводимому идеалу, или является полным. В обоих случаях его можно представить в виде $\mathfrak{A} : A$, где $\mathfrak{A}$ — идеал, A — столбец.*

Доказательство. Если k-членный модуль M неприводим, то его ранг равен или k, или $k-1$ (лемма 9).

В первом случае по предыдущей теореме M эквивалентен идеалу; по лемме 7 этот идеал неприводим.

Во втором случае модуль M полный и имеет представление $0 : A$, где A — столбец, что и требовалось доказать.

Как показывает пример неприводимого модуля $0 : \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$, эквивалентности в последнем случае может и не быть.

6. Интегральное многообразие

Пусть Γ' — произвольная дифференциальная группа, полем операторов которой является основное поле Γ (например, некоторое надкольцо поля Γ). Элемент $f \in \Gamma'$ называется интегралом оператора $\alpha \in \Delta(\Gamma)$, если $\alpha f = 0$.

Столбец f, составленный из элементов [41], называется интегралом матрицы A (левого модуля M) из $\Delta(\Gamma)$, если $Af = 0$ $(Mf = 0)$. Множество всех интегралов матрицы (левого модуля) будет называться интегральным многообразием этой матрицы (модуля).

Очевидно, интегральные многообразия модуля и его базисной матрицы совпадают.

Таким же образом можно ввести понятие об интеграле и интегральном многообразии произвольного множества $\{A_\eta\}$ матриц с одинаковым количеством столбцов или произвольного множества $\{M_\eta\}$ одинаковочленных модулей.

Очевидно, интегральное многообразие множества $\{A_\eta\}$ матриц ($\{M_\eta\}$-модулей) совпадает с интегральным многообразием модуля, порожденного множеством строк всех матриц из $\{A_\eta\}$ (модуля, являющегося объединением всех модулей из $\{M_\eta\}$).

[40] Леви доказано, что любая нормальная система принадлежит классу, определенному одним уравнением (с одним неизвестным); в данном случае переводящую матрицу можно ограничивать по степени посредством этого линейного уравнения.

[41] Коротко это будет обозначаться $f \in \Gamma'$.

Таким образом, этот случай сводится к случаю одного модуля или, по теореме 5, одной матрицы. Очевидно, интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ линейно: если f, $g \in \mathfrak{M}$, c — постоянная из Γ, то $f + g$, $cf \in \mathfrak{M}$. Если Γ' топологизировано [42], то интегральное многообразие в Γ' замкнуто.

Пусть $\{A_\eta\}$ — произвольное множество k-строк из Δ и $\{g_\eta\}$ — множество элементов из Γ' той же мощности. Если для каждого η $A_\eta f = g_\eta$, то k-столбец $f \in \Gamma'$ будет называться решением системы уравнений $\{A_\eta u = g_\eta\}$ (u — неизвестный k-столбец). Снова, пользуясь теоремой 5, можно показать, что бесконечная система уравнений имеет то же множество решений (может быть пустое), что и некоторая ее конечная часть.

Если дана конечная система уравнений

$$A_1 u = g_1, \ \ldots, \ A_m u = g_m, \tag{4}$$

то для разрешимости этой системы необходимо, чтобы для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Delta\Gamma$ таких, что $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_m A_m = 0$, имело место $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m = 0$. Всякая однородная система уравнений

$$A_1 u = 0, \ \ldots, \ A_m u = 0 \tag{5}$$

имеет нулевое решение [43].

Если существуют такие столбцы $B_1, \ldots, B_m$, что $B_1 A_1 + \ldots + B_m A_m = 1$ (единичная матрица), то очевидно эта однородная система имеет только нулевое решение.

Пусть теперь группа Γ' обладает и обратными свойствами.

1. Всякая система уравнений вида (4) разрешима в Γ', если она имеет свойство: для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Delta(\Gamma)$, для которых $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_m A_m = 0$, имеет место также $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m = 0$.

2. Для всякой системы вида (5), имеющей (в Γ') только нулевое решение, можно подобрать такие столбцы $B_1, \ldots, B_m$ из $\Delta(\Gamma)$, что $B_1 A_1 + \ldots + B_m A_m = 1$. Такая группа Γ' будет называться замкнутой (относительно Γ).

Это можно выразить также так: если Γ' замкнуто для Γ, то для разрешимости системы (4) необходимо и достаточно, чтобы $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$ являлось интегралом модуля $0 : A$, где A — матрица со строками $A_1, \ldots, A_m$. Для нетривиальной разрешимости системы (5) (в Γ') необходимо и достаточно, чтобы модуль, порожденный строками $A_1, \ldots, A_m$, не был единичным.

Тогда легко видеть, что Γ' есть группа функций.

Следующие два примера показывают независимость условий 1 и 2.

Пример 6. Пусть Γ — поле комплексных чисел с дифференцированиями по аргументам $x_1, \ldots, x_n$; Γ' — группа, состоящая из всех конечных сумм вида $\sum_i a_i e^{b_{i1}x_1 + \ldots + b_{in}x_n}$; a_i, $b_{ij} \in \Gamma$. Система $(\partial_1 - \partial_0) u = e^{x_1}$, $\partial_2 u = 0, \ldots, \partial_n u = 0$ не разрешима в Γ'; следовательно, первое условие не выполняется. Однако второе условие выполняется. Действительно, пусть система (5) имеет только тривиальное решение. Пусть $A_i = A_i(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ и пусть C — неопределенный постоянный столбец, $a_1, \ldots, a_n$ — неопределенные постоянные; тогда $A_i C e^{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n} = e^{a_1 x + \ldots + a_n x_n} A_i(a_1, \ldots, a_n) C$. По предположению, алгебраическая система $A_i(a_1, \ldots, a_n) C = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ имеет для C только нулевое решение. Отсюда легко получается существование таких полиномов $\alpha_{ij}(a_1, \ldots, a_n)$, что $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(a_1, \ldots, a_n) A_j(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = \delta_i$ (единица в правой части занимает i-е место). Полагая $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, получаем $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} A_j = \delta_i$.

Пример 7. В тех же предположениях относительно Γ пусть Γ' — группа всех полиномов аргументов $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из Γ.

Как показывает пример, $(\partial_1 - \partial_0) u = 0$, $\partial_2 u = 0, \ldots, \partial_n u = 0$; второе условие здесь не выполняется, однако первое имеет место.

На основании теоремы Рикье, которая доказывается еще раз в § 7, достаточно будет рассмотреть случай системы с одним неизвестным вида (4) $\alpha_1 u = g_1, \ldots, \alpha_m u = g_m$ $(\alpha \in \Delta(\Gamma))$; g_i — *(полиномы)* такой, что всякое соотношение вида $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i = 0$ $(\beta_i \in \Delta(\Gamma))$ переносится на правые части; $\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i = 0$. Пусть v — полином с неопределенными коэффициентами, степень которого такова, что $\alpha_i v$ имеет степень не меньшую, чем g_i, для каждого $i = 1, \ldots, m$. Система (4) приводит тогда $(u = v)$ к системе линейных уравнений относительно этих коэффициентов. Несовместность этой системы равносильна существованию таких операторов $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \Delta(\Gamma)$, что степень β_i не выше степени полинома $\alpha_i v$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, причем $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i v = 0$, если $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ при любом v указанной степени, в то время как $\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i \neq 0$, если $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Это, однако, невозможно. Действительно, степень $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i$ не выше степени v и соотношение $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i v = 0$ при $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ и неопределенных коэффициентах приводит к равенству $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i = 0$, что и требовалось доказать.

Пример 8. Γ — то же, что и в примере 7. Пусть Γ есть группа конечных сумм вида $\sum_i P_i(x) e^{a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n}$, где $P_i(x)$ — полиномы с коэффициентами из Γ. Используя результаты примеров 6 и 7, можно показать, что Γ' замкнуто относительно Γ.

Этот результат легко переносится на случай, когда Γ действительно [44].

Важным для теории алгебраических дифференциальных уравнений является следующее определение.

Кольцо Γ' называется сильно замкнутым относительно поля Γ, если из неразрешимости в Γ' системы вида $\alpha_1(u_1, \ldots, u_k) = 0, \ldots, \alpha_l(u_1, \ldots, u_k) = 0$ ($\alpha_i(u_1, \ldots, u_k)$ — полиномы от $u_1, \ldots, u_k$ и их производных с коэффициентами из Γ) следует существование полинома того же вида $\varphi(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$

---

[42] Следует иметь в виду, что в топологии дифференциального кольца операторы ∂_i должны быть непрерывными; Γ' должно быть T-пространством. Перенос топологии на матрицы из Γ очевиден.

[43] Не существует «алгебраического дифференциального критерия» наличия нетривиального решения системы однородных линейных уравнений.

Пусть, например, речь идет об уравнении $(a\partial + b\partial_0) u = 0$. Искомое условие не может выражаться равенством, так как (в замкнутой группе) нетривиальное решение существует при $a \neq 0$. Искомый критерий не может выражаться неравенствами, так как нетривиальное решение существует и при $a = 0$, $b = 0$ (и не существует при $a = 0$, $b \neq 0$).

[44] Некоторые результаты, касающиеся идеалов в $\Delta(\Gamma)$, при указанных Γ и Γ' приведены в работе Снэппера [2].

такого, что $\varphi(u_1, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0) = 0$ и $\varphi(u_1, \ldots, u_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) = 1$ при неопределенных $u_1, \ldots, u_k$.

Методом Рабиновича легко доказать, что если всякое решение системы (4) (из Γ'), является решением уравнения $\alpha(u_1, \ldots, u_k) = 0$, то существуют натуральное число p и полином $\varphi(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$ со свойствами: $\varphi(u_1, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0) = 0$ и $\alpha^p = \varphi(u_1, \ldots, u_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ при неопределенных $u_1, \ldots, u_k$ [45] (обратное заключение очевидно). Следует отметить, что замкнутость не является частным случаем сильной замкнутости.

Пример 9. Пусть Γ — поле отношений аналитических в нулевой точке функций аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими операторами дифференцирования. $\Gamma' = \Gamma'_\xi$ есть кольцо «аналитических в точке общего положения $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ функций» тех же аргументов. Это понимается в том смысле, что при любой специализации $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ Γ'_ξ будет обозначать кольцо аналитических в специализированной точке функций.

Таким образом, Γ'_ξ следует понимать как семейство колец. Для всякой конечной совокупности функций из Γ точка должна быть так специализирована, чтобы эти функции оказались принадлежащими Γ'_ξ. Из теории систем аналитических дифференциальных уравнений, развитой в работах Рикье, Тресса и других [46], следует выполнимость условий 1, 2 в следующем смысле.

1. Всякая конечная система уравнения вида (4), удовлетворяющая указанным требованиям, в предположении, что $g_1, g_2, \ldots, g_m$ принадлежит некоторому Γ'_a, к которому принадлежат и все коэффициенты левой части, разрешима в некотором Γ'_b (которому снова принадлежат и коэффициенты, и свободные члены системы (4)).

2. Если система (5) имеет только нулевое решение в некотором Γ'_a (где a не должно обращать в нуль конечное количество некоторых аналитических функций, определяемых системой), то выполняется соотношение, указанное в общей формулировке условия.

Можно сказать, что Γ'_ξ замкнуто относительно Γ в обобщенном смысле [47]. Мало того, Γ'_ξ сильно замкнуто относительно Γ (см. Ритт [1]).

Теперь, по крайней мере для случая, когда Γ есть поле функций аргументов $x_1, \ldots, x_n$, будет показана возможность конструирования соответствующего замкнутого кольца, а именно, справедлива теорема.

Теорема 15. *Если $\Gamma(x)$ — поле функций аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то кольцо $\Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)[x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n] = \Gamma(\xi)[x - \xi]$ (см. § 1) замкнуто относительно $\Gamma(x)$.*

Доказательство основано на лемме из дополнения 1.

Доказательство. Пусть Γ — поле функций n аргументов. Пусть система

$$A_1 u = g_1, \ \ldots, \ A_m u = g_m \tag{6}$$

обладает тем свойством, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Delta(\Gamma)$, для которых $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m = 0$, имеет место также $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m = 0$.

Для любых $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \Delta(\Gamma)$ имеет место представление

$$(\beta_1 A_1 + \ldots + \beta_m A_m) u = \sum_{ii_1 \ldots i_n} a_{ii_1 \ldots i_n}(x) \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} u_i, \tag{7}$$

[45] Доказательство аналогичного утверждения дано Риттом [1].

[46] См. Жанэ [2] (§ 6, 8), где приведена более полная литература.

[47] Можно без труда включить этот случай в данное ранее общее определение замкнутости, например, рассматривая вместо надкольца Γ' «семейство надколец» Γ' и т. д. Однако это не привело бы к существенной разнице и затемняло бы изложение.

где u_i — неизвестное на i-м месте столбца u; сумма конечна; $\alpha_{ii_1 \ldots i_n}(x) \in \Gamma = \Gamma(x)$.

Так как $g_i \in \Gamma(\xi)[x - \xi]$, то $g_i = \sum_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} g_i}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n}$, где $(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n})_\xi \in \Gamma(\xi)$ есть результат замены $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ в $\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} g$. Если $u_i = \sum_{i_1 \ldots i_n} \frac{u_{ii_1 \ldots i_n}}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n}$ $(i = 1, \ldots, k)$ составляют решение системы (6), то всякому представлению должно соответствовать тождество

$$\sum_{ii_1 \ldots i_n} \alpha_{ii_1 \ldots i_n}(\xi) u_{ii_1 \ldots i_n} = (\beta_1 g_1 + \ldots + \beta_m g_m)_\xi; \tag{8}$$

обратное, очевидно, также имеет место. Итак, достаточно показать разрешимость в $\Gamma(\xi)$ системы уравнений вида (8), где $u_{ii_1 \ldots i_n}$ — неизвестные.

Прежде всего легко видеть, что каждое конечное линейное следствие уравнений типа (8), т. е. уравнений, сопутствующих соотношению вида (7), есть снова уравнение этого типа.

Каждая конечная подсистема этой системы разрешима. Действительно, условием разрешимости является перенос всякого линейного соотношения левых частей уравнений (при неопределенных $u_{ii_1 \ldots i_n}$) на свободные члены. Это равносильно требованию: если в (8) все $\alpha_{ii_1 \ldots i_n}(\xi) = 0$, то $(\beta_1 g_1 + \ldots + \beta_m g_m)_\xi = 0$. Но из предположения $\alpha_{ii_1 \ldots i_n}(\xi_1) = 0$ следует $\beta_1 A_1 + \ldots + \beta_m A_m = 0$ и, следовательно, $\beta_1 g_1 + \ldots + \beta_m g_m = 0$. По лемме система (8), а следовательно, и (6) разрешимы.

Пусть теперь в системе (6) $g_1, \ldots, g_m = 0$. Согласно лемме необходимым и достаточным условием существования у системы (8) (при $g_1, \ldots, g_m = 0$) только нулевого решения является отсутствие параметрических неизвестных. Но тогда среди уравнений (8) имеются уравнения вида $u_{i0 \ldots 0} = 0$ (для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$; k — длина столбца u в (6)). Им должны соответствовать соотношения вида

$$\alpha_1^i A_1 + \cdots + \alpha_m^i A_m = (0, \ldots, \partial_0, \ldots, 0)$$

(∂_0 занимает i-е место; $i = 1, \ldots, k$; $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_m^i \in \Delta(\Gamma)$). Тогда, полагая $B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^k \end{pmatrix}$, получают $B_1 A_1 + \cdots + B_m A_m = I$ (единичная матрица). Это доказывает теорему.

Из одной теоремы Ритта [1] следует, что $\Gamma(\xi)[x - \xi]$ является также сильно замкнутым относительно $\Gamma(x)$. В дальнейшем в этом параграфе Γ обозначает поле, Γ' — замкнутую относительно Γ группу.

Одно непосредственное следствие определения замкнутости удобно выделить.

Лемма 13. *Пусть A — матрица Δ, M — левый модуль. Если f пробегает все интегральное многообразие (в Γ') модуля M, то Af пробегает все интегральное многообразие модуля $M : A$.*

Доказательство. Так как $(M : A) \subseteq M$, то из $Mf = 0$ следует $(M : A) Af = 0$ и Af есть интеграл $M : A$. Пусть g — интеграл $M : A$ (в Γ'). Система $Au = g$, $Mu = 0$ разрешима в Γ': действительно, всякая за-

висимость левых частей имеет вид $BA + D = 0$ (B, D — матрицы и $D \in M$). Но тогда $B \in M : A$ и $Bg = 0$, что и требовалось доказать.

Отсюда получаем: если $0 : A \subseteq M$ и g пробегает все интегральное многообразие модуля MA, то Ag пробегает все интегральное многообразие модуля M; это следует из равенства $M = MA : A$ и предыдущей леммы. В частности, это имеет место, если A — неособенная матрица ($0 : A = 0$).

Следующая теорема характеризует связь между интегральными многообразиями эквивалентных многообразий (см. Ритт [1] и Нетер и Шмейдлер [1]).

Теорема 16. *Если M, N — эквивалентные модули, $M = N : B$ $(N, B) = (1)$, то соотношение $u = Bv$ определяет взаимно-однозначное соответствие между интегральными многообразиями модулей M и N* [48].

Доказательство. Γ можно предполагать произвольным (дифференциальным) полем, Γ' — произвольной группой с полем операторов Γ. Если A такая матрица, что $AB - I \in N$, то $u = Bv$, $v = Au$ определяют искомое взаимно-однозначное соответствие между многообразиями модулей M и N, что и требовалось доказать.

Теорема 17. *Для того чтобы строка B содержала интегральное многообразие* [49] *модуля M, необходимо и достаточно, чтобы $B \in M$.*

Доказательство. Предположим, что f пробегает интегральное многообразие M, то $Bf = 0$. По последней лемме многообразие идеала $M : B$ состоит из нуля. Значит, по предположению замкнутости Γ', $M : B = (1)$, откуда $B \in M$.

Это доказывает необходимость условия, а достаточность очевидна.

Отсюда следует, что если $\alpha \in \Delta(\Gamma)$ и $\alpha \neq 0$, то существует $f \in \Gamma'$ такой, что $\alpha f \neq 0$.

Эта теорема соответствует теореме Гильберта для кольца полиномов [50], но указывает на более простое свойство кольца $\Delta(\Gamma)$: несовпадающие модули имеют различные интегральные многообразия.

Следующие теоремы характеризуют связь между интегральными многообразиями составного модуля и интегральными многообразиями компонент.

Теорема 18. *Интегральное многообразие объединения произвольного множества одинаковочленных модулей равно пересечению интегральных многообразий компонент.*

Доказательство просто.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество k-столбцов из Γ', $\mathfrak{M}_\eta$ — произвольное множество таких множеств. Объединением множеств $\mathfrak{M}_\eta$ — $\bigcup \mathfrak{M}_\eta$ будет называться множество всех конечных сумм вида $\sum f_\eta$, $f_\eta \in \mathfrak{M}_\eta$.

Теорема 19. *Интегральное многообразие пересечения конечного множества одинаковочленных модулей равно объединению интегральных многообразий компонент.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть пересечение двух модулей.

Пусть M, P, Q — модули с базисными матрицами A, D, E; $\mathfrak{M}_M$, $\mathfrak{M}_P$, $\mathfrak{M}_Q$ — соответствующие интегральные многообразия; $M = P \cap Q$.

Очевидно, $\mathfrak{M}_M \supseteq \mathfrak{M}_P \cup \mathfrak{M}_Q$.

---

[48] Для случая одного аргумента — у Леви [1]. В приведенной здесь форме — у Нетер и Шмейдлера [1].

[49] Это означает, как обычно, что интегральное многообразие B включает интегральное многообразие M.

[50] См. Ван-дер-Варден [2]. Ср. Ритт [1], где доказана теорема, аналогичная теореме 17 (однако ее не содержащая).

Пусть теперь $f \in \mathfrak{M}_M$. Система $Du = Df$, $Eu = 0$ разрешима. Действительно, всякое соотношение между левыми частями имеет вид $FD = GE$ (F, g — матрицы). Тогда $FD \subset P \cap Q = M$ и $FDf = 0$. Пусть h есть решение этой системы, тогда $h \in \mathfrak{M}_Q$ и $g = f - h \in \mathfrak{M}_P$. Итак, $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}_P$, $h \in \mathfrak{M}_Q$ и $\mathfrak{M}_M \in \mathfrak{M}_P \cup \mathfrak{M}_Q$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что лемма 13 и теоремы 17—19 непосредственно переносятся на случай, когда Γ есть поле отношений аналитических в точке функций и именно в следующей форме: Γ' — кольцо функций, аналитических в точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$; эта форма может быть специализирована для каждой рассматриваемой конечной системы матриц и модулей.

Больше того, лемма 13 и теоремы 17—19 верны и тогда, когда в Γ' выполняется первое из условий определения замкнутости (в частности, в условиях примера 7).

Нужно отметить, что эти теоремы применимы иногда и в более общих предположениях, если известна разрешимость используемых в доказательствах систем. Например, теорема 18 верна для идеала $(\partial_1^2 - \partial_2^2) = (\partial_1 - \partial_2) \cap \cap (\partial_1 + \partial_2)$, если за Γ' принять множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, и приводит к известному представлению Даламбера.

Теорему 19 можно обобщить, если Γ — поле функций n аргументов, $\Gamma' = \Gamma(\xi)[x - \xi]$ (с топологией в Γ', определенной в § 1). Именно в этих предположениях верна такая теорема.

Теорема 19′. *Интегральное многообразие пересечения произвольного множества модулей равно замыканию объединения интегральных многообразий компонент (пересечения).*

Доказательство. Пусть $M \bigcap_\eta M_\eta$ — модуль $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\eta$ — соответствующие интегральные многообразия. По лемме 10 рассматриваемое пересечению можно предполагать состоящим не более чем из счетного множества компонент, причем $M_\eta \supset M_{\eta+1}$ (η — порядковый номер). Очевидно далее, $\mathfrak{M} \supset \bigcup_\eta \mathfrak{M}_\eta$ и, так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, $\mathfrak{M} \supset \left(\overline{\bigcup_\eta \mathfrak{M}_\eta}\right)$. Пусть $M_\eta(l)$, $(M(l))$ — множества строк из M_η (M) степени, меньшей l. Так как $M_1(l) \supset M_2(l) \supset \ldots$ $\ldots$, то эта последовательность стабилизируется на некотором $M_{\eta_l}(l) = M(l)$. Пусть

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M},\ f_i = \sum_{i_1 \ldots i_n} \frac{f_{ii_1 \ldots i_n}}{i_1! \ldots i_n!} (x_1 - \xi_1)^{i_1} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n} \in \Gamma(\xi)[x - \xi].$$

Элементы $f_{ii_1 \ldots i_n}$ $(i = 1, \ldots, k;\ i_1 + \cdots + i_n > e)$ определяются только уравнениями вида

$$\sum_{ii_1 \ldots i_n} a_{ii_1 \ldots i_n}(\xi) f_{ii_1 \ldots i_n} = 0,$$

$$\sum_{ii_1 \ldots i_n} a_{ii_1 \ldots i_n}(x)(0, \ldots, \partial_1^{i_1}, \ldots, \partial_n^{i_n}, \ldots, 0) \in M(l)$$

(ненулевой элемент в $(0, \ldots, \partial_1^{i_1}, \ldots, \partial_n^{i_n}, \ldots, 0)$ на i-м месте). Это же имеет место для интегралов M_{η_l}; так как $M_{\eta_l}(l) = M(l)$, то по лемме (приложение 1) существует интеграл $f^l = \begin{pmatrix} f_1^l \\ \vdots \\ f_k^l \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{\eta_l}$ такой, что степени $f_i = f_i^l$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, k)$ не ниже l. Но тогда $f = \lim_l f^l \in \left(\bigcup_\eta \mathfrak{M}_\eta\right)$ и $\mathfrak{M} = \left(\bigcup_\eta \mathfrak{M}_\eta\right)$, что и требовалось доказать.

Если Г есть поле отношений аналитических в некоторой области функций, то точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ может быть так специализирована в этой области, чтобы теорема осталась верной. Предельный переход, введенный в Г′, соответствует асимптотическому приближению интегралов из $\mathfrak{M}$ интегралами из $\bigcup_\eta \mathfrak{M}_\eta$.

В заключение можно отметить следующую лемму.

Пусть Г′ — кольцо, сильно замкнутое относительно поля Г, Γ_1 — поле его отношений; Γ_2 — некоторое расширение поля Г. Каждый модуль $M = M_\Gamma$ в Δ (Г) порождает модули $M_{\Gamma_1} M_{\Gamma_2}$ соответственно в Δ (Γ_1) и Δ (Γ_2).

Лемма 14. *Если модуль из* Δ (Г) *приводим в* Δ (Γ_2), *то он приводим также в* Δ (Γ_1).

Доказательство. Пусть при расширении Г до Γ_2 модуль M порождает модуль $M_{\Gamma_2} = P \cap Q, P, Q \supset M_{\Gamma_2}$. Пусть определены некоторые базисные матрицы P и Q; пусть при замене в этих матрицах всех коэффициентов из Γ_2 неопределенными получаются матрицы A^*, B^*. Присоединением этих же неопределенных Г расширяется до дифференциального поля Г*; тогда матрицы A^*, B^* определяют модули P, Q^* из Δ (Г*), которые можно, очевидно, считать включающими M и, следовательно, его расширение M_{Γ^*}. Условие $M_{\Gamma^*} = P^* \cap Q^*$ приведет, на основании теоремы 5, к конечной системе уравнений (8) вида $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$, где $a_1, \ldots, a_m$ — элементы Г*, целые относительно присоединенных неопределенных величин [51].

Условия $M_{\Gamma^*} = P^*$ и $M_{\Gamma^*} = Q^*$ приводят соответственно к системам уравнений того же вида, что (2) и (3) : $b_1 = 0, \ldots, b_p = 0$ и $C_1 = 0, \ldots, C_2 = 0$. Система (1) разрешима в Г′; действительно, в противном случае, по определению сильной замкнутости, $1 = \varphi(a_1, \ldots, a_m)$ ($\varphi(u_1, \ldots, u_m)$ — полином от неопределенных $u_1, \ldots, u_m$ и их производных, коэффициенты которого принадлежат Г* и являются полиномами неопределенных из Г*); $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$, что приводит к неразрешимости системы (6) в Γ_2, а это противоречит предположению $M_{\Gamma_2} = P \cap Q$.

