BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

AAG4063
UL FMT S RT a BL s T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 52001808//r62
035/1: : |a (RLIN)MIUG83-S20809
035/2: : |a (CaOTULAS)159944565
040: : |a CU |c CU |d NvU |d MiU
041: : |a engfregeritarus
050/1:0 : |a QA1 |b .I8
082/1: : |a 510.631
111:2 : |a International Congress of Mathematicians.
245:00: |a Proceedings.
260: : |a [v.p.]
300/1: : |a v. |b ill. |c 24-31 cm.
310: : |a Quadrennial
362/1:0 : |a 1897-
500/1: : |a Some volumes have title in translation: Actes, Atti, Comptes rendus (varies slightly), Trudy, Verhandlungen.
515/2: : |a No congresses held 1916, 1937-1949.
515/3: : |a Congresses held 1897-1912 called 1st-5th; those for 1920-1958 designated new series, 1st-8th.
546/4: : |a Contributions in English, French, German, Italian and Russian.

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

COMPTES RENDUS

DU

CONGRÈS INTERNATIONAL

DES

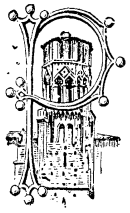
MATHÉMATICIENS

(Strasbourg, 22-30 Septembre 1920)

PUBLIÉS PAR

HENRI VILLAT

Professeur à l'Université de Strasbourg.



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

—

1921

BUREAU DU CONGRÈS

Président d'honneur

M. CAMILLE JORDAN, membre de l'Institut.

Président

M. ÉMILE PICARD, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

Vice-Présidents

MM. L.-E. DICKSON, professeur à l'Université de Chicago.
J. LARMOR, professeur à l'Université de Cambridge.
N.-E. NÖRLUND, professeur à l'Université de Lund.
C. DE LA VALLÉE-POUSSIN, professeur à l'Université de Louvain.
H. VILLAT, professeur à l'Université de Strasbourg.
V. VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome.

Secrétaire général

M. GABRIEL KOENIGS, membre de l'Institut.

Secrétaire

M. H. GALBRUN

Introducteurs dans les Sections

Section I.	MM.	E. PICARD.
Section II.		E. GOURSAT.
Section III.		G. KOENIGS.
Section IV.		H. VILLAT.

DÉLÉGATIONS

Angleterre : MM. Hobson, Larmor, Whittaker, Young.

Belgique : Académie Royale de Belgique : MM. Demoulin, de Donder, Deruyts, de la Vallée-Poussin, Stuyvaërt.

Ministère de l'Instruction publique et École militaire : M. Lefebvre.

Observatoire de Belgique : M. Vanderlinden.

Danemark : M. Niels Nielsen.

États-Unis d'Amérique : MM. L.-E. Dickson, L.-P. Eisenhart.

American Association of Mathematics : M. D.-E. Smith, Président of the Association.

Massachusetts Institute of Technology : MM. Taylor, Wiener.

France : Académie des Sciences de Paris : MM. P. Appell, E. Goursat, G. Kœnigs, E. Picard.

Grèce : MM. Hatzidakis, Remoundos, Zervos.

Italie : M. V. Volterra.

Japon : M. Takagi.

Norwège : MM. Guldberg, Rode, Störmer.

Pologne : M. Zaremba.

Portugal : M. da Costa-Lobo.

Suisse : M. Crelier.

Université de Neuchâtel : M. G. du Pasquier.

Tchéco-Slovaquie : Ministère de l'Instruction publique : M. Bydzovsky.

Société des Mathématiciens et des Physiciens Tchèques : M. Sobotka, Président de la Société.

Comité National provisoire des Mathématiciens Tchéco-Slovaques : M. Hostinsky, Secrétaire du Comité.

LISTE DES MEMBRES DU CONGRÈS

MM.

AMSLER, 147 *bis*, rue Saint-Dizier, Nancy.

ANTOINE (L.), professeur à l'Université, 15, quai Zorn, Strasbourg.

APPELL (P.), membre de l'Institut. recteur de l'Académie de Paris, 5, rue de la Sorbonne, Paris (5e).

BACHELIER, chargé de cours à la Faculté des Sciences, Besançon.

Mme BACHELIER.

BALLESTER (P.-E.), professeur à l'Université, villa Ballester, Buenos-Ayres.

BANERGI (Indhausukmar), professeur à l'Université, 92, Upper circular Road, Calcutta.

BARRAU (J.-A.), professeur à l'Université, 6, Wassenbergstraat, Groningen.

Mme BARRAU.

BARRIOL (A.), 88, rue Saint-Lazare, Paris (9e).

BAUDET (P.-S.-H.), professeur à l'Institut technique de Delft, 32, rue Bartzelanlan, La Haye.

BAUER, professeur à l'Université, 22, rue Charles-Grad, Strasbourg.

BEAUPRÉ (V.-E.), professeur à l'École polytechnique, 228, rue Saint-Denis, Montréal (Canada).

BIOCHE (Charles), professeur au Lycée Louis-le-Grand, 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris (6e).

BLACKER (Miss W.-L.-B.), 20, Victoria Square, Clifton, Bristol (Angleterre).

Miss AUBREY.

BLOCH (B.), professeur au Lycée, 7, quai Saint-Thomas, Strasbourg.

MM.

BOBAY (abbé), professeur au Grand-Séminaire, Strasbourg.

BOCCARDI (Jean), directeur de l'Observatoire de Pino, Turin.

Mlle BOCCARDI.

BOFFA TARLATTA (Mlle Ortenza), docteur ès sciences, Turin.

BONNEFOY (Mme), 141, boulevard Pereire, Paris (17e).

BONNESERE (A.), ingénieur, 333, San Martin, Buenos-Ayres.

BOREL (E.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 32, rue du Bac, Paris (7e).

BOUTROUX (P.), professeur au Collège de France, 5, rond-point Bugeaud, Paris (16e).

BRILLOUIN (M.), professeur au Collège de France, 31, boulevard de Port-Royal, Paris (13e).

BROCARD, lieutenant-colonel, 75, rue des Ducs-de-Bar, Bar-le-Duc.

BUCK (Th.), professeur à l'Université, Faculty Club, Berkeley, Californie.

BUHL (A.), professeur à l'Université, 11, rue des Coffres, Toulouse.

BYDZOVSKY (Bohumil), professeur à l'Université, 5, Riegrova, Prague-Karlin (Tchéco-Slovaquie).

CARTAN (E.), professeur à la Sorbonne, 4, avenue de Montespan, Le Chesnaye (Seine-et-Oise).

Mme CARTAN, Mlle CARTAN;
MM. Jean, Louis, Henri CARTAN.

MM.

CARVALLO, directeur des études à l'École polytechnique, 21, rue Descartes, Paris (5e).

CERF (G.), professeur à l'Université, rue Monge, Dijon.

CHÂTELET (A.), professeur à l'Université, 73, rue Caumartin, Lille.

CLAPIER, docteur ès sciences, 47, avenue de Lodève, Montpellier.

Mme CLAPIER.

CORPUT (van der), professeur à l'Université, Singelstraat 1, Utrecht.

COSTA (Amoroso), professeur à l'École polytechnique, Rio-de-Janeiro, et 3, rue des Eaux, Paris (16e).

COSTA-LOBO (F.-M. DA), professeur à l'Université, 28, rue dos Coutinhos, Coïmbre (Portugal).

CRAMER (H.), Mörby, Stocklund (Suède).

CRELIER (L.), professeur à l'Université, 2, rue Schläfli, Berne.

Mme CRELIER.

CURJEL (H.-W), actuaire, 10, South La Salle Street, Chicago.

DANIELL (P.-J.), professor of the Rice Institute, Houston, Texas (U. S. A.).

Mme DANIELL.

DARMOIS (G.), professeur à la Faculté des sciences, Nancy.

DELAPORTE (P.), ingénieur, 105, quai d'Orsay, Paris (7e).

DELCOURT (P.), professeur au Lycée Janson-de-Sailly, 17, rue Louis-Braille, Paris (12e).

Mme DELCOURT.

DELENS (Ch.), professeur au Lycée, 3, rue de la Courte-Côte, Le Havre.

Mme DELENS.

DEMOULIN, professeur à l'Université, 10, rue Joseph-Plateau, Gand.

Mme DEMOULIN.

DENJOY (A.), professeur aux Universités de Strasbourg et d'Utrecht, 12 *bis*, Stations-straat, Utrecht.

DERUYTS, professeur à l'Université, 37, rue Louvrex, Liège.

Mme DERUYTS.

MM.

DESFORGES (J.), professeur au Lycée, Nantes.

Mme DESFORGES.

DICKSON (L.-E.), professeur à l'Université, Chicago.

DONDER (Th. DE), professeur à l'Université, 11, rue Forestière, Bruxelles.

DRACH (Jules), professeur à la Sorbonne, 33, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, Paris (5e).

DUBECQ, professeur à l'Université, 46, Reconquista, Buenos-Ayres.

DUCROT, éditeur, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6e).

DUMAS (G.), professeur à l'Université, avenue Mont-Saint-Charmant, Bethusy-Lausanne.

DUSL (Charles), professeur à l'École polytechnique de Prague.

EISENHART (L.-P.), professeur à l'Université Princeton.

ERRERA (A.), docteur ès sciences, 1039, chaussée de Waterloo, Uccle (Bruxelles).

Mme ERRERA.

FARID-BOULAD, ingénieur des Chemins de fer de l'État, Le Caire.

FEHR (H.), doyen de la Faculté des sciences, 110, Florissant, Genève.

FINOT (M.), professeur au Lycée, 34, rue des Moissons, Reims.

Mme FINOT, Mlle FINOT.

FONTVIOLANT (B. DE), professeur à l'École Centrale, 167, avenue de Wagram, Paris (17e).

Mme DE FONTVIOLANT, Mlle DE FONTVIOLANT.

FOUET (A.), professeur à l'Institut catholique, 17, rue Le-Verrier, Paris (6e).

FRÉCHET (M.), professeur à l'Université, 2, quai Jacoutot, Strasbourg-Robertsau.

Mme FRÉCHET.

FUETER, professeur à l'Université, 34, Registrasse, Zurich.

GALBRUN, docteur ès sciences, 14, avenue Émile-Deschanel, Paris (7e).

MM.

GALDEANO (G. DE), professeur à l'Université, 5, calle de Cervantes, Saragosse.

GERARDIN (A.), 32, quai Claude-Le-Lorrain, Nancy.

GODEAUX (Lucien), professeur à l'École militaire, 10, avenue de l'Opale, Bruxelles.

GOT (Th.), docteur ès sciences, rue du Dragon, Paris (6e).

Mlle GOT.

GOURSAT (E.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 11 *bis*, rue de Navarre, Paris (5e).

M. J. GOURSAT.

GREENHILL (G.), professeur à l'Université, 1, Staple Inn, Londres.

GROSSMANN (M.), professeur à l'École polytechnique, 14, Holderstrasse, Zurich 7.

GUILLAUME (E.), docteur ès sciences, 12, Dittlingerweg, Berne.

GULDBERG (A.), professeur à l'Université, Sorkedalsvei « Spei », Christiania.

Mme GULDBERG.

HAALMEYER (B.-P.), 3de Wetering Dwarsstrat, 32, Amsterdam.

HADAMARD (Jacques), membre de l'Institut, professeur au Collège de France, 25, rue de Humboldt, Paris (14e).

HAHN, professeur au Lycée, Strasbourg.

HANSEN (Ch.), professeur à l'Université, 43, Borups Allée, Copenhague.

HATZIDAKIS, professeur à l'Université, 29, rue Xénocrate, Athènes.

HEYWOOD (Bryon), docteur ès sciences, 44, Manor Way, Ruislip, Middlesex.

HOSTINSKY (B.), professeur à l'Université, 40, Moravska, Prague-Vinohrady.

HRUSKA (Vaclar), professeur à l'École polytechnique, 1400, Chorvatska, Prague-Vinohrady.

HUSSON (E.), professeur à la Faculté des sciences, 107 *bis*, rue Isabey, Nancy.

Mme HUSSON.

MM.

IREYRE (J.-M. Plans), professeur à l'Université, 5, Glorietto-Bilbao, 3e, Madrid.

IVANISSEVICHT (Ludovico), ingénieur civil, Mendoza.

JANET (Maurice), professeur à l'Université, 5, rue du Lycée, Grenoble.

JONESCU (Jon), ingénieur, 43, Calusei, Bucarest.

JORDAN (C.), membre de l'Institut, 46, rue de Varenne, Paris (7e).

JUVET (G.), 10, avenue du Premier-Mars, Neuchâtel.

KIRCKMANN (J.-P.), professeur à l'Université de Cambridge, 64, Kimbolton Road, Bedford.

KOENIGS (G.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 77, rue du Faubourg-Saint-Jacques, Paris (14e).

KÜHM, professeur au Lycée, 76, faubourg National, Strasbourg.

LANCELIN (F.), astronome à l'Observatoire, 3, rue Boissonade, Paris (14e).

LARMOR (J.), professeur à l'Université, St John's College, Cambridge.

LAUREL (Bernardo), ingénieur, 72, Entre Ríos, Buenos-Ayres.

LEAU, professeur à l'Université, 8, rue Montesquieu, Nancy.

LEBESGUE (H.), professeur à la Sorbonne, 35 *bis*, rue Saint-Sabin, Paris (11e).

LEBEUF (A.), directeur de l'Observatoire, Besançon.

Mme LEBEUF.

LEFEBVRE, colonel du Génie, professeur à l'École militaire, 56, rue d'Oultremont, Bruxelles.

Mme LEFEBVRE.

LEFSCHETZ (S.), professeur à l'Université de Kansas, 937, Missouri Street, Lawrence (Massachusetts).

Mme LEFSCHETZ.

LE ROUX, professeur à l'Université, 13, rue de Châteaudun, Rennes.

MM.

LEWIS (T.-C.), West-House, West-Road, Cambridge.

LIÉNARD, sous-directeur de l'École des Mines, 60, boulevard Saint-Michel, Paris (6e).

MAILLARD (L.), professeur à l'Université, Les Sorbiers, Chailly-Lausanne.

MAILLET (E.), professeur à l'École des ponts et chaussées, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine (Seine).

MALTEZOS (C.), professeur à l'Université, 29 *bis*, rue Capodistria, Athènes.

MALUSKY, proviseur du Lycée de Versailles.

MARCHENA (DE), ingénieur, 16, avenue de la Pépinière, Paris.

MASSON (Mlle Renée), actuaire, 63, avenue des Champs-Élysées, Paris (8e).

MENDIZABAL-TAMBORREL (Dr G. DE), 5 *a*, calle de M. Doblado, 67, Mexico, D. F. (Mexique).

MERLIN (E.), professeur à l'Université, Gand.

Mme MERLIN.

MILON (P.), 23, rue du Palais, Dijon.

MOMAL, professeur au Lycée, 15, quai Zorn, Strasbourg.

MONTEL (P.). professeur à la Sorbonne. 57, boulev. de Vaugirard, Paris (15e).

MORETA (E.-M. DE), ingénieur, 37, Florida, Ermita-Manila.

MOSER (Ch.), professeur à l'Université, 14, rue de Bonstetten, Berne.

Mlle MOSER.

MURRAY (F.-H.). 21, rue de Tournon, Paris (6e).

MYLLER (A.), professeur à l'Université, Jassy.

Mme MYLLER.

NÉCULCÉA, professeur à l'Université, Jassy.

NIELSEN (N.), doyen de l'Université, Copenhague.

MM.

NIEWENGLOWSKI, inspecteur général honoraire de l'enseignement secondaire, 35, rue de l'Arbalète, Paris (5e).

Mme NIEWENGLOWSKA.

NÖRLUND (N. E.), professeur à l'Université, Lund (Suède).

Mme NÖRLUND.

OBESO (J.-M.), professeur à l'Université commerciale, 1, Apartado, Bilbao.

OCAGNE (M. D'), professeur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie, Paris (15e).

OGURA (K.), professeur à l'Université, Osaka (Japon).

OZIL (F.), professeur au Lycée de Toulon, villa la Violette, Tamaris-sur-Mer (Var).

Mme OZIL.

PASQUIER (G. DU), professeur à l'Université, 33, Sablons, Neuchâtel (Suisse).

Mme DU PASQUIER.

PASTOR (Julio Rey), professeur à l'Université, 8, Santa Teresa, Madrid.

PÉRÈS (J.), professeur à l'Université, 39, rue du Maréchal-Foch, Strasbourg.

PERRIER (Albert), professeur à l'Université, place du Château, Lausanne.

PETR, professeur à l'Université, Prague.

PETRIK (Joseph), professeur à l'École technique supérieure, Prague.

PICARD (E.), Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences, 25, quai de Conti, Paris (6e).

Mme E. PICARD.

PINEDA (Pedro), professeur à l'Université, Saragosse.

PIRON, professeur à l'École normale, 23, rue Ledeganck, Gand.

POMPEIU (D.), professeur à l'Université, Bucarest.

PONT (Mlle), Volnay par Pommard (Côte-d'Or).

MM.

PRASAD (G.), professeur à l'Hindu-University, Bénarès.

RADL, professeur à l'École polytechnique, 28, Budecska, Prague-Vinohrady.

RATEAU (A.), membre de l'Institut, 10 *bis*, avenue Élisée-Reclus, Paris (7e).

REMOUNDOS (G.), professeur à l'Université, 54, rue Spyridion Tricoupis (Athènes).

RIABOUCHINSKI, villa Eici-Alde, Camboles-Bains (Basses-Pyrénées).

Mme RIABOUCHINSKA.

RICHARD (J.), professeur au Lycée, 101, rue de Strasbourg, Châteauroux (Indre).

ROBSON (A.), Marlborough College, 3, Park Street, Marlborough, Wilts.

RODE (H.), professeur à l'Ecole technique supérieure, Trondhjem (Norvège).

ROSENBLATT, professeur à l'Université, Cracovie.

ROSS (A.-David), professeur à l'Université, Perth (Australie).

RUEDA (Cecilio Ximenez), professeur à l'Université, 87, rue San Bernardo, Madrid.

RYCHLIK (Karl), professeur à l'École polytechnique, 66, Slezka, Prague-Vinohrady.

RYSAVY, professeur à l'École technique supérieure, Prague.

SAKELLARIOU (Nilos), professeur à l'Université, 96, rue Asklepiou, Athènes.

SANTOS LUCAS (Antonio DOS), professeur à l'Université, 109, rue Cambo-d'Ourcque, Lisbonne.

SARTRE, 45, rue d'Ulm, Paris (5e).

SCHIELDROP (Edgar B.), Assoc. professor Norwegian Inst. of Technol. Trondhjem.

SCHOENBAUM (E.), professeur à l'Université, 1, Trojicka, Prague.

SCHOGT (J.-H.), 46a, Saxen-Wamirlaan, Amsterdam.

MM.

SCHWOERER (E.), Correspondant de l'Institut, 12, rue Schlumberger, Colmar (Haut-Rhin).

Mme SCHWOERER, Mlle SCHWOERER.

SMITH (D.-E.), Président de la Math. Association of America, Colombia University, New-York (États-Unis).

Mme SMITH.

SOBOTKA (G.), professeur à l'Université, Prague-Vinohrady, U. Havlickovych Sadu, 15 (Tchéco-Slovaquie).

SPARRE (M. DE), professeur à la Faculté catholique, correspondant de l'Institut, 2, place Saint-Jean, Lyon.

SPIESS (O.), professeur à l'Université, 14, Kornhausgasse, Bâle.

STOÏLOW, professeur à l'Université, Jassy.

STÖRMER, (C.), professeur à l'Université, 33, Stuck Avenue, Bygdo, Christiania.

Mme STÖRMER.

SVOBODA (Henri), professeur à l'Université de Prague.

TAKAGI, professeur à l'Université de Tokio.

TAYLOR (J.-S.), prof. Massach. Institut of Technology (Dep. of Math.), Cambridge (Massachusetts).

THIRY (R.), professeur à l'Université, 36, rue de l'Université, Strasbourg.

Mme THIRY.

TOLEDO (Octavio DE), doyen de la Faculté des sciences, 28, rue Velasquez, Madrid.

TONDU (Charles), ingénieur des ponts et chaussées à Tizi-Ouzou (Algérie).

Mme TONDU.

TRAYNARD (E.), professeur à l'Université de Besançon, Sommières (Gard).

Mme TRAYNARD, Mlle MÉJEAN.

TRIPIER (H.), sous-directeur de l'École Centrale, 17, rue Alphonse-de-Neuville, Paris (17e).

TYPPA, ingénieur, Belgrade.

UDE (José G. Alvarez), professeur à l'Université, 17, Fernando VI, Madrid.

MM.

VALIRON (G.), professeur à l'Université, 52, aven. de la Robertsau, Strasbourg.
Mme VALIRON.

VALISESCU (Karpen), professeur à l'École polytechnique, Bucarest (Roumanie).

DE LA VALLÉE-POUSSIN (Cl.), professeur à l'Université, 49, avenue des Alliés, Louvain.

VANDERLINDEN, assistant à l'Observatoire, Uccle (Belgique).

VAROPOULOS, 45, rue d'Ulm, Paris (5e).

VASCONCELOS (F. DE), professeur à l'Institut agronomique, 15, Patio do Lencastre, Lisbonne.
Mme DE VASCONCELOS, MM. DE VASCONCELOS.

VERDE, commandant, La Spezzia (Italie).

VÉRONNET, astronome à l'Observatoire, 29, rue Wimpfelling, Strasbourg.

VESSIOT (E.), sous-directeur de l'École Normale, 45, rue d'Ulm, Paris (5e).

VIAUD (Mlle Jeanne), professeur au Collège de jeunes filles, Sarreguemines.

VILLAT (H.), professeur à l'Université, 11, rue du Maréchal-Pétain, Strasbourg.
Mme H. VILLAT.

VOGT (H.), professeur à l'Université, 33, rue du Grand-Verger, Nancy.
M. A. VOGT.

MM.

VOLTERRA (V.), Sénateur du Royaume, membre de l'Institut, professeur à l'Université, 17, via in Lucina, Rome.

WALSH (J.-L.), étudiant à l'Université Harvard, Cambridge (Massachusetts).

WAVRE (R.), 46, rue de l'Arbre-Sec, Paris (1er).

WEISS (P.), Correspondant de l'Institut, professeur à l'Université, 2, boulevard Déroulède, Strasbourg.

WHITTAKER (E.-P.), professeur à l'Université, 35, Georges Square, Edinburg (Écosse).
M. J.-M. WHITTAKER.

WIENER (Norbert), Instructor of Math., Institute of Technology, Cambridge (Massachusetts).

WILLIGENS (Ch.), 54, Marktgasse, Interlaken.

WINTER (M.), 66, avenue d'Iéna, Paris (16e).

YOUNG (W.-H.), professeur à l'Université d'Aberystwith (Wales), La Conversion, Vaud (Suisse).

ZAREMBA (S.), professeur à l'Université de Cracovie, Warszawskie, 6, rue Zytnia.

ZERVOS (P.), professeur à l'Université, 88, rue Sozopoulos, Athènes.
Mlle ZERVOS.

COLLECTIVITÉS

Real Accademia de Ciencias Exactas, Físicas et Naturales, 26, rue Valverde, Madrid.

École spéciale d'Ingénieurs des Mines, 4, rue Francisca, Madrid.

École Sainte-Geneviève, 2, rue de la Vieille-Église, Versailles.

Institut de Mathématiques, Palais de l'Université, Strasbourg.

Real Istituto Superiore di Studi Commerciali, Gênes.

Sociedad científica Antonio-Alzuti, Mexico; D. F.

Sociedad científica Argentina, 269, Cevallos, Buenos Aires.

RÉCAPITULATION PAR NATIONALITÉS

	Congressistes.	*Membres des familles.*	*Total.*
Angleterre	9	2	11
République Argentine	6		6
Australie	1		1
Belgique	10	4	14
Brésil	1		1
Canada	1		1
Danemark	3	1	4
Égypte	1		1
Espagne	10		10
États-Unis	11	4	15
France	80	32	112
Grèce	6	1	7
Hollande	5	1	6
Indes	2		2
Italie	5	2	7
Japon	2		2
Mexique	2		2
Norvège	4	2	6
Philippines	1		1
Pologne	2		2
Portugal	3	3	6
Roumanie	6	1	7
Russie	1	1	2
Serbie	1		1
Suède	1		1
Suisse	14	3	17
Tchéco-Slovaquie	12		12
	200	57	257

LISTE DES SOUSCRIPTEURS DU CONGRÈS

Ministère des Affaires étrangères	10.000f »
Commissariat général d'Alsace-Lorraine	7.000 »
Ville de Strasbourg	5.000 »
Chambre de Commerce de Strasbourg	1.000 »
Société des Amis de l'Université de Strasbourg	1.000 »
M. Camille Jordan, membre de l'Institut	500 »
M. Gabriel Kœnigs, membre de l'Institut	500 »
M. Émile Picard, Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences	500 »
Société de Diétrich (Niederbronn)	500 »
Société Générale Alsacienne de Banque	1.000 »
Minoteries Alsaciennes	200 »
Société Ungemach (Strasbourg)	200 »
Société des Moulins d'Illkirch	1.000 »
Brasserie Grüber (Strasbourg)	100 »
Brasserie du Pêcheur (Schiltigheim)	100 »
M. Lamotte (Rombach-le-Franc)	500 »
Les petits-fils de François de Wendel	1.000 »
M. H. Schloesing (Niederbronn)	100 »
Société des Mines de Péchelbronn	500 »
Société Alsacienne de Constructions mécaniques de Graffenstaden	500 »
Crédit Lyonnais	200 »
M. E. Schwoerer, corresp. de l'Institut, 12, rue Schlumberger, à Colmar.	1.200 »
Société Cotonnière de Mulhouse	500 »
M. Wick, 10, rue des Charpentiers, à Mulhouse	50 »
M. Charles André (Massevaux)	100 »
M. Edm. Schlumberger (Mulhouse)	100 »
M. Godefroy Schlumberger (Mulhouse)	100 »
Manufacture d'Outils de Mutzig	500 »
Comptoir National d'Escompte	200 »
M. Léon Brunschvicg, membre de l'Académie des Sciences morales et politiques, professeur à la Sorbonne	100 »
M. M. Gros, Roman (Wesserling)	1.000 »
M. Edmond de Rotschild, membre de l'Académie des Beaux-Arts	3.000 »
M. Camille de Lacroix (Mulhouse)	500 »
Filature de Malmerspach	1.000 »
Manufacture d'Outils de Zornhoff (par Saverne)	500 »
M. Auguste Lauth-Scheurer (Thann)	100 »
M. Jules Scheurer, sénateur du Haut-Rhin	100 »
A reporter	40.450 »

Report	40.450	»
M. Albert Scheurer (Thann)	100	»
Société Poulenc frères (Paris)	500	»
Société des Forges de Strasbourg	500	»
M. Solvay, à Bruxelles	5.000	»
Société des Forces Motrices du Haut-Rhin (Mulhouse)	500	»
M. M. Koechlin, Dessaulles et Cie, à Mulhouse	500	»
M. Louis Lumière, membre de l'Institut	300	»
M. Quiri (Schiltigheim)	300	»
Filature de laines peignées d'Erstein	300	»
Magasins Modernes (Strasbourg)	100	»
M. A. Kiener, Président de la Chambre de Commerce de Colmar	500	»
Société d'Électricité de Strasbourg	1.000	»
M. Ernest Schneider (Koenigshoffen)	100	»
Société du Gaz de Strasbourg	250	»
M. Becker (Grands Moulins de la Ganzau), à Strasbourg	100	»
Monseigneur Ruch, évêque de Strasbourg	25	»
M. Jacob Holtzer (Forges et Aciéries d'Unieux, M. Beghin, directeur)	300	»
Droguerie Centrale de l'Est, Strasbourg (M. H. Hofstetter)	100	»
Banque Nationale de Crédit	1.000	»
Filature de Guebwiller	100	»
Société La Chaussure Strasbourgeoise	100	»
Société des Mines de la Houve	500	»
Filature de Colmar	500	»
M. V. Hoehl et Cie (Strasbourg-Robertsau)	100	»
M. M. Scheurer-Lauth et Cie (Thann)	500	»
M. Camille Schlumberger (Ribeauvillé)	500	»
M. de Langenhagen (Saar-Union)	50	»
M. M. Vernes et Cie, banquiers à Paris	500	»
Mlle Méquillet (Colmar)	500	»
Tonnellerie mécanique Frühinholtz (Schiltigheim)	100	»
Aciéries de Micheville (Meurthe-et-Moselle)	500	»
MMmes de Neufville (Colmar)	150	»
Forges et Aciéries de Commercy	500	»
Mines de Bouxwiller	200	»
Faïenceries de Niderwiller	100	»
MM. Zeller frères, à Oberbrück	500	»
M. A. Rateau, membre de l'Institut	200	»
Société « La Prévoyance » Assurances contre les Accidents	100	»
M. Henri Bernheim (Paris)	1.000	»
M. Henri Villat, professeur à l'Université de Strasbourg	450	»
M. Vincent, 68, boulevard de Courcelles, à Paris	200	»
Papeteries Bergès, à Lancey (Isère)	500	»
M. M. Leflaive et Cie, à Saint-Étienne	100	»
Compagnie de Navigation Paquet (Marseille)	500	»
Chantiers Augustin Normand (Le Havre)	200	»
Banque d'Alsace-Lorraine (Strasbourg)	1.000	»
Distillerie Cusenier	200	»
M. de Witt-Guizot (château d'Ottrott)	100	»
Filature et Tissage Haussmann (Logelbach)	500	»
A reporter	62.375	»

	Report.....	62.375 »
M. Xavier Léon, Directeur de la « Revue de Métaphysique et de Morale ».		50 »
Général Taufflieb, sénateur du Bas-Rhin.....		100 »
Société des Cigarettes Job.....		100 »
MM. N. Schlumberger et Cie, à Guebwiller.....		1.000 »
M. Gilet, industriel, à Lyon (Rhône).....		1.000 »
M. Alfred Bernheim (Paris).....		1.000 »
Comptoir des Textiles artificiels, 16, rue du Louvre, à Paris		1.000 »
Société Alsacienne de Constructions Mécaniques de Belfort.....		1.000 »
Ateliers de Constructions Mécaniques Escher, Wiss et Cie (Zurich).....		100 »
Fonderies et Lamineries Marcel Bassot, 14, rue de Turenne, à Paris....		50 »
Société Commentry, Fourchambault et Décazeville, 64, rue de Lille, à Paris (VIIe).....		300 »
M. A. de Marchena, ingénieur, 16, rue de la Pépinière, à Paris.....		200 »
MM. Krieg et Zivy, Métaux perforés, 21, rue Barbès, à Montrouge		200 »
Société des Ciments Portland de Lorraine.....		500 »
Forges de Châtillon, Commentry et Neuves-Maisons, 19, rue de La Rochefoucault, à Paris (IXe).....		500 »
Banque Staehling, Valentin (Strasbourg).....		1.000 »
Séquestre général des Mines de Potasse d'Alsace.....		1.000 »
M. Louis Stephan, à Koenigshoffen.....		50 »
MM. Hofer et Cie, à Ribeauvillé.....		200 »
Filature de Sélestat.....		200 »
Société Lorraine de Dietrich, à Lunéville.....		500 »
MM. A. Giros et Cie, 56, rue du Faubourg-Saint-Honoré, à Paris.....		300 »
M. Frédéric Jacquel, à Natzwiller.....		200 »
M. Gaston Blum, ingénieur, 131, boulevard Malesherbes, à Paris		50 »
M. Paul Lévy-Salvador, ingénieur, 1, rue de Liège, à Paris.....		50 »
MM. Paul et Jules Lacour, à Sainte-Marie-aux-Mines.....		600 »
MM. Durand et Huguenin, Société Anonyme, à Bâle		200 »
Raffinerie et Sucrerie Say, 123, boulevard de la Gare, à Paris		1.000 »
Papeteries Schwindenhammer, à Turckheim		200 »
Société des Hauts-Fourneaux et Fonderies de Pont-à-Mousson.....		200 »
M. Jules Schaller, 27, Haute-Montée, à Strasbourg		100 »
Banque de Mulhouse.....		1.000 »
M. Jules Binder, à Colmar.....		500 »
Société des Tuileries Gilardoni, 25, rue Decamps, à Paris.....		300 »
Société Saint-Gobain, à Paris.....		1.000 »
Banque de France.....		3.000 »
Filature Engel, à Mulhouse.....		200 »
Société Minière des Terres Rouges, à Audun-le-Tiche (Moselle).....		1.000 »
École Centrale des Arts et Manufactures de Paris.....		1.000 »
M. Oscar Bernheim, 4, rue de Castelnau, à Colmar		200 »
	Total.....	83.525f »

Nous transcrivons ci-dessous les indications générales (programmes, dispositions, règlements) qui furent élaborées par le Comité d'organisation.

PROGRAMME DU CONGRÈS

MERCREDI 22 SEPTEMBRE

9 heures. — Séance officielle d'ouverture sous la présidence de E. Charléty, Recteur de l'Université de Strasbourg, représentant M. Alapetite, Commissaire Général de la République (Salle des Fêtes de l'Université, Palais principal, 1er étage).

11 heures. — Visite de l'Université.

15 h. 1/2. — Première séance plénière (Salle des Fêtes). Constitution du Bureau définitif, nomination du Président, des Vice-Présidents, des Secrétaires, etc.

20 h. 1/2. — Réception des Membres du Congrès par le Comité d'organisation (Salle des Fêtes).

(La façade de l'Université illuminée par les soins gracieux de la Société « Force et Lumière » de Strasbourg).

JEUDI 23 SEPTEMBRE

De 9 à 12 heures. — Séances ordinaires des diverses Sections.

De 8 à 12 heures. — Visite des quatre Musées, en groupes, sous la direction de membres de la Société des Sciences du Bas-Rhin.

14 h. 1/2. — Conférence générale de Sir J. Larmor (Salle des Fêtes).

16 h. 1/2. — Thé offert par la Société des Amis de l'Université, 2, rue Geiler. Allocutions de M. de Witt-Guizot au nom de la Société, de M. E. Picard, au nom des Congressistes.

20 heures. — Conférence de M. A. Ungerer « Sur l'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg[1] ».

VENDREDI 24 SEPTEMBRE

De 9 à 12 heures. — Séances ordinaires des Sections.

10 heures. — Visite du Mausolée du Maréchal de Saxe.

11 heures. — Visite de la Cathédrale. (Ces deux visites sous la conduite de membres de la Société des Sciences du Bas-Rhin.)

14 h. 1/2. — Conférence générale de M. Dickson (Salle des Fêtes).

17 h. 1/2. — Réception officielle à l'Hôtel-de-Ville (thé). Allocution de M. H. Lévy au nom de la ville de Strasbourg, de M. G. Koenigs et de M. C. de la Vallée-Poussin au nom des Congressistes. Mme Jeanne Clapier, de l'Académie de Vaucluse, récite une Ode « Salut à Strasbourg » de la plus belle inspiration.

20 h. 1/2. — Séance organisée en l'honneur du Congrès par la Société des Sciences du Bas-Rhin (Salle de l'Aubette, place Kléber). Programme : Conférence de M. le Général Taufflieb, Sénateur, sur : « La Science en Alsace »; Allocutions, Concert.

SAMEDI 25 SEPTEMBRE

De 9 heures à 10 h. 1/2. — Séances ordinaires des Sections.

10 h. 1/2. — Conférence générale de M. de la Vallée-Poussin (Salle des Fêtes).

De 14 heures à 16 h. 1/2. — Séances ordinaires des Sections.

17 heures. — Réception officielle (thé) au Commissariat Général de la République (rue Brûlée).

DIMANCHE 26 SEPTEMBRE

Excursion à Sainte-Odile.

---

1. Un résumé de cette Conférence est publié plus loin dans les Comptes-Rendus, Section IV, pp. 656 et suiv.

LUNDI 27 SEPTEMBRE

De 9 heures à 10 h. 1/2. — Séances ordinaires des Sections.

10 h. 1/2. — Conférence générale de M. V. VOLTERRA.

14 h. 1/2. — Excursion en bateau sur le Rhin, visite des ports de Strasbourg et de Kehl (Excursion offerte gracieusement par la Direction générale des Ports).

MARDI 28 SEPTEMBRE

De 9 à 12 heures. — Séances ordinaires des Sections.

14 h. 1/2. — Conférence générale de M. NÖRLUND (Salle des Fêtes).

17 heures. — Séance officielle de clôture, dans la Salle des Fêtes, sous la présidence de M. ALAPETITE, Commissaire Général de la République.

19 heures. — Banquet offert par le Comité d'Organisation.

MERCREDI 29 SEPTEMBRE

Excursion à Saverne (le Hohbar).

JEUDI 30 SEPTEMBRE

Excursion au Linge (Turckheim, le Kayserberg, les Trois-Épis, etc.).

DISPOSITIONS GÉNÉRALES

(Reproduites d'après le texte remis à chaque Congressiste.)

Le lieu du Congrès est le Grand Palais de l'Université (place de l'Université).

Salle du Secrétariat général. — Du 22 septembre au 28 inclus, sauf le dimanche 26, les bureaux du Secrétariat général seront ouverts aux Membres du Congrès de 9 à 12 heures et de 14 heures à 18 h. 1/2, dans la Salle de Dessin de l'Institut de Mathématiques (Rez-de-Chaussée, salle 9; — consulter le plan affiché à l'entrée de l'Université).

Les Membres trouveront au Secrétariat tous les renseignements qu'ils pourront désirer.

Ceux des Membres qui ne posséderaient pas encore leurs cartes sont priés de se les procurer au Secrétariat.

Les Membres du Congrès sont priés d'enregistrer leurs adresses ou changements d'adresse au Secrétariat.

Les lettres, télégrammes, etc., adressés aux Membres du Congrès sans indication d'adresse particulière seront centralisés au Secrétariat, où les Congressistes pourront les retirer.

Salle de Correspondance. Télégraphe. Téléphone. — Une vaste Salle de Correspondance est installée dans la salle n° 31 (voir le plan). Les Congressistes y trouveront gratuitement les cartes, papiers à lettres, etc.; un téléphone sera à leur disposition dans cette salle; on trouvera également dans la même salle le service ordinaire des Bureaux de Poste, à l'exception du service des mandats, de la caisse d'épargne et des chèques postaux. Le dimanche 26 ce service postal sera fermé.

Dactylographie. — Toutes facilités pour travaux de dactylographie seront procurées par le Secrétariat. Ces travaux seront exécutés aux prix courants sous la direction de M^lle^ Kuhm, dactylographe de l'Université.

Salle de lecture. — La Salle de lecture de l'Université (journaux et périodiques généraux; voir le plan) sera ouverte aux Membres du Congrès sur présentation de leur carte de Congressiste, chaque jour de 9 à 12 heures et de 14 à 19 heures, et, le dimanche, seulement de 10 à 12 heures.

Bibliothèques. — La Bibliothèque de l'Institut de Mathématiques est à la disposition des Congressistes (s'adresser au Secrétariat).

La Bibliothèque de l'Université (place de la République) est ouverte le matin de 8 h. 1/2 à 12 heures, sauf le dimanche.

Bureau des Excursions. — Le Bureau des Excursions est ouvert dans la Salle du Secrétariat chaque jour de 9 à 12 heures et de 14 à 17 heures.

Pour les grandes excursions (Sainte-Odile, Saverne, Le Linge) se faire inscrire au Bureau *avant le 23 mai au soir* au plus tard; les tickets de chemin de fer devront être retirés le samedi 25 entre 9 et 17 heures.

Pour l'excursion aux ports de Strasbourg et de Kehl, se faire inscrire *avant le 24 au soir*.

Repas. — Les Congressistes officiers de réserve dans une Armée alliée sont avisés qu'ils peuvent prendre leurs repas au Cercle des Officiers, place Broglie.

Hôtels. — Les Congressistes sont avisés que la plupart des Hôtels perçoivent une légère majoration sur le prix des chambres lorsque les repas sont pris en dehors de l'Hôtel même.

Banquet d'adieu. — Le Comité d'organisation a le plaisir d'offrir aux Congressistes un Banquet d'adieu le 28 septembre, à 19 heures, au Bæckehiesel. Il prie les Congressistes qui veulent se rendre à cette invitation, de bien vouloir se faire inscrire au Secrétariat général *avant le 23 septembre à 12 heures*. Bien entendu, l'invitation s'adresse à tous les Congressistes, quelle que soit la cotisation versée.

Tableau d'affichage. — Les Membres du Congrès sont priés de consulter souvent le tableau d'affichage placé à côté de la porte du Secrétariat général. Toutes les Communications urgentes seront portées par cette voie à la connaissance des Congressistes.

RÈGLEMENT INTÉRIEUR DU CONGRÈS

I. — Les Séances générales seront présidées par le Président du Congrès ou par un des Vice-présidents.

II. — La première réunion de chaque Section sera présidée par un des Introducteurs désignés par le Comité d'organisation. A cette première réunion la Section nommera un ou plusieurs Secrétaires, qui seront chargés de recueillir les délibérations pendant toute la durée du Congrès. A chaque séance les Membres de la Section éliront le Président de la séance suivante.

III. — L'ordre des Communications inscrites à chaque séance sera fixé par le Comité d'organisation, qui tiendra dans ce choix le compte le plus grand possible des vœux exprimés par les différentes Sections.

IV. — L'exposé d'une Communication ne devra pas dépasser vingt minutes. Pendant la discussion, un orateur ne pourra pas prendre la parole pendant plus de dix minutes, ni plus d'une fois sur le même sujet, sauf autorisation spéciale du Président.

V. — Les Conférences et Communications présentées au Congrès seront réunies dans le volume des *Comptes-Rendus du Congrès International de Strasbourg*. Les manuscrits devront être remis par MM. les Auteurs entre les

mains du Comité de rédaction (composé de MM. PICARD, KŒNIGS, GALBRUN, et VILLAT) **au plus tard le jour même** où la Communication sera inscrite à l'ordre du jour d'une séance.

VI. — Les manuscrits devront être très lisibles, autant que possible tapés à la machine (à l'exception des formules), et obligatoirement à la machine s'ils sont rédigés dans une langue autre que le français.

VII. — MM. les Auteurs sont priés de remettre **un très court résumé** de leurs Communications, entre les mains du Comité de rédaction, **au plus tard la veille** du jour où ces Communications viendront en séance.

VIII. — Le Comité de rédaction rappelle qu'il se réserve le droit de n'imprimer qu'un résumé de certaines Communications.

IX. — Les Auteurs qui demanderont à faire des modifications de grande importance sur leurs manuscrits en cours d'impression, devront supporter les frais des susdites modifications.

SÉANCE D'OUVERTURE DU CONGRÈS

Cette séance a eu lieu le 22 septembre, à 9 heures du matin, dans la grande Salle des fêtes du palais de l'Université, devant un public comprenant à la fois les Congressistes et un certain nombre de notabilités alsaciennes de Strasbourg et de la région.

La séance était présidée par M. S. Charléty, Recteur de l'Académie de Strasbourg, représentant M. Alapetite, Commissaire général de la République, retenu ailleurs par les devoirs de sa charge. M. S. Charléty prononce un discours de bienvenue au nom du Gouvernement et au nom de l'Université.

Prennent ensuite la parole :

M. Henri Levy, Adjoint au Maire, qui salue les Congressistes au nom de la ville de Strasbourg;

M. Émile Picard, Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences, au nom de l'Académie des Sciences et du Comité National Français des Mathématiciens;

M. Henri Villat, Professeur à l'Université de Strasbourg, au nom de la Faculté des Sciences de Strasbourg et au nom du Comité d'organisation du Congrès.

M. G. Kœnigs, Secrétaire général du Congrès, donne lecture de la liste des délégations officielles.

M. W.-H. Young prend la parole au nom des Congressistes anglais;

M. C. de la Vallée-Poussin, au nom de la Belgique;

M. N.-E. Nörlund, au nom du Danemark;
M. L.-E. Dickson, au nom des États-Unis d'Amérique;
M. G. Remoundos, au nom de la Grèce;
M. V. Volterra, au nom de l'Italie;
M. Takagi, au nom du Japon;
M. Störmer, au nom de la Norvège;
M. da Costa-Lobo, au nom du Portugal;
M. Typpa, au nom de la Serbie;
M. Crelier, au nom de la Suisse;
M. Bydzowsky, au nom de la Tchéco-Slovaquie.

Nous donnons ci-dessous le texte du discours de M. Émile Picard.

ALLOCUTION DE M. ÉMILE PICARD

Mesdames, Messieurs,

Au nom du Comité National Français de mathématiques et du Comité d'organisation de ce Congrès, je remercie M. le Commissaire Général d'avoir bien voulu se faire représenter à cette séance d'inauguration. En souhaitant la bienvenue aux amis de notre pays, qui ont répondu à notre appel, M. le Commissaire Général et M. le Recteur de l'Université ont montré l'intérêt que le gouvernement de la République porte aux progrès des sciences. Quand nous avons proposé de vous réunir à Strasbourg, nous avons pensé rendre hommage à la noble terre d'Alsace, revenue à cette patrie française, à laquelle la rattachent ses antiques origines et des sympathies restées toujours vivaces à travers les péripéties de son histoire. Nous avons aussi voulu honorer l'Université de Strasbourg, qui, depuis le seizième siècle, a compté tant de maîtres distingués. Les hommes éminents qui y enseignent aujourd'hui tiennent dignement le rôle que leur imposent les tragiques événements de ces dernières années, en faisant d'eux les pionniers de la culture généreuse et humaine que fut toujours la culture française. Nous prions le Conseil de l'Université d'agréer l'expression de notre gratitude pour la gracieuse hospitalité qu'il nous offre dans ce palais. Comment ne pas rappeler en ce lieu l'admirable conduite de tant de maîtres de notre enseignement dans la

guerre qui vient de finir; leur foi patriotique a contribué à la victoire commune, qui nous permet aujourd'hui de nous réunir dans la ville de Strasbourg. Je tiens à saluer particulièrement l'un des plus jeunes maîtres de cette Université, qui porte sur son visage les traces glorieuses de son héroïsme.

Nous sommes aussi très reconnaissants au Comité local, qui, sous l'active direction de M. Henri VILLAT, a eu la lourde charge de régler nos séances et d'organiser les réceptions et les promenades, dont le charme tempérera l'austérité de nos travaux. Nos collègues de Strasbourg ont considéré en effet qu'ils avaient le devoir de faire connaître à nos hôtes quelque chose de cette Alsace, dont le nom est devenu un symbole. Nous voulons espérer que tous les Congressistes en emporteront un touchant souvenir.

Il m'est enfin particulièrement agréable de remercier M. le Maire et M. le Président de la Chambre de Commerce de Strasbourg, ainsi que les représentants de nombreuses Sociétés alsaciennes et autres généreux bienfaiteurs de ce Congrès, dont les dons nous sont extrêmement précieux et permettront des publications témoignant de l'activité scientifique de cette réunion.

Dans un article récent, plein de remarques pénétrantes sur l'enseignement des mathématiques en divers pays, un professeur de cette Université évoquait le souvenir de deux mathématiciens, qui y enseignèrent jadis : SARRUS, dont le nom restera dans l'histoire du calcul des variations, et ARBOGAST, qui apparaît comme un précurseur du Calcul fonctionnel. J'ajouterai à ces deux noms de mathématiciens celui, peut-être inattendu, de PASTEUR. Le jeune savant, qui vint ici en 1849 enseigner la chimie, ne se montrait-il pas alors quelque peu géomètre? Les mémoires célèbres de PASTEUR sur l'hémiédrie et la polarisation rotatoire, qui datent de cette époque, relèvent de la géométrie : géométrie bien pittoresque d'ailleurs, où certains champignons microscopiques se montrent habiles mathématiciens, puisqu'ils savent distinguer, pour s'en nourrir, entre un cristal droit et un cristal gauche. C'est par la voie de la géométrie que PASTEUR est entré dans l'étude des fermentations. Strasbourg peut être fier d'avoir compté ce grand homme parmi ses maîtres.

Messieurs, c'est un des objets des Congrès, comme celui que nous inaugurons aujourd'hui, d'établir des relations personnelles entre les chercheurs qui cultivent la même science ou des sciences voisines. Après l'effroyable tourmente de ces dernières années, qui a rompu tant de liens, les rapprochements sont nécessaires entre savants qui s'estiment et qui, sans aucune

arrière-pensée, n'ont d'autre souci que le culte désintéressé de la vérité. Ils sont particulièrement utiles aux mathématiciens qui ont parfois montré quelque tendance à s'isoler dans des parties très limitées de leur science. De larges esquisses, faisant connaître l'état actuel de quelques grandes questions, doivent être un des attraits de réunions comme la nôtre, et peuvent exercer la plus heureuse influence. Les mathématiciens passent quelquefois pour des personnages un peu originaux, ensevelis dans leurs symboles et perdus dans leurs abstractions. Il importe que le public cultivé, de formation parfois trop exclusivement littéraire, ait une opinion plus juste à cet égard. Non, la mathématique n'est pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la philosophie naturelle.

Toute théorie physique, suffisamment élaborée, prend nécessairement une forme mathématique; il semble que les actions et réactions entre l'esprit et les choses ont amené peu à peu à former des moules où peut, partiellement au moins, s'insérer le réel. Certes, beaucoup de concepts créés par les mathématiciens n'ont pas trouvé encore d'applications dans l'étude des phénomènes physiques, mais l'histoire de la science montre qu'il était téméraire d'affirmer que telle ou telle notion ne sera pas un jour utilisée. Les géomètres aiment à rappeler le mot du grand mathématicien LAGRANGE, qui, comparant un jour les mathématiques à un animal dont on mange toutes les parties, disait : « Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon. »

Le métier de prophète est toujours dangereux. Quelques-uns pensent cependant que les applications des mathématiques seront surtout étudiées dans les années qui vont venir et que la théorie pure sera quelque peu négligée par les jeunes générations. Le temps où nous vivons devient en effet singulièrement dur dans tous les domaines pour les ouvriers de l'intelligence, et les plus optimistes se demandent parfois avec inquiétude si la civilisation, telle que nous sommes habitués à l'envisager, ne va pas subir une éclipse. Aussi ne devons-nous pas nous lasser de répéter que les spéculations théoriques sont en dernière analyse la véritable source de tous les progrès dans les sciences appliquées. Si par malheur la recherche désintéressée cessait d'être possible, le capital scientifique accumulé dans les âges antérieurs s'épuiserait rapidement, et l'on ne continuerait pas longtemps à vivre du parfum d'un vase vide, comme disait RENAN pour un autre objet. Quoi qu'il advienne, on trouvera toujours parmi les mathématiciens des incorrigibles

idéalistes, qui, semblables à la femme de l'Évangile, croiront avoir choisi la meilleure part en scrutant les propriétés de l'espace, et en analysant dans ses recoins les plus subtils l'idée de fonction; elle ne leur sera pas ôtée. C'est dans l'espérance que les mathématiques pures et les mathématiques appliquées continueront une collaboration féconde que nous commençons les travaux de ce Congrès, où de nombreuses Communications nous ont été promises, et où d'éminents géomètres voudront bien nous faire quelques Conférences générales sur les progrès et les tendances de la science qui nous est chère. Que tous ceux qui vont ainsi contribuer à l'éclat de cette réunion veuillent bien recevoir par avance les remerciements du Comité d'organisation.

SÉANCE DE CLOTURE DU CONGRÈS

Cette séance eut lieu le 28 septembre, à 17 heures, dans la Salle des Fêtes de l'Université, sous la présidence de M. ALAPETITE, Commissaire Général de la République, assisté de M. S. CHARLÉTY, Recteur de l'Université.

M. ALAPETITE ouvre la séance par une allocution dans laquelle il apprécie l'importance et la portée du Congrès, et félicite les Congressistes du résultat de leurs travaux.

M. E. PICARD, Président du Congrès, prononce le discours qu'on trouvera un peu plus loin.

M. G. KOENIGS, Secrétaire général du Congrès, lit le Rapport qu'on verra reproduit ci-dessous.

M. G. GREENHILL répond en exprimant les sentiments des Congressistes, au nom de l'Angleterre;

M. DEMOULIN prend ensuite la parole au nom de la Belgique;

M. N. E. NÖRLUND, au nom du Danemark;

M. J. REY-PASTOR, au nom de l'Espagne;

M. BUCK, au nom des États-Unis d'Amérique;

MM. ZERVOS et HATZIDAKIS, au nom de la Grèce;

M. BARRAU, au nom de la Hollande;

M. J. BOCCARDI, au nom de l'Italie;

M. GULDBERG, au nom de la Norvège;

M. DA COSTA LOBO, au nom du Portugal;

M. MYLLER, au nom de la Roumanie;

M. RIABOUCHINSKI, au nom de la Russie;

M. CRAMER, au nom de la Suède;

M. G. DU PASQUIER, au nom de la Suisse;

M. BYDZOWSKY, au nom de la Tchéco-Slovaquie.

A 19 heures, un Banquet, offert aux Congressistes et à leurs familles par le Comité d'organisation, réunissait, au restaurant du Baeckehiesel, les Congressistes eux-mêmes, et un certain nombre d'invités choisis; ce banquet, présidé par M. ALAPETITE, fut animé de la plus franche et cordiale gaieté.

ALLOCUTION DE M. ÉMILE PICARD

MONSIEUR LE COMMISSAIRE GÉNÉRAL,

Au nom des Congressistes, je remercie le Gouvernement français, dont vous êtes ici le représentant, de l'intérêt qu'il a pris à cette réunion internationale. Nous sommes heureux de saluer dans cette séance de clôture l'administrateur éminent qui, dans sa brillante carrière, s'est toujours montré à la hauteur des situations les plus délicates, et qui continue dignement ici la tâche commencée par son illustre prédécesseur, que la confiance du Parlement, et, on peut le dire, du pays vient d'élever à la Présidence de la République.

MESDAMES, MESSIEURS,

Quand la réunion à Strasbourg d'un Congrès international de mathématiques fut définitivement annoncée au mois de décembre dernier, quelques personnes timorées nous représentèrent que l'entreprise était prématurée. La question était cependant loin d'être nouvelle. La reprise des relations internationales avait été étudiée longuement à Londres et à Paris en octobre et novembre 1918 dans deux conférences inter-académiques, où figuraient des représentants des puissances alors en guerre avec les Empires centraux. Dans ces réunions, il fut insisté fortement sur ce point que les guerres antérieures n'avaient pas détruit la mutuelle estime des savants belligérants les uns pour les autres, et que la paix alors avait pu effacer après peu d'années les traces du passé. « Mais aujourd'hui, concluaient à l'unanimité les délégués des pays alliés, les conditions sont tout autres. Des crimes sans nom vont laisser dans l'histoire des nations coupables une tache, que des signatures au bas d'un traité de paix ne sauraient laver. Aussi devrons-nous abandonner les anciennes associations internationales et en créer de nou-

velles avec le concours éventuel des neutres. » Tels sont les principes qui ont guidé les décisions prises d'abord à Londres et à Paris, confirmées et précisées dans une nouvelle conférence tenue à Bruxelles l'année dernière. Un Conseil international de recherches fut créé, auquel se rattacheraient, par l'adhésion à certaines idées générales, mais en gardant une large indépendance, des Unions internationales se rapportant aux différents ordres de sciences. La question des Congrès internationaux relèverait de l'Union correspondante. Enfin, les nations neutres seraient priées d'adhérer au Conseil international de recherches ainsi qu'aux diverses Unions.

Ce programme est en grande partie réalisé aujourd'hui. Nous avons l'adhésion d'un grand nombre de pays au Conseil international de recherches. L'Union astronomique, l'Union géodésique et géophysique, l'Union chimique, d'autres encore, enfin l'Union mathématique ont été fondées. Nous avons ici-même, mercredi dernier, prié les pays neutres d'adhérer à cette dernière Union, et nous ne doutons pas qu'ils répondront à notre appel. C'est conformément à ce plan général que fut convoqué le Congrès actuel, dont j'ai cru devoir vous retracer sommairement la genèse.

Messieurs, le monde de *1920* est bien différent de celui du début de *1914*, et il est peu d'hommes de science qui soient aujourd'hui disposés à s'isoler dans une tour d'ivoire; quoique savants, nous restons hommes. Vous venez de voir que le problème des relations internationales a été repris à pied d'œuvre. Dans chaque ordre de sciences, tout Congrès scientifique, rattaché au Conseil international de recherches, et qui se réunira pour la première fois dans les années prochaines, sera essentiellement nouveau, je veux dire qu'il ne s'insérera dans aucune suite déjà commencée.

En ce qui regarde spécialement notre Congrès, nous n'avons jamais dissimulé que nous entendions lui donner une signification particulière, en le réunissant à Strasbourg. Aussi avons-nous été extrêmement touchés de l'empressement avec lequel nos amis étrangers ont répondu à notre appel. Arrivés dans cette ville, ils se sont laissés, comme nous, pénétrer par l'atmosphère alsacienne, et beaucoup, j'en suis certain, se sont livrés à des réflexions, que, loin d'ici, ils n'avaient pas été amenés à faire. Des liens plus intimes ont été formés, qui resteront précieux. Nous continuerons ainsi, entre peuples amis, nos travaux scientifiques, apportant dans cette collaboration nos qualités diverses, sans qu'aucun prétende exercer une insupportable hégémonie et sans nous soucier de certaines menaces, qu'avec une impudeur qui ne nous étonne pas, on a osé proférer.

Quant à certaines relations, qui ont été rompues par la tragédie de ces dernières années, nos successeurs verront si un temps suffisamment long et un repentir sincère pourront permettre de les reprendre un jour, et si ceux qui se sont exclus du concert des nations civilisées sont dignes d'y rentrer. Pour nous, trop proches des événements, nous faisons encore nôtre la belle parole prononcée pendant la guerre par le cardinal Mercier, que, pardonner à certains crimes, c'est s'en faire le complice.

A tout point de vue, le Congrès qui va se terminer a réussi au delà de nos espérances. Nos diverses sections ont entendu des Communications de haute importance et les Conférences générales qui nous ont été faites ont été très brillantes. Les sujets les plus variés d'Analyse, de Géométrie, de Mécanique et de Physique Mathématique, ainsi que des questions intéressant l'enseignement et l'histoire des sciences, ont été abordés. La théorie de la relativité, si à la mode aujourd'hui, ne pouvait manquer de faire l'objet de quelques discussions. Certains ne peuvent parler sans passion de cette doctrine qui est devenue, pour eux, comme une sorte de religion. L'avenir dira si la théorie générale de la relativité est autre chose qu'une construction purement formelle et mathématique, ou bien si les psychologues ont raison, qui considèrent que des hypothèses, incapables d'être saisies par l'intuition, ne sont pas susceptibles d'être à la base d'une explication du monde physique. Une conséquence de la théorie peut cependant nous intéresser ici, c'est qu'on vieillit moins vite, quand on se déplace rapidement. Il est donc bon de beaucoup voyager, résultat propice au succès des Congrès internationaux.

Il ne me reste qu'un devoir agréable à accomplir. J'ai déjà remercié par avance, dans la séance d'inauguration, quelques-uns des organisateurs de ce Congrès, en particulier les membres du Comité local et son infatigable Président, M. Henri Villat. Je veux aujourd'hui, en terminant, dire la gratitude de tous à celui qui fut l'ouvrier de la première heure, à notre dévoué Secrétaire Général, M. Gabriel Koenigs. Il n'a jamais douté du succès : qu'il soit à l'honneur, après avoir été à la peine.

RAPPORT DE M. G. KŒNIGS

Secrétaire Général du Congrès.

MESSIEURS,

Le devoir du Secrétaire Général est de vous apporter ici, dans les termes les plus brefs, un compte-rendu précis sur la genèse de ce Congrès, sur sa tenue et aussi de rendre un public hommage aux concours si dévoués auxquels il a dû son éclatant succès.

M. le Président du Congrès vient de vous dire, avec sa haute autorité, quelles étaient les attaches scientifiques de ce Congrès et, l'on peut ajouter, ses directives morales.

Pour faire suite aux projets antérieurement élaborés à Paris et à Londres par le Conseil interallié de Recherches, un Congrès fut réuni en juillet 1919 à Bruxelles sous les auspices des Académies interalliées. On y poursuivit la création de diverses Unions internationales telles que l'Union astronomique, l'Union géodésique, etc.....

