АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Избранные труды

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1984

[redacted]

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ НА МНОЖИТЕЛИ

(Научные записки Львовского политехнического института, 1956, вып. 38, № 2)

В настоящей статье доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} A_{s-j}\lambda^j \quad (s \geqslant 2), \tag{1}$$

A_j $(j = 0, \ldots, s)$ — *комплексные квадратные матрицы порядка* p, $\det A_0 \neq 0$.

Пусть, далее из ps *корней (с учетом их кратности) уравнения*

$$\det A(\lambda) = 0$$

могут быть выделены pk *корней* (k — *натуральное число, меньшее* s), *отличных от остальных корней этого уравнения. Для существования в этих предположениях матрицы* $B(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\lambda^j$, $\det B_0 \neq 0$, *корни детерминанта которой совпадали бы с выделенными* pk *корнями и которая делила бы матрицу* $A(\lambda)$ *слева, необходимо и достаточно выполнение условия: ранг матрицы*

$$\operatorname{Res}_{+}\left\{\begin{pmatrix} E \\ \vdots \\ \lambda^{s-1}E \end{pmatrix} A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\right\} \tag{2}$$

равен pk.

Здесь Res_{+} — *сумма вычетов относительно выделенных* pk *корней;* E — *единичная матрица порядка* p.

Доказательство этой алгебраической теоремы будет опираться на теорию систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Именно используются следующие свойства (при введенных обозначениях).

1. По Коши, общее решение системы

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0 \tag{3}$$

(при условии $\det A_0 \neq 0$) может быть представлено в виде

$$u(x) = \operatorname{Res}\{e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)(E, \lambda E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\}C, \tag{4}$$

где Res — полный вычет следующей матрицы; C — произвольный постоянный столбец высоты ps.

Это свойство вытекает из легко проверяемого соотношения

$$\det \operatorname{Res}\left\{\begin{pmatrix} E \\ \vdots \\ \lambda^{s-1}E \end{pmatrix} A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\right\} \neq 0.$$

2. Каждому корню λ_0 кратности $\varkappa$ характеристического уравнения $\det A(\lambda) = 0$ соответствует $\varkappa$ независимых решений вида $e^{\lambda_0 x}\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — полиномиальный столбец.

3. Если система $A_1\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0$ $\left(A_1\left(\frac{d}{dx}\right)\right.$ — вообще не квадратная матрица (ширины p)$\left.\right)$ допускает все решения системы $A\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0$, то существует полиномиальная матрица $R(\lambda)$, такая, что

$$A_1(\lambda) = R(\lambda)A(\lambda).$$

4. Если $A_1\left(\frac{d}{dx}\right)$, $A_2\left(\frac{d}{dx}\right)$ — два матричных оператора (ширины p) и системы $A_1\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0$, $A_2\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0$ имеют только нулевое общее решение, то существуют полиномиальные матрицы $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, такие, что

$$P_1(\lambda)A_1(\lambda) + P_2(\lambda)A_2(\lambda) = E. \tag{5}$$

Последние два свойства следуют, например, из теоремы о базисе для дифференциальных модулей, доказанной Нетер и Шмейдлером [1] (см. также [2]).

В частности, если $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ — квадратные матрицы, детерминанты которых не имеют общих корней, то соотношение вида (5) справедливо также для транспонированных матриц $A_1'(\lambda)$, $A_2'(\lambda)$ и, следовательно, в этом случае

$$A_1(\lambda)Q_1(\lambda) + A_2(\lambda)Q_2(\lambda) = E.$$

Теперь будет доказана теорема.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть

$$A(\lambda) = B(\lambda)P(\lambda); \tag{6}$$

$P(\lambda)$, $B(\lambda)$ — полиномиальные матрицы, причем $B(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\lambda^j$, $\det B_0 \neq 0$, корни $\det B(\lambda)$ совпадают с выделенными pk корнями $\det A(\lambda)$.

Очевидно, тогда корни $\det P(\lambda)$ совпадают с остальными $p(s-k)$ корнями и, таким образом, $\det B(\lambda)$ и $\det P(\lambda)$ не имеют общих корней.