Система (6) имеет решение в Г′, не являющееся решением ни системы (7), ни системы (8); в противном случае $(b_i c_j)^s = \varphi_{ij}(a_1, \ldots, a_m)$, а это противоречит предположению, что существует решение из Γ_2 для (6), не являющееся решением ни (7), ни (8) (благодаря $P, Q \supset M_{\Gamma_2}$). Заменяя теперь в базисах P^*, Q^* неопределенные коэффициенты величинами из Г′, удовлетворяющими системе (6), но не (7) или (8), получаем модули P', Q' в Δ (Γ_1), причем $M_{\Gamma_1} = P' \cap Q$; $P', Q' \supset M_{\Gamma_1}$, что и требовалось доказать.

Из сделанных в начале этого параграфа замечаний и из леммы 14 следует неприводимость неприводимого аналитического модуля при любом расширении основного поля.

Пример 10. Пусть Г — поле постоянных.

Относительно незамкнутой группы показательных полиномов (см. пример 5) теория интегрального многообразия повторяет теорию алгебраических многообразий. Так, примарный идеал $((\partial - \partial_0)^2)$ и простой идеал $(\partial - \partial_0)$ имеют общее многообразие ae^x (в противоречие с теоремой 17). Если Г′ замкнуто (например, то же, что и в примере 6), то благодаря теореме 17 между этими теориями имеется существенное различие: идеалам $(\partial - \partial_0)^2$ и $(\partial - \partial_0)$ соответствуют разные многообразия: $(a + bx)\, e^x$, ae^x.

7. Преобразования систем уравнений

Используя результаты § 6, получим теоремы о преобразованиях систем уравнений (параллельные теоремам § 5).

[51] Эти уравнения являются алгебраическими дифференциальными уравнениями относительно неопределенных с коэффициентами из Г.

Будем рассматривать системы вида

$$Tu = g \tag{9}$$

или вида

$$Tu = 0, \tag{10}$$

где $T = {}_eT^k$ — матрица из $\Delta\Gamma$; $u = {}_ku'$ — столбец неизвестных; $g = {}_eg'$ — столбец из Г′. Решение системы будет определяться в Г′. Предположим, что Г — поле, Г′ — группа с полем операторов Г, замкнутая относительно Г. Как будет видно, проведение рассматриваемых преобразований потребует только алгебраических действий и дифференцирований над данными из Г.

Теорема 20. *Если ранг T равен r, то решение системы $Tu = g$ с k неизвестными ($u = {}_ku^1$) сводится к решению системы того же вида с r неизвестными.*

Доказательство. По лемме 11 существует неособенная матрица A такая, что TA имеет $k - r$ нулевых (последних) столбцов. Полагая $u = Av$, получают

$$TAv = g; \tag{9'}$$

так как A — неособенная матрица, то система $Av = u$ разрешима относительно v при любом u из Г′. Таким образом, все решения системы (9) и только они определяются из системы (9′) и формулы $u = Av$. Но решение системы (9) очевидно приводится к решению системы с r неизвестными (ранга r), что требовалось доказать.

Система уравнений $Tu = 0$ будет называться полной, если модуль, порожденный строками T, полный.

Теорема 21. *Если среди (линейных, операторных) следствий системы $Tu = 0$ ранга r содержится полная подсистема ранга r', то решение системы $Tu = 0$ сводится к решению системы с $r - r'$ неизвестными.*

В частности, если система $Tu = 0$ полная, то ее общее решение может быть получено алгебраическими действиями и дифференцированиями (над данными элементами из Г и элементами, независимо пробегающими Г′) [52].

Доказательство. По лемме 12 модуль (T), порожденный строками T, равен $N : A$, где N — $(k - s)$-членный модуль ранга $r - s$, A — матрица ранга $k - s$. По лемме 13 если f пробегает интегральное многообразие N, то Af пробегает интегральное многообразие (T) и, следовательно, системы $Tu = 0$. По предыдущей теореме интегральное многообразие модуля N определяется системой уравнений с $r - s$ неизвестными (при $r = s$ — тождественными).

Теорема 22. *Если количество уравнений системы $Tu = g$ равно рангу T, то решение этой системы сводится к решению независимых уравнений — каждое с одним неизвестным* [53].

Доказательство. По теореме 12 при сделанных предположениях должна существовать такая неособенная матрица A, что модуль $(T)\,A$ имеет диагональную матрицу. Подстановкой $u = Av$ данная система приводится к форме $TAv = g$, которая может быть заменена диагональной системой. Если v пробегает множество решений этой системы, Av пробегает множество решений исходной системы, что и требовалось доказать.

Теорема 23. *В предположении, что Г — полное поле, решение однородной*

[52] Фридрихс указывает мимоходом аналогичный прием получения «безынтегральных» решений (в более частном случае) [1, с. 149].

[53] В виде метода получения некоторых решений системы с постоянными коэффициентами указано Лурье [1].

системы уравнений можно привести к решению системы не более чем двух однородных уравнений с одной неизвестной.

Доказательство. По теореме 13 система $Tu = 0$ ($T = {}_lT^k$ ранга r) соответствует системе $T'u' = 0$ ($T' = {}_{l'}T^{k-r+1}$ ранга не выше единицы), и матрица A такая, что равенство $u = Au'$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между интегральными многообразиями систем $Tu = 0$, $T'u' = 0$.

Если ранг системы $T'u' = 0$ равен нулю, то $T' = 0$ и теорема очевидна: решение системы $Tu = 0$ оказывается безынтегральным. Если ранг системы $T'u' = 0$ равен единице, то, по предыдущему, решение ее можно привести к решению системы с одной неизвестной. По теореме 6 эту систему можно заменить не более чем двумя уравнениями.

Теорема 24. *Интегральное многообразие неприводимого модуля представимо в виде Af, где A — столбец из $\Delta(\Gamma)$; f пробегает или интегральное многообразие эквивалентного идеала, или Γ'.*

Эта теорема следует непосредственно из теоремы 14. Она сводит изучение интегрального многообразия неприводимого модуля к изучению интегрального многообразия неприводимого идеала.

Выше были указаны условия приводимости системы к диагональной форме. В дополнение к этому будет рассмотрена такая теорема.

Теорема 25. *Пусть система уравнений $Tu = g$ имеет матрицу $T = {}_lT^k$ ранга r; $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$. Преобразованием уравнений (не меняя неизвестных) эту систему можно привести к треугольной форме*[54]: $Ou^{k-r} = h_{k-r}$, $T'_{k-r+1}u^{k-r+1} = h_{k-r+1}$, ..., $T_ku^k = h_k$ (h_i — *столбцы из* Γ'; T_i — *матрицы из* $\Delta(\Gamma)$; $u^i = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \end{pmatrix}$, $u^k = u$). *Для разрешимости системы $Tu = g$ необходима и достаточна справедливость соотношения: $h_{k-r} = 0$. Указанные системы разрешимы последовательно: всякое решение $f^i = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \end{pmatrix}$ системы $T_iu^i = h_i$ такое, что $f^j = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \end{pmatrix}$ ($j = k - r$, ..., i) есть решение системы $T_ju^j = h_j$; решение f^i можно расширить до решения $f^{i+1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{i+1} \end{pmatrix}$ системы $T_{i+1}u^{i+1} = h_{i+1}$. Наконец, всякое решение системы $Tu = g$ может быть получено подобным расширением*[55].

Доказательство. Формулировка теоремы предполагает, что последние r-столбцы матрицы T независимы. Пусть вообще $T_{i_1 \ldots i_p}$ есть матрица, образованная i_1, ..., i_p столбцами матрицы T; $S_{i_1 \ldots i_p}$ — базисная матрица

[54] Для простоты допускается перенумерация неизвестных.

[55] Теорема эта (для случая нелинейных аналитических систем) доказана Рикье [1],

модуля 0: $T_{i_1 \ldots i_p}$. Матрица $S_{i+1 \ldots k}T$ имеет $i+1$, ..., k столбцов, равных нулю; матрица, остающаяся при их удалении, будет обозначена T_i. Очевидно, матрицы $S_{i+1 \ldots k}\,T$ и T_i — нулевые при $i = k - r$; далее, $S_{i+1 \ldots k}Tu = T_iu(i)$. Полагая $h_i = S_{i+1 \ldots k}g$ ($i = k - r$, ..., k), из системы $Tu = g$ получаем системы вида $T_iu^i = h_i$ ($i = k - r$, ..., k).

Очевидно, условие $h_{k-r} = 0$ необходимо для разрешимости $Tu = g$; оно достаточно для разрешимости $T_{k-r}u^{k-r} = h_{k-r}$, именно ($T_{k-r} = 0$) решение этой системы может быть выражено произвольным столбцом $f^{k-r} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{k-r} \end{pmatrix}$ из T'.

Теперь доказательство теоремы можно провести индукцией по i. Пусть система $T_iu^i = h_i$ имеет решение $f^i = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \end{pmatrix}$. Рассмотрим систему $T_{i+1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = h_{i+1}$ с неизвестным u_{i+1}. По свойству замкнутости Γ' условие разрешимости этой системы следующее: для модуля P_{i+1} такого, что $P_{i+1}T_{i+1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$ не содержит u_{i+1}, должно выполняться равенство

$$P_{i+1}\left[T_{i+1}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} - h_{i+1}\right] = 0.$$

Очевидно, модуль P_{i+1} должен уничтожать последний $i+1$-столбец матрицы T_{i+1} и, следовательно, $(i+1)$-столбец матрицы $S_{i+2 \ldots k}$; но тогда $P_{i+2}S_{i+2 \ldots k} \subset 0 : T_{i+1 \ldots k}$ и, следовательно, $P_{i+1}S_{i+2 \ldots k} = Q_{i+1}S_{i+1 \ldots k}$. Отсюда

$$P_{i+1}\left[T_{i+1}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} - h_{i+1}\right] = P_{i+1}S_{i+2 \ldots k}\left[T\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ h_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} - g\right] =$$

$$= Q_{i+1}S_{i+1}\left[T\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} - g\right] = Q_{i+1}\left[T_i\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \end{pmatrix} - h_i\right] = Q_{i+1}(0) = 0.$$

Итак, существует такое $f_{i+1} \in \Gamma'$, что

$$T_{i+1}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{i+1} \end{pmatrix} = h_{i+1}.$$

Это завершает индукцию.

Так как $T_iu^i = h_i$ равносильно $S_{i+1 \ldots k}[Tu - g] = 0$, то всякое решение $Tu = g$ охватывается указанным процессом определения f^k путем расширения f^{k-r}, что и требовалось доказать.

8. Размерность модуля

Пусть Γ — произвольное дифференциальное поле; $\partial_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $a_{ij} \in \Gamma$, $|a_{ij}| \neq 0$. Предположим $\partial_i'\partial_j' = \partial_j'\partial_i'$, что равносильно требованию: $\sum_{l=1}^{n} (a_{il}\partial_l a_{jk} - a_{jl}\partial_l a_{ik}) = 0$ при всех $i, j, k = 1, \ldots, n$. Последнее, в частности, имеет место при постоянных a_{ij} и также если формулы $\partial_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j$ соответствуют преобразованию аргументов[56].

Каждую матрицу из $\Delta(\Gamma)$ можно выразить через $\partial_1^1, \ldots, \partial_n^i$ с коэффициентами из Γ (линейное преобразование).

Пусть M — левый k-членный модуль из $\Delta(\Gamma)$, S — множество индексов i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, обладающих свойством: для каждого $i \in S$ можно указать такой индекс $j = j(i)$, что M не содержит элементов вида $(0, \ldots, \alpha, \ldots, 0)$, где α — ненулевой элемент, занимающий j-е место и выражаемый только через $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_i$. Если S не пусто, обозначим s — наибольший из индексов, содержащихся в S, а если S пусто, полагаем $s = -1$. Число s $(s = -1, 0, \ldots, n)$ будет называться размерностью модуля M относительно системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Легко видеть, что $s = -1$ равносильно тому, что M есть единичный модуль; $s = n$ равносильно тому, что ранг k-членного модуля M меньше k.

Система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ будет называться регулярной относительно k-членного модуля M (с размерностью s), если при $s \leqslant n$ для всякого $i = s+1, \ldots, n$ и для всякого $j = 1, \ldots, k$ можно указать элемент $A_{ij} \in M$ вида $A_{ij} = (0, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots, 0)$; α_{ij} — оператор, занимающий j-е место, выражаемый только через $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_i$ и имеющий вид $\partial_i^{\varkappa} + \sum_{i=0}^{\varkappa-1} \alpha_l (\partial_0, \ldots, \partial_{i-1})\partial_i^l$, где $\varkappa \geqslant 1$, или равный ∂_0 («регулярный» относительно ∂_i).

Система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ будет называться вполне регулярной, если при этом общая степень α_{ij} равна степени α_{ij} относительно ∂_i.

Пусть поле Γ расширено до поля Γ'; модуль M из $\Delta(\Gamma)$ порождает в $\Delta(\Gamma')$ некоторый модуль M'. Очевидно, размерности M и M' относительно $\partial_1, \ldots, \partial_n$ равны между собой.

Лемма 15. *Для всякого модуля можно указать вполне регулярную систему операторов* $\partial_1', \ldots, \partial_n'$ $(\partial_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j;\ i = 1, \ldots, n;\ a_{ij} \in \Gamma)$.

Доказательство. Если ранг k-членного модуля M меньше k или $M = (1)$, то всякая система операторов $\partial_1', \ldots, \partial_n'$, очевидно, регулярна. Пусть теперь ранг M равен k. Тогда M содержит элементы вида $(0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$, где α_j — ненулевой оператор, занимающий j-е место; это легко получается на основании леммы 2.

Пусть $\alpha_j = \sum_{i_1+\cdots+i_n=\varkappa_j} a_{ji_1\ldots i_n}\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} + \ldots$ (не все $a_{ji_1\ldots i_n}$ равны нулю; пропущены члены меньшей чем $\varkappa_j$ степени). Пусть $b_l^{(1)}$ $(l = 1, \ldots, n-1)$ такие целые числа[57], что $\sum_{i_1+\cdots+i_n=\varkappa_j} a_{ji_1\ldots i_n}(-b_1^{(1)})^{i_1} \ldots (-b_{n-1}^{(1)})^{i_{n-1}} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, k)$;

[56] Если Γ' замкнуто относительно Γ, то всякое линейное преобразование можно рассматривать как преобразование аргументов (в Γ'). Действительно, из замкнутости Γ' и свойств линейной системы «в инволюции» легко следует разрешимость в Γ' систем: $\partial_i' y_j = 1$ $(i = j)$, $\partial_i' y_j = 0$ $(i \neq j)$; $i, j = 1, \ldots, n$.

[57] Существование таких чисел очевидно.

преобразование $\partial_l^{(1)} = \partial_l + b_l^{(1)}\partial_n$ $(l = 1, \ldots, n-1)$, $\partial_n^{(1)} = \partial_n$ приведет, очевидно, все α_j к вполне регулярному относительно $\partial_n^{(1)}$ виду. Если M имеет для любого j элементы вида $(0_1, \ldots, \alpha_j^{(1)}, \ldots, 0)$, где $\alpha_j^{(1)}$ — ненулевой оператор, занимающий j-е место, выраженный только через $\partial_1^{(1)}, \ldots, \partial_{n-1}^{(1)}$, то можно с помощью того же приема посредством преобразований $\partial_l^{(2)} = \partial_l^{(1)} + b_l^{(2)}\partial_{n-1}^{(1)}$ $(l = 1, \ldots, n-2)$, $\partial_{n-1}^{(x)} = \partial_{n-1}^{(1)}$, $\partial_n^{(2)} = \partial_n^{(1)}$ добиться регулярности $\alpha_j^{(1)}$ относительно $\partial_{n-1}^{(2)}$. Последовательность преобразований применима не более m раз. Это доказывает лемму с тем дополнением, что регулярную систему $\partial_1', \ldots, \partial_n'$ можно получить посредством целочисленно обратимого линейного преобразования. Легко видеть, что если a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — неопределенные постоянные или переменные, связанные только соотношениями $\sum_{l=1}^{n} (a_{il}\partial_l a_{jk} - a_{jl}\partial_l a_{ik}) = 0$, то в поле $\Gamma(a_{ij})$ операторы $\partial_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ вполне регулярны относительно соответственно расширенного модуля.

Рассмотрим свойства инвариантности размерности.

Лемма 16. *Размерности модуля относительно двух регулярных систем операторов равны между собой.*

Доказательство. Пусть системы $\{\partial_i\}$ и $\{\partial_i'\} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ регулярны осносительно k-членного модуля M; соответствующие индексы M пусть равны s и s'. При $s = n$, очевидно, $s' = n$. Пусть теперь $s, s' < n$. Модуль M содержит элементы вида $A_{ij} = (0, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots, 0)$ $(i = s+1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$; коэффициент α_{ij} занимает j-е место, зависит только от $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_i$ и регулярен относительно ∂_i. Пусть степень α_{ij} относительно ∂_i равна $\varkappa_{ij}$; $\varkappa_j$ — максимальная из степеней $\alpha_{s+1,j}, \ldots, \alpha_{nj}$. Можно предполагать, что степень $\alpha_{i'j}$ относительно $\partial_{i'}$ ниже $\varkappa_{i'j}$ $(i' = s+1, \ldots, i)$. Каждый одночлен $\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n}$ сравним по модулю $\alpha_{s+1j}, \ldots, \alpha_{nj}$ с оператором, содержащим $\partial_{s+1}, \ldots, \partial_n$ соответственно в (формальных) степенях $\varkappa_{s+1j} - 1, \ldots, \varkappa_{nj} - 1$. Прежде всего будет проведена оценка степени этого оператора. Полагая $\pi(i_{s+1} + \cdots + i_n)$ возрастающей функцией не меньшей этой степени, легко видеть, что можно положить $\pi(l+1) \leqslant \pi(l) + \varkappa_j + \lambda_j$, где λ_j — максимальная из степеней операторов, соответствующих в предыдущем смысле одночленам $\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n}$, при $i_{s+1} < 2\varkappa_{s+1j}, \ldots, i_n < 2\varkappa_{nj}$. Итак, можно положить $\pi(l) = (\varkappa_j + \lambda_j)(l+1) = \mu_j(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$ Оператор степени p общего вида содержит $\binom{p+n}{n}$ произвольных коэффициентов; для того чтобы этот оператор выражался только через $\partial_1', \ldots, \partial_{s+1}'$, достаточно, чтобы эти коэффициенты удовлетворяли $\binom{p+n}{n} - \binom{p+s+1}{s+1}$ линейным однородным уравнениям; требование принадлежности этого оператора идеалу $(\alpha_{s+1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ приводит не более чем к $\varkappa_{s+1j} \ldots \varkappa_{nj}\binom{\mu_j(p+1)+s}{s}$ линейным однородным уравнениям. При достаточно большом p

$$\binom{p+n}{n} > \binom{p+n}{n} - \binom{p+s+1}{s+1} + \varkappa_{s+1j} \ldots \varkappa_{nj}\binom{\mu_j(p+1)+s}{s}$$

и, таким образом, существует ненулевой оператор α_{s+1}', зависящий только от $\partial_0, \partial_1', \ldots, \partial_{s+1}'$ и такой, что $(0, \ldots, \alpha_{s+1j}', \ldots, 0) \in M$ (α_{s+1j}' занимает j-е место).

Это показывает, что $s' \leqslant s$. Точно также получают $s \leqslant s'$ и $s = s'$, что и требовалось доказать.

Лемма 17. *Пусть M — модуль, A — матрица. Размерность s' модуля $M : A$ не превосходит размерности s модуля M.*

При этом, если M содержит элементы вида $A_{ij} = (0, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots, 0)$, где α_{ij} — ненулевой оператор, который занимает i-е место, зависит только от $\partial_0, \ldots, \partial_j$, регулярен относительно ∂_j и общая степень которого равна степени относительно ∂_j (при всех $i = 1, \ldots, k$[58]; $j = t+1, \ldots, n$), то $M : A$ содержит элементы такого же вида.

Доказательство. Если $s = n$, первое утверждение очевидно, условия второго — невозможны.

Пусть теперь $s < n$. Тогда M содержит ненулевые элементы вида $A_i = (0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)$ (α_i занимает i-е место и зависит только от $\partial_0, \ldots, \partial_{s+1}$; $i = 1, \ldots, k$). Из леммы 3 легко следует, что $M : A$ содержит элементы того же вида. Следовательно, $s' \leqslant s$ и первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы ($s \leqslant t < n$). Пусть A_{ij} — элементы M вида, указанного в формулировке леммы; из-за особого вида искомых элементов $M : A$ достаточно провести доказательство для случая, когда A — строка. Каждой строке B длины k соответствует строка B^*, которая получена из B вычитанием некоторых кратных строк A_{ij} так, чтобы степени B^* относительно $\partial_{t+1}, \ldots, \partial_n$ были максимально понижены. Для всех строк эти степени, очевидно, окажутся ограниченными в совокупности. Доказательство проводится индукцией по k. Если $k = 1$, то, рассматривая естественным образом $A^*, (\partial_j A)^*, (\partial_j^2 A)^*, \ldots$ ($j > t$) как строки с элементами из $\Delta_t(\Gamma)$[59], по теореме 5 получают существование элементов $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ из $\Delta_t(\Gamma)$ таких, что $(\partial_j^{p+1} A)^* = \alpha_0 A^* + \ldots + \alpha_p (\partial_j^p A)^*$, причем степени слагаемых правой части не превышают степени левой части; но тогда элемент $\partial_j^{p+1} - \alpha_n - \ldots - \alpha_p \partial_j^p$ есть искомый элемент $M : A$. Пусть теперь k произвольно и лемма доказана для строк длины, меньшей k. Тем же приемом получается существование оператора $\alpha = \partial_j^{p+1} - \alpha_0 - \ldots - \alpha_p \partial_j^p$ такого, что строка $(\alpha A)^*$ имеет первый элемент равным нулю. Применяя к этой строке предположение индукции, приходят к существованию элемента из $M : A$ искомого вида, что доказывает второе утверждение леммы.

В частности, для единичной матрицы A из проведенного доказательства видно, что если M содержит строки вида A_{ij}, то оно содержит также строки того же вида с тем дополнительным ограничением, что A_{ij} зависит только от $\partial_0, \ldots, \partial_t$ и ∂_j.

Из доказанной леммы следует, что эквивалентные модули имеют одинаковые размерности (относительно одной и той же системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$). Больше того, эти размерности равны относительно любых регулярных систем $\partial_1, \ldots, \partial_n$, так как из второго утверждения леммы 17 следует, что для эквивалентных модулей регулярные системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ общие.

Размерность модуля относительно регулярной системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ будет называться размерностью (безотносительной) модуля.

Полученные результаты приводят к теореме.

Теорема 26. *Размерность модуля не меняется при расширении основного поля Γ и инвариантна при общих линейных преобразованиях.*

Эквивалентные модули имеют одинаковую размерность.

---

[58] Индекс k, как обычно, обозначает длину строк M.

[59] $\Delta_t(\Gamma)$ есть кольцо дифференциальных операторов из $\Delta(\Gamma)$, зависящих только от $\partial_0, \ldots, \partial_t$.

9. Сопутствующие модули

Используя идею Хентцельта[60], здесь (для каждой системы операторов $\partial_1, \ldots, \partial_n$) введем модули M_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), связанные с k-членным модулем M следующим образом: M_i — множество всех k-строк из $\Delta(\Gamma)$ таких, что для каждого $A \in M_i$ можно указать ненулевой оператор $\alpha \in \Delta(\Gamma)$, зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_i$, такой, что $\alpha A \in M$. Модули M_i будут называться сопутствующими (относительно $\partial_1, \ldots, \partial_n$).

Очевидно, $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n$.

Удобно дополнить эту последовательность, полагая $M_{n+1} = (1)$.

Лемма 18. *Размерность M (относительно $\partial_1, \ldots, \partial_n$) равна наибольшему числу t из таких чисел i ($i = 0, 1, \ldots, n$), для которых $M_i \neq (1)$; (если $M = (1)$, то полагают $t = -1$).*

Доказательство. Пусть M k-членный модуль. Так как $M_{t+1} = (1)$, то $(0, \ldots, \partial_0, \ldots, 0) \in M_{t+1}$ (∂_0 занимает j-е место; $j = 1, \ldots, k$; существует ненулевой оператор $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_{t+1})$ такой, что $(0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0) \in M$). Тогда $s \leqslant t$.

Для каждого $j = 1, \ldots, k$ существует строка $A_j = (0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0) \in M$, где α_j — оператор, занимающий j-е место и зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_{s+1}$.

Пусть B — произвольная k-строка: $B = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$. По лемме 3 можно определить ненулевые операторы $\gamma_j = \gamma_j(\partial_0, \ldots, \partial_{s+1})$ и операторы ε_j такие, что $\gamma_j \beta_j = \varepsilon_j \alpha_j$ ($j = 1, \ldots, k$). Последовательным применением той же леммы можно определить элемент $\gamma = \gamma(\partial_0, \ldots, \partial_{s+1}) \neq 0$, являющийся правым кратным элементом $\gamma_j : \gamma = \varphi_j \gamma_j$ ($j = 1, \ldots, k$). Тогда $\gamma B = \varphi_1 \varepsilon_1 A_1 + \cdots + \varphi_k \varepsilon_k A_k \in M$ и $B \in M_{s+1}$. Итак, $M_{s+1} = (1)$ и, следовательно, $t \leqslant s$, что и доказывает лемму.

Для изучения инвариантных свойств модулей M_i полезны следующие леммы.

Лемма 19. *Пусть M — модуль, A — матрица. Тогда $(M : A)_i = M_i : A$*

Доказательство. Пусть $B \in (M : A)_i$. Следовательно, существует оператор $\alpha = \alpha(\partial_0, \ldots, \partial_i) \neq 0$ такой, что $\alpha B \in M : A$ и $\alpha B A \in M$; но тогда $BA \in M_i$ и $B \in M_i : A$. Пусть теперь $B \in M_i : A$, тогда $BA \in M_i$ и $\alpha B A \in M$ ($\alpha = \alpha(\partial_0, \ldots, \partial_i) \neq 0$). Следовательно, $\alpha B \in M : A$ и $B \in (M : A)_i$, что и требовалось доказать.