En ce qui concerne l'Union mathématique internationale, les mathématiciens présents à Bruxelles ne s'estimèrent ni assez nombreux ni suffisamment accrédités pour réaliser sa *constitution définitive*. A cette époque en effet n'avaient été constitués nulle part les Comités nationaux de mathématiques, dont le concours devait être la base naturelle de l'Union. Nous décidâmes donc à Bruxelles de constituer seulement une Union provisoire; nous en élaborâmes soigneusement les statuts, en conformité avec le règlement du Conseil de Recherches auquel nous nous unifions, nous nommâmes un Bureau provisoire et enfin nous émîmes des vœux.

Le premier de ces vœux fut qu'un Congrès de mathématiques serait tenu dès l'automne 1920 en la ville de Strasbourg, en dépit de certains engagements d'avant-guerre.

Il fut également décidé que chacun de nous provoquerait dans son pays la constitution d'un Comité national de mathématiques. Ces divers Comités devaient envoyer à Strasbourg, l'avant-veille du Congrès, des délégués ayant

la mission de constituer définitivement l'Union internationale mathématique.

Tout ce programme a été rempli.

Dès l'hiver 1919 notre Comité national français de mathématiques était constitué sous les auspices de l'Académie des Sciences de l'Institut de France et avec le concours de la Société Mathématique de France. Des Comités analogues s'organisèrent ensuite en Angleterre, en Italie, en Belgique, aux États-Unis, et ces Comités envoyèrent ici des délégués dûment accrédités. Il en vint également de la Tchéco-Slovaquie, de la Grèce, du Portugal, de la Serbie, du Japon, de la Pologne. Le 20 septembre 1920 a pu ainsi se tenir, dans une salle de l'Université de Strasbourg, la réunion prévue des délégués alliés ou associés. Les statuts provisoires élaborés à Bruxelles y ont été définitivement adoptés, un Bureau définitif a été constitué, qui, avec certaines additions, confirme dans ses fonctions le bureau provisoire de Bruxelles ; il est ainsi composé :

Présidents d'honneur.	MM. JORDAN, LAMB, PICARD, VOLTERRA.
Président.....	DE LA VALLÉE-POUSSIN.
Vice-Présidents.....	APPELL, BIANCHI, DICKSON, LARMOR, YOUNG.
Secrétaire Général...	KOENIGS.
Secrétaires.....	DE DONDER, HATZIDAKIS, PETROVITCH, POMPEIU.
Trésorier.....	DEMOULIN.

Aussitôt constituée, l'Union mathématique Internationale a pris deux décisions. La première concerne la bibliographie mathématique ; on invitera les directeurs des journaux mathématiques à exiger des auteurs des articles qu'ils impriment la rédaction d'un court résumé du mémoire *fait par l'auteur lui-même*.

La seconde décision concerne la date et le lieu des prochains Congrès. D'après la constitution de l'Union internationale, c'est en effet à elle que cette initiative appartient.

Il a été décidé que les Congrès de mathématiques auraient lieu tous les quatre ans, par conséquent en 1924, 1928, etc..... Quant au lieu de réunion, deux propositions ont été simultanément mises en avant par les Belges et les Américains, les uns proposant Bruxelles et les autres New-York ou ses environs. Il a été décidé d'un commun accord que le Congrès de 1924 serait tenu à New-York et le suivant en Belgique.

Le lendemain 21 septembre, connaissance a été donnée à tous les neutres présents de la constitution définitive de l'Union internationale et de ses statuts. Ils ont été prévenus qu'ils étaient libres de se joindre à nous et nous avons tout lieu d'espérer que la plupart des nations neutres constitueront comme chez nous des Comités nationaux possédant l'autorité suffisante pour les représenter légalement au sein de l'Union.

Ainsi se trouve accomplie l'œuvre que nous avions en vue à Bruxelles et dont notre cœur de Français se réjouit d'autant plus qu'elle a été réalisée dans l'Université de Strasbourg.

Dès sa constitution, en décembre 1919, le Comité national français présidé par M. Émile PICARD et dont M. KOENIGS est le Secrétaire général et M. GALBRUN le Secrétaire, avait pris en main l'organisation du Congrès de mathématiques. La jeune élite de mathématiciens que la France avait envoyée à l'Université de Strasbourg ne pouvait manquer de faire l'accueil le plus empressé à l'appel du Comité national français. Ces Messieurs constituèrent aussitôt un Comité local qui eut toute latitude pour s'organiser d'abord lui-même et pour organiser ensuite sur place les multiples éléments nécessaires à la tenue d'un Congrès.

Le Président de ce Comité local est M. Henri VILLAT, le Secrétaire M. René THIRY, le Trésorier M. G. VALIRON.

Le Congrès s'est tenu sur invitations non collectives mais individuelles, adressées par le Comité national français lui-même, qui centralisait en outre toutes les propositions de Conférences ou de Communications.

Au Comité local incombait la lourde tâche d'asssurer le service matériel en procurant aux Congressistes des logements, en aménageant des locaux convenables pour les séances plénières et celles des Sections, en réglant le fonctionnement de ces dernières, en facilitant aux Congressistes des excursions, des promenades et des visites dans les musées et monuments dont les beautés ou les souvenirs font la gloire de Strasbourg. Enfin ou plutôt, *d'abord* il fallait penser que rien ici-bas ne se fait sans argent et que les cotisations demandées aux Congressistes ne pourraient suffire, sous peine d'être prohibitives, à pourvoir aux dépenses du Congrès. Ces dépenses ne consistent pas seulement en frais pour réceptions, banquets, frais de poste, de circulaires et d'indemnités au personnel auxiliaire. Il faut penser aussi à l'impression des Communications faites au Congrès et des travaux qui y ont été présentés.

Il ne fallait rien moins que le savoir-faire et le dévouement admirable

déployés par le Bureau du Comité local pour venir à bout de ces difficultés.

M. René THIRY a organisé avec un soin méticuleux et un ordre parfait la répartition des logements, et tous les Congressistes lui sont profondément reconnaissants pour les soucis qui grâce à lui leur ont été évités sur ce sujet. Il a été puissamment secondé dans cette tâche par le Syndicat d'initiative et de propagande, dont le concours a permis d'établir un service de réception des Congressistes à leur sortie de la gare et qui a aussi beaucoup facilité la question des logements.

Nous devons une mention particulière à M. le Professeur DELCOURT qui a si joliment organisé la soirée offerte par le Comité aux Congressistes dès le premier jour du Congrès.

M. le Commissaire Général a bien voulu de son côté offrir un lunch aux membres du Congrès qui, par ma bouche, lui en expriment toute leur gratitude. Des remerciements encore à la Société des Amis de l'Université, à la Municipalité strasbourgeoise, qui ont bien voulu, l'une et l'autre, donner réception en notre honneur.

Que de remerciements ne devons-nous pas aussi à M. G. KERN, le distingué Président de la Société des Sciences, Agriculture et Arts du Bas-Rhin, qui a eu la gracieuse attention de recevoir au sein de sa Société les Congressistes qui ont eu l'honneur de s'y rencontrer avec l'élite de la Société strasbourgeoise.

Nous ne saurions oublier ni le délicieux concert qui nous y fut donné par des artistes de choix, ni le chœur des jeunes chanteuses dont le costume caractéristique et le grand nœud noir symboliseront toujours en ce qu'elle a de plus charmant la patriotique Alsace.

Dans l'organisation de grandes excursions, M. le général FETTER et M. le colonel HOLTZAPFELL se sont très aimablement employés pour les rendre aussi faciles et aussi peu onéreuses que possible. Ils ont droit à toute notre gratitude.

Mais celui auquel notre reconnaissance est particulièrement acquise, c'est le Président du Comité local, M. Henri VILLAT. Ce qu'on doit dire de lui est trop vrai pour que sa modestie puisse en être froissée.

Si le Congrès a pu trouver les ressources pécuniaires indispensables, c'est à ses efforts persévérants, à ses démarches infatigables que nous le devons. Il a su trouver en lui-même, dans sa foi patriotique et scientifique la force qui fait marcher, la parole qui persuade. Je lui demandais l'autre jour comment il avait pu obtenir un si grand nombre d'adhésions et si fructueuses.

« J'ai parlé de la Science et de la France », me répondit-il. Et cette réponse donne une valeur morale singulière à l'énumération que je vous dois et dont vous allez subir la longueur[1].

A tous ces patriotiques et généreux donateurs, nous disons, du fond du cœur : merci !

M. Henri Villat m'a déclaré lui-même qu'il n'aurait jamais atteint un chiffre aussi élevé sans les conseils ou l'action personnelle discrète de beaucoup d'intermédiaires dévoués qui l'ont secondé dans son inlassable propagande. A tous nous adressons nos bien vifs remerciements, et plus particulièrement à M. Émile Schwoerer, Correspondant de l'Institut de France, dont l'activité a été spécialement efficace.

Et maintenant, Messieurs, je manquerais à mes devoirs si je ne renouvelais d'une façon spéciale, au nom des Congressistes, tous nos remerciements à M. le Commissaire Général Alapetite qui, après avoir accordé au Congrès une importante subvention, a multiplié à son égard les témoignages de sa bienveillance et qui a bien voulu, en dépit de ses graves occupations, accepter de présider cette réunion terminale.

Renouvelons aussi nos remerciements à la Municipalité de Strasbourg qui, après nous avoir accordé une subvention de 5.000 francs, n'a cessé de nous donner son appui. Nos remerciements à M. le Recteur de l'Université, qui a libéralement mis à notre disposition les spacieux locaux de l'Université de Strasbourg et a si heureusement ouvert notre Congrès le 22 septembre.

Nos remerciements enfin à tous ceux que nous n'oublions pas, mais dont il nous est impossible de lire ici la longue liste des noms, et dont le concours nous a été précieux.

Je voudrais cependant dire un mot spécial à l'adresse des dames de Strasbourg qui ont aidé leurs maris dans leur tâche ardue ou qui ont créé autour du Congrès une atmosphère de sympathie favorable à son succès. Merci à ces bonnes et vaillantes françaises.

Messieurs,

Les Français et leurs amis en venant à Strasbourg, s'y sont rencontrés avec l'âme alsacienne, ils ont éprouvé l'extrême sensibilité qu'elle manifeste

1. Ici l'orateur donne lecture de la liste reproduite plus haut, pp. XVI et suiv.

au contact de tout ce qui tient à la grande patrie, la France, et à sa gloire. Strasbourg de son côté a bien compris le geste de ces mathématiciens amis qui, en faisant de Strasbourg le siège du premier Congrès international d'après-guerre et en l'y organisant suivant le vœu de son cœur, ont eu sans aucun doute le désir complexe de donner :

à l'Alsace un témoignage de profonde affection,
à d'autres un exemple à suivre,
et à d'autres encore une leçon à méditer.

Les travaux du Congrès ont compris 5 grandes Conférences générales et 79 Communications réparties dans les quatre sections. On trouvera plus loin *in extenso* le texte de ces Conférences et Communications. Nous en donnons ci-dessous la liste, avec les dates correspondantes.

CONFÉRENCES GÉNÉRALES

Jeudi 23 septembre, 14 h. 30.

SIR JOSEPH LARMOR.

Questions in physical indetermination.

Vendredi 24 septembre, 14 h. 30.

M. L.-E. DICKSON.

Relations between the Theory of numbers and other branches of Mathematics.

Samedi 25 septembre, 10 h. 30.

M. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.

Lundi 27 septembre, 10 h. 30.

M. V. VOLTERRA.

Sur l'enseignement de la Physique Mathématique et de quelques points d'Analyse.

Mardi 28 septembre, 14 h. 30.

M. N.-E. NÖRLUND.

Sur les équations aux différences finies[1].

1. Pendant les Conférences générales, M. E.-Michel MAECKLER, éminent artiste strasbourgeois, a bien voulu prendre des croquis d'après lesquels ont été réalisés les dessins qui se trouvent encartés dans ce Volume.

COMMUNICATIONS

SECTION I.

Arithmétique. Algèbre. Analyse.

Introducteur : M. E. PICARD.

23 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. HADAMARD.

M. YOUNG : Sur la définition de l'aire et du volume.

M. DICKSON : Homogenous Polynomials with a Multiplication Theorem.

M. CHÂTELET : La loi de réciprocité et les corps abéliens.

M, DANIELL : Stieltjes-Volterra Products.

M. AMSLER : Sur le calcul symbolique sommatoire.

24 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. N.-E. NÖRLUND.

M. FUETER : Einige Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen.

Discussion : MM. Dickson, Rychlik, Fueter.

M. DENJOY : Sur une classe d'ensembles parfaits en relation avec les fonctions admettant une dérivée seconde généralisée.

M. STOÏLOW : Sur les ensembles de mesure nulle.

M. DU PASQUIER : Sur une théorie de nombres complexes.

M. WIENER : On certain iterative properties of bilinear operations.

25 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. L.-E. DICKSON.

M. DRACH : L'intégration logique des équations différentielles.

M. HADAMARD : Sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques.

M. TAKAGI : Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques.

25 SEPTEMBRE, de 14 à 16 h. 30.

Président : M. G. du Pasquier.

M. Störmer : Méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

L'exposé oral est complété par l'exposition de plusieurs grands tableaux affichés aux murs de la salle. M. Dickson signale les applications faites en Amérique de l'intégration numérique.

M. Typpa : Sur les équations du troisième degré.

M. Remoundos : Sur le module et les zéros des fonctions analytiques.

M. Varopoulos : Sur le module maximum des fonctions algébroïdes.

Discussion : MM. du Pasquier, Varopoulos.

M. Riabouchinski : Sur le calcul des valeurs absolues.

Discussion : M. du Pasquier.

M. Zervos : Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles.

Discussion : MM. Cerf, Zervos.

M. Rádl : Sur la transformation des équations différentielles linéaires.

27 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. Cam. Jordan.

M. P. Boutroux : Sur une équation différentielle et sur une famille de fonctions entières.

M. Lefschetz donne en l'absence de M. G. Greenhill, retenu comme Président à la Section IV, des explications sur des recherches de M. Greenhill concernant la division par 5 et par 7 de fonctions elliptiques. Des tableaux affichés aux murs fournissent des résultats sur ce sujet.

M. Lefschetz : Quelques remarques sur la multiplication complexe.

M. Wavre : Sur un système d'équations à une infinité d'inconnues.

M. Wiener : On the Theory of Sets of Points in terms of continuous Transformations.

Discussion : MM. Fréchet, Hadamard.

M. Deruyts : Une propriété simple des systèmes transformables.

28 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. HATZIDAKIS.

M. OGURA : Sur la théorie de l'interpolation.

M. VALIRON : Sur quelques points de la théorie des fonctions entières.

M. ZERVOS : Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés.

M. WALSH : On the location of the Roots of the derivative of a Polynomial.

M. REY-PASTOR : Sur la représentation conforme.

Discussion : M. B. Bloch.

M. ZAREMBA : Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier.

M. YOUNG : Sur certaines intégrales doubles.

M. SAKELLARIOU : Sur les solutions discontinues du problème du Calcul des Variations dans l'espace à n dimensions.

SECTION II.

Géométrie.

Introducteur : M. GOURSAT.

23 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. DEMOULIN.

M. BYDZOWSKY : Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.

M. TAYLOR : La géométrie des variables complexes.

24 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. EISENHARDT.

M. CARTAN : Sur le problème général de la déformation.

M. DRACH : L'intégration logique des équations différentielles; applications à la géométrie et à la mécanique.

25 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. Le Roux.

M. Jordan : La classification des constellations.

M. Eisenhardt : Sur la transformation des systèmes conjugués R.

Discussion : MM. Demoulin, Larmor.

M. Sobotka : Sur la deuxième indicatrice en un point d'une surface.

M. Clapier : Sur la transformation de Lie.

25 SEPTEMBRE, de 14 à 16 h. 30.

Président : M. Hostinsky.

M. Le Roux : Sur la géométrie des déformations des milieux continus.

M. Eisenhardt : Transformation des surfaces applicables sur une quadrique. (Le développement de cette communication est publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Journal de Jordan), 1921, fasc. 1).

M. Murray : Method of classifying all polygons having a given set of vertices.

M. Hatzidakis : Sur quelques formules de géométrie cinématique.

M. Hostinsky : Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une développable.

Discussion : MM. Barrau, Hatzidakis.

SECTION III.

Mécanique. Physique mathématique. Mathématiques appliquées.

Introducteur : M. G. Kœnigs.

23 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. J. Boccardi.

MM. Vanderlinden et de Donder : Quelques covariances de la gravifique.

M. Brillouin : Sur un type d'action à hérédité discontinue et les équations différentielles des mouvements qui en résultent.

M. Schwoerer : Détermination de l'équation séculaire de la terre dans la théorie d'Arrhenius.

24 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Présidents : MM. V. Volterra, M. Brillouin.

M. Guillaume : Expression mono et poly-paramétrique du temps dans la théorie de la Relativité.

Discussion : MM. Grossmann, Bauer.

M. Willigens : Représentation géométrique du temps dans la théorie de la Relativité.

M. Hadamard : Sur le problème mixte pour une équation linéaire aux dérivées partielles.

M. Boccardi : Sur le déplacement du Pôle.

M. da Costa-Lobo : Sur la courbe décrite par le Pôle sur la surface de la terre.

25 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. J. Boccardi.

M. Boccardi : Sur les approximations numériques et les sciences d'observation.

M. Farid-Boulad : Nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André.

M. Greenhill : La fonction potentielle uniaxiale et sa fonction de force orthogonale. (Le développement de cette Communication est publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Journal de Jordan), 1921, fasc. 2).

25 SEPTEMBRE, de 14 à 16 h. 30.

Président : M. P. Weiss.

M. Hostinsky : Sur un problème général de la mécanique vibratoire.

M. Maillard : Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébulaires.

27 SEPTEMBRE, de 9 h. à 10 h. 30.

Président : M. G. Boccardi.

M. Riabouchinski : Sur la résistance des fluides.

M. Larmor : Sur les pressions des ondes sonores.

M. Larmor : Sur les rayons diffractés attachés aux images optiques.

M. Guldberg : Une application des polynômes d'Hermite à un problème statistique.

M. P. Weiss : Sur le repérage par le son.

M. M. Brillouin présente, au nom de M. H. Villat, retenu par ses devoirs d'organisateur du Congrès, un certain nombre de résultats concernant la théorie des surfaces de discontinuité dans la mécanique des fluides (existence de plusieurs solutions satisfaisant à toutes les conditions bien définies du problème; recherches sur le régime variable avec surface de discontinuité, etc.) Le développement de cette Communication sera publié ultérieurement dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*.

28 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. M. Brillouin.

M. Barrau : Sur la cinématique plane.

M. Bauer : Remarques élémentaires sur le principe de relativité en électrodynamique.

SECTION IV.

Questions philosophiques, historiques, pédagogiques.

Introducteur : M. H. Villat.

23 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures

Président : M. D.-E. Smith.

M. Gérardin : Décomposition des nombres. Machines à congruences. Des nombres entiers. Jeux scientifiques.

Discussion : MM. du Pasquier, d'Ocagne, Gérardin.

M. Brocard : 24 propositions de Fermat.

M. Delaporte : Sur la réforme du calendrier.

24 SEPTEMBRE, de 9 à 12 heures.

Président : M. d'Ocagne.

M. du Pasquier : Sur les nombres transfinis.

Discussion : MM. B. Bloch, Haalmeyer, Millon, du Pasquier.

M. Greenhill : Les fonctions de Fourier et Bessel comparées.

La Section, sur la proposition de M. Greenhill, émet le vœu suivant : « Les fonctions de Fourrier et de Bessel, liées par la relation $F(\theta) = J_0(2\sqrt{\theta})$

se présentent dans les mêmes questions. Mais la fonction de Fourier $F(\theta)$, dont l'origine remonte à 1822, présente des avantages sur l'autre qui fut proposée en 1824. il conviendrait que les mathématiciens se servissent de préférence de la première, quitte, pour les calculs numériques, à recourir à la relation ci-dessus pour faire usage des Tables des fonctions de Bessel. »

M. D'OCAGNE : La pratique courante de la méthode nomographique des points alignés, à propos de ses applications de guerre.

25 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. CRELIER.

M. GROSSMANN : Sur l'état de publication des œuvres d'Euler.

Historique de la publication des œuvres complètes d'Euler par la Société helvétique des Sciences naturelles; volumes terminés pendant la guerre. Difficultés d'envoi aux souscripteurs, difficultés actuelles résultant du lieu d'impression, du change et des décisions des Académies. Questions soulevées pour éclaircir la situation.

Discussion : MM. Crelier, B. Bloch, Fehr, Gérardin, Fueter, Grossmann.

27 SEPTEMBRE, de 9 à 10 h. 30.

Président : M. G. GREENHILL.

M. ZERVOS : Sur l'enseignement mathématique à Athènes. Il s'agit spécialement de la formation des licenciés pour la préparation éventuelle d'une thèse. Rapport sur une série de conférences données par M. Zervos sur le développement historico-philosophique du calcul différentiel et intégral.

Discussion : MM. Fehr, Zervos, B. Bloch.

M. MILLON : Sur le problème des dimensions de l'espace.

Discussion : MM. Hatzidakis, Zervos, B. Bloch.

M. G. KŒNIGS présente une note de M. Dubecq sur l'enseignement en République Argentine.

M. GÉRARDIN fait une Communication sur la généralisation de certaines équations citées par M. Dickson dans sa Conférence générale.

CONFÉRENCES GÉNÉRALES

QUESTIONS IN PHYSICAL INTERDETERMINATION

By Sir Joseph LARMOR

(Cambridge, England.)

The point of view has become prominent in recent generalisations that space and time are not conditions prior to the formulation of physical change, but that rather each group of located physical events constructs an appropriate space-time for itself as part of its own evolution. If that proves not to be consistent or tenable ground, we must fall back on space and time being already essentially there, as a foundation prior to thought; though the evolution of events may happen to be best described as one involving change in the mode adopted for the expression of the continuum space-time, as well as change in phenomena located therein. The unresolvable essence of space-time would be a fourfold ordered array of points : body could be given to it by constructing various kinds of space, and various networks of reference in each kind. It has to be considered how far such a compound specification is pleonastic. The conditions requisite for physical determinacy in general, and for unambiguous continuation of physical fields into hitherto unexplored regions, demand further attention in this and other regards.

The purpose of the considerations which follow is mainly critical interpretation and simplification of ideas in relation to existing difficult analytical formulations, which have established an essential authority by agreement with crucial facts of physical nature. The degree of confidence in recent theories resting on perhaps ambiguous or only partial determination in space-time, or sometimes overdetermination, which prompted two difficult eclipse expeditions and is strengthened by their remarkable results, invites consideration of such theories from all sides. They have even diverted attention from the steady output of fundamental atomic laws by radioactive experiment. The doctrine that strict adherence to algebraic analysis avoids the pit-falls of intuition is not always a sound one; it may unduly restrict the horizon, however hazy, of science.

As the aim of this study is to bring the underlying principles into closer touch with the familiar historical development of the physics of an extended medium, so far as its fourfold analytical symmetry will permit, the distraction of the very complex analysis which seems to be inseparable from the analysis is avoided; that is indeed fully accessible in the literature, where it is expounded from many sides. It is sufficient for critical purposes to consider the ideas of the ordinary aether-theory placed in relation to the new, and illustrate by its simpler argument. The exposition becomes mainly a study in the implications of the dynamical Principle of Action, and the possibilities of an extended scope for it which shall be more than an analytical formulation : the results that emerge perhaps suggest that the new chains of analytical ideas in physical science should be capable of further clarification.

We shall be led to consider the possibilities as regards a universe of permanent atoms, gravitational and electric, interacting entirely in modes expressed by extremal types of modification of intervening generalized space, taking the place of modes of transmission across an aethereal medium, of the perhaps more crude ordinary elastic type, in the space. This view, which is a modified aether-theory, would not admit displacement of solar spectral lines.

The general trend of the gravitational theory has been assumed to be known : readers unfamiliar with it will find a very complete informing discussion from the relativist point of view in A. S. Eddington's recent brilliant and intensive book *Time Space and Gravitation.*

Contrast of the algebraic and geometrical methods.

In the formulation of general dynamical science in the hands of Lagrange the specifications had become purely analytical. In the words of his famous pronouncement in the preface to the *Mécanique Analytique,* « On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. » This has proved to be a feature of strength for the evolution of dynamics, by allowing and even suggesting the utmost formal generality of the frame of the science, transcending all limitations imposed by intuitive prepossessions regarding force and movement. Thus the beginning even of the train of ideas leading to the Riemann differential geometry have been traced back to this work. On the other hand this detached analytical abstraction of the argument naturally introduced, at first, a cleavage betwen its analysis and the concrete thought of the physical investigators, who were probing the order of nature by cultivation of the simpler dynamical ideas and their mutual experimental relations. Accordingly the evolution of appropriate wider conceptions in the science, largely under the hands of Kelvin and Maxwell, preluded by the introduction of such explicit

concepts as degrees of freedom with their generalised co-ordinates and component momenta in Thomson and Tait's *Natural Philosophy* in 1867, followed by the dynamical imagery inherent everywhere in Maxwell's *Electricity and Magnetism* a few years later and partially adopted later by Helmholtz, heralded a new era as regards modes of general physical thought. Perhaps at that time the further advantage on the side of generalisation, inherent in the wholly unrestricted outlook of the unvisualized Lagrangian analysis, was not always adequately appreciated.

Lagrange was the most resourceful of analysts, powerful because concise. For instance, his discrimination between the differential of a function and its displacement or variation, indicated by the contrast of symbols d and δ, has in many respects doubled the power and range of infinitesimal analysis. The function of the pure analyst is to go ahead in his own abstract world of related symbols, with no diagrams and no acquired intuitions to chain him to earth. *Point de figures.* His instinct is to generalise continually. But that he may not wander into an artificial world out of range of ordinary human mentality, the intervention of the geometer is necessary from time to time, to connect his formal constructions with the mechanism of actual thought. Riemann was essentially a geometer : so was Hamilton. Since their time a new doctrine of invariance has arisen, from special beginnings of linear transformation in pure algebra, but developing into wider ranges as an affair of permanence of relations between the members of a pair of groups when change is made from one member in either group to another : this also is an integral or geometric relation, and has even provided a criterion for degrees of permanence and substantiality. The most interesting problem presented by the recent analyses of degrees of relativity is how to elucidate their algebraic procedure and results to the ordinary geometric apprehension.

Lagrange seems to have delighted to dwell on the enlargement which accrued to the powers of analysis from the simple device of extension of its symbolism. In the lectures in the *Calcul des Fonctions*, which contained much of his final thought in simplication of the process of the calculus, he has devoted a chapter (*Leçon 21*) to an exposition of the previous efforts of the Bernoullis, of Brook Taylor, and of Euler towards a general method of variations. « Mais dans l'état actuel de l'analyse, on peut regarder ces discussions comme inutiles, parce qu'elles regardent des méthodes oubliées, comme ayant fait place à d'autres plus simples et plus générales. Cependant elles peuvent avoir encore quelque intérêt pour ceux qui aiment à suivre pas à pas les progrès de l'analyse, et à voir comment les méthodes simples et générales naissent des questions particulières et des procédés indirects et compliqués. » Then in a final lecture he translates definitively the theory which he had evolved in his youth in the *Turin Memoirs* of 1758, in terms of differentials, into the modern form of gradients of the functions and of their variations.

The final remark at the end of the lectures, referring to the « Equations aux

limites qui n'étaient pas connues avant le calcul des variations, et sans lesquelles on n'aurait que des solutions incomplètes » may be regarded as an indication towards the future, when the extremal formula of varying Action, in the hands of its discoverer Hamilton, was to open up yet another world of analysis, of crucial importance for the full development of general principles in theoretical physical science. Considering the innate simplicity of the source of this great chain of ideas, merely the introduction of variations alongside differentials, one is ready to pardon the ingenuous remark of Thomas Young, the vast range of whose own attainments generated an impatience of any but the most direct and time-saving expositions, in his sketch of the life of Lagrange, that « the merit of the invention is none the less... because it might have occurred to a less distinguished mathematician ».

The dynamical equations of Lagrange, in general coordinates, certainly had their source in the Principle of Action as treated by the new calculus of variations as early as 1758. It may now seem strange that in the *Mécanique Analytique* twenty years later the method of Action was put aside in favour of a formulation by Virtual Work. Its restriction to what have more recently been named holonomous coordinates was one cause. The method returned with vastly increased power in Hamilton's two dynamical memoirs (*Phil. Trans.* 1834-5), introducing the entirely new and most fruitful aspect of the Action as an extremal function connecting directly the initial and final stages of the course of change in the material system.

The idea of invariance, which in connexion with the Minkowski fourfold analysis acquired, on a narrow basis, the designation of relativity, had already pervaded, of course, the ordinary formal theory of isotropic elasticity as initiated long ago by Navier and Cauchy. When Green transformed it in 1837 into a theory of energy by introduction of Lagrangian variations, the expression for the energy-function was limited and determined by the condition of permanence of form when the co-ordinates were changed in various ways, though it was perhaps implied rather than exhibited that this invariance was complete. When Mac Cullagh soon after, tacitly adopting this method from Green in his brilliant and final formulation of optical dynamics, was guided to the square of the curl (or rotation) of the displacement as the proper expression for the energy leading to the desired optical results, he recognised fully the difficulty which his critics over-pressed, the absence of any overt mechanical explanation of his abstract formulae, of the nature of elastic strain. He fell back upon the recognition — for the first time in mathematical science — that the curl function of the displacement is thoroughly appropriate, as being in fact a differential invariant vector as regards the isotropic group of changes of frame of reference : his energy function thus satisfied the condition for relativity in its most modern form, and was abstractly permissible though independent — even possibly because independent — of any quality such as material elastic strain. Finally, Stokes in his memoir of 1849 on the Dynamical Theory of Diffraction of rays,

in which he evolved completely the general laws of spreading of propagated effects, incidentally placed isotropic elastic theory in three dimensions on its final basis, and even prepared the vectorial frame for one of the most suggestive advances of the age, the Helmholtz theory of permanent vorticity in frictionless fluid media.

The inverse method of potential functions (1) had been fully developed long before this time, by Green in 1828 in his *Essay* on the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism. Here, for the first time, the idea of a general spatial function as determined solely by its poles arose, including complete discussion of the different distributions of poles outside a region that would give the same potential function within the region. His ideas and methods, and the reaction which they promoted in abstract mathematics by leading up to the theory of functions, have remained fundamental ever since. Their author was an isolated genius, cast up sporadically outside the range of schools and universities, at the village of Sneinton near Nottingham. How did he get inoculated with mathematical research? The terms of an early manuscript prospectus, drawn up by Babbage, of the famous Analytical Society founded at Cambridge in 1813 mainly by John Herschel, Peacock and himself, as a missionary body to introduce the cultivation of the inverse Continental analysis by study of the French models, alongside (if not instead of) the fluctional and vectorial methods of Newton, have recently thrown an interesting light on this question. For reference is made to Mr Bromhead of Caius College, then a Bachelor of Arts, as the Secretary of the Analytical Society, from whom information regarding its operations could be obtained : and the same Sir Edward Ffrench Bromhead turns up in the list of the original subscribers to Green's *Essay* in 1828, and as the communicator of Green's subsequent memoirs to the Cambridge Philosophical Society, and also as the patron of Green who introduced him to membership of Gonville and Caius College in 1834. We are entitled to infer that it was the stimulus of access in the country to his friend's collection — apparently very complete and kept up to date, under the influence of the Cambridge movement — of the classical French mathematics, that gave his opportunity to one of the greatest analysts of modern times.

Interdetermination.

The principle named after Dirichlet asserts that the value of a potential V given over a boundary determines its value outside in free space devoid of sources :

(1) The introduction of the name *potential* is usually ascribed to Green, but it was employed by Gauss independently. It would seem that it is to be traced back to the idea of *vis potentialis*, in the sense of potential energy, in the hands of D. Bernoulli and Euler.

thus it determines the gradient $\partial V/\partial n$ over the boundary, and arbitrary values of V and $\partial V/\partial n$ would be inconsistent with empty space outside. But they are quite consistent with a wider view which includes such sources. According to a proposition first asserted by Gauss, who rediscovered many of Green's special results in potential theory ten years after him, if the value of a Newtonian potential is given in any region of free space, the potential is thereby determined in all places beyond that region which can be reached from it without passing across attracting matter. Its value is thus uniquely determined by the process of gradual continuation, after the manner of Taylor's expansion theorem, in the space surrounding the unknown sources or masses of which it is the potential : and the process can be prolonged towards them, either until it encounters actual regional sources or until their simplest possible and most condensed form is reached, as limiting singular surfaces, curves, or points at which the potential becomes infinite or has other type of singularity. But the problem of tracing a limited field of potential to its singularities seems, though definite, to be practically intractable so far as regards those outside the region (1).

As regards the very remarkable property thus asserted by Gauss, two related questions arise. How small may the region be, for a complete knowledge of it thus to determine the whole universe of Newtonian attraction? For a given such region, how minute must the knowledge of the potential be, in order to justify a practical extension to distant places? For example, we are accustomed to infer from constancy of potential in a small region inside a hollow charged conductor, that it must be constant everywhere inside until the charged surface is reached : but we are now asked to recognise that a more minute knowledge for that small region would involve complete knowledge of the details of the distribution of the electrons (if they were at rest) which make up the charge in the conductor. In the criticism and amendment to which principles of mathematical determination, including the cognate one named after Dirichlet, have been subjected in more recent times, this proposition of unlimited continuation seems to have escaped scrutiny. We propose to adopt it provisionally as a basis for *physical* discussion.

If we accept this result without limitation, it carries with it much more. For an isotropic uniform elastic medium, whether a material solid or an electric aether, or a medium partaking of both their kinds of elasticity, a cognate assertion can be made. Here the sources are regions within which extraneous force straining the medium is applied, or else are centres or poles of innate intrinsic strain such as electrons can be considered to be in an aether. If we know the state of strain in any small region free from extraneous force, it is held that the state of strain

(1) This problem formed the subject, long ago, of an epistolary correspondence between Kelvin and Stokes, which still exists.

everywhere adjacent to it is thereby rendered definite : we can thus extend the known region so as to surround all the centres of extraneous force or intrinsic strain, and so by closing in upon them determine their nature, so far as it regards the medium, as before. This statement holds, because the same Laplacian differential operator that determines the distribution of a Newtonian potential — the only possible isotropic form — is involved, as *infra*, in the equations of this problem as well.

A more intuitive physical system, which throws light on the nature of the result, is that of a freely jointed frame of rigid bars, such as a girder or bridge-work. If an increase of tension is put into one of its members, the tension or thrust thereby produced in every other member, however distant, can be determined uniquely by a process of statical continuation applied at the joints. This, however, implies that the frame is just stiff, and no more. If there is any slackness the result, of course, could not hold : if the frame is over-stiff, owing to presence of redundant members, the result becomes indeterminate until the elastic qualities and yielding of its members are brought into consideration. Comparing with the result for a continuous medium, we can recognise that an elastic solid, even when in internal intrinsic strain, has complete elastic inter-connections, but not redundant ones, so long as the relation of stress to strain remains of linear type.

Such complete interdetermination is a very remarkable mode of relation. It involves that knowledge of change in any small part of a system determines the change throughout : that each part is in a sense the cause of the whole. The familiar relation of cause and effect has thus vanished, along with all its metaphysical perplexities : every part of the set of concurrent events is now the determining cause of all the remainder. It is a necessary condition for this result that the circumstances should be strictly statical; elastic or other transmission in time must not enter into the scheme.

Interdetermination for statics of an isotropic medium.

The proof of the extension above stated is readily indicated. The equations of static frictionless strain in an isotropic solid medium, are, in Lamé's notation, of type, as determined from the isotropy alone, in terms of displacement $\xi\eta\zeta$,

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2\xi = \mathrm{X},$$

where

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

leading to

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Thus the expansion of volume represented by θ is determined by the last equation, of Laplacian type, in terms of places of concentration of applied force X, Y, Z : if θ is known over any small region, it is thus determinate by continuation beyond it, and all around these sources which are thus themselves determined. And θ being thus ascertained throughout the field, the same argument applies to ξ as given by the first equation. Complete interdetermination is thus established : knowledge of a small portion determines the whole, including even the extraneous forces that are disturbing the medium beyond.

There is no formal restriction here to circumstances of stability, such as will enter later in more general questions. Similar analysis applies in all cognate problems of static isotropic extension.

Interdetermination fails in a pseudo-space.

If, however, we deal with an Euclidean threefold pseudo-space in which one dimension is imaginary, the spatial invariant is

$$\delta x^2 + \delta y^2 - \delta z^2;$$

and the differential form contravariant to it now gives an invariant equation correlative to that of Laplace,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V = 0.$$

But if z represents time, this equation connotes propagation of effect by waves in the two dimensional space x, y : thus obviously the state of affairs in a limited region for a limited time cannot here determine the state everywhere for all time. In fact, the quasi-radial form for V, here $(x^2 + y^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$, does not now belong to a point source in the threefold extension, but to a singular conical surface $x^2 + y^2 = z^2$, of unlimited extent, on which it is everywhere infinite; which marks another fundamental difference showing the hasard of physical extension by analogy from a spatial continuum to a pseudo-spatial one. It may be of interest to note conversely in passing, that the equation of propagation in three dimensions of space is satisfied formally by

$$V = A(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^{-1},$$

which belongs to an expanding spherical surface-source expressed by the equation $r=t$, the unit of time being chosen so that the velocity of transmission is unity. Similar considerations apply to the fourfold world-history of space-time of the modern relativity theories. It is only to real spaces that complete static interdetermination can belong. Freedom demands that at least one dimension shall be imaginary : otherwise the world would be a hard rigid construction with no initiative anywhere. But even with this freedom, data over a complete boundary in the fourfold ought, along with the sources inside, to determine the activity throughout the interior, and in exterior space as well, provided there are no sources there.

In particular, this absence of complete interdetermination in the fourfold pseudo-space saves the Einstein Principle of Equivalence, which asserts that *locally* a field of gravitation and a field of acceleration relative to the frame of reference are not distinguishable. For if each could be continued without ambiguity, the poles of the gravific field would at length emerge and reveal the distinction. A gravific field given in a limited region can be continued into the region beyond, only when there are no poles or centres of attraction beyond or when such poles are all given in advance.

Minimum property related to continuation.

What prescribes these limitations of determinacy, as regards continuation in Cauchy's manner, of a scheme of functions given by differential equations (for example, the Einstein space potentials) from a region in which they are given to the unexplored extension beyond? In such a case if the value of the functions and their successive gradients(1) are given along the boundary, up to the order just below the highest order occurring in the characteristic differential equations, then these latter gradients are determined at that surface, and uniquely if they occur in the equations only in the first power. And by successive differentiations all the still higher gradients at the surface may be determinable. Then by the expansion of Taylor all the functions concerned can be continued from the boundary, along any linear paths we may choose, into the region outside that surface. Let us regard them as so continued, along direct paths, to an adjacent outside surface enclosing the original boundary, over which a distribution of values of the functions is thus obtained. This implies that the two surfaces are not too far apart, and that no poles or other

(1) The first gradient along the normal to the boundary necessarily suffices as the other first gradients are already involved. [The argument in this section applies *primarily* to the case in which a number of functions are controlled by an equal number of differential equations.]

singularities are encountered between them in the process. It is just an analogous ranging of the eye, along various interlacing paths in the space around us, that provides our conception of it and its contents.

But there is insufficient assurance, as yet, that, for the functions as determined by this process, there will be proper continuity in directions transverse to these linear paths of continuation. If, however, the differential equations on which this continuation is based are the conditions of extremal(1) variation of a continuous integral of a function which is essential positive within the limits of the region, the position seems to be much more simple. For the boundaries being near together, and the gradients between them being regular, there must be some distribution of the functions with the assured continuity which makes the integral minimum for the given values over the two boundaries. In this case, at any rate, we may presume that the functions, thus conditioned by a set of extremal differential equations, can be continued uniquely beyond the original boundary by successive short stages, and so continually onwards, so long as singular regions can be avoided in the process. The minimal property affords assurance, such as would not otherwise exist(2), that the continuations, necessarily made at first along isolated outward linear paths, blend into a continuous result in all paths over the region.

In general statical theory, stability with its minimum energy would thus be an essential condition for complete interdetermination.

The essentials of representation in space and time.

The mode of arriving at a conception of Euclidean space, when the Cartesian systematic analysis has replaced the Euclidian synthetic way, is to find all the frames of reference with respect to which the essential internal properties of a permanent or rigid system of bodies retain the same expression. To assert that these relations are invariant with respect to this group of similar frames is to say that mobility of a frame, changing it into adjacent ones in the group, makes no difference; or, owing to the mutual relationship, it is to assert that the rigid system

(1) A positive connotation, on Hamiltonian lines, is here proposed for the term *extremal*, already in use in a different and less defined sense. An integral is extremal when its variation is expressible in terms of changes over the *boundary alone* of the region of integration. On Hamilton's principle of Variation of Action the extremal form of the integral becomes expressed as a function of initial and final configurations or other *data*, alone. This fertile remark involves the whole group of reciprocal relations expressing the mutual influences of changes at pairs of elements of the boundary, however far apart, when under extremal conditions. We may also speak of a variation as being extremal in this sense.

(2) But if there are no sources, or other singular points of the functions, in the region outside, the continuation is definite.

is itself freely mobile with regard to any one of the continuous group of similar frames of reference.

We may have two solid systems thus freely mobile, one of them for example being a network of polar or other curvilinear coordinates : it follows that a mutual relation of free mobility is established between the two systems, and we can thus refer the rigid system to a curvilinear frame instead of a Cartesian one. We may even generalise by transforming algebraically to a frame which mixes time with space, as has often been done in physical problems. It is only one step further to refer the system to an extended collocation of point-relations which cannot be interpreted as a flat space at all, except possibly as regards its infinitesimal parts : it must, however, be expressible in a differentially continuous extension, unless we are prepared to atomise extension itself. These ideas are suitably illustrated by the statical variational theory for a stressed framework of bars, as readily developed in terms of the relations between the invariant lengths of the bars alone, without any reference to space. The unresolvable essence of space is mere extension in threefold continuity : the frame which particularises it may be Euclidean or elliptic or heterogeneous at choice : the difference will be that the relations of nature will be expressed in different forms, and it is the search for simple and direct laws of physical connection that prescribes the most natural frame, which is thus adjoined, so to say, to these physical laws or relations. The final stage of such advance would be to the gravific fields where, after Einstein, the space-time frame is no longer uniform.

Scientific geometry led early to the recognition of rigid bodies freely mobile in flat threefold space, though the implications involved in their existence were left for Helmholtz and Lie to unravel. The same tendency of thought leads naturally to enquiry as to the continuous group of frames, for all of which the vast scheme of travelling radiations which establish interconnections in the universe presents the same aspect : this group has been identified by Minkowski with the frames of a fourfold flat space-time. Complication thus arises from the emergence of two groups of equivalent frames of reference, constructed on similar ideas, one for rigid bodies, another for radiation : one of the two must absorb the other and be universal. It is a surprise that it is the more recondite group that seems to prevail : and another surprise that gravitation remains refractory to it until the flatness, which originally recommended it as an invariant scheme of nature, is broken down, though not in the direction of a Newtonian attraction suitable to rigid bodies. Thus are theories which have served their turn transcended by new views founded upon themselves, in the continued adaptation of the scheme into which we are compelled to adjust our survey of physical nature.

Non-uniform invariance founded on local characteristics.

All characteristic equations in continuous physics, such as, for example, the differential equations of the gravific potentials in the Einstein formulation, are essentially relations prescribing local constitution; they are available, as above, only for gradual continuations from elements of extension to adjacent elements in succession, provided such continuation in any direction fits in without inconsistency for the directions transverse. The essential quality of all such equations, — the main example is that of Laplace, — is that they retain their forms, are invariant, when the co-ordinates of reference are changed *locally* to any other scheme of coordinates, algebraically related of the appropriate group. This secures that if the continuation of the functions is formally possible, the result is a finite extended scheme with *intrinsic* internal relations of its own ramifying all over it, independent of the particular frame of the relevant group, in which it happens to be set. For example, the symmetric fourfold radial field of a gravific point-centre proves to be thus uniquely determined, virtually by a process of continuation from the core, provided we postulate that the coordinate functions are to be isotropic as regards each differential region of it in the three elements of extension. At some stage in the process of continuation the field may, however, begin to be disturbed sensibly by the presence of another gravific centre : that disturbance cannot be predicted, but by exploring it around that new centre we can determine its source, in the only respect that is relevant, which is just so far as regards its influence on the adjacent space : and so on by including other centres, until all space and its contents have been explored. To clear the ground for such an exploration of a less restricted spatial structure, we proceed, following Riemann, by use of the simplest definite apparatus of continuation that will allow greater freedom than a Euclidean frame, merely a differential measuring rod imagined as retaining unchanging length in all the isotropic elements of extension into which it may be successively transferred. Does not the process, then, imply that the space is already there, that it is a matter of exploring or organising a pre-existing space, with its poles, if there are such, by this new extraneous apparatus, rather than of creating afresh a space for our use as we proceed? If the space is postulated to be there already, the question as to whether the process of continuation is self-consistent, and therefore possible, need hardly arise, if only the machinery of measurement is self-consistent. Thus space and time have not been transcended in the new developments; we have only agreed to measure (that is, describe) the same essential continuum according to a different, but still intrinsic, plan, such as may permit more coherent expression of some parts of the scheme of physical nature, at the expense possibly of other parts. It is a question of pure analytical mathematics, important for our schemes of

physical representation, but without ultimate philosophical implication. The Newtonian frame of space and separate time is absolute, or pre-eminent, only by its simplicity and the extreme closeness of its adaptation to wide ranges of physical investigation : there can be no meaning in the term absolute except universality of convenience.

The control which makes a radial field of fourfold space-time extension definite for gravific purposes as above, is not merely that the elements of it shall be isotropic or flat, and that the scale of length shall be imagined as an invariable transferable differential rule materialising in fact a locally invariant quadratic differential expression : it must also be possible to construct a function of Hamiltonian extremal variation from it. An alternative procedure would be to retain the same ordered distribution of the points as corresponds to a flat fourfold, and attempt to strain the length of the differential measuring rule in passing from place to place. But such variation of the standard of length in an extremal extension, without loss of directional isotropy in its application, appears to have been shown by H. Weyl to amount precisely to the introduction of an electrodynamic field operating in and slightly modifying the extremal spatial (or gravific) field. In the case of radial symmetry the results seem to be still definite, if there is an electric charge of unrestricted amount at the origin superposed on the mass there. The gravific pole involves no electric field and so no charge at the origin; and an electric charge involves no gravific field, in this radial case, though it alters the space around it according to a different law of its own. Thus in the more general case when the matter is regarded as a continuous distribution, an electric field seems to require an accompanying residual field of the gravific type (1). The atomic view brings greater precision. A gravific pole deforms the space, without any electric accompaniment. But an electric pole in addition to its electrodynamic field involves also deformation of the space, residual and very slight, yet according to a different law from the gravific pole; in fact it involves a slight deformation such as could only be produced by a volume distribution of gravific poles over the region and of infinitely increasing density towards the centre. But the definite value of the atomic charge remains to be accounted for, as also the definite masses of the atoms with which it is associated.

Can an aether be eliminated?

Another point cognate to determination also deserves further consideration. For reasons which are readily understood, of the ten gravific potentials introduced by Einstein four can be quite arbitrary; so that of their ten differential equations

(1) De Donder, *Teyler archives* (April 1916).

determining their mode of distribution, any four are consequences of the other six. This in fact connotes the arbitrary choice *in the space* of the four space-time parameters or co-ordinates in terms of which the equations of variation of the space are formed. If there is an electric field also present, specified by the four components of its vector potential, there are four more differential equations : and any four of the fourteen are now determined by the ten others. The significance of the resulting four identities, which must be necessarily involved in the extremal character of the Action principle, as expressing essential convergence of stress-tensors, is elucidated in terms of direct physical variation *infra*. But the present remark is that it has been emphasised (compare Hilbert) that if an electric field is given, its presence removes the indeterminateness or relativity of the space, for it determines all ten gravific potentials in addition to its own poles. This looks very like a reversion to the position that an electric field requires a fixed aether for its specification — so fugitive are the ideas belonging to a region of imperfect determination. Or, conversely, if the ten potentials are given arbitrarily and so cannot belong to a pure gravific space, they require and determine not only a definite fourfold extension but also an electric field in that continuum with its own sources or poles, which will usually be a continuous distribution. And, as above noted, a set of centres or poles, electric or gravific, can hardly be conceived without their fields of influence being given with them, which requires an *à priori* space in which to exhibit them. The presence of a space manifold, imagined as a definite unique scheme of marked extension, seems to be prior to all systems, however general, for its representation whether by flat or elliptic or other modes of laying it out.

Radiation as the fundamental means of physical connection : necessity for three dimensions of space.

In the world of physical nature changes are produced and controlled mainly, perhaps entirely, by free radiation across space. We have learned from Maxwell that when an electric current in one coil induces a current in a neighbouring coil, it does so by means of aethereal pulses or undulations, sent out from it swiftly across the intervening space, which are absorbed by the atomic structure of this second coil where it meets them and produce their effect so smoothly as to escape direct detection. In telegraphy the message is really carried from source to receiver by electric waves in the surrounding space, which are merely guided and prevented from spreading away sideways by the deficiency of electric elasticity due to atomic freedom in the conductor. The waves of unguided telegraphy in free space, whether of small or great length, are the normal mode of intercommunication in nature :

guidance by a telegraph wire is as artificial as concentration of sound by a tube, as Lord Kelvin used to emphasise. Even in chemistry, when one molecule stimulates another the effect is probably to be regarded as transmitted across by intimate electric fields, and part of the energy must go off in radiation.

With what degree of latitude is radiation to be specified, if it is thus to be recognised as the basic means of physical connection between systems out of direct contact? We recognise in it the idea of clean, sharp propagation of effect by waves and pulses, travelling unchanged even across celestial spaces, leaving no trail of disturbance along their paths such as would drain away part of the energy during its transmission. Such pulses, issuing from a small molecular source, must in an isotropic medium spread out at sufficient distance as spherical shells. They must thus be expressible by functions such as φ, and the gradients of such functions, restricted to the form

$$\varphi = \mathrm{F}(r) f(ct - r),$$

where c is the velocity of their propagation. In n isotropic dimensions of space and one of time, the differential equation determining the nature of φ in every locality must, irrespective of dynamical considerations, if it does not contain gradients above the second, be of form

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} = c^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2};$$

for it must be linear, and no other form seems to have the necessary isotropic invariance in the flat continuum. To enable this equation to have a solution of the radial type expressed above, it is not difficult (1) to prove that we must have

$$n = 1 \text{ and } \mathrm{F}(r) = \mathrm{A}, \text{ or else } n = 3 \text{ and } \mathrm{F}(r) = \mathrm{A}r^{-1}.$$

If time has one dimension, space must thus be restricted to three dimensions, if atomic vibrations are to be able to send out pure radiation travelling across celestial spaces absolutely without degradation. For example, this would not be possible in two dimensions : a line source in three dimensions corresponds to a point source in two, but the elements of the line are at different distance from an outside point, so that, as Lord Rayleigh has explained, the vibrations emerging from a simultaneous impulse all along the line take different times to travel to that point and

(1) [This result has been given by P. Duhem in *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, Cours professé en 1890-91, tome II; as appears from an important memoir by V. Volterra, *Acta Mathematica* 18, 1894, pp. 161-232 (cf. p. 221) in which the characteristics of the various types of differential equations in the text are discussed from the point of view of the principles of Huygens and Green by strict mathematical analysis. Cf. also Volterra, Clark University Lectures, 1909].

could not arrive together : instead of a clear cut cylindrical shell of radiation expanding outward, all the space inside the outward boundary would be filled with a trail which the radiation had left behind in its progress.

The simplicity and disentanglement of physical phenomena, as dominated by radiation between the portions of permanent matter, seems thus to be intimately bound up with the three dimensions of our space. This characteristic equation of local determination of all functions such as potentials that are connected with radiation, thus necessarily restricted to three dimensions, namely

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-c^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,$$

will remain invariant when the variables x, y, z, t are changed by the appropriate continuous group of linear transformations. As the sum of differential squares

$$\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2-c^2\delta t^2$$

is contravariant to the cognate differential operator acting on φ, that operator will remain invariant for all transformations within the group which maintains the latter differential expression invariant. That is, it will be invariant for any transference of the frame of reference in a flat fourfold or pseudo-space with three real dimensions x, y, z and one imaginary one t. Such displacements form the fundamental fourfold Minkowski group. Radiations by electrodynamic agency are the main case in point : and the (Lorentz) correspondence is well-known and simple, which connects their vectors and their poles when expressed in terms of one such frame and when the corresponding (though different) vectors but the *same poles* are expressed in another(1).

Close up to a radiant source, for example an electric bipolar (Hertzian) vibrator, the radiation is of course not pure in this sense of sharp transmission. In addition to amplitudes of vibration varying as r^{-1} which carry away radiant energy, there are terms varying as r^{-2} which represent alternating readjustment of the local field of the electric poles and effect merely local fluctuations of energy in that field. In dealing with energy purely radiant this latter part must be assigned to the molecular local fields : it does not come practically into our field specifications at all, except among the molecules of dense matter.

---

(1) Cf. *Aether and Matter*, Cambridge, 1900, chapter XI.

Conditions for physical continuation illustrated by modes of formulation for radiation.

A previous chapter of physical determinacy will now be reviewed, as its method may be of wide application in newer fields. A train of elastic disturbance, due to sources in any region, is transmitted across an arbitrary boundary surrounding them : its value outside ought to be expressible in terms of the succession of circumstances at that boundary for the duration of the disturbance. In the case of light this is the problem of diffraction, as formulated by Fresnel. In an isotropic uniform medium of unlimited extent it is resolvable in various ways. The effect of the changing traction exerted on the medium beyond, at each element of the surface, can be computed : or the effect of the changing displacement thus imposed (with no displacement at other elements) can be determined : and the result in either case derived by integration. But, as Lord Rayleigh noted long ago, the expressions so obtained for the effect emitted from an element do not agree. Thus the question arises whether either of them can be regarded as the actual effect for which that element is responsible; though the total effect integrated over the whole surface for all the elements must be the same in both cases.

The most graphic and suggestive mode of treatment of such a question is by the inverse general method of Green, applied by him in his *Essay* of 1828 to electrostatic fields, either steady or in which the velocity of adjustment is taken to be infinite. This order of ideas can be extended to the most general types of disturbance (1). If there is a system of poles A inside and another B outside, we can determine the surface distributions of poles, in simple and double sheets spread over it, which with A will produce the actual field inside and no field outside, or with B will produce the actual field outside and no field inside. The former is the case now in question : we can choose B arbitrarily, and for each choice obtain a different distribution of surface poles, and all of these systems produce outside the actual effect propagated from A. They will also produce an effect inside, namely that due to the system B with changed signs, which can be made what we please by choice of B. The distribution of surface poles that is equivalent *in the aggregate* to given inside sources is thus, in the case of disturbances of general type, widely indeterminate, in the absence of more definite knowledge than the state of affairs at the surface alone.

But now we restrict the disturbance to pure radiation, advancing in the outward direction only, and so at a distance from its molecular sources : it is also to be cohe-

(1) Cf. a paper *On the Mathematical Expression of the Principle of Huygens* (Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol. I, p. 1, 1903).

rent radiation, otherwise its energy would be an accumulation of irregular elements, and we could not treat of its alternating stresses at all except as a residual average, for instance in considering mechanical effects or the radiation pressure which is everywhere equal to density of energy.

For such pure outward radiation the disturbance propagated up to the boundary surface or interface is wholly transmitted beyond it by actions occurring at that surface : no part of it is sent backwards by these actions. It is this restriction that renders the problem of the mode of transmission from the surface definite : the secondary sources on that interface must be such as to give the actual disturbance in the medium just outside it and no disturbance at all just inside it. There must be no sources B. The function of each element of surface being thus now precise, the rate of transmission of energy across each element of the surface, and its ray paths, are also definite and are readily estimated : the result should of course agree with the Poynting flux, if the radiation is electric. The solution, so restricted, is in accord with the well-known formula hit upon indirectly by Kirchhoff in 1883, apparently without recognition of the indetermination of the problem; which was, however, also restricted, though in exhaustive analytical detail, to the case of pressural waves such as sound (1) depending on one scalar potential φ. That formula is in fact frequently claimed, but as we now note with only partial justification, to be a final definitive formulation of the Principle of Huygens.

But it seems to have never yet been recognised that this problem of continuation of coherent radiation was adequately and properly treated without any ambiguity long previously, in the classical memoir by Stokes (2) which in the historical order formed a chief foundation of the modern general theory of wave-transmission, thus illustrating from yet another side its comprehensive range. He there introduces for this purpose the refined principle that the influence propagated up to the surface in a very small interval of time τ is represented beyond it immediately after by a shell of the radiation just outside, of thickness $c\tau$, and that therefore the subsequent effect at greater distance is represented as that sent on from this thin shell of volume distribution of disturbance in the medium (3). His previous general expressions for the disturbance transmitted from local volume distributions of displacement and velocity, imposed on an unlimited uniform medium, then enabled him to reach an unequivocal result for the disturbance emerging from the surface in terms of its local data. It should be verifiable from these formulae that no disturbance is transmitted backward. But the immediate aim of Stokes was

---

(1) G. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen* (Wied. Ann. 18, 1883).

(2) G. G. Stokes, *On the Dynamical Theory of Diffraction* (Cambridge Transactions, Vol. IX, 1849; reprinted in Math. and Phys. Papers, Vol. II, pp. 243-328).

(3) *Loc. cit.*, § 33.

to obtain data for the change of plane of polarisation to be anticipated in diffracted light, such as could be put to experimental test as a criterion between the types of theories of elastic media that were competing at that stage of optical science ; accordingly it was not within his purpose to sum up the effects transmitted from all the surface elements and verify that the result vanishes in the backward region (1).

Recently without knowledge of Stokes's discussion, the investigation (2) by aid of secondary sources after the manner of the electrostatic theory of Green has been carried through for general electric radiation, arriving at remarkably simple results for the amplitudes actually contributed by the elements of surface and for their polarisations. On comparison with Stokes's conclusions of 1849, discrepancy seems, however, to be revealed. This is probably to be traced to the cause that, though the equations of propagation must be the same for all types of optical theory, yet the stress-tensors of the medium are different for the electric (rotational) and the elastic solid (strain) specifications, this being in fact the source of the differing laws of reflection for the waves of light. This involves also that radiation is propagated differently from an electric bipolar (Hertzian) vibrator and from a source involving alternating strain, which would account for the discrepancy. But the procedure of Stokes for propagation by strain could, of course, be carried through on the same principles for the different problem of electric propagation : if this were done the aggregate secondary sources in his layer of disturbance of breadth $c\tau$ ought to agree with the superficial distribution derived from Green's method, which identifies the sources with the analytic singularities of the functions concerned.

Extremal variation of Action as the foundation of all relations in general physics.

The variation of the total intrinsic Action of a physical system is postulated to be of extremal character. As it is essentially an integral taken over the spatial extension alone, the widest possible variation, in the Einstein type of theory, arises from changes in the potentials, ten or less, of the type of space belonging to the problem and changes in the components of the electric vector potential; for these are all the independent variables. A particular type of variation is that due to the changes in these potentials, taken at the same points, but arising from displacement of some frame to which the poles of the material system can be regarded as attached. This

(1) This statement must be corrected : the verification appears explicitly near the end of § 34.