Пусть для некоторого постоянного столбца C_0

$$\mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C_0 = 0.$$

Применяя к обеим частям оператор $P\left(\frac{d}{dx}\right)$, на основании (6) получаем

$$\mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}B^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C_0 = 0$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Res}\{e^{\lambda x}B^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C_0 = 0.$$

На основании замечания 1, примененного к уравнению $B\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = 0$, следует $C_0 = 0$.

С другой стороны, если ранг матрицы (2) меньше pk, то существует ненулевая строка C_0, такая, что

$$u_0(x) = \mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C_0$$

обладает свойствами: $u_0|_{x=0} = 0, \ldots, \left.\frac{d^{s-1}u_0}{dx^{s-1}}\right|_{x=0} = 0$. Так как $u_0(x)$ есть

решение уравнения $A\left(\frac{d}{dx}\right)u = 0$, то отсюда следует $u_0(x) = 0$ и, по предыдущему $C_0 = 0$, что приводит к противоречию.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть ранг матрицы (2) равен pk. Тогда из

$$\mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C_0 = 0$$

следует $C_0 = 0$.

Таким образом, линейное многообразие

$$u(x) = \mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)(E, \ldots, \lambda^{k-1}E)\}C \tag{7}$$

(C пробегает множество постоянных столбцов высоты pk) имеет размерность pk.

Так как на основании замечания 2 выделенным pk корням характеристических уравнений $\det A(\lambda) = 0$ принадлежит pk независимых решений уравнения $A\left(\frac{d}{dx}\right)u = 0$ и

$$u_0(x) = \mathrm{Res}_+\{\lambda^k e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)\}$$

есть решение этого уравнения, то существуют такие квадратные матрицы $B_1, \ldots, B_k$, что

$$\mathrm{Res}_+\{\lambda^k e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)\} = \mathrm{Res}_+\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\lambda^j e^{\lambda x}A^{-1}(\lambda)B_{k-j}\right\}.$$

Следовательно, полагая

$$B(\lambda) = -\lambda^k E + \sum_{j=0}^{k-1}B_{k-j}'\lambda^j, \quad B'\left(\frac{d}{dx}\right)\mathrm{Res}_+\{e^{\lambda x}A'^{-1}(\lambda)\} = 0,$$

получим, что многообразие (7) является решением уравнения

$$B'\left(\frac{d}{dx}\right)U = 0. \tag{8}$$

Так как многообразие (7) pk-мерно, то это и есть общее решение уравнения (8).

Таким образом, всякое решение уравнения (8) есть решение уравнения $A'\left(\frac{d}{dx}\right)U = 0$. Тогда по замечанию 3 $B'(\lambda)$ делит $A'(\lambda)$ справа.

Полагая

$$A'(\lambda) = P'(\lambda)B'(\lambda)$$

и транспонируя, заключаем

$$A(\lambda) = B(\lambda)P(\lambda).$$

Теорема доказана.

Транспонированием условия (2) с заменой $A'(\lambda)$ на $A(\lambda)$ получается признак существования правого делителя.

Пусть $f_+(\lambda)$ — полином, составленный по выделенным pk корням. Согласно замечанию 3 $B(\lambda)$ (и, по доказанному, $A(\lambda)$) делит слева $f_+(\lambda)E$. Из замечания 4 следует, что существуют такие полиномиальные матрицы $S(\lambda)$, $T(\lambda)$, что

$$f_+(\lambda)S(\lambda) + A(\lambda)T(\lambda) = B(\lambda).$$

Таким образом, $B(\lambda)$ есть левый общий наибольший делитель $f_+(\lambda)E$ и $A(\lambda)$ и с точностью до правого обратимого множителя определяется однозначно заданием степени k и pk корней $\det B(\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noether E. u Schmeidler W.*— Math. Z., 1920, 8.
2. *Лопатинский Я. Б.*— Мат. сб., 1945, 17 (59) : 2.