Отсюда сразу следует, что если M и N — суть эквивалентные модули, то M_i и N_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) также эквивалентны.

Лемма 20. *Существует система операторов $\partial_1', \ldots, \partial_n'$, вполне регулярная относительно M, $M : A_i$ ($i = 0, \ldots, n$), где A_i — базисная матрица M_i; M_i определен относительно $\partial_1', \ldots, \partial_n'$.*

Доказательство. Пусть M — модуль размерности s. Лемма будет доказана индукцией по s и притом в следующей усиленной форме: если система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярна относительно M размерности s, то линейным преобразованием вида $\partial_i' = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \partial_j$ ($i = 1, \ldots, s$), $\partial_i' = \partial_i$ ($i = s+1, \ldots, n$) (a_{ij} — целые числа) можно добиться регулярности M, $M : A_i$ ($i = 0, \ldots, n$).

Пусть $s = -1$; тогда $M = M_i = (1)$ ($i = 0, \ldots, n$) и лемма очевидна. При $s = 0$ $M_i = (1)$ ($i = 1, \ldots, n$) и лемма также очевидна. Пусть теперь $s > 0$ и лемма верна для модулей меньшей размерности.

Пусть система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярна относительно M; прежде всего будет показано, что линейным преобразованием только $\partial_1, \ldots, \partial_s$ можно добиться регулярности M и $M : A_s$. Пусть M_s определен относительно $\partial_1, \ldots, \partial_n$;

---

[60] См. Хентцельт и Нетер [1] (для идеалов в кольце полиномов). Снэппер [1] перенес эти методы на модули в кольце полиномов, Шмейдлер [1] — на идеалы в кольце целых алгебраических функций нескольких аргументов.

A_s — базисная матрица M_s. Если линейное преобразование охватывает только $\partial_1, \ldots, \partial_s$, то очевидно M_s не меняется; A_s можно тогда также считать неизменным. Далее, $M : A_s$ содержит элементы вида $(0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0)$ (оператор $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_s) \neq 0$ занимает произвольно выбранное j-е место). Тогда линейным преобразованием только $\partial_1, \ldots, \partial_s$ можно добиться регулярности всех α_j относительно ∂_s. Пусть это выполнено. При этом будут сохранены прежние обозначения; очевидно, после такого преобразования $\partial_1, \ldots, \partial_n$ остаются регулярными относительно M (размерности s!).

Далее $(0, \ldots, \partial_i^l, \ldots, 0)\, A_s$ (∂_i^l занимает j-е место; $i = s+1, \ldots, n$; $l = 1, 2, 3 \ldots$) по модулю M, из-за его регулярности, имеет ограниченные степени относительно $\partial_{s+1}, \ldots, \partial_n$. Тогда по теореме 5 среди этих строк можно выбрать конечный базис (относительно кольца дифференциальных операторов из $\Delta(\Gamma)$, зависящих только от $\partial_1, \ldots, \partial_s$). Но отсюда следует существование оператора $\beta_j = \beta_j(\partial_0, \ldots, \partial_s, \partial_i)$, регулярного относительно ∂_i, такого, что $(0, \ldots, \beta_j, \ldots, 0)\, A_s \in M$ (β_j занимает j-е место) и $(0, \ldots, \beta_j, \ldots, 0) \in M : A_s$. Если размерность $M : A_s$ меньше $s - 1$, то добавочным линейным преобразованием только $\partial_1, \ldots, \partial_{s-1}$ можно получить, наконец, систему $\partial_1', \ldots, \partial_n'$, регулярную относительно M и $M : A_s$.

Пусть снова система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярна относительно M и $M : A_s$. По лемме 19 $(M : A_s)_i = M_i : A_s$. Следовательно, при $i \geqslant s$ $(M : A_s)_i = (1)$. Тогда по лемме 18 размерность $M : A_s$ меньше s. По предложению индукции линейным преобразованием только $\partial_1, \ldots, \partial_{s-1}$ можно, сохраняя регулярность $M : A_s$, добиться регулярности $(M : A_s) : B_i = M : B_i A_s$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где B_i — базисная матрица $(M : A_s)_i = M_i : A_s$ (в преобразованных дифференциалах).

Пусть $A \in M_i \subseteq M_s$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$; тогда $A = CA_s$.

Отсюда следует $C \in M_i : A_s$ и $C = DB_i$. Итак, $A = DB_iA_s$; так как при любом D $DB_iA_s \in M_i$, то $B_iA_s = A_i$ есть базисная матрица M_i. Таким образом, $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярны [61] относительно $M : A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$; при $i > s$ (если $s < n$) $M_i = (1)$; A_i можно полагать единичной матрицей и $M : A_i = M$. Так как система $\partial_i, \ldots, \partial_n$ регулярна относительно M, то это завершает индукцию и доказывает лемму.

Система $\partial_1, \ldots, \partial_n$, обладающая указанным свойством, называется канонической.

Из хода доказательства видно, что если a_{ij} — неопределенные постоянные (или переменные, связанные только соотношениями $\sum_{l=1}^{n} (a_{il}\partial_l a_{jk} - a_{jl}\partial_l a_{ik}) = 0$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$), то система $\left\{\partial_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j\right\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ является канонической относительно модуля M' из $\Delta(\Gamma(a_{ij}))$, порожденного модулем M из $\Delta(\Gamma)$. Наконец, из леммы 17 следует, что регулярность $M : A_i$ не зависит от выбора базисной матрицы A_i.

Лемма 21. *Для всех канонических систем $\partial_1, \ldots, \partial_n$ модуль M определяет M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ однозначно.*

Доказательство. Пусть $\partial_1, \ldots, \partial_n$ и $\partial_1', \ldots, \partial_n'$ — канонические относительно M системы; M_i, M_i' $(i = 0, 1, \ldots, n)$ определены соответственно этим системам; A_i, A_i' — соответствующие базисные матрицы, система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярна относительно $M : A_i$. Так как $(M : A_i)_j = M^j : A_i = (1)$ $(j \geqslant i)$, то размерность $M : A_i$ меньше i. Тогда по лемме 18 $M_i' : A_i = (1)$

[61] Если система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ вполне регулярна относительно M, $M : A_i$, то она будет называться вполне канонической относительно M.

и, следовательно, $M_i \subseteq M_i'$. Также показывается обратное включение. Итак, $M_i = M_i'$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Лемма 22. *Если система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ вполне каноническая относительно модуля M и A_i есть базисная матрица модуля M_i, сопутствующего M относительно этой системы, то система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ является вполне канонической и относительно модуля $M : A_t$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. По лемме 19 $(M : A_t)_i = M_i : A_t$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть B_i — базисная матрица $(M : A_t)_i$. При $i \geqslant t$ B_i можно считать единичной матрицей; система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ при этом вполне регулярна относительно $(M : A_t) : B_i$ $(i \geqslant t)$.

Положим теперь $i < t$. Прежде всего докажем, что B_iA_t есть базисная матрица M_i.

Пусть $C \in M_i \subseteq M_t$; тогда $C = DA_t$ и $D \in M_i : A_t$. Следовательно, $D = EB_i$, $C = EB_iA_t$. Это доказывает высказанное утверждение.

Так как регулярность $\partial_1, \ldots, \partial_n$ относительно $M : A_i$ не зависит от выбора базиса M_i, то система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ вполне регулярна относительно $M : B_iA_t = (M : A_t) : B_i$ $(i < t)$.

Модули M_i, определенные для канонической системы $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$, будут называться модулями сопутствующими (безотносительно) модулю M.

Теперь важно рассмотреть, что получится с модулями M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ при расширении основного поля. Следующая лемма решает этот вопрос для частного случая: основное поле расширяется присоединением неопределенных постоянных, переменных.

Лемма 23. *Пусть для модуля M из $\Delta(\Gamma)$ в какой-либо системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$ определены модули M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть при расширении Γ указанного типа до поля Γ' модули M, M_i порождают модули M', M_i'. Тогда $(M')_i = M_i'$ $(i = 0, \ldots, n)$ (относительно той же системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$).*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай простого расширения $\Gamma' = \Gamma(\varphi)$, где φ — неопределенная постоянная или переменная.

С помощью леммы 3 легко получается: $M_i' \subseteq (M')_i$. Пусть теперь $A' \in (M')_i$. Можно предполагать, что коэффициенты из Γ' имеют форму $\sum_j \Phi_j a_j$, где Φ_j — произведения степеней φ (и его производных, если φ — переменное); $a_j \in \Gamma$; сумма конечна. Соответственно $A' = \sum_j \Phi_j A_j$, где A_j — строки из $\Delta\Gamma$. В множество мономов Φ_j вводится полное упорядочение. Прежде всего $(\partial_i^{\varkappa}\varphi)^{\lambda}$ предшествует $(\partial_{i_1}^{\varkappa_1}\varphi)^{\lambda_1}$, если первое из чисел $\varkappa_1 - \varkappa$, $\lambda_1 - \lambda$, $i_1 - i$, не равное нулю, положительно; 1 предшествует всякому $(\partial_i^{\varkappa}\varphi)^{\lambda} \neq 1$. Каждый моном Φ есть произведение множителей вида $(\partial_i^{\varkappa}\varphi)^{\lambda}$, которые расположены в убывающем порядке: в смысле предыдущего упорядочения. Моном Φ предшествует моному Φ_1, если, при указанном расположении их множителей (с дополнением, если нужно, этих множителей единицей) и при попарном их сравнении, в первой не совпадающей паре множителей Φ, Φ_1 множитель Φ предшествует множителю Φ_1. Пусть теперь ненулевой оператор $\alpha' = \alpha'(\partial_0, \ldots, \partial_i) \in \Delta(\Gamma')$ таков, что $\alpha'A' \in M'$. Если $\alpha' = \sum_j \Psi_j \alpha_j$ (Ψ — мономы указанного вида, $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_i) \in \Delta(\Gamma)$) и Ψ_0, Φ_0 — младшие мономы в разложениях α', A', то младшим мономом в аналогичном разложении $\alpha'A'$ будет, как легко видеть, моном $\Psi_0\Phi_0$, причем это разложение имеет вид: $\alpha'A' = \Psi_0\Phi_0\alpha_0A_0 + \ldots$ Тогда из $\alpha'A' \in M'$ следует $\alpha_0A_0 \in M$ и $A_0 \in M_i \in (M')_i$. Повторяя те же рассуждения для $A' - \Phi_0A_0$ и так далее, заключают, что все $A_j \in M_i$ и $A' \in M_i'$. Итак, $M_i' = (M')_i$ в случае простого расширения поля Γ.

Теперь этот результат легко распространяется индукцией на случай присоединения к Γ конечного количества неопределенных.

Случай присоединения произвольного множества неопределенных сводится к предыдущему, так как любой элемент $A' \in M'$ (и сопутствующий оператор α') содержат только конечное количество неопределенных.

Полученные результаты приводят к следующей теореме.

Теорема 27. *Пусть M — модуль из $\Delta(\Gamma)$, M_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — сопутствующие модули; Γ' получено присоединением к Γ или 1) неопределенных постоянных φ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$; или 2) неопределенных переменных φ_i $(i = 1, \ldots, n)$; M', $M_i' = (M')_i$ — расширения M, M_i при расширении Γ до Γ'; наконец, при помощи линейного преобразования $\partial_i^* = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\partial_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ — в первом случае, или $\partial_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial_i\varphi_j)\partial_j^*$ — во втором случае (общие линейные преобразования) для модуля M' определены модули*[62] *M_i^* $(i = 0, 1, \ldots, n)$, соответствующие системе $\partial_1^*, \ldots, \partial_n^*$. Тогда M_i^* — модули, сопутствующие M' с базисом из $\Delta(\Gamma)$, причем $M_i^* = M_i'$.*

Доказательство[63]. Пусть $\partial_1, \ldots, \partial_n$ — какая-либо каноническая система, для которой определены сопутствующие модули M_i; A_i — базисная матрица M_i. Так как $M_i' = (M')_i$ (лемма 22), то A_i служит базисной матрицей также и для $(M')_i$.

По определению каноничности $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярны относительно M, $M : A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. $M' : A_i$ — очевидно, расширения $M : A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; тогда их размерности совпадают (теорема 20). Так как, кроме того, $M \subseteq M'$, $M : A_i \subseteq M' : A_i$, то $\partial_1, \ldots, \partial_n$ регулярны относительно M', $M' : A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Итак, $\partial_1, \ldots, \partial_n$ — каноническая система для M'.

Далее, как указывалось при доказательстве леммы 20, система $\partial_1^*, \ldots, \partial_n^*$ также каноническая относительно M'. Но тогда из леммы 21 имеем $M_i^* = M_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Следующая теорема соединяет основные свойства сопутствующих модулей, определенные леммами 19, 21, 23 и теоремой 27.

Теорема 28. *Сопутствующие модули инвариантны относительно группы линейных преобразований, переводящих каноническую систему операторов в каноническую систему. При расширении основного поля присоединением неопределенных сопутствующие модули соответственно расширяются. Сопутствующие модули порождают сопутствующие модули, полученные при общем линейном преобразовании. Наконец, сопутствующие модули эквивалентных модулей соответственно эквивалентны.*

Пример 11. Пусть Γ — поле с двумя дифференцированиями, M — идеал, порожденный $\partial_1, \partial_2, \partial_2^2$. Очевидно, система ∂_1, ∂_2 регулярна относительно M; размерность M равна 1. Далее, $M_0 = M$, $M_1 = (\partial_2)$, $M_2 = (1)$. Отсюда $A_0 = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 \\ \partial_2^2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \partial_2$, $A_2 = 1$; $M : A_0 = (1)$, $M : A_1 = (\partial_1, \partial_2)$, $M : A_2 = M$. Это показывает, что ∂_1, ∂_2 — каноническая система и M_0, M_1, M_2 — сопутствующие модули.

Пример 12. Пусть Γ — поле постоянных; тогда $\Delta(\Gamma)$ изоморфно кольцу полиномов.

[62] По терминологии Хентцельта M_i^* — суть трансформированные модули.

[63] Доказательство аналогичной (впрочем, менее полной) теоремы для случаев, рассмотренных Хентцельтом и Шмейдлером, опирается на одну теорему Дедекинда — Кронекера — Мертенса, у Снэппера — на ее обобщение, здесь неприменимое.

Результаты этого параграфа переносятся непосредственно на полиномиальные идеалы и модули и приводят к некоторым результатам Хентцельта и Снэппера. Обратно, можно было бы перенести построение результанта Хентцельта на $\Delta(\Gamma)$.

10. Характеры модуля

Пусть M_i $(i = 0, 1, \ldots, n, n+1)$; $M_{n+1} = (1)$ — сопутствующие модули модуля M; фактор-группа $N_i = M_{i+1} - M_i$ будет рассматриваться как модуль с кольцом (левых) операторов, зависящих только от $\partial_0, \ldots, \partial_i$[64].

Теорема 29. *Модули N_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ обладают конечными базисами.*

Доказательство. Так как система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ каноническая, то она регулярна относительно $M : A_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ (A_{i+1} — некоторая базисная матрица M_{i+1}). Размерность $M : A_{i+1}$ при этом меньше $i+1$. Это означает (длина строк $M : A_{i+1}$ обозначена l_{i+1}), что существуют элементы $B_{i+1jp} = (0, \ldots, \alpha_{i+1jp}, \ldots, 0) \in M : A_{i+1}$ $(j = 1, \ldots, l_{i+1}$; $p = i+1, \ldots, n$; α_{ijp} занимает j-е место), где α_{i+1jp} — регулярный относительно ∂_p оператор, зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_p$. Это позволяет для каждого $B \in M_{i+1}$ определить элемент B^* такой, что $B - B^*A_{i+1} \in M \subseteq M_i$, причем степени всех таких B^* относительно $\partial_{i+1}, \ldots, \partial_n$ ограничены в совокупности. Поэтому при достаточно большом l каждому элементу B^* можно очевидным образом взаимно-однозначно сопоставить l-строку B^{**}, состоящую из операторов, принадлежащих $\Delta_i(\Gamma)$. Множество всех таких строк B^{**} образует $\Delta_i(\Gamma)$-модуль и по теореме 5 обладает конечным базисом. Этим же свойством поэтому обладает и множество всех B^* и, наконец, $N_i = M_{i+1} - M_i$.

В частности, также следует конечность ранга $N_i = M_{i+1} - M_i$, который будет обозначаться $\chi_i = \chi_i(M)$ $(i = 0, \ldots, n)$[65]. Пусть M — k-членный модуль ранга r и размерности s. Очевидно, $\chi_n(M) = k - r$; таким образом, если $s = n$, то $\chi_n(M) \neq 0$, если $s < n$, $\chi_i(M) = 0$ при $i = s+1, \ldots, n$.

Лемма 24. *Если A — матрица из $\Delta(\Gamma)$, M — модуль, то $\chi_i(M : A) \leqslant \chi_i(M)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.*

По лемме 19 $(M : A)_i = M_i : A$. Пусть $A_1, \ldots, A_l$ — строки из $M_{i+1} : A$, линейно независимые над $\Delta_i(\Gamma)$ по модулю $M_i : A$. Тогда $A_1A, \ldots, A_lA \in M_{i+1}$; далее, из соотношения $\alpha_1A_1A + \cdots + \alpha_lA_lA \in M_i$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta_i(\Gamma))$ следует $\alpha_1A_1 + \cdots + \alpha_lA_l \in M_i : A$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_l = 0$. Следовательно, $A_1A, \ldots, A_lA \in M_{i+1}$ линейно независимы над $\Delta_i(\Gamma)$ по модулю M_i. Отсюда непосредственно вытекает справедливость леммы.

В множестве числовых последовательностей $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n$ вводится полное упорядочение: $(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n)$ предшествует $(\chi_0', \chi_1', \ldots, \chi_n')$, если первая из ненулевых разностей $\chi_n' - \chi_n, \chi_{n-1}' - \chi_{n-1}, \ldots, \chi_0' - \chi_0$ положительна.

Теорема 30. *Пусть M, N — модули и $M \subseteq N$. Если $\chi_i(M) = \chi_i(N)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то $M = N$. Если $M \subset N$, то последовательность $(\chi_0(M), \chi_1(M), \ldots, \chi_n(M))$ следует за последовательностью $(\chi_0(N), \chi_1(N), \ldots, \chi_n(N))$.*

Доказательство. Из $M \subseteq N$ следует $M_i \subseteq N_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$. Если $M_i = N_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$, то, в частности, $M = M_0 = N_0 = N$. В этом случае, очевидно, $\chi_i(M) = \chi_i(N)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть теперь $M_0 \neq N_0$, t — наибольший индекс такой, что $M_t \subset N_t$; так как $M_{n+1} = N_{n+1} = (1)$, то $t \leqslant n$. Из $M_t \subset N_t$ и $M_{t+1} = N_{t+1}$ следует существование естественного операторно-гомоморфного отображения $\Delta_i(\Gamma)$-модуля $M_{t-1} - M_t$ на $\Delta_i\Gamma$-модуль $N_{t+1} - N_t$. Это показывает, что $\chi_t(N) \leqslant \chi_t(M)$; из

[64] Предполагается, что $\partial_1, \ldots, \partial_n$ составляют каноническую систему; указанное кольцо обозначим $\Delta(\Gamma)$.

[65] Легко доказать конечность ранга $N_i = M_{i+1} - M_i$ над $\Delta_i(\Gamma)$ для любой (неканонической) системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

$\chi_t(N) = \chi_t(M)$ очевидно следовало бы $M_t = N_t$. Итак, $\chi_t(N) < \chi_t(M)$. С другой стороны, если $t < n$, то $\chi_i(M) = \chi_i(N)$ при $i = t+1, \ldots, n$. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Как легко видеть, при расширении основного поля присоединением неопределенных постоянных и переменных числа $\chi_i(M)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ не меняются (ср. с леммой 23). Однако, как показывает следующий пример, числа $\chi_i(M)$ $(i = 0, \ldots, n)$ не всегда совпадают для разных канонических систем.

Пример 13. Пусть M — идеал, порожденный в $\Delta_2(\Gamma)$ оператором $\partial_1^2 - \partial_2$; системы ∂_1, ∂_2 и $\partial_1' = \partial_2$, $\partial_2' = \partial_1$ канонические относительно M. Далее, $M = M_0 = M_1$, $M_2 = (1)$; M — одномерный идеал. В системе ∂_1, ∂_2 модуль $M_2 - M_1$ имеет базис ∂_0, $\chi_1 = 1$ $(\chi_0 = \chi_2 = 0)$; в системе ∂_1', ∂_2' модуль $M_2 - M_1$ имеет базис ∂_0, ∂_1 и $\chi_1' = 2$ $(\chi_0' = \chi_2' = 0)$.

Пусть теперь основное поле Γ расширено присоединением неопределенных постоянных a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$; числа $\chi_i = \chi_i(M)$ $(i = 0, \ldots, n)$, определенные в системе $\{\partial_i' = a_{i1}\partial_1 + \ldots + a_{in}\partial_n\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, будут называться характерами модуля M; строка $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$ — характеристикой M. Система $\{\partial_i''\}$, для которой строка $(\chi_0^*, \ldots, \chi_n^*)$ не совпадает с характеристикой, будет называться характеристической.

Пример 14. Характеристика идеала $(\partial_1^2 - \partial_2)$, как легко проверить, есть $(0, 2, 0)$; таким образом, система ∂_1, ∂_2 является характеристической. Из теоремы 23 непосредственно получаем, что если $M \subset N$, то характеристика M следует за характеристикой N.

Инвариантные свойства характеристики собраны в следующей теореме.

Теорема 31. *Характеристика модуля не меняется при расширении основного поля присоединением неопределенных постоянных и переменных и при переходе от одной нехарактеристической системы $\{\partial_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ к другой. Характеристики эквивалентных модулей совпадают.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Последнее следует из леммы 24.

Полезно также иметь в виду, что размерность модуля равна наибольшему из индексов i, для которых $\chi_i \neq 0$.

Следующая лемма указывает случай инвариантности чисел $\chi_i(M)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ при линейном преобразовании.

Лемма 25. *Пусть $\{\partial_i' = a_{i1}\partial_1 + \cdots + a_{in}\partial_n\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяет линейное преобразование; здесь $a_{ij} = a_{ij}(c_1, \ldots, c_l)$ предполагаются рациональными функциями неопределенных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_l$ с коэффициентами из Γ такими, что $a_{ij}(0)$ равно единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Пусть $\Delta_i(\Gamma)$ $(\Delta_i'(\Gamma'))$ — кольцо полиномов $\partial_1, \ldots, \partial_i$ $(\partial_1', \ldots, \partial_i')$ с коэффициентами из Γ $(\Gamma' = \Gamma'(c_1, \ldots, c_l))$. Тогда строки, линейно независимые над $\Delta_i(\Gamma)$ по модулю M_i, линейно независимы по этому модулю также и над $\Delta_i'(\Gamma')$.*

Доказательство достаточно провести для $l = 1$ $(c_1 = c)$.

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — строки из $\Delta(\Gamma)$, $\alpha_1', \ldots, \alpha_m'$ — операторы из $\Delta_i'(\Gamma')$, не равные нулю в совокупности, такие, что $\alpha_1' A_1 + \cdots + \alpha_m' A_m \in M_i'$, где M_i' — модуль, порожденный M_i в $\Delta_n'(\Gamma')$. Можно предполагать, что коэффициенты операторов α_i' $(i = 1, \ldots, m)$ являются полиномами c, причем эти операторы не содержат общих множителей. Тогда при $c = 0$ $\alpha_1', \ldots, \alpha_m'$ не равны нулю в совокупности и превращаются в операторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\Delta_i(\Gamma)$. Наконец, $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m \in M_i$, что и доказывает лемму.

Из этой леммы непосредственно следуют выводы.

1. Числа $\chi_i = \chi_i(M)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, определенные для произвольной заданной канонической системы, не превышают соответствующих характеров модуля M.

Достаточно заметить, что при неопределенных a_{ij} система $\{\partial_i' = a_{i1}\partial_1 + \ldots + a_{in}\partial_n\}$ каноническая, причем модули M_i', сопутствующие M в $\Delta_n' \times (\Gamma')$, порождаются модулями M_i (определенными в $\Delta(\Gamma)$, $i = 0, 1, \ldots, n$).

2. Если $\partial_1, \ldots, \partial_n$ нехарактеристическая каноническая система модуля M, то соответствующие χ_i равны характерам M $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При этом базис $A_1, \ldots, A_{\chi_i}$, — $M_{i+1} - M_i$ над $\Delta_i(\Gamma)$ является также базисом $M_{i+1} - M_i$ над $\Delta_i'(\Gamma')$.

Модуль M будет называться несмешанным, если не более чем один его характер отличен от нуля. Случай, когда все характеры равны нулю, очевидно, соответствует единичному модулю.

Полные модули несмешанные и именно n-мерны (за исключением единичного модуля, который (-1)-мерен): действительно, $M_n = M$ и, следовательно, $M_i = M_{i+1} = M$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Легко видеть, что обратное также справедливо: несмешанный модуль размерности n полный.

Следующая теорема указывает еще один случай несмешанности.

Теорема 32. *Модуль M, обладающий линейно независимым базисом, ранг которого равен длине его строк (в частности, главный ненулевой идеал), несмешан и размерности $n - 1$ (за исключением единичного модуля, который (-1)-мерен).*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай главного идеала $\mathfrak{A} = (\alpha)$, отличного от нулевого и единичного идеалов. При общем линейном преобразовании с постоянными коэффициентами α делается регулярным относительно ∂_n: $\alpha = \partial_n^{\varkappa} + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \partial_j \partial_n^j$, где $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1})$ (степень α также равна $\varkappa$). Очевидно, $\mathfrak{A}_n = (1)$. Пусть $\beta = \mathfrak{A}_{n-1}$, тогда $\beta = \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \beta_j \partial_n^j \pmod{\mathfrak{A}}$ $(\beta_j = \beta_j(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1}))$. Если $\gamma = \gamma(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1}) \neq 0$ таково, что $\gamma\beta \in \mathfrak{A}$, то $\gamma \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \beta_j \partial_n^j \in \mathfrak{A}$, что возможно только при условии $\beta_j = 0$ $(j = 0, \ldots, \varkappa - 1)$; итак, $\beta \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_{n-1} = \mathfrak{A}$. Это показывает, что $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ и $\chi_i(\mathfrak{A}) = 0$ $(i = 0, \ldots, n-2)$, $\chi_{n-1}(\mathfrak{A}) \neq 0$, что доказывает теорему для главных идеалов.