(2) *On the Mathematical Representation of the Principle of Huygens Pt* II (Proc. London Math. Soc., november 1919).

type of variation must be extremal because it is included in the general extremal type : and the analytic expression of this fact leads immediately to a stress-tensor, which has no convergence, provided the Action does not involve the coordinates or potentials absolutely, but only their local gradients. This seems to be the source of all the identities that turn up in the analytical developments. The conclusion holds good, however the co-ordinates be transformed; but if they are such that the fourfold element of extension is not equal to the product of differentials of the coordinates, the necessary factor, a function of the coordinates expressed by the familiar symbol $\sqrt{-g}$ of Einstein, will enter into the form of the tensor and destroy its descriptive simplicity. There are as many forms of tensor as there are systems of coordinates, all of them equally effective, and indeed fundamentally identical. It has long been recognised that the Maxwell stress was not shown to be unique : but any addition to its tensor must be locally invariant and must introduce no new poles, and would apparently have to come from the addition of another scalar invariant, of higher complexity, to the Action-density. The system of coordinates might express any network of curves, however complex, or even belong to any frame of bars, to which the moving sources or poles can be regarded as attached : but to avoid complication, we refer this imaginary material framework to the same coordinates to which the potentials of the space are referred. The influence exerted between a source or congeries of poles and the spatial medium around may then be identified with the resultant of the tensor of this material framework integrated over any barrier surface which cuts out the source from the region. As regards a gravific source the procedure of Einstein shows, and it is easy (*cf.* p. 24) to verify directly, that the result is equivalent to an added tensor which is a mass-constant multiplied by the quadratic tensor of its component velocities as in gas-theory. This appears to be the origin of the claim that the laws of conservation of mass, momentum, and energy of particles are implicit in the Einstein theory of gravity (1). From our point of view we should rather adhere to the historical claim that they are implicit in the all-embracing Hamiltonian Extremal Variation of Action, to which all physical theory dealing with relations across a distance, including gravitation, has to conform. Recognition of a space or an aether whose character is subject to variation, and the artifice of an imagined framework of coordinates in that space to which the material bodies remain attached in their motion, and the postulate of extremal variation of an Action expressed as the integral of a local Action-density which must be invariant with regard to local differential change of the frame, make up the outfit for the whole theory. The circumstance that the spatial part of the Action involves second

(1) The fact that when the Action is made extremal, its density vanishes everywhere except at the poles, has even been advanced as a difficulty in the application of the method of Action, whereas it is the source of all the simplification.

gradients does not destroy the scheme, though it renders it somewhat abnormal in comparison with the quadratic functions of first gradients that belong to ordinary dynamics. The variety of possible tensor forms that has been evolved by different writers has here its natural origin.

It has been a favourite position, in the enforcement of special relativist ideas, to assert that physical reality can only consist of the meetings of particles tracing their various paths in space-time, and that all that is essential is the order of these points of encounter along these various curves, the intervening void being filled in conveniently by any form of space whatever that we may choose. Though graphic as an illustration, this is perhaps hardly intended as a serious expression of the scope of physical reality. Let us observe what takes its place in the formulation here sketched. A space is to be chosen by means of its potentials, such as may prove most efficient as regards the range of phenomena to be formulated in it. The moving sources or masses are attached to an imagined mobile framework in space as thus specified, representable by the same coordinates, which may be chosen as we please subject only to those masses being attached in its virtual displacements : and it is this unlimited generality of the coordinate framework holding the masses and also measuring the space that now replaces the filling in of an intervening void as above. For displacement, conveniently represented by variation of the coordinates employed (1), of this network in the space, the Lagrangian process must evolve an extremal variation of the distribution of Action, thus introducing a tensor, which integrated over a barrier surface expresses the mechanical effects transmitted to each source or mass. The notion of colliding material points is no longer relevant : the intimate nature, perhaps infinitely complex, of each source remains unexplored : it is certainly far more than a point or particle, but its relations to the spatial extension, in which the activities reside so as to pass on by its mediation to other sources, are adequately expressed by the stress-tensor appropriate to the particular set of coordinates in the selected form of space, to which the material framework has also been regarded as attached. In ordinary electrodynamic theory this can be held to be the suitable dynamical variational setting of the Maxwell stress, originally introduced sporadically, whose place in the scheme has been an unresolved puzzle since its initiation. When the uniform mixed space-time frame of Minkowski is introduced,

(1) That is, the set of coordinates that is arbitrarily chosen to represent the space (or medium), but yet being in the space must vary along with it, is also conveniently chosen to describe the imaginary material framework that is supposed to connect the poles. If a stress tensor for this framework approximates to Maxwell's form, the coordinates must approximate to Cartesian. In other terms, the variation by displacement of xyz to $x+p$, $y+q$, $z+r$ implies that there is something at the point to displace : but the displacement of the medium of transmission is fully represented by variation of its potentials : thus the other must belong to an imagined material frame attached to the arbitrary set of coordinates and also to the poles.

that stress-form should expand in the well-known striking way into a symmetric fourfold stress-energy-momentum tensor which embraces all the principles of conservation. When with Einstein the fourfold uniformity is only in the differential element of extension, while its scale varies from element to element, the Action with its extremal variation enables the tensor still to connect by mutual relations the parts at a distance. Thus are evolved physical principles suitable to our perceptions, through the reciprocal relations that arise from the proved possibility of expression of the Action in terms of the extremal data alone. These Hamiltonian principles of extremal variation, first detected by him on optical lines for ray-systems, afterwards extended to the general Newtonian dynamical world, would thus be the ultimate universal formulation, putting in evidence the selection that extracts or renders possible an ordered physical science, so far as regards reversible phenomena, including relations of entropy, in an unresolvable atomic cosmos.

On this view it would not be correct procedure to adjoin to the Action special terms for the matter and for the electricity in the region, as has been done. The seat of the activity is the region, and the Action is solely a volume integral throughout it. But in approaching a material pole or atom, or rather the singular curve which is its path in the fourfold, the integrand tends to infinity : so it is cut out by a barrier surface, and its effect in the variation is replaced by that of a surface integral over that tubular barrier, which, reducing to a line-integral in the Action, represents the atom in so far as it interacts with the medium(1). Similarly for an electric atom or electron. In each case the atom is a mere nucleus keying up activity in the surrounding spatial threefold extension, not an active source of activity itself(2).

Source of the linear integrals along orbits of poles that are made extremal in the Action.

The derivation of the linear integral in the reduced extremal Action, which in its own extremal form determines the orbital curve of a particle, from the formula expressing the volume-distribution of the Action throughout the region, seems to be strikingly simple and direct as regards the gravific terms. For it appears that even when an influencing electric field is present, and therefore the extension does not belong to the type of an Einstein purely gravific space, the gravific part G of the

(1) This result seems to follow, as will appear immediately, from the remarkable fact that the distribution of extremal gravific Action in the medium is all concentrated at the poles.

(2) This is the point of view of *Aether and Matter* (1900) Chapter vi, variation of strain in aether being now replaced by variation of structure of space.

Action-density, when made extremal, reduces to zero everywhere throughout free extension. Therefore this Action is made up only of discrete parts, becoming concentrated, when the extremal condition is satisfied, at each pole. On account of the determinate distribution around each pole, regarded as at rest, owing to the radial and differential isotropic symmetry of coordinates, the integration over the three dimensions of space, in coordinates relative to the pole as origin, leads to a value constant and characteristic of the pole which we may call its mass : and the element of the Action attached to the pole is therefore of the form $mc\delta t$, involving the remaining differential, that of time. When transformation is made to a coordinate frame with respect to which the pole is moving with velocity u, v, w this element $mc\delta t$ transforms by the Lorentz correspondence to $m\delta t(c^2 - u^2 - v^2 - w^2)^{\frac{1}{2}}$, which is $mc\delta s$, where $\delta s^2 = c^2\delta t^2 - \delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2$, being the square of the fourfold interval of linear extension, regarded as a time-interval. The orbital part of the Action, with distribution rendered extremal throughout the extension, is therefore $c\int mds$: but this is not a new term appended to the Action, and the orbit derived from it is really controlled, as it ought to be, by the activity in the extension or medium around the particle. A cognate instantaneous deduction of the orbital terms for an electric pole $\int(mds + e\mathrm{F}dx + e\mathrm{G}dy + e\mathrm{H}dz - e\mathrm{V}cdt)$ may possibly be feasible on Weyl's formulation(1). Incidentally the reason for the preference for a change of sign as above in δs^2, making it positive for a time-interval, becomes manifest : for otherwise the lapse of time in an orbit would be an imaginary quantity. The interval from one point-time to another is to be measured by $c\delta t$ (or by δt in altered units) diminished by correction for the change of position. The actual orbit from one point in time-space to another is that for which the sum of the elementary intervals along it is thus diminished as little as possible. The principle that a free line (geodesic) is the path of *maximum* extension (not spatial length) for constant time between every two adjacent points of it, derived by Robb in his synthetic construction of space in terms of the relation of time, is thus recognised as an essential statement involved in the reality of time and not a mere paradox.

The variational ideas of Hilbert.

The first to attempt systematic consolidation, into a deductive system, of the tentative constructions of tensors and vectors, which seem to have been originally

(1) But a ray of light is not a singular curve in the fourfold, thus the possession of the inertia of energy is not sufficient to constitute mass. It is not even a free or extremal path : but when the analysis is carried over into a correlative Newtonian space and time, it does become a hyperbolic orbit.

inspired by generalisation of the Maxwellian stress-formulation, appears to have been Hilbert. In an exposition with the comprehensive title "Die Grundlagen der Physik", *Göttinger Nachrichten*, November 20, 1915, he has identified, following on a brief indication by Einstein himself, a function whose integral extended over the fourfold domain will by variation evolve the Einstein scheme of differential equations. The integrand ('Welt Function') must be invariant as regards change of system of coordinates ('weltparameter') : thus if its form is not to be unreasonably complex it must be restricted to the single Riemann invariant of local quasi-curvature appropriate to the fourfold extension : and it is verified that this in fact gives the required form.

But if an electrodynamic scheme is to be included as well as gravitation, an electric potential which is a fourfold vector must appear as contributing a part to the integrand, in addition to the part involving the ten gravitational potentials that define the linear interval. This will lead by variation to a scheme, involving interdependence of electric and gravitational fields. But Hilbert stresses the property that in such a problem in a fourfold four of the differential equations, in this case fourteen in number, that arise from the extremal variational property of the integral, are not independent but are involved in the others. He points out that these four may be chosen to be the electrodynamic relations : and he concludes with emphasis that in this sense electrodynamic phenomena are manifestations ('Wirkungen') of gravitation, and that Riemann's aspiration to establish connection between light and gravitation has thus been at length realised.

Though intuition rebels against such sweeping specialisation, this analytical relationship ought to be capable of direct physical interpretation. If we fall back on our guiding principle that the gravitational field is determined by its singular points, poles of various kinds which stand for the Newtonian attracting matter, it might be held to mean that where that field is free of singularities the electrodynamic field will be free of singularities also, for the four electric field-equations are involved in the ten gravitational ones. In that case the Hilbert principle would require that the electrical and gravitational poles coincide, that the ultimate Newtonian attracting element is also an electric element, and conversely. Is then every electron, and every other type of ion, also in another but correlative aspect a particle of matter of definite gravitating mass? What is the relation between these two properties of the pole? For there should be one or more types of such relation corresponding to electron, ion. Are we here in sight of the strict relation of electricity to matter? The answer, if any, would have to come by minute constructive analysis of the part of the fields that closely surrounds the structure of the pole, possibly in ways yet unimagined. If the pole is of infinitesimal extent that local field will be of intense curvature, and abstruse relations must be involved. The exact solution of Schwarzschild carries this gravitational field close up to the pole, and that of

Nordström (cf p. 28) the electric field : but the nature of the pole itself, recognised always as really a structure essentially unknown, may still escape us even in these respects of merely physical configuration.

Here we come up against fundamentals. The ultimate poles are known to be either all alike as regards both mass and charge, namely electrons, or they are of a limited number of definite types, as regards mass and spectrum associated with negative or positive multiples of the fundamental charge, namely atoms. What contribution will this type of theory, suggesting relation of charge to gravific mass, manage to make to the expression of this ultimate fact?

These questions will be approached again when the radial field is examined in detail. It appears that an electric source involves a space around it of definite constitution different from the Einstein species of distance-spaces which represent fields purely gravific. It is thus hardly appropriate or exact to describe an electric pole as involving a gravific as well as electric field, though its spatial field could be imitated by a continuous regional distribution of mass or gravific sources except that the density would be concentrated in a higher degree at the centre. On transition to the Maxwell relations, it must be this distribution that represents the intrinsic inertia of the electron.

It may be noted, as a feature characteristic of the wayward evolution and consolidation of theories, that the gravific part of the Action has been determined as a scalar distribution, invariant for a general Riemann space, and then an electric part separately invariant as regards its own fundamental vector has been added, which destroys the Einstein extremal type of that space in which pure gravitation was found to subsist : an electric field interacts with and disturbs a gravific field, because they both involve changes in space.

In a continuation of date December 1916 Hilbert seems to recognise that the principle of physical determinacy could no longer be relied upon in general in a fourfold whose elements are, as he terms it, pseudo-Euclidean, that is flat but with some of the four dimensions imaginary. He thus replaces the imaginary variables by real space-time coordinates, and expresses a set of conditions betwen the space potentials that are necessary if the scheme is to correspond with real space and time, in the respect that when the coordinates are changed effects are still to succeed their antecedents without ambiguity, that, as he phrases it, to this degree the principle of causality is to obtain. The change to a system of coordinates in which this property is preserved he characterises as a proper space-time transformation : the condition involved (p. 67) seems to be that there shall everywhere be only *one* imaginary dimension in the fourfold (1). When this condition is attended to it is

(1) The conditions ensure (cf. p. 10) that the spatial part of δs^2 shall be essentially positive.

made out, by means of approximate Laplacian analysis, that knowledge of the distribution of the fourteen potentials, ten spatial and four electric, at the 'present' makes their course of change in the 'future' determinate and unique, so far as these conditions hold and therefore *this course of change has physical meaning.* The terms present and future (or the reversible past) are here defined with reference to that coordinate of the pseudo-Euclidean fourfold which is the expression of time. If more (or less) than one imaginary dimension arises anywhere in an analytical transformation of the fourfold, that transformation has to be rejected as being beyond the determinate world of physics, or perhaps as unsuitable to express it. The scheme then could *not* claim to evolve reality, with its determination of the future from the whole of the present, which appears as something absolute in the background to which the analysis has to be careful to conform (1).

Thus one can concur with Hilbert and with Klein that the essential feature of the new analysis, which has merged gravitation in the scheme of space and time, is that the extremal relations that determine extension after Riemann on the basis of distance are now involved in altered form along with the extremal relations of Action that determine dynamical sequence. They could not be extricated except in the limiting case corresponding to an infinite velocity of radiant propagation, when space becomes determined separately and the sequence of schemes of events is then determined in that space. The new feature is that the formulation of space-time, as well as the dynamics, is modified by, and so itself now helps to determine, the distribution of material and electric poles that constitutes the permanent essence of matter, and without which it has even been argued that space itself must vanish.

But Hilbert seems to prefer, as usual in algebraic analysis, to ignore the atomic clue, by constructing (p. 70) an exposition in which there shall be no singular points in the fourfold, but in place of them a continuous distribution of electric fourfold potential which he aims at identifying with material manifestations. The idea of a duplex medium, aether *plus* material atoms (cf. p. 36) is thus lost.

The radial type of combined gravific and electric field.

The simplest case of concomitant gravitational and electric fields is that of a single point-source of mass m and charge e. This case has been worked out by Nordström (2) with a result which, like the Schwarzschild field confined to a mass-centre, is exact; namely that

$$\delta s^2 = \mathrm{F}^{-1}\delta r^2 + (r\delta\theta)^2 + (r\sin\theta\delta\varphi)^2 - c^2\mathrm{F}\delta t^2$$

(1) The intermixture of real and imaginary coordinates has been criticized on lines essentially similar by R. A. Sampson : cf. the *Halley Lecture*, Oxford, 1920.

(2) *Amsterdam Proceedings* 1918, p. 1241.

where with his units

$$\mathrm{F} = 1 - \frac{km}{4\pi r} + \frac{ke^2}{8\pi r^2}.$$

This in ordinary c. g. s. units with e in electrostatic measure seems to correspond to

$$\mathrm{F} = 1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r} + \frac{\gamma e^2}{2c^4 r^2},$$

in which γ is the constant of gravitation $6 \cdot 10^{-8}$ c. g. s. The second term is now that obtained in the solutions by Schwarzschild and by Dröste for a central gravitation alone; and the dimensions of the third term have been made to correspond with it by introducing the appropriate power of c which had been chosen to be unity.

In this form of δs^2, r is merely a radial parameter which can be replaced by any function of r. Thus in this case of conical symmetry, the presence of an electric field still leaves the spatial potentials with an arbitrary feature; but it can be readily shown that this indetermination is removed if the coordinate system as expressed by algebraic functions is postulated to be everywhere locally isotropic.

The equation of a free orbit of an uncharged body in this field is determined (cf. p. 24) by $\delta \int ds =$ extremal. Now approximately

$$-ic\frac{\delta s}{\delta t} = 1 - \frac{\gamma m}{c^2 r} + \frac{\gamma e^2}{4c^4 r^2} - \frac{1}{2c^2} v^2 + \frac{1}{2c^2}(1 - \mathrm{F}^{-1})\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \ldots$$

where v is the velocity of the body with reference to the frame, the relatively very small last term being a main cause of the Einstein progression of the apse of a planetary orbit. But the ordinary variational equation of a free orbit in the Newtonian frame is

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + \mathrm{V}\right) dt = \text{extremal},$$

in which V is the potential of the field of force per unit mass, thus for example the radial component of attraction being $-m\partial \mathrm{V}/\partial r$. On comparison it appears that the free orbit of the previous specification, by $\delta \int ds =$ extremal, is described as if under a central Newtonian attraction

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\gamma m}{r} + \frac{\gamma e^2}{4c^2 r^2}\right), \text{ which is } \frac{\gamma m}{r^2} - \frac{\gamma e^2}{2c^2 r^3},$$

but is, as before, subject to the disturbance arising from the last term in $\delta s/\delta t$.

The first term of this central force represents Newtonian gravitation and gives an elliptic form to the orbit. The second or disturbing term, inversely as the cube of the distance, was shown by Newton for the purposes of his lunar theory to produce precession of the apse of the ellipse : in fact the usual equation of the central orbit, in terms of u equal to r^{-1}, is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2} = \frac{\gamma m}{h^2} - \frac{\gamma e^2}{2c^2 h^2} u,$$

or

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta'^2} + u = \text{constant}, \qquad \text{where } \theta'^2 = \theta^2 \left(1 + \frac{\gamma e^2}{2c^2 h^2}\right),$$

representing an ellipse rotating through an angle $2\pi \frac{\gamma e^2}{4c^2 h^2}$ in each revolution of the planet.

This electric progression of the apse of the orbit, being the whole effect of the electric field, might conceivably compete in magnitude with the gravitational progression which is only a secondary effect, a point which we shall now examine. The latter is by the Einstein formula $2\pi \frac{3}{h^2}\left(\frac{\gamma m}{c}\right)^2$ for an orbit nearly circular, the expression being as usual here adapted to practical units by altering the power of c so as to make it of zero dimensions.

The ratio of the electric to the gravitational precession is $\frac{1}{12\gamma}\left(\frac{e}{m}\right)^2$. If the central source of activity is an electron e/m is of order $\frac{7}{4} 10^7 c$: if an atom of hydrogen it is of order $10^4 c$: and γ is $6 . 10^{-8}$. Thus if the source is an atom of matter with ionic charge the electric progression overwhelms the other part. The intra-atomic theories of rings of electronic satellites will here possibly be very different from the customary calculations.

It is not unlikely that the Sun has a small positive charge due to the expulsion of electrons by molecular disintegration, reaching a limit determined by its resulting field (1). If it were charged so that the average field at its surface is as much as one volt per cm., and if a is its radius, its charge E would be given by

$$\frac{E}{a^2} = \frac{10^8}{c}; \quad \text{and} \quad M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho,$$

so that for the sun E/M would then be of order $4 . 10^{-4} c^{-1}$.

(1) Thus electrons could be discharged with radio-active speeds from the Sun, and its positive charge thus continually increased, until that charge would be sufficient to drive out positive ions beyond recall by gravitational attraction : this would put a limit of the solar field at 900 volts per cm., and very much less if the ions have the initial velocity of α rays.

As the planet that is under the influence of the Sun would be a conductor, there is the effect of direct attraction due to the displacement of its own electricity to be added. For a planet of radius b this is the attraction between E on the Sun and an image $-Eb/r$ in the planet, which is a force E^2b/r^3. The total effect of this disturbing force is again a progression of the apse, by Newton's theorem, amounting for a planet of mass m to a fraction $-2c^2b/m\gamma$ of the above indirect electric effect due to supposed electric warping of the space.

The Einstein effect, the direct electric effect, and the indirect electric effect on the planetary apse must thus be represented by

$$2\pi\frac{3}{h^2}\left(\frac{\gamma M}{c}\right)^2, \qquad -\pi\frac{bE^2}{m\gamma h^2}, \qquad 2\pi\frac{\gamma E}{4c^2h^2},$$

which are as

$$\frac{3\gamma^2}{c^2}\left(\frac{M}{E}\right)^2, \qquad \frac{b}{2m}, \qquad \frac{\gamma}{4c^2}.$$

For a solar field of n volts per cm. these ratios are for the planet Mercury of order

$$1, \quad 2\cdot 10^{-33}n^2, \quad 2\cdot 10^{-22}n^2,$$

showing how absolutely negligible the electric apsidal effects are for matter in bulk in comparison with the direct gravitational, and also how vastly the spatial effect of an electrified Sun on an electrically neutral planet exceeds that of its direct electric attraction.

License in choice of physical units.

This occasion is not inopportune to consider how the present irritating uncertainty of the units adopted in abstract mathematical writings relating to physical science might be mitigated. For purposes of practical physics and engineering there is only one recognised set of units, the original electromagnetic c. g. s. system with its practical multiples, volts, ohms, coulombs, amperes and so on. In abstract algebraic analysis it is now usual to gain symmetry as regards the velocity factor c by a mixed electrostatic magnetostatic system, instead of that of Maxwell's *Treatise*. It would be less confusing to choose a provisional unit of time so that c becomes unity and so disappears altogether : the final results could then be translated into the practical unitary system by inserting the power of c in each term that is required to give it the proper dimensions. Again, some writers are accus-

tomed, following Heaviside, to absorb the frequent factor 4π by also altering the units of electric and magnetic quantity; so that there is added uncertainty in the final result as to whether this has been done or not. We are now liable in writings on astronomical relativity to be abruptly confronted with the expression of the mass of the sun in kilometres, involving yet another new orientation. The result of such unitary license is to make it impossible, without an exploration which consumes time, for a person who has ceased to be a specialist to pass with security from one writer's work to that of another. This promotes impatience and discouragement, and intensifies that narrow insulated specialism which it is in the interest of all to circumvent as far as possible. It is a slight matter, but one in which international settlement such as was so important for technical electrical science seems almost called for.

Nature of radial and other spaces.

If the function $F(r)$ in the expression above for a radial space is essentially positive, that is if e/m merely exceeds $(2\gamma)^{\frac{1}{2}}$ or $12^{\frac{1}{2}} . 10^{-4}$, or a rather different value for the isotropic scheme whereas it is about $10^4 c$ for an α particle, the singular region near the origin can shrink to a point. Otherwise there would be also two spherical surface sheets of singularity, of extremely minute radius : and in the space inside the force may be repulsion from the centre, while in the different universe outside the force is attraction.

It is recalled above that in the differential theory for radial space the function of r that represents the distance is still arbitrary, even when the centre is an electric pole in addition to being a gravific one. But all essential indetermination disappears if the space is to be specified by integrated coordinates which are everywhere differentially isotropic(1). In general may we assert that a space-time is determined throughout if we know its poles, including their strengths as regards charge and essential mass, and assuming radial symmetry, by the condition that the coordinates shall be everywhere locally isotropic? To the free mobility of Euclidean space this latter condition is of course essential.

As already noted, it is hardly suitable to assign a gravific field as a concomitant to electric manifestations. An electric source modifies radially the free space around it, as does a gravific source : but the two changes follow different specific laws, the electric being much more local and usually much smaller.

In one sense this radial space is not self-determined by its central pole alone :

(1) When r is thus transformed to R, chosen as that function of r which renders δs^2 isotropic, the nature of the singular surfaces near the centre will be changed.

the invariant properties which restricted it belonged to space in general. Somewhat analogously an abstract doctrine is often maintained that an isolated particle existing alone could have no field and no mass.

In these formulae the pole has been reduced to rest. But the dynamical tensor belongs to an imaginary material framework in which all the moving poles are attached : this frame, being referred to moving coordinates, therefore involves products of types $\delta x\ \delta t$ in δs^2, and the field near a moving pole is obtained by referring the formula above to coordinates having relative motion. The synthesis of Einstein makes it clear that the local tensor is interpretable in terms of mass and its momentum and energy : but a direct verification from the extremal variation for the radial field (1) would be concise and suitable.

The essential quality of the fourfold pseudo-space has been exhibited without use of imaginaries by Lorentz, by a beautiful variation from the method of Dupin, who invented his indicatrix as descriptive of the neighbourhood of a point of a surface. An ordinary continuous surface is made up of flat elements of area; but this description is not adequate, for it does not bring out the coherence. The feature of curvature must be introduced, and that was exhibited graphically in its local relations by Dupin by utilising a section of the surface parallel and adjacent to the tangent plane at the point : it is in the limit an ellipse or hyperbola whose radii determine the curvatures of the surface in the normal planes. If indicatrices are drawn all over the surface their relations determine the intrinsic character of the curvature. If it could be arranged so that some relations between indicatrices were not altered, by bending of the sheet without changes of length such as stretching would involve, they would express the intrinsic nature of the surface in that respect. It is necessary for this purpose to replace the plane indicatrix of Dupin by the indicatrix of Lorentz, which is a geodesic circle around the point as centre, so infinitesimal that it is adequately expressed by the equation $\int \delta s = \text{constant}$, pushed to the second order. Then the texture of their intersections defines everywhere the intrinsic local continuity of a Gaussian inextensible sheet. In higher dimensions these indicatrices become intersecting hypersurfaces of the second order; and from the permanent geometry of their configuration Lorentz has evolved in more direct intuitive manner the equations of the Einstein theory.

---

(1) This seems however to be provided generally by the idea of p. 24.

Special varieties of space-time extension.

The space-time that represents a field of free gravitation, without radiation and resulting electric field, is that of Riemann as controlled by invariance of the quadratic expression

$$\delta s^2 = \Sigma g_{rs} \delta x_r \delta x_s$$

in which the coefficients g_{rs} are implicit functions of some scheme of coordinates or spatial parameters x_r *in that space*, but now restricted in a sixfold manner by the requirements of extremal variation, p. 12. Various cases arise for special investigation, but all apparently very exceptional.

(i) As regards pure gravific space there may be radial symmetry around a centre : the resulting limitations on the potentials have been determined by Schwarzschild and by Dröste : if the integrated spatial coordinates are restricted to be everywhere locally isotropic the expression for δs^2 determining the radial space is unique. A space-time isotropically specified would, if it can exist, thus be determined by its poles, or if limited in extent, by its poles and data over the boundary. Its existence is implied in the approximate form of the gravitation theory.

(ii) The pure gravific space may be isotropic in its coordinates but not also radially symmetrical : then

$$\delta s^2 = P^2(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - Q^2 \delta t^2,$$

and the differential equations limiting the forms of P and Q may be determined by a similar analysis. It seems that it is only in exceptional cases that this form is possible, the radial field being one of them.

(iii) Or the space may be merely referred to a rectangular network expressible algebraically so that

$$\delta s^2 = g_1 \delta x_1^2 + g_2 \delta x_2^2 + g_3 \delta x_3^2 - g_4 \delta x_4^2,$$

and the inherent limitation similarly obtained.

The extreme limitation of all these types must have been recognized early by Einstein.

But when a free electric field is present the extension is no longer subject to sixfold restriction; though it appears that its single Riemann curvature invariant is restricted to be everywhere zero. This is illustrated (*supra*) by the form for δs^2 around an electric pole as found by Nordström, with its different type of singularity

at the pole. Inside a distribution of matter or electricity or both, taken as of uniform continuous density, the fourfold extension is of unrestricted Riemann type : even its single curvature invariant does not vanish.

Whatever be the type to which a space and its coordinates are restricted, the method of variation remains effective to determine immediately the extremal relation and its form of stress-energy-momentum tensor, which the set of coordinates as constrained to this type requires : so much so that with the method at hand it is almost otiose to select and discriminate among possible forms of tensors. But when the space is limited in advance as above by restricting its potentials, the variation can only arrive as the conditions of invariance for those that remain, that is, for a restricted variation of the nature of the space. Though the equations it leads to will be correct, as in Hilbert's deduction for radial space, other relations may have to be verified before we can know that the hypothesis of a space thus limited is legitimate : for instance, the process of variation now provides a tensor, invariant only for the special group of frames that can be expressed in terms of the restricted number of variables. The determination of the expression for the invariant gravific part of the Action is the crucial operation.

An electric field also must be spatially interpreted if a gravific field is spatial.

We have concluded that the imposition of an electric field breaks up and dissolves the extremal space into which the gravitational effects have been absorbed. The problem thus seems imperative, to specify directly what wider type of spatial continuity then takes its place. In one sense it is defined by extremal variation of the Action as now altered by introduction of an electric vector : but if that vector cannot be associated with space it must be connected with an aether. A most interesting account of it seems to be provided on the lines of the theory developed by H. Weyl, which apparently replaces δs^2 by a wider differential invariant

$$\delta s^2 \left(1 + 2\frac{\delta l}{l}\right) \quad \text{where} \quad \frac{\delta l}{l} = \mathrm{F}_1 \delta x_1 + \mathrm{F}_2 \delta x_2 + \mathrm{F}_3 \delta x_3 + \mathrm{F}_4 \delta x_4,$$

when it turns out that the vector F thus introduced, and partaking in the extremal variation, plays the part of an electric vector potential. The mode of expression of the invariant here adopted implies that the mobile differential isotropic Riemann measuring rule utilized by Einstein must alter its length as it is transferred to new positions, in the differential ratio $\delta l/l$. When it is transferred along a closed circuit back to its starting point its length will thus have returned to a different value unless the expression for $\delta l/l$ is an exact differential. But that is the condition that

the electric field shall vanish : the vector potential F could then only be described as (like a residual constant latent momentum in dynamics) possibly a permanent residue left by an electric field after the manner of the 'electrotonic state' of Faraday. This failure of determination as regards the measuring rod has naturally been regarded as a serious obstacle to the reception of such a theory. But on the other hand why may not the local fundamental invariant δs^2 be replaced by a modified one, worked out on parallel lines on its own foundation? The real inconsistency would seem rather to be the insistence on retaining the idea of a *permanent transferable* material scale of intervals of extension in length and time, which is something imposed from outside and out of touch with a theory that develops differentially and so internally(1). It may be held to be a surviving fragment of the mobile rigid body which is the means of finite measurement in uniform space, but which cannot remain when the space is not uniform, except approximately in a differential domain throughout which uniformity can be assumed.

The controlling local invariant, if thus compounded of the quadratic form δs^2 and the vector F, would be of a special cubic form. From it a spatial synthesis of gravific and electric field relations ought perhaps to be developable by extremal analysis, in which the vector F would now of necessity take part. Here again the permanent intrinsic things would be the gravific and electric poles. The great desideratum, if it be feasible, is a theory of the relation of the field of modified space-time to its sources, following out the methods of Green for the simple case of static Euclidean fields of force, which have already admitted of extension to propagated Euclidean fields of radiation as above indicated, p. 19.

Theory of a binary medium.

As regards the twofold aspect of the subject, propagation in the aether or in quivering space, and mechanical forces sustained by the material poles interspersed in and determining this field of activity, we appear to have gained in comprehension by an enlarged representation. We can adopt any frame of reference at our choice, to which the matter is attached, expressed by coordinates in the space by whose instantaneous values (2) the space also is itself expressed. The property of extremal

(1) If it be said that the atoms say of hydrogen supply just such mobile scales of length and time throughout the universe, the answer is that they are only approximate in a varying fourfold. See also p. 39.

(2) Compare the Eulerian analytical specification of the motion of a solid body, by reference to coordinates of a frame which is itself in motion along with the body : this likewise is a specification differential as regards time, from which the integrated change of position is to be determined by continuation.

variation of a suitable invariant integral of Action, with regard to the local potentials which specify the gravific and electric fields, then leads to the equations governing and conditioning those interacting fields, as referred to that frame. One special type of variation of the potentials is that arising locally from a Lagrangian virtual displacement of the frame of reference, that is, due to variation of its coordinates, but so as to preserve the region of integration unvaried : for this type the result must be extremal, because it is so for the general variation which includes it. The exhibition of an extremal result for this variation by displacement of coordinates involves immediately the stress-tensor belonging to the coordinate network that had been chosen, whether it be rectangular or curvilinear. It is a self-equilibrated tensor and suitable for transmission of influence, in the sense that its divergence everywhere vanishes, because it is only the gradients of the potentials and not their absolute values that occur in the Action : but this quality breaks down, requires to be supplemented for a complete account, at the singular points or mass-centres at the region. These poles are to be cut out of the region in which the activities are propagated, by any kind of barrier surface closely surrounding them, in Green's manner; and their influence on the region, and its reaction on the poles, are replaced by that of the tensors acting over the barrier surfaces. When the barrier surfaces are taken to be of infinitesimal extent, the integrated effect of the tensors over one of them should in the limit show (as on p. 24) a result interpretable in terms of mass and charge of the included pole, and its momentum and the forces acting on it, in the manner of the tensor adapted by Einstein from gas-theory.

On the elastic-aether theory space is occupied by a medium, and it is the disturbance of the medium, expressed locally by strain involving displacement gradients, which is the variable in the function representing the distribution of Action : in the new mode of representation it is deformation of the space itself, by change of type, that is the foundation of the Action. The isotropically invariant local Lagrangian function of strain, possibly including differential rotation, which expresses the former Action per unit volume, is replaced in the latter specification of an Action by a function that is locally invariant for any assigned type of space, as determined in the Riemann manner by conservation of its group of differential distance relations; and variation of this type of spatial scheme now takes the place of variation of Action in terms of strain. In the former order of ideas, variation of the electric potentials would be taken to mean variation of internal locally balanced latent structure, of which they somehow represent in perhaps unknown way the reduced compendious influence in the local part of the Action, exerted in modes of which hydrodynamic and other illustrations are available. In the latter order of thought there is a heterogeneous ordering of the array of points which impose marked locality on mere spatial extension, and a coordinate network locating a geography in that arrangement; this double ordering is redundant, more than is necessary. The

local density of Action in this specification must be some function of the potentials specifying this enlarged type of space, and their gradients with regard to the coordinates, which has to be locally invariant for change of coordinates : naturally it will not involve the absolute local values of those coordinates explicitly, or the absolute local values of the potentials, but only relative gradients of the latter. The redundancy of the data implies in advance identities in the development, which are the feature af the analytical tensor theory.

The principle of an extensional distribution of an Action function, whose integral is postulated to be of extremal variation for every part of the region, poles and other centres of activity being excepted and cut out as above, is the only known type of concatenation assigned by purely local or differential specification, which permits of the deduction of general relations between parts of the medium separated by finite distance(1). A scheme of permanent *relations at a distance* of this kind can alone constitute the direct systematic knowledge, such as it is open to us to acquire, of the course of nature. The abstract Action formulation of Lagrange-Hamilton runs parallel perhaps to the way in which such large-scale knowledge of group-relations becomes constituted for us, in a complex world which we cannot comprehend or even recognise in its atomic detail. The Principle of Extremal Action would thus be the fundamental formula of reversible physical science.

The problem brought into the foreground by Einstein, with such brilliant results in anticipating gravitation, is whether a formulation depending directly on changing concatenations of isotropic quadratic distances in an ultimate array of points is more fundamental, — not more correct but closer to nature, — than one depending on local change of form in a Euclidean scheme of space. It may be said that it is the circumstance that the Lagrangian function T — W, in this case the form of δs^2, is not essentially positive that renders such a question possible : for it perhaps saves the physical world from the stark rigidity of complete interdetermination in space and time.

There is the other prior question perhaps more profound, why the fourfold space-time continuum of Minkowski is closer to nature, at any rate as regards each differential element of extension, than a Euclidean space combined with the Newtonian time, although it is far more remote from our means of mental comprehension. Some attempt at an answer has here been offered. It appears that there can hardly be definite radiation, such as disentangles itself radially from the local dynamical disturbance around atomic centres, and is propagated ever after to celestial distances, however great, compactly without change of form or dissipation, unless the universe is organised into space of three dimensions, leaving out the special circumstances

(1) The construction of an invariant tensor implies transmission of stress to a distance, but not also the reciprocal relations that are involved in an extremal distribution of Action.

of only one. It also appears immediately that the vast complex of radiant interchanges, which largely, perhaps completely, determine interrelations in the universe, maintains invariant relations to all frames of reference for space and time that are included in the fourfold group for which $\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - \delta t^2$ is invariant, provided the sources and reflectors of the radiation are compelled to come into invariant relation to this same group of frames instead of the rigid-body group of separated space and time. It is further held that if the energies of dynamic transmission are *regarded as* all resident in the radiation and the spatial or aethereal continuum which carries it, so that the mass-centres and electric centres can be regarded as only passive local intrinsic constraints keying up and thereby determining permanent fields around them, these centres will be responsive freely to the surrounding radiation and no compulsion would be required to adjust their movements into relation with it(1). We are asked then to recognise that in the rare cases in which we can practically distinguish, this formulation in terms of invariant fields of radiant transmission is more flexible and more closely adapted to a view of nature as an interaction of discrete atoms than the familiar formulation in terms of solid bodies maintaining absolutely invariant spatial relations of form. There should be little difficulty about admitting this alternative, if necessary as it appears to be, seeing that in either case the question is as to the construct of a scheme adapted to exhibit the larger relations of an atomic constitution of our universe which is in its particulars beyond detailed investigation.

A criterion for an active æther.

This mode of exposition of the world-history can thus be held to imply a medium of communication, but one too different from our ideas of matter even to be readily expressible in the usual forms with which we clothe space and time. It is at variance with one of the three classical Einstein predictions, the definite displacement of the lines in a solar or stellar spectrum on account of gravitation. According to the strict relativity, an *extramundane* atom, *imagined* to be introduced extraneously into this self-adjusted world-history, would have to carry about with it absolute periods of time of vibration, for it is a self-contained system and the modified space and time around it is a mere local form. Such absolute time has to be identified with the $c'\delta t$ in this invariant expression δs^2, for there is no other way available to introduce it into the theory. But as thus defined, it is *not even integrable*

(1) The argument is set out in *Aether and Matter*, 1900, p. 176. Cf. also International Mathematical Congress, Cambridge, 1912, introduction to lecture dealing with radiant processes as the universal mode of electrical and general physical adjustments.

as regards a moving atom; so it could not be the basis of an independent dynamics of the atomic structure, at any rate unless x, y, z remain constant which seems to locate absolute position. Even then, an extraneous atom moving across from the Earth to the Sun would have no time of its own in which to subsist. Moreover there could be no assurance that the value of the gravitation potential at a distance, thus given directly by spectral observations, would be concordant with the value determined by astronomical methods of continuation. It thus seems difficult to justify the imposition, from without, of an absolute integral scale of time on a world-history that is differentially constituted : its transfer from place to place by an atom may be described as an extramundane fiction. If observations ultimately lead to its acceptance, it will still have to be proved that it is consistent with a self-determination of the universe. Cf. also *Proc. Roy. Soc.*, nov. 1919.

By taking full advantage of the importation of the extremal variational dynamics of Hamilton, practical relativity has here been defined as the establishment of relations between bodies at a distance by continuous interconnexion across intervening space. This scheme works out, after Einstein, into a complete self-consistent theory, before any assertion is made of the identity of all atoms of the same substance. If that identity is to be interpreted absolutely, so that surrounding modified space-time is merely formal and does not count, it gives another universal scale of space and time, in fact, relativity mitigated by absolute knowledge. If these two scales agree, the fact should be capable of the necessary proof : if they are found by spectral observations not to agree, it shows that the modified spatial surroundings of the atom are not a mere formality, that deformation of an active æther is involved, that it must not be transformed *locally* into normal space-coordinates unless the transformation extends outward without limit. The existence of identical atoms, making themselves known by radiation to a distance, is thus held to be something extraneous and absolute, and possibly inconsistent with the extreme relativity that denies an æther in any form : if experiment were to decide otherwise, in accordance with the asserted prediction, it would remain for theory to establish the necessary reconciliation in order to complete itself.

SOME RELATIONS BETWEEN THE THEORY OF NUMBERS

AND OTHER BRANCHES OF MATHEMATICS

By Leonard Eugene DICKSON

(Chicago).

I have chosen the subject of my address before the Congress from the field of the theory of numbers, the literature of which I had been examining minutely in the preparation and publication of the first two volumes of my *History of the Theory of Numbers* (1). I shall approach a few typical problems of the theory of numbers through the medium of other branches of mathematics.

Accordingly I shall first apply geometrical methods to find all the rational solutions of certain homogeneous Diophantine equations. I do not consider equations of the second degree since all their rational solutions can be found at once when one solution is known; in fact, we can evidently represent parametrically all the points of a quadric surface by making use of the secant lines through a chosen point on it.

My second topic relates to the more difficult question of finding one or more formulas which give all the integral solutions when the parameters take only integral values. While seeking interesting material which would illustrate this topic, I was led to the discovery of a very simple general method of finding explicit formulas which give all the integral solutions of homogeneous quadratic equations in several variables. For equations in four variables, the method makes use of some simple properties of integral algebraic numbers; while for equations in six variables, use is made of properties of integral quaternions. Since it is the purpose of this address to point out applications of several branches of mathematics to the theory of numbers in its elementary sense, I take this opportunity to demonstrate the fact that the theories of algebraic and hypercomplex numbers provide effective tools for the treatment of Diophantine equations.

Finally, I shall point out how invariants came to be employed quite naturally in the theory of numbers.

---

(1) Carnegie Institution, Washington, D. C., 1919, 1920.

I. Geometrical methods of finding all the rational solutions of certain Diophantine equations.

We shall indicate several methods of finding all the rational points on certain cubic surfaces, partly with the aim to show the intuitive character of the geometrical treatment of homogeneous Diophantine equations, but mainly with the aim to show why we should expect a variety of types of formulas each giving all the rational solutions of the equation, and also to point out that we can pass from one such formula to the others by means of birational transformations.

To have a concrete illustration, take the equation

$$x^2y + y^2z + z^2u + u^2x = 0, \tag{1}$$

which Hermite proposed as an exercise. The most evident geometrical method of solution makes use of the skew rulings (straight lines lying on the surface)

$$R_1 : \quad y = u = 0; \qquad R_2 : \quad x = z = 0.$$

Any straight line L which intersects both R_1 and R_2 will meet the surface in an unique third point (unless L is a ruling), whose coordinates are therefore determined rationally. The general point on R_1 is $(a, 0, b, 0)$; that on R_2 is $(0, c, 0, d)$. The general point on the line joining these points is (ma, nc, mb, nd), which is on the surface (1) if and only if

$$mn\{m(a^2c + b^2d) + n(ad^2 + bc^2)\} = 0.$$

From $mn = 0$, we obtain the initial points. The final factor gives the desired solution

$$\begin{cases} \rho x = -a(ad^2 + bc^2), & \rho y = c(a^2c + b^2d), \\ \rho z = -b(ad^2 + bc^2), & \rho u = d(a^2c + b^2d). \end{cases} \tag{2}$$

In case the above final factor is identically zero, we see that $a \neq 0$ and hence may take $a = 1$, whence $c = -b^2d$, $b^5 = -1$. The resulting real points are $(m, -nd, -m, nd)$, which lie on the ruling

$$R_3 : \quad z = -x, \quad u = -y.$$

Hence *all real solutions, except those on this ruling* R_3, *are given by formulas* (2).

Since the points of a surface depend upon the ratios of only three parameters, we may reduce by one the number of homogeneous parameters in our solution (2).

This is also evident since only the ratios $a : b$ and $c : d$ were essential in our initial points. First, let a and c be different from zero. Divide equations (2) by a^2c^2 and write

$$\frac{b}{a}=\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \frac{d}{c}=\frac{\nu}{\lambda},$$

retaining the common denominator λ so that also our final formulas shall be homogeneous. We obtain

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma x = -\lambda^2(\lambda\mu+\nu^2), & \sigma y = \lambda(\lambda^3+\mu^2\nu), \\ \sigma z = -\lambda\mu(\lambda\mu+\nu^2), & \sigma u = \nu(\lambda^3+\mu^2\nu). \end{cases}$$

Next, if $a = 0$ and hence $b \neq 0$, we may take $b = 1$ in (2) and obtain the points $(0, cd, -c^2, d^2)$ on the conic $y^2 + zu = 0$, which with R_2 is the section of our surface by the plane $x = 0$. Finally, if $c = 0$, we may take $d = 1$ and obtain the points $(-a^2, 0, -ab, b^2)$ on the conic $z^2 + ux = 0$, which with R_1 is the section by $y = 0$. Hence *all the real points on the surface* (1) *are given by formulas* (3) *together with the points on the preceding conics and those on the ruling* R_3. These three classes of points are actually exceptional, not being cases of (3).

There is a second geometrical method of solving equation (1). Writing it in the determinantal form

$$\begin{vmatrix} z & -x & 0 \\ x & y & -u \\ u & z & y \end{vmatrix} = 0,$$

we see that the surface is the locus of the intersections of corresponding planes of three projective bundles of planes (each bundle being the totality of planes through a point) :

$$\begin{aligned} \lambda z - \mu x &= 0, \\ \lambda x + \mu y - \nu u &= 0, \\ \lambda u + \mu z + \nu y &= 0. \end{aligned}$$

Solving these for the ratios of the coordinates, we get

$$\frac{z}{x}=\frac{\mu}{\lambda}, \qquad \frac{y}{x}=\frac{\lambda^3+\mu^2\nu}{-\lambda(\lambda\mu+\nu^2)}, \qquad \frac{u}{x}=\frac{\mu^3-\lambda^2\nu}{-\lambda(\lambda\mu+\nu^2)}.$$

Hence we have the solution

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho x = -\lambda(\lambda\mu+\nu^2), & \rho y = \lambda^3+\mu^2\nu, \\ \rho z = -\mu(\lambda\mu+\nu^2), & \rho u = \mu^3-\lambda^2\nu, \end{cases}$$

which was published by Hermite (1) without indication of his method. The above theory is applicable to any cubic surface (2).

The algebraic equivalence of the two solutions (3) and (4) can be explained by use of a general principle. When, as here, we have two parametric representations of all the points of an unicursal surface, the two sets of parameters are connected by a birational transformation. In fact, either representation is a correspondence, which is one-to-one in general, betwen the points of the surface and the points $\lambda : \mu : \nu$ of a plane. Hence the ratios of λ, μ, ν are expressible rationally in terms of the ratios of x, y, z, u. Inserting the values of the latter in terms of the parameters λ_1, μ_1, ν_1 of the second representation, we obtain the desired birational transformation. In our case, equations (3) give

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{z}{x}, \qquad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{u}{y},$$

and two values for σ which are consistent in view of the equation (1) of the surface. Inserting the values (4) of x, y, z, u expressed in terms of λ_1, μ_1, ν_1 we get

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \qquad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\mu_1^3 - \lambda_1^2\nu_1}{\lambda_1^3 + \mu_1^2\nu_1}.$$

The last equation is linear in ν_1. Solving, we get

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad \frac{\nu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu^3 - \lambda^2\nu}{\lambda^3 + \mu^2\nu}.$$

Hence the transformation is birational and is its own inverse (3).

We can birationally transform our solutions into solutions of fifth and higher degrees in the parameters. But there exists no solution which is homogeneous and quadratic in three independent parameters, since (4) a cubic surface having this property is a ruled surface with a double line, whereas our cubic (1) has no singular point.

The first of the above methods is not limited to cubic surfaces having two skew

---

(1) *Nouv. Ann. Math.*, sér. 2, tome 6, 1867, p. 95. S. Realis, *ibid.*, sér. 2, t. 18, 1879, pp. 302-4, stated a special homogeneous solution of degree 4 in 2 parameters. M. Weill, *ibid.*, sér. 3, t. 4, 1885, pp. 184-8, gave an algebraic discussion requiring four cases.

(2) H. Schröter, *Jour. für Math.*, t. 62, 1863, p. 265. A. Clebsch, *ibid.*, t. 65, 1866, p. 359. L. Cremona, *ibid.*, t. 68, 1868, p. 82, and *Memorie Accad. Sc. Istituto di Bologna*, sér. 2, t. 6, t. 7 (German transl. by M. Curtze, *Allgemeinen Theorie der Oberflächen*, 1870).

(3) This may be explained by noting that, if $\lambda = 1$, the values of x, y, z are the same in (3) and (4), while the two values of u are merely the two roots of (1) regarded as a quadratic equation for u.

(4) Salmon, *Geometry of Three Dimensions*, ed. 4, 1882, p. 556, § 585.

rulings with rational coefficients, but is applicable also when the surface has two skew rulings whose equations involve a single square root. For example, the surface

$$f(x, y) = f(u, z), \qquad f(x, y) \equiv Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3, \tag{5}$$

contains the skew rulings

$$R_4 : \ x = \omega u, \ y = \omega z; \qquad R_5 : \ x = \omega^2 u, \ y = \omega^2 z,$$

where ω is an imaginary cube root of unity. The line

$$L : \ x = ay + bz, \qquad u = cy + dz$$

meets both R_4 and R_5 if and only if $b = -c$, $d = a + c$. Now L meets (5) in the points for which $\alpha y^3 + \ldots - \beta z^3 = 0$, where

$$\alpha = f(a, 1) - Ac^3, \qquad \beta = f(d, 1) + Ac^3, \qquad d = a + c. \tag{6}$$

But if $y = \omega z$, the equations for L give $x = \omega u$. Hence to discard the points which lie on R_4 and R_5, we remove from $\alpha y^3 + \ldots - \beta z^3$ the factor $(y - \omega z)(y - \omega^2 z)$ and obtain $\alpha y - \beta z = 0$ for the unique third point in which L meets (5). Unless $\alpha = \beta = 0$, the coordinates of this point are

$$\rho y = \beta, \qquad \rho z = \alpha, \qquad \rho x = a\beta - c\alpha, \qquad \rho u = c\beta + (a + c)\alpha. \tag{7}$$

Finally, if the equations of a line L′ are not solvable for x and u in terms of y and z, and if L′ meets both R_4 and R_5, we find that L′ is $y = z = 0$, which meets (5) in the single real point having also $x = u = 1$ (if $A \neq 0$). *Except for this point and the points on a possible ruling of the form* L (*with* $\alpha = \beta = 0$), *all the real points on the surface* (5) *are given parametrically by formulas* (7), *in which* α *and* β *are defined by* (6).

For the case $f(x, y) = x^3 + y^3$, this method was given by Hermite (1).

The same method yields an explicit formula for all the rational solutions of

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(y_1, y_2, y_3),$$

where f is any ternary cubic form. We have only to use the two-dimensional « ruling » $x_i = \omega y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ instead of R_4, and a line L whose equations express x_1, x_2, y_1, y_2 in terms of x_3, y_3.

---

(1) *Nouv. Ann. Math.*, sér. 2, t. 11, 1872, pp. 5-8; *Œuvres*, III, pp. 115-7.

The method was employed by G. Brunel (1) to find the rational solutions of

$$x_1^p + x_2^p = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{p-1} & 0 \\ 0 & y_1 & \cdots & y_{p-2} & y_{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_2 & y_3 & \cdots & 0 & y_1 \end{vmatrix},$$

where p is an odd prime.

There are of course unicursal surfaces other than the quadric and cubic surfaces. As noted by A Clebsch (2), we can represent parametrically (map on a plane) the points of a quartic surface having a double conic by selecting any one of the 16 ruled lines (each of which meets the conic) and drawing through any point P on the surface a line L which meets both the conic and the selected ruled line; then if L meets the plane of representation at P', we have a one-to-one correspondence between the points P and P'. This problem can, however, be reduced to the one which we have been considering above, since Geiser (3) proved that such a quartic surface can be transformed birationally into a cubic surface. Clebsch also mapped on a plane quartic surfaces with a double line and quintic surfaces with a double skew cubic. Further references were given by Cayley (4).

II. Application of algebraic and hypercomplex numbers to the complete solution in integers of certain Diophantine equations.

We next present a new method which leads very simply to explicit formulas giving all the solutions in integers of certain quadratic equations such as

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2, \qquad x_1^2 + \ldots + x_5^2 = x_6^2.$$

Incidentally, we shall note the marked contrast between the problem of finding all the rational solutions and that of finding all the solutions in integers, in spite of the homogeneity of our equations. For each equation we transpose one square and express the difference of two squares as a product.

Consider therefore the equation

$$x^2 + y^2 = zw. \tag{1}$$

(1) *Mém. Soc. Sc. Phys. Nat. Bordeaux*, sér. 3, t. II, 1886, p. 129.
(2) *Math. Annalen*, t. I, 1869, pp. 253-316.
(3) *Jour. für Math.*, t. 70, 1869, pp. 249-257.
(4) *Proc. London Math. Soc.*, t. 3, 1869-71, p. 192.

Its rational solutions are found at once. If $z \neq 0$, we may write

$$\frac{x}{z}=\frac{n}{m}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{r}{m},$$

where m, n, r, are integers without a common factor >1. Then

$$\frac{w}{z}=\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=\frac{n^2+r^2}{m^2}.$$

We may take $z=\rho m^2$, where ρ is rational. Then

$$x=\rho mn, \quad y=\rho mr, \quad z=\rho m^2, \quad w=\rho(n^2+r^2). \tag{2}$$

The rational solutions of (1) with $z=0$ have $x=y=0$ and hence are given by (2) for $m=0$. While therefore (2) gives all the rational solutions of (1) when ρ is rational and m, n, r are integers without a common factor, (2) does not give all solutions in integers when ρ is restricted to integral values. In fact, if the solution $x=1, y=3, z=2, w=5$ be of the form (2), we find by dividing the values of y and z by x that $3n=r$, $2n=m$. Since n is therefore a common factor of r, m, n, we have $n=\pm 1$, whence $m=\pm 2, r=\pm 3, \rho=1/2$. Similarly, to obtain the permuted solution $x=1, y=3, z=5, w=2$, we must take $n=\pm 1, m=\pm 5, r=\pm 3$, $\rho=1/5$.

To obtain a formula which gives all the integral solutions of equation (1) for integral values of the parameters, we have only to employ the well-known fact that the norm x^2+y^2 of the product

$$x+yi=(m+qi)(n+ri) \tag{3}$$

of two complex numbers equals the product of their norms. Thus (1) has the solution

$$x=mn-rq, \quad y=mr+nq, \quad z=m^2+q^2, \quad w=n^2+r^2. \tag{4}$$

We shall restrict attention to integral values of m, n, q, r without a common factor. The products of the resulting numbers (4) by an arbitrary rational number ρ give all the rational solutions of (1), since these products reduce to (2) when $q=0$.

We proceed to prove that we obtain all the integral solutions when we restrict the multiplier ρ to integral values. We have merely to show that, when the products of the numbers (4) by an irreducible fraction s/p are equal to integers, so that the numbers (4) are divisible by p, then the quotients are expressible in the same form (4) with new integral parameters in place of m, n, q, r. It is sufficient to prove this for the prime factors (equal or distinct) of p, since after each of them has been divided out in turn, p itself has been divided out.

Let therefore p be a prime number which divides the four numbers (4). If p divided both m and n, it would divide also q and r, in view of z and w, which is contrary to hypothesis. But if we interchange m and n, as well as q and r, we see that x and y remain unaltered, while z and w are interchanged. Hence we will be treating one of two entirely similar cases if we assume that m is not divisible by p.

We now make use of the fact that complex integers $m+qi$, where m and q are ordinary integers, obey the laws of divisibility of arithmetic. Hence, since p divides the product z of $m+qi$ and $m-qi$, without dividing either factor, we conclude that p is not a complex prime, but decomposes into

$$p=(s+ti)(s-ti), \tag{5}$$

where $s\pm ti$ are complex primes (since otherwise p would be a product of three factors and its norm p^2 would be a product of three integers each >1). By choice of the sign of t, we may assume that $s+ti$ is that one of the prime factors $s\pm ti$ of p which divides $m+qi$, and write

$$m+qi=(s+ti)(\mathrm{M}+\mathrm{Q}i), \qquad z=m^2+q^2=p(\mathrm{M}^2+\mathrm{Q}^2), \tag{6}$$

where M and Q are integers. Since x and y are divisible by p, while $m+qi$ is divisible by $s+ti$ but not by the product (5), it follows from (3) that $n+ri$ is divisible by $s-ti$:

$$n+ri=(s-ti)(\mathrm{N}+\mathrm{R}i), \qquad w=n^2+r^2=p(\mathrm{N}^2+\mathrm{R}^2), \tag{7}$$

where N and R are integers. Comparing the product of (6) and (7) with (3), we have

$$x+yi=p(\xi+\eta i), \qquad \xi+\eta i\equiv(\mathrm{M}+\mathrm{Q}i)(\mathrm{N}+\mathrm{R}i).$$

Hence the integral quotients $\xi=x/p$, $\eta=y/p$, z/p, w/p, are of the form (4) with m, n, q, r replaced by the integers M, N, Q, R. Thus *all the integral solutions of* $x^2+y^2=zw$ *are obtained by multiplying an arbitrary integer into the numbers* (4) *in which* m, n, q, r *are integers without a common factor.* In brief, the equation is solved by the formula which expresses the fact that the norm of the product of two complex integers equals the product of their norms.

We have presented this proof in great detail partly on account of its simplicity and elegance, and partly to be able to point out the minor alterations necessary to extend the proof to a variety of important Diophantine equations.

We deduce at once all the integral solutions of

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2.$$

After removing the greatest common divisor of x_1, x_2, x_3, we may assume that x_1 is odd. Then x_2 and x_3 are even, since every square is of the form $4n$ or $4n+1$. We may therefore write

$$x_2 = 2x, \qquad x_3 = 2y, \qquad x_4 - x_1 = 2z, \qquad x_4 + x_1 = 2w,$$

where x, y, z, w are integers satisfying (1), and hence are equal to products of numbers (4) by an arbitrary integer.

The preceding discussion continues to hold true after we replace $x + yi$ by $x + y\theta$, where θ is a root of any one of the following eight equations :

$$\theta^2 = \pm 2, \quad \theta^2 = 3, \quad \theta^2 + \theta + k = 0 \qquad (k = \pm 1, \ 2, \ \pm 3),$$

since the numbers $x + y\theta$, where x and y are integers, obey the laws of divisibility of arithmetic. For the final quadratic equation, the norm of $x + y\theta$ is $x^2 - xy + ky^2$. Hence the formula which expresses the fact that the norm of a product equals the product of the norms of the two factors leads to all the integral solutions of

$$x^2 - xy + ky^2 = zw. \tag{8}$$

We readily deduce all the integral solutions of

$$x_1^2 + (4k-1)x_2^2 + x_3^2 = x_4^2. \tag{9}$$

We may assume that one of x_1 and x_3 is congruent to x_2 modulo 2 and then, by permuting them if necessary, assume that $x_1 \equiv x_2 \pmod 2$. For, otherwise, $x_1 \equiv x_3 \equiv x_2 + 1 \pmod 2$; then, according as x_1 is odd or even, the left member of (9) is $\equiv 2$ or $-1 \pmod 4$ and hence is not a square. Hence we may write

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = x_2, \qquad z = \frac{1}{2}(x_4 + x_3), \qquad w = \frac{1}{2}(x_4 - x_3),$$

where x, y, z, w are integers. Then (9) reduces to (8) and is completely solved in integers. Hence *for* $m = 1, 2, -2, 3, -3, -5, 7, 11, -13$, *all the integral solutions of* $x_1^2 + mx_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ *are given by a single formula obtained by the norm theorem.*

However, if we attempt to apply our method to find all the integral solutions of $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$, and hence of

$$x^2 + 5y^2 = zw, \tag{10}$$

we must take into account the fact that the numbers $x + y\theta$, where x and y are integers and $\theta = \sqrt{-5}$, do not obey the laws of divisibility of arithmetic. In fact, there are here two classes of ideals, one being composed of all the principal ideals and the other being composed of the ideals equivalent to a prime ideal factor of

the principal ideal $\{2\}$. Thus in removing a common prime factor from the solutions

$$x = mn - 5rq, \quad y = mr + nq, \quad z = m^2 + 5q^2, \quad w = n^2 + 5r^2$$

of (10), furnished by the norm theorem, the quotients need not be of this same form, but may be of a new form obtained by cancelling the common factor 2 from

$$2x = \mathrm{MN} - 5rq, \quad 2y = \mathrm{M}r + \mathrm{N}q, \quad 2z = \mathrm{M}^2 + 5q^2, \quad 2w = \mathrm{N}^2 + 5r^2.$$

where $\mathrm{M} = 2m + q$, $\mathrm{N} = 2n + r$. In general, we obtain as many sets of formulas for the integral solutions as there are classes of ideals. We cannot enter here upon the details of this more technical application of our method, which will be published in a mathematical journal.