Пусть M — k-членный модуль ранга k, с линейно независимым базисом. Тогда из теоремы 12 следует существование такой неособенной k-матрицы A, что модуль $N = MA$ имеет диагональную базисную матрицу. Таким образом, исследование модуля N можно свести к исследованию главных идеалов: $N_i = N$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, $N_n = (1)$, по предыдущему. Так как матрица A неособенная, то $N : A = (M, 0 : A) = M$. Тогда по лемме 19 $N_i : A = M_i$ $(i = 0, \ldots, n+1)$, и, следовательно, $M_i = M$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, $M_n = (1)$ и $\chi_i(M) = 0$ $(i = 0, \ldots, n-2)$, $\chi_{n-1}(M) \neq 0$.

На примере покажем, что обращение этой теоремы вообще неверно.

Пример 15. Пусть Γ — поле функций аргументов x_1, x_2 с соответствующими операциями ∂_1, ∂_2. Идеал $\mathfrak{A} = (x_2\partial_1\partial_2 + \partial_2 - \partial_1, \partial_2^2)$ является, как легко проверить, несмешанным одномерным идеалом.

Пример 16. Если Γ — поле постоянных, то ввиду изоморфизма $\Delta(\Gamma)$ с кольцом полиномов $\Gamma[x_1, \ldots, x_n]$ обращение теоремы 32 справедливо[66].

[66] Для идеалов см. Ван-дер-Варден [2]; для модулей — доказательство приводится методом индукции.

11. Производный модуль

Рассмотрим понятие производного модуля, связанное с понятием сопутствующего модуля, оказывающее, в частности, алгоритмическую помощь.

Пусть M — ненулевой k-членный модуль ранга r; с помощью (если понадобится) перенумерации можно предполагать, что M содержит строки вида $A_j = (0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0, \beta_{jr+1}, \ldots, \beta_{jk})$ при $r < k$ или $A_j = (0, \ldots, \alpha_j, \ldots, 0)$ при $r = k$ (здесь $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, r$). Если $\alpha_j = a\partial_0 (a \in \Gamma)$, α_j будет называться регулярным (можно положить $\alpha_j = \partial_0$), степень $\varkappa_j$ оператора α_j положительна, то линейным преобразованием (и умножением на элемент из Γ или его поля расширения) можно придать α_j форму: $\alpha_j = \partial_n^{\varkappa_j} + \sum_{l=0}^{\varkappa_j - 1} \alpha_{jl}\partial_n^l$, где $\alpha_{jl} = \alpha_{jl}(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1})$; α_j $(j = 1, \ldots, r)$ будут предполагаться в дальнейшем регулярными относительно ∂_n (причем степень α_j совпадает со степенью α_j относительно ∂_n)[67]. Для всякой строки $A \in M$ определяется однозначно строка $A' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ такая, что степень γ_j относительно ∂_n меньше $\varkappa_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ и $A = A' (\mathrm{mod}\, A_1, \ldots, A_r)$.

Множество всех таких строк из M образует модуль M' над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$; оператор ∂_n порождает оператор ν_n, действующий на элементы этого модуля по закону: при $A' \in M'$ $\nu_n A' = (\partial_n A')' \in M'$[68]. Очевидно $\nu_n(A_1' + A_2') = \nu_n A_1' + \nu_n A_2'$; если Γ содержит переменные, то, вообще, $\nu_n \gamma A' \neq \gamma\gamma_n A' \times (\gamma \in \Delta_{n-1}(\Gamma),\ A' \in M')$.

Лема 26. *Степени элементов M' относительно ∂_n ограничены в совокупности. Модуль M' обладает конечными базисом и рангом.*

Доказательство. Каждой строке $A' \in M'$ сопоставляется строка A^* из первых r операторов, составляющих A'. Множество таких укороченных строк образует модуль M^* над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$. Так как степени по ∂_n всех элементов из M^* меньше $\max\{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r\}$, то по теореме 5 M^* обладает конечным базисом над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$. Пусть $A_1^*, \ldots, A_m^*$ — этот базис и $A_1', \ldots, A_m'$ — соответствующие элементы из M'. Если A' — произвольный элемент из M', то существуют такие операторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Delta_{n-1}(\Gamma)$, что $A^* = \alpha_1 A_1^* + \cdots + \alpha_m A_m^*$ и, следовательно, строка $A' - \alpha_1 A_1' - \cdots - \alpha_m A_m' \in M'$ начинается с r нулей. Так как ранг M равен r, то $A' - \alpha_1 A_1' - \cdots - \alpha_m A_m' = 0$, что доказывает существование конечного базиса в M'.

Отсюда непосредственно следуют остальные утверждения леммы и т. д.

Пусть теперь для всех $A' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_k') \in M'$ степень α_j' меньше $\varkappa_j$ $(j = 1, \ldots, k$; степени $\varkappa_1', \ldots, \varkappa_n'$ — суть степени, определенные выше для $A_1, \ldots, A_r)$; $\alpha_j' = \sum_{l=0}^{\varkappa_j - 1} \alpha_{jl}\partial_n^l \alpha_{jl}' \in \Delta_{n-1}(\Gamma)$. Тогда строке $A' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_k')$ соответствует строка $(\alpha_{10}', \ldots, \alpha_{\varkappa_1 - 1}', \ldots, \alpha_{k\varkappa_k - 1}')$ длины $\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_k$ («расширенная» запись); это соответствие есть, очевидно, операторный гомоморфизм (над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$). Множество строк указанного вида образует также модуль, отождествляемый с M'. Этот модуль называется первым производным модулем модуля M. Строки $A_1, \ldots, A_r$, используемые при определении M', будут называться выделенными. Производным модулем нулевого модуля положим нулевой модуль.

[67] Эта степень будет называться приведенной степенью строки A_j.

[68] Это указывает следующий путь определения базиса по базису $B_1', \ldots, B_p'$ модуля M: с помощью выделенных строк определяются $B_1', \ldots, B_p'$ и к ним присоединяются $\nu_n^\lambda B_i'$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, p)$, пока $\nu_n^\mu B_i'$ не окажется зависящим от $\nu_n^\lambda B_i$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \mu - 1)$.

Исходя из указанного представления модуля M' теперь можно определить следующие производные модули M'', ... Очевидно, $M^{(i)} = 0$ при $i > n$[69]. При этом, определяя, например, M'', достаточно подвергнуть линейному преобразованию только $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$, что не отражается на определении M' и т. д. Таким образом, существует система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ («нормальная»), в которой определимы все $M^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 27. *Нормальная система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ является также вполне канонической (относительно k-членного модуля M). Пусть $M_1^{(i)}$ — множество k строк, таких, что для всякого $A \in M_1^{(i)}$ существует $\alpha \in \Delta_{n-1}(\Gamma)$ такой, что $\alpha A \in M^{(i)}$. Тогда модуль, порожденный в $\Delta(\Gamma)$ модулем $M_1^{(i)}$ и выделенными (при определении $M^{(i)}$) строками, совпадает с M_{n-i}*[70].

Доказательство. Прежде всего очевидно, что $M_1^{(i)}$, $M \subseteq M_{n-i}$. Пусть теперь $A \in M_{n-i}$, $\alpha = \alpha(\partial_0, \ldots, \partial_{n-i}) \neq 0$ таково, что $\alpha A \in M$. Строке A соответствует строка $A^{(i)}$, степени которой относительно $\partial_{i+1}, \ldots, \partial_n$, по возможности, понижены посредством выделенных строк. Тогда $\alpha A^{(i)} \in M$ и, следовательно, $\alpha A^{(i)} \in M^{(i)}$ и $A^{(i)} \in M_1^{(i)}$. Этим показано, что модуль, порожденный в $\Delta(\Gamma)$ модулем $M_1^{(i)}$ и выделенными строками, совпадает с M_{n-i}. Таким образом, для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что для всякого $A \in M_1^{(i)}$ можно определить операторы $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_j)$ $(j = n - i, \ldots, n)$, регулярные относительно ∂_j и такие, что $\alpha_j A \in M$. Пусть сначала $A \in M^{(0)}$, прежде всего, очевидно, $M_1^{(0)}$ и M имеют одинаковый ранг и выделенные в M строки $A_1, \ldots, A_r$ окажутся выделенными и в $M_1^{(0)} (\supset M)$. Тогда по лемме 25 последовательность $A, \partial_n A, \ldots$ обладает над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$ конечным базисом по модулю $A_1, \ldots, A_r$. Отсюда вытекает существование оператора $\alpha_n = \alpha_n(\partial_0, \ldots, \partial_n)$, регулярного относительно ∂_n и такого, что $\alpha_n A \in M$. Общий случай, когда $A \in M_1^{(i)}$, сводится к предыдущему следующим образом. Существование $\alpha_j = \alpha_j(\partial_0, \ldots, \partial_j)$ $(j = n - i, \ldots, n)$, регулярного относительно ∂_j и такого, что $\alpha_j A \in M$, следует из того, что $A \in M_1^{(i)}$ влечет $A \in M_1^{(n-j)}$ и, далее, рассмотренный частный случай с заменой n на $n - j$ и M на $M^{(n-j)}$. Этим доказано первое утверждение леммы.

Полученные результаты позволяют указать метод нахождения сопутствующих модулей и характеристик. Прежде всего будет показан метод нахождения базиса модуля 0: A (A — матрица из $\Delta(\Gamma)$). Пусть $A = {}_lA^k$ имеет ранг r и пусть $B = {}_lB^r$ — матрица, составленная из всех независимых справа столбцов A. Можно подобрать такую неособенную матрицу $C = {}_rC^r$, что

$$D = BC = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \alpha_r \\ \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{l-r1} & \ldots & \alpha_{l-rr} \end{pmatrix}$$

и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \neq 0$ (здесь, для простоты, допущена перестановка строк).

[69] Полагают дополнительно $M^{(0)} = M$. Понятие производного модуля, по существу (в другой форме), введено Жанэ (см. Жанэ [2]).

[70] Модуль, порожденный в $\Delta(\Gamma)$ модулем $M^{(i)}$ и выделенными строками, очевидно, совпадает с M.

Так как C — неособенная матрица, то $O : C = O$ и, следовательно, $O : A = O : B = (O : C) : B = O : BC = O : D$. (Модуль $O : D$ должен содержать $l - r$ независимых слева l-строк, которые можно определить в форме $B_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{ir}, 0, \ldots, \beta_i, \ldots, 0)$ $(i = r + 1, \ldots, l,\ \beta_i \neq 0)$ и занимает i-е место). Матрицы B, C, B_i согласно замечанию к лемме 2 определяются алгебраическими действиями и дифференцированием. При достаточно общем линейном преобразовании системы можно достичь того, чтобы β_i были регулярны относительно ∂_n. Если степень β_i относительно ∂_n равна $\varkappa_i$, то для определения базиса $O : D$ достаточно определить теперь такие строки $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l) \subset O : D$, что степень γ_i относительно ∂_n меньше $\varkappa_i$ $(i = r + 1, \ldots, l)$. Тогда из

$$\gamma_j\alpha_j + \sum_{i=r+1}^{l} \gamma_i\alpha_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{11}$$

следует ограниченность степеней относительно ∂_n всех γ_i $(i = 1, \ldots, l)$. Полагая $\gamma_i = \sum_j \delta_{ij}\partial_n^j$, $\delta_{ij} = \delta_{ij}(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1})$, систему (11) можно представить в следующей равносильной форме:

$$\sum_{ij} \gamma_{ij}\alpha_{ijp} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $\alpha_{ijp} = \alpha_{ijp}(\partial_0, \ldots, \partial_{n-1})$ определяются по α_i, α_{ij} алгебраическими действиями и дифференцированием. Наконец, система (12) равносильна определению базиса модуля $O : A'$, где A' — некоторая матрица из $\Delta_{n-1}(\Gamma)$, получаемая из A посредством алгебраических действий и дифференцирований. Таким образом, определение базиса $O : A$ сводится к нахождению базиса $O : A^*$, где A^* — некоторая матрица из $\Delta_1(\Gamma)$. Так как в $\Delta_1(\Gamma)$ применим алгоритм Евклида, то существуют две обратимые матрицы P, Q (определяемые также алгебраическими операциями и дифференцированием) такие, что PA^*Q — диагональная матрица. Тогда базис $O : PA^*Q$ определяется непосредственно. Так как $O : PA^*Q = [(O : Q) : A^*] : P = (O : A^*) : P$, то $O : A^* = (O : PA^*Q) : P$.

Указанный метод применим к решению задачи Гильберта об определении общего вида полиномов, удовлетворяющих системе линейных однородных уравнений с полиномиальными коэффициентами; достаточно только положить Γ полем постоянных. Теперь легко определить для k-членного модуля M (ранга r) сопутствующий модуль M_n. Действительно, методами, указанными при доказательстве леммы 2, можно определить $k - r$ независимых справа столбцов, уничтожающих M справа. Если A — матрица, образованная этими столбцами, то $M_n = O : A'$ [71].

Используя лемму 27 (в примененных при ее доказательстве обозначениях), можно указанным методом определить $M_1^{(i)}$ по $M^{(i)}$ (в $\Delta_{n-i}(\Gamma)$) при расширенной записи $M^{(i)}$ и тем самым определить M_{n-i}. Наконец, для определения характеров модуля можно использовать следующее замечание. Каждой строке из M_{n-i+1} сопоставляется однозначно строка, степени которой относительно $\partial_{n-i+1}, \ldots, \partial_n$ максимально понижены посредством выделенных (при определении $M^{(i)}$) строк. Множество таких строк образует модуль M^*, а указанное отображение есть операторный гомоморфизм над $\Delta_{n-1}(\Gamma)$. Очевидно, $M^* \supseteq M_1^{(i)}$; полный прообраз $M_1^{(i)}$ есть M_{n-1}. Тогда, как известно, $M_{n-i+1} - M_{n-i}$ операторно изоморфно (над $\Delta_{n-i}(\Gamma)$) фактор-модулю $M^* - M_1^{(i)}$.

[71] Указанный прием позволяет также определить базис пересечения конечного множества модулей.

Таким образом, $\chi_{n-i}(M)$ есть ранг $M^* - M_1^{(i)}$. Если расширить $\Delta_{n-i}(\Gamma)$ присоединением поля отношений кольца $\Delta_{n-i-1}(\Gamma)$, то в получаемом кольце $\Delta'_{n-i}(\Gamma)$ применим алгоритм Евклида. Тогда $\chi_{n-i}(M)$ определяется известными методами теории элементарных делителей. Конечно, вычисления должны проводиться относительно нехарактеристической системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ (для этого достаточно подвергнуть заданную систему линейному преобразованию с неопределенными постоянными коэффициентами). Идеал в следующем примере заимствован у Жанэ [2].

Пример 17. Рассматривается идеал M с базисом $\partial_5^2 - \partial_1\partial_2$, $\partial_1\partial_3 - \partial_4\partial_5$, $\partial_1\partial_2 - \partial_4^2$, $\partial_1\partial_2 - \partial_3\partial_5$, $\partial_3\partial_4 - \partial_2\partial_5$, $\partial_3^2 - \partial_2\partial_4$. Выделяя $\alpha = \partial_5^2 - \partial_1\partial_2$ и пользуясь расширенной записью для элементов $M' : (.., ..)$, где первое место занимает коэффициент при ∂_0, второе — коэффициент при ∂_5, получают базис M'' в виде $(-\partial_1\partial_2 + \partial_4^2, 0)$, $(0, -\partial_1\partial_2 + \partial_4^2)$, $(-\partial_1\partial_3, -\partial_4)$, $(-\partial_1\partial_2, \partial_3)$, $(-\partial_3\partial_4, \partial_2)$, $(-\partial_3^2 + \partial_2\partial_4, 0)$, $(0, -\partial_3^2 + \partial_2\partial_4)$. Выделяя две первые строки и пользуясь для строк M'' расширенной записью $(.,.,.,)$ (места заполнены коэффициентами при ∂_0, ∂_4, ∂_5, ∂_4, ∂_5), находим базис M''': $(-\partial_1\partial_3, 0, 0, \partial_0)$, $(0, \partial_3, \partial_2, 0)$, $(-\partial_1\partial_2, 0, \partial_3, 0)$, $(-\partial_3^2, \partial_2, 0, 0)$, $(\partial_1\partial_2^2, -\partial_3^2, 0, 0)$, $(-\partial_1\partial_3^3, 0, \partial_1\partial_2^2, 0)$. Выделяются строки $(\partial_3^4 - \partial_1\partial_2^3, 0, 0, 0)$, $(0, \partial_3^4 - \partial_1\partial_2^3, 0, 0)$, $(0, 0, \partial_3^5 - \partial_1\partial_2^3\partial_3, 0)$, $(0, 0, 0, \partial_3^4 - \partial_1\partial_2^3)$; элементы строк M''' соответствуют коэффициентам при ∂_0, ∂_3, ∂_3^2, ∂_3^3, ∂_4, $\partial_3\partial_4$, $\partial_3^2\partial_4$, $\partial_3^3\partial_4\partial_5$, $\partial_3\partial_5$, $\partial_3^2\partial_5$, $\partial_3^3\partial_5$, $\partial_3^4\partial_5$, $\partial_4\partial_5$, $\partial_3\partial_4\partial_5$, $\partial_3^2\partial_4\partial_5$, $\partial_3^3\partial_4\partial_5$. Базис M''' имеет вид

$$(0, 0, \partial_0, 0, -\partial_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1\partial_2^3, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1\partial_2^2, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1\partial_2^2, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(0, -\partial_1\partial_2^2, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1\partial_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(0, -\partial_1\partial_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(0, 0, 0, 0, -\partial_1\partial_2^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1^2\partial_2^4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(0, -\partial_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1^2\partial_2^3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0, 0),$$

$$(-\partial_1^2\partial_2^3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0, 0),$$

$$(-\partial_1^2\partial_2^3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \partial_0).$$

Все эти строки выделяются; тогда $M^{\mathrm{IV}} = 0$ и $M^{\mathrm{V}} = 0$. Легко видеть, что $M_1' = (1)$, $M_1'' = (1)$, $M_1''' = M'''$. Соответственно этому $M_5 = M_4 = M_3 = (1)$, $M_2 = M_1 = M_0 = M$. Идеал M — несмешанный двухмерный; его характеристика соответственно равна $(0, 0, 4, 0, 0, 0)$ (можно проверить, что она сохраняется при общем линейном преобразовании).

Рассматривая M как полиномиальный идеал, легко определить параметрическое представление его общего корня. Откуда непосредственно следует несмешанность (и даже простота) идеала M и определяется его размерность.

Пусть $r^{(i)}$ — ранг $M^{(i)}$; $A_1^{(i)}, \ldots, A_{r^{(i)}}^{(i)}$ — строки, выделяемые в $M^{(i)}$ при получении $M^{(i+1)}$. Тогда справедлива лемма.

Лемма 28. *Совокупность строк $A_j^{(i)}$ $(j = 1, \ldots, r^{(i)},\ i = 0, 1, \ldots, n)$ образует базис M. Каждая строка $A \in M$ может быть представлена (и при этом единственным образом) в виде*

$$A = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{r^{(2)}} \alpha_j^{(i)} A_j^{(i)};\ \alpha_j^{(i)} \in \Delta_{n-i}(\Gamma). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $A \in M$; очевидно, можно подобрать такие $\alpha_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, r^{(0)})$ из $\Delta_n(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$, что $A = \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \alpha_j^{(0)} A_j^{(0)}$; дальнейшее доказательство представления (13) ведется индукцией. Единственность такого представления очевидна.

Наконец, введенные понятия позволяют легко определить «характеристическую функцию» модуля.

Теорема 33. *Пусть M — s-мерный модуль. Для того чтобы строка A степени p (достаточно большой) принадлежала модулю M, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A удовлетворяли некоторой линейной однородной алгебраической системе, содержащей $\omega(p) = \sum_{i=0}^{s} a_i \binom{p+i}{i}$ независимых уравнений (a_i — целые числа); (если $M = (1)$, то $\omega(p) = 0$)* [72].

Доказательство. При доказательстве удобно для выделенных строк $A_j^{(i)}$ предполагать, что их приведенные степени $\varkappa_j^{(i)}$ равны их степеням (что, очевидно, всегда достижимо). Далее, в представлении (13) (лемма 28) степени отдельных слагаемых $\alpha_j^{(i)} A_j^{(i)}$ не превышают степени A. Если $p \geqslant \max\{\varkappa_j^{(i)}\}$, то количество линейно независимых над Γ строк из M, степени, не превышающей p, равно $\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=1}^{r^{(i)}} \binom{p - \varkappa_j^{(i)} + n - i}{n-i}$ (лемма 27). Так как всего имеется $k\binom{p+n}{n}$ линейно независимых над Γ k-строк степени, не превышающей p, то $\omega(p) = k\binom{p+n}{n} - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{r^{(i)}} \binom{p - \varkappa_j^{(i)} + n - i}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{p+i}{i}$ (последнее выражение получается путем простых преобразований).

С другой стороны, из определения размерности ($s \geqslant 0$) модуля непосредственно следует существование такого числа q, не зависящего от p, что $\omega(p) \leqslant qp^s$ (при достаточно большом p). Это показывает, что $a_i = 0$ при $i = s+1, \ldots, n$, что и требовалось доказать.

12. Размерные операторы

Производные модули тесно связаны со строением интегральных многообразий. Настоящий параграф служит подготовкой к установлению этой связи.

Сначала будет рассмотрен важный частный случай.

[72] Для кольца полиномов теорема доказана Гильбертом [1]. Другие доказательства даны Ван-дер-Варденом [3] и Гюнтером [1].

Пусть Γ — дифференциальное поле, Γ' — соответствующая замкнутая группа с операторами дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_n$; пусть возможно установить последовательности отображений ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дифференциальных полей Γ_i и им соответствующих групп Γ_i' $(i = 0, 1, \ldots, n;\ \Gamma_n = \Gamma,\ \Gamma_n' = \Gamma',\ \Gamma_0 = \Gamma_0')$ со свойствами:

1) Γ_i, Γ_i' допускают операторы дифференцирования $\partial_0, \ldots, \partial_i$;

2) Γ_i' замкнуто относительно Γ';

3) ω_i — изоморфное отображение Γ_i на Γ_{i-1} и гомоморфное — Γ_i' на Γ_{i-1}';

4) если $a \in \Gamma_i$, $a' \in \Gamma_i'$, то $\omega_i(aa') = \omega_i(a)\,\omega_i(a')$; при $j < i$ $\omega_i(\partial_j a) = \partial_j \omega_i(a)$, $\omega_i(\partial_j a') = \partial_j \omega_i(a')$;

5) если $\omega_i(\partial_i^m a') = 0$ при всех $m = 0, 1, \ldots$, то $a' = 0$;

6) для любой последовательности элементов $f_0, f_1, \ldots, \in \Gamma_{i-1}'$ $(i \geqslant 1)$ можно определить такой элемент $f \in \Gamma_i$, что $\omega_i(\partial_i^j f) = f_j$.

Пусть $A = {}_lA^k$ — матрица из $\Delta(\Gamma)$. Отображение, сопоставляющее каждому k-столбцу f из Γ' l-столбец Af (из Γ'), будет называться n-мерным оператором: $\theta_n = {}_l\theta_n^k$. Так как Γ' замкнуто относительно Γ, то на основании теоремы 17 можно отождествить θ_n с A. Аналогично определение s-мерного оператора для пары Γ_s, Γ_s'. Отображение θ_s, сопоставляющее каждому k-столбцу f из Γ_s' l-столбец $\theta_s f$ из Γ', при $s < n$ будет называться s-мерным, если при любых целых неотрицательных $i_{s+1}, \ldots, i_n : f \to \omega_{s+1}, \ldots, \omega_n \times (\partial_{s+1}^{i_{s+1}}, \ldots, \partial_n^{i_n} f)$ определяет s-мерный оператор для пары Γ_s, Γ_s'. Это равносильно требованию, чтобы $f \to \omega_n(\partial_n^{i_n} f)$ для всякого i_n определяло также s-мерный оператор для пары Γ_{n-1}, Γ_{n-1}'. Следует отметить, что существуют нулевые операторы любой размерности $s = 0, \ldots, n$. По определению s-мерного оператора каждый такой оператор можно однозначно определить (по п. 5 определения ω) множеством матриц $A_{i_{s+1} \ldots i_n}$ из $\Delta_s(\Gamma_s)$ таких, что $\omega_{s+1} \ldots, \omega_n(\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \theta_s f) = A_{i_{s+1} \ldots i_n} f$ для всех столбцов f из Γ_s'; можно полагать $A_{i_{s+1} \ldots i_n} = \omega_{s+1} \ldots \omega_n(\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \theta_s)$.

Таким образом, если $\theta_s \neq 0$, то не все $A_{i_{s+1} \ldots i_n}$ равны нулю. Отсюда легко получается, что если $f, g \in \Gamma_s'$ и c — постоянная из Γ', то $\theta_s(f+g) = \theta_s f + \theta_s g$, $\theta_s(cf) = c\theta_s f$. Далее, если A — матрица из $\Delta(\Gamma)$ и B — матрица из $\Delta_s(\Gamma_s)$, то $A\theta_s$, $\theta_s B$ — также s-мерные операторы. Наконец, пусть $\omega_{s+1} \ldots \omega_n(\theta_s) = A = {}_lA^k$ из $\Delta_s(\Gamma_s)$. Пусть столбец i матрицы A имеет степень $\varkappa_i$ относительно ∂_s $(s \geqslant 1)$, тогда $Af = Bg$, где B не содержит

$$\partial_{s_i} f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ \partial_s^{k_1 - 1} \\ \cdots \\ \partial_s^{\varkappa_k - 1} f_k \end{pmatrix}.$$

По определению ω (п. 6) все $\omega_s(\partial_s^j f_i)$ $(j = 0, \ldots, \varkappa_i - 1,\ i = 1, \ldots, k)$ пробегают независимо Γ_{s-1}', если f_i пробегают независимо Γ_s'. Таким образом, полагая $\omega_s(B) = B^*$, $\omega_s(g) = G^*$, можно рассматривать $G^* \to \omega_s \ldots \omega_n(\theta_s f)$ как $s-1$-мерный оператор, отображающий столбец из Γ_{s-1}' в столбец из Γ_{s-1}' с матрицей B^*. (Этот оператор будет обозначаться $\omega_s \ldots \omega_n(\theta_s)$.) Отметим, что $B^* = 0$ равносильно

$(i \leqslant s+1)$, равенство одного из которых нулю влечет равенство нулю остальных.