Moreover, our method is applicable to further types of equations such as $x_1^2 + \ldots + x_5^2 = x_6^2$, whose complete solution in integers is easily seen to reduce to that of

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \xi\eta. \tag{11}$$

We employ the theorem that the norm $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ of the product

$$x + yi + zj + wk = \mathrm{AB} \tag{12}$$

of two quaternions

$$\mathrm{A} = a + bi + cj + dk, \qquad \mathrm{B} = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \tag{13}$$

equals the product of their norms. Thus (11) has the solutions

$$\begin{cases} x = a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, & y = a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, \\ z = a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, & w = a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha, \\ \xi = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, & \eta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2. \end{cases} \tag{14}$$

The products of an arbitrary rational number ρ by these six numbers (14), in which $a, \ldots, \delta$ are integers without a common factor, give all the rational solutions of (11), since this is readily verified to be the case when $\beta = \gamma = \delta = 0$ by the method used for (1). To show that all the integral solutions are obtained by multiplying the numbers (14) by integers ρ, it remains to prove that, if these numbers (14) are all divisible by a prime p, the quotients are expressible in the same form (14) with $a, \ldots, \delta$ replaced by new integral parameters.

On the proof, we shall need the fact, proved by A. Hurwitz (1), that there exists a right-hand (as well as a left-hand) greatest common divisor of any two integral quaternions. Here a quaternion is called integral if its four coordinates are either all integers or all halves of odd integers. The latter possibility would seem to present a difficulty (2) in applying such an arithmetic of quaternions to the study of the integral solutions of our Diophantine equation; but we shall see that this difficulty is easily overcome, partly by giving a separate treatment for the case $p = 2$.

Since the norm ξ of the quaternion A with integral coordinates was assumed to be divisible by the prime p ($p > 2$), and since p equals the product $PP' = P'P$ of two conjugate prime quaternions with integral coordinates, we have $A = QP$, after choice of the notation between P and P'. Here the integral quaternion Q must have integral coordinates, since otherwise $Q = \frac{1}{2} q$, where q has odd integral coordinates, and

$$AP' = \frac{1}{2} q \cdot p = \frac{1}{2} p \cdot q$$

would not have integral coordinates, in contradiction with the fact that A and P have integral coordinates.

Since x, y, z, w are by hypothesis divisible by p, we have $AB = pC$ by (12), where C has integral coordinates. Either B has P' as a left-hand divisor, so that $B = P'q$, where as above q has integral coordinates, or else the left-hand greatest common divisor of B and P' is unity, so that $1 = BD + P'E$, where D and E are integral quaternions. In the latter case,

$$A = A \cdot BD + A \cdot P'E = pC \cdot D + Q(PP')E = p(CD + QE),$$

where $CD + QE$ is an integral quaternion, so that its double is a quaternion R with integral coordinates. Hence $2A = pR$, whereas the coordinates of A may be assumed to be not all divisible by p. For, if a, b, c, d are all divisible by p, then $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are not all divisible by p and me may employ from the outset the conjugate B'A'

---

(1) *Göttingen Nachrichten*, 1896, pp. 311-340.

(2) A second method is to restrict the term integral quaternion to one whose coordinates are all integers. A quaternion whose norm is odd is called an odd quaternion. I have succeeded in obtaining a direct prooof of the fact that any two integral quaternions A and B, at least one of which is odd, have a right-hand greatest common divisor D which is uniquely determined up to a unit factor $(\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$, and that $D = EA + FB$, where E and F are integral quaternions. The further theory proceeds as with Hurwitz.

of AB in place of AB. Hence we have the first case $B = P'q$. Thus

$$A = QP, \quad Q = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad \xi = N(A) = p(a_1^2 + \ldots + d_1^2),$$
$$B = P'q, \quad q = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k, \quad \eta = N(B) = p(\alpha_1^2 + \ldots + \delta_1^2),$$

where N(A) denotes the norm of A. By multiplication,

$$AB = QPP'q = pQq.$$

By comparaison with (12), we see that x/p, y/p, z/p, w/p, ξ/p, η/p are of the form (14) with $a, \ldots \delta$ replaced by the eight new integral parameters $a_1, \ldots, \delta_1$. This completes the proof for any odd prime p.

Next, let $p = 2$. Since ξ is divisible by 2, $a + b + c + d$ is even. Hence at least one of $a + b$, $a + c$, $a + d$ is even. These three cases differ only in notation since the substitution $T = (b\,c\,d)\ (\beta\,\gamma\,\delta)\ (y\,z\,w)$ leaves the system of equations (14) unaltered (1). Hence we may assume that $a + b$ is even, so that $c + d$ is even. Since

$$A = a - b + b(1 + i) + (c - d)j + dk(1 + i), \qquad 2 = (1 - i)(1 + i),$$

$A = QP$, where $P = 1 + i$ and Q has integral coordinates. Similarly, if $\alpha + \beta$ is even, $B = P'q$ and the final part of the proof given above for $p > 2$ yields the same result here. But if $\alpha + \beta$ is odd, $\gamma + \delta$ is odd and either $\alpha + \gamma$ or $\alpha + \delta$ is even. These sub-cases are interchanged when we replace a by b, b by $-a$, γ by $-\delta$, and δ by γ, whence z and w remain unaltered, while x is replaced by y, and y by $-x$. Hence let $\alpha + \gamma$ be even. Since also $a + b$ and $c + d$ are even, while $\alpha + \beta$ and $\gamma + \delta$ are odd, we have

$$0 \equiv x \equiv a\alpha + a(\alpha + 1) - c\gamma + c(\gamma + 1) \equiv a + c \pmod 2.$$

Applying the inverse substitution T^{-1}, we are led to the former case in which $a + b$ and $\alpha + \beta$ are even.

Thus *all the integral solutions of (11) are given by the products of the numbers* (14) *by an arbitrary integer, and hence are given by the formula which expresses the fact that the norm of the product of two quaternions equals the product of their norms.*

---

(1) This is due to the fact that T corresponds to the cyclic substitution $(i\,j\,k)$ on the units, which leaves unaltered their multiplication table.

III. Modular invariants.

I shall indicate briefly and concretly the nature of modular invariants, the theory of which has been investigated extensively in the United States in recent years (1). In what follows, p denotes a prime number. Lagrange proved that all of the coefficients in the expansion of

$$x^p - x - x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)$$

are divisible by p, and deduced the well-known theorems of Fermat and Wilson. By replacing x by x/y, we may express Lagrange's theorem in the homogeneous form

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x^p & y^p \\ x & y \end{vmatrix} \equiv y \prod_{k=0}^{p-1} (x+ky) \pmod p.$$

The right member is the product of all the incongruent linear forms having unity as leading coefficients. Apart from numerical factors, these linear forms are evidently merely permuted by any linear substitution

$$(2) \qquad x = ax_1 + by_1, \qquad y = cx_1 + dy_1,$$

with integral coefficients, provided we omit multiples of p. Hence their product (1) is a (relative) invariant modulo p. We can prove independently that the determinant is a relative invariant modulo p. For, since $a^p \equiv a \pmod p$, (2) gives

$$x^p \equiv ax_1^p + by_1^p, \qquad y^p \equiv cx_1^p + dy_1^p \pmod p,$$

$$\begin{vmatrix} x_1^p & y_1^p \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x^p & y^p \\ x & y \end{vmatrix} \pmod p.$$

Since the determinant is an invariant having the factor y, it has as a factor every linear form, since our substitutions replace y by each linear form. Finally, each member of (1) contains the term $x^p y$ with the coefficient unity. This completes the proof that (1) is a congruencial identity.

Evidently the same argument leads to the generalization

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \\ x^p & y^p & z^p \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv z \prod_{k=0}^{p-1} (y+kz) \cdot \prod_{l,m=0}^{p-1} (x+ly+mz) \pmod p.$$

(1) References to the literature down to 1913 are given in the writer's *Madison Colloquium Lectures*, American Mathematical Society, 1914.

and to the corresponding congruencial identity in n variables. The earliest proof of these results did not employ modular invariants and was quite complicated.

Returning to the case of two variables, we note that also

$$\begin{vmatrix} x^{p^2} & y^{p^2} \\ x & y \end{vmatrix} \tag{4}$$

is an invariant modulo p. It is congruent to the product of all the incongruent linear and irreducible quadratic forms having unity as leading coefficients. We omit the proof, which employs the imaginaries of Galois. The quotient Q of (4) by the product L of the linear forms (1) is therefore a modular invariant.

It is superfluous to consider similarly the products of the irreducible cubic forms, quartic forms, etc., since it can be readily proved that L and Q form a fundamental system of binary invariants modulo p. On the contrary, we can deduce important conclusions concerning cubic and higher forms by means of the invariants

$$l = \mathrm{L}^{p(p-1)/d}, \quad q = \mathrm{Q}^{(p+1)/d} \qquad (d = 2 \text{ if } p > 2, \quad d = 1 \text{ if } p = 2),$$

in terms of which we can express the product π_m of all the binary forms $x^m + \ldots$ which are irreducible modulo p. For $p > 2$, we have $\pi_3 = q^2 - l^2$, so that irreducible cubic factors of $q - l$ are all equivalent, as are also those of $q + l$, while no factor of $q - l$ is equivalent to a factor of $q + l$; here two forms are called equivalent if one of them can be transformed into a constant multiple of the other modulo p by a linear substitution with integral coefficients of determinant unity.

There are similar invariantive criteria for the equivalence of two irreducible forms of any degree. For forms in m variables, a great variety of analogous theorems have been established by means of the m fundamental invariants, one of which is the generalization of determinants (1) and (3), and the others are obtained by dividing it into determinants generalizing (4).

Hitherto I have spoken only of the modular invariants of a group. However, there is the larger subject of the invariants and covariants modulo p of any ground form or system of ground forms; these modular covariants evidently include all the algebraic covariants of the ground forms. The modular invariants of which I was speaking in detail are merely the universal covariants, in the same sense as $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots$ in the algebraic theory.

A simple, complete theory of the modular invariants of any system of forms has been constructed by means of the theory of classes of forms under linear transformations of determinant unity. For example, if $p > 2$, all binary quadratic forms which are congruent to squares of linear forms modulo p form a class with the representative form x^2. Again, there is a class represented by νx^2, where ν is a

particular quadratic non-residue of p. Also, for $D = 1, 2, \ldots, p-1$, there are classes represented by $x^2 + Dy^2$. Finally, there is the class of forms all of whose coefficients are divisible by p. A single-valued function of the coefficients of the general binary quadratic form f is a modular invariant of f if and only if the function has the same value modulo p for all the forms in the class represented by x^2, the same (new) value for all the forms in the class represented by νx^2, and so on for each of the $p+2$ classes. The number of linearly independent modular invariants is always equal to the number of classes. The theory based upon classes is far simpler than a theory based upon methods in vogue for algebraic invariants. In the modular theory, the group of linear transformations is used solely to separate the classes, and is not used to furnish any test for invariance.

IV. Algebraic invariants.

There is an interesting application by Mordell (1) of the theory of algebraic invariants to the problem of finding the integers x and y for which a given binary cubic form shall equal a square. We take the cubic in the reduced form

$$4x^3 - g_2xy^2 - g_3y^3 = z^2. \tag{1}$$

This form was suggested by the syzygy

$$4h^3 - g_2ha^2 - g_3a^3 = g^2 \tag{2}$$

which connects the invariants g_2 and g_3 of the quartic

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

and its seminvariants $a, h = b^2 - ac, g = a^2d - b^3 + 3bh$. Given integral solutions of (2) in which a is odd and relatively prime to h $(h \neq 0)$, we can find integers $a, \ldots, e$ such that f has the invariants g_2 and g_3, and such that b is prime to a. The converse is evidently true. Hence to find all solutions of (1) in which y is odd and prime to x, we take a representative f of each of the classes (finite (2) in number) of binary quartics with integral coefficients and assigned values of the invariants g_2 and g_3; then apply to f such a linear substitution $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ with integral coefficients of determinant unity that we obtain a new quartic f' for which a' is odd and prime to b', whence

$$y = a' = f(p, q), \qquad x = h' = -\mathrm{H}(p, q),$$

(1) *Quar. Jour. Math.*, t. 45, 1914, pp. 170-186.

(2) Hermite, *Jour. für Math.*, vols. 36, 41, 52; *Œuvres*, I, pp. 84, 164, 350.

where H is the Hessian of f. Hence the complete solution of (1) in relatively prime integers x, y is given by a finite number of pairs of quartic forms in two parameters p, q.

Mordell discussed also the solution of $f = w^2$, where f is a binary quartic with the invariants g_2 and g_3, under the assumption that one set of rational solutions is given. Then we can evidently transform f into a quartic whose leading coefficient is w^2. The syzygy (2) becomes

$$4h^3 - g_2 hw^4 - g_3 w^6 = g^2,$$

so that $s = h/w^2, t = g/w^3$ give rational solutions of

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = t^2.$$

He proved that a knowledge of all the rational solutions of the latter cubic leads to all the rational solutions of the quartic $f = w^2$.

This method may be applied to find the rational solutions of $F = 0$, given one solution, where F is a ternary cubic form. By means of a linear substitution with rational coefficients of determinant unity, we can transform $F = 0$ into

$$S_1 \xi^2 + 2S_2 \xi + S_3 = 0,$$

where S_j is a function of η, ζ of degree j. The discriminant $f = S_2^2 - S_1 S_3$ is a binary quartic whose invariants are numerical multiples of the invariants S and T of F. If $S_1 = b\eta + c\zeta$, then f is a square S_2^2 for $\eta = -c$, $\zeta = b$. Hence if we can find all the rational solutions of

$$4s^3 + 108Ss - 27T = t^2,$$

we can deduce all the rational solutions of $F = 0$.

SUR LES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE

ET LES QUESTIONS QUI S'Y RATTACHENT

PAR M. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN

(Louvain.)

1. Considérations préliminaires.

La définition des fonctions à variation bornée est due à M. C. JORDAN. On la trouve pour la première fois dans une courte Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, séance du 31 janvier 1881. Elle a pour titre : *Sur la série de Fourier*. Le titre et le contenu de cette Note ne laissent aucun doute sur la manière dont l'illustre mathématicien français a été conduit à la notion qui nous intéresse.

Tout le monde connaît l'admirable mémoire de Dirichlet sur la convergence des Séries de Fourier. La démonstration s'applique aux fonctions bornées qui n'ont qu'un nombre limité d'extrémés et de discontinuités : ce sont les conditions dites de Dirichlet. La condition relative aux points de discontinuité est superflue. Mais, même après cette suppression, la condition de Dirichlet ne paraît pas s'*adapter* naturellement au problème, parce que la démonstration subsiste pour une somme de fonctions satisfaisant à cette condition, tandis que cette condition elle-même ne subsiste pas toujours. C'est cette anomalie que M. C. Jordan s'est proposé de faire disparaître.

Les fonctions à variation bornée sont celles qui peuvent se décomposer en une somme de deux autres satisfaisant aux conditions de Dirichlet restreintes, ou, ce qui revient au même, celles qui sont *la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes*. Il est clair que les fonctions de cette nature constituent une famille bien définie et fermée, dans laquelle on peut effectuer les opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication et division, sans altérer le caractère précédent, pour autant qu'une fonction prise comme diviseur ne puisse pas tendre vers zéro.

Dans cette Note des *Comptes rendus*, M. C. Jordan pose déjà les premiers fonde-

ments de l'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée. Il donne, exactement comme nous le ferions aujourd'hui, le moyen de reconnaître si une fonction donnée $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b) et il définit sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* dans cet intervalle. Il montre que les fonctions à variation bornée sont *intégrables* au sens de Riemann et que les intégrales indéfinies de fonctions bornées sont des fonctions à variation bornée.

M. C. Jordan est revenu sur les fonctions à variation bornée dans les deux éditions successives de son *Cours d'Analyse* (1881 et 1893) et il en a fait deux applications fondamentales, l'une à la détermination d'une *intégrale singulière*, l'autre à la *rectification des courbes*.

Il peut paraître étonnant que cette application à la rectification des courbes n'apparaisse que la seconde, alors que cette application est si naturelle qu'il semblerait que la notion de fonction à variation bornée eût dû être imaginée exprès pour cela. La condition pour qu'une ligne continue

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

soit rectifiable est que les deux fonctions φ et ψ soient à variation bornée, et cette solution du problème de la rectification peut être considérée comme parfaite. Cette solution en appelait une autre, c'est celle de la *complanation des surfaces courbes*. A l'heure qu'il est, nous ne saurions encore rien dire de bien satisfaisant sur les conditions pour qu'une surface courbe

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \omega(u, v)$$

soit quarrable, et nous ne serions guère plus avancés qu'à l'époque des recherches précédentes de M. C. Jordan, sans celles toutes récentes de M. W.-H. Young (1).

Par contre, les recherches de M. C. Jordan sur les intégrales singulières et sur la série de Fourier ont été l'origine d'une foule de travaux ultérieurs. Ce serait trop long de les énumérer tous, et je ne signalerai ici que les plus importants.

M. H. Lebesgue a publié *sur les intégrales singulières* (2) un travail considérable, où l'usage de la notion de fonction à variation bornée dans la détermination des conditions de convergence est discuté du point de vue le plus général. Mais c'est surtout M. W.-H. Young qui mérite d'être cité comme ayant poursuivi l'étude des séries de Fourier dans la voie ouverte par M. C. Jordan. C'est à lui que l'on doit les criteriums de convergence les plus précis, les plus généraux, et j'ajouterai aussi les démonstrations les plus simples et les plus élégantes (3). C'est à lui que l'on doit presque tout

(1) Voir sa Communication à la première Section du présent Congrès.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1910.

(3) *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourier'schen Reihe. Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Ac. der Wiss.* (Math. phys. Klasse. Sitzung vom 10 Juni 1911).

ce que l'on sait sur la convergence de la série conjuguée (1). C'est encore à lui que l'on doit le seul travail un peu général sur les séries de Fourier de plusieurs variables et sur ce qu'il appelle les séries de Fourier restreintes. Dans tous ces Mémoires, c'est la notion de fonction à variation bornée qui est le ressort principal des démonstrations.

Cependant ce n'est point de ces travaux que j'ai l'intention de vous entretenir aujourd'hui. En vous en parlant avec plus de détails, je me disperserais beaucoup trop. La question dont je désire vous entretenir forme un ensemble d'une très grande unité, dont l'objet est complètement différent des précédents. Et en effet, le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens complètement inattendu et que l'inventeur de ces fonctions ne pouvait certainement pas prévoir, car ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

Les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles se divisent en deux grandes catégories : celles qui concernent l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et qui constituent sans aucun doute un des plus beaux chapitres de la science mathématique moderne ; ensuite celles qui se rattachent à la *Théorie générale des fonctions de variables réelles,* si l'on peut donner justement ce nom à la théorie fondée au début de ce siècle par MM. Baire, Borel et Lebesgue. Or l'étude des fonctions à variation bornée forme encore aujourd'hui, et de beaucoup, la partie la plus importante de cette nouvelle théorie.

Cette théorie a permis de pousser extrêmement loin l'étude intrinsèque des fonctions à variations bornées, de les disséquer en quelque sorte, de manière à faire apercevoir leurs parties constitutives distinctes. Elle a fait apparaître une partie principale : *l'intégrale indéfinie,* et, à côté de celle-ci, certaines parties *singulières;* elle a montré l'identité des fonctions de point à variation bornée avec les *fonctions additives d'ensemble.* Elle a dévoilé l'importance des fonctions à variation bornée dans les questions les plus importantes du *calcul fonctionnel;* elle a ramené l'expression de toute *fonctionnelle linéaire* à une *intégrale de Stieltjes.* Elle a donné ainsi à l'intégrale de Stieltjes une importance inattendue : elle lui assigne, en effet, un rôle fondamental dans la différentiation des fonctionnelles, puisque, d'après M. Hadamard, toute différentielle d'une fonctionnelle est une fonctionnelle linéaire.

---

(1) *On the convergence of a Fourier series and of its allied series* (Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 10, Part. 4, 1911).

On the Fourier Constants of a Function (Proc. of the Royal Society, A, Vol. 85, 1911).

On Fourier Series and Functions of Bounded Variation (Id., Vol. 87, 1913).

Sur la convergence des séries de Fourier (Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, 21 août 1916).

Sur les conditions de convergence des séries de Fourier (Id , 26 déc. 1916).

Telles sont les diverses questions dont je veux vous entretenir, et tel est, en somme, le résumé de cette conférence :

1° L'intégrale de Lebesgue;
2° Les fonctions d'ensemble;
3° L'intégrale de Stieltjes;
4° Les fonctionnelles linéaires.

J'aurai donc avoir l'honneur de vous communiquer quelques réflexions d'un ordre extrêmement général sur ces diverses questions. Je n'ai d'autre prétention que d'exposer quelques-unes des idées qui me paraissent particulièrement importantes ou intéressantes, et je me résigne à être très incomplet. Je prie les auteurs dont je ne citerai pas les noms de bien vouloir me pardonner(1).

2. La définition de l'intégrale de Lebesgue.

La question concernant l'*Intégrale de Lebesgue* qui a certainement préoccupé le plus grand nombre de mathématiciens, c'est celle de *sa définition.*

Les résultats contenus dans la thèse de M. Lebesgue (1902) ont paru si beaux et si utiles et, d'autre part, la route suivie par l'auteur pour y arriver si longue et si difficile, qu'on s'est proposé d'en trouver une plus simple et de remplacer la définition primitive par d'autres définitions rivales, permettant de faire entrer, si possible, la nouvelle théorie dans l'enseignement classique.

Je vais donc avoir à vous parler de ces diverses définitions et à vous soumettre quelques-unes des réflexions qu'elles me suggèrent, n'ayant d'ailleurs en aucune manière la prétention de me poser en arbitre de leur valeur respective.

Pour faire apprécier à sa valeur l'importance et la portée de l'intégrale de Lebesgue, il convient de la mettre en rapport avec la *classification des fonctions* qui a été proposée quelques années auparavant par M. Baire(2) et que voici :

Les fonctions continues sont de classe 0;

Les fonctions limites de fonctions continues et qui ne sont pas de classe 0, sont de classe 1;

Les fonctions qui sont limites de fonctions de classe 1 et qui ne sont ni de classe 0 ni de classe 1, sont de classe 2, et ainsi de suite.

En même temps qu'une classification, nous apercevons ici un *procédé de cons-*

(1) On lira avec profit les deux études d'ensemble : G.-A. Bliss, *Integrals of Lebesgue* (Bull. Americ. Math. Soc., vol. 14, 1917); T.-H. Hildebrand, *On Integrals related to and extensions of the Lebesgue Integral* (Idem).

(2) Thèse, *Sur les fonctions de variables réelles* (Annali di Mathematica, 1900).

truction successive de fonctions de plus en plus compliquées, et l'on admettra volontiers que ce sont les seules auxquelles conduisent naturellement les calculs de l'analyse. Nous appellerons ces fonctions les *fonctions de Baire*. C'est l'étude des propriétés de ces fonctions qui constitue ce que nous avons appelé tout à l'heure la *théorie générale des fonctions de variables réelles*. L'importance de ces fonctions a été surtout mise en lumière par les travaux de M. Lebesgue.

Les fonctions continues et bornées s'intègrent par les méthodes élémentaires. Mais les fonctions des classes suivantes ne le peuvent plus, en général, même avec la définition de Riemann. Au contraire, toutes les fonctions de Baire deviennent intégrables, quelle qu'en soit la classe, avec la définition de Lebesgue, pourvu qu'elles soient bornées.

D'où vient donc la puissance de cette définition et quel est le théorème qui en manifeste le mieux la supériorité ?

Ce qui fait la généralité de la définition nouvelle, c'est qu'elle repose sur une propriété des fonctions, qui se conserve dans le passage à la limite. Le théorème qui manifeste le plus clairement cette supériorité, c'est celui de l'*intégration terme à terme* (ou du passage à la limite sous le signe d'intégration). Ce théorème est le suivant :

Si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ *bornées dans leur ensemble converge vers une limite* f, *on a*

$$\lim_{n=\infty} \int f_n dx = \int f dx. \tag{1}$$

On peut considérer ce théorème fondamental comme la conclusion et le couronnement de la théorie telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse (1902).

Avant Lebesgue, personne n'avait encore énoncé une propriété métrique des fonctions se conservant à la limite(1). Après lui, on en a trouvé autant qu'on en a voulu.

Avant lui, l'intégration terme à terme était considérée comme une opération délicate, exigeant de grandes précautions, Après lui, il peut paraître tout simple de prendre cette propriété comme définition même de l'intégrale.

Remarquons, en effet, que la propriété exprimée par l'équation (1), à supposer seulement qu'elle ne soit pas contradictoire, suffit à elle seule pour définir l'intégrale de Lebesgue et que, tout au moins en apparence, elle en donne une *définition constructive*.

En effet, par l'équation (1), nous pouvons définir l'intégrale d'une fonction f de classe 1 comme la limite de celle d'une fonction f_n de classe 0 ; de même, l'intégrale d'une fonction de classe 2 comme limite de celle d'une fonction de classe 1, et ainsi

(1) Seul M. Baire avait énoncé une propriété descriptive jouissant de ce privilège et elle paraissait devoir rester stérile. Thèse citée (1900).

de suite. Nous obtenons ainsi une définition par récurrence qui semble suivre pas à pas le procédé même de construction des fonctions de Baire.

Que faudrait-il faire pour justifier cette définition?

Il suffirait de prouver l'*existence* et l'*unicité* de la limite écrite au premier membre de l'équation (1) et cela, de proche en proche, pour les fonctions de classe 0, de classe 1, ... Mais, si deux suites différentes de fonctions f_n tendent vers f, leur différence tend vers 0. Tout revient donc à démontrer que, si une suite de fonctions de la même classe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \ldots$ tend vers 0, on a aussi

$$\lim \int \varphi_n dx = 0. \tag{2}$$

La justification de l'équation (2) pour la classe d'ordre (k) revient ainsi à la définition de l'intégrale des fonctions de la classe suivante $(k+1)$ par l'équation (1).

Chose bien remarquable, cinq ans avant la thèse de M. Lebesgue, cette justification avait été faite par M. Osgood pour les fonctions continues. Donc la définition de l'intégrale des fonctions de la première classe de Baire en résultait. Personne ne s'en est aperçu. Rien ne prouve plus péremptoirement qu'il était bien difficile sinon impossible d'entrer dans cette voie avant les découvertes de M. Lebesgue.

Mais il y a une autre observation qui s'impose.

La *méthode constructive* dont nous venons d'esquisser la marche est illusoire. Le parallélisme qu'elle établit entre la construction des fonctions et celle de leurs intégrales est trompeur et ne repose sur aucune réalité. On s'en apercevrait, si l'on essayait de démontrer l'équation (2) pour les classes suivantes. Il n'y a pas, il ne peut pas y avoir, à mon sens, de méthode constructive pour définir l'intégrale de Lebesgue, parce que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions de classe 2, qui ont la même intégrale. Les fonctions des classes supérieures à la deuxième ne se distinguent l'une de l'autre que par des propriétés descriptives, elles ne se distinguent pas par des propriétés métriques. La méthode constructive s'arrête à la deuxième classe, pour l'excellente raison qu'après cela, il ne reste plus rien de neuf à construire.

Ces réflexions préliminaires nous ont arrêtés quelques instants, mais elles ne seront pas inutiles. Elles vont nous permettre de situer à leur vraie place les définitions de M. Lebesgue et celles de ses successeurs, parmi lesquels je ne citerai que M. Borel et M. W.-H. Young.

Seule la définition de M. Lebesgue est complètement indépendante du théorème de l'intégration terme à terme et se rattache directement aux définitions antérieures de Canchy et de Riemann. Toutes les autres définitions se rattachent, au contraire, au théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, ou tout au moins au procédé que M. Lebesgue a employé pour le démontrer. Elles se rattachent à la méthode

constructive que je viens de discuter mais avec les différences profondes que comporte la nature même des choses.

La définition de Lebesgue se relie directement aux anciennes, parce qu'elle est, comme celles-ci, une définition *par le théorème de la moyenne*. Le théorème de la moyenne a toujours été considéré comme la propriété la plus immédiate, la propriété primordiale de l'intégrale. L'intégrale de Riemann est définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les intervalles. L'intégrale de Lebesgue est définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles de points, dont les intervalles ne sont que le cas particulier le plus simple. Mais ceci suppose que l'on sache mesurer les ensembles, tout comme les intervalles, et c'est pour cela que la *Théorie de la mesure des ensembles* a précédé celle de l'intégration.

Dans ce qu'elle a de plus original et de plus essentiel, cette théorie de la mesure est due à M. E. Borel. C'est lui qui a fait, pour la première fois, la somme des mesures d'une infinité dénombrable d'intervalles et c'est le ressort dont dépend assurément tout le reste de la théorie. M. Borel lui a consacré quelques lignes dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions de variables réelles* (1908). Ces lignes contiennent une *définition constructive* de la mesure, complète en principe et géniale, mais qui est à la définition actuelle, exactement, ce que la méthode constructive de définition de l'intégrale que je critiquais tout à l'heure, est aux définitions d'aujourd'hui. Elle appelait donc la même revision. Celle-ci a été faite par M. Lebesgue dans sa Thèse. C'est lui qui a exposé les véritables fondements de la théorie, en a aperçu la généralité et dévoilé la fécondité.

Pour l'instant, il est inutile de nous arrêter davantage aux méthodes de M. Lebesgue, sur lesquelles nous reviendrons encore brièvement. Nous allons nous occuper des autres définitions et, suivant en cela l'ordre historique, nous commencerons par celles de M. Borel.

M. Borel s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de celle de la mesure des ensembles et de réduire au minimum toute considération relative aux ensembles. Ses définitions se rattachent plus ou moins directement au théorème de l'intégration sous le signe et reviennent explicitement ou implicitement à définir l'intégrale d'une fonction de Baire comme la limite de celle d'une fonction continue (1).

Si l'on examine la démonstration du théorème de l'intégration terme à terme, telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse, on en déduit aisément qu'une fonction f_n qui converge vers une limite finie f converge uniformément, pour tous les points qui sont extérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut. C'est le principe qui est à la base des définitions de M. Borel.

---

(1) Une idée analogue avait été développée par M. Fr. Riesz. *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables* (Comptes rendus, 4, 1912).

M. Borel en a déduit une propriété extrêmement remarquable des fonctions de Baire. Le principe précédent prouve aisément que cette propriété se conserve à la limite et appartient, par conséquent, aux fonctions de toutes les classes successives. Voici cette propriété :

Toute fonction de Baire est continue quand on fait abstraction des points contenus dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut.

Si l'on fait abstraction de ces intervalles gênants, on peut définir l'intégrale d'une fonction de Baire par des limites de sommes tout analogues à celles de Riemann, et c'est une première définition de M. Borel (1).

Une seconde définition (2) a été développée plus longuement, et paraît avoir les préférences de M. Borel, soit à cause de son caractère particulièrement élémentaire, soit parce qu'il est permis d'y voir un procédé effectif de calcul. Si l'on fait abstraction des intervalles gênants, toute fonction de Baire est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes. L'intégrale de cette fonction de Baire sera donc, par définition, la limite de celle d'un polynome.

Les définitions de M. Borel ont l'avantage de la concision et de la simplicité. Ce sont probablement celles qui conduisent à la notion de l'intégrale avec le minimum d'efforts. Mais elles ne sont pas complètement indépendantes de la théorie des ensembles et, en particulier, des concepts nouveaux sur la mesure introduits par M. Borel dans ses *Leçons* de 1898. Bien au contraire, M. Borel s'était proposé formellement de les y rattacher.

M. W.-H. Young (3) est allé beaucoup plus loin. Il s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de tout emprunt à celle des ensembles; et, passant par dessus toutes les recherches précédentes, aussi bien celles de M. Borel que celles de M. Lebesgue, de rattacher directement la définition de l'intégrale aux conceptions de M. Baire.

La tâche était assurément difficile, et si M. Young y a réussi, cela fait grand honneur à son habileté. Son procédé de démonstration tire toute sa force de la considération des suites monotones de fonctions. La convergence de ces suites présente des caractères particulièrement simples, qui ont été déjà signalés et utilisés à main-

---

(1) *Sur une condition nouvelle d'intégrabilité* (Comptes rendus, t. CL, p. 208).

(2) *Sur le calcul des intégrales définies* (Journal de Math. pures et appliquées, 6e série, t. VIII, 1912).

(3) *On the new method in the theory of integration* (Proc. of the London mathem. Society, 1910).

On the new theory of integration (Proc. of the royal Society, 1913).

On the integration with report to a function of bunded variation (Proc. of the London math. Soc., 1913).

Sur les fondements de la théorie de l'intégration (C. R. Ac. des Sc. de Paris, 13 juin 1916).

tes reprises. Mais je crois que jamais personne n'a su en tirer un meilleur parti que M. H. Young.

Tout passage à la limite sur une suite de fonctions revient à deux passages à la limite consécutifs sur des suites monotones. De la sorte, toutes les fonctions de Baire peuvent être engendrées par des passages à la limite répétés sur des suites monotones. Il en résulte donc comme un dédoublement de la classification de M. Baire. C'est ce principe qui est à la base des idées de M. Young.

Voici maintenant comment on peut résumer sa définition.

Les fonctions limites de suites monotones de fonctions continues sont les fonctions semi-continues, soit par au-dessus, soit par au-dessous. On pourrait aisément définir les intégrales des fonctions semi-continues comme limites d'intégrales de fonctions continues, mais M. Young préfère les définir suivant le cas, soit comme intégrale supérieure, soit comme intégrale inférieure de Jordan, ce qui revient au même.

Les intégrales des autres fonctions se définissent à partir des précédentes par un passage à la limite. M. Young démontre que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions semi-continues dont les intégrales diffèrent aussi peu que l'on veut. Il observe à cet effet que c'est là une propriété qui se conserve à la limite. L'intégrale d'une fonction de Baire sera donc, par définition, la limite commune des intégrales de deux fonctions semi-continues qui comprennent la fonction considérée.

M. Young remarque que sa méthode s'applique aussi bien aux intégrales de Stieltjes, et il est, semble-t-il, le premier qui ait donné une définition générale de ces intégrales. Nous aurons à revenir sur cette question tout à l'heure.

Les définitions de MM. Borel et Young sont intéressantes et instructives. On peut les préférer à celles de M. Lebesgue pour leur simplicité. Pour ma part, mes préférences sont toujours restées à la définition de M. Lebesgue; je crois que c'est la plus naturelle et celle qui va le plus au fond des choses, et puis, surtout, c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale comme *fonction d'ensemble*. Or c'est là un de ses caractères les plus essentiels, et nous allons bientôt y revenir.

Mais avant de quitter la présente question, il faut encore compléter la définition précédente qui ne s'applique qu'aux fonctions bornées, et introduire avec M. Lebesque la définition des *fonctions sommables*.

Considérons d'abord une fonction positive et non bornée $f(x)$. Son intégrale est, par définition, la limite de celle d'une fonction bornée qui tend vers $f(x)$ en croissant. Cette limite peut être infinie, mais, si elle est finie, on dit que $f(x)$ est *sommable* et a cette limite pour intégrale.

Si la fonction non bornée $f(x)$ change de signe, elle est la différence de deux fonctions non négatives. Si ces deux fonctions sont sommables, $f(x)$ et $|f(x)|$ le sont aussi. L'intégrale de $f(x)$ est alors bien déterminée et égale à la différence des intégrales des deux termes de cette différence.

Jusqu'ici, il n'a pas été question de fonction à variation bornée et j'ai peut-être paru oublier mon sujet. J'y reviens enfin avec la notion fondamentale de *l'intégrale indéfinie.*

Considérons l'intégrale d'une fonction sommable $f(x)$ étendue à un intervalle *variable* (a, x), à savoir :

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Cette fonction de x est une *intégrale indéfinie* ou tout simplement une *intégrale.* C'est une fonction à variation bornée et sa variation totale dans l'intervalle (a, x) a pour valeur

$$\int_a^x |f(x)|\,dx.$$

Mais, comme nous aurons l'occasion d'y insister plus loin, la réciproque n'est pas vraie : Une fonction à variation bornée n'est pas toujours une intégrale.

Les propriétés de l'intégrale indéfinie ont été étudiées par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904).

Il donne d'abord, à la suite de M. Vitali, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(x)$ soit une intégrale indéfinie. Il faut pour cela que la somme des variations $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$ de $\varphi(x)$ sur un nombre quelconque d'intervalles (α, β) non empiétants soit aussi petite que l'on veut avec la somme des longueurs des intervalles. On dit aujourd'hui, d'après M. Vitali, qu'une fonction qui vérifie cette condition est *absolument continue.*

C'est dans ces mêmes *Leçons* que M. Lebesgue a abordé l'étude de la *dérivation* des intégrales indéfinies et il a établi le résultat absolument fondamental que voici :

Une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée $f'(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle et elle est l'intégrale de cette dérivée considérée là où elle existe. On a par conséquent, dans ce cas,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\,dx.$$

Par définition, un *ensemble de mesure nulle* est un ensemble de points qui peut être enfermé dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs peut être supposée aussi petite que l'on veut. *De tels ensembles peuvent être négligés dans l'intégration.* C'est là un principe fondamental, dont nous venons de rencontrer une des plus intéressantes applications.

3. Fonctions d'ensemble.

L'intégrale telle que nous venons de la définir est une *fonction* de point ou, si l'on veut, *une fonction de l'intervalle d'intégration* (a, x). Mais on peut aussi définir l'intégrale comme *fonction d'ensemble* et il est même nécessaire de se placer de ce point de vue pour en apercevoir quelques-unes des propriétés les plus essentielles.

Définir une fonction d'ensemble F, et il s'agit exclusivement ici d'ensemble de points, c'est établir une correspondance entre un ensemble E et un nombre F(E). Ce nombre, c'est la valeur de la fonction sur l'ensemble.

Quand on procède comme M. Lebesgue, l'intégrale se définit tout aussi immédiatement comme fonction d'ensemble que comme fonction d'intervalle. Nous savons, en effet, que dans cette méthode, l'intégrale est précisément définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles. Nous y reviendrons plus loin à l'occasion de l'intégrale de Stieltjes.

Dans tous les cas, l'intégrale de $f(x)$ sur un ensemble E se ramène à une intégrale sur un intervalle (a, b) contenant E par un artifice très simple que nous allons indiquer et qui nous sera encore utile ailleurs.

Appelons *fonction caractéristique* de l'ensemble E, une fonction $\theta(x)$ égale à 1 en chaque point de E et à zéro partout ailleurs. Si cette fonction est une fonction de Baire, l'ensemble E est *mesurable* (B), c'est-à-dire au sens de M. Borel. Nous ne considérons pas d'autres ensembles pour le moment.

L'intégrale de $f(x)$ sur E est, par définition,

$$\mathrm{F(E)} = \int_a^b \theta(x) f(x)\, dx = \int_{\mathrm{E}} f(x)\, dx .$$

Sous cette forme, il apparait immédiatement que si E est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, non empiétants, *l'intégrale sur l'ensemble somme* $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots$ *est la somme des intégrales sur chaque partie.*

M. Lebesgue a exprimé cette propriété en disant que l'intégrale est une *fonction additive* d'ensemble. J'ai dit moi-même que c'est une fonction *complètement additive*, en voulant souligner par là que la propriété s'étend à *un nombre infini* de parties. Ceci ne serait pas vrai pour l'intégrale de Riemann, qui n'est additive que pour la décomposition en un nombre fini d'intervalles.

La propriété additive correspond à la propriété *distributive* de la théorie générale des opérations. On regrettera peut-être l'abandon de ce terme. Il y a cependant lieu d'observer que le terme normal comporterait une restriction dans le cas actuel : la loi additive ne s'applique, en effet, à une somme d'ensembles que si ces ensembles sont *sans point commun* deux à deux ou non empiétants.

Considérée comme fonction d'un ensemble variable, l'intégrale prend, avec un sens un peu plus général que tout à l'heure, le nom *d'intégrale indéfinie*.

Nous venons de voir que cette intégrale est une fonction additive d'ensemble. Elle est aussi une fonction *absolument continue*. Cette propriété s'exprime maintenant sous une forme plus simple. Une fonction d'ensemble est absolument continue si elle est infiniment petite sur tout ensemble de mesure infiniment petite, c'est-à-dire contenu dans une somme d'intervalles dont la somme des mesures est infiniment petite.

Ces deux propriétés des fonctions d'ensemble : *additivité* et *absolue continuité*, caractérisent les intégrales indéfinies. Ce résultat essentiel est dû à M. Lebesgue, qui l'a énoncé dans un mémoire de l'École normale (1910)(1). Ce théorème prouve combien il est utile d'envisager l'intégrale comme fonction d'ensemble pour se rendre compte de sa véritable nature et de ses propriétés distinctives.

Tant que l'on se borne, comme nous le faisons en ce moment, aux ensembles linéaires et aux fonctions d'une seule variable, la *dérivée* de l'intégrale considérée comme fonction d'ensemble ne présente rien de nouveau et se ramène tout simplement à celle d'une fonction de point.

Par définition, la dérivée en un point x de la fonction d'ensemble

$$\int_E f(x)\,dx$$

est celle de la fonction de point

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

au point x. Si la dérivée n'existait pas, il y aurait toujours des *nombres dérivés, supérieurs* et *inférieurs, à droite et à gauche,* et ils seraient définis de la même façon pour la fonction d'ensemble que pour la fonction de point.

Les intégrales définies sont les plus simples et les plus importantes des fonctions additives d'ensemble, mais ce ne sont point les seules. Si l'on appelle *continue* une fonction d'ensemble qui est infiniment petite sur tout ensemble de diamètre infiniment petit, cette continuité au sens large n'entraîne pas l'absolue continuité; et, par conséquent, il peut exister des fonctions additives d'ensemble, même continues, qui ne soient pas des intégrales indéfinies.

Ce sont ces fonctions additives d'ensemble, considérées dans toute leur généralité, dont je vais maintenant m'occuper. Elles présentent à notre point de vue un intérêt capital, car nous montrerons tout à l'heure l'identité de ces fonctions d'ensemble avec les fonctions à variation bornée. Il en résultera que le problème de la *décompo-*

(1) *Sur l'intégration des fonctions discontinues.*

sition des fonctions à variation bornée en leurs parties constitutives revient au même problème pour les fonctions d'ensemble. Mais cette décomposition est bien plus claire et bien plus instructive sur les fonctions d'ensemble. C'est pourquoi c'est sur celle-ci que nous allons d'abord l'effectuer.

Cette importante question a été traitée tout d'abord par M. Lebesgue dans son Mémoire, déjà cité, publié dans les Annales de l'École Normale. Je suis revenu longuement sur cette question dans mon *Cours d'Analyse*, dans mon Mémoire de l'*American Journal* (1915) et dans mes *Leçons* faites au Collège de France (1916). Voici le résumé de ce que nous en savons aujourd'hui.

Toute fonction additive d'ensemble F(E) est la différence de deux fonctions non négatives, $F_1(E)$ et $F_2(E)$, de même nature et bornées. Cette propriété correspond exactement à la propriété d'une fonction de point à variation bornée d'être la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes. On dira donc tout naturellement qu'une fonction additive d'ensemble est à variation bornée et que les trois fonctions

$$F_1(E), \qquad -F_2(E), \qquad F_1(E) + F_2(E)$$

soit respectivement sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* sur l'ensemble E.

Mais la décomposition de la fonction d'ensemble peut se faire d'un tout autre point de vue, et cette nouvelle décomposition fait pénétrer bien plus profondément que la précédente dans la structure de ces fonctions, donc aussi dans celle des fonctions à variation bornée.

Dans le cas le plus général, une fonction additive d'ensemble, F(E) est la somme de trois autres fonctions analogues, jouissant de propriétés qui les caractérisent.

1° Une fonction des sauts, qui est essentiellement discontinue;
2° Une fonction singulière qui est continue, mais non absolument;
3° Une intégrale indéfinie, qui est absolument continue.

La *fonction des sauts* est formée de toutes les discontinuités de la fonction F(E). Elle est attachée à un ensemble *dénombrable* D : celui des points de discontinuité de cette fonction. Une notation commode permet de définir la fonction des sauts au moyen du même symbole F que la fonction initiale. Désignons par le produit DE la partie commune à l'ensemble fixe D et à l'ensemble variable E, la fonction des sauts peut se représenter par F(DE).

La *fonction singulière* est attachée à un *ensemble singulier* S *de mesure nulle* et, avec la même convention que dans le cas précédent, on peut la représenter par F(SE).

La troisième partie est une *intégrale indéfinie*. Pour en reconnaître la nature et en obtenir l'expression, il convient de définir la *dérivée d'une fonction d'ensemble* au

point x. Ce sera la dérivée de la fonction de point $f(x)$, obtenue en considérant la fonction d'ensemble F sur l'intervalle (a, x) tout comme dans le cas de l'intégrale indéfinie.

Avec cette définition, la fonction des sauts et la fonction singulière ont des dérivées nulles presque partout (sauf dans un ensemble de mesure nulle); la fonction F(E) a presque partout une dérivée $f'(x)$ et l'intégrale définie qui constitue la troisième partie de F est l'intégrale de cette dérivée.

La décomposition de F(E) en ses trois éléments distincts se fait donc par la formule :

$$F(E) = F(DE) + F(SE) + \int_E f'(x)\,dx.$$

Ces trois termes sont bien réellement distincts, puisque l'intégrale est nulle sur tout ensemble de mesure nulle et la fonction singulière, nulle sur tout ensemble dénombrable.

Mais pour effectuer cette décomposition, il faut savoir déterminer les ensembles D et S.

La détermination de l'ensemble dénombrable D ne donne lieu à aucune difficulté. Elle est en quelque sorte immédiate, puisque l'ensemble D est celui des points de discontinuité de F(E), c'est-à-dire celui des points sur chacun desquels F a une valeur non nulle; et F(D) est la somme des valeurs de F en chacun des points de D : c'est précisément ce qui prouve que D est dénombrable.

Par contre, la détermination précise de l'ensemble singulier S est plus difficile et je me suis beaucoup occupé de la préciser dans les publications que j'ai mentionnées plus haut. J'ai montré que S est l'ensemble des points où F(E) a une dérivée unique infinie (de signe déterminé). J'ai encore montré que la décomposition de S en la somme des deux ensembles S_1 et S_2 sur lesquels la dérivée est positive ou négative, fournit, en même temps, la décomposition de la fonction singulière en ses variations positive et négative par la formule

$$F(SE) = F(S_1E) + F(S_2E).$$

Comme je l'ai déjà dit, ce qui donne à ces décompositions tout leur intérêt au point de vue qui nous occupe, c'est qu'elles s'appliquent aux fonctions à variation bornée. Il y a, en effet, *identité* entre les fonctions additives d'ensemble et les fonctions de point à variation bornée. J'ai mis cette identité en évidence dans les mémoires que je rappelais encore il y a un instant. Le moment est venu de montrer comment ces deux sortes de fonctions se ramènent l'une à l'autre.

Il est immédiat qu'une fonction additive d'ensemble F(E) définit une fonction de point $f(x)$ qui est à variation bornée. Il suffit en effet, d'attribuer à $f(x)$ la valeur

de F(E) sur l'intervalle variable (a, x). Le problème délicat est le problème inverse : *Étant donnée une fonction de point à variation bornée, $f(x)$, définit-elle une fonction additive d'ensemble mesurable* (B)?

La réponse est affirmative. M. Radon l'a prouvé dès 1913(1). Je l'ai montré aussi dans mon Mémoire de l'*American Journal* de 1915 et dans mes *Leçons* de 1916. *Le problème de construire la fonction d'ensemble* F(E) *quand la fonction à variation bornée $f(x)$ est donnée, est une simple généralisation du problème de la mesure tel qu'il a été posé et résolu par MM. Borel et Lebesgue.* La définition de F(E) à partir de $f(x)$ est donc un problème qui contient la définition de la mesure comme cas particulier. Mais, chose extrêmement remarquable et sur laquelle j'insiste, le problème particulier de la mesure ne comporte, relativement au problème général, aucune espèce de simplification.

Voici quelques indications sur le raisonnement que j'ai employé. Il suffit évidemment de construire la fonction d'ensemble F(E) pour une fonction de point $f(x)$ à variation bornée et *non décroissante*. D'abord la fonction de point $f(x)$ définit une fonction additive d'intervalles. Soit, en effet, ω l'intervalle (α, β); cette fonction de l'intervalle ω sera définie par la formule

$$F(\omega) = f(\beta) - f(\alpha) = \Delta f;$$

elle est donc *non-négative*.

Il s'agit alors de montrer que la correspondance ainsi établie entre F et les intervalles s'étend à tous les ensembles mesurables (B). Or le raisonnement à faire est absolument identique à celui dont M. Lebesgue s'est servi pour définir la mesure de ces mêmes ensembles; et le problème de la mesure est bien un cas particulier du précédent : celui où l'on prend $f(x) = x$, auquel cas $\Delta f = \beta - \alpha$, est précisément la mesure de l'intervalle ω. Il est tout aussi simple de traiter le cas général que celui de la mesure. J'y ai déjà insisté.

La solution du problème précédent prouve *l'identité des fonctions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble.*

A vrai dire, lorsque M. Radon et moi avons cherché la solution directe du problème précédent, ce problème était implicitement, mais indirectement résolu par les recherches antérieures de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes, au moins pour les fonctions d'une seule variable. Je ne m'en étais pas aperçu et j'aurai l'occasion d'y revenir tout à l'heure.

---

(1) J. Radon, *Théorie und Anwendungen der absolut. Mengenfunktionen* (Sitzungsber. d. Kön. Ak. d. Wiss. in Wien, Math. Naturwiss. Klasse; Bd. CXXII, Abt. II a, Juli 1913).

4. Extension à un nombre quelconque de variables.

Pour simplifier mon exposition, je n'ai considéré jusqu'ici que les fonctions d'une seule variable et les fonctions d'ensemble à une seule dimension. Mais les théories précédentes s'étendent à l'espace et à l'hyperespace. Certaines d'entre elles ont même été exposées de prime abord dans l'hypothèse la plus générale.

Les définitions de la mesure des ensembles, de l'intégrale de Lebesgue, de l'intégrale indéfinie, des fonctions additives d'ensemble, s'étendent si naturellement à un nombre quelconque de dimensions qu'il nous suffira de constater que cette extension est immédiate. Par contre, la dérivation des fonctions d'ensemble et la définition des fonctions de points à variation bornée soulèvent dans le cas de plusieurs dimensions des difficultés qui leur sont propres. Pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des intégrales indéfinies, il faut introduire dans la définition de la dérivée certaines restrictions qui ont été indiquées par MM. VITALI[1] et LEBESGUE. Comme l'a montré M. Lebesgue dans son Mémoire de l'École Normale de 1910, tous les théorèmes sur la dérivation des intégrales indéfinies peuvent alors être étendus au cas général. M. Lebesgue caractérise la restriction à introduire en spécifiant que la dérivation doit se faire au moyen de ce qu'il appelle des *familles régulières* d'ensembles.

Par contre, la définition de la dérivée utilisée par MM. Vitali et Lebesgue est insuffisante pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des fonctions d'ensemble qui ne sont pas absolument continues. Je me suis particulièrement occupé de cette question dans mon mémoire de l'*American Journal* (1915), et j'ai montré que l'on arrive au but en particularisant davantage encore la définition de la dérivée et en utilisant ce que j'ai appelé la *dérivation sur un réseau*. La définition des fonctions de point à variation bornée a été donnée par M. Vitali [1] pour le cas de plusieurs variables. L'identité de ces fonctions avec les fonctions additives d'ensemble a été établie par les recherches de M. Radon et les miennes. Ainsi toutes les questions posées et résolues précédemment, pour le cas d'une seule variable, sont également résolues pour le cas général.

J'ai attiré tout à l'heure votre attention sur l'importante généralisation de la mesure des ensembles qui conduit à définir une fonction d'ensemble en partant d'une fonction d'intervalle. L'intégrale de Lebesgue est susceptible d'une extension qui correspond point pour point à cette extension de la notion de la mesure et conduit à l'*intégrale généralisée de Stieltjes*. C'est de celle-ci qu'il convient maintenant de nous occuper.

---

[1] *Sull' integrazione per serie* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1907]. *Sui gruppi di Punti e sulle funzioni di variabili reali* [Rendic. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1908].

5. L'intégrale généralisée de Stieltjes.

STIELTJES est le premier qui ait défini l'intégration d'une fonction continue par rapport à une fonction à variation bornée(1). On a donné son nom à l'intégrale ainsi construite. L'intégrale de Stieltjes a pu passer jusque dans ces derniers temps pour une construction assez artificielle. Mais son importance a été mise en lumière par plusieurs géomètres dans des travaux récents. Bien plus, comme nous allons le voir bientôt, elle se présente naturellement comme solution de la question la plus importante du calcul fonctionnel.

Voici d'abord la définition de Stieltjes.

Soient $f(x)$ une fonction continue est $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée (continue ou non) dans l'intervalle (a, b). On partage cet intervalle en intervalles élémentaires (x_i, x_{i+1}) comme d'habitude, on prend arbitrairement ξ_i dans (x_i, x_{i+1}) et on fait la somme, étendue à tous les intervalles élémentaires,

$$\Sigma f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)].$$

Cette somme a une limite quand tous les intervalles tendent vers zéro. Cette limite est l'*intégrale de Stieltjes*. Elle se représente par la notation

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

La définition de Stieltjes suppose essentiellement la fonction $f(x)$ continue. La question se pose de savoir si l'on peut étendre la définition à un champ fonctionnel plus vaste et, en particulier, à celui des fonctions de Baire.

M. Lebesgue, qui a posé cette question, en a donné la solution dans un article les *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 1910*(2). L'extension se fait en ramenant l'intégrale de Stieltjes à une intégrale de Lebesgue par un changement de variables. Ce procédé mérite de nous arrêter un instant et nous allons le présenter en le réduisant à sa forme la plus simple. Remarquons que, si $\alpha(x)$ est la somme de deux fonctions à variation bornée, l'intégrale relative à $\alpha(x)$ est la somme des intégrales relatives à chaque terme. Il suffit donc de faire la réduction pour une fonction $\alpha(x)$ *croissante* dans tout intervalle, car toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions telles. Dans ce cas particulier, auquel revient le cas général, le

(1) *Recherches sur les fractions continues* (Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse, 1894, vol. 8, pp. 1-122).

(2) *Les intégrales de Stieljes*, vol. 150, pp. 86-88. Je rappelle, en passant, que j'ai utilisé dans mon *Cours d'Analyse*, dès 1903, le même artifice pour ramener une intégrale curviligne à une intégrale ordinaire.

procédé de M. Lebesgue consiste à prendre $\alpha(x)$ comme variable d'intégration. Alors x est une fonction uniforme de α et l'intégrale de Stieltjes se transforme dans l'intégrale de Lebesgue.

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f[x(\alpha)]\,d\alpha.$$

Ainsi se trouve faite, sans aucun calcul, l'extension de la définition à toutes les fonctions $f(x)$ de Baire. Cette transformation étend, par le fait même, aux intégrales de Stieltjes la propriété fondamentale de l'intégrale de Lebesgue relative à l'intégration terme à terme.

L'analyse des fonctions à variation bornée qui a été résumée précédemment permet de faire une décomposition intéressante de l'intégrale de Stieltjes, décomposition qui a été indiquée par M. Maurice Fréchet au *Congrès des Sociétés savantes* de 1913(1). Nous savons que toute fonction $\alpha(x)$ à variation bornée est la somme de trois fonctions

$$\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x),$$

dont la première est une intégrale, la seconde la fonction singulière, la troisième la fonction des sauts. Cette décomposition entraîne donc celle de l'intégrale de Stieljès en trois intégrales correspondantes qui sont chacune d'un type essentiellement différent et irréductibles l'une à l'autre.

J'ai déjà signalé précédemment qu'il y a une relation entre l'intégrale de Stieljès et le problème de déterminer la fonction d'ensemble définie par une fonction de point, $\alpha(x)$, à variation bornée. Constatons, en passant, que les résultats obtenus, dès 1910, par M. Lebesgue permettaient, au moins dans le cas d'une seule variable, de résoudre ce problème. En effet, la valeur de cette fonction α sur l'ensemble E, contenu dans (a, b), sera définie par intégrale de Stieltjes :

$$\alpha(\mathrm{E}) = \int_a^b \theta(x)\,d\alpha(x)$$

où $\theta(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Quel que soit leur intérêt et leur valeur, les recherches de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes n'avaient point un caractère définitif. D'abord cette méthode de M. Lebesgue ne s'étend pas aisément aux fonctions de plusieurs variables(2). D'autre part, la réduction de l'intégrale de Stieljes à une intégrale de Lebesgue peut être considérée comme inutile, car de même que la valeur d'une fonction à variation bornée

(1) *Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de Stieltjes*, Paris, Imprimerie Nationale, 1914.

(2) L'extension est cependant possible, comme on le verra plus loin.

sur un ensemble E se définit ni plus ni moins facilement que la mesure de E, de même, l'intégrale de Stieltjes n'est pas plus difficile à définir directement que celle de Lebesgue. C'est ce que M. W.-H. Young a montré. La méthode de M. Young pour définir l'intégrale de Lebesgue s'applique ni plus ni moins simplement à la définition de l'intégrale de Stieltjes et l'extension au cas d'un nombre quelconque de dimensions est immédiate(1).

L'avantage de s'appliquer à l'intégrale de Stieltjes n'est pas exclusivement propre à la méthode de M. Young. La méthode primitive de M. Lebesgue pour définir son intégrale possède le même avantage et l'on peut arriver à l'intégrale de Stieltjes, dans le cas le plus général, en suivant pas à pas la voie ouverte par M. Lebesgue dans sa Thèse. La solution du problème est complètement fournie par la théorie des fonctions d'ensemble. C'est ce que nous allons montrer en considérant, pour fixer les idées, des fonctions d'une seule variable.

Soient $f(x)$ une fonction de Baire supposée bornée, et $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée dans un intervalle (a, b). Celle-ci définit une fonction d'ensemble que nous représenterons par $\alpha(E)$ et dont la détermination correspond exactement, comme nous le savons, au problème de la mesure des ensembles.

Ceci posé, pour définir l'intégrale de Lebesgue, que je considère pour commencer,

$$\int_a^b f(x)dx,$$

on désigne par l et L deux bornes comprenant $f(x)$, égalité exclue; on construit une échelle de nombres $l_1 = l, l_2, l_3, \ldots l_i, l_{i+1}, \ldots l_n, l_{n+1} = L$; on désigne par E_i l'ensemble des points de (a, b) où $f(x)$ vérifie la condition

$$l_i \leqq f < l_{i+1}$$

et l'on construit les deux sommes;

$$\Sigma l_i (mE_i), \qquad \Sigma l_{i+1} (mE_i),$$

où mE_i est la mesure de E_i. L'intégrale de Lebesgue est la limite commune de ces deux sommes, quand les degrés de l'échelle tendent vers zéro.

L'intégrale de Stieltjes, relative à la fonction $\alpha(x)$ à variation bornée,

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x),$$

(1) La définition de l'intégrale de Stieltjes, au cas de plusieurs variables dans l'hypothèse restreinte de la continuité, a été faite tout d'abord par M. Maurice Fréchet [Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. IX, 1909, pp. 1-17]. Comparer avec la définition générale du même auteur dans son article *Sur les fonctionnelles bilinéaires* (Trans. of the Americ. Journal of Math. July 1915).

se définit exactement de la même manière que celle de Lebesgue, sauf que l'on remplace la mesure de E_i par la valeur de la fonction $\alpha(E_i)$ sur cet ensemble. L'intégrale de Stieljès est donc la limite commune des deux sommes(1)

$$\Sigma l_i \alpha(E_i), \qquad \Sigma l_{i+1} \alpha(E_i),$$

Toute la théorie de l'intégrale de Lebesgue s'étend à celle de Stieltjes. Ainsi, on peut aussi bien définir l'intégrale de Stieltjes sur un ensemble E que sur un intervalle. C'est une fonction additive d'ensemble, mais qui, en général, n'est pas absolument continue. On voit enfin que, sous cette forme, l'extension à un nombre quelconque de variables est immédiate.