Очевидно, конечная сумма вида $\theta_s^{(1)} f^{(1)} + \cdots + \theta_s^{(p)} f^{(p)}$, где столбцы $f^{(1)} \ldots f^{(p)}$ независимо пробегают Γ_s', также является s-мерным оператором. В группе (с операторами из $\Delta(\Gamma)$) s-мерных операторов (одинакового «размера») вводится топология: для $s = n$ — дискретная; при $s < n$ $\theta_s^m \underset{m}{\to} 0$ означает, что для любых $i_{s+1} + \cdots + i_n \geqslant 0$ $\omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \theta_s^{(m)}) = 0$ почти для всех m.

Легко видеть (п. 5,6 определения ω), что можно отождествить нульмерные операторы с матрицами из Γ'. Таким образом, размерные операторы можно рассматривать как понятие, связывающее $\Delta(\Gamma)$ (n-мерные операторы) с Γ' (нульмерные операторы).

Можно ввести топологию в Γ', соответствующую определенной здесь топологии размерных операторов: $f^{(m)} \underset{m}{\to} 0$ $(f^{(m)} \in \Gamma')$ означает, что для любых $i_1, \ldots, i_n \geqslant 0$ $\omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} f^{(m)}) = 0$ почти для всех m.

Пример 18. Пусть $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ — поле функций,

$$\Gamma' = \Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)[x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n], \ \Gamma_i = \Gamma(x_1, \ldots, x_i,$$

$$\xi_{i+1}, \ldots, \xi_n), \ \Gamma_i' = \Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)[x_1 - \xi_1, \ldots, x_i - \xi_i]$$

(с очевидным видоизменением при $i = 0$); ω_i определяется условием: если $a(x_1, \ldots, x_i) \in \Gamma_i, \Gamma_i'$, то $\omega_i(a) = a(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i)$.

Размерный оператор можно представить в форме

$$\theta_s = \sum_{i_{s+1} \ldots i_n} \frac{(x_{s+1} - \xi_{s+1})^{i_{s+1}} \ldots (x_n - \xi_n)^{i_n}}{i_{s+1}! \ldots i_n!} A_{i_{s+1} \ldots i_n},$$

где $A_{i_{s+1} \ldots i_n}$ — матрицы из $\Delta_s(\Gamma_s)$.

Топологии в Γ', определенные для этого случая, в настоящем параграфе и в § 1 совпадают.

Можно доказать, что θ_s — непрерывный оператор и притом отображает всякое замкнутое линейное многообразие в замкнутое. В случае, если Γ — поле отношений аналитических функций, на θ_s также накладываются условия аналитичности.

Имеет место легко доказываемая теорема.

Теорема 34. *Всякий замкнутый модуль (с коэффициентами из $\Delta(\Gamma)$) s-мерных операторов обладает конечным базисом (см. прил. 2).*

Докажем ряд лемм, служащих подготовкой доказательства этой (основной в данном параграфе) теоремы.

Лемма 29. *Пусть дана система уравнений вида*

$$\sum_{\eta} \theta^{(\zeta,\eta)} u_\eta = f^{(\zeta)} \tag{14}$$

(сумма распространена на конечное множество значений η, зависящее от ζ-индекса уравнения; u_η — неизвестные столбцы, $f^{(\zeta)}$ — столбец из Γ'; $\theta^{(\zeta,\eta)}$ — размерные операторы).

Для того чтобы существовала система столбцов $u_\eta = g_\eta$ из $\Gamma'_{\zeta(\eta)}$ ($s(\eta)$ — размерность $\theta^{(\zeta,\eta)}$), образующая решение этой системы, необходимо и достаточно, чтобы для всякой конечной системы строк $A^{(\zeta)}$ из $\Delta(\Gamma)$ таких, что

$$\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\sum_{\zeta} A^{(\zeta)} \sum_{\eta} \theta^{(\zeta,\eta)} u_\eta \Big) = 0$$

при неопределенных u_η, также $\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\sum_{\zeta} A^{(\zeta)} f^{(\zeta)} \Big) = 0$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности, очевидно, можно ограничиться случаем, когда каждое уравнение системы состоит из одной строки. В этом случае $A^{(\zeta)}$ суть операторы из $\Delta(\Gamma)$.

По п. 5, 6 определения ω всякое решение системы всех уравнений вида

$$\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \sum_{\eta} \theta^{(\zeta,\eta)} u_\eta \Big) = \omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} f^{(\zeta)}) \tag{15}$$

приводит к решению системы (14); достаточно поэтому доказать разрешимость системы (15). Так как последняя система есть система линейных алгебраических уравнений (с решением, искомым в Γ_0'), то для ее разрешимости достаточна разрешимость каждой ее конечной подсистемы (см. прил. 1).

Пусть $a^{(\zeta)}$ — конечная система элементов Γ_0 таких, что $\sum_{\zeta} a^{(\zeta)} \omega_1 \ldots \omega_n \times \Big(\partial_1^{i_1(\zeta)} \ldots \partial_n^{i_n(\zeta)} \sum_{\eta} \theta^{(\zeta,\eta)} u_\eta \Big) = 0$ при любых u_η; пусть $\bar{a}^{(\zeta)}$ — прообраз $a^{(\zeta)}$ в Γ при отображении $\omega_1 \ldots \omega_n$. Тогда $\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\sum_{\zeta} \bar{a}^{(\zeta)} \partial_1^{i_1(\zeta)} \ldots \partial_n^{i_n(\zeta)} \times \sum_{\eta} \theta^{(\zeta,\eta)} u_\eta \Big) = 0$ и, следовательно, $\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\sum_{\zeta} \bar{a}^{(\zeta)} \partial_1^{i_1(\zeta)} \ldots \partial_n^{i_n(\zeta)} f^{(s)} \Big) = 0$, или $\sum_{\zeta} a^{(\zeta)} \omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1(\zeta)} \ldots \partial_n^{i_n(\zeta)} f^{(\zeta)}) = 0$. Это показывает разрешимость системы (15) и, следовательно, системы (14), что и требовалось доказать.

Из сделанных замечаний непосредственно следует, что если минимальная размерность операторов $\theta^{(\zeta,\eta)}$ системы (14) равна t, то в условии леммы можно заменить отображение $\omega_1 \ldots \omega_n$ отображением $\omega_{t+1} \ldots \omega_n$, при $t = n$ аналогичное отображение исключается. Множество столбцов из Γ', имеющих представление $\sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i$, где f_i независимо пробегает Γ_i', будет называться размерным многообразием и именно s-мерным, если $\theta_s \neq 0$, $\theta_i = 0$ $(i > s, s < n)$.

Многообразие $\mathfrak{M}$ с представлением $\theta_s f_s$ будет называться однородным.

Лемма 30. *Размерное многообразие замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие с представлением $\sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i$; столбец g является предельной точкой $\mathfrak{M}$. Тогда для каждого натурального m можно подобрать столбцы $f_j^{(m)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ такие, что $\omega_1 \ldots \omega_n \Big(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i^{(m)} \Big) = \omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} g)$ при $i_1 + \cdots + i_n < m$.

Таким образом, система алгебраических уравнений

$$\Big\{ \omega_1 \ldots \omega_n \Big(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \sum_{i=0}^{n} \theta_i u_i \Big) = \omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} g) \Big\}, \ i_1 + \cdots + i_n < m$$

разрешима для каждого m и, следовательно, разрешима система

$$\Big\{ \omega_1 \ldots \omega_n \Big(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} \sum_{i=0}^{n} \theta_i u_i \Big) = \omega_1 \ldots \omega_n (\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n} g) \Big\}, \ i_1, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots$$

Тогда из леммы 29 следует разрешимость уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} \theta_i u_i = g,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 31. *Размерность многообразия не превышает размерности надмногообразия.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ — многообразия размерностей s, s' с представлениями $\sum_{i=0}^{s} \theta_i f_i$ и $\sum_{i=0}^{s'} \theta_i' f_i'$; достаточно предполагать эти представления однострочными. Сначала рассмотрим случай: $s = n$, $s' < n$. Так как $\omega_{s'+1} \ldots \omega_n (\partial_{s'+1}^m \theta_s')$ $(m = 0, 1, \ldots)$ — суть строки из $\Delta_s(\Gamma_s)$ одинаковой длины, то существуют операторы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_p \in \Delta_{s'}(\Gamma_{s'})$ такие, что $\sum_{j=0}^{p} \bar{\alpha}_j \omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s'+1}^j \theta_{s'}') + \omega_{s'+1} \ldots \omega_n (\partial_{s'+1}^{p+1} \theta_{s'}') = 0$ (теорема 5); если $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ — прообразы в Γ элементов $\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_p$ (п. 3) (при отображении $\omega_{s'+1} \ldots \omega_n$), то $\omega_{s'+1} \ldots \omega_n (\alpha^{(1)} \theta_{s'}') = 0$, $\alpha^{(1)} = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j \partial_{s'+1}^j + \partial_{s'+1}^j \in \Delta_{s'+1}(\Gamma)$.

Таким же образом определяется $\alpha^{(2)} \in \Delta_{s'}(\Gamma)$, $\alpha^{(2)} \neq 0$, такой, что $\omega_{s'} \ldots \omega_n (\alpha^{(2)} \alpha^{(1)} \theta_{s'-1}') = 0$; при этом также и $\omega_{s'} \ldots \omega_n (\alpha^{(2)} \alpha^{(1)} \theta_{s'}) = \omega_{s'} (\alpha^{(2)} \omega_{s'+1} \ldots \omega_n (\alpha^{(1)} \theta_{s'}')) = 0$ (п. 4). В результате определяется ненулевой оператор $\alpha \in \Delta_{s'+1}(\Gamma)$ такой, что $\omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \theta_j') = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, s')$ и, следовательно, $\omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \mathfrak{M}') = 0$. С другой стороны, так как $\theta_n \neq 0$, то $\omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \theta_n) \neq 0$, $\omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \mathfrak{M}) \neq 0$, что противоречит очевидному соотношению $\omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \mathfrak{M}) \subset \omega_1 \ldots \omega_n (\alpha \mathfrak{M}')$. Пусть теперь $n > s > s'$. В этом случае существуют такие целые неотрицательные $i_{s+1} \ldots i_n$, что $\omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \theta_s)$ — s-мерный ненулевой оператор. Применяя предыдущий результат к s-мерному многообразию $\omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \mathfrak{M})$ и не более чем s'-мерному $\omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \mathfrak{M}') \supset \omega_{s+1} \ldots \omega_n (\partial_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \mathfrak{M})$ (оба многообразия в Γ_s'), снова получим противоречие. Итак, $s \leqslant s'$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие с представлением $\sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i$; $\mathfrak{M}_t$ — многообразие с представлением $\sum_{i=t}^{n} \theta_i f_i$ $(t = 0, 1, \ldots, n)$, называемое сопутствующим (относительно выбранной системы $\partial_1 \ldots \partial_n$) многообразию $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_t \supset \cdots \supset \mathfrak{M}_n$, s-мерность многообразия $\mathfrak{M}$ при $s < n$ эквивалентна условию: $\mathfrak{M}_s \neq 0$, $\mathfrak{M}_t = 0$ $(t = s + 1, \ldots, n)$.

Лемма 32. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — размерные многообразия размерностей s, s'. Если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$, то $\mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{M}_t'$ $(t = 0, 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Пусть A — строка из $\Delta(\Gamma)$ такая, что $\omega_t \ldots \omega_n (A \theta_j') = 0$ $(j = t, \ldots, n,\ t > 0)$. Тогда $\omega_t \ldots \omega_n (A \mathfrak{M}')$ не более чем $t-1$-мерное многообразие; по лемме 31 это справедливо и для $\omega_t \ldots \omega_n (A \mathfrak{M})$ и, следовательно, $\omega_t \ldots \omega_n (A \theta_j) = 0$ при $j = t, \ldots, n$.

По лемме 29 система $\sum_{i=t}^{n} \theta_i' u_i = \sum_{i=t}^{n} \theta_i f_i$ разрешима при любых f_i из Γ_i', значит, $\mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{M}_t'$ при $t > 0$. Так как $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}_0'$, то лемма доказана.

Размерное многообразие может иметь различные представления вида $\sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i$. Применяя леммы 31, 32 к двум различным представлениям многообразия, непосредственно заключаем, что размерность и сопутствующие многообразия определяются многообразием $\mathfrak{M}$, независимо от его представления.

Пусть χ_i — минимальная высота столбца f_i в множестве всех представлений вида $\sum_i \theta_i f_i$ многообразия $\mathfrak{M}$ (при $\theta_i = 0$ полагают $\chi_i = 0$). Число χ^i назовем i-характером многообразия $\mathfrak{M}: \chi_i = \chi_i(\mathfrak{M})$ (относительно системы $\partial_1 \ldots \partial_n$). Последовательность $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$ будет называться характеристикой $\mathfrak{M}$ (относительно $\partial_1, \ldots, \partial_n$), s-мерность многообразия равносильна условию $\chi_s \neq 0$, χ_t при $t = s + 1, \ldots, n$ (при $s < n$). В множестве последовательностей $\chi_0, \ldots, \chi_n$ вводится полное упорядочение: $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$ предшествует $(\chi_0', \ldots, \chi_n')$ означает, что первая из ненулевых разностей $\chi_n' - \chi_n$, $\chi_{n-1}' - \chi_{n-1} \ldots$ — положительна.

Лемма 33. *Каждое многообразие $\mathfrak{M}$ с характеристикой $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$ обладает минимальным представлением $\sum_i \theta_i f_i$, где высота столбца f_i равна χ_i.*

Доказательство. Пусть s — размерность $\mathfrak{M}$. Доказательство проводится индукцией. Прежде всего, существует представление вида $\theta_s f_s + \sum_{i=0}^{s-1} \theta_i' f_i$ (при $s = 0$ сумма отсутствует), в котором высота f_s равна χ_s. Пусть, вообще, построено представление $\sum_{i=t+1}^{s} \theta_i f_i + \sum_{i=0} \theta_i' f_i$, где высота f_i равна χ_i $(i = t + 1, \ldots, s)$; пусть $\sum_{i=0}^{s} \theta_i'' f_i''$ — представление, в котором высота f_t'' равна χ_t. Так как $\sum_{i=t+1}^{s} \theta_i f_i$ и $\sum_{i=0}^{t} \theta_i'' f_i''$ представляют одно и то же многообразие $\mathfrak{M}_t$, то $\sum_{i=t+1}^{s} \theta_i f_i + \sum_{i=0}^{t} \theta_i'' f_i''$ есть также представление $\mathfrak{M}$; в этом представлении высота f_i равна χ_i при $i = t, \ldots, s$. Это завершает индукцию и доказывает лемму 33.

Следующая лемма дополняет лемму 33.

Лемма 34. *Характеристика многообразия предшествует характеристике собственного надмногообразия.*

Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ — многообразия с представлениями $\theta_t f_t + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$, $\theta_t' f_t' + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$, то существует такая матрица D из $\Delta_t(\Gamma_t)$, что $\theta_t' D f_t + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$ также является представлением $\mathfrak{M}$; многообразие компоненты $\theta_t' D f_t$ есть подмногообразие многообразия с представлением $\theta_t' f_t$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ — многообразия с минимальными представлениями $\sum_i \theta_i f_i$, $\sum_i \theta_i' f_i$ размерностей s, s', с характеристиками $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$, $(\chi_0', \ldots, \chi_n')$ соответственно.

Очевидно, $\mathfrak{M}_t$ имеет характеристику $(0, \ldots, 0, \chi_t, \ldots, \chi_n)$. Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_n'$. Очевидно, для всякой строки A из $\Delta(\Gamma)$, для которой $A\theta_n' = 0$, также и $A\theta_n = 0$. Следовательно, ранг матрицы $(\theta_n \theta_n')$ сов-

падает с рангом матрицы θ_n'; тогда каждый столбец матрицы θ_n и столбцы матрицы θ_n' зависимы справа. Это приводит к существованию квадратной неособенной диагональной матрицы C и матрицы D из $\Delta(\Gamma)$ таких, что $\theta_n C = \theta_n' D$. Из-за минимальности (по ширине) матриц θ_n, θ_n' и, следовательно, $\theta_n C$, $\theta_n' C$ не является левым делителем нуля, и так как $D = D^{\chi_n}$, то $\chi_n \leqslant \chi_n'$. При $\chi_n = \chi_n'$ матрица D неособенная и поскольку $\theta_n f$, $\theta_n Cf$, $\theta_n' Df$, $\theta_n' f$ описывают одно и то же многообразие, то $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n'$, что противоречит предположению; итак, $\chi_n < \chi_n'$ и лемма доказана для случая $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_n'$.

Пусть вообще $\mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{M}_t' (t < n)$ и $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i'$ при $i = t+1, \ldots, n$. Тогда, очевидно, $\chi_i = \chi_i'$ при $i = t+1, \ldots, n$, остается доказать, что $\chi_i < \chi_i'$. Рассматривается множество всех строк A из $\Delta(\Gamma)$ таких, что $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta) = 0$, $i = t+1, \ldots, n$.

Пусть Ω_m — подмножество строк из Ω степени меньшей m относительно $\partial_{t+1}, \ldots, \partial_m \Omega$, Ω_m — модули с областью коэффициентов $\Delta_t(\Gamma)$, при этом Ω_m имеет конечный базис (теорема 5); B_m будет обозначать базисную матрицу Ω_m. Очевидно, $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}) \subset \omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}')$ и, следовательно, $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t) \subset \omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t')$ (лемма 32). Пусть $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t')$ для бесконечной последовательности m; тогда по лемме 29 $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_t'$. Итак, $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t) \subset \omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \mathfrak{M}_t')$ почти для всех m, которые будут рассматриваться далее. Для каждого такого m по разобранному случаю существуют такие матрицы C_m, D_m (причем C_m — неособенная) из $\Delta_t(\Gamma_t)$, что $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \theta_t C_m) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n (B_m \theta_t' D_m)$.

Тогда для всякого $A \in \Omega_m$ $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t C_m) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' D_m)$. Пусть C_{mm_1} — неособенные матрицы из $\Delta_t(\Gamma_t)$ такие, что $C_m C_{mm_1} = C_{m_1} C_{m_1 m_1}$ и $D_{mm_1} = D_m C_{mm_1} - D_{m_1} C_{m_1 m}$. Тогда при $m_1 \leqslant m$ $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' D_{mm_1}) = 0$ для всех $A \in \Omega_{m_1}$.

Прежде всего будет показано, что D_{mm_1} при достаточно больших m и m_1 равно нулю. В противном случае будет существовать бесконечная последовательность ненулевых столбцов ε_{m_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ из $\Delta_t(\Gamma_t)$ таких, что $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' \varepsilon_{m_i}) = 0$ для всех $A \in \Omega_m$. Можно предполагать, что элементы некоторого фиксированного положения (для определенности — нижние) в этих столбцах отличны от нуля: если $\varepsilon_m = \begin{pmatrix} e_{m_1} \\ \cdots \\ e_{m_{\chi_t'}} \end{pmatrix}$, то $e_{m_{\chi_t'}} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $f_t = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdots \\ g_{\chi_t} \end{pmatrix}$, $\theta_t^{(1)} \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdots \\ g_{\chi_t - 1} \end{pmatrix} = \theta_t' \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdots \\ g_{\chi_t - 1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\theta_t^{(2)} g_{\chi_t} = \theta_t' \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ g_{\chi_t} \end{pmatrix}$,

очевидно, $\theta_t^{(1)}$, $\theta_t^{(2)}$ — t-мерные операторы в $\theta_t' f$ описывают то же многообразие, что и $\theta_t^{(1)} f^{(1)} + \theta_t^{(2)} f^{(2)}$. Если $f^{(2)}$ — произвольный элемент Γ_t' и $h_i \in \Gamma_t'$ определен так, что $e_{m_i \chi_t} h_i = f^{(2)}$ (это возможно благодаря замкнутости Γ_t'), то $\theta_t^{(2)} f^{(2)} = \theta_t^{(2)} e_{m_i \chi_t} h_i = \theta_t' \varepsilon_{m_i} h_i - \theta_t^{(1)} \begin{pmatrix} e_{m_i - 1} \\ \cdots \\ e_{m_i \chi_t - 1} \end{pmatrix} h_i$. Полагая $\varphi_i = \theta_t' \varepsilon_{m_i} h_i$ и $\psi_i = \begin{pmatrix} e_{m_i - 1} \\ \cdots \\ e_{m_i \chi_t - 1} \end{pmatrix} h_i$, получаем

$$\theta_t^{(2)} f^{(2)} = \varphi_i - \theta_t^{(1)} \psi_i.$$

Рассуждениями, примененными при доказательстве леммы 29, легко показать, что из $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' \varepsilon_{m_i}) = 0$ для всех $A \in \Omega_m$ следует существование такого элемента $\varphi_i^* = \sum_{i=t+1}^{n} \theta_j' v_j$, что $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (\partial_{t+1}^{i_{t+1}} \ldots \partial_n^{i_n} (\varphi_i - \varphi_i^*)) = 0$ при $i_{t+1} + \cdots i_n < m_i$. Отсюда следует $\varphi_i - \varphi_i^* \to 0$. Тогда $\theta_t^{(2)} f^{(2)} = (\varphi_i - \varphi_i^*) + (\varphi_i^* - \theta_t^{(1)} \psi_i)$. Так как $\varphi_t^{(*)} - \theta_t^{(1)} \psi_i$ принадлежит замкнутому многообразию $\theta_t^{(1)} f_t^{(1)} + \sum_{j=t+1}^{n} \theta_j' f_j$, то $\theta_t^{(2)} f^{(2)}$ также принадлежит этому многообразию, которое тем самым совпадает с $\mathfrak{M}_t'$; но так как высота $f_t^{(1)}$ равна $\chi_t' - 1$, это приводит к противоречию со свойством минимальности χ_t'. Итак, при достаточно больших m, m_1 $D_{mm_1} = 0$ и, следовательно,

$$D_m C_{mm_1} = D_{m_1} C_{m_1 m}.$$

Пусть теперь $m > m_1$; для всякого $A \in \Omega_m$ $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t C_m) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' D_m)$ и, следовательно, $[\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t C_{m_1}) - \omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t' D_{m_1})] \times C_{mm_1} = 0$. Так как C_{mm_1} — неособенная матрица, то $\omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t C_{m_1}) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n (A\theta_t D_{m_1})$ при всех $A \in \Omega_m$ и, следовательно, при всех $A \in \Omega$. Так как C_{m_1} — неособенная матрица, то $\theta_t f_t$ и $\theta_t C_{m_1} f_t$ описывают одно и то же многообразие. Таким образом, $\mathfrak{M}_t$ имеет представление $\theta_t C_{m_1} f_t + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$ или $\theta_t' D_{m_1} f_t + (\theta_t C_{m_1} - \theta_t' D_{m_1}) f_t + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$. Так как $\omega_{t+1} \ldots \omega_n [A(\theta_t C_{m_1} - \theta_t' D_{m_1})] = 0$ для всех $A \in \Omega$, то по лемме 29 $(\theta_t C_{m_1} - \theta_t' D_{m_1}) f_t \in \mathfrak{M}_{t+1}$. Окончательно, $\mathfrak{M}_t$ имеет представление $\theta_t' D_{m_1} f_t + \sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i$.

Отсюда $\chi_t \leqslant \chi_t'$, причем $\chi_t = \chi_t'$ влечет $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_t'$.

Итак, $\chi_t < \chi_t'$, что и требовалось доказать.

Полученные результаты объединены в следующей теореме.

Теорема 35. *Размерное многообразие однозначно определяет (в данной системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$) сопутствующие многообразия.*

Размерное многообразие с характеристикой $(\chi_0, \ldots, \chi_n)$ имеет минимальное представление, содержащее χ_i произвольных элементов множества Γ_i' $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Характеристика многообразия предшествует характеристике собственного надмногообразия.

Полученные результаты относятся, однако, к весьма частному типу групп Γ'. Они не переносятся непосредственно, например, на важный случай аналитических многообразий (см. пример 9). Слишком ограничительным является именно требование 6 определения ω.

Пусть для Γ, Γ' удовлетворены только требования 1—5.

В этом случае Γ' (и соответственно Γ_i') расширяется до группы $\overline{\Gamma}'$ присоединением множеств индексированных элементов $\Gamma_0 : \{a_{i_1 \ldots i_n}\}$ с естественным определением групповых операций, что возможно по определению ω [73] (п. 5).

---

[73] Если, кроме того, выполнено ослабленное условие 6 в форме: 6′) для всякого конечного множества элементов $f_0, \ldots, f_k \in \Gamma_{i-1}$ $(i \geqslant 1)$ можно определить элемент $f \in \Gamma_i$ такой, что $\omega_i (\partial_i^j f) = f_j$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, то во введенной в $\overline{\Gamma}'$ топологии Γ' плотно в $\overline{\Gamma}'$,

Тогда требования 1—6 выполнены и полученные результаты верны для Γ, $\overline{\Gamma}'$.

Для переноса их на Γ, Γ' достаточно ограничиться только теми размерными операторами θ_s, которые отображают столбец из Γ'_s в столбец из Γ'.