6. Opérations fonctionnelles.

J'arrive à la dernière partie de mon exposé.

On peut rattacher les fonctions d'ensemble que nous avons considérées jusqu'ici à des considérations d'un ordre plus général.

Une fonction d'ensemble établit une correspondance entre un certain ensemble E et un nombre. Une telle correspondance s'appelle une *opération fonctionnelle*, ou tout simplement une fonctionnelle. L'étude des propriétés de cette correspondance est le *Calcul fonctionnel*. On peut trouver les premiers exemples du Calcul fonctionnel dans les recherches déjà anciennes de M. Volterra sur les fonctions de ligne (1887), mais on doit à M. M. Fréchet le premier essai d'une théorie générale de ce calcul(2).

Les fonctions additives d'ensemble se rattachent à des fonctionnelles particulières sur lesquels M. Hadamard a attiré l'attention et auxquelles il a donné le nom de *fonctionnelles linéaires*(3). Il considère le cas où la valeur V de la fonctionnelle dépend, non pas comme précédemment d'un ensemble E, mais de la forme d'une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b). Nous désignerons cette correspondance par $V(f)$.

La fonctionnelle est *linéaire* si elle possède les deux propriétés suivantes :

---

(1) Sous cette forme, la définition a été donnée d'abord par M. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*. Sitzungsbericht d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien. Bd. CXXII, Abt, II a, Juli 1913, pp. 28-33.

Il faut aussi signaler dans le même ordre d'idées M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait* (Bulletin de la Société Mathématique de France; 1915, pp. 148-265).

(2) *Rendiconti di Palermo*, 1906.

(3) *Calcul fonctionnel* (Enseignem. Mathém., 1911).

1° Elle est *distributive*, c'est-à-dire que l'on a

$$V(f_1 + f_2) = Vf_1 + Vf_2;$$

2° Elle est *bornée*, c'est-à-dire que l'on peut assigner deux nombres positifs A et λ tels que

$$\text{si} \qquad |f| < A, \qquad \text{on ait} \qquad V(f) < \lambda A.$$

On s'assure aisément que si cette condition est réalisée pour les deux nombres A et λ, elle subsiste, en vertu de la propriété distributive, pour toutes les autres valeurs positives de A, et cela avec la même valeur de λ.

Une fonction additive d'ensemble, F(E), établit une correspondance qui se ramène à la précédente par un artifice. Il suffit de remplacer l'ensemble E par sa fonction caractéristique $\theta(x)$. On définit la fonctionnelle $V(\theta)$ en lui attribuant la valeur F(E). Avec cette définition, il est vrai, la fonctionnelle $V(\theta)$ n'est distributive que pour les fonctions caractéristiques d'ensembles *sans point commun*. Mais cette restriction n'empêche pas la théorie des fonctions additives de rentrer entièrement dans celles des ensembles linéaires. Il est facile de s'en assurer.

C'est, sans doute, M. Fr. Riesz qui a fait faire à la théorie des fonctionnelles linéaires son progrès le plus important. Il[1] a démontré en effet que toute *fonctionnelle linéaire peut être mise sous la forme d'une intégrale de Stieltjes*

$$V(f) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

ce qui ramène l'étude des fonctionnelles linéaires aux théories précédentes.

Ce résultat serait presque immédiat si le champ des fonctions f comprenait, outre les fonctions continues, les fonctions qui ne prennent que les seules valeurs 0 et 1 et n'ont qu'un nombre limité de points de discontinuité. En effet, posons *a priori* la formule précédente; elle montre que, si $f(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle (a, x), la fonctionnelle se réduit à $\alpha(x)$. Cette remarque permet de calculer la fonction inconnue $\alpha(x)$ et l'on vérifie *a posteriori* que la formule ainsi posée satisfait à toutes les conditions du problème.

La seule difficulté est donc de montrer que le champ fonctionnel peut être étendu à ces fonctions caractéristiques. C'est un problème tout à fait analogue à celui d'étendre l'intégrale de Stieltjes aux fonctions discontinues. Il a eté résolu par M. Riesz[2] en utilisant très habilement les passages à la limite sur les suites mono-

---

(1) *C.-R.*, 29 nov. 1909 et *Ann. Éc. Norm.*, 1914. Ce résultat était préparé par M. Hadamard (*Calcul des variations*, p. 299).

(2) *Ann. Éc. norm.*, 1914.

tones de fonctions. Il est à peine besoin de signaler le parallélisme entre les procédés de M. Riesz pour traiter cette question et ceux qui ont été exposés par M. Young dans la théorie de l'intégrale de Stieltjes.

L'expression d'une fonctionnelle linéaire au moyen de l'intégrale de Stieljès conduit à des conséquences extrêmement intéressantes. Elle montre, en particulier :

1° Que *toute fonctionnelle linéaire de fonctions continues* s'etend d'elle-même à toutes les fonctions de Baire;

2° Que, si *l'on envisage une fonctionnelle linéaire* $V(f)$ *dans un champ de fonctions bornées, le passage à la limite sous le signe* V *y est permis sans aucune restriction, que la convergence soit uniforme ou ne le soit pas.* Le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

Plus généralement, nous pourrions considérer l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ de deux variables dans le rectangle R limité aux intervalles (0, 1) des variables x et y. Une fonctionnelle linéaire de telles fonctions serait encore représentée par une intégrale de Stieljès généralisée pour deux variables

$$V(f) = \int\int_R f(x, y) d_x d_y \alpha(x, y),$$

où $\alpha(x, y)$ est à variation bornée, et il est clair que ces conclusions s'étendent à un nombre quelconque de dimensions.

Mais il est intéressant de remarquer, et cela n'a peut-être pas encore été fait, que *le cas de plusieurs variables se ramène au cas d'une seule* par un artifice dont M. Lebesgue s'est servi à diverses reprises dans les questions analogues. Cet artifice fait intervenir la courbe de Peano

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

qui passe par tous les points du carré R quand t varie de 0 à 1 et établit une correspondance univoque entre les points du carré et de l'intervalle, sauf pour une infinité dénombrable d'entre eux. Cette courbe établit donc une correspondance entre les deux fonctions

$$f(x, y) \quad \text{et} \quad f(\varphi, \psi) = f(t).$$

Par conséquent, la fonctionnelle $V f(x, y)$ définit une fonctionnelle de même valeur $Vf(t)$ et l'on a, par le théorème de Riesz,

$$Vf(x, y) = Vf(t) = \int_0^1 f(t) d\beta(t)$$

où $\beta(t)$ est à variation bornée. La réduction est faite. Mais on peut tirer de là une autre conséquence intéressante.

Comparons les deux expressions précédentes de la même fonctionnelle V(f); nous obtenons la formule suivante

$$\int\int_R f(x, y)\, d_x d_y \alpha(x, y) = \int_0^1 f(t)\, d\beta(t),$$

qui ramène toute intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature.

C'est probablement la première fois que cette réduction est signalée pour l'intégrale de Stieltjes. Mais j'ai déjà effectué cette réduction en 1910 (1) pour l'intégrale de Lebesgue. Cette réduction se fait alors par la formule plus simple :

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 f(\varphi, \psi)\, dt.$$

On pourrait assurément établir la formule de réduction d'une intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature, sans passer par l'intermédiaire des fonctionnelles. On aurait ainsi un procédé permettant d'étendre à un nombre quelconque de variables les méthodes introduites tout d'abord par M. Lebesgue pour généraliser la définition de l'intégrale de Stieltjes dans le cas d'une seule variable.

Les fonctionnelles linéaires ont une importance à part, parce qu'elles s'introduisent tout naturellement dans l'une des questions les plus importantes que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation*. La question de la différentiation des fonctionnelles au point de vue qui nous intéresse ici est encore toute récente. Presque tout ce que nous en savons se trouve contenu dans deux Mémoires fondamentaux publiés en 1913 (2) et 1914 (3) par M. Maurice Fréchet.

Le premier essai pour appliquer aux fonctionnelles les procédés du calcul différentiel est déjà ancien; il est dû à M. Volterra, qui s'est occupé de la différentiation des fonctions de lignes. La méthode de M. Volterra consiste à opérer avec la *variation* de la fonctionnelle au sens où l'on entend ce mot dans le calcul des variations et cette méthode conduit déjà à des résultats fondamentaux (4). Mais M. Fréchet prend son point de départ dans une définition proposée par M. Hadamard (5) et qui consiste à considérer comme différentiable toute fonctionnelle dont la variation est

---

(1) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*

(2) *Sur la notion de différentielle et le calcul fonctionnel* (Extrait des Comptes Rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1912, Sciences).

(3) *Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne* (Transact. ot the Amer. Mathemat. Soc., 1914).

(4) *Sopra le funzioni chi dependono da altre funzioni* (Rendiconti della reale Accademia dei Lincei, volume III (1887), nota I, II, III).

(5) *Le calcul fonctionnel* (Enseignement Mathématique).

une *fonctionnelle linéaire* par rapport à l'accroissement de l'argument. Cette définition s'étend sans aucune difficulté aux fonctionnelles qui dépendent de plusieurs arguments et on obtient des généralisations extrêmement intéressantes des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel.

J'ai malheureusement trop abusé de votre temps et de votre bienveillante attention pour en dire davantage sur cette intéressante question.

Conclusion.

Il est temps de conclure cette trop longue conférence.

Quel peut être dans l'avenir le développement des applications des fonctions à variation bornée? Je vais risquer un mot de réponse à cette question.

Dans la voie ouverte par M. C. Jordan, c'est-à-dire dans la recherche des conditions de convergence, il semble que le domaine des applications soit illimité. Chaque fois que la question de convergence se présentera dans la représentation d'une fonction par un mode nouveau, l'hypothèse que la variation est bornée sera l'une des premières qui viendra à l'esprit, et elle conduira presque toujours à des résultats utiles.

J'ai indiqué, d'autre part, les questions que posent les relations des intégrales de Lebesgue avec les fonctions à variation bornée. Il semble que toutes ces questions soient résolues d'une manière satisfaisante. Les nouvelles extensions de la notion d'intégrale se détachent de ces fonctions, et l'intégrale de Denjoy, en particulier, qui est la plus importante, cesse d'être une fonction à variation bornée.

Par contre, les problèmes relatifs à la théorie et la différentiation des fonctionnelles sont moins avancés. Espérons que la théorie des fonctions à variation bornée, qui a pris racine sur le sol de France avec les travaux de M. Jordan, continuera de se développer à l'Université de Strasbourg redevenue française, et particulièrement entre les mains de M. Maurice Fréchet; ses derniers travaux appellent de nouvelles recherches et font naître de légitimes espérances.

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ET DE QUELQUES POINTS D'ANALYSE

PAR M. VITO VOLTERRA.

Dans les Congrès précédents de Mathématiciens, qui ont eu lieu en France et en Italie, j'ai eu l'honneur de prononcer des Conférences Générales. Je me suis occupé alors de questions historiques et j'ai essayé de fixer l'évolution qui a eu lieu en Italie dans l'analyse et dans l'ensemble des recherches mathématiques pendant ces dernières années. Permettez-moi de quitter les questions historiques dans la conférence que j'ai l'honneur de faire aujourd'hui, et de m'occuper d'une question d'enseignement. A l'époque actuelle on doit, semble-t-il, regarder l'avenir plus que le passé.

Je désire parler de l'enseignement de la physique mathématique et de questions qui s'y rattachent spécialement au point de vue de la partie analytique de cette science.

Les travaux faits depuis un siècle et demi permettent d'unifier et systématiser des recherches qui forment un tout organique, qu'on pourrait appeler *Physique analytique*. C'est le pendant de la *Mécanique analytique*. Dans celle-ci le rôle principal est joué par les équations aux dérivées ordinaires, tandis que dans la physique analytique l'instrument dont on fait le plus d'usage est constitué par les équations aux dérivées partielles.

Je consacrerai cette conférence à l'exposition du programme, qu'à mon avis il serait utile de développer. Je pense qu'un cours de physique analytique s'impose comme s'est imposé un cours de mathématiques générales et un cours de mécanique analytique. Ce cours servira à donner l'ensemble de connaissances indispensables aux chapitres plus modernes et aux développements futurs de la physique mathématique. Les notions qu'on pourra y puiser se trouvent éparses un peu partout, mais il y a peut-être œuvre nouvelle à faire dans leur exposition, quelques idées directrices permettant de relier entre eux les divers sujets abordés de manière qu'ils ne soient pas séparés les uns des autres.

L'homogénéité qu'on obtient ainsi amène à laisser de côté certaines branches de la science qui nous occupe ; c'est pourquoi, je l'avoue dès maintenant, un cours de

cette sorte ne sera pas un cours complet de physique mathématique. Nous verrons tout à l'heure quelles questions ne rentrent point dans le cadre que nous allons déterminer et quels avantages on trouve à les placer dans un autre.

A quel moment historique peut-on placer la création de la physique mathématique, et quels ont été les besoins qui l'ont fait naître?

On peut rappeler à ce propos que la dynamique s'est constituée dans la période de la Renaissance, et que le calcul infinitésimal est intimement lié à sa création et à son développement. On s'en rendra compte si l'on songe que c'est l'invention de la poudre qui a donné lieu aux problèmes de la balistique. Les anciens n'avaient pas besoin de la dynamique, c'est pourquoi ils l'ont laissée de côté et n'ont pas cru nécessaire d'approfondir les lois du mouvement.

Mais lorsque le développement de l'artillerie fit voir la nécessité d'étudier le mouvement des corps pesants, les méthodes infinitésimales furent dès le premier moment employées par Galilée pour ces études. Ensuite les lois de la dynamique et les premiers exemples d'intégration des équations différentielles ordinaires furent l'œuvre de Newton. Plus tard encore la mécanique analytique et les calculs des variations ont été créés par Lagrange.

On peut fixer dans la seconde moitié de l'avant-dernier siècle et le commencement du siècle passé l'époque où la physique mathématique commence sa grandiose évolution.

Il serait naturellement possible de faire remonter plus haut les origines de la Physique mathématique. Si l'on voulait se donner la peine de fouiller dans l'histoire des mathématiques, on pourrait trouver à presque toutes les époques, même en des temps très reculés, la trace de questions de physique traitées par les mathématiques, et qu'on pourrait ainsi considérer en un sens général comme rentrant dans le domaine de la physique mathématique; mais ces essais n'ont rien de systématique, et ce n'est qu'au moment où d'Alembert, Fourier, Poisson, Cauchy commencèrent à faire un usage courant des équations aux dérivées partielles, que la période vraiment féconde de la physique mathématique est commencée.

Je viens de prononcer le mot : équations différentielles aux dérivées partielles. En effet, le développement de cette branche de l'analyse et de tout ce qui s'y rapporte a constitué le plus puissant instrument qui a servi au développement théorique de l'élasticité, de l'acoustique, de l'hydrodynamique, de l'optique, de l'électricité, de la propagation de la chaleur.

C'est justement dans les premières années du siècle passé que le besoin d'approfondir ces différents chapitres de la physique par le moyen de l'analyse s'est fait le plus sentir.

L'art de la construction rendait nécessaire d'approfondir la connaissance de la résistance des matériaux; il s'agissait, tout en assurant la solidité, de réaliser la plus grande économie possible des matériaux. Les grandes constructions en fer, les

constructions de grandes machines ne devaient tarder à commencer. La nécessité de prévoir par le calcul les dimensions des différentes pièces et de connaître les lois qui règlent l'élasticité des corps se faisaient sentir. Les premiers essais de Galilée sur la flexion des poutres, les idées de Boyle sur les propriétés élastiques des gaz, les études d'Euler amenèrent peu à peu à la théorie générale de l'élasticité.

De même l'usage toujours plus répandu des machines à feu rendait nécessaire le perfectionnement des méthodes de détermination de la température, de la conductibilité et de la capacité calorifique des corps. Les questions de géophysique s'imposaient aussi. L'ensemble de ces recherches devait aboutir d'un côté, sous l'impulsion des conceptions de Sadi Carnot, à la thermodynamique, de l'autre côté à la théorie de la propagation de la chaleur. Celle-ci, qui n'avait été précédée que par des timides essais de Lambert, a été l'œuvre de Fourier. Elle constitue même aujourd'hui, après un si grand nombre de découvertes et de travaux, le plus bel édifice de toute la physique mathématique. C'est le modèle sur lequel les autres théories classiques furent édifiées. Nous l'aurons toujours présent à l'esprit au cours de cette conférence.

Mais je crois que la poussée la plus active qui ait agi sur le développement de la physique mathématique est due à l'énorme extension acquise par la théorie et les applications pratiques de l'électricité. Il n'est pas nécessaire de rappeler ici le rôle que joue l'électricité dans toute la vie moderne. De quelque côté que l'on tourne les yeux on voit cette énergie de la nature nous aider dans tous les moments et dans toutes les circonstances de la vie. Ce n'est pourtant qu'après que Coulomb eut donné les lois fondamentales de l'électrostatique et que Volta eut inventé la pile en 1800, que les applications de l'électricité se suivirent les unes les autres avec une vitesse toujours croissante. Or la plupart des découvertes de l'électricité, ayant eu une double source expérimentale et mathématique, furent l'œuvre des savants, et les applications résultèrent la plupart du temps des travaux théoriques. C'est pourquoi d'importants développements analytiques se suivirent les uns les autres jusqu'à conduire à la théorie électromagnétique de la lumière par laquelle l'optique devint un chapitre de l'électrodynamique.

J'ai dit tout à l'heure que la dynamique n'a commencé son existence que le jour où les artilleurs ont posé le problème des trajectoires des projectiles. Aurions-nous une physique mathématique aussi avancée, si l'électrotechnique n'avait eu toujours de nouvelles questions à poser aux mathématiciens? On peut aller plus loin : la dynamique est devenue la base des théories cosmogoniques lorsque Newton conçut le problème du mouvement des planètes comme un grand problème de balistique. De même l'électricité est en train de devenir, par les travaux des physiciens modernes, la base de toutes les théories moléculaires et atomiques, et par suite la base de la constitution de l'univers.

Quoique de date assez récente le développement de la physique mathématique peut être partagé en trois phases.

Son premier âge, qui comprend les dernières an nées du dix-huitième siècle et els premières années du dix-neuvième, est son âge héroïque. C'est certainement dans cette période que se placent les œuvres fondamentales qui ont donné la première impulsion à toutes les recherches ultérieures qui ont marqué la physionomie à cette branche de la philosophie naturelle.

C'est à la période suivante, qui se place au milieu du siècle passé, que revient l'honneur d'avoir perfectionné les différents chapitres qui avaient été créés, et l'honneur bien plus grand d'en avoir relié quelques-uns entre eux et d'avoir énoncé de nouveaux principes généraux. Il va sans dire qu'entre la première et la seconde période il n'y a pas de ligne nette de démarcation. Les travaux de Maxwell, de Lord Kelvin, de Stokes, de Helmholtz, de Riemann, de Kirchhoff, de Lamé, de De Saint-Venant, de Mossotti et de Betti sont trop étroitement liés à ceux de leurs prédécesseurs Laplace, Lagrange, Ampère, Green, Fourier, Poisson, Cauchy, Gauss, pour qu'il soit possible de les en séparer.

On peut répéter des considérations analogues si l'on passe à une époque plus récente. Tout essai de démarcation serait encore plus difficile, parce que les travaux récents nous touchent de plus près et étant ainsi plus rapprochés de nous, la perspective est plus difficile à saisir. Cependant si l'on compare les œuvres de Poincaré sur la physique mathématique à celles des savants que je viens de nommer, on s'aperçoit qu'elles s'en détachent nettement. C'est pourquoi il faut dire qu'une troisième période débute à peu près à l'époque ou Poincaré a commencé ses cours et ses travaux de physique mathématique. En effet, à ce moment les idées de Maxwell, tout en présentant encore des difficultés, avaient fait leur chemin et commençaient à devenir classiques; les principes généraux de la thermodynamique étaient désormais acquis à la science. En même temps l'analyse, grâce à une critique délicate, réformait des démonstrations qui n'étaient plus suffisantes et cherchait des nouvelles bases pour les anciennes et les nouvelles théories. Une période féconde de préparation était close, et une nouvelle phase, marquée par les découvertes sur les ondulations électriques, les rayons X, le radium, la théorie des électrons, la relativité, commençait.

A l'aube du nouveau siècle, Poincaré inaugurait à Paris le Congrès des physiciens par une conférence devenue classique, dans laquelle il montrait le rôle de la physique mathématique, ses limites et toute l'importance que cette branche de la philosophie naturelle a eu dans le passé et celle qu'elle allait avoir dans l'avenir. C'était en même temps une récapitulation du travail passé et un programme pour le travail futur.

Cet aperçu très simple nous a déjà rendu compte, et des raisons pour lesquelles la physique mathématique classique s'est constituée et des branches qu'elle comprend, et enfin des moyens analytiques qu'elle utilise.

Nous avons déjà dit que l'ensemble des notions qu'on pourra puiser dans le cours, dont nous traçons ici le programme, n'est pas nouveau; mais il est important de les disposer de la manière la plus économique et la plus systématique possible.

Et voyons d'abord quelles notions y trouveront place. Elles sont de deux sortes, notions physiques et notions mathématiques.

Examinons quelles branches de la physique doivent être exposées. Nous les avons déjà nommées, mais il sera utile de les rappeler : c'est la propagation de la chaleur, l'élasticité, l'acoustique, l'optique, l'électricité et le magnétisme, l'hydrodynamique, en y comprenant aussi la théorie générale du potentiel.

D'autre part, nous pouvons énumérer les notions analytiques qui seront nécessaires : ce sont d'abord les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, puis les équations intégrales et intégro-différentielles, enfin des relations d'un type plus général.

Ces différentes théories physiques et mathématiques sont si étroitement liées les unes aux autres qu'il est impossible de les séparer, sans danger de faire perdre l'unité à un organisme créé par un long effort. On aperçoit d'abord des liens historiques, ensuite des liens intimes entre les pensées fondamentales et directrices qui ont enfanté ces différentes théories. Ils s'entrelacent de telle sorte que tout en voyant la nécessité de les démêler on comprend qu'il ne faut rien couper. Comment faire pour vaincre ces difficultés?

Rappelons ce qu'on fait ordinairement dans les cours et dans les traités. Les cours de physique mathématique sont en général de type monographique. En effet, dans cet enseignement on ne cherche pas généralement à donner une idée d'ensemble sur les différents sujets, mais on approfondit un chapitre spécial. C'est un exemple qu'on montre à l'esprit des élèves; s'ils peuvent s'approprier les méthodes qu'on expose, on est d'avis qu'ils sont capables d'étudier après par euxmêmes les autres chapitres. Si les élèves peuvent suivre plusieurs cours, ils voient défiler sous leurs yeux les unes après les autres les différentes parties de la physique mathématique. C'est ainsi qu'on a des cours d'optique, des cours d'élasticité, des cours d'électricité, etc.

Tout cela est très utile, mais de cette manière, si chaque chapitre est très convenablement approfondi, on perd évidemment de vue l'ensemble et l'unité de la physique analytique.

Il y a aussi une autre méthode. On peut d'abord exposer les notions analytiques en développant la théorie des équations aux dérivées partielles, leurs procédés d'intégration, les équations intégrales et les théories qui résultent de leur étude, et qui en constituent la continuation logique. On peut traiter ensuite les développements en séries et les fonctions spéciales qu'on emploie dans la physique mathématique. Ce n'est qu'après avoir donné les instruments qu'il faut employer, qu'on attaque les problèmes qui se présentent en physique et qu'on cherche à les résoudre.

Il va sans dire que cette voie présente des avantages considérables. C'est en

effet la voie la plus méthodique, où l'on va du connu à l'inconnu, rien n'étant imprévu. Mais elle n'est pas sans inconvénients, quoique on puisse admettre qu'un bon élève qui a pleine confiance dans son maître, sera persuadé que tout ce qu'il lui expose sera utile dans la suite, et qu'il ne se perd pas dans des questions théoriques trop subtiles. Si l'élève ne comprend pas la raison d'être des théories qu'il voit développer devant ses yeux, s'il ne se rend pas compte des causes profondes qui ont amené à créer les différents procédés, à bâtir les différentes théories mathématiques, et à faire des classification qui lui paraissent artificielles, ou à se créer des difficultés qu'il ne se serait jamais proposées, il est soutenu par la foi qu'à la fin de la pièce, en voyant le dénouement il comprendra le rôle joué par chaque sujet particulier.

Vous vous doutez déjà que tout en comprenant les avantages qu'on peut en tirer, je suis loin d'être favorable à cette méthode. Nous touchons là à une question générale de la pédagogie des sciences. A mon avis, l'idéal serait de suivre justement la voie opposée. On ne peut pas s'assimiler complètement une branche quelconque des sciences, si on n'a eu l'occasion de voir les principales difficultés qui se sont opposées à son développement, et si on ne connaît pas la raison intime pour laquelle on a suivi une direction plutôt qu'une autre. Or, s'il n'est pas possible de parcourir la voie historique, car elle est trop longue, s'il n'est pas possible de partir des questions pratiques qui se sont peu à peu imposées et qui ont amené aux développements théoriques, s'il est aussi impossible de suivre les essais qu'on a fait étape par étape jusqu'au moment où l'on a établi d'une manière définitive les méthodes classiques, il faut cependant s'approcher autant que possible de cet idéal.

Je reviens au grand ouvrage de Lagrange, le meilleur modèle que l'on connaisse d'un traité scientifique. Dans sa mécanique analytique, il n'aborde pas son sujet, en considerant l'un après l'autre les différents problèmes de la mécanique comme on faisait avant lui et il n'emploie pas des méthodes différentes pour les diverses questions. En outre, il ne commence pas par l'étude des questions analytiques et il ne prépare pas tout d'abord le lecteur en exposant des théories sur les équations différentielles et sur leur intégration.

Mais après un court et merveilleux aperçu historique où sont mis en lumière les points les plus saillants dans l'évolution des principes de la mécanique et des étapes par lesquelles ces principes sont passés, Lagrange arrive très rapidement aux équations générales qui embrassent les différentes questions, soit de la statique, soit de la dynamique. Toutes les questions sont reliées par ces équations qui résument en elles-mêmes les principes, et les questions peuvent se grouper et s'analyser par ces équations. La mécanique est ainsi réduite à leur étude, car en s'y attachant, on envisage en même temps tous les problèmes à la fois, c'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'employer une analyse propre à chaque question, ni de répéter pour chaque sujet des considérations qui ont été déjà faites, ni d'emprunter la solution d'un problème particulier à la solution d'un autre problème.

Ayant en vue ce modèle on peut se demander s'il est possible de s'en rapprocher lorsqu'on traite le sujet beaucoup plus difficile et plus compliqué de la physique mathématique.

A mon avis cela est possible, si l'on se borne aux branches de la physique mathématique que j'ai rappelées, les équations aux dérivés partielles qui s'y rapportent établissant entre elles un lien qui présente beaucoup d'analogie avec celui des équations générales de la mécanique analytique.

Ainsi se justifie la limitation du sujet à laquelle j'ai fait allusion tout à l'heure et on aperçoit en même temps l'unité de la discipline dont il s'agit et son parallélisme avec la mécanique analytique, qui justifie la dénomination choisie de physique analytique.

Donc, à côté des deux méthodes que j'ai rappelées précédemment, il en apparaît une troisième dont je viens d'esquisser les lignes générales. Je vais maintenant entrer au cœur de mon sujet.

Il est d'abord possible d'obtenir très rapidement les équations de la propagation de la chaleur, de l'élasticité des corps solides et fluides, de leurs mouvements vibratoires et les équations des mouvements non tourbillonnaires des liquides et de fixer les problèmes qui s'ensuivent. Je n'entrerai pas dans les détails sur ce point, mais par exemple pour la théorie de la propagation de la chaleur, on passe aisément des lois de la propagation uniforme de la chaleur dans une paroi d'épaisseur finie à un élément infiniment petit. En élasticité il suffit d'établir les conséquences de la loi de Hooke.

Pour les équations générales de l'électrostatique et de l'électromagnétisme, la question est moins facile. Bien des difficultés se présentent. Trop de conceptions se sont suivies tout à fait différentes les unes des autres; la conception des fluides électriques, par exemple, celle des déplacements électriques et ainsi de suite. La plupart du temps ces conceptions sont contradictoires entre elles. Elles ont apporté des mots qui, ayant un sens bien déterminé lorsqu'ils se rapportent à une certaine théorie, perdent toute signification lorsqu'on les transporte dans une autre. Cependant ces mots sont restés les uns auprès des autres, aussi bien ceux qui sont toujours vivants que ceux qui sont morts. Cela constitue une complication qu'on ne peut pas dominer sans rappeler sommairement les phases par lesquelles sont passées les différentes théories. Aussi n'est-ce qu'en suivant une rapide exposition de type historique analogue à celle de Lagrange, et qui aboutisse aux principes généraux, que l'on peut arriver d'une manière claire aux équations fondamentales des phénomènes électriques.

On arrive ainsi à écrire les équations différentielles générales des différentes disciplines envisagées, soit les équations qu'on appelle indéfinies, soit celles qui sont valables aux frontières du temps et de l'espace, et c'est ainsi que l'on peut mettre en équation les différents problèmes que pose la physique.

La première partie du cours se termine à ce moment. On s'aperçoit que des questions de nature très différente au point de vue physique amènent à des équations identiques ou analogues dans le domaine analytique.

On se rend compte ainsi de l'avantage de les traiter simultanément, en établissant des principes uniformes, des méthodes et des théorèmes généraux qui valent pour toutes. D'autres principes ou méthodes s'appliquent différemment selon les différents types dans lesquels on peut classer les équations. De même on peut se persuader de la remarquable économie obtenue par le plan de l'ouvrage. En même temps les analogies analytiques font prévoir des analogies cachées d'une portée beaucoup plus grande et qui dépassent le domaine de l'analyse.

Mais avant de quitter cette partie préliminaire il me faut dire quelques mots sur une question que j'ai passé sous silence jusqu'ici. Peut-être sera-t-on surpris que je n'en aie pas encore parlé, car beaucoup y attachent une grande importance. Et ceux qui m'ont suivi jusqu'ici ont probablement l'envie de me demander : Ferez-vous usage des vecteurs, ou ne vous en servirez-vous pas? J'espère ne pas trop choquer en disant que je donne un intérêt secondaire à ce sujet. Je pense qu'il est à peu près indifférent pour les théories générales et l'explication des méthodes d'intégration d'employer la méthode des vecteurs, ou celle des coordonnées, ou les deux simultanément. En considérant les vecteurs eux-mêmes au lieu de les définir constamment par leurs composantes on n'acquiert pas une puissance analytique nouvelle. Je pense que si j'écrivais mon traité en faisant usage de coordonnées, il n'y aurait pas plus de difficultés à le traduire dans le langage des vecteurs ou vice versa qu'à le traduire en anglais.

Toujours est-il que le langage des vecteurs offre des avantages formels et conceptuels considérables. Il est d'abord plus simple et plus concis. Des opérations quelquefois très longues se réalisent par les vecteurs en un trait de plume. Ce qui est plus important encore, on n'abandonne jamais l'entité même que l'on calcule. Mais il est évidemment inutile de continuer cette discussion. L'usage des vecteurs s'est maintenant répandu, et je n'hésiterai pas à les employer dès le début.

Je crois nécessaire de faire ici une autre remarque fondamentale. Dans les questions dont nous venons de parler, on peut se passer des hypothèses moléculaires ou atomiques et supposer dès le premier abord que les phénomènes se passent dans un milieu continu. Ce n'est qu'une première approximation que l'on fait, mais qui rend compte d'un grand nombre de phénomènes.

La physique mathématique ainsi conçue peut être nommée physique du continu. Cette observation amène à donner une importance spéciale à la forme du domaine et de ses frontières, c'est pourquoi c'est au moment même où se termine la première partie du cours que trouveraient place les considérations topologiques. Elles seront appliquées et employées plus tard.

Ayant tout ramené à des équations linéaires à trois ou à quatre variables indépendantes, il faut commencer par classer ces équations.

A mon avis il n'y a qu'un moyen pour obtenir leur classification logique; c'est d'envisager leurs caractéristiques.

On tombe ainsi sur les trois types fondamentaux elliptique, hyperbolique et parabolique, c'est-à-dire sur les types à caractéristiques, réelles, imaginaires ou multiples.

La classification en types des équations conduit à la classification des problèmes que l'on doit se poser, car sans même aborder la questions des théorèmes d'existence, on réussit facilement à établir quels éléments peuvent servir à déterminer les solutions, et en outre dans quelles régions de l'espace et pour quelles valeurs du temps; elles sont ainsi définies. Des questions concernant le passé ou l'avenir que M. Appell a si bien discuté trouveraient place ici. La classification de ces problèmes, mise en relation avec les questions physiques d'où proviennent les équations, porte une nouvelle lumière sur celle-ci.

Nous avons tous entendu avec le plus grand plaisir la belle conférence de Sir Joseph Larmor. Il s'est élevé aux plus hautes conceptions philosophiques. On avait l'impression que tout l'ensemble de nos considérations analytiques se matérialisaient et venaient à acquérir une sorte de réalité qui les rendaient intuitives. Pendant qu'il prononçait sa conférence, je traduisais ses paroles dans un autre langage. Ne croyez pas que je traduisais en italien ce qu'il disait en anglais, mais je traduisais dans le langage des caractéristiques ce qu'il nous représentait par des images si frappantes, qui nous faisaient saisir la manière de se produire des phénomènes.

Mais il faut étudier la classification des types de problèmes avec le soin le plus attentif, car il faut se méfier d'un parallélisme trop parfait entre ceux-ci et les types des équations différentielles. On court le risque de se tromper si l'on classe exclusivement d'après le type des équations différentielles correspondantes les problèmes envisagés. Sans entrer dans les détails, ce qui nous entraînerait trop loin, il suffit de considérer des exemples qui sont très frappants.

Nous avons appris ces jours-ci par une profonde conférence de M. Hadamard que des problèmes se rattachant à des équations de type hyperbolique peuvent se présenter d'une manière analogue à ceux qu'on trouve en étudiant l'équation de Laplace. Les travaux sur ce sujet sont classiques et je n'ajouterai rien à ce qu'il nous a exposé si bien. Mais je me permets seulement d'illustrer ce que j'ai dit tout à l'heure par un autre exemple.

Prenons le problème des seiches dans les lacs. Il dépend de l'équation de Laplace, cependant il admet des solutions périodiques dont les périodes sont les racines d'une équation transcendante. Comment se fait-il qu'un problème dépendant de l'équation fondamentale elliptique donne lieu à des solutions analogues à celles des questions de vibrations qui dépendent des équations hyperboliques?

Il suffit d'examiner les conditions à la surface libre du liquide pour reconnaître

que le type de solution, loin de se rattacher à l'équation différentielle indéfinie, découle des conditions au contour. Le problème plus compliqué des marées donne lieu à des considérations analogues.

On voit donc que les types des solutions sont la conséquence d'un complexe de circonstances où les équations différentielles indéfinies ne jouent pas toujours le rôle principal.

Je crois aussi qu'une distinction importante entre les différentes équations différentielles peut s'obtenir en envisageant leurs relations et leur dépendance des problèmes du calcul des variations. On n'insistera jamais assez sur l'intérêt qu'on doit attacher au développement de ce point.

Je voudrais à ce propos revenir encore une fois sur la conférence de Sir Joseph Larmor. Il nous a montré la liaison entre le principe de Hamilton et les actions à distance. Les paroles si profondes qu'il a prononcées sur ce sujet nous ouvrent de nouveaux horizons sur les liaisons entre le calcul des variations et les équations de la physique mathématique.

Dès qu'on aborde la question des caractéristiques on est amené d'une manière fort naturelle à considérer des espaces à quatre dimensions. En effet, dans le cas des corps à une seule dimension, les caractéristiques sont des lignes. Elles sont des surfaces pour les corps à deux dimensions et des espaces à trois dimensions faisant partie d'un espace à quatre dimensions, lorsqu'on considère des corps à trois dimensions, car il faut envisager, outre les trois coordonnées, une quatrième coordonnée : le temps qui joue un rôle analogue aux trois premières. Le passage d'un type d'équation à un autre s'obtient d'ailleurs d'une manière immédiate, en considérant des valeurs imaginaires du temps. Ici l'introduction des vecteurs à quatre dimensions, ainsi que l'extension des opérations fondamentales des vecteursà l'hyperespace devient une nécessité et en même temps elle est facile et intuitive.

Les changements de coordonnées, les transformations de Lorentz, la cinématique einsteinienne se présentent ainsi d'une manière si naturelle que quelques-unes des difficultés de la théorie de la relativité (au moins de la première relativité) sont complètement supprimées. On peut aussi ajouter que tout ce chapitre subsiste indépendamment du substratum philosophique de la relativité, et si par hasard cette théorie devait être abandonnée, ce chapitre resterait dans toute son intégrité.

Comme on a établi une classification des équations différentielles et des problèmes fondamentaux, il faut établir une classification des procédés d'intégrations.

Ils peuvent à mon avis être distribués en trois catégories. La méthode de Green, celle des caractéristiques et celle des solutions simples de Fourier. Pour éviter tout malentendu je préciserai tout de suite que l'on doit considérer les trois méthodes que je viens de nommer, comme des procédés typiques, mais que dans les questions particulières on peut employer des méthodes mixtes qui tiennent des trois types à la fois.

En introduisant la phrase : méthode de Green, nous en élargissons l'acception ordinaire, car non seulement nous entendons par là la méthode d'intégration de l'équation de Laplace pour différentes conditions au contour, mais aussi les méthodes analogues d'intégrations des équations de type elliptique (comme par exemple celle de Betti pour les équations de l'élasticité) et même celles des équations de type hyperbolique et parabolique, où l'on n'emploie explicitement les caractéristiques. Aussi les formules relatives aux vibrations qui se rattachent à celle de Kirchhoff rentreraient-elles dans le domaine des méthodes de Green. Au fond, la méthode de Green se rapporte à l'usage des solutions fondamentales, dans tous les cas où l'on n'emploie pas explicitement les caractéristiques.

La méthode des caractéristiques n'est réellement qu'une modification de celle de Green, mais, à mon avis, il est utile de distinguer les deux procédés l'un de l'autre. L'intérêt de la notion des caractéristiques est tellement grande, elles jouent un rôle tellement important dans l'intégration des équations, qu'une séparation s'impose qui n'est pas artificielle, mais qui correspond à quelque chose de substantiel.

Enfin la méthode de Fourier comprend toutes celles où l'on fait usage de solutions simples, et l'on obtient la solution générale moyennant de séries de ces solutions.

Les différentes méthodes étant ainsi classées, on peut procéder à leur développement. Il faut d'abord, pour employer les méthodes de Green et des caractéristiques, chercher un théorème de réciprocité. Il n'y a pas de difficulté à l'obtenir en général et à éclaircir la signification qu'il prend dans les différentes branches de la physique, ce qui éclaire l'ensemble de la théorie.

Je prends la permission, à ce propos, de rappeler un résultat récent qui se rapporte au phénomène de Hall. C'est justement un théorème de réciprocité qui, interprété dans cette théorie, nous révèle une propriété remarquable des courants produits dans une lame de bismuth assujettie à l'action d'un champ magnétique. Supposons qu'on fasse entrer le courant par un point A et sortir par un point B et que l'on détermine la différence de potentiel en deux points C et D. Intervertissons et faisons entrer le courant par C et sortir par D. Pour que l'on trouve la même différence de potentiel en A et B qu'auparavant, il faut invertir le champ magnétique. Ce théorème a servi à M. Corbino pour obtenir beaucoup de résultats pratiques se rapportant aux actions des champs magnétiques sur les courants.

Puisque je parle de ce problème, il est intéressant de remarquer que dans ce cas se présentent des problèmes mixtes par rapport aux conditions au contour, que l'on peut résoudre par une méthode que j'ai donnée depuis plusieurs années. Elle ne s'étend pas au delà des domaines à deux dimensions. Mais par une méthode très ingénieuse fondée sur des principes différents, M. Brillouin a donné la solution générale dans le cas des espaces à un nombre de dimensions quelconque.

Mais la partie la plus difficile et la plus délicate de l'intégration consiste dans la

recherche des solutions fondamentales. Leur calcul et la détermination de leurs propriétés, leur classification, les types différents qu'on peut obtenir, mis en comparaison avec les différents types d'équations différentielles, et les différents types de problèmes auxquels ils se rapportent, ainsi que leurs significations physiques, tout cela constitue un ensemble de notions d'un intérêt très grand et l'exposition d'un champ de recherches assez vaste et qui a donné lieu à de grandes difficultés analytiques.

Depuis la simple expression de l'inverse de la distance entre deux points, qui constitue l'intégrale fondamentale de l'équation de Laplace, jusqu'à l'intégrale fondamentale pour la double réfraction, donnée, il y a peu d'années, par M. Zeilon, il y a un grand chemin parcouru, où les difficultés se rencontrent à chaque pas.

Je serais tenté d'entrer dans quelques détails sur ce sujet, mais le temps me manque. Je noterai seulement qu'on ne peut se dispenser de parler des différentes sortes de singularités que l'on rencontre dans les intégrales fondamentales, car ce n'est que par un usage très avisé de toutes leurs singularités que l'on réussit à tirer tout le parti possible de leur emploi.

Je citerai à propos des solutions polydromes celles de la double refraction; et pour le cas des équations de type parabolique, la solution fondamentale de l'équation de la propagation de la chaleur

Il faut quelquefois savoir rejeter celles dont la polydromie rend impossible l'usage et les remplacer par d'autres adroitement trouvées, tandis que dans d'autres cas, c'est leur polydromie qui est la source des résultats les plus cachés et les plus féconds.

A mon avis, l'étude des solutions fondamentales est bien loin d'être épuisée; au contraire, quoique on les ait employés à tout instant, on ne les a pas considérées suffisamment dans leur ensemble et on n'a pas encore assez systématisé leur étude générale.

Cela tient, bien probablement, comme je l'ai dit ailleurs, à la méthode qu'on a suivi la plupart du temps en physique mathématique, d'en étudier séparément les différentes branches, sans les envisager les unes à côté des autres dans leur ensemble, comme un corps de doctrines.

D'autre part, des recherches purement analytiques s'éloignent trop souvent des applications qu'il faut avoir en vue. En perdant le contact avec la réalité on n'est plus alimenté par la source la plus riche de découvertes.

Les solutions fondamentales étant trouvées, il faut les employer en tenant compte des théorèmes de réciprocité. On tombe ainsi sur des formules générales qui ont un grand intérêt au point de vue physique. Au point de vue analytique elles ne résolvent pas complètement les problèmes posés, mais elles amènent à d'autres questions, qu'on peut classer comme un autre type de problèmes de la physique, et où il faut faire intervenir un nouvel instrument : les équations intégrales ou même des équations d'un type plus compliqué. Je suis d'avis qu'on doit réserver peu à peu en chemin les questions qui appartiennent au nouveau domaine, au delà des équations différentielles et consacrer ensuite une partie du cours à leur étude.

Je serai bref sur le développement de la méthode des caractéristiques. Comme elle se rattache étroitement à la méthode de Green, beaucoup de ce que nous avons déjà exposé s'y rapporte.

Je rappellerai à ce propos la première solution donnée par M. Picard de l'équation des télégraphistes en employant la méthode des caractéristiques. Elle a été le point de départ d'un grand nombre de recherches et elle a eu et conserve un grand intérêt au point de vue théorique et des applications.

Il ne faut pas séparer la méthode des caractéristiques de quelques procédés particuliers qui constituent un des côtés les plus élégants de la physique mathématique. On peut citer comme type la méthode des images. Elle fut découverte par Lord Kelvin pour donner une forme simple et intuitive à la solution du problème de Poisson de l'induction électrique des sphères, mais Sir George Gabriel Stokes la fit passer bientôt en hydrodynamique. Ensuite elle s'introduisit dans la théorie du magnétisme, et, plus tard dans la théorie des vibrations.

C'est peut-être un des exemples les plus concluants de l'utilité de considérer simultanément les trois types d'équations. On y voit d'une manière extrêmement frappante les modifications que doit subir une même idée fondamentale pour se plier aux nécessités analytiques des différents cas. Les particularités et le rôle des caractéristiques y apparaît très clairement. C'est aussi un exercice très instructif sur la métrique des espaces hyperboliques, qui est si étroitement rattachée aux considérations aboutissant à la relativité.

Dans le même ordre de considérations rentrent les transformations des équations en elles-mêmes. Celle par rayons vecteurs réciproques n'est pas applicable seulement au cas de l'équation de Laplace, mais aussi à d'autres équation elliptiques, et à des équations hyperboliques. Pour celles-ci on a des transformations où interviennent le temps et l'espace, comme dans la transformation de Lorentz, et jouant un rôle qui n'est pas encore exploité.

En arrivant enfin à la méthode des solutions simples nous avons un vaste domaine à envisager, car depuis la série de Fourier jusqu'aux nouvelles séries de fonctions orthogonales, bien des théories parmi les plus modernes y rentrent. Il suffit de rappeler les recherches de Poincaré sur les équations de la physique mathématique, et les résultats fondamentaux, obtenus par M. Picard, qui se rattachent étroitement à la théorie des équations intégrales.

Je crois que la deuxième partie du cours doit se borner à ce que nous venons de résumer rapidement. Nous avons laissé de côté tous les détails, c'est pourquoi nous n'avons pas parlé d'une foule de questions d'un très grand intérêt. C'est ainsi que nous n'avons pas parlé des distinctions à faire dans les différents problèmes suivant la connexion des domaines envisagés. Néanmoins je crois que le caractère de cette seconde partie du cours résulte assez clairement de ce qui précède.

Si dans la première partie, en prenant comme point de départ les problèmes

physiques, nous avons obtenu les équations différentielles, dans la seconde partie nous avons classéces équations et exposé les méthodes générales d'intégration. En les envisageant toutes en même temps nous avons pu synthétiser, ce qui a simplifié l'exposition et a donné une organicité à un ensemble de doctrines dont l'unité doit toujours être relevée.

Mais au point où nous sommes arrivés bien des problèmes physiques ne sont pas encore résolus complètement, et bien des questions restent posées; l'analyse qui a été développée n'est pas suffisante à elle seule pour les résoudre tous. Elle ne peut pas être séparée d'une analyse qui la complète et l'intègre et qui s'impose dès le premier abord. Et il s'agit bien réellement ici non point d'une méthode mais d'une analyse nouvelle.

Les théorèmes d'existence, la résolution définitive des problèmes par les conditions au contour et un grand nombre d'autres questions du même genre, nécessitent un calcul où l'on envisage à la fois toutes les valeurs de certaines fonctions dans un certain domaine; d'autres problèmes dépendent de la forme du domaine que l'on considère, ou de sa frontière. Toutes ces questions ainsi que celles réservées dans la deuxième partie du cours et qui dépendent de la résolution des équations intégrales devraient être étudiées dans la troisième partie.

Le concept directeur serait donc la notion de fonctions dépendant de toutes les valeurs d'autres fonctions. Au fond, les intégrales des équations aux dérivées partielles dépendent d'une part des variables indépendantes, mais elles dépendent d'autre part de fonctions arbitraires. Et, en effet, dès que l'on a eu besoin dans l'analyse d'envisager les intégrales des équations aux dérivées partielles, on a rencontré les fonctions arbitraires. Quel rôle jouent les valeurs des fonctions arbitraires? Ne sont-elles pas un nombre infini et continu de variables indépendantes, dont dépendent les intégrales? C'est d'une manière inconsciente qu'ils ont joué ce rôle, jusqu'au jour où l'on a vu qu'il fallait créer une analyse spéciale, propre à ce genre de questions. Permettez-moi de rappeler les paroles suivantes par lesquelles j'ai débuté en 1887 mes recherches sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions ou les fonctions de lignes : « Dans beaucoup de questions de physique et de mécanique et dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, il faut considérer des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions d'une variable. C'est ainsi, par exemple, que la température dans un point d'une plaque conductrice dépend de toutes les valeurs de la température au contour, le déplacement infiniment petit d'une surface flexible et inextensible dépend des projections sur une certaine direction des déplacements des points du contour. »

D'autre part, puisque la physique mathématique que nous développons est justement celle du continu, et puisque ce continu est variable il est évident que l'on ne peut pas se passer de considérer un continu comme élément variable. On pourrait

objecter que la séparation de la seconde et de la troisième partie de notre cours n'est pas philosophique, parce qu'il ne faudrait pas séparer, les uns des autres, les différents types de fonctions et qu'il serait utile d'attaquer directement les questions par la nouvelle analyse; mais la même objection pourrait s'élever contre la distinction entre le calcul différentiel et le calcul intégral, distinction qui toutefois se perpétue à cause des avantages bien connus qu'elle porte.

Tout en n'étant pas un traité sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions, mais un chapitre consacré à leurs applications à la physique analytique, la troisième partie devrait, à mon avis, commencer par en exposer les conceptions fondamentales. On passerait ensuite au procédé général de passage du fini à l'infini dans cet ordre de questions. Il se réduit pratiquement à deux règles fondamentales qui consistent d'abord à remplacer un nombre fini d'indices par une ou plusieurs variables continues, en second lieu à remplacer les sommes faites par rapport à ces indices par des intégrales.

Rien de plus simple que ces règles qui amènent de tout problème ordinaire de l'algèbre et du calcul différentiel et intégral à des problèmes de plus en plus difficiles et qui conduisent aussi des solutions des problèmes ordinaires aux solutions des nouveaux problèmes, ainsi que de théorèmes ou propriétés connues à des principes nouveaux. On peut ainsi passer des équations algébriques aux équations intégrales du type le plus général qui se distinguent par l'existence ou non de points exceptionnels, d'où leur classification indiquée par M. Picard en équations de première, de seconde et de troisième espèce à limites fixes et variables.

Les équations différentielles ordinaires amènent par le même procédé d'extension aux équations intégro-différentielles ordinaires, tandis que les équations aux dérivées partielles peuvent se généraliser en trois directions en conduisant, soit à des équations intégro-différentielles aux dérivées partielles, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles proprement dites.

Les applications des équations intégrales linéaires aux théorèmes d'existence et à la résolution définitive des problèmes posés par les méthodes de Green et des caractéristiques, ainsi que leur emploi dans les développements en série et dans la théorie des solutions simples sont tellement classiques qu'il n'est pas nécessaire d'y insister ici.

D'autre part, les études sur les équations aux dérivées fonctionnelles développées par MM. Hadamard et Paul Lévy et qui se rapportent aux fonctions de Green sont parmi les résultats modernes qui ont le plus frappé et intéressé.

C'est aussi dans cette dernière partie que trouverait place l'étude des modifications qu'il faut apporter aux théories classiques si l'on veut en corriger les solutions, en tenant compte de l'hérédité.

Mais je crois pouvoir me dispenser d'insister sur ces recherches ici, surtout dans

l'Université de Strasbourg où elles sont si bien représentées par MM. Fréchet et Pérès.

La troisième partie du cours pourrait être limitée à ce que je viens de dire. Elle serait la dernière partie du cours. Il est bien facile maintenant de faire l'énumération des branches de la physique mathématique qui n'ont pas été comprises dans notre étude; il est aussi facile, après ce que nous avons dit, de comprendre les raisons par lesquelles elles sont restées en dehors.

La Thermodynamique pure se développe sans qu'on ait besoin d'approfondir la théorie des équations aux dérivées partielles; aussi ne rentre-t-elle pas dans la physique analytique; la capillarité qui est une branche assez limitée de la physique emploie des méthodes particulières. Mais il y a un domaine extrêmement vaste qui embrasse les théories les plus modernes et les plus intéressantes et qui reste aussi en dehors du cadre que nous avons esquissé. On pourrait l'appeler la physique de la probabilité. Ses méthodes, qui ont été créées par Maxwell, sont bien des méthodes analytiques de la plus haute portée et de la plus grande difficulté; mais ce sont des méthodes très différentes de celles que nous avons considérées précédemment. Elle ne rentre pas dans la physique du continu, c'est pourquoi, par l'esprit qui l'anime et par les procédés qu'elle emploie, elle constitue un organisme distinct de celui dont nous avons étudié les méthodes. Il suffit de lire les ouvrages que M. Borel et M. Langevin lui ont consacré, pour s'en persuader.

La constitution systématique d'une physique de la probabilité marque une profonde transformation dans la philosophie naturelle car elle fait découler l'ordre du désordre, et les lois ne dérivent que du défaut de lois. La physique de la probabilité bouleverse toutes les méthodes de la physique analytique et elle entre dans certains cas bien plus intimement dans l'essence même de la matière et des phénomènes en donnant des résultats plus rapprochés de la réalité.

La physique analytique tout en n'étant pas vieillie, et tout en étant bien loin d'être une des branches sèches du grand arbre des mathématiques, n'est pourtant plus jeune. C'est justement à cause de cela qu'elle est mûre pour sa systématisation et son unification. Avant les derniers progrès il n'aurait pas été possible d'atteindre ce but faute de pouvoir, par exemple, dénombrer et préciser les postulats qu'elle implique, ou démontrer exactement certaines propositions nécessaires, ou affirmer avec précision jusqu'à quel point elle représente la réalité et quelles sont ses limites. La voie que nous avons adoptée amène à ces résultats, qui ont un intérêt philosophique considérable.

Même en consacrant tous les efforts pour s'approprier et faire avancer la physique de la probabilité, il est indispensable que les physiciens, les mathématiciens, les ingénieurs connaissent les principes fondamentaux de la physique analytique. Comment porter à la connaissance d'un public si nombreux un ensemble si vaste de

notions? Il faut bien distinguer ici un cours qu'on livre au public comme ouvrage imprimé et un cours qu'on expose oralement. Dans un cours constituant un traité, on pourrait développer avec tous les détails, le programme que je viens d'exposer rapidement; dans un cours professé, il vaudrait mieux se borner aux points essentiels.

Il faut un art très fin pour atteindre ces deux buts. Pour écrire un traité (comme pour professer un cours) ne suffit pas la connaissance scientifique du sujet, mais il faut aussi un certain sens artistique. Les livres qui ont traversé les siècles sont des œuvres d'art autant que des œuvres de sciences.

Euclide qui a systématisé et unifié la géométrie créée par ses devanciers, était un savant, mais il possédait le même goût artistique qui a rendu célèbres Homère et Phidias.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

PAR M. N.-E. NÖRLUND

(Lund.)

[1] Permettez-moi de vous dire quelques mots d'un sujet qui a été presque entièrement négligé par les géomètres modernes, savoir le calcul aux différences finies. Les grands géomètres qui ont été les fondateurs de l'Analyse, les Newton, les Taylor, les Euler, les Lagrange, les Laplace et les Cauchy se sont occupés à différentes reprises du calcul aux différences finies. Lacroix a consacré le troisième tome de son *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* à une exposition d'une grande partie de ces recherches. En Angleterre on cultiva surtout les méthodes symboliques. Boole les a exposées dans un petit ouvrage suggestif : *A Treatise on the Calculus of finite Differences.* Mais on ne peut pas dire que les résultats obtenus soient très considérables. Il s'agit surtout de transformations des séries dans le but d'augmenter la rapidité de la convergence et de relations formelles dont on n'a pas précisé le sens. Les ressources de l'Analyse ne suffisaient pas pour pénétrer dans le fond de ces problèmes. Ce n'est que tout récemment qu'on a commencé d'appliquer les méthodes de la théorie des fonctions à cette branche de l'Analyse.

Le premier problème important qui se pose dans le calcul aux différences finies, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$\text{(1)} \qquad F(x+1) - F(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Une étude approfondie de cette équation pourra faire réaliser des progrès considérables à plusieurs problèmes d'Analyse, mais la question n'est pas sans présenter quelques difficultés.

Euler et aussi Abel et Cauchy furent les ouvriers de la première heure. L'établissement de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin a été un premier pas vers le but. La remarquable série divergente, qu'avait indiquée Euler, fut transformée en une intégrale définie par Plana et Abel à l'aide d'un raisonnement purement formel. Le résultat de ces auteurs a été rigoureusement établi pour la première fois

par Cauchy. En faisant certaines hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$, Cauchy démontre qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(1+ix)-\varphi(1-ix)-\varphi(ix)+\varphi(-ix)}{i(e^{2\pi x}-1)}dx=\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2}-\int_0^1\varphi(x)dx,$$

ce qui est sensiblement le même résultat qu'avait trouvé Plana et Abel. Parmi les travaux récents sur la formule sommatoire d'Euler, je veux mentionner ceux de M. Lindelöf.

M. Guichard a consacré un beau mémoire à la démonstration de l'existence des solutions de l'équation (1). M. Guichard envisage une intégrale de la forme

$$F(x)=\int_A^B \frac{\varphi(z)e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz}-e^{2\pi ix}}dz$$

prise le long d'un segment de l'axe imaginaire. Cette intégrale a des lignes de discontinuité ou coupures du genre de celles qui ont été considérées pour la première fois par Hermite. L'intégrale représente dans un certain rectangle une solution analytique de l'équation (1). Mais, même si $\varphi(x)$ est une fonction entière, cette solution est non uniforme et admet une infinité de points critiques logarithmiques. Pour remédier à cet inconvénient, M. Guichard fait tendre A et B vers l'infini. Il démontre ainsi que l'équation (1) admet toujours une solution entière, si $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette solution se représente dans la bande $0<\Re(x)<1$ par l'intégrale

$$F(x)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\varphi(z)e^{2\pi iz}E(x)}{E(z)(e^{2\pi iz}-e^{2\pi ix})}dz,$$

$E(x)$ étant une fonction entière *qu'on peut choisir d'une infinité de manières différentes*. Si $E(x)=1$, cette intégrale ne diffère pas, au fond, de celle qu'avait considérée Abel.

M. Appell a attaqué le problème d'une autre manière. Si $\varphi(x)$ est un polynôme :

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{m}a_nx^n,$$

on sait trouver un polynôme qui satisfait à l'équation (1). On a, en effet,

$$F(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}(x),$$

les $B_n(x)$ étant les polynômes de Bernoulli. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction entière :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x)$$

ne sera pas convergente en général. M. Appell retranche du polynôme $B_n(x)$ les n premiers termes de son développement en série trigonométrique. En désignant par $\Psi_n(x)$ la fonction entière ainsi obtenue, il démontre que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \Psi_{n+1}(x)$$

converge uniformément et représente une fonction entière qui satisfait à l'équation (1). *On peut évidemment choisir les fonctions* $\Psi_n(x)$ *d'une infinité de manières différentes.*

Cette démonstration a été retrouvée par A. Hurwitz. Ce géomètre fait en outre remarquer qu'il y a toujours une solution méromorphe quand $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe.

Un autre cas remarquable a été envisagé par M. É. Picard. Supposons que $\varphi(x)$ soit de la forme

$$\mu^x \varphi_1(x),$$

μ étant une constante, $\varphi_1(x)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande de largeur très petite comprenant l'axe imaginaire. M. Picard démontre l'existence d'une solution uniforme, ayant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande limitée à gauche par l'axe imaginaire, et à droite par une parallèle à cet axe située à une distance de l'origine qui est un peu plus grande que *un*.

Le géomètre américain M. Carmichael a indiqué une nouvelle démonstration du théorème de M. Guichard. Cette démonstration repose sur la résolution d'un système doublement infini d'équations linéaires.