Как легко видеть (благодаря замкнутости Γ'_s), если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — размерные многообразия в Γ', а $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{M}}'$ — многообразия с теми же представлениями в $\overline{\Gamma}'$, то из $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$ следует $\overline{\mathfrak{M}} \subset \overline{\mathfrak{M}}'$. Характеристики $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ совпадают так же, как и размерности: $(\overline{\mathfrak{M}_i}) = (\overline{\mathfrak{M}})_i$. Это позволяет перенести полученные результаты на такие размерные операторы в Γ'.

Пример 19. Γ — поле отношений функций, аналитических в точке; Γ' — группа функций, аналитических в точке общего положения (см. пример 9); отображения определены так же, как в примере 18. Γ' — группа формальных степенных рядов (в точке общего положения); дальнейшие рассуждения проводятся, как в примере 18.

Пример 20. Аналогичный подход возможен и к Γ, Γ' (см. пример 8).

13. Группа Коши

Установим связь между результатами §§ 9—11 и § 12, по крайней мере для частного вида групп Γ', которые здесь названы группами Коши (по их связи с задачей Коши).

Пусть для поля Γ и соответствующей группы Γ' для каждой системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ возможно установить последовательности отображений ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ полей Γ_i и групп Γ'_i $(i = 0, 1, \ldots, n;\ \Gamma_n = \Gamma,\ \Gamma'_n = \Gamma',\ \Gamma_0 = \Gamma'_0)$, удовлетворяющие условиям:

1) Γ_i, Γ'_i допускают дифференцирования $\partial_0, \ldots, \partial_i$;

2) ω_i — изоморфное отображение Γ_i на Γ_{i-1} и гомоморфное — Γ'_i на Γ'_{i-1};

3) при линейном преобразовании $\partial_1, \ldots, \partial_n$, не меняющем $\partial_{s+1}, \ldots, \partial_n$, ω_i $(i = s+1, \ldots, n)$ и Γ_i $(i = s, \ldots, n)$ не изменяются;

4) если $a \in \Gamma_i$, $a' \in \Gamma'_i$, то $\omega_i(aa') = \omega_i(a)\,\omega_i(a')$, $\omega_i(\partial_j a) = \partial_j \omega_i(a)$, $\omega_i(\partial_j a') = \partial_j \omega_i(a')$ $(j = 0, \ldots, i-1)$;

5) если $\omega_i(\partial_i^m a') = 0$ $(a' \in \Gamma'_i)$ при всех $m = 0, 1, \ldots$, то $a' = 0$;

6) для всякого уравнения $\partial_i^{\varkappa} u + \sum\limits_{j=0}^{\varkappa-1} \alpha_j \partial_i^j u = f$ $(i \geqslant 1)$ (где α_j — операторы из $\Delta_i(\Gamma_i)$, не зависящие от ∂_i, степеней не выше $\varkappa - j$ соответственно; $f \in \Gamma'_i$) и для произвольных элементов $f_0, \ldots, f_{\varkappa-1}$ из Γ'_{i-1} существует в Γ'_i решение v этого уравнения, удовлетворяющее условиям: $\omega_i(\partial_i^j v) = f_j$ $(j = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1)$.

Из п. 4 следует, что это решение единственно.

Такая группа Γ' будет называться группой Коши (относительно Γ); очевидно все группы Γ'_i являются также группами Коши (п. 3).

Легко видеть, что группа Γ', удовлетворяющая условиям, перечисленным в начале предыдущего параграфа, относительно каждой системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$ является группой Коши.

Лемма 35. *Всякая система уравнений вида* $\partial_j^{\varkappa_j} u_j + \sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_{jl} u_l = f_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, *где* α_{jl} — *операторы из* $\Delta_i(\Gamma_i)$ *степеней, не выше* $\varkappa_l$, *и степеней, меньших* $\varkappa_l$ *относительно* ∂_i, $f_i \in \Gamma'_i$, *имеет и притом единственное решение в* Γ'_i: $u_j = v_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, *удовлетворяющее произвольно заданным*

начальным условиям: $\omega_i(\partial_i^j v_l) = f_{jl}$ $(j = 0, \ldots, \varkappa_l - 1,\ l = 1, \ldots, k,\ f_{jl} \in \Gamma'_{i-1})$ *(разрешимость задачи Коши).*

Доказательство. По заданным начальным данным f_{jl} можно определить $\omega_i(\partial_i^j v_l)$ при всех целых неотрицательных значениях j для искомого решения; для этих формально определенных величин будет сохранено обозначение f_{jl}.

Из уравнений данной системы можно получить дифференцированиями и исключениями последовательность уравнений вида $\partial_j^m u_j + \sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_{mjl} u_l = f_{mj}$ $(m = \varkappa_j, \varkappa_j + 1, \ldots)$, где степень α_{mjl} не больше m и относительно ∂_i — меньше $\varkappa_l$.

Пользуясь теоремой 5, легко заключить о существовании таких операторов β_{jl} из $\Delta_i(\Gamma_i)$, не зависящих от ∂_i, и такого натурального числа λ_j, что

$$\partial_i^{\lambda_j} u_j + \sum_{l=0}^{\lambda_j - 1} \beta_{jl} \partial_i^l u_j = g_j \quad (j = 1, \ldots, k)$$

(как следствие предыдущих уравнений).

По начальным данным f_{jl} из этих уравнений определяются однозначно значения $u_j = v_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Легко видеть, что они образуют решение исходной системы и притом единственное при определенных начальных данных.

Лемма 36. *Если* Γ' — *группа Коши, то* Γ' *замкнуто (относительно* Γ*). В этом случае определение решения всякой линейной (вообще неоднородной) системы уравнений сводится к последовательному решению задач Коши* [74].

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 0$ линейная система уравнений оказывается алгебраической; поэтому оба утверждения, очевидно, справедливы.

Теперь можно предполагать оба утверждения леммы справедливыми для случая $n - 1$ операторов дифференцирования.

Пусть дана некоторая система уравнений из $\Delta_n(\Gamma)$: $A_1 u = f_1, \ldots, A_l u = f_l$ $(A_1, \ldots, A_l)$ — строки из $\Delta_n(\Gamma)$; u — столбец неизвестных; $f_1, \ldots, f_l \in \Gamma'$; строки $A_1, \ldots, A_l$ можно положить не равными нулю в совокупности.

Далее рассматривается система всех уравнений вида

$$(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_l A_l)\, u = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_l f_l \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta_n(\Gamma)). \tag{16}$$

В модуле M, порожденном строками $A_1, \ldots, A_l$, выделяются строки $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$ (см. § 11) и с их помощью определяется произвольный модуль M' [75]. Пусть $A^{(1)} u = f^{(1)}, \ldots, A^{(r)} u = f^{(r)}$ — соответствующие уравнения из (16): можно положить $A^{(i)} = (0, \ldots, \alpha_1^{(i)}, \ldots, 0, \alpha_i^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-r}^{(i)})$ $(i = \overline{1, r})$ — оператор $\partial^{(i)} = \partial_n^{\varkappa_i} = \sum\limits_{j=0}^{\varkappa_i - 1} \beta_j^{(i)} \partial_n^j$ занимает i-е место; $\beta_j^{(i)}$ не зависит от ∂_n и имеет степень $\varkappa_i - j$; k — длина строк M.

Каждая строка $A \in M'$ имеет вид $A = \left(\ldots, \sum\limits_{j=0}^{\varkappa_i - 1} \alpha_{ij} \partial_n^j, \ldots\right)$ (выписанный элемент занимает i-е место; α_{ij} не зависят от ∂_n). Пусть соответствующее уравнение из (16) есть $Au = f$. Каждому такому уравнению сопоставляется

[74] Это утверждение хорошо известно для систем аналитических дифференциальных уравнений (и нелинейных) (см. Жанэ [2, с. 22—24].

[75] При этом может потребоваться предварительное преобразование системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

уравнение $A'u' = f'$, получаемое при замене коэффициентов операторов α_{ij} их образами в отображении ω_n и при рассмотрении всех $\partial_n^j u_i$ ($j = 0, \ldots, \varkappa_i - 1$, $i = \overline{1, k}$) как неизвестных; $f' = \omega_n(f) \in \Gamma'_{n-1}$. Система всех таких уравнений будет обозначаться (17). Очевидно, если система (16) не содержит уравнения вида $0 = f\ (\neq 0)$, то это справедливо и относительно (17). Так как Γ'_{n-1} — группа Коши относительно Γ_{n-1}, то по предположению индукции система (17) в этом случае разрешима в Γ'_{n-1} и притом разрешима путем последовательного решения задач Коши.

Если одно из решений системы (17) состоит из элементов $v_i^j \in \Gamma'_{n-1}$ ($j = 0, \ldots, \varkappa_j - 1$, $i = 1, \ldots, k$), то при $r < k$ элементы $v_i \in \Gamma'_n$ ($i = r + 1, \ldots, k$) определяются по условиям $\omega_n(\partial_n^j v_i) = v_i^j$ ($j = 0, \ldots, \varkappa_i - 1$, $i = r + 1, \ldots, k$), что всегда возможно в группе Коши (посредством решения задач Коши). Затем определяется решение $v_1, \ldots, v_r$ системы, получаемой из системы $A^{(i)}u = f^{(i)}$ ($i = \overline{1, r}$) при замене $u_{r+1} = v_{r+1}, \ldots, u_k = v_k$, при начальных условиях $\omega_n(\partial_n^j v_i) = v_i^j$ ($j = 0, \ldots, \varkappa_i - 1$, $i = \overline{1, r}$). Следует отметить, что в заданной системе (16) можно заранее положить $u_{r+1} = 0, \ldots, u_n = 0$ и рассмотреть полученную систему аналогичным образом. Докажем, что полученные элементы $v_1, \ldots, v_k$ образуют решение системы (16); для этого достаточно проверить справедливость только равенств из (16) вида $Av = f\ (A \in M')$. Для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$ определяют строку $A_m^* \in M'$, соответствующую $\partial_n^m A$ по модулю выделенных строк $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$; пусть $A_m^* u = f_m^*$ — соответствующее уравнение из (16). Так как $A^{(i)}v = f^{(i)}$, то $\partial_n^m(Av - f) = A_m^* v - f_m^*$ и $\omega_n[\partial_n^m(Av - f)^*] = 0$, откуда, наконец, следует $Av - f = 0$. Если, в частности, система (16) однородна и система (17) имеет нетривиальное решение, то (16) будет иметь нетривиальное решение. По предположению индукции, однородная система (17) имеет единственно тривиальное решение только в том случае, когда соответствующий этой системе модуль единичный. Но это означало бы, что модуль M' и, следовательно, модуль M — единичные. Лемма доказана.

Эта лемма показывает, что группа Коши удовлетворяет всем условиям, указанным в конце предыдущего параграфа, и тем самым на нее переносится теория размерных многообразий [76].

Теорема 36. *Всякое интегральное многообразие в группе Коши в достаточно общей системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$ является размерным многообразием.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по n аналогично доказательству леммы 36. При $n = 0$ справедливость теоремы очевидна. Пусть теорема верна для случая $n - 1$ дифференцирований; для доказательства ее в случае n дифференцирований, очевидно, достаточно доказать, что решение уравнения $\partial_n^\varkappa u + \sum_{i=0}^{\varkappa-1} \alpha_i \partial_n^i u = 0$ (α_i — операторы из $\Delta(\sigma)$, не зависящие от степеней $\varkappa - i$ соответственно), удовлетворяющее начальным условиям $\omega_n\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ \partial_n^{\varkappa-1} u \end{pmatrix} = \theta'_s f_s$ (θ'_s — s-мерный оператор в Γ'_{n-1}; f_s — произвольный столбец из Γ_s; $s \leqslant n - 1$), также представляется s-мерным оператором (от f_s): $\theta_s f_s$ (ср. леммы 35, 36).

Пусть $v = \varphi f_s$ — решение указанной задачи Коши. Нужно доказать теперь, что $\omega_n(\partial_n^m \varphi f_s)$ есть s-мерный оператор в Γ'_{n-1} (от f_s). Это верно для оператора $f_s \to \omega_n\begin{pmatrix} \varphi f_s \\ \vdots \\ \partial_n^{\varkappa-1} \varphi f_s \end{pmatrix}$ и, следовательно, для операторов $f_s \to \omega_n(\varphi f_s), \ldots, \omega_n(\partial_n^{\varkappa-1} \varphi f_s)$. Пользуясь выражением $\partial_n^m \varphi f_s$ ($m > \varkappa$) с помощью данного уравнения через φf_s, $\partial_n^{\varkappa-1} \varphi f_s$, заключаем, что при всяком $m > \varkappa$ $f_s \to \omega_n(\partial_n^m \varphi f_s)$ есть также s-мерный оператор (в Γ'_{n-1}). Отсюда легко получается завершение индукции и доказательство теоремы.

Теорема эта справедлива во всякой нормальной системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$ (см. § 11).

Теорема 37. *Пусть интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ (в группе Коши) модуля M является размерным (в некоторой системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$). Тогда размерность модуля M (для той же системы $\partial_1, \ldots, \partial_n$) равна размерности его интегрального многообразия.*

Доказательство. Пусть размерность s модуля M равна n. Это означает, что ранг модуля M меньше длины его строк; тогда существует такой столбец B из $\Delta(\Gamma)$, что $MB = 0$. Если f пробегает Γ', то n-мерное многообразие Bf содержится в интегральном многообразии $\mathfrak{M}$, которое поэтому также n-мерно.

Пусть $s < n$. Тогда существуют строки вида $(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0) \in M$, где α_i — ненулевой оператор, занимающий i-е место и зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_{s+1}$, $i = \overline{1, k}$ (k — длина строк модуля M). Пусть $\mathfrak{M}$ содержит t-мерное многообразие с представлением $\theta_t f_t$, $t > s$. Если, например, первая строка $\theta_t f_t$, $-\theta_t^{(1)} f_t$, отлична от нуля, то существует такая система неотрицательных целых чисел $l_{t+1}, \ldots, l_n$, что $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_n(\partial_{t+1}^{l_{t+1}}, \ldots, \partial_n^{l_n} \theta_t^{(1)}) \neq 0$, но $\omega_{t+1}, \ldots, \omega_n(\partial_{t+1}^{i_{t+1}} \ldots, \partial_n^{i_n} \theta_t^{(1)}) = 0$ при $i_{t+1} + \cdots + i_n < l_{t+1} + \cdots + l_n$ (при $t = n$ отображение $\omega_{t+1}, \ldots, \omega_n$ и дифференцирование отсутствуют).

Тогда $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(\partial_{t+1}^{l_{t+1}} \ldots \partial_n^{l_n} \alpha_1 \theta_t^{(1)}) = \omega_{t+1} \ldots \omega_n(\alpha_1) \times \omega_{t+1} \ldots \omega_n \times (\partial_{t+1}^{i_{t+1}} \ldots \partial_n^{i_n} \theta_n^{(1)}) \neq 0$, что противоречит предположению, что $(\alpha_1, 0, \ldots, 0) \in M$ и $\theta_t f_t$ описывает часть $\mathfrak{M}$. Итак, $s \geqslant t$ и $\mathfrak{M}$ не более чем s-мерно.

Если размерность $\mathfrak{M}$ равна $t = n$, то $t = s = n$. Пусть теперь представление $\mathfrak{M}$ имеет вид $\sum_{j=0}^{t} \theta_j f_j$ и $t < n$. Приемом, примененным при доказательстве леммы 31, строится для каждого $i = 1, \ldots, k$ строка $(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)$ (α_i — ненулевой оператор из $\Delta_{t+1}(\Gamma)$, занимающий i-е место) такая, что $\omega_1 \ldots \omega_n[(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0)\theta_j] = 0$ ($j = \overline{0, t}$) и $\omega_1 \ldots \omega_n[(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0) \times \mathfrak{M}] = 0$. Отсюда $(0, \ldots, \alpha_i, \ldots, 0) \in M$ и размерность M не больше t. Таким образом $s = t$.

Теорема 38. *Пусть в некоторой системе $\partial_1, \ldots, \partial_n$ интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ модуля M размерно. Пусть M_t — сопутствующие модули $\mathfrak{M}_t$ — сопутствующие многообразия относительно этой системы ($t = 0, 1, \ldots, n$). Тогда $\mathfrak{M}_t$ есть интегральное многообразие модуля M_t.*

Доказательство. При $t = 0$ $M_0 = M$, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ и утверждение теоремы очевидно справедливо. Пусть $B \in M_t$ ($t > 0$). Тогда $M : B$ — не более чем $(t - 1)$-мерный идеал с многообразием $B(\mathfrak{M})$ (см. лемму 13), имеющим размерное представление $B\sum \theta_i f_i$ ($\sum_i \theta_i f_i$ — представление $\mathfrak{M}$). Тогда по теореме 37 это многообразие также не более чем $(t - 1)$-мерно и, следовательно, $B\sum_{i=t}^{n} \theta_i f_i = 0$, или $B(\mathfrak{M}_t) = 0$. Обратно, пусть $B(\mathfrak{M}_t) = 0$. Тогда $M : B$ имеет не более чем $(t - 1)$-мерное интегральное многообразие $B(\mathfrak{M})$.

[76] В группе Коши выполнено также условие 6′) (см. сноску [73])

Следовательно, идеал $M : B$ содержит оператор $\alpha \neq 0$, зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_t$; значит, $\alpha B \in M$ и $B \in M_t$.

Теорема 39. *Пусть $\partial_1, \ldots, \partial_n$ — вполне каноническая система относительно модуля M с размерным интегральным многообразием. Тогда характеристика модуля совпадает с характеристикой его интегрального многообразия.*

Доказательство. Пусть A_{t+1} — какая-либо базисная матрица модуля M_{t+1}. Прежде всего будет доказано, что $\chi_t(MA_{t+1}) = \chi_t(M)$. По лемме 19 $(M : A_{t+1})_{t+1} = M_{t+1} : A_{t+1} = (1)$, $(M : A_{t+1})_t = M_t : A_{t+1}$. Каждая строка $B \in M_{t+1}$ имеет представление $B = CA_{t+1}$; таким образом, отображение $C \to B$ есть операторно-гомоморфное отображение φ единичного модуля на модуль M_{t+1}.

Если $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_l c_l \in M_t : A_{t+1}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta_t(\Gamma))$, то $\alpha_1 \varphi(c_1) + \cdots + \alpha_l \varphi(c_l) \in M_t$; обратно, если $\alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_l B_l \in M_t$, то $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_l c_l \in M_t : A_{t+1}$, где $B_i = \varphi(c_i)$ $(i = \overline{1, l})$. Отсюда непосредственно $\chi_t(M : A_{t+1}) = \chi_t(M)$.

Теперь докажем, что $\chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M}) = \chi_t(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ имеет минимальное представление $\sum_{i=0}^{n} \theta_i f_i$; тогда $A_{t+1}\mathfrak{M}$ имеет представление $\sum_{i=0}^{n} A_{t+1}\theta_i f_i$. Отсюда $\chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M}) \leqslant \chi_t(\mathfrak{M})$.

Пусть $\chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M}) < \chi_t(\mathfrak{M})$. Тогда, если минимальное представление $A_{t+1}\mathfrak{M}$ есть $\sum_{i=0}^{n} \theta_i' f_i$, то, используя лемму 34, заключаем, что существует неособенная матрица C и матрица D такие, что $(A_{t+1}\theta_t C - \theta_t' D) f_t \in (A_{t+1}\mathfrak{M})_{t+1} = 0$, и, следовательно, можно положить $A_{t+1}\theta_t = \theta_t' D$. Так как матрица D имеет $\chi_t(\mathfrak{M})$ столбцов и $\chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M}) < \chi_t(\mathfrak{M})$ (по предположению) строк, то существует столбец B_i' из $\Delta_t(\Gamma_t)$ такой, что $A_{t+1}\theta_t B' = 0$. Если теперь дополнить B' до неособенной (квадратной) матрицы $B = (B'B'')$ (из $\Delta_t(\Gamma_t)$), то $\theta_t B f_t$ и $\theta_t f_t$ опишут одно и то же многообразие (см. лемму 13); если, далее, $f_t = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$, где f' — элемент из Γ_t' и f'' — столбец из Γ_t' высотой $\chi_t(\mathfrak{M}) - 1$, то $\theta_t B f_t = \theta_t B' f' + \theta_t B'' f''$ и $\theta_t B' f' \in \mathfrak{M}_{t+1}$. Таким образом, представлению $\mathfrak{M}$ можно придать форму $\sum_{i=t+1}^{n} \theta_i f_i + \theta_t B'' f'' + \sum_{i=0}^{t-1} \theta_i f_i$, что противоречит свойству минимальности $\chi_t(\mathfrak{M})$. Итак, $\chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M}) = \chi_t(\mathfrak{M})$.

Теперь остается показать, что $\chi_t(M : A_{t+1}) = \chi_t(A_{t+1}\mathfrak{M})$, или, упрощая обозначения, доказать, что для t-мерного $(t = 0, 1, \ldots, n)$ модуля M с размерным многообразием $\mathfrak{M}$ $\chi_t(M) = \chi_t(\mathfrak{M})$. При этом система $\partial_1, \ldots, \partial_n$ предполагается вполне регулярной относительно M. Пусть длина строк $M^{(n-t)}$ в расширенной записи равна k и ранг его — r; тогда, очевидно, $\chi_t(M) = k - r$. Если $B = kB^{k-r}$ — матрица из $\Delta_t(\Gamma_t')$ с линейно независимыми справа столбцами такая, что $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(M^{(n-t)})B = 0$, то Bf образует часть интегрального многообразия $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(M^{(n-t)})$.

С другой стороны, из минимального представления $\sum_{i=0}^{t} \theta_i f_i$ многообразия получается представление $\sum_{i=0}^{t} \theta_i' f_i$ интегрального многообразия $\mathfrak{M}^{(n-t)}$ (в Γ_t') модуля $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(M^{(n-t)})$ с той же высотой столбцов f_i; θ_t — матрица из

$\Delta_t(\Gamma_t)$. Из линейной независимости столбцов матрицы B, посредством которой представляется часть этого многообразия, следует $\chi_t(\mathfrak{M}) \geqslant k - r = \chi_t(M)$.

Кроме того, из $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(M^{(n-t)})\theta_t' = 0$ следует, что θ_t' имеет не более $k - r$ (и, следовательно, по предыдущему — точно $k - r$) линейно независимых справа столбцов. Поэтому в минимальном представлении $\mathfrak{M}^{(n-t)}$ член $\theta_t' f_t$ нужно заменить членом $\theta_t'' f_t''$, где θ_t'' — матрица из $\Delta_t(\Gamma_t)$, f_t'' — столбец из Γ_t' высотой $k - r$ (например, Bf). Последовательным решением задач Коши, как это было показано при доказательстве теоремы 36, из представления интегрального многообразия модуля $\omega_{t+1} \ldots \omega_n(M^{(n-t)})$ восстанавливается представление интегрального многообразия модуля M. Таким образом, $\chi_t(\mathfrak{M}) \leqslant k - r$ и, наконец, $\chi_t(M) = \chi_t(\mathfrak{M})$.

Можно отметить, что теоремы 37—39 верны и при более общих условиях — для частных систем уравнения. Именно достаточно предполагать следующее: 1) выполнение свойств 1—4, приведенных выше; 2) разрешимость возникающих для рассматриваемой системы задач Коши; 3) сохранение наименования размерного оператора при исследовании данной системы только за теми размерными операторами, которые возникают при решении задач Коши по схеме, приведенной в доказательстве теоремы 36, и теми, которые получаются из предыдущих конечным повторением следующих операций: $\theta_s' \to A\theta_s$ (A — матрица из $\Delta(\Gamma)$); $\theta_s \to \theta_s B$ (B — матрица из $\Delta_s(\Gamma_s)$; θ_s', $\theta_s'' \to \theta_s$, где θ_s определяется условием $\theta_s' f' + \theta_s f'' = \theta_s \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix}$; $\theta_s \to \theta_s^*$, где θ_s^* находится из условия $\theta_s^* f^* = \theta_s$ [colon $(0, \ldots, f'', \ldots, 0)$].

Указанное заключение легко получить из результатов § 11 и рассуждений, приведенных при доказательстве теорем 37—39.

Приведенные теоремы устанавливают связь алгебраических понятий, введенных в § 11, со структурой интегрального многообразия.

В частности, из теорем 34 и 39 непосредственно следует, что интегральное многообразие модуля $M \neq (1)$, ранг которого равен длине его строк и который обладает линейно независимым базисом, несмешанно и имеет размерность $n - 1$. Это дает утвердительный ответ на вопрос, предложенный Жанэ для «аналитического» случая (см. Жанэ [2]).

Из результатов § 10 следуют инвариантные свойства характеристик и сопутствующих многообразий для интегральных многообразий. Наконец, следует отметить, что характерные многообразия, определенные здесь, отличаются от характеров, введенных Картаном (вообще, для пфаффовых систем) и Жанэ [2] (для систем в инволюции); во всех этих случаях характеры указывают число произвольных функций равного количества аргументов, определяющих общее решение. Однако оба последних определения не указывают минимального количества таких функций [77].

Пример 21. Идеал примера 17 имеет характеристику (0, 0, 4, 0, 0, 0); его интегральное многообразие зависит от четырех произвольных функций двух аргументов. Характеристика Жанэ этого модуля есть (6, 5, 4, 0, 0, 0) [2] (впрочем, количество произвольных постоянных (6) у Жанэ не входит в характеристику).