[2] Posons, pour abréger

$$\underset{\omega}{\Delta}F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega},$$

$$\underset{\omega}{\nabla}F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.$$

Il y a avantage à introduire dans l'équation (1) le paramètre ω et de l'écrire comme il suit :

$$\underset{\omega}{\Delta}F(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Je considère en même temps cette autre équation

$$\underset{\omega}{\nabla}G(x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Résoudre l'équation (2) cela veut dire trouver une opération qui est inverse de l'opération $\underset{\omega}{\Delta}$. De même il s'agit de trouver une opération qui est inverse de $\underset{\omega}{\nabla}$. Évidemment ce problème n'est pas déterminé. En effet, on obtient la solution la plus générale de l'équation (2) en ajoutant à une solution particulière une fonction périodique arbitraire avec la période ω. De même, soit $p(x)$ une fonction quelconque qui satisfait à l'équation

$$p(x+\omega) = -p(x).$$

On obtient la solution la plus générale de l'équation (3) en ajoutant à une solution particulière la fonction $p(x)$. La présence de ces fonctions arbitraires est une difficulté sérieuse. Si l'on n'impose pas aux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ d'autres conditions que celles que nous venons d'indiquer on ne sera conduit à rien de remarquable. Avant tout autre chose il faut chercher à se débarrasser des fonctions périodiques arbitraires. Trouver une solution quelconque des équations (2) et (3) cela ne fait pas la moindre difficulté, mais cette solution générale ne peut servir à rien. Pourtant ce n'est pas ainsi qu'il faut se poser le problème, car ce n'est pas toute solution qui convient. Parmi les solutions en nombre infini il y en a une qui se distingue des autres et qui est pour ainsi dire la plus simple. Je l'appelle *la solution principale*. Elle est déterminée à une constante arbitraire près. Cette solution distinguée possède un certain ensemble de propriétés remarquables qui n'appartiennent plus aux autres solutions.

Les voies ouvertes par MM. Guichard et Appell sont très remarquables, et elles conduisent entièrement au but que se sont proposé ces auteurs. Mais on peut reprocher à ces méthodes qu'on ne voit pas très bien quelles sont les propriétés des fonc-

tions dont on démontre l'existence. On ne voit pas aisément comment choisir les fonctions, dans une certaine mesure arbitraires, qui entrent comme un élément essentiel dans la démonstration, pour arriver à la solution la plus simple. Par exemple, si $\varphi(x)$ est un polynôme, la solution principale est encore un polynôme; mais la solution définie par l'intégrale de M. Guichard est une transcendante.

Je voudrais attirer l'attention sur une autre méthode pour résoudre les équations (2) et (3), méthode qui me paraît présenter certains avantages.

Au sujet des solutions de ces équations il y a une observation curieuse à faire. Les développements en séries qui se présentent tout d'abord à l'esprit divergeront en général. On peut, il est vrai, en former d'autres qui convergent, mais néanmoins ce sont les développements divergents qui sont les mieux faits pour mettre en évidence les propriétés des solutions. Les belles recherches de M. Borel sur les séries divergentes ont fait voir que ces séries peuvent rendre des services considérables. Ces recherches de M. Borel ont été poursuivies par un grand nombre d'auteurs. Le calcul aux différences finies vient ajouter un nouveau chapitre à la théorie des séries divergentes.

Nous ferons successivement diverses hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons d'abord ω positif et x réel. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que le produit

$$x^{1+\varepsilon}\varphi^{(m)}(x), \qquad \varepsilon > 0 \tag{4}$$

tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Considérons la série

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega). \tag{3 bis}$$

Cette série satisfait formellement à l'équation (3), mais elle diverge en général. On peut pourtant tirer parti de la série de la manière suivante. Considérons l'expression

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}. \tag{5}$$

On peut d'une infinité de manières choisir la fonction $\lambda(x)$ de sorte que cette série converge pour toute valeur positive de η. On peut par exemple prendre

$$\lambda(x) = x^p(\log x)^q,$$

p et q étant des nombres positifs quelconques. Quand le nombre positif η tend vers zéro la série (5) tend uniformément vers une limite *qui ne dépend pas de* λ. Cette limite sera par définition la solution principale de l'équation (3). Pour abréger, je désigne cette limite par le symbole suivant :

$$\text{(6)} \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{\omega}\varphi(x)\nabla x = \lim_{\eta=0} 2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}.$$

Elle définit une fonction de x et de ω qui satisfait à l'équation (3). Je désigne aussi cette fonction par

$$\mathrm{G}(x|\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{\omega}\varphi(x)\nabla x.$$

Cette solution est égale à la somme de la série (3 *bis*) dans le cas particulier où cette série converge.

De même, la série

$$\text{(2 bis)} \qquad -\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)$$

satisfait formellement à l'équation (2). Malheureusement elle diverge en général, mais considérons l'expression suivante :

$$\text{(7)} \qquad \int_a^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}.$$

L'intégrale et la série convergent pour toute valeur positive de η. Quand η tend vers zéro, l'expression (7) tend uniformément vers une limite qui ne dépend pas de λ. Cette limite sera par définition *la solution principale de l'équation* (2). Je la désigne par le symbole suivant :

$$\text{(8)} \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\Delta z = \lim_{\eta=0}\left[\int_a^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}\right].$$

Cette limite représente donc une solution de l'équation (2). Je la désigne aussi par

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{F}(x|\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\Delta z.$$

Dans le cas particulier où la série (2 *bis*) converge, notre solution ne diffère de la somme de cette série que par une constante. La solution principale de l'équation (3) est ainsi uniquement déterminée, et la solution principale de l'équation (2) est déterminée à une constante additive près, car elle dépend de la constante arbitraire a.

[3] A l'aide de la formule sommatoire d'Euler, on peut transformer l'expression (8), puis, en effectuant deux fois de suite un passage à la limite, on arrive à l'équation suivante :

$$(10)\qquad F(x|\omega)=\int_a^x \varphi(z)dz+\sum_{\nu=1}^{m}\omega^\nu\frac{B_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu-1)}(x)+\frac{\omega^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \dot{B}_m(-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)dz.$$

Ici les B_ν sont les nombres de Bernoulli, et $\dot{B}_m(z)$ est une fonction périodiuqe de z avec la période ω qui est égale au polynôme de Bernoulli $B_m(z)$ dans l'intervalle $0\leqslant z<\omega$.

De même, en intégrant m fois par partie on peut transformer l'expression (5), et après quelques réductions on trouve

$$(11)\qquad G(x|\omega)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\omega^\nu\frac{C_\nu}{2^\nu\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+\frac{\omega^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)dz,$$

Les C_ν sont certains entiers qui se rattachent aux nombres de Bernoulli. $\dot{E}_m(z)$ est une fonction périodique de z qui satisfait à l'équation

$$\dot{E}_m(z+\omega)=-\dot{E}_m(z)$$

et qui est égale au polynôme d'Euler $E_m(z)$ dans l'intervalle $0\leqslant z<\omega$.

Vous voudrez bien remarquer que ces deux expressions nouvelles des solutions principales ne renferment pas la fonction $\lambda(x)$. On vérifie donc une seconde fois que les limites (6) et (8) sont indépendantes de λ.

Considérons un autre cas. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur d'un petit angle entourant l'axe des nombres positifs et dont l'ouverture peut d'ailleurs être aussi petite que l'on veut. Admettons qu'on sache trouver deux constantes positives C et k telles que $\varphi(x)$ satisfasse à l'inégalité

$$(12)\qquad |\varphi(x)|<Ce^{(k+\varepsilon)|x|}$$

à l'intérieur de cet angle, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En choisissant p plus grand que *un* ou bien en prenant p égal à *un* et q plus grand

que zéro, les expressions (5) et (7) convergent pour toute valeur positive de η. En faisant tendre η vers zéro on démontre que ces deux expressions tendent uniformément vers des limites. En appliquant les théorèmes de Cauchy sur les résidus des intégrales complexes, on peut mettre l'expression (6) sous la forme suivante :

$$G(x|\omega) = i \int_l \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{13}$$

De même l'expression (8) peut se transformer et s'écrire sous la forme suivante :

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz \tag{14}$$

où

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z) dz,$$

l est un lacet formé de deux rayons vecteurs situés à l'intérieur de notre petit angle et d'un arc d'un petit cercle entourant l'origine. Les intégrales (13) et (14) convergent si la valeur absolue de ω est suffisamment petite. Mais dans ces deux intégrales λ ne figure plus. On vérifie donc une nouvelle fois que nos deux limites sont indépendantes de λ.

Les deux expressions à l'aide desquelles nous avons défini les solutions principales sont applicables dans un grand nombre de cas, et elles suffisent largement pour tous les cas dont nous allons parler aujourd'hui. Mais elles ne suffisent pas pour tous les besoins. On peut remplacer les expressions (5) et (7) par une infinité d'autres expressions qui leur sont équivalentes mais qui sont plus compliquées. On peut imaginer une infinité de méthodes différentes pour sommer les deux séries divergentes (2 *bis*) et (3 *bis*). Le premier pas à faire c'est de démontrer que toutes ces méthodes de sommation conduisent au même résultat, ce qui demande une Analyse un peu longue. Comme chez M. Guichard et chez M. Appell il entre donc ici encore un élément arbitraire : la méthode de sommation qu'on applique, en particulier la fonction λ. Mais on démontre que le résultat final ne dépend pas de λ, de sorte que notre définition est unique. C'est le point essentiel.

[**4**] Après avoir ainsi démontré l'existence des deux solutions principales, nous voulons maintenant étudier les propriétés de ces fonctions. Admettons que $\varphi(x)$ soit continue pour $x \geqslant b$ et que les expressions (6) et (8) tendent uniformément vers des limites. On voit immédiatement que la fonction $F(x|\omega)$ satisfait à l'équation (2) et que la fonction $G(x|\omega)$ satisfait à l'équation (3). Ces deux solutions sont continues

pour toute valeur de x qui est plus grande que b et pour toute valeur positive de ω. Qu'est-ce qui se passe quand le nombre positif ω tend vers zéro? La différence $\underset{\omega}{\Delta} F(x)$ tend vers la dérivée $F'(x)$. L'expression (8) définit une opération qui est l'inverse de l'opération $\underset{\omega}{\Delta}$. On devait donc s'attendre à ce que l'expression (8) tende vers une limite quand ω tend vers zéro. Et il en est bien ainsi. On démontre en effet que

$$\lim_{\omega=0} \underset{a}{\overset{x}{S}} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z = \int_a^x \varphi(z)\, dz. \tag{15}$$

De même on démontre que

$$\lim_{\omega=0} S \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \varphi(x). \tag{16}$$

On suppose ici que ω tend vers zéro par des valeurs positives. Quand ω tend vers zéro d'une manière quelconque ces deux égalités cessent d'être vraies.

Les deux solutions principales satisfont aux trois relations suivantes :

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \mid \omega\right) = mF\left(x \mid \frac{\omega}{m}\right), \tag{17}$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s F\left(x + \frac{s\omega}{m} \mid \omega\right) = -\frac{\omega}{2} G\left(x \mid \frac{\omega}{m}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s G\left(x + \frac{s\omega}{m} \mid \omega\right) = G\left(x \mid \frac{\omega}{m}\right).$$

Dans la première équation, m est un entier positif quelconque. Dans la seconde équation, m est un entier positif pair, et dans la dernière équation, m est un entier positif impair quelconque. En faisant en particulier m égal à 2, on trouve les deux relations suivantes :

$$F(x|\omega) = \underset{\omega}{\nabla} F(x|2\omega), \qquad G(x|\omega) = \underset{\omega}{\Delta} F(x|2\omega).$$

Divisons les deux membres de l'équation (17) par m et faisons ensuite tendre l'entier m vers l'infini. En tenant compte de l'équation (15), on trouve l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz.$$

L'intégrale au premier membre est donc indépendante de ω et elle s'annule en particulier au point $x = a$. Par une analyse un peu plus difficile on démontre cette autre égalité

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} \mathrm{F}(z|2\omega)\,dz = \mathrm{S}\left(\int_a^x \varphi(x)\,dx\right)\nabla_\omega x.$$

En appliquant nos deux opérations de sommation aux fonctions G et F on trouve enfin ces deux relations

$$\mathrm{S}_a^x\left(\mathrm{S}\,\varphi(z)\nabla_\omega z\right)\Delta_\omega z = \mathrm{S}_a^x \varphi(z)\Delta_{2\omega} z - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} \mathrm{F}(z|2\omega)\,dz,$$

$$\mathrm{S}\left(\mathrm{S}_a^x \varphi(z)\Delta_\omega z\right)\nabla_\omega z = \mathrm{S}_a^x \varphi(z)\Delta_{2\omega} z.$$

[5] Toutes ces propriétés des solutions principales se déduisent presque sans aucun calcul, et ce n'est pas là un des moindres avantages de la définition que nous avons adoptée pour ces fonctions. Mais il y a d'autres propriétés qui sont plus cachées et que nous allons maintenant mettre en évidence en faisant des hypothèses plus particulières relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons que cette fonction admette, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'expression (4) tende vers zéro quand x augmente indéfiniment. Nous avons vu que les deux solutions principales F et G peuvent se développer suivant les puissances de ω. Quand m augmente indéfiniment, les séries (10) et (11) divergent en général pour toute valeur de ω qui est différente de zéro, mais elles peuvent pourtant nous donner des renseignements précieux. D'abord, donnons à x une valeur fixe et plus grande que b et considérons ω comme la variable. Les deux séries représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement, au sens de Poincaré, pour les valeurs positives et très petites de ω. Les séries nous donnent donc un renseignement très précis sur la manière dont se comportent nos solutions quand ω tend vers zéro. Si l'on fait en particulier $\varphi(x)$ égale à $\log x$ la série (10) se réduit à la série de Stirling. Nos deux séries générales possèdent la même propriété que la série de Stirling : Quand on s'arrête à un certain terme, le reste est en valeur absolue plus petit que le premier des termes qu'on a supprimés et il admet le même signe que ce terme.

D'autre part, laissons ω fixe et positif et faisons tendre x vers l'infini. On démontre que le reste tend vers zéro. Les deux séries nous indiquent donc comment se

comportent nos solutions asymptotiquement pour les valeurs positives et très grandes de x. Désignons les m premiers termes de la série (11) par $P(x)$.

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\nu} \frac{C_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x)$$

et les $m+1$ premiers termes de la série (10) par $Q(x)$:

$$Q(x) = \int_a^x \varphi(z)dz + \sum_{\nu=1}^{m} \omega^{\nu} \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

De ce que nous venons de dire il résulte que

$$\lim_{x=\infty} [G(x|\omega) - P(x)] = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} [F(x|\omega) - Q(x)] = 0. \tag{19}$$

Nous avons obtenu les fonctions G et F en appliquant un certain procédé de sommation aux deux séries divergentes (2 *bis*) et (3 *bis*). Mais il est intéressant de remarquer que, dans le cas actuel, on peut trouver des développements convergents d'une forme assez simple. Des égalités (18) et (19) on conclut en effet que nos solutions principales se représentent par les deux séries suivantes :

$$G(x|\omega) = P(x) + 2\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\nabla} P(x+s\omega)], \tag{20}$$

$$F(x|\omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\Delta} Q(x+s\omega)]. \tag{21}$$

Ces séries convergent uniformément dans l'intervalle $x \geqslant b$.

Dans toutes ces relations on peut évidemment choisir l'entier m comme le plus petit entier tel que

$$\lim_{x=\infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

En déterminant m ainsi on donne aux séries la forme la plus simple. Comme nous l'avons dit, les séries (20) et (21) convergent uniformément; mais il convient de remarquer que rien ne permet d'affirmer la convergence absolue de ces séries. En augmentant la valeur de m on augmente souvent la rapidité de la convergence, et il arrive que les séries convergent absolument pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre. Il est d'ailleurs facile d'en préciser les conditions, mais je ne m'y arrête pas.

[6] Reprenons les deux équations (10) et (11). En dérivant par rapport à x on démontre que

$$\frac{d}{dx}\sum_{a}^{x}{}_{\omega}\varphi(x)\Delta x = \sum_{a}^{x}{}_{\omega}\varphi'(x)\Delta x + \varphi(a), \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\sum{}_{\omega}\varphi(x)\nabla x = \sum{}_{\omega}\varphi'(x)\nabla x.$$

En dérivant m fois par rapport à x on démontre le théorème important suivant : La fonction $F(x|\omega)$ admet, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers une limite finie quand x augmente indéfiniment, et la fonction $G(x|\omega)$ admet, elle aussi, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Cette propriété caractérise les solutions principales, car une fonction périodique qui possède la propriété que nous venons d'énoncer est égale à une constante. Il n'y a donc aucune autre solution qui possède cette propriété. Par conséquent, dans le cas actuel on peut *définir* la solution principale comme il suit. C'est la solution qui admet une dérivée continue d'un certain ordre qui tend vers une limite finie quand x augmente indéfiniment.

De ce que nous venons de dire il résulte que si l'on applique aux fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ un nombre quelconque de fois nos deux opérations de sommation, on arrive toujours à des expressions convergentes. Ces deux opérations donnent ainsi naissance à deux suites infinies de transcendantes nouvelles. En particulier, les deux limites suivantes

$$\sum{}_{\omega}G(x\,|\,\omega)\nabla x,$$

$$\sum_{a}^{x}{}_{\omega}F(x\,|\,\omega)\Delta x$$

existent. Cette propriété distingue, elle aussi, les solutions principales des autres solutions. Car ces deux limites cessent d'exister si l'on remplace G ou F par une

solution différente de la solution principale. Ce fait devient très important quand il s'agit d'appliquer la méthode des approximations successives à la résolution d'une équation aux différences finies. On voit que c'est bien vers la solution principale qu'il faut diriger son attention si l'on veut que les approximations convergent.

Arrêtons-nous un moment à un cas particulier. Considérons la fonction gamma. On connaît très bien les propriétés de cette fonction, mais il me paraît qu'on n'a pas donné jusqu'ici une *définition* satisfaisante de la fonction gamma. Euler et Legendre ont défini cette fonction par une intégrale définie; Gauss l'a définie par un produit ou par une autre intégrale. Enfin Weierstrass a défini la fonction gamma à l'aide de sa valeur asymptotique. Je voudrais proposer une définition un peu différente. On a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

par conséquent

$$\Delta \log \Gamma(x) = \log x. \tag{23}$$

Je définis la fonction $\log \Gamma(x)$ comme la solution principale de cette équation qui s'annule dans le point $x = 1$. Cette définition peut aussi s'énoncer comme il suit : La fonction $\log \Gamma(x)$ est la solution de l'équation (23) qui admet, pour les valeurs positives de x, une dérivée continue du second ordre qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. En partant de cette définition, on peut déduire très aisément les diverses expressions analytiques connues de la fonction gamma et plusieurs expressions nouvelles.

On peut aussi procéder comme il suit. En prenant la dérivée logarithmique et en posant

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

on trouve

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}. \tag{24}$$

La fonction $\Psi(x)$ est un peu plus simple que la fonction $\Gamma(x)$, et il paraît naturel de rapporter la fonction Γ à la fonction Ψ.

La fonction $\Psi(x)$ sera par définition la solution principale de l'équation (24), c'est-à-dire que

$$\Psi(x) = \sum_{1}^{x} \frac{\Delta x}{x}.$$

D'autre part, on a par définition

$$\log \Gamma(x) = \sum_{1}^{x} \log x \Delta x + c,$$

c étant une constante. En dérivant par rapport à x et en tenant compte de l'équation (22) on trouvera

$$D_x \log \Gamma(x) = \sum_{1}^{x} \frac{\Delta x}{x} = \Psi(x).$$

En intégrant et en se rappelant que la fonction $\log \Gamma(x)$, par définition, s'annule dans le point $x = 1$, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \int_{1}^{x} \Psi(x) dx.$$

A l'aide de cette équation on peut déduire les propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ de celles de la fonction $\Psi(x)$.

[7] Revenons au cas général. Nous avons défini les fonctions F et G en supposant ω positif. Nous allons maintenant donner à ω des valeurs complexes et chercher les prolongements analytiques de nos fonctions. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) \geqslant b$ et qui satisfasse à l'inégalité (12) pour toute valeur de x dans ce demi-plan, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε. Dans ces conditions on démontre que $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω qui se représentent par les deux intégrales suivantes :

$$(25) \qquad G(x|\omega) = i \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \qquad \left(0 < \omega < \frac{\pi}{k}\right)$$

$$(26) \qquad F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \qquad \left(0 < \omega < \frac{2\pi}{k}\right).$$

Ici α est un nombre quelconque entre 0 et -1, et l'on suppose que $\Re(x) > b$. On voit sur ces intégrales que la fonction $F(x|\omega)$ est holomorphe pour les valeurs de x qui sont à l'intérieur du demi-plan $\Re(x) > b$ et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\pi}{k}$ dont le centre est $\frac{\pi}{k}$. La fonction $G(x|\omega)$ est holo-

morphe pour les mêmes valeurs de x et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur du cercle

$$\left|\omega - \frac{\pi}{2k}\right| = \frac{\pi}{2k}.$$

Quand les variables sortent de ces deux domaines il arrive que les fonctions cessent d'exister.

Des intégrales (25) et (26) on peut tirer une inégalité importante. En effet, en tenant compte de l'inégalité (12), on voit qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|G(x|\omega)| < C_1 e^{(k+\varepsilon)|x|} \qquad \Re(x) \geqslant b \tag{27}$$

pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$. La fonction $F(x|\omega)$ satisfait à une inégalité de la même forme pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$.

Ces inégalités caractérisent les solutions principales. On démontre qu'il n'y a aucune autre solution qui satisfait à ces inégalités. On peut donc, dans le cas actuel, définir la solution principale de la manière suivante. Cette solution est holomorphe dans la bande

$$b \leqslant \Re(x) \leqslant b + \omega$$

et elle y satisfait à l'inégalité (27) pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$.

Parmi toutes les solutions holomorphes, les solutions principales sont donc celles qui sont de la plus petite croissance.

[8] Nous allons maintenant étudier les solutions dans tout le voisinage du point singulier essentiel $\omega = 0$. Pour abréger, nous ferons une hypothèse assez restrictive relativement à la fonction $\varphi(x)$. Nous supposerons que cette fonction est uniforme dans tout le plan, qu'elle admet un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et qu'elle satisfait à l'inégalité (12) pour toutes les valeurs de x dont le module est suffisamment grand. On démontre que $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont des fonctions uniformes de x admettant les points singuliers

$$x = \beta_\nu, \ \beta_\nu - \omega, \ \beta_\nu - 2\omega, \ \ldots \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

et étant d'ailleurs holomorphes. $G(x|\omega)$ est encore une fonction uniforme de ω, mais $F(x|\omega)$ est une fonction non uniforme de ω au voisinage du point $\omega = 0$. On démontre que F est de la forme

$$F(x|\omega) = -B \log \omega + \text{fonc. uniforme de } \omega,$$

B étant le résidu de la fonction $\varphi(x)$ au point à l'infini. Comme fonction de ω, F et G admettent au voisinage du point $\omega = 0$ une infinité de points singuliers. Ces points singuliers sont tons situés sur n rayons vecteurs que j'appelle les vecteurs singuliers.

Si

$$\Re(x - \beta_\nu) > 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

tous les vecteurs singuliers sont situés à gauche de l'axe imaginaire. On peut maintenant réduire l'étude du cas où la partie réelle de ω est négative à celui où la partie réelle de ω est positive. En effet, on démontre que G et F satisfont aux relations suivantes

$$G(x|\omega) - G(x - \omega\,|\,-\omega) = p(x), \tag{28}$$

$$F(x|\omega) - F(x - \omega\,|\,-\omega) = \Pi(x). \tag{29}$$

qui jouent un rôle important dans l'étude de ces fonctions. $p(x)$ et $\Pi(x)$ sont des fonctions périodiques de x. Dans le cas particulier où $\varphi(x)$ est méromorphe, $p(x)$ et $\Pi(x)$ sont des fonctions rationnelles de

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$$

Dans le cas général on a

$$p(x) = \frac{2\pi}{\omega} \sum \frac{[\varphi(z)]}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x - z)},$$

$$\Pi(x) = -\pi i B + \sum [\varphi(z)] \pi \cot \frac{\pi}{\omega}(z - x),$$

la sommation étant étendue à tous les points singuliers β_ν. A la fonction $\varphi(x)$ il appartient ainsi deux fonctions périodiques. Ces fonctions s'expriment explicitement par la fonction $\varphi(x)$ de la manière suivante :

$$p(x) = 2 \lim_{\tau_i = 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega) e^{-\tau_i (x + s\omega)^2},$$

$$\Pi(x) = \lim_{\tau_i = 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) e^{-\tau_i z^2} dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega) e^{-\tau_i (x + s\omega)^2} \right].$$

En particulier on a

$$p(x) = 2 \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega),$$

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega),$$

si les séries et l'intégrale convergent. On peut donner plusieurs autres expressions très remarquables de ces fonctions, mais je ne m'y arrête pas.

Puisque les β_ν sont en nombre fini, on sait trouver deux nombres réels b_1 et b tels que

$$b_1 \leqslant \mathfrak{R}(\beta_\nu) \leqslant b, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Reprenons les séries (10) et (11) et faisons tendre m vers l'infini. Les séries divergent toujours, puisque $\omega = 0$ est un point singulier essentiel. Mais on démontre qu'elles représentent asymptotiquement les fonctions au premier membre si $\mathfrak{R}(x) > b$ et $\mathfrak{R}(\omega) > 0$. Cela est vrai encore si $\mathfrak{R}(x) < b_1$ et $\mathfrak{R}(\omega) < 0$.

Mais la série (11) représente $G(x|\omega) - p(x)$ et la série (10) représente asymptotiquement $F(x|\omega) - \Pi(x)$ si $\mathfrak{R}(x) < b_1$ et $\mathfrak{R}(\omega) > 0$, ou encore si $\mathfrak{R}(x) > b$ et $\mathfrak{R}(\omega) < 0$. On en conclut en particulier que

$$\lim_{\omega=0} G(x|\omega) = \varphi(x), \tag{30}$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. De même on conclut de ce que nous venons de dire qu'on a uniformément à l'intérieur d'un certain angle

$$\lim_{\omega=0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z)dz. \tag{31}$$

Mais quand ω sort de cet angle, cette égalité cesse d'être vraie.

Quand ω franchit un des vecteurs singuliers, la valeur asymptotique de $F(x|\omega)$ fait un saut brusque qui est égal à une des périodes de l'intégrale

$$\int_a^x \varphi(z)dz.$$

On peut donc encore dire que l'égalité (31) a lieu le long de tout rayon vecteur différent des vecteurs singuliers. Mais la détermination qu'il faut choisir pour l'intégrale au second membre change avec l'argument de ω.

Quand x varie, les vecteurs singuliers dans le plan des ω tournent. Quand x décrit un petit cercle autour d'un des points β_ν, un des vecteurs singuliers fait une rotation complète.

Les diverses séries à l'aide desquelles nous avons étudié les fonctions F et G ont été divergentes. Il va sans dire qu'on peut aussi former des séries convergentes, mais elles sont moins maniables que celles dont nous venons de parler. Parmi les développements convergents je veux en signaler un seul :

$$G(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \Delta_\omega^s \varphi(x).$$

Cette série converge pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de la fonction $G(x|\omega)$. La fonction $F(x|\omega)$ n'admet pas de développement avec des conditions de convergence aussi favorables. Mais elle se représente par la série suivante

$$F(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\omega^s}{s+1} \Delta_\omega^s f(x),$$

où

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx.$$

Cette série converge dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$.

[9] On peut étendre les résultats précédents à des équations d'ordre quelconque. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des nombres positifs quelconques. La différence d'ordre n sera par définition

$$\Delta^n_{\omega_1 \cdots \omega_n} F(x) = \Delta_{\omega_n}\left(\Delta^{n-1}_{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}} F(x)\right);$$

posons de même

$$\nabla^n_{\omega_1 \cdots \omega_n} F(x) = \nabla_{\omega_n}\left(\nabla^{n-1}_{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}} F(x)\right).$$

Considérons les deux équations suivantes :

(32) $$\Delta^n_{\omega_1 \cdots \omega_n} F(x) = \varphi(x),$$

(33) $$\nabla^n_{\omega_1 \cdots \omega_n} G(x) = \varphi(x).$$

Soit, pour abréger,

$$\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_n\omega_n$$

et envisageons les séries suivantes

$$(32\,bis) \qquad (-1)^n \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega),$$

$$(33\,bis) \qquad 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \varphi(x+\Omega),$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de $s_1, s_2, \ldots s_n$. En appliquant à la série (33 *bis*) un certain procédé de sommation on démontre qu'elle détermine uniquement une fonction, soit

$$G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

qui est une solution de l'équation (33). De même on peut à la série (32 *bis*) associer une certaine fonction, soit

$$F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

qui satisfait à l'équation (32).

Si $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe de x, les solutions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ sont encore des fonctions méromorphes de x. Si $\varphi(x)$ admet les points singuliers β_ν, les fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ admettent les points singuliers $\beta_\nu - \Omega$, et elles sont holomorphes en tout autre point.

Les fonctions F_n et G_n satisfont aux trois relations suivantes :

$$(34) \quad \sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= m_1 m_2 \ldots m_n F_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} G_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

Dans la première équation les m_i sont des entiers positifs quelconques; dans la deuxième équation les m_i sont des entiers positifs impairs, et dans la troisième équation les m_i désignent des entiers positifs pairs quelconques.

Si l'on fait tendre ω_n vers zéro on trouve

$$\lim_{\omega_n=0} G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = G_{n-1}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}).$$

Quand tous les ω_i tendent vers zéro on trouve en particulier

$$\lim_{\omega_1 \ldots \omega_n=0} F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)dz.$$

En divisant les deux membres de l'équation (34) par $m_1 m_2 \ldots m_n$ et en faisant tendre les m_i vers l'infini, on aura

$$\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 F_n(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 \ldots + \omega_n t_n)dt_1 = f(x)$$

où

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)dz.$$

On peut donner pour les séries multiples une formule de transformation qui est analogue à la formule sommatoire d'Euler. En appliquant cette transformation aux séries (33 *bis*) et (32 *bis*) et en effectuant plusieurs passages à la limite, on démontre que nos deux solutions G_n et F_n se développent de la manière suivante :

$$G_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)dt.$$

$$F_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)dt.$$

Ici h est un nombre quelconque dans l'intervalle

$$0 \leqslant h < \omega_1 + \omega_2 \ldots + \omega_n.$$

Les $B_\nu^{(n)}(h)$ et les $E_\nu^{(n)}(h)$ sont les polynômes de Bernoulli et les polynômes d'Euler d'ordre n. Ce que nous avons dit au sujet de ces deux séries dans le cas $n = 1$ peut s'étendre au cas général où n est un entier quelconque. En particulier, les séries représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites des ω_i.

En donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ... on trouve ainsi deux suites de transcendantes nouvelles G_n et F_n. Il y a un grand nombre de relations entre ces fonctions qui me paraissent fort remarquables. Parmi toutes ces relations je veux signaler une seule qui joue un rôle capital dans l'étude de ces fonctions. Si les arguments des ω_i satisfont à certaines inégalités, on démontre que nos deux solutions satisfont à des relations de la forme

$$F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) - F_n(x - \omega_1 - \omega_2 \ldots - \omega_n | -\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_n) = \Pi_n(x),$$

$$G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) - G_n(x - \omega_1 - \omega_2 \ldots - \omega_n | -\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_n) = p_n(x).$$

Les fonctions au second membre satisfont aux équations suivantes :

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} \Pi_n(x) = 0,$$

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} p_n(x) = 0.$$

Ces fonctions nouvelles $\Pi_n(x)$ et $p_n(x)$ sont dignes d'intérêt. Nous avons déjà vu que, dans le cas $n=1$, $\Pi(x)$ était une fonction périodique, c'est-à-dire une fonction qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} \Pi(x) = 0.$$

Une fonction doublement périodique est une fonction qui satisfait à deux équations de cette forme :

$$\underset{\omega_1}{\Delta} \Pi(x) = 0, \qquad \underset{\omega_2}{\Delta} \Pi(x) = 0.$$

Ces deux équations entraînent que

$$\underset{\omega_1 \omega_2}{\Delta^2} \Pi(x) = 0;$$

Mais l'inverse n'a pas lieu, de sorte que les fonctions qui satisfont à cette équation sont plus générales que les fonctions doublement périodiques. Nous rencontrons ici une extension de la notion de périodicité qui a l'avantage de pouvoir s'étendre à un nombre quelconque de périodes. Ce ne sont pas là des fonctions artificielles, mais ce sont des fonctions dont l'étude s'impose dans cette théorie. On remplirait tout un mémoire à énumérer les propriétés de ces fonctions.

[**10**] Après avoir fait l'étude complète des équations dont nous venons de parler, on peut aborder avec fruit la théorie générale des équations aux différences finies. Un cas particulier remarquable a déjà été envisagé par M. Picard. Soit donnée une transformation birationnelle

$$z_i = \mathrm{R}_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

relative à m lettres $y_1, y_2, \ldots y_n$ et admettant le point double

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0.$$

M. Picard a démontré l'existence d'un système de solutions $f_i(x)$ des équations aux différences finies

$$f_i(x+\omega) = \mathrm{R}_i[f_i(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ω étant un nombre positif. Ces solutions admettent, en outre, la période $2\pi i$ et elles sont uniformes et méromorphes dans tout le plan. L'étude de M. Picard repose sur sa belle méthode des approximations successives; sa démonstration peut, avec des modifications convenables, s'étendre à bien d'autres cas. M. Picard suppose que les R_i sont certaines fonctions rationnelles des m lettres y_i à coefficients constants. On peut encore supposer que les coefficients dépendent de la variable x. J'ai envisagé les équations aux différences finies les plus générales de la forme

$$f_i(x+\omega) = \mathrm{R}_i[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), x], \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{35}$$

les R_i étant des fonctions uniformes qui dépendent des m lettres $f_1, f_2, \ldots f_m$ et de la variable x. Pour résoudre ces équations on a besoin d'une méthode générale pour résoudre l'équation (2). Ce point établi, on n'a qu'à reprendre le raisonnement de M. Picard. Dans chaque approximation on effectue une sommation telle que celle définie par l'expression (8). On démontre que les approximations successives convergent vers une limite qui est une solution uniforme des équations (35).

MÉMOIRES

PREMIÈRE SECTION

LE PROBLÈME DES AIRES ET DES VOLUMES

PAR M. W. H. YOUNG, Sc. D., F. R. S.

DE L'UNIVERSITÉ DU PAYS DE GALLES, VICE-PRÉSIDENT DE L'UNION INTERNATIONALE DES MATHÉMATICIENS

MESSIEURS,

La théorie des aires et des volumes a toujours été d'un vif intérêt pour les mathématiciens, et je crois ne pas avoir à m'excuser en vous présentant cette théorie sous un aspect un peu nouveau, qui permet d'en étendre la portée à un champ jusqu'à présent vierge.

Plusieurs des mathématiciens des pays ici représentés ont déjà contribué à l'élaboration d'une théorie de l'aire, et, en particulier, je dois citer le nom vénéré de M. Jordan, que nous avons le grand plaisir de voir à notre Congrès.

La théorie qui forme le sujet de ma communication se divise en deux parties. Dans la première, il s'agit tout d'abord de trouver une définition de l'aire d'une surface plane ou courbe, qui satisfasse à la condition de coïncider dans les cas ordinaires avec la définition intuitive. Si une telle définition ne conduisait pas aux formules fondamentales bien connues, elle serait d'un intérêt très restreint. C'est ce qu'a reconnu M. Lebesgue, qui dans sa thèse avait tenté de donner une définition générale sans réussir toutefois, sauf dans des cas banaux, d'obtenir par ce moyen la formule voulue pour l'aire d'une surface courbe. D'autre part, je ne crois pas me tromper en disant que tous les auteurs, avec la seule exception de Lebesgue, ont renoncé, vu la difficulté de la chose, à donner une définition vraiment générale de l'aire d'une surface courbe. Quelques géomètres ont, il est vrai, donné des définitions, mais qui ne conduisent à aucune théorie analytique. Les idées de MINKOWSKI conduisent même à des résultats paradoxaux, comme je l'ai fait voir il y a déjà quinze ans. Il faudrait remarquer cependant que M. DE LA VALLÉE-POUSSIN, dans son cours, a apporté au sujet une contribution importante du point de vue géométrique en montrant que la définition d'une courbe plane donnée par Jordan conduit effectivement à la formule la plus simple pour l'aire d'une telle courbe, et cela dans des conditions très générales. La méthode de M. de la Vallée-Poussin ne s'étend pas,

du reste, quand il s'agit d'obtenir des résultats analogues pour les volumes et hypervolumes.

Il faudra donc aux considérations géométriques ajouter une discussion analytique, qui constituera alors la seconde partie de la théorie.

Le point de départ de mes recherches était la notion de l'aire d'une courbe fermée se coupant un nombre fini ou infini de fois, ce qui m'a conduit naturellement à celle de l'aire d'une courbe gauche fermée dans un espace de n'importe quel nombre n de dimensions. Dans le cas de trois dimensions, on peut définir l'aire d'une courbe gauche ou plane comme la limite unique, si une telle limite existe, de l'aire d'un polygone inscrit dans la courbe, avec ses sommets rangés en ordre sur celle-ci, quand la longueur de ses côtés tend vers zéro d'une façon quelconque, — l'aire du polygone lui-même étant défini par exemple comme la somme des moments de forces représentées par ces côtés. Dans le cas où $n > 3$, il est préférable de modifier légèrement cette définition en employant la valeur invariante de la racine carrée de la somme des carrés des aires des projections sur les plans de coordonnées de la courbe ou du polygone.

Il est de toute évidence que cette définition ne pourrait avoir de valeur si l'on se bornait, dans la théorie de l'aire des courbes planes, à des courbes simples. La défition réussit géométriquement parce qu'elle comprend le cas d'une courbe simple comme cas particulier et parce que dans le cas général elle conduit à la même formule :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{2}\int x(u)\,dy(u) - \frac{1}{2}\int y(u)\,dx(u).$$

(Ceci pour l'aire d'une courbe plane.)

De plus, il est facile, en modifiant légèrement cette définition, d'obtenir plus directement, et dans des conditions un peu plus générales, la formule, soit

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \text{soit} \quad \begin{aligned} \mathrm{A} &= \int x(u)\,dy(u) \\ \mathrm{A} &= -\int y(u)\,dx(u) \end{aligned} \right.$$

quand la courbe est d'une nature que je désignerais volontiers par *semi-rectifiable* l'une des fonctions $x(u)$ ou $y(u)$ étant à variation bornée et toutes deux continues.

Nous passons à la partie analytique de la théorie de l'aire d'une courbe plane générale. Ici tout le développement se base sur la généralisation pour deux dimensions de la formule :

$$\text{(3)} \qquad x = \int \frac{dx(u)}{du}\,du$$

qui apparaît dans l'étude d'une correspondance

$$x = x(u) \tag{4}$$

entre deux droites Ox et Ou. La généralisation voulue se rapporte à la correspondance

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{5}$$

entre deux plans.

Il est à remarquer, en passant, qu'on est ainsi conduit à la notion de correspondance fonctionnelle entre deux plans dans le domaine réel, correspondance qui généralise la notion d'une fonction d'une seule variable, et en particulier celle de fonction à variation bornée et celle de fonction absolument continue. De cette façon, on obtient une théorie qui serait très incomplète si l'on devait se passer de la notion de l'aire d'une courbe possédant un nombre quelconque, fini ou infini, de points multiples.

Afin de généraliser la formule (3), il faut se rendre compte que l'intégrale (3) représente une grandeur vectorielle déterminée par les deux points O et x, images des deux points frontières du segment (O, u) de la droite primitive. On voit donc que l'intégrale analogue

$$\int\int \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du\, dv \tag{6}$$

représente pareillement une propriété vectorielle des points images des points frontières du rectangle $(o, o; u, v)$. Quand peut-on dire que cette intégrale double représente l'aire à notre sens de la courbe image du périmètre du rectangle ?

On sait que la sommabilité de la dérivée ou du nombre dérivé $\frac{dx(u)}{du}$ n'est pas suffisante pour que la formule (3) soit valable. On s'attendrait donc aussi à trouver qu'il faut plus que la sommabilité du Jacobien pour justifier l'adoption de son intégrale double (6) comme expression de l'aire de la courbe.

Si la courbe est rectifiable, le problème peut être posé analytiquement comme suit : *Sous quelles conditions la formule*

$$\mathrm{A} = \int\int \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du\, dv \tag{7}$$

est-elle valable ?

J'ai essayé à plusieurs reprises d'obtenir une réponse à cette question. L'année passée j'ai obtenu des conditions suffisantes dont les plus générales étaient les suivantes :

I
- (α) Que x, y soient fonctions absolument continues par rapport à u et par rapport à v;
- (β) Que $\left|\frac{dx}{dv}\right|$, $\left|\frac{dy}{dv}\right|$ soient inférieurs à des fonctions sommables, $\lambda(u)$ et $\mu(u)$ respectivement indépendantes de v;
- (γ) Que $\int \left|\frac{dx}{dv}\right| \lambda(u)\,du$ et $\int \left|\frac{dy}{dv}\right| \mu(u)\,du$ existent.

Après une interruption forcée de presque un an, j'ai attaqué la question encore une fois cet été et j'ai obtenu comme conditions suffisantes :

II
- (α) Que x, y soient des fonctions absolument continues par rapport à u et par rapport à v;
- (β) Que $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{dv}$ aient ce que j'ai appelé des sommabilités associées[1] par rapport à (u, v);
- (γ) De même pour $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$.

---

[1] Deux fonctions $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ ont des *sommabilités associées* par rapport à (u, v), si $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont sommables, et s'il y a une fonction monotone croissante $V = V(U)$, ayant une dérivée positive, et telle qu'en désignant par $U = U(V)$ la fonction inverse de $V = V(U)$, les deux fonctions :

$$Q(u, v) = \int_{\varphi(\alpha, \beta)}^{\varphi(u, v)} U(z)\,dz,$$

$$R(u, v) = \int_{f(\alpha, \beta)}^{f(u, v)} V(z)\,dz$$

sont des fonctions sommables par rapport à (u, v). — Dans ces conditions, comme j'ai démontré (*Proc. Roy. Soc.*, (A) vol. 87, p. 225) que nous avons l'inégalité

$$f(u, v).\ \varphi(u, v) - f(\alpha, \beta).\ \varphi(\alpha, \beta) \leqq \int_{f(\alpha, \beta)}^{f(u, v)} U(z)\,dz + \int_{\varphi(\alpha, \beta)}^{\varphi(u, v)} V(z)\,dz,$$

[résultant de la propriété des fonctions $U(z)$ et $V(z)$], il s'ensuit immédiatement que le produit des deux fonctions f et φ est aussi une fonction sommable. Il est sans doute superflu de remarquer que le produit $f.\varphi$ possède d'autres propriétés encore en plus de la sommabilité; c'est à l'une de ces propriétés qu'on doit la possibilité de démontrer la formule pour une aire dans les conditions supposées.

L'un ou l'autre des systèmes de conditions I et II suffisent, avec la notion de l'aire d'une courbe gauche, à nous donner une solution complète du problème de déterminer des conditions très générales sous lesquelles la formule

$$(8) \qquad S(u, v) = \int\int \sqrt{\left[\frac{d(y, z)}{d(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{d(z, x)}{d(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right]^2}\, du\, dv$$

subsiste pour l'aire d'une surface

$$(9) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Il suffit d'exiger que I ou II soient remplies pour chacun des couples de fonctions (x, y), (y, z), (z, x).

La définition de l'aire de la surface serait celle-ci : nous divisons le rectangle $(a \leqq u \leqq b,\ c \leqq v \leqq d)$ en petits rectangles et nous traçons sur la surface les courbes-images des périmètres de ces petits rectangles. La somme des aires de ces courbes aura, dans les conditions posées, une limite unique indépendante du procédé employé pour la subdivision et pour le passage à la limite. Cette limite sera l'aire de la surface.

On étend facilement la théorie à une surface courbe dans un espace à n dimensions.

Nous passons à la généralisation du concept de volume en combinant avec notre définition de l'aire la formule pour le volume d'un cylindre (*hauteur* × *aire de la base*), nous pouvons étendre la portée de cette formule et exprimer ainsi le volume d'un cylindre dont la base soit une courbe même avec des points multiples. La définition générale saute maintenant aux yeux. Nous traçons sur la surface de petites courbes images des périmètres des petits rectangles $(u, u + h;\ v, v + h)$ et pour chaque rectangle nous choisissons parmi les images des points de ce rectangle un *point de repère*. Nous formons sur chacune de ces petites courbes-images un cylindre droit élémentaire que nous terminons d'une part par le plan des (x, y) et de l'autre par un plan parallèle à celui-ci et passant par le point de repère. La somme des volumes de ces cylindres élémentaires nous donne une valeur approchée du volume au cas où cette somme tend vers une limite déterminée quand les rectangles deviennent de plus en plus petits. La formule qui en résulte, parfaitement analogue à la formule (2) pour l'aire d'une courbe plane semi-rectifiable, peut être écrite comme suit :

$$(10) \qquad V = \int\int z(u, v)\, d[x(u, v),\ y(u, v)]$$

où les coordonnées

$$(11) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

d'un point sur la surface sont soumises à certaines conditions.

Le cas le plus important est celui où l'aire de la base du cylindre élémentaire s'exprime sous la forme (6). Dans ce cas notre formule devient :

$$(12) \qquad \mathrm{V} = \int\int z(u, v) \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du\, dv,$$

Pour la validité de cette formule, il n'est pas nécessaire de soumettre la fonction $z(u, v)$ à d'autres conditions qu'à celle d'être continue.

Si cependant $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ vérifient tous les mêmes conditions et peuvent, par conséquent, être substitués l'un à l'autre, le volume s'exprime par l'une quelconque de trois intégrales semblables qui, additionnées et divisées par trois, nous donnent la formule :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\int\int \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv$$

$$= \int\int (lx + my + nz) d\mathrm{S}$$

$$= \frac{1}{3}\int\int p d\mathrm{S},$$

où

$$\mathrm{S} = \int\int \left\{ \sqrt{\left[\frac{d(y, z)}{d(u, v)}\right]^2 = \left[\frac{d(z, x)}{d(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right]^2} \right\} du\, dv,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale en un point (x, y, z) de la surface où le plan tangent existe, et p étant la distance de l'origine à ce plan tangent.

Il faut bien se rendre compte qu'ici comme dans la théorie de l'aire, les surfaces considérées peuvent se couper, sans cesser d'avoir un volume exprimé par nos formules.

Finalement, la formule

$$\mathrm{V} = \int\int\int \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} du\, dv\, dw$$

est valable dans des conditions analogues à celles déjà citées pour la validité de la formule (7) pour l'aire. L'analyse est semblable, bien qu'il soit nécessaire pour la démonstration d'obtenir plusieurs résultats supplémentaires.

On trouve aussi avec une définition analogue la formule du volume d'un espace courbe à trois dimensions dans un espace à n dimensions

$$V = \int\int\int \sum \left| \frac{d(x_r x_s x_t)}{d(uvw)} \right|^2 du\,dv\,dw,$$

r, s, t pouvant prendre toutes les valeurs, $r = s$, $s = t$, $r = t$ exclus.

J'ai passé rapidement, dans cette dernière discussion, sur la partie géométrique, et, au fait, il resterait encore plusieurs choses à faire sous ce rapport.

Il est encore à remarquer que ce sont quelquefois les conditions I qui se prêtent le plus facilement aux applications. Il me paraîtrait en outre intéressant d'étudier la possibilité de remplacer les conditions telles qu'elles se trouvent dans II par des conditions se rapportant seulement à la fonction $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$.

La valeur de ces généralisations des notions d'aires de volume et d'hypervolume n'est pas purement philosophique. Dans l'analyse ces expressions interviennent d'autant plus, que la théorie de l'intégration ne peut se faire qu'avec le concours de cette théorie complète de l'aire.

Pour ne citer qu'un exemple de plus, le théorème, qu'on a coutume d'appeler le théorème de Stokes (d'après le nom de mon compatriote, qui en avait énoncé le cas le plus simple), demande pour sa démonstration dans des conditions générales la plus parfaite connaissance de la théorie des aires, telle que je l'ai donnée (1). Les conditions que j'ai obtenues pour l'existence de l'aire, du volume, etc., et pour la validité des formules, nous permettent de préciser des circonstances très étendues où le théorème de Stokes, dans sa forme la plus générale, est valable pour un espace de n'importe quel nombre de dimensions.

Il y a lieu d'ajouter que non seulement notre théorie conduit à des théorèmes qui paraîtraient dans un certain sens définitifs : elle nous permet encore d'étendre d'une façon notable les résultats acquis dans l'ancienne théorie basée sur la définition par triangulation (2) [ou son analogue dans les espaces supérieurs], ainsi que de mieux comprendre les limitations de cette définition.

---

(1) Brouwer, dans *Amst. Akad. Versl.*, vol. 28, pp. 118-120 (1919), ne démontre le théorème que dans des conditions très spéciales.

(2) Voir mon travail : *On the triangulation method of defining the area of a surface* (Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, vol. 19, part. 2, pp. 117-152 [1919].

STIELTJES-VOLTERRA PRODUCTS

PAR P.-J. DANIELL,

RICE INSTITUTE (HOUSTON, TEXAS, U. S. A.).

Volterra has defined an integral composition (1) which possesses some of the properties of an algebraic product.

If $f(s, t)$, $\varphi(s, t)$ are two functions belonging to a certain class the "product" is defined as

$$f \overset{*}{\circ} \varphi(s, t) = \int f(s, u)\varphi(u, t)du$$

where the limits may be variable, (s, t) or be fixed (a, b).

For many purposes in mathematical physics it is an advantage to use Stieltjes integrals in place of ordinary integrals, and this suggests the following type of integral-product which we may call S-V (Stieltjes-Volterra) product :

$$\alpha \cdot \beta(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(u, t) d_u \alpha(s, u)$$

where the functions α, β etc. satisfy the conditions :

(1) $\alpha(s, t)$ is measurable Borel in s, $\quad -\infty < s < +\infty$

(2) It is of limited variation in t, $\quad -\infty < t < +\infty$, the variation limited uniforly with respect to s

(3) $$\alpha(s, t) = \frac{1}{2}[\alpha(s, t + 0) + \alpha(s, t - 0)],$$

where for example

$$\alpha(s, t + 0) = \lim_{\varepsilon = 0, \varepsilon > 0} \alpha(s, t + \varepsilon)$$

(4) $$\alpha(s, -\infty) = 0.$$

(1) V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913.

If the limits of the integral are taken to be finite (a, b) in place of $(-\infty, +\infty)$, the corresponding changes in conditions (1), (2) must be made, while (4) is omitted. This may be considered as a special case where we replace $\alpha(s, t)$ by 0 if $t<a$ or $s>b$, so that, in a certain sense, (4) is satisfied automatically. On account of possible discontinuities the integral must be written

$$\alpha \cdot \beta(s, t) = \int_{a-0}^{b+0} \beta(u, t) d_u \alpha(s, u).$$

If the limits of the integral are taken to be variable (s, t) conditions (1), (2) must be satisfied within a square $S \leqq s, t \leqq T$, or, in the more general case, within any such square if S, T are finite. Condition (4) is omitted, but this is also a special case of the original definition in which we make $\alpha(s, t) = 0$, $t<s$. The product will read

$$\alpha \cdot \beta(s, t) = \int_{s-0}^{t+0} \beta(u, t) d_u \alpha(s, u).$$

It can be shown that the product function will also satisfy the specified conditions.

This product satisfies the distributive laws : —

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \qquad (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

The associative law $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ can be proved by means of a series of limiting processes and the use of a theorem of the author's (1).

The commutative law is not generally satisfied.

In the Volterra composition there is a symbol $\overset{*}{f}^b$, which acts as an idem-factor but possesses meaning only in combination with actual functions. In this S-V product algebra, however, there is a true idem-factor function, namely

$$\begin{aligned} \eta(s, t) &= 0, \quad t<s \\ &= \frac{1}{2}, \quad t=s \\ &= 1, \quad t>s. \end{aligned}$$

For then $\eta \cdot \alpha = \alpha \cdot \eta = \alpha$, and there is no other function which satisfies either of these equations belonging to the class considered.

---

(1) P.-J. Daniell, *Annals of Mathematics*, vol. 19 (1918), p. 290.

The relation between the S-V product and the Volterra composition is as follows.

$$\text{If} \quad \alpha(s,t) = \overset{**}{f}\eta = \int_{-\infty}^{t} f(s,u)\,du, \quad \beta(s,t) = \overset{**}{\varphi}\eta,$$

then

$$\alpha \cdot \beta(s,t) = \overset{***}{f\varphi}\eta = \int_{-\infty}^{t} \overset{**}{f\varphi}(s,u)\,du.$$

The most interesting are the functions of difference, or functions of the "closed cycle" group. Three distinct cases have now to be considered separately.

Case (1) $\alpha(s) = 0$ if $s < 0$.

$$\alpha \cdot \beta(s) = \int_{-0}^{s+0} \beta(s-t)\,d\alpha(t).$$

This is in line with the previous definition with variable limits for

$$\alpha \cdot \beta(s,t) = \int_{s-0}^{t+0} \beta(u,t)\,d_u\alpha(s,u) = \int_{s-0}^{t+0} \beta(t-u)\,d_u\alpha(u-s)$$
$$= \int_{-0}^{t-s+0} \beta(t-s-v)\,d\alpha(v) = \alpha \cdot \beta(t-s).$$

The conditions to be satisfied by α, β etc. are

(1) $\alpha(s)$ is of limited variation in any intervald (finite), $0 \leqq s \leqq S$

(2) $\alpha(s) = \frac{1}{2}[\alpha(s+0) + \alpha(s-0)]$

(3) $\alpha(s) = 0, \quad s < 0.$

In this case *the commutative law holds.* The proof depends on the integration by parts of Stieltjes integrals (1).

Case (2) $\alpha(s)$ is of limited variation from $-\infty$ to $+\infty$.

$$\alpha \cdot \beta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s-t)\,d\alpha(t).$$
$$\alpha(-\infty) = 0.$$

(1) P.-J. Daniell, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 19 (1918, p. 362.

In this case also *the commutative law holds.*

The third case is that in which the limits (a, b) are fixed and where the functions are periodic of period $b-a$; but we shall not consider this case.

To take up the first case which is the most interesting.

Consider the expression

$$\int_{-0}^{\infty} e^{-ps} d\alpha(s) = \mathrm{F}(p; \alpha),$$

where we make the further assumption that the above integral which is an extension of a Dirichlet series, is absolutely convergent when Rp (the real part of p) $> \rho_\alpha$.

Then it can be proved that if R$p > \rho_\alpha$ and ρ_β,

$$\mathrm{F}(p; \alpha \cdot \beta) = \mathrm{F}(p; \alpha) \times \mathrm{F}(p; \beta).$$

A very valuable lemma is that if the integral defining $\mathrm{F}(p; \alpha)$ is absolutely convergent, R$p > \rho_\alpha$, and if $c > 0$, $c > \rho_\alpha$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(p; \alpha) e^{sp} \frac{dp}{p} = \alpha(s).$$

One consequence is that if $\mathrm{F}(p; \alpha) = 0$, $p = c + it$, for all real values of t, when $c > \rho_\alpha$, then $\alpha(s) = 0$ identically.

It follows that if $\mathrm{F}(p; \alpha) \times \mathrm{F}(p; \beta) = \mathrm{F}(p; \gamma)$, R$p > \rho_\alpha, \rho_\beta$, and ρ_γ, then $\gamma(s) = \alpha * \beta(s)$.

Thus the solution of the integral equation of the first kind,

$$\alpha * \xi = \beta$$

can be otained under some conditions by making

$$\mathrm{F}(p; \xi) = \mathrm{F}(p; \beta) : \mathrm{F}(p; \alpha),$$

or

$$\xi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ps} \frac{\mathrm{F}(p; \beta)}{\mathrm{F}(p; \alpha)} \frac{dp}{p}.$$

A corresponding development is possible for the second case, by letting

$$\mathrm{F}(k, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} d\alpha(s), \quad k \text{ real}.$$

In this case also $F(k, \alpha \cdot \beta) = F(k, \alpha) \times F(k, \beta)$ and use can be made of the lemma that if $\alpha(s)$ is regular and of limited variation from $-\infty$ to $+\infty$, (*i.e.* satisfies the conditions given above for the second case) then

$$\int_0^\infty \frac{dk}{\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin k - \sin(tk - sk)] d\alpha(t)$$

exists and is equal to $\alpha(s)$.

An equation of special importance occurs in connection with probability and other parts of mathematical physics, namely

$$\alpha_u \cdot \alpha_v(s) = \alpha_{u+v}(s).$$

This corresponds to $F(k, \alpha_u) = e^{uf(k)}$, or in the first case, to

$$F(p; \alpha_u) = e^{uP(p)}.$$

But it may also be considered as solved by the transcendental function of a function

$$\alpha_u = e^{\cdot u\gamma} = \gamma_1 + u\gamma + \frac{u^2}{2!}\gamma \cdot \gamma + \frac{u^3}{3!}\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma + \dots .$$

Then

$$F(p; \alpha_u) = e^{uF(p;\gamma)}.$$

This corresponds to Volterra's function E(O, U), which satisfies

$$E(O, U + V) = \overset{*}{E}(O, U)\overset{*}{E}(O, V).$$

Indeed

$$e^{\cdot U} = \gamma_1 + \overset{*}{\gamma_1}\overset{*}{E}(O, U) = \gamma_1 + \overset{*}{\gamma_1}\overset{*}{U} + \frac{1}{2}\overset{*}{\gamma_1}\overset{*}{U}\overset{*}{U} + \dots,$$

$$= \gamma_1 + U + \frac{1}{2}U \cdot U + \dots .$$

For practical purposes it is convenient to obtain $e^{\cdot\alpha}$ from a differential equation. If $dF(p; \alpha)/dp = -A(p)/B(p)$, is a rational algebraic function of p, $\beta = e^{\cdot\alpha}$ satisfies under certain conditions the equation

$$B(D)(sD\beta) - A(D)D\beta = 0, \qquad D \equiv d/ds.$$

Application to Summable Series. — Corresponding to a non-convergent series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, Riesz introduces

$$\text{the function} \quad C(\tau) = \sum_{n<\tau} c_n, \quad \text{and}$$

$$C^k(\omega) = \sum_{n<\tau} (\omega - n)^k c_n = k \int_0^{\omega} C(\tau)(\omega - \tau)^{k-1} d\tau .$$

Replace $C(\tau)$ by $\alpha(s) = \frac{1}{2}[C(s+0) + C(s-0)]$, then in our notation the typical mean of order k, type $\lambda = n$, is given by the algebraic (ordinary) ratio of $\alpha \cdot \beta_k(s)$ to $\beta_k(s)$, $\beta_k(s) = s^{\cdot k} = s^k/\Gamma(k+1)$.

An extension of this method of summation in suggested using other functions of this special algebra, such as $e^{\cdot \alpha\beta} m$.

For this we need some consistency theorems, depending on the following lemma:

If $f(s) = o[g(s)]$, as s tends to ∞,

$$\text{that is if} \lim_{s=\infty} \frac{g(s)}{f(s)} = 0 ,$$

then $f \cdot h = o(g \cdot h)$, provided that $g(s), h(s)$ are non-decreasing functions, and that

$$[h(s+a) - h(s)]h(s) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad s \longrightarrow \infty .$$

It is assumed that the integral product is that corresponding to the first case, *i*.

$$f \cdot h(s) = \int_{-0}^{s+0} f(s-t)\, dh(t) .$$

Now by means of contour integrals or from the differential equation an asymptotic expansion for $\log \left(e^{\cdot as^{\cdot m} + bs^{\cdot m-1} + \cdots + hs}\right) = \log \beta$ can be found in the form

$$\log \beta \backsim \frac{m+1}{m} (ma)^{1/m+1} s^{m/m+1} + g_1 s^{(m-1)/m+1} + \ldots ,$$

so that by the lemma above and the methods used by Hardy and the methods used by Hardy and Riesz(1) it can be proved that if a series is summable using $e^{\cdot s^{\cdot m}}$ it is also summable $e^{\cdot s^{\cdot n}}$ where m, n are integers, and $n > m$. It can also be proved

(1) G.-H. Hardy and Riesz, *The General Theory of Dirichlet Series Cambridge*, 1915, pp. 26 et seq.

that if the series is summable (n, k) it is summable using e^{e^s}. The autor has not been able as yet to proceed to still more extreme forms such as

$$e^{e^{e^s}} = \eta_1 + e^{e^s} + \frac{1}{2} e^{e^{2s}} + \ldots .$$

Note. — The equation $\alpha_u \cdot \alpha_v(s) = \alpha_{u+v}(s)$ has other solutions beside those given above of type

$$\alpha_u(s) = e^{u\gamma(s)}.$$

In fact

$$\alpha_u(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{(2\pi a u)}} e^{-(t-bu)^2/2au}\, dt, \quad u > 0,$$

$$\alpha_u(s) = \int_{-aup}^{s} \frac{p^{nu}}{\Gamma(nu)} (t + aup)^{nu-1} e^{-pt-aup^2}\, dt, \quad u > 0,$$

are solutions although they are not analytic in u at $u = 0$.