Используя результаты примера 17, методами, указанными при доказательстве теоремы 36, получим следующее представление интегрального мно-

[77] Легко установить связь характеров модуля с «неограниченно разрешимыми» задачами (с начальными условиями). Именно, пусть M — модуль размерности s с характерами χ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда для разрешимости системы: $Mu = 0$, $\omega_{t+1}, \ldots, \omega_n(A_m u) = f_m$, $m = \overline{1, p}$ ($A_1, \ldots, A_p$ — строки из $\Delta(\Gamma_t)$, $f_1, \ldots, f_p \in \Gamma_t'$) при произвольных $f_1, \ldots, f_p$, необходимо, чтобы $t \leqslant s$; при $t = s$ χ_s равно максимальной величине p,

гообразия рассматриваемого идеала (в группе аналитических в точке 0 функций):

$$\left(\sum \frac{x_s^{2k}}{(2k)!}\partial_1^k\partial_2^k,\ \sum \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\partial_1^k\partial_2^k\right)\begin{pmatrix}\sum \frac{x_4^{2k}}{(2k)!}\partial_1^k\partial_2^k, & \sum \frac{x_4^{2k+1}}{(2k+1)!}\partial_1^k\partial_2^k, & 0, & 0\\ 0, & 0, & \sum \frac{x_4^{2k}}{(2k)!}\partial_1^k\partial_2^k, & \sum \frac{x_4^{2k+1}}{(2k+1)!}\partial_1^k\partial_2^k\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\sum\left(\frac{x_3^{4k}}{(4k)!}\partial_0+\frac{x_3^{4k+3}}{(4k+3)!}\partial_1\partial_2^3\right)\partial_1^k\partial_2^{3k}, & \sum\frac{x_3^{4k+1}}{(4k+1)!}\partial_1^k\partial_2^{3k}, & & \\ \sum\frac{x_3^{4k+2}}{(4k+2)!}\partial_1^k\partial_2^{3k+1}, & 0 & \left|\sum\left(\frac{x_3^{4k+1}}{(4k+1)!}+\frac{x_3^{4k+2}}{(4k+2)!}\partial_1^2\partial_2^3\right)\partial_1^{k+1}\partial_2^{3k+1}\right., & \\ \sum\frac{x_3^{4k+3}}{(4k+3)!}\partial_1^{k+1}\partial_2^{3k+2}, & 0, & 0 & \left|\partial_1\partial_2+\sum\left(\frac{x_3^{4k+1}}{(4k+1)!}\partial_0+\right.\right.\\ & & & \left.+\frac{x_3^{4k+4}\partial_1^2\partial_2^3}{(4k+4)!}\right)\partial_1^{k+1}\partial_2^{3k+1}, \\ & & & 0,\ \sum\frac{x_3^{4k+2}}{(4k+2)!}\partial_1^{k+1}\partial_2^{3k+2}, \\ & & & \sum\frac{x_3^{4k+3}}{(4k+3)!}\partial_1^k\partial_2^{3k}\\ \sum\left(\frac{x_3^{4k+1}}{(4k+1)!}+\frac{x_3^{4k+2}}{(4k+2)!}+\frac{x_3^{4k+3}}{(4k+3)!}\right)\partial_1^{k+2}\partial_2^{3k+3}, & \sum\frac{x_3^{4k}}{(4k)!}\partial_1^{k+1}\partial_2^{3k}, & 0, & 0\end{bmatrix}\times$$

$$\times\ \mathrm{colon}\,|f_1, f_2, f_3, f_4|.$$

Здесь суммирования производятся по индексу k от 0 до ∞; f_1, f_2, f_3, f_4 независимо пробегают группу аналитических в точке 0 функций аргументов x_1, x_2.

14. Кольцо операторных эндоморфизмов интегрального многообразия

Интегральные многообразия рассмотрим в замкнутой группе Γ'. Исследуем эндоморфизмы интегрального многообразия $\mathfrak{M}$ модуля M (рассматриваемого как аддитивная группа) вида: $f \to Af$, где A — квадратная матрица из $\Delta(\Gamma)$, пробегающая многообразие $\mathfrak{M}$.

Матрица A, определяющая такой эндоморфизм, характеризуется свойством $A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$. Благодаря замкнутости Γ' это равносильно условию $MA \subseteq M$. Действительно, если $MA \subseteq M$, то $MA\mathfrak{M} = (0)$ и, следовательно, $A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$.

Обратно: если $A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ и $C \in M$, то $CA\mathfrak{M} = 0$. Тогда по теореме 17 $CA \in M$ или $MA \subseteq M$; таким образом, $M \subseteq M : A$. В частности, если эндоморфизм с матрицей A отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}$, то $M : A = M$, и наоборот.

Очевидно, множество матриц такого вида образует кольцо ω так же, как и множество Ω эндоморфизмов рассматриваемого типа.

Соответствие между матрицами из ω и порождаемыми ими эндоморфизмами из Ω — гомоморфное отображение кольца ω на кольцо Ω. Ядром этого гомоморфизма является, как это следует из теоремы 17, множество ω_0 матриц из ω, все строки которых принадлежат модулю M (последние принадлежат M); ω_0, таким образом, является двухсторонним идеалом в ω.

В дальнейшем Ω будет отождествляться с фактор-кольцом ω/ω_0.

Легко видеть, что кольца эндоморфизмов, соответствующие эквивалентным модулям, изоморфны.

Лемма 37. *Эндоморфизмы модуля являются также эндоморфизмами всех его сопутствующих модулей.*

Доказательство. Если $C \in M_i$, то существует ненулевой оператор γ, зависящий только от $\partial_0, \ldots, \partial_i$, такой, что $\gamma C \in M$. Следовательно, если $MA \subseteq M$, то $\gamma CA \in M$ и $CA \in M_i$, или $M_i A \subseteq M_i$.

Таким образом, всякий эндоморфизм многообразия $\mathfrak{M}$ отображает каждое сопутствующее многообразие в себя.

Далее будут исследованы некоторые свойства кольца эндоморфизмов неприводимого модуля.

Теорема 40. *Всякий эндоморфизм неприводимого модуля или отображает его интегральное многообразие на себя, или нильпотентен.*

Доказательство. Пусть A — матрица, соответствующая эндоморфизму модуля M. Достаточно доказать, что если $M : A \supset M$, то существует натуральное число p, что $A^p \in M$, или, что то же, $M : A^p = (1)$.

По теореме 8 последовательность $M \subset M : A \subseteq M : A^2 \subseteq \ldots$ должна стабилизироваться: для некоторого $p \geqslant 1$ $M : A^p = M : A^{p+1} = \ldots$ Пусть строка $C \in M : A, \overline{\in} M$, тогда модуль $(M, C) \supset M$. Очевидно, $M \subseteq (M, C) \cap (M, A^p)$. Пусть $D \in (M, C) \cap (M, A^p)$ или $D = \varepsilon + \alpha C = F + gA^p$; α — оператор, g — строка из $\Delta(\Gamma)$. Следовательно, $gA^{p+1} \equiv \alpha CA \equiv 0 \pmod M$ и $g \in M : A^{p+1} = M : A^p$, $gA^p \in M$; $g \in M$. Итак, $M = (M, C) \cap (M, A^p)$; из неприводимости M и $(M, C) \supset M$ следует $(M, A^p) = M$; $A^p \in M$.

Существование нильпотентных эндоморфизмов неприводимого модуля видно из такого примера.

Пример 22. Пусть Γ — поле отношений аналитических в точке 0 функций одного аргумента x. Нетрудно проверить, что идеал $\Omega = (9x^2\partial^2 + 12x\partial - 2\partial_0)$ неприводим; он имеет нильпотентный автоморфизм $\alpha = \partial + \frac{2}{3x}\partial_0$, $\alpha^2 \in \Omega$.

Лемма 38. *Если φ — нильпотентный, а ψ — произвольный эндоморфизмы неприводимого модуля, то $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — суть нильпотентные эндоморфизмы.*

Доказательство[78]. Пусть эндоморфизмам φ, ψ соответствуют матрицы A, B. Тогда $M : A \supset M$, $M : B \supset M$ и $M : AB = (M : B) : A \supseteq M : A \supset M$, и $\varphi\psi$ — нильпотентный эндоморфизм. Отсюда следует существование такого $p > 0$, что $(AB)^p \in M$. Так как $(BA)^{p+1} = B(AB)^pA \in MA \subseteq M$, то $\psi\varphi$ — также нильпотентный эндоморфизм.

Следующая лемма дополняет теорему 40.

Лемма 39. *Если A, B — матрицы, соответствующие нильпотентным эндоморфизмам неприводимого модуля M, то из $M : A = M : BA$ следует $A \in M$.*

Доказательство. Пусть $A \overline{\in} M$; тогда $BA \overline{\in} M$. Пусть p — наименьшее натуральное число такое, что $B^pA \in M$, $p \geqslant 2$. Тогда $M : B^{p-1}A = (M : A) : B^{p-1} = (M : BA) : B^{p-1} = M : B^pA = (1)$, что приводит к противоречию.

Теорема 41. *Пусть M — неприводимый модуль и $\chi = \sum_{i=0}^{n} \chi_i(M)$. Тогда для любых нильпотентных эндоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\chi+1}$; $\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_{\chi+1} = 0$.*

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_{\chi+1}$ — матрицы, соответствующие эндоморфизмам $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\chi+1}$. Очевидно, $M \subset M : A_{\chi+1} \subseteq M : A_\chi A_{\chi+1} \subseteq \ldots$;

[78] Доказательство это аналогично известному доказательству примарности неприводимого идеала (в коммутативном кольце) (см. Ван-дер-Варден [2, с. 40]).

если какие-либо два члена этой последовательности совпадают, то по лемме 39 эти члены равны единичному модулю и теорема доказана.

Пусть $M \subset M : A_{\chi+1} \subset M : A_\chi A_{\chi+1} \subset M : A_1 \ldots A_{\chi+1}$ по лемме 24. Тогда $\chi_i(M : A_j \ldots A_{\chi+1}) \leqslant \chi_i(M : A_{j+1} \ldots A_{\chi+1})$, $j = \overline{1, \chi}$, причем наличие равенства при каком-либо значении j и при всех значениях i по теореме 30 вызывало бы совпадение соответствующих модулей.

Итак, при сделанных предположениях

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} \chi_i(M) > \sum_{i=0}^{n} \chi_i(M : A_{\chi+1}) > \cdots > \sum_{i=0}^{n} \chi_i(M : A_1 \ldots A_{\chi+1});$$

отсюда следует

$$\chi_i(M : A_1 \ldots A_{\chi+1}) = 0, \ i = 0, 1, \ldots, n; \ M : A_1 \ldots A_{\chi+1} = (1).$$

Лемма 40. *Сумма нильпотентных эндоморфизмов неприводимого модуля есть нильпотентный эндоморфизм.*

Доказательство. Пусть φ, ψ — нильпотентные эндоморфизмы модуля с суммой характеров χ. Тогда $(\varphi + \psi)^{\chi+1}$ есть сумма произведений $\chi + 1$ множителей, равных φ или ψ. По теореме 41 каждое такое произведение равно нулю и, следовательно, $(\varphi + \psi)^{\chi+1} = 0$.

Теорема 42. *Множество всех нильпотентных эндоморфизмов неприводимого модуля M образует двухсторонний идеал в кольце Ω (радикал кольца Ω). Этот идеал нильпотентен с показателем, не превышающим $\chi + 1$ (χ — сумма характеров M)* [79].

Теорема следует непосредственно из лемм 38, 40 и теоремы 41.

Наконец, можно привести следующую теорему.

Теорема 43. *Пусть M — неприводимый модуль, N — модуль в $\Delta(\Gamma)$, порожденный матрицами, соответствующими всем его нильпотентным эндоморфизмам. Тогда, если $M \neq 1$, то $N \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть $(1) = \sum_i c_i A_i$ (1 — единичная матрица, A_i — матрицы, соответствующие нильпотентным эндоморфизмам). Тогда

$$(1) = \sum_i c_i A_i = \sum_{i_1 i_2} c_{i_1} c_{i_2} A_{i_2} A_{i_1} = \sum_{i_1 \ldots i_{\chi+1}} c_{i_1} \ldots c_{i_{\chi+1}} A_{i_{\chi+1}} \ldots A_{i_1} \in M.$$

Связь между M, N является некоторым аналогом связи между примерным и соответствующим простым идеалами (для коммутативного случая).

Приложение 1. **Система линейных уравнений**

Пусть Γ — произвольное (вообще, некоммутативное) поле, Γ' — аддитивная группа, допускающая Γ как область операторов (левых), причем единица Γ соответствует тождественному автоморфизму Γ'.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть дана система уравнений вида*

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} u_\beta = f_\alpha \tag{1}$$

(α — индекс уравнения, β — индекс неизвестного, пробегает произвольные множества; сумма $\sum_\beta$ конечна, $a_{\alpha\beta} \in \Gamma$, $f_\alpha \in \Gamma'$). Для разрешимости этой системы в Γ' необходима и достаточна разрешимость каждой конечной ее подсистемы (см. Ван-дер-Варден [1]).

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность доказывается приемом, использованным в аналогичном случае Штейницем.

Система уравнений (1) расширяется до системы (2) присоединением всех конечных линейных следствий уравнений из (1). Очевидно, поэтому каждая конечная подсистема из (2) должна быть также разрешимой [1].

Пусть множество неизвестных $\{u_\beta\}$ системы вполне упорядочено, β — соответствующий трансфинитный индекс. Определяется подмножество P этого множества (оно может быть пустым) путем трансфинитной индукции по следующим признакам:

1) пусть существуют неизвестные u_β такие, что система (2) не содержит уравнений, включающих только это неизвестное; тогда первое из этих неизвестных принадлежит P;

2) пусть построена часть P' множества P и пусть существуют неизвестные, не связанные уравнениями из (2) только с неизвестными из P'; тогда первое из таких неизвестных принадлежит P. Очевидно, неизвестные из P не связаны никаким уравнением из (2).

Следуя Рикье, неизвестные множества P называем параметрическими, остальные — главными.

Если u_{β_0} — главное неизвестное, то система (2) содержит, и притом единственное, уравнение вида $u_{\beta_0} + \sum_\gamma a_\gamma u_\gamma = f$, где $\sum_\gamma$ имеет только параметрические производные.

Действительно, согласно определению P система (2) содержит уравнение вида $bu\beta_0 + \sum_\gamma b_\gamma u_\gamma = g$, не являющееся тождеством. Если $b = 0$, то все $b_\gamma = 0$ и $g \neq 0$, что приводило бы к неразрешимости этого уравнения. Итак, $b \neq 0$, умножением на b^{-1} получаем уравнение требуемого типа. Единственность его следует из несвязанности параметрических производных уравнениями из (2).

Придавая параметрическим неизвестным произвольные значения из Γ', определяем каждую главную неизвестную из соответствующего ей уравнения. Получаемая совокупность значений параметрических и главных неизвестных удовлетворяет каждому уравнению из (2). Действительно, пусть $\sum_\beta a_\beta u_\beta + \sum_\gamma a_\gamma u_\gamma = f$ — какое-либо из таких уравнений, где все u_β — главные, а u_γ — параметрические неизвестные. Пусть $u_\beta + \sum_\gamma a_{\beta\gamma} u_\gamma = f$ — уравнение, соответствующее u_β. Тогда, очевидно,

$$\sum_\beta a_\beta u_\beta + \sum_\gamma a_\gamma u_\gamma = \sum_\beta a_\beta \left(u_\gamma + \sum_\gamma a_{\beta\gamma} u_\gamma\right)$$

при неопределенных u_β, u_γ и $f = \sum_\beta a_\beta f_\beta$. Это непосредственно приводит к доказательству утверждения и, следовательно, теоремы.

Приложение 2. **Теорема о базисе** [2]

Теорему о базисе сформулируем для множеств. Пусть Σ — произвольное множество, в котором выделена система непустых подмножеств со свойствами: 1) $M \in \Sigma$; 2) $M_\alpha \in \Sigma$, то $\bigcap_\alpha M_\alpha \in \Sigma$; здесь α пробегает произволь-

[79] В приложении 3 эта теорема переносится на группы более общей природы, чем интегральные многообразия.

[1] В уравнениях системы (2) отбрасываются неизвестные с нулевыми коэффициентами.

[2] Методы, применяемые в этом приложении, имеют некоторое сходство с примененными Леви [1] для аксиоматической характеристики полиномиальных колец.

ное множество; 3) если $M_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$ и $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, то $\bigcup_n M_n \in \Sigma$ (мультипликативная система подмножеств).

Для каждого подмножества N из M существует, очевидно, минимальное множество (N) из Σ, содержащее его, (N) «порождено» множеством N, N — базис множества (N). Тогда теорему о базисе для системы Σ можно сформулировать так: каждое множество из Σ обладает конечным базисом.

Пример 1. Пусть M — группа, Σ — множество всех подгрупп. Теорема о базисе означает, что каждая подгруппа обладает конечным числом образующих.

В случае, если M — кольцо, Σ — множество, например, всех левых его идеалов, получается обычная формулировка теоремы о базисе.

Обычным образом доказывается эквивалентность теоремы о базисе и следующего утверждения: всякая возрастающая последовательность подмножеств из Σ $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ обрывается (см. Ван-дер-Варден [2, с. 29] (для идеалов)).

При доказательстве теоремы о базисе для некоторой системы Σ подгрупп некоторой группы удобнее пользоваться другим эквивалентом этой теоремы, использованным неявно Горданом при доказательстве теоремы о базисе для полиномиальных идеалов.

Это связано с некоторым аналогом алгоритма Евклида. Пусть M — некоторая группа (в аддитивной записи), Σ — мультипликативная система подгрупп этой группы, M' — некоторое множество, Σ' — мультипликативная система подмножеств этого множества. Пусть дано отображение φ группы M в M'. Пусть выполняется свойство: если $a, a_1, \ldots, a_n \in M$ и $a \bar{\in} (a_1, \ldots, a_n)$, то существует такой элемент $a' \in (a_1, \ldots, a_n)$, что $\varphi(a - a') \bar{\in} (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. В этом случае будем говорить, что в M применим обобщенный алгоритм Евклида (относительно Σ, Σ', φ).

Пример 2. Пусть M — кольцо полиномов одного аргумента с коэффициентами из некоторого коммутативного поля; Σ — множество идеалов в этом кольце, M' — множество, состоящее из неотрицательных (и символа ∞) целых чисел; Σ' состоит из бесконечных множеств вида $\{\infty, k, k+1, \ldots\}$, $k \geqslant 0$. Отображение φ сопоставляет каждому полиному его степень; $\varphi(0) = \infty$. В этом случае, обобщенный алгоритм Евклида совпадает с обычным.

Имеет место такая теорема.

Теорема. *Для того чтобы для системы (мультипликативной) Σ подгрупп группы M была справедлива теорема о базисе, необходимо и достаточно существование отображения φ группы M в множество M', в котором справедлива теорема о базисе для мультипликативной системы Σ' его подмножеств, такого, что в M осуществим алгоритм Евклида относительно Σ, Σ', φ.*

Доказательство. Необходимость непосредственно получается, если положить $\varphi = 1$, $M = M'$, $\Sigma = \Sigma'$.

Докажем достаточность. Пусть $N \in \Sigma$, $a_1 \in N$, $(a_1) \subset N$, $a' \in N$ $(a' \bar{\in} (a_1))$ и a'' — такой элемент из (a_1), что $\varphi(a' - a'') \bar{\in} (\varphi(a_1))$. Полагаем $a_2 = a' - a''$ $(a_2 \bar{\in} (a_1))$. Пусть также $a_1, \ldots, a_n$ выбраны и $(a_1, \ldots, a_n) \in N$. Пусть $a''' \in N$, $a''' \bar{\in} (a_1, \ldots, a_n)$. Тогда существует такой элемент $a^{\mathrm{IV}} \in (a_1, \ldots, a_n)$, что $\varphi(a^{\mathrm{III}} - a^{\mathrm{IV}}) \bar{\in} (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Полагаем $a_{n+1} = a^{\mathrm{III}} - a^{\mathrm{IV}}$ $(a_{n+1} \bar{\in} (a_1, \ldots, a_n))$. Таким образом, получаем последовательность $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \ldots$, продолжаемую, если N не достигнуто, и $(\varphi(a_1)) \subset (\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \subset \ldots$ Так как вторая последовательность обрывается, по предположению, то обрывается и первая последовательность. Но тогда N имеет конечный базис.

[1] Если исключить условие 3 в определении мультипликативной системы, то теорема о базисе окажется более слабым требованием.

Рассмотрим два приложения этой теоремы.

Пример 3. Пусть P — кольцо с единицей, без делителей нуля, в котором имеет место теорема о базисе для левых идеалов. Пусть $M = P[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов вида $\sum_{i_1 \ldots i_k} P_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$, где присоединяемые элементы $P_{i_1 \ldots i_k} \in P$ удовлетворяют условиям: равенство полинома нулю равносильно равенству нулю всех его коэффициентов; $x_i x_j = x_j x_i$, $x_i p - p x_i \in P$, $p \in P$, $i, j = 1, \ldots, k$.

В множестве строк $(i_1, \ldots, i_k)$ вводится полное упорядочение $(i_1, \ldots, i_k)$, которое предшествует $(j_1, \ldots, j_k)$, если первая из ненулевых разностей $j_k - i_k$, $j_{k-1} - i_{k-1}, \ldots, j_1 - i_1$ положительна.

Соответственно этому упорядочению в каждом полиноме выделяется старший член. Пусть Σ — множество левых идеалов в M, M' — множество строк вида $(p, i_1, \ldots, i_k)$, где $p \in P_{i_1 \ldots i_k}$ — целые неотрицательные числа, дополненные элементом ∞.

Система Σ' состоит из множеств, содержащих ∞ и вместе с элементом $(p, i_1, \ldots, i_k)$ все элементы вида $(q, j_1, \ldots, j_k)$, где q делится на p справа, $j_1 \geqslant i_1, \ldots, j_k \geqslant i_k$. Система Σ', очевидно, мультипликативна. Для системы Σ', далее, справедлива теорема о базисе. Это следует из того, что, как легко видеть, последовательность $a_1, \ldots, a_n$ элементов M' таких, что $a_{n+1} \bar{\in} (a_1, \ldots, a_n)$, обрывается.

Наконец, отображение φ определяется условиями: $\varphi(0) = \infty$; если f — ненулевой полином со старшим членом $p x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$, то $\varphi(f) = (p, i_1, \ldots, i_k)$.

Очевидно, в M имеет место алгоритм Евклида относительно Σ, Σ', φ. Тогда, по доказанной теореме, в M справедлива теорема о базисе для левых идеалов. Отсюда следует и теорема Гильберта о полиномиальных идеалах и теорема Нетер об идеалах в кольце дифференциальных операторов (см. теорему 5).

Пример 4. Пусть P — кольцо с единицей, без делителей нуля, с теоремой о базисе для левых идеалов. Пусть неопределенные $x_1, \ldots, x_k$, коммутирующие между собой и с элементами $PM = P[(x_1, \ldots, x_k)]$, представляют собой кольцо формальных степенных рядов вида $\sum_{i_1 \ldots i_k} P_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$. В M вводится топология: $f_n \to 0$ $(f_n \in M)$, если степень младшего члена f (в упорядочении примера 3) неограниченно растет (степень нулевого элемента — ∞). Σ есть множество замкнутых левых идеалов кольца M[1] (нетрудно доказать, что если P — поле, то всякий идеал M замкнут). Множества M', Σ' определяются так же, как и в примере 3.

Наконец, φ определяется условиями: $\varphi(0) = \infty$; если f — ненулевой элемент из M с младшим членом $p x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$, то $\varphi(f) = (p, i_1, \ldots, i_n)$.

Остается показать, что в M имеет место алгоритм Евклида относительно Σ, Σ', φ.

Пусть для некоторого элемента $a \in M$ и для всякого элемента b, $b \in (a_1, \ldots, a_n)$, $\varphi(a - b) \in (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \subset \varphi((a_1, \ldots, a_n))$. Отсюда легко следует существование такой последовательности элементов $a', a'', \ldots, \in (a_1, \ldots, a_n)$, что младшие члены имеют неограниченно возрастающие степени младших членов. Тогда $a = \lim_m a^m \in (a_1, \ldots, a_n)$. Этим доказана применимость алгоритма Евклида в M, и, следовательно, для левых замкнутых идеалов в M справедлива теорема о базисе.

В случае, если M — кольцо аналитических в точке функций, теорема

[1] Условием 3 определения мультипликативной системы здесь можно не пользоваться.

о базисе также верна (см. Рюккерт [1]). Легко видеть, что доказательство проведенное Рюккертом, включается в указанную схему. Индукцией по числу аргументов легко показать, что всякий идеал в этом кольце замкнут в указанном выше смысле.

Приложение 3. **Один случай нильпотентности радикала кольца**[1]

Пусть G — группа (отличная от единичной) с любым множеством операторов, для которой выделено некоторое множество Σ подгрупп и множество Φ эндоморфизмов, причем:

1) Σ содержит G и подгруппу I, состоящую только из единицы;
2) пересечение любого множества элементов Σ принадлежит Σ;
3) убывающая цепочка подгрупп из Σ обрывается;
4) Φ содержит нулевой эндоморфизм ($a \to 1$ для всех $g \in G$) и единичный эндоморфизм ($a \to a$ для всех $a \in G$);
5) если φ, $\psi \in \Phi$, то $\varphi\psi \in \Phi$;
6) в случае коммутативности дополнительно предполагается, что $\varphi + \psi \in \Phi$;
7) если $H \in \Sigma$, $\varphi \in \Phi$, то $\varphi H \in \Sigma$;
8) ядро всякого эндоморфизма из Φ принадлежит Σ;
9) G неприводимо относительно Σ: для любых двух подгрупп H_1, $H_2 \in \Sigma$, отличных от G, существует подгруппа H из Σ, отличная от G и содержащая H_1, H_2.

Теорема 1. *Всякий эндоморфизм из Φ или нильпотентен, или отображает G на G.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi$; из $G \supseteq \varphi(G) \supseteq \varphi^2(G)$ и из требования 3 следует, что эта последовательность стабилизируется на некотором $k: \varphi^k(G) = \varphi^{k+1}(g) = \cdots = H_1$. Пусть H_2 — ядро эндоморфизма φ^k; H_1, $H_2 \in \Sigma$. Если $g \in G$ и $\varphi^k(G) = h' \in H_1$, то из $\varphi(H_1) = H_1$ следует существование такого элемента $h_1 \in H_1$, что $\varphi^k(h_1) = h'$. Таким образом, $\varphi^k(h_1^{-1}G) = (1)$ и $h_1^{-1}g = h_2 \in H_2$, $g = h_1h_2$. Следовательно, минимальная подгруппа, содержащая H_1 и H_2, есть G. Из требования 8 $H_1 = G$ или $H_2 = G$. В первом случае $k = 0$ ($\varphi^0 = 1$) и $G = \varphi(G)$; во втором случае $\varphi^k(G) = (1)$ и $\varphi^k = 0$; тогда $G \supset \varphi(G)$.