These come from taking

$F(p; \alpha_u) = e^{uP}$, $dP/dp =$ the ratio of two linear functions in p. Indeed in general, if

$$\alpha_u(s) = e^{u\gamma(s)}, \quad \text{and thereforee} \quad F(p; \alpha_u) = e^{uP},$$

where $P = F(p; \gamma)$, unless P satisfies certain conditions at $p = c \pm i\infty$ we shall not be able to find an actual function γ.

LOI DE RÉCIPROCITÉ ABÉLIENNE

PAR M. A. CHÂTELET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

[**1**] La *loi de réciprocité quadratique* peut être considérée comme la solution du problème suivant : Quels sont les nombres premiers q tels que la congruence :

$$x^2 - d \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, q)$$

ait des solutions? Il est évident que si la congruence est possible ou non pour un nombre d, elle le reste lorsqu'on ajoute à d un multiple quelconque de q. Mais il y a « réciprocité » : *si la congruence est possible ou impossible pour un module premier q, elle reste possible ou impossible pour tout nombre premier q', congru à q suivant le module $4|d|$, ou même seulement suivant le module $|d|$, si d est congru à 1, mod. 4.*

A vrai dire, ce n'est là qu'une conséquence, d'ailleurs assez immédiate, de la loi de réciprocité quadratique. Elle ramène déjà la solution du problème à la recherche de la possibilité de la congruence pour *un seul* nombre premier de chacune des $\varphi(d)$ progressions arithmétiques de raison d, dont les termes sont premiers avec $|d|$.

On peut encore simplifier le problème par la remarque assez immédiate qu'il suffit d'étudier la possibilité de chacune des congruences obtenues en remplaçant d par ses divers facteurs premiers, y compris -1, si d est négatif, puis de combiner convenablement les résultats.

Pour aller plus loin, on peut naturellement employer la loi complète de réciprocité, qui comprend la réciprocité du symbole de Legendre pour deux nombres premiers impairs, et la valeur de ce symbole, lorsque le numérateur est -1, ou 2.

[**2**] Une première généralisation des résultats précédents consiste dans l'étude de la congruence (u, v entiers) :

$$x^2 + ux + v \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, q).$$

En supposant q impair, cette congruence est impossible si le discriminant du trinôme premier membre, $D = u^2 - 4v$, n'est pas résidu quadratique, mod q. Elle est possible si D est résidu, et elle admet alors deux solutions, confondues seulement si D est divisible par q. Sauf le cas de la racine double, on peut même remplacer D par $d = \frac{D}{k^2}$, k étant le plus grand entier dont le carré divise D.

[**3**] Dans ces conditions, on est amené à constituer la *famille* des trinômes :

$$f(x) = x^2 + ux + v, \qquad u, v \text{ entiers},$$

dont le discriminant a pour valeur :

$$u^2 - 4v = l^2 . d$$

d positif ou négatif, sans facteurs carrés, l entier arbitraire.

On peut toujours donner à l une valeur paire quelconque 2λ; il suffit, par exemple, de prendre le trinôme :

$$x^2 - \lambda^2 d .$$

Il est facile de voir qu'on ne peut donner à l de valeurs impaires que si d est mult. $4 + 1$; on peut prendre alors, par exemple, le trinôme :

$$x^2 - lx + l^2 \cdot \frac{1 - d}{4} .$$

Pour se conformer aux notations habituelles de la théorie des corps, une telle famille de trinômes peut être appelée un « *corps de trinômes* ». Le discriminant minimum Δ des divers trinômes, égal suivant les cas à $4.d$ ou à d sera le *discriminant du corps*.

[**4**] Si l'on considère alors la famille de congruences :

$$f(x) \equiv 0 \pmod{q},$$

ou bien elles sont toutes possibles, et les solutions de l'une quelconque d'entre elles se déduisent linéairement des solutions de l'une d'elles convenablement choisie, par exemple

$$x^2 - d \equiv 0 \pmod{q},$$

ou bien elles sont impossibles, sauf celles dont le discriminant D (ou seulement le quotient $l^2 = \frac{D}{\Delta}$) est divisible par q; celles-là seulement admettent deux solutions confondues.

Enfin, d'après la loi de réciprocité, *si, pour un module q, il y a possibilité ou impossibilité de la famille, la même circonstance se présente pour tout module premier q', congru à q suivant le discriminant Δ du corps de trinômes.*

On peut ajouter que *si q divise Δ, et dans ce cas seulement, toutes les congruences ont une racine double.*

L'étude de la famille de congruences pour tout module q est donc ainsi ramené à son étude pour *un seul* nombre premier de chacune des Δ progressions arithmétiques de raison Δ.

[**5**] Ces affirmations subsistent encore pour le cas $q = 2$ qu'on avait primitivement écarté. Il peut se présenter alors les diverses circonstances suivantes : $\Delta = 4.d$, toutes les congruences ont une racine double, mod 2 ; $\Delta = d = \text{mult. } 4 + 1$, ceci se subdivise en deux cas, suivant que d est congru à 1 ou à 5, mod 8 ; dans le premier cas, toutes les congruences sont possibles ; dans le second, seules sont possibles les congruences dont le discriminant du premier membre est divisible par 4, et elles admettent une racine double.

Ce sont là des faits faciles à vérifier. De même pour le dernier énoncé : en supposant par exemple $d = \text{mult. } 4 + 1$ et *premier*, pour tout nombre q premier et congru à 2, mod d, on a, d'après les propriétés du symbole de Legendre :

$$\left(\frac{d}{q}\right) = \left(\frac{q}{d}\right) = \left(\frac{2}{d}\right),$$

de sorte que $\left(\frac{d}{q}\right)$ est égal à $+1$ ou à -1, c'est-à-dire encore que la *famille de congruences, mod q, est possible ou impossible suivant que* $\left(\frac{2}{d}\right)$ est égal à $+1$ ou à -1, ou encore suivant que d est congru, mod 8, à 1 ou à 5, c'est-à-dire en définitive *suivant que la famille de congruences est possible ou non, mod 2.* Dans le cas d'un nombre d composé, il s'introduirait dans les égalités précédentes relatives aux divers facteurs p de d, des nombres $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$. Mais ces nombres disparaîtraient dans le produit, un nombre pair d'entre eux étant négatifs.

[**6**] Il convient d'approfondir un peu la constitution du corps de trinômes. On voit aisément qu'on peut les déduire tous de l'un d'entre eux par une *transformation linéaire* à coefficients fractionnaires :

$$f(x) = \mathrm{A}.f_0(ax + b),$$

A, a, b étant des fractions choisies de telle façon que $f(x)$ soit à coefficients entiers et que le coefficient de x^2 y soit 1 (1). On peut même voir (mais ceci ne s'étend pas aux polynômes de degré supérieur à 2) que si $f_0(x)$ a pour discriminant celui du corps Δ, on peut toujours prendre pour substitution :

$$f(x) = c^2 . f_0\left(\frac{x+b}{c}\right), \qquad b, c \text{ entiers.}$$

En employant le langage et les concepts des corps algébriques, on peut encore dire que les trinômes $f(x)$ sont les *polynômes fondamentaux* (2) de tous les *entiers* du corps algébrique $K(\sqrt{d})$. Le discriminant Δ est le discriminant du corps. Si la famille de congruences est possible, mod q, q se décompose dans le corps en un produit de deux *idéaux* premiers, du premier degré; ces idéaux sont confondus, si les congruences ont toutes une racine double (q diviseur de Δ). Si les congruences sont impossibles, q est un idéal premier principal, du second degré.

[7] La propriété énoncée au paragraphe 4 présente un caractère de généralité et de simplicité qui fait espérer son extension facile à des « *corps de polynômes* » de de degré supérieur à 2. J'ai obtenu cette extension pour tous les corps de polynômes abéliens. Sans entrer dans le détail des démonstrations, je vais préciser dans cette communication la propriété générale dont j'ai pu ainsi établir l'exactitude.

[8] Considérons un polynôme de degré m, à coefficients entiers, irréductible, le coefficient de x^m étant 1 :

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

et effectuons sur $f(x)$ une transformation de Tschirnhausen à coefficients entiers, c'est-à-dire formons le *résultant* des deux polynômes en t :

$$(2) \qquad \begin{cases} f(t), \\ dx - (c_1 t^{m-1} + c_2 t^{m-2} + \ldots + c_m) \end{cases}$$

---

(1) On pourrait aussi adjoindre au corps des trinômes :

$$a.x^2 + b.x + c;$$

mais, au point de vue des congruences, mod q, ou bien a est divisible par q, et l'on est ramené à une congruence du premier degré; ou bien a est premier à q, et l'on peut multiplier le premier membre du trinôme par l'inverse de a, mod q.

(2) Cette dénomination me paraît commode quoique assez peu usuelle, et je l'ai déjà introduite dans mes *Leçons sur la théorie des Nombres* (p. 65). Il est vrai que dans la théorie des corps il y a peu de locutions françaises usuelles.

et multiplions-le par un entier convenable de façon à obtenir un polynôme en x à coefficients entiers, premiers entre eux, soit $g(x)$; il est aussi de degré m.

On peut encore dire que $g(x)$ est caractérisé par l'identité :

$$d^m . g\left(\frac{c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \dots c_m}{d}\right) = f(x).\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant un polynôme.

Les c_i sont des entiers qu'on peut supposer premiers entre eux; si l'on prend pour d la valeur 1, il est visible que dans le polynôme $g(x)$, x^m aura encore pour coefficient 1. Mais il peut se faire que la même circonstance se produise pour d'autres valeurs de d; il est aisé de vérifier que ce ne peut être que pour des diviseurs du *discriminant* de $f(x)$ (produit des carrés des différences des zéros), c'est-à-dire pour un nombre fini de valeurs.

Considérons tous les polynômes $g(x)$, obtenus par ces substitutions, en donnant aux c_i et à d toutes les valeurs possibles de façon toutefois que le coefficient de x^m soit 1. On peut encore dire que la famille de polynômes ainsi obtenue est un *corps de polynômes* engendré, ou défini, par le polynôme $f(x)$. On l'engendrerait d'ailleurs aussi bien, à partir de tout autre polynôme du corps, supposé toutefois irréductible (1).

[**9**] Je rappelle encore que le polynôme $f(x)$ est dit *abélien*, si d'une part tous ses zéros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de l'un d'eux :

$$\alpha_i = \theta_i(\alpha), \qquad \text{l'un des } \theta(x) \text{ étant } x;$$

et si d'autre part les substitutions θ sont échangeables :

$$\theta_i[\theta_j(\alpha)] = \theta_j[\theta_i(\alpha)]$$

quels que soient i et j.

Il est à peu près évident que les polynômes du corps engendré par un polynôme abélien $f(x)$ sont encore abéliens ou, exceptionnellement, des puissances de polynômes abéliens. En particulier, les substitutions de Tschirnhausen équivalentes aux substitutions θ_i reproduisent le polynôme $f(x)$.

---

(1) Je m'excuse de ces considérations sur des sujets relativement connus. Elles tiennent à ce que j'ai voulu donner à cette communication une forme, la plus indépendante possible, de la théorie des corps algébriques. Les résultats seulement énoncés se déduisent aisément de la théorie de l'élimination par les fonctions symétriques.

Les corps de trinômes du second degré envisagés aux paragraphes 3 et 6 sont des cas particuliers de corps de polynômes abéliens. Les substitutions θ, de même que les substitutions de Tschirnhausen, engendrant le corps, peuvent être prises alors linéaires.

[**10**] Plaçons-nous maintenant, comme au paragraphe 4, au point de vue des congruences. Soit un corps de polynômes abéliens $g(x)$, engendré par un polynôme $f(x)$, et considérons d'abord la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{q},$$

q nombre premier donné.

Si elle admet une solution a, elle en admet en général m : $a_1, a_2, \ldots, a_m$, déduites de a par les substitutions θ :

$$a_i \equiv \theta_i(a) \pmod{q}$$

ou encore par les substitutions de Tschirnhausen équivalentes :

$$(1') \qquad D.a_i \equiv C_1^{(i)} a^{m-1} + C_2^{(i)} a^{m-2} + \ldots + C_m^{(i)} \pmod{q}.$$

En outre, toute congruence dont le premier membre est un polynôme du corps

$$g(x) \equiv 0 \pmod{q}$$

admet aussi en général m solutions $b_1, b_2, \ldots, b_m$, déduites des a_i par la substitution de Tschirnhausen qui fait passer de $f(x)$ à $g(x)$:

$$(2') \qquad d.b_i \equiv c_1 a_i^{m-1} + c_2 a_i^{m-2} + \ldots + c_m \pmod{q}.$$

J'ai dû dire « en général » : d'après ces formules, les cas d'exception ne peuvent se produire que si q divise d ou D; donc, d'après la remarque du paragraphe 8, si q divise le discriminant de $f(x)$; ils ne se produisent pas d'ailleurs alors nécessairement.

De même si deux a_i sont confondues, mod q, q divise le discriminant de $f(x)$, car ce discriminant est congru au produit des carrés des différences des a_i.

[**11**] Au lieu de dire que les congruences admettent m solutions, on peut encore dire que leurs polynômes premiers membres sont décomposables, suivant le mod q, en produits de m facteurs du premier degré.

Il est donc aussi naturel, dans le cas de l'impossibilité des congruences, de re-

chercher les facteurs de leur premier membre, suivant le mod q. Supposons donc que $f(x)$ admette, suivant le mod q, un facteur $\varphi(x)$ irréductible, de degré k.

Considérons le domaine des imaginaires de Galois défini par le double module : [modd. q, $\varphi(x)$]. Dans ce domaine, $\varphi(x)$ admet k zéros, qui sont aussi zéros de $f(x)$. En raisonnant sur l'un d'eux α, comme l'on a raisonné ci-dessus sur a, on voit qu'en général toute congruence :

$$g(x) \equiv 0 \qquad [\text{modd. } q, \varphi(x)]$$

admet m solutions imaginaires de Galois, vérifiant les mêmes relations que dans le cas de solutions réelles.

En revenant au domaine des nombres, mod q, on déduit de là que le polynôme $f(x)$ est décomposable en un produit de $\frac{m}{k}$ facteurs irréductibles de degré k :

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_{\frac{m}{k}}(x)$$

en général distincts, et ceci montre que k est diviseur de m. Ces facteurs seront dits *les conjugués de* $\varphi(x)$. Tout polynôme $g(x)$ du corps est de même, en général, décomposable en $\frac{m}{k}$ facteurs conjugués qui ne sont plus nécessairement ni irréductibles, ni distincts :

$$g(x) \equiv \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x) \ldots \gamma_{\frac{m}{k}}(x) \qquad (\text{mod } q).$$

Enfin, ces divers facteurs se déduisent les uns des autres par les substitutions de Tschirnhausen, ce qu'on peut, par exemple, écrire :

$$(1'') \quad D^m \cdot \varphi_j\left[\frac{1}{D}(C_1^{(i)}x^{m-1} + C_2^{(i)}x^{m-2} + \ldots + C_m^{(i)})\right] \equiv \varphi(x) \cdot F(x) \quad (\text{mod } q),$$

$$(2'') \quad d^m \cdot \gamma_j\left[\frac{1}{d}(c_1x^{m-1} + c_2x^{m-2} + \ldots + c_m)\right] \equiv \varphi_j(x) \cdot G(x) \quad (\text{mod } q),$$

$F(x)$ et $G(x)$ étant des polynômes à coefficients entiers. Dans les premières congruences, les indices i, qui peuvent prendre m valeurs, se répartissent en $\frac{m}{k}$ groupes de k, les indices de chaque groupe correspondant à un même indice j, qui ne peut prendre que $\frac{m}{k}$ valeurs.

Les cas d'exception, notamment le cas de facteurs multiples, ne peuvent encore se produire que si q divise le discriminant de $f(x)$.

[**12**] On voit que les cas d'exception ne sont plus nécessairement les mêmes, si on prend pour engendrer le corps un autre polynôme que $f(x)$, toujours irréductible, naturellement.

Pour uniformiser le langage, j'adopterai alors la notation suivante que j'ai déjà indiquée dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (26 janvier 1914), en me plaçant d'ailleurs au point de vue plus général d'un corps de polynômes quelconques.

Je dirai qu'un polynôme abélien $f(x)$ admet, suivant un module premier q, un *diviseur* « *régulier* » $\varphi(x)$, de degré k peut-être égal à 1, si tout polynôme $g(x)$ du corps engendré par $f(x)$ admet aussi, suivant le module q, un diviseur $\gamma(x)$ de degré k, et ceci de telle façon que φ et γ vérifient la relation congruentielle de Tschirnhausen [2''], écrite au paragraphe précédent entre φ_j et γ_j. En particulier, $f(x)$ lui-même devra être, suivant le mod q, le produit de $\frac{m}{k}$ polynômes de degré k :

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{\frac{m}{k}}(x)$$

vérifiant avec φ les relations congruentielles [1''] du paragraphe précédent.

Dans le cas particulier d'un diviseur du premier degré

$$\varphi(x) = x - a,$$

je dirai encore que a est une « *solution régulière* »; on aurait alors des conditions plus simples, et les relations de Tschirnhausen se réduiraient aux congruences [1'] et [2'] du paragraphe 10.

Des relations existant ainsi par hypothèse, il ne suit pas nécessairement qu'on puisse calculer $\gamma(x)$ à partir de $\varphi(x)$. C'est ainsi par exemple que la relation entre solutions b_i et a_i peut être vérifiée si d et le second membre sont tous deux divisibles par q; elle ne permettrait pas alors de calculer b_i connaissant a_i.

[**13**] Par une extension naturelle, le diviseur $\varphi(x)$, suivant le mod q, de $f(x)$, sera dit *régulièrement irréductible*, si, parmi les diviseurs correspondants $\gamma(x)$ des polynômes $g(x)$ du corps, il y en a qui sont irréductibles, mod q.

De même ce facteur $\varphi(x)$ sera dit *régulièrement multiple* d'ordre h, si ses $\frac{m}{k}$ conjugués [diviseurs de $f(x)$] se répartissent en $\frac{m}{k.h}$ groupes de h :

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h), \quad (\varphi_{h+1}, \ldots, \varphi_{2h}), \quad \ldots, \ldots, \quad \left(\varphi_{\left(\frac{m}{kh}-1\right)h+1}, \ldots, \varphi_{\frac{m}{k}}\right),$$

les facteurs de chaque groupe étant identiques entre eux, mod q, mais différents des facteurs des autres groupes; et s'il en est de même des diviseurs conjugués *correspondants* des divers polynômes $g(x)$ du corps.

[**14**] Cette définition de la « régularité » permet de faire jouer un rôle analogue aux divers polynômes qui peuvent engendrer le corps. De sorte que pour étudier les diviseurs mod q, il suffit d'avoir pu obtenir un polynôme irréductible $g(x)$ du corps dont le discriminant ne soit pas divisible par q. Tout diviseur de ce polynôme, irréductible suivant le mod q, est régulier et régulièrement irréductible.

Cette méthode est en défaut si q divise les discriminants de tous les polynômes du corps. Dans ce cas, tout polynôme admet nécessairement un diviseur multiple, mod q; il reste à voir si ces diviseurs se correspondent.

[**15**] Naturellement, toutes les conventions précédentes sur les corps de polynômes et les diviseurs réguliers s'interprètent dans le langage des corps aigébriques. Les polynômes du corps engendré par $f(x)$ sont les polynômes fondamentaux des entiers du corps algébrique abélien, défini par une racine de $f(x) = 0$.

Pour interpréter la notion de diviseur, prenons de suite le cas général. Si le corps de polynômes admet, suivant le mod q, un diviseur régulier irréductible de degré k ($1 \leqslant k \leqslant m$), et si ce diviseur est régulièrement multiple d'ordre h ($1 \leqslant h \leqslant m$) k, c'est que le nombre premier q se décompose dans le corps en un produit de $\frac{m}{k.h}$ puissances $h^{\text{ièmes}}$ d'idéaux premiers distincts de degré k, et réciproquement (1).

[**16**] Ces considérations préalables sur les corps de polynômes et les diviseurs réguliers montrent les difficultés et les cas d'exception qui se présentent nécessairement dans toute étude des congruences. Il est par suite nécessaire de préciser convenablement le langage lorsqu'on veut obtenir des énoncés généraux.

Je suis maintenant en mesure d'énoncer d'une façon générale l'extension aux corps abéliens de la loi du paragraphe 4 sur les corps quadratiques :

THÉORÈME. — *Si le polynôme abélien irréductible $f(x)$ de degré m est décomposable suivant le mod q premier, en un produit de $\frac{m}{k}$ facteurs réguliers et régulièrement irréductibles et distincts, de degré k, il en est de même pour tous les nombres premiers q', congrus à q suivant un certain module Δ qui ne dépend que de $f(x)$.*

(1) Cette propriété est assez immédiate, je l'ai déjà signalée dans la Note citée des *Comptes rendus*, en précisant la façon de définir les idéanx à partir des diviseurs.

La notion de diviseur régulier permet d'éviter l'équation fondamentale à m indétermi nées de Kronecker.

Comme pour le second degré, on peut aussi ajouter : *si q divise Δ, et dans ce cas seulement, $f(x)$ se décompose en un produit de facteurs régulièrement multiples, d'ordre h supérieur à* 1.

Si l'on veut éviter de prononcer dans cet énoncé la notion de diviseur régulier précisé ci-dessus, il suffit d'ajouter qu'on excepte les nombres premiers q, diviseurs du discriminant de $f(x)$, et de supprimer naturellement le second énoncé.

[**17**] Il me semble qu'on peut sans inconvénient désigner ce théorème sous le nom de « *loi de réciprocité abélienne* ». Il comprend, comme cas particulier, la loi quadratique du paragraphe 4.

Un autre cas particulier intéressant est celui du corps des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ou si l'on préfère de l'équation aux racines primitives de $[x^m - 1 = 0]$. Dans ce cas, la décomposition de l'équation en facteurs suivant un mod q ne dépend que de l'*exposant f auquel appartient q, mod m.* Cette décomposition ne change donc pas si l'on remplace q par tout nombre premier q', congru à q, mod m. C'est le théorème énoncé; le nombre Δ est alors égal à m.

Pour compléter l'énoncé, il y lieu de donner quelques précisions sur le nombre Δ. D'après la deuxième partie de l'énoncé, les facteurs premiers de Δ divisent les discriminants de tous les polynômes du corps, sans cependant que la réciproque soit vraie (1).

En outre, si un facteur premier m_1 de Δ entre dans m degré du corps, à la puissance h, qui peut être nulle, il entre dans Δ à la puissance $h+1$ et peut-être à la puissance $h+2$, si ce facteur est 2. (C'est ainsi que pour le second degré Δ est égal au produit de nombres impairs distincts par 1, ou $4 = 2^{1+1}$, ou $8 = 2^{1+2}$. Dans le cas des racines $m^{\text{ièmes}}$, si $m = m_1^{\alpha}.m_2^{\beta}\ldots$, les seuls facteurs du discriminant de l'équation aux racines primitives étant les diviseurs m_i de m, ce sont aussi les seuls diviseurs de Δ. Mais m_1 entre dans le degré $\varphi(m) = m_1^{\alpha-1}(m_1-1).m_2^{\beta-1}(m_2-1)\ldots$ du corps à la puissance $\alpha - 1$; il entre donc dans Δ à la puissance α, s'il est impair, ce qui conduit bien à la valeur indiquée ci-dessus $\Delta = m$.)

[**18**] Si le degré m est premier, les deux seules valeurs possibles pour k sont 1 et m; de sorte que $f(x)$ ou bien admet m solutions ou bien est régulièrement irréductible. Dans ce cas particulier, le théorème prend une forme pour ainsi dire identique au cas du second degré.

J'ai indiqué ce cas dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 15 mars 1920. Depuis, j'ai pu établir l'exactitude de l'énoncé général.

---

(1) D'après le théorème de Dedekind sur le discriminant d'un corps algébrique, les facteurs de Δ ne sont autre que ceux du discriminant du corps algébrique abélien constitué par les zéros des polynômes du corps.

[**19**] Je ne puis songer à entrer dans le détail de la démonstration. Aussi bien ne serait-elle pas bien neuve, car il m'a suffi de rapprocher la loi de réciprocité d'Eisenstein (entre nombres d'un corps de racines de l'unité), de la constitution des corps abéliens, indiquée par Kronecker et démontrée par Weber et Hilbert, à partir des racines de l'unité.

Cette démonstration m'a permis de compléter sur certains points le théorème, de même que la loi de Legendre complète l'énoncé du paragraphe 4. Les résultats que j'ai pu ainsi obtenir intéressent en même temps la constitution des divers corps abéliens et sortiraient du cadre de cette communication (1).

Quoi qu'il en soit, il m'a paru que l'énoncé de la loi précédente avait une forme suffisamment simple et générale pour intéresser un instant ceux qui estiment les propriétés arithmétiques des nombres.

---

(1) Certains d'entre eux, pour le cas de m premier, ont été indiqués dans la Note aux *Comptes rendus*, déjà citée (mars 1920). Voir aussi une Note postérieure au Congrès (octobre 1920.

LE CALCUL SYMBOLIQUE SOMMATOIRE

PAR M. AMSLER

NANCY

Ce calcul repose sur les propriétés du tableau des nombres figurés. Il permet la sommation des valeurs prises par un polynôme en x quand x reçoit des valeurs entières consécutives. Il rend intuitive la théorie des polynômes et nombres de Bernoulli et des séries où interviennent ces nombres. Il transforme en une opération arithmétique régulière la séparation et l'approximation des racines réelles d'une équation algébrique, les méthodes de Newton et des parties proportionnelles pouvant être appliquées sans quitter la forme symbolique du calcul.

La notation symbolique s'applique à la transformation des séries entières en x en passant des puissances aux factorielles. Il ne sera question ici que des éléments du calcul.

Symboles d'un polynôme en x.

Posons :

$$\varphi_m = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)}{m!},$$

$$\gamma_m = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!},$$

m étant un entier positif.

Tout polynôme $f(x)$ se met sous les formes :

$$a_0\varphi_m + a_1\varphi_{m-1} + \dots a_m,$$

$$b_0\gamma_m + b_1\gamma_{m-1} + \dots b_m,$$

m étant le degré de $f(x)$, $a_0, a_1, \ldots a_m, b_0, b_1, \ldots b_m$, des constantes. Les symboles de $f(x)$ s'obtiennent en reportant en exposants les indices des φ et des γ.

Les deux symboles d'un même polynôme sont dits équivalents.

Sommations.

La somme des valeurs de $f(x)$ pour les valeurs entières consécutives 1, 2, ..., $x-1$, x de la variable a pour symbole en φ le produit par φ du symbole de $f(x)$.

La somme des valeurs de $f(x)$ pour les valeurs 0, 1, 2, ..., $x-1$, x de la variable a pour symbole en γ le produit par $\gamma+1$ du symbole de $f(x)$.

L'équivalence $P(\varphi) = Q(\gamma)$ donne donc, par sommation, soit :

$$\varphi P(\varphi) = (\gamma+1)Q(\gamma) - Q(0)$$

soit

$$\varphi P(\varphi) + P(0) = (\gamma+1)Q(\gamma),$$

$\varphi = \gamma$ donnera :

$$\varphi^m = \gamma(\gamma+1)^{m-1} \tag{1}$$

par sommations successives entre 1 et x. $\varphi + 1 = \gamma + 1$ donnera :

$$\varphi^m + \varphi^{m-1} + \ldots + \varphi + 1 = (\gamma+1)^m \tag{2}$$

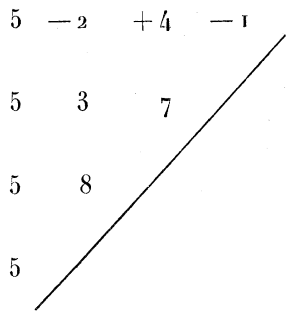
par sommations successives entre 0 et x.

Changement de symbole.

La formule (1) conduit à la règle suivante que nous appliquons au symbole : $5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 1$, par exemple.

Former un tableau dont la première ligne contient les coefficients $5 - 2 + 4 - 1$, la première colonne contenant quatre fois le coefficient 5.

Tout élément du tableau est la somme du précédent dans la colonne et du précédent dans la ligne. La diagonale ascendante qui aboutit au coefficient — 1 du symbole donné renferme les coefficients du symbole en γ cherché $5\gamma^3 + 8\gamma^2 + 7\gamma - 1$.



Le même tableau, construit à partir de la diagonale, résout la question inverse.

Changer x en $-x$.

Dans un symbole en φ, changer φ en $-\gamma$; dans un symbole en γ, changer γ en $-\varphi$. Si l'on veut rester dans la même notation, effectuer au préalable un changement de symbole. Ainsi :

$$f(x) = 5\varphi^3 - 2\varphi^3 + 4\varphi - 1,$$

donne

$$f(x) = -5\gamma^3 - 2\gamma^2 - 4\gamma - 1.$$

Mais comme on a aussi :

$$f(x) = 5\gamma^3 + 8\gamma^2 + 7\gamma - 1,$$

on en conclut :

$$f(-x) = -5\varphi^3 + 8\varphi^2 - 7\varphi - 1.$$

Les formules (1) et (2) sont transformées, par le changement de x en $-x$, en

$$\gamma^m = \varphi(\varphi - 1)^{m-1}, \tag{3}$$

$$\gamma^m - \gamma^{m-1} + \gamma^{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1}\gamma + (-1)^m = (\varphi - 1)^m. \tag{4}$$

Multiplier par x un polynôme en x.

L'identité :

$$\varphi_{m+1} = \frac{x+m}{m+1} \times \varphi_m$$

conduit à

$$x \times f(x) = \varphi \frac{d}{d\varphi} [(\varphi - 1)\mathrm{P}(\varphi)], \qquad \mathrm{P}(\varphi) \text{ symbolisant } f(x) \tag{5}$$

On a de même :

$$x \times f(x) = \gamma \frac{d}{d\gamma} [(\gamma + 1)\mathrm{Q}(\gamma)], \qquad \mathrm{Q}(\gamma) \text{ symbolisant } f(x). \tag{6}$$

Les formules (5) et (6) attirent l'attention sur les symboles $(\varphi - 1)^m$ et $(\gamma + 1)^m$. On les interprète en imaginant qu'on multiplie par x les polynômes en x correspondants. On en conclut :

$$\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}{m!} = (\varphi - 1)^m = \frac{\gamma^{m+1} + (-1)^m}{\gamma + 1}, \tag{7}$$

$$\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}{m!} = (\gamma + 1)^m = \frac{\varphi^{m+1} - 1}{\varphi - 1}. \tag{8}$$

Augmenter ou diminuer x d'un nombre entier.

On s'appuie sur les formules (7) et (8).

Pour augmenter x de l'entier positif p, on prend le quotient de $\varphi^p \mathrm{P}(\varphi)$ par $(\varphi - 1)^p$.

Pour diminuer x de p, on divise par φ^p le produit de $\mathrm{P}(\varphi)$ par $(\varphi - 1)^p$.

Il y a des règles analogues pour les symboles en γ.

Prendre la différence d'un polynôme.

Appelons différence en arrière de $f(x)$ la quantité $f(x) - f(x-1)$, différence en avant la quantité $f(x+1) - f(x)$.

La différence en arrière est la partie entière de $\frac{P(\varphi)}{\varphi}$ ou de $\frac{Q(\gamma)}{\gamma+1}$.

La différence en avant est la partie entière de $\frac{P(\varphi)}{\varphi-1}$ ou de $\frac{Q(\gamma)}{\gamma}$.

Généralisation immédiate pour les différences successives :

$$\Delta^m = E\left(\frac{P}{\varphi^m}\right), \qquad \Delta'^m = E\left(\frac{Q}{\gamma^m}\right), \text{ etc.}$$

Ces formules indiquent la signification des coefficients des symboles $P(\varphi)$ et $Q(\gamma)$, pour peu qu'on y fasse $x = 0$. L'interprétation de $Q(\gamma)$ donne la formule d'interpolation de Newton.

Formule des accroissements finis.

En augmentant x de 1 à plusieurs reprises dans le symbole $5\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 1$, par exemple, ce qui nécessite des divisions par $\varphi - 1$, on forme le tableau :

$f(x)$	5	-2	4	-1
$f(x+1)$	5	3	7	6
$f(x+2)$	5	8	15	21
$f(x+3)$	5	13	28	49
.....	.....			

Ce tableau coïncide avec celui du changement de symbole; la diagonale 5 8 7 — 1 contient les coefficients du symbole en γ de $f(2)$. Comme la dernière colonne renferme les nombres $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., on a encore une confirmation de la formule d'interpolation de Newton.

L'augmentation, par exemple, égale à 5 de la variable x revient, comme on l'a vu plus haut, à la division de $\varphi^3 P(\varphi)$ par $(\varphi - 1)^5$, d'où le dispositif suivant :

$$\begin{array}{llll|l} \underline{5} & -2 & +4 & -1 & 1-5+10-10 \\ & \underline{25} & -50 & +50 & \hline 5+23+69+164 \\ & & \underline{+115} & -230 & \\ & & & \underline{+345} & \end{array}$$

d'où le symbole :

$$5\varphi^3 + 23\varphi^2 + 69\varphi + 164.$$

En augmentant x de h plusieurs fois dans φ_m, on trouve :

$$(9) \qquad \varphi_m(x+h) = \varphi_m + \frac{h}{1}\varphi_{m-1} + \frac{h(h+1)}{1.2}\varphi_{m-2} + \dots + \frac{h(h+1)\dots(h+p-1)}{p!}\varphi_{m-p} + \dots + \frac{h(h+1)\dots(h+m-1)}{m!},$$

h étant entier et positif. On généralise aisément, de sorte que h peut recevoir une valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative.

Le second dispositif d'augmentation s'appliquera donc pour un accroissement quelconque. A la place du diviseur, figurent les coefficients :

$$1, \quad -\frac{h}{1}, \quad -\frac{h(h-1)}{1.2}, \text{ etc.},$$

$m+1$ étant leur nombre, si m est le degré du symbole, les derniers d'entre eux pouvant être nuls, si h est entier et positif.

Multiplication.

Deux polynômes en x étant donnés par leurs symboles, on cherche le symbole de leur produit. Un produit réel est représenté par le signe $\times$, un produit symbolique par un simple point.

En partant de φ_{m+p} et diminuant x de m dans les deux membres (réel et symbolique) de l'égalité

$$\varphi^{m+p} = \frac{x(x+1)\dots(x+m+p-1)}{(m+p)!},$$

on trouve que

$$(10) \qquad \varphi_1^p \times (\varphi_1 - 1)^m = F_m^{\,p}\, \varphi_p (\varphi_1 - 1)^m.$$

Par extensions progressives on arrive à :

$$(11) \quad P(\varphi_1) \times Q(\varphi_1) = P.Q + \frac{\varphi_1(\varphi_1-1)}{(1!)^2} P'.Q' + \frac{\varphi_1^2(\varphi_1-1)^2}{(2!)^2} P''.Q'' + \frac{\varphi_1^3(\varphi_1-1)^3}{(3!)^2} P'''.Q''' + \dots.$$

Il existe une formule analogue en γ.

Dérivation.

La formule (9) donne :

$$(12) \qquad \frac{d\varphi_{1m}}{dx} = \varphi_1^{m-1} + \frac{\varphi_1^{m-2}}{2} + \frac{\varphi_1^{m-3}}{3} + \dots + \frac{\varphi_1}{m-1} + \frac{1}{m}.$$

On en déduit :

$$\frac{d\varphi_{1m}}{dx} = \int_0^1 \frac{\varphi_1^m - z^m}{\varphi_1 - z}\, dz$$

et, généralement,

$$\frac{df}{dx} = \int_0^1 \frac{P(\varphi_1) - P(z)}{\varphi_1 - z}\, dz, \qquad P(\varphi_1) \text{ étant le symbole de } f(x).$$

Si m est le degré de $f(x)$, on en conclut :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dP}{d\varphi_1} + \frac{1-2\varphi_1}{2.2!}\frac{d^2P}{d\varphi_1^2} + \frac{1-3\varphi_1+3\varphi_1^2}{3.3!}\frac{d^3P}{d\varphi_1^3} + \dots + \frac{(1-\varphi_1)^k - (-\varphi_1)^k}{k.k!}\frac{d^kP}{d\varphi_1^k} + \dots + \frac{(1-\varphi_1)^m - (-\varphi_1)^m}{m.m!}\frac{d^mP}{d\varphi_1^m}.$$

La dérivée seconde a une forme compliquée, mais on a des formules simples en faisant apparaître les différences en avant ou en arrière, désignées par Δ' et Δ, D désignant une dérivation, la fonction étant un polynôme en x.

La formule (12) sert de point de départ; on a, symboliquement :

$$D^m = L^m \frac{1}{1-\Delta}; \qquad \Delta^m = (1-e^{-D})^m; \qquad D^m = L^m(1+\Delta'); \qquad \Delta'^m = (e^D - 1)^m$$

et par suite,

$$\Delta^m = \left(\frac{\Delta'}{1+\Delta'}\right)^m, \qquad \Delta'^m = \left(\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)^m.$$

Intégration.

Soit m le degré de $f(x)$ et de son symbole $P(\varphi)$. Imaginons une division où $P(\varphi)$ serait le dividende, les coefficients du diviseur étant

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \cdots \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m+1}.$$

Les coefficients du symbole de la primitive de $f(x)$, nulle pour $x = 0$, sont ceux du quotient, le premier étant le coefficient de φ^{m+1}.

Exemple. — Intégrer le polynôme $f(x) = 24\varphi^3 - 24\varphi^2 + 4\varphi$. On a le calcul suivant :

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & -24 & +4 & 0 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ \hline & -12 & -8 & -6 & 24-36+14-1 \\ & & +18 & +12 & \\ & & & -7 & \end{array}$$

d'où

$$\int_0^x f(x)dx = 24\varphi^4 - 36\varphi^3 + 14\varphi^2 - \varphi.$$

EINIGE SÄTZE AUS DER THEORIE DER KOMPLEXEN

MULTIPLIKATION DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

PAR M. RUD. FUETER

(ZURICH.)

Die Bedeutung, die die Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i}{f}}$ für die Entwicklung von Algebra un Zahlentheorie besessen haben, ist aus den fundamentalen Arbeiten von LAGRANGE, GAUSS, ABEL bekannt. Die ganze Theorie ist durch den KRONECKER'schen Satz gekrönt worden, dass die Wurzeln *aller*, im Bereich der rationalen Zahlen Abel'schen algebraischen Gleichungen in einem Körper der Einheitswurzeln enthalten sind.

Ein wunderbares Ergebnis der neueren Algebra und Zahlentheorie, dessen Entdeckung in seinen Anfängen schon auf ABEL und GALOIS zurückgeht, das aber vor allem von KRONECKER gefunden worden ist, zeigt, dass die *elliptischen Funktionen* eine ganz entsprechende Rolle übernehmen, falls statt der rationalen Zahlen der Bereich eines quadratisch imaginären Körpers zu Grunde gelegt wird. Die Kronecker'schen Untersuchungen sind von H. WEBER aufgenommen und im dritten Bande seiner *Algebra* (1) dargestellt und weitergeführt worden. Diese Darstellung enthält jedoch neben verschiedenen Unrichtigkeiten noch ziemliche Lücken. Es ist mir gelungen, diese Lücken sämtlich auszufüllen und se für die Theorie, die gemeiniglich die Theorie der *komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen* genannt wird, eine Darstellung zu geben, die nicht nur genau se weit geht, wie die Theorie der Einheitswurzeln, sondern (wie schon bei Weber) zu allen Einzelheiten überraschende Analogien aufweist. Hoffentlich werde ich in Bälde alles in einem Buch ausführlich darstellen können.

Zu Grunde gelegt werde der Körper k der Zahlen

$$x + y\sqrt{m}; \qquad x, y \text{ rational};$$

(1) *Lehrbuch der Algebra*, Bd. III. Braunschweig, 1908.

m ohne quadratischen Teiler, < 0 und $\neq -1$, $\neq -3$ (1). In k wähle ich irgend ein Ideal :

$$w = (\omega_1, \omega_2),$$

wo ω_1, ω_2 eine *Basis* desselben bedeute und $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ mit positiv imaginärem Teil vorausgesetz werde. Ist $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ eine andere Basis von w derselben Eigenschaft, so existiert eine unimodulare, lineare Substitution S, sodass

$$\overline{\omega} = S\omega .$$

Sind $\overline{w} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ und w äquivalente Ideals, so muss ebenfalls

$$\overline{\omega} = S\omega .$$

Setzt man nach *Weierstrass :*

$$g_2 = 60 \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^4};$$

$$g_3 = 140 \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(n\omega_1 + m\omega_2)^6};$$

$$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2);$$

$$j(\omega) = \frac{4 \cdot 27 \cdot g_2^3}{G},$$

so ergibt sich aus $j(\omega) = j(S\omega)$ sofort, dass $j(\omega)$ nicht von der Wahl des Ideals w und dessen Basis, sondern nur von der *Klasse* von w in k abhängt. Führt man weiter die doppelt-periodische Funktion ein :

$$V(z; \omega_1, \omega_2) = 2^3 3^3 \frac{g_2 g_3}{G} \mathfrak{p}(z; \omega_1, \omega_2)$$

mit den Perioden ω_1, ω_2 so ergibt sich aus den bekantenn Eigenschaften der $\mathfrak{p}$—Funktion, dass V in z gerade, in z, ω_1, ω_2 homogen von 0.ter Ordnung und invariant gegenüber linearen unimodularen Substitutionen der ω_1, ω_2 ist. Ist v irgend eine ganze Zahl vom k, so hat $V(vz)$ deshalb wieder die Perioden ω_1, ω_2 und ist eine rationale Funktion von $V(z)$ [*Komplexe Multiplikation*].

---

(1) Diese beiden Fälle bedingen eine etwas abweichende Behandlung.

Man setze nun für z Zahlen τ von k ein. Ist τ gebrochen, so kann man Zähler und Nenner durch den grössten gemeinsamen Idealteiler kürzen.

τ ist dann ein Idealbruch, und ich setze, was unwesentlich, voraus, dass der Zähler von τ durch w teilbar. (τ) habe also die Form :

$$(\tau) = \frac{t.w}{f}$$

wo t, f, w Ideale von k sind, und f relativ prim zu $t.w$. Die Zahlen $V(\tau)$ sind, wie aus den Eigenschaften von V sofort ersichtlich, nicht von der Wahl von w oder der Basis ω_1, ω_2 von w abhängig, sondern nur von der Klasse von w (mod f). Die Zahlen $V(\tau)$ haben dann die völlig entsprechenden Eigenschaften, wie die Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi it}{f}}$, wo t, f ganze teilerfremde Zahlen sind. Ich stelle im folgenden die Resultate nebeneinander :

1) Die Zahlen $e^{\frac{2\pi it}{f}}$, $V\left(\frac{tw}{f}\right)$ sind algebraische Zahlen.

2) Die Zahlen $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ genügen Gleichungen, die im Bereich der ganzen rationalen Zahlen Abelsch sind.

Die aus $V\left(\frac{tw}{f}\right)$, $j(\omega)$ gebildeten Zahlen genügen Gleichungen, die im Bereich des Körpers k Abelsch sind.

3) Der Grad des Körpers von $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ ist $\varphi(f)$, d. h. gleich der Anzahl der zu f teilerfremden Kongruenz-(Strahl) Klassen (mod f).

Der Grad des Körpers $V\left(\frac{tw}{f}\right)$, $j(\omega)$ ist gleich der Anzahl der Klassen des Kongruenzstrahls (mod f) in k.

4) Die Gruppen der Gleichungen sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen der entsprechenden Kongruenzstrahlen (mod f).

5) Die Körperdiskriminante von $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ enthält nur die Primzahlen von f; diese aber auch alle mit Ausnahme von 2, falls es nur einfach in f auftritt.

Die Körperdiskriminante von $V\left(\frac{tw}{f}\right)$ enthält nur die Primideale von f; diese aber auch alle mit Ausnahme der Primideale von 2, im Falle $\begin{cases} m \equiv \pm 1 (8) \\ m \equiv 0 (2) \end{cases}$, die nur einfach in f enthalten sind.

6) Jede Wurzel einer im Bereich der rationalen Zahlen Abelschen Gleichung ist im Körper einer Zahl $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ enthelten. (Satz von Kronecker.)

Jede Wurzel einer im Bereich von k Abelschen Gleichung ist im Körper einer Zahl $V\left(\frac{tw}{f}; \omega_1 \omega_2\right)$ enthalten.

7) Die Zahlen $(1 - e^{\frac{2\pi it}{f}})$ sind Primteiler von f, falls f Primzahl; Einheiten, falls f zusammengesetzt.

Die Zahlen $\dfrac{\mathrm{V}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\mathrm{V}\left(\frac{tw}{f}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ sind Primteiler von f, falls f Primideal; Einheiten, falls f zusammengesetzt ist.

8) Die Zerlegung der Primzahlen in $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ hängt nur von der Kongruenz-(Strahl)-Klasse (mod f), in der sie liegt, ab.

Die Zerlegung der Primideale von k in $\left(\mathrm{V}\left(\frac{tw}{f}\right), j(\omega)\right)$ hängt nur von der Strahlklasse (mod f) ab, in der es liegt.

Auch die Klassenzahlen der Körper $e^{\frac{2\pi it}{f}}$ resp. $\mathrm{V}\left(\frac{tw}{f}\right)$ lassen sich mit Hilfe der Funktionswerte der Exponential resp. elliptischen Funktion durch endliche Ausdrücke darstellen.

Die Beweismethoden sind vielfach dieselben, Z. B. wird der Beweis der Irreduzibilität in beiden Fällen fast in gleicher Weise erbracht, falls man die eindeutige Function :

$$\sqrt{\frac{\mathrm{V}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\mathrm{V}(z) - \mathrm{V}\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$$

zu Hilfe nimmt.

SUR LA

NOTION D'ORDRE D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

PAR S. STOÏLOW

(JASSY.)

On connaît le rôle important que jouent les ensembles de mesure nulle dans la théorie des fonctions en général, et tout particulièrement dans la théorie des fonctions discontinues. Un grand nombre de théorèmes concernant ces fonctions sont vrais, à un ensemble de mesure nulle près ; d'autres font intervenir dans leur énoncé ces mêmes ensembles.

Il peut donc être intéressant d'étudier de plus près cette catégorie d'ensembles de points, de les classer suivant leur structure en leur faisant correspondre des nombres ou des fonctions caractéristiques.

A ma connaissance, c'est M. Borel (1) qui le premier a entrepris l'étude systématique dont je viens de parler. Voici brièvement en quoi consiste la classification de M. Borel.

On considère un ensemble dénombrable de points *partout dense* dans un intervalle, soit par exemple l'ensemble des nombres rationnels compris dans cet intervalle. A chaque point de cet ensemble, appelé par M. Borel *fondamental*, on fait correspondre un segment σ_i ayant ce point pour milieu et tel que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i$$

soit convergente. Dans une seconde opération on remplace les σ_i par σ_i^1, respectivement intérieurs, et l'on continue ainsi de suite à former des séries, à termes positifs, convergentes

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^3, \text{ etc.}$$

(1) *Sur les ensembles de mesure nulle* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1913, ou *Leçons sur les fonctions monogènes*. Paris, Gauthier-Villars.)

M. Borel montre alors que, quelle que soit la rapidité avec laquelle ces intervalles décroissent quand leurs deux indices augmentent indéfiniment, il existe toujours un ensemble, de la puissance du continu, dont tous les points restent compris dans l'un des intervalles au moins, quand l'indice supérieur est aussi grand que l'on veut. Cet ensemble est de mesure nulle, si $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^p$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, et M. Borel l'appelle ensemble *régulier de mesure nulle*.

Il existe maintenant une série à termes positifs et convergente, qui converge *moins rapidement* que n'importe laquelle des séries

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^p.$$

Cette série, ou l'ordre d'*infinitude* de l'inverse de son reste, caractérisent l'ensemble de mesure nulle, et cet ordre est appelé par M. Borel *ordre asymptotique* de l'ensemble.

Cette classification est utile dans certaines recherches où l'on rencontre des ensembles réguliers. Il n'est cependant pas possible toujours de faire un choix entre les différentes séries moins rapidement convergentes que les séries $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^p$, pour caractériser l'ensemble, sans compter que le même ensemble régulier peut être obtenu d'une infinité de manières, et que l'on ne peut rien dire sur le rapport qui existe entre ces différentes manières.

J'ai indiqué dans une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris (1) une classification reposant sur un tout autre principe et ne dépendant nullement du mode de formation de l'ensemble de mesure nulle. Malheureusement elle présente d'autres inconvénients.

Je vais la présenter ici sous une forme plus générale qui permettra d'établir une très grande variété de catégories d'ensembles de mesure nulle.

Considérons donc un ensemble quelconque de mesure nulle formé de points situés sur le segment de droite compris entre 0 et 1.

Donnons-nous un nombre entier positif N et divisons le segment en N^2 parties égales.

Nous diviserons encore chaque sous-segment ainsi obtenu en N^2 parties égales et nous continuerons ainsi indéfiniment, ce qui revient à diviser le segment entier en N^{2p} (p entier positif quelconque) parties égales. J'appellerai *segment normal* tout sous-segment ainsi obtenu.

(1) *Comptes rendus*, 1919 (séance du 4 novembre).

Considérons d'autre part un carré de côté 1. Nous diviserons les côtés de ce carré en N parties égales, puis en N^2, N^3, etc. parties égales, et nous appellerons *carré normal* tout carré, intérieur au carré donné, dont les projections sur les côtés se confondent avec l'un des sous-segments de ces côtés obtenus de la manière indiquée.

Ceci étant, nous appellerons *correspondance normale* (*c*), une correspondance entre les points du segment et ceux du carré qui remplit les conditions suivantes :

1° A tout point, qui n'est pas un point frontière d'un carré normal, correspond un point, et un seul, qui n'est pas un point frontière d'un segment normal, et inversement.

2° A tous les points de cette catégorie, contenus dans un même carré normal de côté N^p, correspondent des points de la même catégorie contenus dans le même segment normal de côté N^{2p}, et inversement.

De telles correspondances existent : la courbe de Peano en est un exemple.

On peut remarquer que l'on n'impose aucune condition à la correspondance sur les points frontières des carrés normaux et des segments normaux. Ces points se correspondent seulement toujours entre eux.

Ceci posé, il est facile de voir que si l'on trace dans le carré une courbe quelconque rectifiable, il lui correspondra sur le segment un ensemble de mesure nulle. Plus généralement, il en sera ainsi de tout ensemble linéaire E déduit par une correspondance normale (*c*) d'un ensemble plan E_1, quelconque, de mesure *superficielle* nulle.

Nous partagerons les ensembles plans de mesure superficielle nulle en deux grandes catégories, savoir :

1° Ceux dont les projections sur les côtés du carré sont toutes les deux de mesure *linéaire* nulle ;

2° Ceux dont l'une au moins de ces deux projections est de mesure linéaire non nulle.

L'ensemble linéaire E sera dit du *premier ordre par rapport à une correspondance normale* (*c*), si l'ensemble E_1 qui lui correspond sur le carré est de la dernière de ces catégories.

On peut donner des définitions analogues pour les correspondances de segment à espace à un nombre quelconque de dimensions, et l'on conçoit aisément qu'il y a ainsi une infinité de manières de définir, au moyen de correspondances normales, un nombre que l'on peut appeler ordre de l'ensemble de mesure nulle.

Un ensemble linéaire de mesure nulle, quelconque, est donc, en quelque sorte, caractérisé par un nombre entier et une correspondance normale, et cela d'une façon absolument indépendante de son mode de formation.

Il y aura une infinité de couples formés d'une correspondance normale et d'un nombre entier appartenant au même ensemble, mais l'on pourra, par exemple, choisir celui, ou ceux, qui contiendront le nombre entier minimum, pour caractériser l'ensemble. Ce nombre ne peut pas toujours être réduit à l'unité par un choix convenable de la correspondance; il y a même des cas où il ne peut être jamais rendu *fini*.

La grande variété des correspondances normales peut donner une idée de la grande variété de structure des ensembles de mesure nulle.

SUR LES NOMBRES COMPLEXES GÉNÉRAUX

Par L. GUSTAVE DU PASQUIER

A NEUCHATEL (SUISSE)

[**1**] Les nombres complexes généraux ont été, pour les domaines de l'algèbre et de l'arithnomie, ce que la géométrie non euclidienne fut pour la science géométrique : l'occasion de revoir les principes fondamentaux et le point de départ d'une extension considérable du champ des recherches. Ici comme là, on reconnut que certains axiomes qu'on avait crus indispensables ne sont point logiquement nécessaires. Dans un système de nombres complexes généraux de la forme

$$x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \,(^1),$$

où les x_λ sont des nombres réels d'ailleurs quelconques, dits les *coordonnées* du complexe x, et les e_λ des symboles dits *unités relatives*, nous supposons définies : 1) L'égalité de deux complexes par l'égalité des coordonnées correspondantes ; 2) L'addition de deux complexes par l'addition des coordonnées correspondantes. Il en résulte de suite qu'elle est associative et commutative, et que son opération inverse la soustraction, toujours possible et univoque, s'opère par la soustraction des coordonnées correspondantes.

3) La multiplication par le fait que tout produit $e_i\, e_k$ de deux unités relatives peut être remplacé par une combinaison linéaire et homogène, à coefficients réels, des mêmes unités relatives,

$$e_i e_k = \sum_{\lambda}^{0\ldots n} c_{ik\lambda} \cdot e_\lambda \qquad (i, k, = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) Le signe $\equiv$ (doublement égal) signifie « égal par définition ».

Au sujet des $(n+1)^3$ constantes $c_{ik\lambda}$ qui entrent dans ces $(n+1)^2$ équations de définition, et qui *a priori* peuvent être des nombres réels quelconques, nous ferons l'hypothèse qu'elles remplissent les conditions nécessaires et suffisantes pour que : 1° La multiplication qu'elles définissent soit associative et distributive par rapport à l'addition. 2° Le système des nombres complexes contienne comme sous-groupe les nombres réels. 3° Dans le cas particulier où les coordonnées x_λ sont telles que le complexe x rentre dans ledit sous-groupe, l'addition et la multiplication des complexes se confonde avec l'addition et la multiplication des nombres réels.

Enfin, nous supposerons dans ce qui suit les coordonnées x_λ toutes rationnelles. Appelons *système* SD tout système de nombres complexes généraux où ces conditions sont remplies.

Dans le champ ainsi délimité, les complexes x forment, pour chacun des systèmes SD, un corps de nombres désigné par (R) dont on peut se proposer de faire l'arithnomie. Voici ce que l'on constate.

[**2**] Dans une infinité de systèmes, l'arithmétique classique se généralise telle quelle, presque sans difficulté, au corps (R). Subsumant tous ces systèmes sous un même concept général, j'en formerai une seule famille et dirai qu'ils constituent *la première catégorie arithnomique*.

Il se trouve une infinité d'autres systèmes SD, où l'arithmétique ordinaire ne se généralise pas directement. Déjà dans des cas très simples de nombres bicomplexes $a_0 + a_1 e_1$, on a découvert que, par exemple, la décomposition d'un nombre complexe entier en facteurs premiers, toujours possible, n'est pas toujours univoque. Dès lors, un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit. Toute l'arithnomie devient « irrégulière ». Pour rétablir des lois de divisibilité simples et générales, on érigea la théorie des idéaux. Elle s'est montrée d'une puissance insoupçonnée. Elle permet, en effet, de rétablir la théorie du plus grand commun diviseur, l'unicité de décomposition en facteurs premiers, etc., dans tous les corps de nombres algébriques dont on s'était occupé jusqu'ici. D'ailleurs, elle est applicable aux systèmes de la première catégorie arithnomique, où l'on a ainsi le choix entre deux méthodes dont l'une opère avec le concept d'idéal, tandis que l'autre s'en passe entièrement. De tous les systèmes de nombres SD où la théorie des idéaux conduit à une arithnomie « régulière », et qui ne font pas partie de la première catégorie arithnomique, j'en formerai une deuxième famille, *la deuxième catégorie arithnomique*.

On a cru jusqu'ici que c'étaient là les deux seules catégories existantes, du moins dans le champ restreint délimité à l'article 1. Or, il existe une infinité de systèmes à multiplication associative, commutative même, distributive par rapport à l'addition et contenant comme sous-groupe les nombres naturels, où même la théorie

des idéaux ne conduit pas à une arithmétique régulière. Si $\mathfrak{a}$ désigne un idéal non principal et qu'on forme la série de ses puissances successives :

$$\mathfrak{a},\quad \mathfrak{a}^2,\quad \mathfrak{a}^3,\quad \ldots,\quad \mathfrak{a}^n,\quad \ldots \textit{ ad inf.},$$

il peut arriver que cette suite, quelque loin qu'on la prolonge, ne contienne aucun idéal principal. La décomposition d'un idéal en idéaux premiers, toujours possible, n'est pas toujours univoque.

Faisons rentrer tous ces systèmes-là dans une même classe. Elle constituera *la troisième catégorie arithnomique*. Son existence est le premier point que je voulais signaler.

[3] Pour rétablir des lois de divisibilité simples, une seconde méthode, très différente de la théorie des idéaux, est apte à faire disparaître les anomalies. Elle consiste à définir d'une manière appropriée le nombre complexe *entier*.

D'après la définition habituelle, un nombre complexe x est dit « entier », lorsque toutes ses coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; x est réputé « non entier », si l'une au moins de ses coordonnées ne l'est pas. C'est ce que j'appelle *la définition lipschitzienne*. Quelque naturelle qu'elle soit ou qu'elle paraisse, elle n'est pas toujours appropriée. On pourrait citer de nombreux systèmes SD, où l'arithnomie basée sur cette définition est irrégulière. Or, dans ces cas-là, on peut rétablir la régularité par un simple changement de définition, en introduisant l'importante notion de domaine holoïde maximal, que je vais brièvement rappeler ici.

J'appelle *domaine holoïde* tout ensemble (H) de nombres ou de complexes quelconques jouissant des trois propriétés suivantes :

1) L'ensemble (H) contient une infinité d'éléments parmi lesquels le nombre 1.

2) On peut effectuer sur ces éléments l'addition, la soustraction et la multiplication, sans restriction et sans jamais sortir dudit domaine (H).

3) Le domaine possède une base finie; en d'autres termes, il est possible de choisir dans (H) un nombre fini d'éléments, disons $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tels que l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n$$

reproduise tous les éléments du domaine, et uniquement ceux-là, lorsqu'on fait parcourir à $m_1, m_2, \ldots m_n$, indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers, de $-\infty$ à $+\infty$.

Un domaine holoïde (H) est dit *maximal* s'il n'existe pas, *dans le corps de nombres envisagé*, un autre domaine holoïde qui contienne tous les éléments de (M) plus d'autres non contenus dans (M).

Ces quatre propriétés caractérisent les nombres entiers. Aussi posé-je la définition suivante : Un complexe rationnel x est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde maximal (M) du corps (R); x est réputé *non entier*, s'il n'est pas contenu dans (M). Peu importe donc que ses coordonnées x_λ soient entières ou fractionnaires.

Par de nombreux exemples, on peut se convaincre qu'une arithnomie qui est irrégulière avec la définition lipschitzienne, devient régulière avec la nouvelle définition du nombre complexe entier (1). La définition lipschitzienne, qui a l'avantage d'être toujours applicable, parce qu'elle s'en tient uniquement à la nature des coordonnées, n'est donc appropriée que dans les cas où l'ensemble des complexes à coordonnées entières constitue un domaine holoïde maximal (M).

[**4**] Tous les systèmes SD de nombres complexes ne possèdent pas dans leur domaine de rationalité (R) un domaine holoïde maximal (M), et l'on rencontre ici encore trois possibilités.