Лемма 1. *Если φ — произвольный эндоморфизм из Φ, ζ — нильпотентный, то $\varphi\zeta$ и $\zeta\varphi$ — нильпотентные эндоморфизмы.*

Доказательство. Так как $\zeta\varphi(G) \subseteq \zeta(G) \subset G$, то он нильпотентен. Пусть $(\zeta\varphi)^p = 0$, тогда $(\varphi\zeta)^{p+1} = \varphi(\zeta\varphi)^p\zeta = 0$.

Лемма 2. *Всякой счетной последовательности нильпотентных эндоморфизмов $\zeta_1, \ldots, \zeta_2, \ldots$ соответствует такое p, что $\zeta_1 \ldots \zeta_p = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Лемма 3. *Если ζ_1, ζ_2 — нильпотентные эндоморфизмы, то можно указать такое число p, что всякое произведение вида $\Pi\varphi_i$, где φ_i равно ζ_1 или ζ_2, содержащее более $p - 1$ множителя, равно нулю.*

Доказательство ведется от противного. Пусть для каждого натурального числа n существует произведение $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i^{(n)}$, не равное нулю, рассмотренного выше типа. Из получающейся последовательности $\mathscr{L}$ ненулевых эндоморфизмов отбирают подпоследовательность $\mathscr{L}_1$ с одинаковым первым множителем φ_1. Далее подпоследовательность $\mathscr{L}_2$ с одинаковыми двумя первыми множителями φ_1, φ_2 и т. д. По лемме существует такое q, что $\varphi_1 \ldots \varphi_q = 0$, что приводит к противоречию.

[1] Аналогичные результаты получены Фиттингом [1] другим методом (с заменой требования 9 требованием обрыва и возрастающих цепочек подгрупп).

Теорема 2. *Множество Z нильпотентных эндоморфизмов из Φ в случае коммутативности G (здесь Φ является, согласно 6, кольцом) есть двухсторонний идеал в Φ.*

Доказательство. Следует доказать только, что сумма двух нильпотентных эндоморфизмов ζ_1, ζ_2 есть нильпотентный эндоморфизм. Пусть p — число, определенное в предыдущей лемме для ζ_1, ζ_2. Тогда, очевидно, $(\zeta_1 + \zeta_2)^p = 0$.

Теорема 3. *Множество Z нильпотентно: существует такое число p, что произведение p произвольных нильпотентных эндоморфизмов равно нулю.*

Доказательство. Если существуют ненулевые нильпотентные эндоморфизмы, то существует такой ненулевой нильпотентный эндоморфизм ζ, что $\zeta Z = (0)$.

Действительно, пусть $\zeta_1 \in Z$, $\zeta_1 \neq 0$ и $\zeta_1 Z \neq 0$. Тогда существует такой $\zeta_2 \in Z$, что $\zeta_1\zeta_2 \neq 0$. Если $\zeta_1\zeta_2 Z \neq (0)$, то процесс выбора продолжается. По лемме 2 этот процесс должен оборваться, что доказывает это утверждение.

Пусть Z_1 — множество всех таких элементов из Z, что из $\zeta \in Z_1$ следует $\zeta Z = (0)$. Если $\varphi \in \Phi$ и $\zeta \in Z$, то, очевидно, $\varphi\zeta$, $\zeta\varphi \in Z_1$ (если G коммутативно, Φ — кольцо и Z_1 — двухсторонний идеал).

Пусть, вообще, Z_m — множество таких элементов из Z, что из $\zeta \in Z_m$ следует $\zeta Z^m = (0)$. Множество Z_m обладает свойством, только что указанным для Z_1. Кроме того, если $Z_m \subset Z$, то $Z_m \subset Z_{m+1}$. Действительно, если $Z_m \subset Z$, то существует такое ζ_1, $\zeta_1 \in Z$, что $\zeta_1 Z^m \neq (0)$; если при этом $\zeta_1 Z^{m+1} = (0)$, то доказательство закончено. В противном случае существует $\zeta_2 \in Z$ такой, что $\zeta_1\zeta_2 Z^m \neq (0)$, и т. д.

Доказательство заканчивается с помощью леммы 2.

Пусть H_φ — ядро эндоморфизма φ, $H_\varphi \in \Sigma$. Пусть $H_m = \bigcap_{\zeta \in Z_m} H_\zeta \in \Sigma$; очевидно, $H_m \supseteq H_{m+1}$. Если $H_m = H_{m+1}$, то $Z_m = Z_{m+1}$.

Действительно, пусть $Z_m \subset Z_{m+1}$; $\alpha \in Z_{m+1}$, $\alpha \bar{\in} Z_m$. Тогда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Z$ такие, что $\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_m \neq 0$. Пусть далее $a \in G$ и $\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_m a \neq 0$. Тогда $\alpha_1 \ldots \alpha_m a \in H_m$, но $\alpha_1 \ldots \alpha_m a \bar{\in} H_{m+1}$, что доказывает утверждение.

Но последовательность $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$ должна стабилизироваться по требованию 8: $H_m = H_{m+1} = \ldots$; тогда $Z_m = Z_{m+1}$. По предыдущему это происходит при $Z = Z_m$. Следовательно, $Z_{m+1} = Z_m Z^m = (0)$.

Теорему доказывают, полагая $p = m + 1$. В коммутативном случае Z является радикалом и притом нильпотентным кольца Φ.

Нетрудно видеть, что интегральное многообразие некоторого модуля из $\Delta(\Gamma)$ (в замкнутой группе Γ') и система (Σ) его интегральных подмногообразий вместе с кольцом (Φ) операторных эндоморфизмов многообразия G (см. § 14) удовлетворяют условиям, рассмотренным здесь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ван-дер-Варден (van der B. L. Waerden)

1. Современная алгебра. Т. I, II. М.-Л., 1934, 1937.
2. Zur Nullstellentheorie der Polinomideale.— Math. Ann, 1925, 96, 183—208.
3. On Hilbert's fonction, series of composition of ideals.— Proc. Kon. Acad. Amsterdam, 1928, 31, 749—770.

Гильберт (D. Hilbert).

1. Über die Theorie der algebraischen Formen.— Math. Ann., 36, 1890, 473—534.

Жордан (Cordan)

1. Vorlesungen über Invarianten theorie. Leipzig, 1887.

Гюнтер (N. M. Gjunter)

1. Sur la theorie generale des systémes d equations aux derivees partielles.— C. R. Acad. sci., Paris, 1914, t. CLVIII, N 16, p. 1108—1111.

Жанэ (M. Janet)

1. Les systemes d'equations aux derivees partielles. Memorial des Sci Math.— (S. I., s. a.).

2. Leçons sur les systemes d'equations aux d'erivees partielles, 1929.
Леви Г. (H. Levi)
1. A characterization of polynomial rings by means of order relations.— J. Math., 1943, 65, N 2.
Лузин Н. Н.
1. Об одном случае теоремы Janet-Riquier. II—III.— Докл. АН, 1940, 81.
Лузин Н. Н., Кузнецов П. И.
1. К абсолютной инвариантности и инвариантности в теории дифференциальных уравнений. I.— Докл. АН, 1946, 51, № 4.
Лурье А. И.
1. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— Тр. Ленингр. индуст. ин-та, 1937, 6.
Нетер, Шмейдлер (E. Noether, W. Schmeidler)
1. Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential — und Differenzenausdrücken.— Math. Z., 1920, 8.
Оре (C. Ore)
1. Linear equatiors in non-commutative fields.— Ann. Math., 1931, 32.
2. Theory of non-commutative polynomials.— Ann. Math., 1933, 34,
Пикар (E. Picard)
1. Traité d'Analyse, 1928, 3, 3 ed.
Пуанкаре (H. Poincaré)
1. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes.— Acta Math., 1887, 5.
Рикье (C. Riquier)
1. Sur le degré de génèralité d'un systéme differentiel quelquoque.— Acta Math., 1902, 25.
2. Les systèmés d'équations aux derivées partielles. 1910.
Ритт (J. F. Ritz)
1. Differentiel equations from the algebraic standpoint, 1932.
Рюккерт (W. Rückert)
1. Zum Fliminationsproblem der Potenzreichenideale.— Math. Ann., 1933, 107.
Снэппер (E. Snapper)
1. The resultant of a linear set.— J. Math., 1944, 66, 1.
2. Partiel differentiation and elementary divisors.— Ann. of Math., 1945, 46, 3.
Тресс (Tresse)
1. Sur les invarients differentials des groupes contide transformations.— Acta Math., 1894, 18.
Фиттинг (H. Fitting)
1. Die Theory der Automorphismenringe Ahelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichkommutativen.— Gruppen. Math. Ann., 1932, 107.
Фридрихс (K. G. Friedriechs)
1. The identity of weak and strong extensions of differential operators.— Ann. Math. Soc., 1944, 55.
Фробениус (G. Frobenius)
1. Über den Begriff der Irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— J. f. Math. 1873, 76.
Хаусдорф (F. Hausdorf)
1. Теория множеств, 1937.
Хентцельт и Нетер (K. Hentzelt, E. Noether)
1. Zur Theorie der Polinomideale und Resultanten.— Math. Ann., 1922, 88.
Шевалле (C. Chevalley)
1. Some properties of ideals in rings of power series.— Trans. Ann. Math., 1944, 55, 1.
Шмейдлер (W. Smeidler)
1. Grundlagen einer Theorie der alg. Functionen mehrerer veränderlichen.— Math. Z., 1932, 28.
Штейниц (E. Steinitz)
1. Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. II.— Math. Ann., 1912, N 72.
2. Rechteckige Systeme und Moduln in Algebraischen Zahlkörpern.— Math. Ann., 1911, N 71, c. 328—345.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОЛЬЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Научные записки Львовского университета, 1947, т. 5, вып. 2, сер. мех.-мат.)

Целью настоящей статьи является установление некоторых свойств идеалов в кольце дифференциальных операторов.

1. Пусть Γ — коммутативное поле с характеристикой, которая равна нулю, такое, что допускает n (левых) операторов $d_1, \ldots, d_n$ со свойствами: если $a, b \subset \Gamma$, $i, j = 1, \ldots, n$, то $d_i a \subset \Gamma$;

$$d_i(a+b) = d_i a + d_i b; \quad d_i(ab) = a d_i b + b d_i a; \quad d_i(d_j a) = d_j(d_i a).$$

Такое поле будем называть дифференциальным[1]. Элемент $a \subset \Gamma$ примем постоянным, если $d_i a = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что каждое рациональное число постоянное.

Поле Γ, содержащее n элементов $a_1, \ldots, a_n$ с ненулевым якобианом $|d_i a_j|$ («независимые элементы»), назовем полным. Важность этого типа полей показывает следующая лемма, которая принадлежит Кольчину [1].

Лемма 1. *Пусть* $f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \ldots, f_l(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — *ненулевые полиномы неопределенных* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1} \ldots, d_n^{i_n} \ldots \varphi_j \ldots$ *с коэффициентами из полного поля* Γ. *Тогда существуют элементы* $b_1, \ldots, b_k \subset \Gamma$ *такие, что* $f_1(b_1, \ldots, b_k), \ldots, f_l(b_1, \ldots, b_k)$ *отличаются от нуля* (d_j^0 *понимается как единичный оператор* d_0).

Легко видеть, что полнота не только достаточна, но и необходима для справедливости леммы. Действительно, в неполном поле якобиан $|d_i \varphi_j|$ является ненулевым полиномом неопределенных $d_i \varphi_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, который аннулируется при произвольной замене $\varphi_j = b_j \subset \Gamma$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

С полем Γ связано кольцо дифференциальных операторов вида $\sum a_{i_1 \ldots i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{n}$ $(a_{i_1 \ldots i_n} \subset \Gamma)$.

Сумма здесь предполагается конечной и распространенной на различные соединения целых неотрицательных индексов $i_1, \ldots, i_n$[2]. Все такие суммы с нулевым коэффициентом отождествляются (нуль кольца $\Delta(\Gamma)$). Сложение в $\Delta(\Gamma)$ определяется очевидным способом, умножение — аксиомами кольца и условиями: если $a \subset \Gamma$, $\alpha = d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$, $i, j = 1, \ldots, n$, то

$$d_i d_j = d_j d_i, \quad d_i(a\alpha) = (d_i a)\alpha + a(d_i \alpha), \quad d_0(a d_i) = (a d_i) d_0 = a d_i.$$

Очевидно $\Delta(\Gamma)$ является кольцом с единицей (d_0) без делителей нуля. Если Γ — поле постоянных, то $\Delta(\Gamma)$ — коммутативно, в противном случае $\Delta(\Gamma)$ — не коммутативно.

---

[1] В дальнейшем Γ будет означать дифференциальное поле (которое иногда называется просто полем).

[2] Максимальная сумма $i_1 + \ldots + i_n$ (в предположении, что $a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$) будет называться степенью элемента.

Действительно, если, например, $d_1 a \neq 0$ $(a \subset \Gamma)$, то $d_1(ad_1) = ad_1^2 + (d_1 a)\, d_1 \neq (ad_1)\, d_1$.

В кольце $\Delta(\Gamma)$ существует инволютивный обратный автоморфизм I, указанный Фробениусом [2]:

$$\sum a_{i_1 \ldots i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \to \sum (-1)^{i_1 + \cdots + i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} (a_{i_1 \ldots i_n} d_0).$$

Это переход к сопряженному оператору, а именно:

$$I^2 = 1; \quad I(\alpha + \beta) = I(\alpha) + I(\beta); \quad I(\alpha\beta) = I(\beta)\, I(\alpha)$$

(I — тождественный автоморфизм $\Delta(\Gamma)$; $\alpha,\ \beta \subset \Delta(\Gamma)$).

Это обстоятельство позволяет переносить каждое свойство левых идеалов кольца $\Delta(\Gamma)$ на правые идеалы (и наоборот). Как показано Нетер [3], каждый левый (а значит, и правый) идеал кольца $\Delta(\Gamma)$ имеет конечный базис.

Очевидным способом проводятся операции над матрицами с элементами $\Delta(\Gamma)$; при этом матрица первого порядка $(\alpha) = \alpha$. Матрицы $A_1, \ldots, A_k$, состоящие из одной строки и одинакового количества столбцов (строки), называются линейно независимыми (слева), если из $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k = 0$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \subset \Delta(\Gamma))$ следует $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Согласно [4], для произвольных элементов $\alpha, \beta \subset \Delta(\Gamma)$ можно подобрать такие элементы $\lambda, \mu \subset \Delta(\Gamma)$, что $\lambda\alpha = \mu\beta$ и λ или $\mu \neq 0$. Очевидно, если $\alpha \neq 0$, то $\mu \neq 0$. Таким образом, произвольные два элемента из $\Delta(\Gamma)$ зависимы (слева и справа).

2. Если Γ — полное поле, теорема о конечном базисе (Нетер) для идеалов $\Delta(\Gamma)$ может быть уточнена.

Прежде всего докажем такую лемму.

Лемма 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — линейно независимые строки длины k; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — ненулевые элементы из $\Delta(\Gamma)$. Если поле коэффициентов Γ полное, то можно подобрать такие элементы $a_1, \ldots, a_k \subset \Gamma$, что строки $A_1, \ldots, A_k$ и $A = (\alpha_1 a_1 d_0, \ldots, \alpha_k a_k d_0)$ образуют матрицу, которая имеет обратную матрицу слева.*

Доказательство. Пусть $U_{ii_1 \ldots i_n}$ обозначает строку длины k специального вида: элемент строки, который занимает i-е место, равняется $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$, другие — нулю.

Пусть s — наивысшая степень элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и элементов из $\Delta(\Gamma)$, которые составляют строки $A_1, \ldots, A_k$.

Присоединяя к Γ неопределенные $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_j, \ldots$, образуем поле расширения Γ_φ, которое будет, очевидно, дифференциальным полем (применение операторов $d_1, \ldots, d_n$ к присоединенным элементам подсказывается обозначениями). Для каждого i вводится следующая упорядоченность производных: $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_i$, которая находится перед $d_1^{j_1} \ldots d_n^{j_n} \varphi_i$, если в последовательности $\sum_{l=1}^{n} (j_l - i_l)$, $i_n - i_n, \ldots, j_1 - i_1$ существуют ненулевые числа, причем первое из таких чисел положительно.

Пусть $A_\varphi = (\alpha_1 \varphi_1 d_0, \ldots, \alpha_k \varphi_k d_0)$. Рассмотрим множества элементов вида

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i = \sum a_{ii_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} u_{jj_1 \ldots j_n}, \tag{1}$$

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_\varphi = \sum a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} (\varphi)\, u_{jj_1 \ldots j_n}. \tag{2}$$

Здесь $i_1 + \cdots + i_n \leqslant m - s$ (m — некоторое положительное число, большее s); $j_1 + \cdots + j_n \leqslant m$; $i, j = 1, \ldots, k$; $a_{ii_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} \subset \Gamma$; $a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n}(\varphi) \subset \Gamma_\varphi$.

Очевидно, $a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n}(\varphi)$ являются полиномами относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_j, \ldots$, причем высшая производная $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_i$ в разложении $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_\varphi$ входит в коэффициент при $U_{i0 \ldots 0}$ и отсутствует в других коэффициентах. Элементы (1) линейно независимы над Γ_φ. Действительно, в противном случае эта зависимость имела бы место и над Γ, что приводило бы к линейной зависимости $A_1, \ldots, A_k$ над $\Delta(\Gamma)$. Пусть элементы

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0} \tag{3}$$

линейно зависимы над Γ_φ (и, значит, над Γ).

Тогда $\sum_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} (d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}) = 0$, где $c_{ii_1 \ldots i_n}$ — элементы из Γ, не равные нулю в совокупности.

Значит,

$$\sum_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} = g_i \neq 0,$$

$$\sum_i \alpha_i A_i = g_1 U_{10 \ldots 0} \quad (\alpha_i \subset \Delta(\Gamma)).$$

Пусть теперь элементы (3) линейно независимы над Γ_φ; и в этом случае получаем соотношения того же вида.

При достаточно большом m элементы (1), (2) и, значит, соответствующие элементы

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}, \quad d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_\varphi - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} (\varphi)\, U_{10 \ldots 0}$$

линейно зависимы над Γ_φ. Действительно, количество этих выражений

$$(k+1)\binom{n+m-s}{n} \quad \text{при} \quad m > \frac{nk^{\frac{1}{n}} + s(k+1)^{\frac{1}{n}}}{(k+1)^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}}$$

превышает количество символов $U_{jj_1 \ldots j_n}$ в этих выражениях, которое равняется $k\binom{n+m}{n}$.

Пусть $B_t = d_1^{i_1(t)} \ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi - a_{i_1(t) \ldots i_n(t)}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}$ $(t = 1, \ldots, l)$ является одной из таких минимальных систем, что выражение (3) и $B_1, \ldots, B_l$ зависимы над Γ_φ. Пусть $d_1^{i_1(1)} \ldots d_n^{i_n(1)} A_\varphi$ содержит производную $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_1$, следующую после всех других производных φ_1, которые содержатся в $d_1^{i_1(t)} \ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t = 2, \ldots, l)$. Это имеет место, потому что все $d_1^{i_1(t)} \ldots d_n^{i_n(t)}$ $(t = 1, \ldots, l)$ различны. Тогда все коэффициенты при $U_{jj_1 \ldots j_n}$ в $d_1^{i_1(t)} \ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t = 1, \ldots, l)$, кроме $a_{j_1(1) \ldots j_n(1)}^{10 \ldots 0}(\varphi)$, не содержат $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_1$; значит, можно предполагать, что не равные нулю в совокупности коэффициенты зависимости

$$\sum_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} (\varphi)\, (d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}) + \sum_{t=1}^{l} e_t B_t = 0,$$

также не содержат $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_1$. При этом из свойств минимальности $B_1, \ldots$

..., B_l следует $e_t(\varphi) \neq 0$ $(t = 1, \ldots, l)$. Из этой зависимости получаем

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi)\, d_1^{i_1(t)} \ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi =$$

$$= \left(\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, a_{ii_1\ldots i_n}^{10\ldots 0} + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi)\, a_{i_1(t)\ldots i_n(t)}^{10\ldots 0} U_{10\ldots 0} \right) = g_1(\varphi)\, U_{10\ldots 0},$$

согласно сделанным замечаниям $g_1(\varphi) \neq 0$.

Аналогично определяем $g_2(\varphi), \ldots, g_k(\varphi)$ (при замене в приведенном доказательстве $\varphi_1, U_{10\ldots 0}$ соответственно на $\varphi_i, U_{i0\ldots 0}$). По лемме 1 находим такие $a_1, \ldots, a_k$, что $g_i(a) \neq 0\,(\subset \Gamma)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда получаем зависимости вида

$$U_{i0\ldots 0} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} A_j + \beta_i A_a \quad (i = 1, \ldots, k), \text{ где } \beta_{ij}, \beta_i \subset \Delta(\Gamma).$$

Принимая $A_a = (\alpha_1 a_1 d_0, \ldots, \alpha_k a_k d_0) = A$, получаем утверждение леммы.

На этой лемме основываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если поле Γ полное, то каждый левый (правый) идеал из $\Delta(\Gamma)$ имеет базис не более чем из двух элементов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — левый идеал из $\Delta(\Gamma)$. По теореме Нетер этот идеал имеет конечный базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Для нулевого идеала справедливость утверждения леммы очевидна. Пусть $\mathfrak{M} \neq 0$ и $k > 1$; можно предполагать также $\alpha_1 \neq 0$. Тогда существуют элементы β_i, γ_i $(i = 2, \ldots, k)$ из $\Delta(\Gamma)$ такие, что $\beta_i d_1 = \gamma_i d_i$ и $\gamma_i \neq 0$ $(i = 2, \ldots, k)$. Строки (длины k) $A_1 = (d_0, \ldots)$, $A_i = (-\beta_i, \ldots, \gamma_i, \ldots)$ $(i = 2, \ldots, k$; γ_i занимают i-е место; невыписанные элементы строк равны нулю), очевидно, линейно независимы. Согласно лемме 2 существует строка $A = (a_1 d_0, \ldots, a_k d_0)$, $(a_1, \ldots, a_k \subset \Gamma)$ такая, что матрица, составленная из строк $A_1, \ldots, A_k, A$, является правым делителем единичной матрицы; тогда, очевидно,

$$A_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha_1, \quad A_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0 \ (i = 2, \ldots, k), \quad A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_1$$

также образует базис идеала $\mathfrak{M}$.

Этот результат, по предыдущему, справедливый и для правых идеалов, что доказывает теорему.

В случае одного оператора дифференцирования d $(n = 1)$ в кольце $\Delta(\Gamma)$, как известно, имеет место алгоритм Евклида. Поэтому в $\Delta(\Gamma)$ (при произвольном поле Γ) каждый идеал является главным.

Покажем на примере существование не главных идеалов при полном поле Γ.

Пример. Пусть $n = 2$ и Γ содержит элементы x_1, x_2 («аргументы») со свойствами $d_i x_i = 1$, $d_i x_j = 0$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2)$. Как легко проверить, идеал $\mathfrak{M}$ с базисом $d_1^2, d_1 d_2, d_2^2$ не является главным. Этот идеал имеет также базис $d_1^2, d_1 d_2 + x_1 d_2^2$. В случае, если Γ содержит только постоянные, базис $d_1^2, d_1 d_2, d_2^2$ идеала $\mathfrak{M}$ не может быть сокращен (в этом случае $\Delta(\Gamma)$ является кольцом полиномов с аргументами d_1, d_2).

Легко видеть, что по крайней мере, если Γ содержит аргументы $x_1, \ldots, x_n$ $(d_i x_i = 1,\ d_i x_j = 0$ при $i \neq j)$, определение дополнительной строки A в лемме 2 и построение базиса идеала длины не больше двух практически может быть выполнено и при этом с помощью только конечного количества алгебраических действий и дифференцирований.

Теорема 2. *Если Γ является полным полем, то кольцо $\Delta(\Gamma)$ простое (т. е. не содержит двухсторонних идеалов, отличных от нулевого и единичного)* [3].

Обратное утверждение также справедливо.

Доказательство. Пусть Γ — полное поле и $\mathfrak{M}$ — двухсторонний идеал в $\Delta(\Gamma)$, отличный от нулевого.

Пусть $\alpha \subset (\Gamma)$, $\alpha \neq 0$.

По лемме 2 существует такой элемент $a \subset \Gamma$, что левый идеал имеет базис α, $\alpha a d_0$ — единичный; но тогда и $\mathfrak{M}$ — единичный идеал. Значит, $\Delta(\Gamma)$ — простое кольцо.

Пусть теперь Γ не полное. Пусть k — максимальное число элементов $a_1, \ldots, a_k$ из Γ таких, что

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 & \ldots & d_k a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 a_k & \ldots & d_k a_k \end{vmatrix} \neq 0$$

(если Γ — поле постоянных, то $k = 0$) $0 \leqslant k < n$.

Тогда для каждого элемента $a \in \Gamma$ имеем

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 & \ldots & d_k a_1 & d_{k+1} a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 a_k & \ldots & d_k a_k & d_{k+1} a_k \\ d_1 a & \ldots & d_k a & d_{k+1} a \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть порождает оператор первой степени из Γ

$$\alpha = b_1 d_1 + \cdots + b_k d_k + b d_{k+1} \quad (b \neq 0),$$

при этом для каждого $a \in \Gamma$ $\alpha a = 0$.

Но тогда для каждого $\beta \in \Delta(\Gamma)$ $\alpha\beta = 0 \pmod{d_1, \ldots, d_{k+1}}$ и двухсторонний идеал, порождаемый α, не содержит единицы. Значит, кольцо $\Delta(\Gamma)$ не простое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolchin E. R.* Extensions of differential ideals.— Ann. Math., 1942, 43.
2. *Frobenius G.* Über den Begrift der irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— J. f. r. a. Math. (Crelle's J.), 1873, 76.
3. *Noether E., Schmeidler W.* Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzen-ausdrücken.— Math. Z., 1920, 8.
4. *Jacobson N.* Structure theory of simple rings without finitness assumptions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1945, 57 : 2.
5. *Лопатинский Я. Б.* Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов.— Мат. сб., 1945, 17 (59) : 2.

[3] Для случая одного дифференцирования доказано Джекобсоном [5].