Premier cas. Le corps (R) contient un seul domaine holoïde maximal. La définition du nombre complexe entier est alors univoque et absolue. L'arithmétique qui en découle est régulière en général; sinon, elle peut être rendue telle par la théorie des idéaux.

Deuxième cas. Le corps (R) contient plusieurs domaines holoïdes maximaux,

$$(M),\quad (M_2),\quad (M_3),\quad \ldots,$$

voire même une infinité. La définition du nombre complexe entier est alors plurivoque et relative. Il y a plusieurs arithnomies du corps (R). Quand elles ne sont pas régulières, la théorie des idéaux permet de rétablir la simplicité arithmétique.

Troisième cas, et c'est un fait surprenant. Il y a des systèmes SD de nombres complexes sans domaine holoïde maximal (M). On peut dire alors que la définition du nombre complexe entier reste arbitraire, en un certain sens. Si l'on adopte dans ce cas la définition lipschitzienne, l'arithnomie qui en découle n'est pas régulière; en particulier, la décomposition d'un nombre complexe entier en facteurs premiers, toujours possible, n'est pas toujours univoque.

On appliquera la théorie des idéaux, pour éviter ces anomalies. Or, on constate qu'elle aussi est impuissante, dans ce cas, à rétablir la régularité. Le système

(1) Les quaternions en fournissent un exemple remarquable. (Voir A. Hurwitz. *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Berlin, 1919.) — J'ai indiqué le système le plus simple possible où ce phénomène se produit. (Voir *Nouvelles Annales de Mathém.*, IV, t. XVIII, 1918, « Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce », par L.-G. Du Pasquier.)

appartient à la troisième catégorie arithnomique. Dans ces systèmes-là, on ne peut donc arriver à une arithnomie régulière ni par les idéaux, ni par un changement de définition du nombre complexe entier.

Cette corrélation remarquable entre deux ordres de faits, absence de domaine holoïde maximal et inefficacité de la théorie des idéaux, est le second point que je voulais signaler.

[5] Quels sont les systèmes SD de nombres complexes qui présentent cette singularité? Adoptant la classification usuelle, nous rangerons dans une même classe tous les systèmes qui ont le même nombre n de coordonnées et sont en outre équivalents entre eux (1), et nous conviendrons de dire qu'ils *appartiennent* à la même *forme*, d'ordre n. Il existe, comme on sait, trois formes d'ordre 2, six formes d'ordre 3, vingt-quatre formes d'ordre 4, etc.

Pour les formes à deux et à trois unités relatives, j'ai déjà indiqué, après choix d'un représentant canonique pour chaque forme, quelle est la base du domaine holoïde le plus général dans le corps (R), et combien de ces domaines holoïdes sont maximaux (2); je puis donner le résultat analogue pour les formes à quatre unités relatives.

Les systèmes de nombres complexes dont le corps (R) est dépourvu de domaine holoïde maximal paraissent être la grande majorité. Une seule forme d'ordre 2 (sur les trois existantes) est sans domaine holoïde maximal; par contre, cette singularité se retrouve dans quatre formes d'ordre 3 (sur les six existantes), et dans dix-huit formes d'ordre 4 (sur les vingt-quatre existantes). J'indique ci-après, en supprimant les démonstrations, six systèmes de nombres tétracomplexes, non dépourvus de domaine holoïde maximal; chacun d'eux est un représentant d'une infinité de systèmes qui lui sont équivalents au sens de M. Cartan. Ils rentrent tous soit dans la première, soit dans la deuxième catégorie arithnomique (v. art. 2). Les hypothèses de l'article 1 étant maintenues, il suffit de définir la multiplication. Je le fais par un tableau carré à double entrée, indiquant le produit $e_i\, e_k$ des deux unités relatives e_i et e_k à l'intersection de la ligne (file horizontale) qui porte à gauche e_i et de la colonne (file verticale) qui porte en tête e_k.

Les n_0, n_1, n_2 et n_3 représentent des nombres entiers ordinaires qui prennent, de toutes les manières possibles et indépendamment les uns des autres, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

---

(1) Voir l'exposé de M. E. Cartan dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. I, vol. I, pp. 329-469; I, 5 « Nombres complexes », notamment art. 21 et 22.

(2) L.-G. Du Pasquier, « Sur la théorie des nombres complexes à coordonnées rationnelles » (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 48 (1920).

Les trois premiers systèmes de la liste ci-dessous sont irréductibles et commutatifs. Le complexe $e_0 + e_2$ y joue le rôle de l'unité principale, de sorte qu'on peut poser, pour ces trois premiers systèmes :

$$e_0 + e_2 = 1.$$

PREMIER SYSTÈME

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	e_0	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	e_2

Il possède dans son corps (R) un seul domaine holoïde maximal (M), lequel est à coordonnées fractionnaires. Les complexes *entiers* sont de la forme

$$\alpha \equiv \left(n_0 + \frac{n_1}{2}\right) e_0 + \frac{n_1}{2} e_1 + \left(n_2 + \frac{n_3}{2}\right) e_2 + \frac{n_3}{2} e_3.$$

En faisant l'arithmétique de ce système, on introduit α', conjugué de α, de telle manière que la norme $N(\alpha) \equiv \alpha\alpha'$ soit un nombre réel,

$$N(\alpha) = n_0 n_2 (n_0 + n_1)(n_2 + n_3).$$

DEUXIÈME SYSTÈME

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	$-e_0$	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	e_2

Son domaine de rationalité (R) possède un seul domaine holoïde maximal (M), lequel est à coordonnées fractionnaires. Les complexes *entiers* sont de la forme

$$n_0 e_0 + n_1 e_1 + \left(n_2 + \frac{n_3}{2}\right) e_2 + \frac{n_3}{2} e_3.$$

TROISIÈME SYSTÈME

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	$-e_0$	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	$-e_2$

Son domaine de rationalité (R) possède également un seul domaine holoïde maximal (M), lequel est constitué par l'ensemble des complexes à coordonnées entières. Les complexes *entiers* sont donc ici, conformément à la définition lipschitzienne, de la forme

$$n_0 e_0 + n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3.$$

Le QUATRIÈME SYSTÈME comprend les nombres tétracomplexes

$$a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

où la multiplication est définie par

$$e_\lambda^2 = e_\lambda ; \; e_\lambda e_\mu = 0, \quad \text{si} \quad \lambda \neq \mu \qquad (\lambda, \mu, = 1, 2, 3).$$

Ce système, réductible et commutatif, possède un seul domaine holoïde maximal dans le corps (R). C'est l'ensemble des complexes à coordonnées entières. Les nombres complexes *entiers* sont donc, ici aussi, de la forme

$$n_a + n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3.$$

Le CINQUIÈME SYSTÈME, constitué par les nombres tétracomplexes

$$b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3,$$

où la multiplication est définie par les formules

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1 ; \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3 ; \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1 ; \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2 ;$$

est irréductible et non-commutatif. Son domaine de rationalité (R) contient un seul domaine holoïde maximal, lequel est à coordonnées fractionnaires. C'est le système des quaternions. Tout quaternion *entier* est de la forme

$$\frac{n_0}{2} + \left(\frac{n_0}{2} + n_1\right) i_1 + \left(\frac{n_0}{2} + n_2\right) i_2 + \left(\frac{n_0}{2} + n_3\right) i_3.$$

Le SIXIÈME SYSTÈME, formé des nombres tétracomplexes de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

avec les règles de multiplication suivantes :

$$i_1^2 = i_2^2 = -i_3^2 = 1 ; \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3 ; \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = -i_1 ; \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = -i_2 ;$$

est irréductible et non-commutatif. Il a ceci de particulier que son domaine de rationalité (R) contient une infinité de domaines holoïdes maximaux,

$$(M_1), \quad (M_2), \quad (M_3), \quad \ldots\ldots$$

L'ensemble des complexes à coordonnées entières, soit le domaine holoïde

$$(H) \equiv (1, i_1, i_2, i_3),$$

n'est pas maximal, de sorte que la définition lipschitzienne conduit à une arithmétique irrégulière. L'un des domaines holoïdes maximaux a comme base

$$\left(1, \quad \frac{1+i_1}{2}, \quad ai_2, \quad \frac{i_2+i_3}{2a}\right),$$

où $a \neq 0$ représente un nombre entier positif ou négatif, arbitrairement choisi, mais fixe. On obtient donc l'une des arithnomies du corps (R) en envisageant comme nombres *entiers* tous les complexes de la forme

$$n_0 + \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{2} i_1 + \left(an_2 + \frac{n_3}{2a}\right) i_2 + \frac{n_3}{2a} i_3,$$

et seulement ces complexes-là, où n_0, n_1, n_2 et n_3 prennent, de toutes les manières possibles et indépendamment les unes des autres, les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

[6] Les dix-huit autres formes sont dépourvues de domaine holoïde maximal. Dans sept d'entre elles, les systèmes sont à multiplication non-commutative; dans onze, à multiplication commutative. Nous supposerons toujours les coordonnées, désignées par x_0, x_1, x_2, x_3, réelles et en particulier rationnelles.

Le SEPTIÈME SYSTÈME se compose des complexes

$$x \equiv x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

où la multiplication est définie par

$$e_2^2 = e_2; \quad e_3^2 = e_3; \quad e_1^2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = 0.$$

Ce système est réductible et à multiplication commutative.

Dans le HUITIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_2^2 = e_3^2 = e_2; \quad e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_3; \quad e_1^2 = e_1 e_2 = e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2 e_1 = 0.$$

Le système est réductible.

Dans le NEUVIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_2^2 = -e_3^2 = e_2; \quad e_2e_3 = e_3e_2 = e_3; \quad e_1^2 = e_1e_2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_1 = 0.$$

Le système est réductible.

Dans le DIXIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_1^2 = 1; \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_3; \quad e_1e_3 = e_3e_1 = e_2; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est réductible et équivalent à celui que définissent les formules

$$e_1^2 = e_1; \quad e_1e_3 = e_3e_1 = e_3; \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = e_2^2 = e_3^2 = 0.$$

Dans le ONZIÈME SYSTÈME, la multiplication des complexes est commutative et définie par

$$e_1^2 = -1; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0; \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_3; \quad e_1e_3 = e_3e_1 = -e_2.$$

Le système est irréductible.

Dans le DOUXIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_1^2 = e_2; \quad e_3^2 = e_3; \quad e_2^2 = e_1e_2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est réductible.

Dans le TREIZIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_1^2 = e_2; \quad e_1e_2 = e_2e_1 = e_3; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est irréductible.

Dans le QUATORZIÈME SYSTÈME, la multiplication n'est pas commutative, ni dans aucun système appartenant à la même forme. Dans le système canonique, elle est définie par

$$e_1^2 = 1 - e_3; \quad e_3^2 = e_3; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_2; \quad e_2^2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Ce système est réductible.

Dans le QUINZIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = 1; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_2; \quad e_1e_3 = e_3e_1 = e_3; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est irréductible.

Dans le SEIZIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_3^2 = e_3; \quad e_1^2 = e_2^2 = 0; \quad e_1e_2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est réductible.

Dans le DIX-SEPTIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3; \quad e_2^2 = k.e_3; \quad e_3^2 = e_1e_3 = e_2e_3 = e_3e_2 = e_3e_1 = 0.$$

On obtient une infinité de systèmes, suivant la valeur qu'on attribue au paramètre k. Si l'on veut obtenir un domaine de rationalité (R) à quatre unités relatives, on prendra pour k un nombre rationnel. Le système est irréductible.

Dans le DIX-HUITIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3; \quad e_3^2 = 0; \quad e_ie_k = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k \quad (i, k, = 1, 2, 3).$$

Le système est irréductible.

Dans le DIX-NEUVIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et définie par

$$e_1^2 = e_2; \quad e_2^2 = e_3^2 = 0; \quad e_ie_k = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k \quad (i, k, = 1, 2, 3).$$

Le système est irréductible.

Dans le VINGTIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = -1; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3; \quad e_1e_3 = -e_3e_1 = -e_2; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est irréductible.

Dans le VINGT ET UNIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = 1; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3; \quad e_1e_3 = -e_3e_1 = e_2; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est irréductible.

Dans le VINGT-DEUXIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3; \quad e_1e_3 = e_3e_1 = e_2e_3 = e_3e_2 = 0.$$

Le système est irréductible.

Dans le VINGT-TROISIÈME SYSTÈME, la multiplication est non-commutative et définie par

$$e_1^2 = 1 ; \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_2 ; \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1 = e_3 ; \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = 0 .$$

Le système est irréductible.

Dans le VINGT-QUATRIÈME SYSTÈME, la multiplication est commutative et se résume en cette règle : tout produit de deux unités relatives est nul; en formule :

$$e_i e_k = 0 \qquad (i, k, = 1, 2, 3).$$

Le système est irréductible.

Si l'on attribuait au paramètre k qui figure dans le dix-septième système une valeur irrationnelle, cela reviendrait à envisager des nombres complexes à cinq unités relatives et avec coordonnées rationnelles. En donnant à k une valeur fixe et rationnelle, d'ailleurs arbitraire, les dix-neuf systèmes énumérés dans cet article 6 ont le corps (R) dépourvu de domaine holoïde maximal et représentent dix-huit formes différentes.

Tous les systèmes qu'elles embrassent contiennent des *racines de zéros* ou nombres *pseudonuls*, c'est-à-dire des complexes $x \neq 0$ tels que $x^n = 0$ à partir d'un certain exposant n. Cependant, racines de zéros et domaine holoïde maximal ne s'excluent pas toujours. La présence de nombres pseudonuls est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour l'absence de domaine holoïde maximal.

CERTAIN ITERATIVE PROPERTIES OF BILINEAR OPERATIONS

By Norbert WIENER

The study of the logical foundations of a given mathematical system is not complete when a single set of postulates is discovered. It demands, as a matter of fact, the study of all the sets of postulates in terms of which the system may be determined, and of the manner in which the system may be determined in terms of them. In particular, the question arises, what sets of undefined notions and postulates of a given sort enable the determination of a given system in a given manner.

We shall discuss a question of this sort with respect to algebra. Algebra, for the purposes of the present paper, will be regarded as the theory of all algebraic operations obtainable as implicit functions from rational operations with integral coefficients. Such operations may be obtained from the variables they contain by a finite sequence of operations of addition, subtraction, multiplication and division. The autor has pointed out that there is a single operation in terms of which addition, subtraction, multiplication, and division can be defined by a finite sequence of iterations(1), and has given a set of postulates for fields in terms of this. This is the operation $x\,|\,y = 1 - x/y$. With the appropriate set of conventions concerning exceptional cases, the four species may be defined in the manner indicated in the following table :

$$0 = x\,|\,x,$$
$$1 = 0\,|\,x,$$
$$x/y = (x\,|\,y)\,|\,1,$$
$$xy = x/(1/y),$$

if this is significant, and 0 otherwise,

$$x \curvearrowright y = x(y\,|\,x),$$
$$x - y = (a \curvearrowright y) \curvearrowright (a \curvearrowright x),$$
$$x + y = x - (0 - y).$$

(1) *Trans. Am. Math. Soc.*, April, 1920.

The question which I now wish to raise is, what other operations will serve in the same manner to generate all rational operations with integral coefficients and will thus serve as undefined notions for a set of postulates for fields or for real algebra in a way analogous to $1 - x/y$.

I have solved this problem completely(1) for the case where the operation in question is a rational operation with rational coefficients, and is restricted to the form

$$\frac{A + Bx + Cy + Dxy}{E + Fx + Gy + Hxy}.$$

Such an operation will be called a rational bilinear operation. By a linear transformation with rational coefficients, every rational bilinear operation that generates by iteration all rational operations with rational coefficients may be transformed either into

$$\frac{x - y}{x + Ay} \qquad \text{or} \qquad \frac{y - x}{y + Ax}$$

where A is a rational number other than -1, or into

$$\frac{n(x - y + xy)}{ny + xy}$$

where n is any integer other than 0. Conversely, every operation of these forms, as well as every operation obtainable from them by a linear transformation with rational coefficients, generates by its iteration all rational operations with rational coefficients.

There is a certain equivalence between any two operations of the above forms which we may call iterative equivalence. We shall define two operations as iteratively equivalent if each can be generated by the iteration of the other. The general question thus arises, closely connected with the theory of sets of postulates for algebra, given two operations, how can it be determined from their form whether they are equivalent or not. This question is as yet unsolved, even in the simple case where both operation are bilinear. The author, however, has been able to find in one very particular case a necessary condition for the iterative equivalence of two bilinear operations.

We shall start with a few definitions. We shall write

$$\varphi(x, y) = \frac{A_\varphi + B_\varphi x + C_\varphi y + D_\varphi xy}{E_\varphi + F_\varphi x + G_\varphi y + H_\varphi xy}$$

(1) *Annals of Mathematics*, march, 1920.

Δ_φ will be defined as

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} A_\varphi & B_\varphi + C_\varphi \\ E_\varphi & F_\varphi + G_\varphi \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_\varphi & D_\varphi \\ E_\varphi & H_\varphi \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_\varphi & D_\varphi \\ E_\varphi & H_\varphi \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_\varphi + C_\varphi & D_\varphi \\ F_\varphi + G_\varphi & H_\varphi \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

φ will be said to be general if $\Delta_\varphi \neq 0$ and if the equation

$$A_\varphi + (B_\varphi + C_\varphi - E_\varphi)x + (D_\varphi - F_\varphi - G_\varphi)x^2 - H_\varphi x^3 = 0$$

has three distincts roots. The author has demonstrated in a paper in the course of publication in the *Bulletin of the American Mathematical Society* that if two bilinear operations φ and ψ are iteratively equivalent, and if

$$A_\varphi,\ B_\varphi + C_\varphi,\ D_\varphi,\ E_\varphi,\ F_\varphi + G_\varphi, \text{ and } H_\varphi$$

on the one hand, and

$$A_\psi,\ B_\psi + C_\psi,\ D_\psi,\ E_\psi,\ F_\psi + G_\psi, \text{ and } H_\psi,$$

on the other, form sets of integers relatively prime among themselves, then

$$\begin{aligned} A_\varphi &= A_\psi, \\ B_\varphi + C_\varphi - E_\varphi &= B_\psi + C_\psi - E_\psi, \\ F_\varphi + G_\varphi - D_\varphi &= F_\psi + G_\psi - D_\psi, \\ H_\varphi &= H_\psi . \end{aligned}$$

As has been said, this only goes a small way toward the solution of the problem of iterative equivalence. The investigation of this problem has been rendered very difficult by the fact that it has so far proved impossible to find methods of more than a very limited range of application.

SUR LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ET SUR LES PROPRIÉTÉS DES GÉODÉSIQUES

PAR M. J. HADAMARD

Le potentiel élémentaire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

sur lequel repose la théorie de l'équation $\Delta u = 0$, trouve sa généralisation naturelle dans la *solution élémentaire* d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$\mathcal{F}(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \tag{1}$$

(les a_{ik}, les b_i et c étant des fonctions données des variables $x_1, \ldots, x_m$), solution qui avait été formée par plusieurs géomètres (MM. Picard, Hilbert, Hedrick, Fredholm, Holmgren) pour le cas où les a_{ik} sont constants et que j'ai précédemment obtenue [1] dans le cas général. Cette quantité

$$u = \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} \tag{2}$$

possède une propriété d'échange, dont la symétrie du potentiel élémentaire ordinaire et la relation d'échange de la fonction de Riemann [2] sont des cas particuliers.

---

[1] *Ann. Ec. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, pp. 535-556, pour le cas des coefficients analytiques principalement visé ici ; pour le cas contraire, voir ma récente note des *C. R. Ac. Sc.*, t. CLXX, p. 149 (19 janvier 1920).

[2] Voir Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II (2e édit.), p. 81.

La formation de la quantité (2), telle que je l'ai proposée dans le travail cité, est essentiellement liée à la théorie des géodésiques. Par le point déterminé $O(a_1, \ldots, a_m)$ de l'espace à m dimensions (choisi comme « pôle ») on mène toutes les lignes géodésiques correspondant à l'élément linéaire

$$d\sigma = \sqrt{H(dx_1, \ldots dx_m; x_1, \ldots x_m)},$$

H étant (en $dx_1, \ldots, dx_m$) la forme quadratique adjointe de la forme $A = \Sigma a_{ik} \gamma_i \gamma_k$ caractéristique de (1), divisée par le discriminant de A. Ces géodésiques sont définies par

$$\frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \gamma_i}} = -\frac{d\gamma_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}} = ds, \tag{3}$$

$M(x_1, \ldots, x_m)$ étant un point suffisamment voisin de O, on peut le joindre à O par une géodésique déterminée de l'espèce qui vient d'être définie. Il en sera ainsi tant qu'un certain jacobien

$$J = \frac{D(x_1, \ldots x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)}, \tag{4}$$

(déterminant fonctionnel des x par rapport à s et aux $m-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ dont dépend la direction initiale de la géodésique en O), n'est pas nul.

La quantité Γ qui figure au dénominateur de (2) n'est autre que le carré de la distance géodésique MO, c'est-à-dire de la valeur minima de l'intégrale

$$\int \sqrt{H(dx_1, \ldots, dx_m; x_1, \ldots, x_m)}$$

entre ces deux points.

J'obtiens ensuite le numérateur U, si m est impair, par un développement en série de la forme

$$U = U_0 + U_1 \Gamma + \ldots + U_h \Gamma^h + \ldots .$$

C'est sur une propriété remarquable des coefficients de ce développement que

je voudrais attirer l'attention. Je rappelle qu'on les obtient par les formules successives suivantes (1) :

$$(5)\quad \begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\, c^{-\int_0^s \frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2}+2p-2\right)ds} = \dfrac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\, e^{-\int_0^s \frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2}-m\right)ds}, \\ U_1 = -\dfrac{U_0}{s}\displaystyle\int_0^s \frac{1}{4(p+1)}\,\frac{\mathcal{F}(U_0)}{U_0}\,ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_h = -\dfrac{U_0}{4(p+h)s^h}\displaystyle\int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0}\,\mathcal{F}(U_{h-1})\,ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dans lesquelles

$$M = \mathcal{F}(\Gamma) - c\Gamma, \quad \text{et} \quad p = \frac{m-2}{2},$$

pendant que Δ est le discriminant de A au point O.

Si m est pair, la solution élémentaire est

$$(2')\qquad \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} + \mathfrak{U}\log\Gamma,$$

les coefficients successifs de U et de $\mathfrak{U}$ se calculant par des formules identiques à (5), à des coefficients numériques près.

Or ces fonctions successives paraissent liées d'une manière certaine à l'équation (2); car on constate que *chacune d'elles possède la propriété d'échange* précédemment signalée pour la quantité (2) elle-même.

C'est ce que l'on démontre par une nouvelle application de cette « méthode de descente » (3) qui semble éclairer remarquablement plusieurs propriétés des équa-

---

(1) Mémoire cité des *Ann. Ec. Norm. sup.*, pp. 548-549, à l'introduction près, dans la première formule, du facteur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$.

(2) Notons toutefois qu'elles ne restent pas invariantes par le changement de $\mathcal{F}(u)$ en $\mu\mathcal{F}(u)$ ou en $\mathcal{F}(\mu u)$, μ désignant une fonction donnée des x.

(3) Voir mon Mémoire des *Acta Math.*, t. XXXI (1908) et ma Note précédemment citée des *Comptes rendus*.

tions qui nous occupent. En même temps que l'équation (1), considérons l'équation à $(m+1)$ variables :

$$\mathcal{F}_1(u) = \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1'}$$

(z étant une variable supplémentaire) et sa solution élémentaire de pôle $(a_1, \ldots, a_m, C)$ (où C est une constante arbitraire). La quantité analogue à Γ étant ici $\Gamma' = \Gamma - (z-C)^2$, le numérateur de cette solution se développe (si, pour fixer les idées, on suppose m pair) sous la forme

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1[\Gamma - (z-C)^2] + \ldots + \mathfrak{U}_h[\Gamma - (z-C)^2]^h + \ldots .$$

Les nouveaux coefficients $\mathfrak{U}_h$ sont indépendants de z et de C et ne sont autre chose que les U_h, à des facteurs numériques près.

L'égalité qui exprime la relation d'échange pour $\mathfrak{U}$ doit évidemment être une identité par rapport à z, ou, ce qui revient au même, par rapport à

$$\Gamma - (z-C)^2, \text{ d'où la conclusion annoncée.}$$

Pourrait-on démontrer ce même théorème directement? On y arrive assez aisément en ce qui concerne U_0, en utilisant la formule facile à démontrer

$$\Delta_2 \Gamma = 2\left(1 + s\frac{d\log J}{ds}\right),$$

où Δ_2 est le paramètre différentiel de Beltrami, relatif à l'élément linéaire H, et J la quantité (4).

On peut, en effet (avec les auteurs, tels que MM. Cotton et Levi-Civita, qui ont traité des transformations ponctuelles des équations aux dérivées partielles), écrire l'équation donnée sous la forme

$$\Delta_2 u + \sum_i b'_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \tag{6}$$

les b'_i étant de nouveaux coefficients

$$b'_i = b_i - \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k},$$

également fonctions des x. Si alors on introduit les quantités (toujours fonctions des mêmes variables)

$$B_i = \sum_k a_{ik} b'_k = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial b'_i},$$

on trouve immédiatement

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \sqrt{\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 : \left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)} \, e^{-\frac{1}{2}\int_0^M \Sigma B_i dx_i},$$

(l'exposant de e étant une intégrale prise suivant la géodésique OM, et $\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0$ désignant la limite, finie et non nulle, vers laquelle tendrait $\frac{J}{s^{m-1}}$ si M tendait vers O suivant cette géodésique); puis, après quelques transformations,

$$U_0 = s^{\frac{m}{2}} \sqrt{\left|\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{J}}\right|} \, e^{-\frac{1}{2}\int_0^M \Sigma B_i dx_i},$$

dans laquelle, pour définir $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{D}$, on suppose l'intégrale générale du système (3) (et non plus seulement la géodésique la plus générale issue de O) exprimée à l'aide de s et de $2m$ constantes arbitraires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m}$, moyennant quoi

$$\mathfrak{J} = \frac{D(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_m)}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{2m})},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D(x_1, \ldots, x_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{2m})}.$$

Cette dernière expression de U_0 met bien en évidence la propriété annoncée; car $\mathfrak{J}$ ne change évidemment pas (au signe près) lorsqu'on permute les x avec les a; $\mathfrak{D}$ est, comme il est classique en Mécanique analytique (1), constant pour chaque solution déterminée du système canonique (3); de sorte qu'il a la même valeur en O et en M; enfin, dans le dernier facteur (facteur exponentiel), les b'_i, et par conséquent les B_i, changent de signe par le passage de l'équation (6) à son adjointe, pendant que l'échange de O avec M change le sens d'intégration.

(1) Cela revient à dire (voir Poincaré, les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, § 254) que 1 est un multiplicateur du système (3).

L'étude, du même point de vue, des coefficients suivants U_1, U_2, ... semble, au contraire, faire intervenir des propriétés plus cachées des géodésiques. A ce titre même, elle serait intéressante et mérite peut-être d'être signalée à l'attention des géomètres. On peut se demander si l'on ne peut pas rencontrer là un de ces cas où l'application éclaire la théorie et y fait découvrir ce qu'on aurait difficilement aperçu sans elle.

SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

DE LA

THÉORIE DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

PAR T. TAKAGI

(TOKIO)

Dans un Mémoire qui vient d'être publié comme un des derniers cahiers du Journal de notre Faculté(1), j'ai exposé une théorie du corps algébrique relativement abélien. Ce Journal étant peu connu parmi nos collègues, je profite de l'occasion du Congrès pour vous communiquer les principaux résultats auxquels je suis arrivé.

La notion d'idéaux équivalents et celle de la classe d'idéaux ont éprouvé dans ces derniers temps des généralisations considérables, notamment par Henri Weber.

Deux idéaux a, b d'un corps algébrique k sont équivalents et appartiennent à la même classe au sens le plus large du mot, quand il existe dans le corps k un nombre x tel que

$$a = xb,$$

c'est-à-dire que le quotient des idéaux $\frac{a}{b}$, est un idéal principal fractionnaire (x).

Cette définition de la classe d'idéaux est fondée sur ce fait que les idéaux principaux (x) d'un corps k forment dans leur ensemble un groupe par multiplication.

On voit immédiatement que les classes d'idéaux peuvent être définies plus généralement en soumettant les quotients $\frac{a}{b}$ aux autres restrictions, pourvu qu'ils forment toujours un groupe par multiplication.

En envisageant la totalité des idéaux entiers et fractionnaires d'un corps k qui sont premiers relativement à un idéal donné m (l'*excludent* de Weber), qui forment

(1) T. Takagi, *Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers* (Journal of the College of Science, Tokio Imperial University, vol. 41, art. 9).

en leur ensemble un groupe G par multiplication, soit O un sous-groupe de celui-ci. On peut alors répartir les idéaux de G en un nombre fini ou infini de complexes d'idéaux de la forme Oa, qui sera une classe d'idéaux suivant le groupe O, ce dernier étant la classe principale.

Pour être féconde, on doit soumettre le groupe O suivant lequel les classes sont définies aux restrictions convenables. Celle qui s'est montrée comme la plus importante est la suivante, que je désignerai comme la *condition de Dirichlet :*

Soit a un idéal entier quelconque de notre corps et soit $\mathrm{T}(n)$ le nombre des idéaux principaux contenus dans O qui soient divisibles par a, et dont les normes soient inférieures à n. Il faut alors qu'on ait

$$\operatorname{Lim} \frac{\mathrm{T}(n)}{n} = \frac{c}{\mathrm{N}(a)},$$

où c est une constante positive dépendant seulement de G et O.

De cette condition il s'ensuit que le nombre de classes est fini.

Soit maintenant K un corps supérieur relativement normal de degré relatif n.

Celles des classes du corps de fond k qui contient la norme d'idéal du corps supérieur forment évidemment un sous-groupe H du groupe complet G de classes du corps k, dont l'index (G : H) n'est jamais supérieur au degré relatif n. C'est là une conséquence importante de la condition de Dirichlet.

Si toutefois le degré relatif du corps supérieur K est égal à l'index (G : H) du groupe de classes correspondant H, j'appellerai alors le corps supérieur K *le corps de classes* attaché au groupe de classes H, en modification d'une terminologie introduite par H. Weber.

La condition de Dirichlet est remplie, quand on prend pour O le groupe d'idéaux principaux définis par les nombres α du corps k satisfaisant à la congruence : $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$, m étant un idéal quelconque de k.

On peut aussi assujettir ces nombres α aux certaines restrictions concernant les signes que prennent les nombres réels conjugués à α, restrictions qui se conforment à la propriété du groupe, par exemple, d'avoir la norme positive, ou d'être totalement positif(1).

Dans ce qui suit, il ne s'agira que de classes d'idéaux définis de cette manière par voie de congruence avec des restrictions de signes.

Ces préliminaires étant posés, j'énonce quelques théorèmes généraux sur les corps relativement abéliens par rapport au corps donné k, en vous renvoyant pour la démonstration à mon mémoire que j'ai cité antérieurement.

---

(1) Ces conditions peuvent être posées d'une manière beaucoup plus générale; voir le mémoire cité.

Le premier de ces théorèmes fondamentaux est le théorème d'existence du corps de classes, que voici :

Étant donné dans le corps de fond k un groupe de classes H suivant le module m, il existe toujours un corps de classes, et un seul, attaché à celui-là; il jouit des propriétés suivantes :

1° Il est relativement abélien par rapport au corps de fond k;

2° Le groupe de Galois du corps relatif K/k est holoédriquement isomorphe au groupe complémentaire G/H du groupe de classes;

3° Aucun idéal premier de k, ne divisant pas la module de m, n'entre comme facteur dans le discriminant relatif au corps supérieur K;

4° Tout idéal premier du corps de fond k qui appartient au groupe de classes H, et celui-ci seulement, se décompose en facteurs premiers du premier degré relatif dans le corps supérieur K. Plus généralement, tout idéal appartenant au même complexe Hc se décompose de la même manière en facteurs premiers dans le corps supérieur K.

C'est là un théorème qui contient comme cas particulier celui qui a été énoncé le premier par M. Hilbert, dans le cas où le module m est égal à 1.

Également important est le théorème réciproque qui s'énonce ainsi :

Soit K un corps donné relativement abélien par rapport au corps de fond k, et soit m le discriminant relatif. En définissant les classes d'idéaux dans ce dernier corps suivant le groupe d'idéaux O(m)(1), — je désignerai ainsi le groupe d'idéaux principaux définis par les nombres α totalement positifs et satisfaisant à la congruence : $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$, — il existe toujours un groupe de classes H, tel que le corps supérieur K est le corps de classes attaché à celui-là.

C'est ainsi que tous les corps supérieurs relativement abéliens par rapport à un corps algébrique donné et d'un autre côté tous les groupes de classes d'idéaux de ce corps se mirent en correspondance univoque et réciproqne et de telle manière de plus que les corps supérieurs K et K′ étant attachés respectivement aux groupes de classes H et H′, K contiendrait K′ comme sous-corps, lorsque H serait contenu comme sous-groupe dans H′, et réciproquement.

En désignant alors par K(m) *le corps de classes complet suivant le module* m, c'est-à-dire le corps de classes attaché au groupe O(m) lui-même, on voit que tout corps supérieur relativement abélien est contenu dans un corps K(m), quand m est divible par le discriminant relatif du corps supérieur.

---

(1) Cette condition suffisante est beaucoup plus générale qu'il n'est nécessaire. On trouvera la condition plus précise dans mon Mémoire cité.

Outre le corps de nombres rationnels, les corps quadratiques imaginaires jouissent de ce caractère spécial que tous les corps relativement abéliens se ramènent à certains corps simples, dépendant des idéaux premiers du corps de fond. On peut prendre pour ceux-ci les corps :

$$\mathrm{K}(l^n), \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et

$$\mathrm{K}(l^e p), \qquad (e = 3 \text{ ou } 2),$$

où l est un facteur premier de 2, p un idéal premier différent de l, et e est égal à 3 ou à 2, suivant que le discriminant du corps de fond est pair ou impair.

J'ai démontré dans mon Mémoire cité que ces corps élémentaires peuvent être définis par les équations de la division des périodes de la fonction $sn(u;\omega)$ de Jacobi, lorsque ω est un irrationnel quadratique convenablement choisi dans le corps de fond, — en confirmation d'une conjecture célèbre de Kronecker, qui n'a été achevée qu'en partie par H. Weber et M. R. Fueter (dans son mémoire de *Math. Annalen*, tome 75).

Parlons encore d'une autre conséquence de notre théorème d'existence du corps de classes. Comme il a été démontré par H. Weber et par M. E. Landau, l'existence d'un corps de classes une fois établie, il s'ensuit qu'il y a un nombre infini d'idéaux premiers du premier degré dans toutes les classes d'idéaux d'un corps algébrique quelconque, que, de plus, les nombres de ces idéaux premiers, en les comptant suivant la norme croissante, sont asymptotiquement égaux pour toutes les classes d'idéaux. C'est là une généralisation d'un théorème classique de Dirichlet sur les nombres premiers rationnels contenus dans une série arithmétique.

En m'arrêtant ici, je me permets d'attirer votre attention sur un problème important de la théorie des nombres algébriques : à savoir, rechercher s'il est possible de définir la classe d'idéaux d'un corps algébrique de telle manière que le corps supérieur relativement normal mais non abélien puisse être caractérisé par le groupe correspondant de classes d'idéaux du corps de fond.

C'est ce que l'on n'achève pas, nous venons de le voir, par voie de congruence.

SUR UNE CLASSE D'ENSEMBLES PARFAITS DISCONTINUS

EN RELATION AVEC LES FONCTIONS ADMETTANT UNE DÉRIVÉE SECONDE GÉNÉRALISÉE

Par ARNAUD DENJOY

Sur un intervalle $a'b'$, soit un ensemble parfait P, d'extrémités a et b, et tel que les semi-contigus $a'a$, bb' bordant P soient au moins égaux à tout contigu quelconque de P, l'un des deux semi-contigus étant en outre au plus égal à $b - a$(1).

Nous dirons que P *présente le caractère* (A) *si deux intervalles contigus ou semi-contigus quelconques de* P *sont séparés par un segment au moins égal en longueur au plus petit de ces deux intervalles.*

λ_0 étant un nombre positif donné, soient α_1 un point quelconque de P, et $\beta'_1 = \alpha_1 + \lambda_0$. (On pourrait prendre le signe — devant λ_0 à la condition de continuer ci-après constamment ainsi.)

Si β'_1 n'est pas sur P, mais si β'_1 est à gauche de b, soit β_1 l'extrémité *droite* de l'intervalle contigu u''_1 contenant β'_1. (On pourrait prendre pour β_1 l'extrémité gauche de u''_1, et alors on envisagerait ci-après constamment des extrémités gauches de contigus). Soit α'_1 déterminé par $\alpha'_1 + \lambda_0 = \beta_1$.

Si α'_1 n'est pas sur P, soit α_2 l'extrémité droite de l'intervalle contigu u'_1 contenant α'_1. Nous construisons $\beta'_2 = \alpha_2 + \lambda_0$; et ainsi de suite.

Les opérations ne s'arrêtent que dans deux cas; ou bien, si un point β'_p est à la droite de b; ou bien, avant que cette circonstance ne se produise, si nous trouvons un point accentué, α'_p ou β'_p, appartenant à P. Dans le cas où les opérations ne s'arrêtent pas, il est évident que les suites (α_p, α'_p) et (β_p, β'_p) tendent respectivement vers deux points γ et δ appartenant à P et dont la distance est λ_0. Un tel

---

(1) Je distingue l'*intervalle ab* (ensemble $a < x < b$) du *segment ab* (ensemble $a \leqslant x \leqslant b$). Un *intervalle contigu* à l'ensemble parfait P est un intervalle sans points communs avec P, mais dont les deux extrémités appartiennent à P. Un intervalle sans point commun avec P, mais dont une extrémité et une seule appartient à P sera dénommé intervalle *semi-contigu* à P.

couple est donc mis en évidence dans tous les cas, sauf si un point β'_p vient à droite de b.

Considérons les deux suites constituées de points distincts (en nombre impair par exemple, la parité étant indifférente) :

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha'_n, \alpha_{n+1}, \quad \text{et} \quad \beta'_1, \beta_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n, \beta_n, \beta'_{n+1}.$$

Deux lettres α, β occupant le même rang dans les deux suites, ont le même indice, l'une est accentuée, l'autre ne l'est pas, et elles désignent deux points dont la distance est λ_0.

Je dis que chacun des intervalles intermédiaires de la suite $(\alpha_1, \alpha'_1)(\alpha'_1, \alpha_2) \ldots, (\alpha'_n, \alpha_{n+1})$, surpasse en longueur l'un au moins des deux intervalles qui lui sont adjacents dans la même suite.

Nous montrerons successivement : 1° que l'intervalle (α_p, α'_p) surpasse l'un au moins des deux intervalles $(\alpha'_{p-1}, \alpha_p)$ et $(\alpha'_p, \alpha_{p+1})$ si $p = 2 \ldots$ ou n; et 2° que l'intervalle $(\alpha'_p, \alpha_{p+1})$ surpasse l'un au moins des deux intervalles (α_p, α'_p) et $(\alpha_{p+1}, \alpha'_{p+1})$ pour $p = 1 \ldots$, ou $n - 1$.

Les lettres α, β accentuées désignent des points étrangers à P. Soient respectivement u'_p et u''_p les intervalles contigus à P contenant α'_p et β'_p. u'_p a pour extrémité droite α_{p+1}, comme u''_p a pour extrémité droite β_p. On a donc

$$u'_p > \alpha'_p \alpha_{p+1} \quad \text{et} \quad u''_p > \beta'_p \beta_p.$$

1° L'intervalle u'_{p-1} est séparé de $u'_p (p = 2 \ldots, n)$ par un segment s'_p dont l'extrémité gauche est α_p et dont l'extrémité droite est intérieure à l'intervalle $\alpha_p \alpha'_p$, puisque α'_p est intérieur à u'. On a évidemment

$$u'_{p-1} > \alpha'_{p-1} \alpha_p, \qquad u'_p > \alpha'_p \alpha_{p+1}, \qquad s'_p < \alpha_p \alpha'_p.$$

Mais, P présentant le caractère (A), s'_p est au moins égal en longueur à l'un des deux intervalles u'_{p-1} et u'_p. Donc, $\alpha_p \alpha'_p$ surpasse *a fortiori* l'un au moins des deux intervalles adjacents $\alpha'_{p-1} \alpha_p$ et $\alpha'_p \alpha_{p+1}$.

2° On démontre exactement de même que, des deux intervalles $\beta'_p \beta_p$ et $\beta'_{p+1} \beta_{p+1}$ contenus respectivement dans u''_p et u''_{p+1}, l'un au moins est surpassé en longueur par $\beta_p \beta'_{p+1}$, qui est supérieur au segment s''_p séparant u''_p de u''_{p+1}. Mais

$$\beta'_p \beta_p = \alpha_p \alpha'_p, \qquad \beta_p \beta'_{p+1} = \alpha'_p \alpha_{p+1}, \qquad \beta'_{p+1} \beta_{p+1} = \alpha_{p+1} \alpha'_{p+1}.$$

La seconde partie de l'énoncé est donc établie.

Il suit de là que *les intervalles séparés par la subdivision* $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_n, \alpha_{n+1}$, *vont constamment en décroissant, si le premier surpasse le second.* Car alors, le

second doit surpasser le troisième (pour surpasser l'un au moins du premier et du troisième), qui doit surpasser le quatrième, et ainsi de suite.

Dans le cas le plus général, la suite d'intervalles considérés peut comprendre un terme maximum, ou deux termes maxima adjacents, et les autres termes décroissent quand on s'éloigne de part et d'autre de ce ou de ces termes maxima (qui peuvent coïncider avec le premier ou avec le dernier intervalle).

Ces préliminaires étant posés, nous pouvons énoncer les propositions suivantes relatives à un ensemble parfait P présentant le caractère (A).

[**1**] *Quel que soit le nombre* λ *au plus égal à* $b-a$, P *contient deux points dont la distance est* λ.

Soit en effet $\alpha_1 = a$.

Le segment $\alpha_1\alpha'_1$ contient et surpasse le segment s'_1 séparant $a'a$ de u'_1, lequel contient et surpasse l'intervalle $\alpha'_1\alpha_2$. Or, par hypothèse, $a'a$ et $b'b$ ne sont inférieurs en longueur à aucun contigu de P. Donc, $\alpha_1\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$. Donc, tous les intervalles séparés par les suites α_p, α'_p et β'_p, β_p vont en décroissant.

Je dis que les β demeurent tous sur ab. En effet, si β'_n est sur ab, l'extrémité droite β_n du contigu contenant β'_n est à gauche de b. Si β_n est à gauche de b, on a

$$\beta'_n\beta_n > \beta_n\beta'_{n+1}.$$

Or, $\beta'_n\beta_n < u''_n$; u''_n est séparé de bb' par $\beta_n b$, au moins égal à u''_n (caractère A), d'après $u''_n \leqslant bb'$. Donc, $\beta_n\beta'_{n+1} < \beta_n b$. Donc, β'_{n+1} est à gauche de b. Il en est donc de même de β_{n+1}.

Donc, que les suites (α, α') (β, β') s'arrêtent ou non, elles mettent en évidence un couple (γ, δ) situé sur P et tel que $\delta - \gamma = \lambda$.

Le même raisonnement permet de montrer que :

[**1 bis**] *Si* u *et* v *sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par le segment* $\alpha\beta$ (α *et* β *appartiennent à* P, $\alpha < \beta$), *et si* u *et* v *sont au moins égaux à chacun des intervalles contigus à* P *compris entre* α *et* β, *il existe quel que soit le nombre* λ_1 *au plus égal à* $\beta - \alpha$, *deux points de* P *situés sur le segment* $\alpha\beta$ *et dont la distance est égale à* λ_1.

[**2**] (Conséquence du précédent). — *Si* u *et* v *sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par un segment* $\alpha\beta$, *il existe, quel que soit le nombre* λ_2 *au plus égal au plus petit des deux nombres* u *et* v, *deux points de* P *situés sur* $\alpha\beta$ *et dont la distance est égale à* λ_2 (en longueur).

Soit par exemple u à gauche de v, avec $u \leqslant v$, et v_1 le contigu le plus voisin de u à sa droite, et dont la longueur vaut au moins u. v_1 coïncide avec v ou est

compris entre u et v. Le segment $\alpha\beta_1$ séparant u de v_1 vaut au moins u (caractère A), d'après $u \leqslant v$. Il suffit d'appliquer à $\alpha\beta_1$ la proposition 1 *bis*.

[**3**] *Si l'intervalle u est contigu à* P *et si, sur un segment adjacent à u et de longueur l,* P *ne possède pas de contigu ni de semi-contigu dont la longueur surpasse u, il existe alors, quel que soit λ_3 vérifiant $u \leqslant \lambda_3 \leqslant l + u$, deux points de* P *situés de part et d'autre de u, et dont la distance est égale à λ_3.*

Soient β et α ($\beta < \alpha$) les extrémités de u. Posons

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta'_1 = \alpha - \lambda_3 \qquad (u < \lambda_3),$$

et soit β_1 l'extrémité droite du contigu contenant β'_1, si β'_1 est étranger à P. Comme dans l'étude préliminaire, les deux subdivisions (α_p, α'_p), (β_p, β'_p) progresseront vers la droite, mais cette fois, la seconde sera à la gauche de la première (et non pas à sa droite).

La démonstration se compose encore de deux parties : 1° $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$, si α'_1 n'est pas sur P; 2° β'_p et β_p restent à gauche de β, quel que soit p.

En effet : 1° D'après $\lambda_3 \leqslant u + l$, le semi-contigu $\beta'_1\beta_1$ est au plus égal à u. Donc, d'après $s'_1 < \alpha\alpha'_1$, on a $s'_1 < u$. Donc (caractère A) $s'_1 \geqslant u'_1$. De $\alpha'_1\alpha_2 < u'_1$ résulte $\alpha\alpha'_1 > \alpha'_1\alpha_2$.

Donc, les intervalles des subdivisions (α_p, α'_p), (β'_p, β_p) vont décroissant en longueur, tant qu'un α'_p ou un β'_p n'est pas sur P.

2° L'inégalité $\beta_n < \beta$ se démontre de proche en proche. Si en effet $\beta_n < \beta$, on a : en évidence, $\beta'_n\beta_n < u''_n$, puis $u''_n \leqslant u$, par hypothèse, d'où $\beta_n\beta \geqslant u''_n$ (caractère A) et enfin $\beta'_n\beta_n < \beta_n\beta$. Or, nous avons établi (1°) $\beta'_n\beta_n > \beta_n\beta'_{n+1}$. Donc, $\beta_n\beta'_{n+1} < \beta_n\beta$.

β'_{n+1}, et par suite β_{n+1}, sont encore à gauche de β. La proposition 3 résulte de là.

[**4**] (Conséquence du précédent). — *Si u est un intervalle contigu à* P, *il existe, quel que soit λ_4 vérifiant $u \leqslant \lambda_4 \leqslant 3u$, deux points de* P *situés de part et d'autre de u et dont la distance est λ_4.*

Car, si u est l'intervalle $\beta\alpha$, et si $\beta\alpha_1 = \beta - 2u$, le segment $\beta\alpha_1$ ne peut pas contenir, en vertu du caractère (A), d'intervalle contigu ou semi-contigu dont la longueur dépasse u. La proposition 3 s'applique donc.

Les théorèmes précédents trouvent leur application dans celui-ci :

[**5**] *Si* P *possède le caractère* (A), *il existe, quels que soient :* 1° M *sur* P; 2° *la longueur $4l$ d'un segment* AB *de milieu* M($l < b - a$), *il existe deux points de* P *appartenant au segment* AB, *et dont la distance est l.*

Soient respectivement u et v les plus grands intervalles contigus à P ayant des points, le premier à l'intérieur de AM, le second à l'intérieur de MB. Soit par

exemple u, ou $a_1\alpha$ le plus petit des deux (ou l'un des deux, s'ils sont égaux). Si $u \geqslant l$, le théorème à démontrer résulte de la proposition 2. Supposons donc $u < l$.

Soit v_1 l'intervalle contigu situé à droite de M, et le plus près possible de u, et au moins égal à u en longueur. v_1 coïncide avec v ou est à sa gauche. Si le segment $\alpha\beta_1$, séparant u de v_1 vaut au moins l, la proposition 5 résulte du théorème 1 *bis*. Si cette distance est inférieure à l, alors, puisque β_1 est en M ou à sa droite, α est à droite du milieu A_1 de AM, et d'après $a_1\alpha < l$, a_1 est intérieur au segment AM. Appliquons au segment $A\alpha$, la proposition 3. Il existe deux points γ, δ de P, contenant entre eux u et dont la distance est l. α étant à droite de A_1 et non pas de M, le segment (γ, δ) est à droite de A et à gauche de B_1 milieu de MB. Donc γ et δ appartiennent au segment AB.

Le théorème 5 est démontré dans tous les cas.

Donnons un exemple général d'ensemble parfait P auquel s'appliquent les considérations précédentes.

Supposons que P satisfasse à cette condition, que si M et M′ sont deux quelconques de ses points, il existe sur P, d'un côté ou de l'autre de M, un point M″, tel que $MM'' < MM' \leqslant 2MM''$. (Le coefficient 2 pourrait être remplacé par la racine réelle (et positive) de l'équation $t^3 - t^2 - t - 3 = 0$).

Je dis que P *possède le caractère* (A).

Sinon, il existerait deux intervalles contigus u ou $a_1\alpha$, v ou βb_1, tels que $\alpha\beta$ fût inférieur à u et à v. Supposons par exemple $\beta - \alpha < u \leqslant v$. On montre immédiatement, en plaçant M′ en a_1 ou en b_1, et M sur le segment $\alpha\beta$, que le segment ayant même milieu que (α, β), et égal à son tiers, est entièrement intérieur à un contigu a_2b_2 de P. Mais alors, il est visible que, si l'on place M en α et M′ en b_2, M″ n'existe pas.

Les mêmes méthodes permettent de démontrer le théorème suivant.

Supposons que : 1° P *et* P′ *sont deux ensembles parfaits présentant le caractère* (A); 2° *u et v sont deux intervalles contigus ou semi-contigus à* P, *séparés par le segment* $\alpha\beta$, *et non surpassés par aucun des contigus à* P *situés sur* $\alpha\beta$; 3° *au cas où* $\alpha'\beta' \neq \alpha\beta$ *et si par exemple* $\alpha'\beta' < \alpha\beta$, *l'un* (le plus grand, s'ils sont inégaux) *des deux intervalles u′ et v′ est au moins égal à tout contigu de* P *situé sur* $\alpha\beta$.

Sous ces conditions suffisantes, *si x et y désignent respectivement les abscisses d'un point quelconque de* P *situé sur* $\alpha\beta$, *et d'un point quelconque de* P′ *situé sur* $\alpha'\beta'$, *l'ensemble des nombres* $y - x$ *forme un segment continu.*

Application. — Supposons que : 1° P *présente le caractère* (A); 2° *u et v sont deux contigus ou semi-contigus de* P *tels que tous les contigus compris entre u et v sont au plus égaux, d'une part à v, d'autre part à*

$$\left|\frac{p}{q}\right| u, \qquad (|p| \leqslant |q|).$$

Sous ces conditions suffisantes, x *et* y *désignant les abscisses de deux points quelconques de* P *situés sur* $\alpha\beta$, *et* p *et* q *deux nombres indépendants de* x *et de* y, *l'ensemble des nombres* $px + qy$ *est un segment continu.*

L'une des configurations les plus intéressantes présentant le caractère (A) est celle de l'ensemble parfait classique P_0 de Cantor, obtenu en extrayant d'un segment ab l'intervalle occupant le tiers médian de ab, en opérant ensuite de même sur chacun des deux segments restants, et en continuant indéfiniment ainsi. Les démonstrations peuvent en ce cas s'appuyer sur l'expression des points de P_0 dans le système numérique de base 3.

Application aux fonctions admettant une dérivée seconde généralisée.

Soit $F(\theta)$ une fonction continue. Posons, u étant un nombre non nul,

$$\frac{F(\theta+u)-F(\theta)}{u} = Q(\theta, u) = Q(\theta+u, -u),$$

$$\frac{F(\theta+u)+F(\theta-u)-2F(\theta)}{u^2} = \frac{Q(\theta, u)-Q(\theta, -u)}{u} = R(\theta, u).$$

On dit que F *admet au point* θ *une dérivée seconde généralisée égale à* $f(\theta)$, *si* $R(\theta, u)$ *tend vers* $f(\theta)$ *quand* u *tend vers* 0, θ *étant indépendant de* u.

[6] *Si l'ensemble parfait* P *présente le caractère* (A), *et si, quel que soit* θ *sur* P *et* $|u|$ *positif et borné indépendamment de* θ, $|R(\theta, u)|$ *demeure borné :*

1° $F(\theta)$ *possède une dérivée* $\varphi(\theta)$ *en tout point* θ *de* P;

2° $\varphi(\theta)$ *est continue sur* P *et les nombres dérivés de* $\varphi(\theta)$ *spéciaux à* P *sont bornés*;

3° *Si en outre* $F(\theta)$ *admet la dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ *admet* $f(\theta)$ *pour dérivée spéciale à* P, *tout au moins en un ensemble de valeurs de* θ *partout dense sur* P.

Supposons $|R(\theta, u)| < \sigma$, quels que soient : 1° θ sur P; 2° $|u|$ positif et par exemple inférieur à 2.

Soient quatre nombres x_1, x'_1, x, x' vérifiant la relation $x' - x = 2(x'_1 - x_1) > 0$. On a

$$2x'_1 - x' = 2x_1 - x = \xi.$$

Le point ξ est simultanément le symétrique de x par rapport à x_1 et de x' par rapport à x'_1. Supposons que x_1 et x'_1 soient sur P. Désignons par $2k$ la distance

(positive) de x_1 et de x'_1, et par l les différences égales $\omega_1 - \xi$ et $\omega - \omega_1$, si ω et ω_1 sont les milieux respectifs des intervalles (x, x') et (x_1, x'_1). On a

$$\omega_1 = \xi + l, \qquad x_1 = \xi + l - k, \qquad x'_1 = \xi + l + k,$$
$$\omega = \xi + 2l, \qquad x = \xi + 2l - 2k, \qquad x' = \xi + 2l + 2k.$$

Nous supposons que $|l| + k$, égal au plus grand des deux nombres $|x - x_1|$ et $|x' - x'_1|$, est inférieur à 2.

x_1 et x'_1 étant sur P, on a

$$|R(x_1, u)| < \sigma, \; |R(x'_1, u)| < \sigma, \text{ si } 0 < |u| < 2.$$

Nous faisons dans la première relation $u = x - x_1 = l - k$, et dans la seconde $u = x' - x'_1 = l + k$. Il vient, en désignant par la lettre δ diversement affectée d'accents et d'indices, un nombre dont le carré est inférieur à 1 :

$$F(x) + F(\xi) - 2F(x_1) = \delta_1 \sigma (l - k)^2$$

et

$$F(x') + F(\xi) - 2F(x'_1) = \delta'_1 \sigma (l + k)^2.$$

D'où

$$2F(x'_1) - 2F(x_1) = F(x') - F(x) + 2\delta\sigma(l^2 + k^2),$$

et, en divisant tout par $x' - x = 4k$,

$$\frac{F(x'_1) - F(x_1)}{x'_1 - x_1} = \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} + \delta\sigma \frac{l^2 + k^2}{2k}. \tag{1}$$

Telle est la formule que nous allons utiliser.

Soit 0 un point quelconque de P. Sur le segment $0 - \frac{1}{2^n}$ à $0 + \frac{1}{2^n}$, nous pouvons trouver (théorème 5) deux points 0_n et $0'_n$ de P, tels que $0'_n = 0_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Dans la formule ci-dessus, les rôles de x et de x' seront joués respectivement par 0_{n-1} et $0'_{n-1}$, ceux de x_1 et de x'_1 par 0_n et $0'_n$. k, demi-distance des x_1, x'_1 de la formule (1), vaut $\frac{1}{2^{n+2}}$; $|l|$, distance du milieu de $(0_{n-1}, 0'_{n-1})$ au milieu de $(0_n, 0'_n)$ est au plus égal à

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{9}{2^{n+2}}.$$

D'où

$$\frac{l^2+k^2}{2k}<\frac{41}{2^{n+2}}.$$

Enfin,

$$\frac{F(\theta'_n)-F(\theta_n)}{\theta'_n-\theta_n}=Q\left(\theta_n,\frac{1}{2^{n+1}}\right)=C_n.$$

Donc,

$$C_n=C_{n-1}+41\frac{\delta_n\sigma}{2^{n+2}}. \tag{2}$$

En ajoutant membre à membre les n premières relations (2), il vient

$$C_n=C_0+41\sigma\sum_{1}^{n}\frac{\delta_n}{2^{n+2}}.$$

Ceci montre que C_n tend vers une limite $\varphi(\theta)$ quand n croît.

On a dès lors, en ajoutant membre à membre les relations (2) pour $n+1$, $n+2,\ldots,n+p$, et faisant croître p :

$$C_n=\varphi(\theta)+41\frac{\delta^{(n)}\sigma}{2^{n+2}}. \tag{3}$$

Soit maintenant h un nombre quelconque non nul et inférieur à 1 en valeur absolue. On a :

$$h=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}+\ldots,$$

les a_i non nuls étant tous de même signe et égaux à 1 en valeur absolue. Posons

$$h_1=h,\ldots,h_n=\frac{a_n}{2^n}+\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\ldots.$$

On a

$$|h_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Calculons

$$F(\theta+h_{n+1})-F(\theta+h_n).$$

Si $a_n=0$, cette différence est nulle.

Si $|a_n| = 1$, on peut, d'après $|h_n - h_{n+1}| = \frac{1}{2^n} = 2(\theta'_n - \theta_n)$, appliquer la formule (1). x_1 et x'_1 sont remplacés respectivement par θ_n et par θ'_n, x et x' par $\theta + h_{n+1}$ et $\theta + h_n$ (ou l'inverse selon que h est positif ou négatif). On a

$$k = \frac{1}{2}(\theta'_n - \theta_n) = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

$|l|$ est la distance du milieu de (θ_n, θ'_n) au milieu de $(\theta + h_n,\ \theta + h_{n+1})$, intervalle égal en longueur à $\frac{1}{2^n}$ et dont l'extrémité $\theta + h_{n+1}$ est distante de θ de $\frac{1}{2^n}$ au plus. Donc. cette fois encore $|l|$ est au plus égal à $\frac{9}{2^{n+2}}$ et

$$\frac{l^2 + k^2}{2k} \leqslant \frac{41}{2^{n+2}}.$$

Donc,

$$\frac{F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1})}{h_n - h_{n+1}} = \frac{F(\theta'_n) - F(\theta_n)}{\theta'_n - \theta_n} + \delta'' \sigma \frac{41}{2^{n+2}} = \Phi(\theta) + 41 \frac{\delta_1^{(n)} \sigma}{2^{n+1}},$$

et dans tous les cas ($a_n = 0,\ 1$ ou -1),

$$F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1}) = \frac{a_n}{2^n}\Phi(\theta) + \delta^{(n)} \frac{41}{2^{2n+1}} a_n \sigma.$$

D'où, en ajoutant de $n = 1$ à n infini, et en vertu de la continuité de $F(\theta)$.

$$F(\theta + h) - F(\theta) = h\Phi(\theta) + \frac{41}{2}\delta\sigma h^2. \tag{4}$$

relation qui démontre que $\Phi(\theta)$ est la dérivée de F au point θ (première partie de l'énoncé).

Si $\theta + h$ est sur P, nous pouvons ci-dessus remplacer le point θ par le point $\theta + h$, et l'accroissement h par $-h$. On trouve alors

$$\left| \frac{\Phi(\theta + h) - \Phi(\theta)}{h} \right| < 41\sigma,$$

ce qui démontre la seconde partie.

Pour démontrer la troisième partie, on utilise les raisonnements de Baire sur la discontinuité ponctuelle de $f(\theta)$ sur P.

[**7**] *Si* P *présente le caractère* (A) *et si* F(θ) *possède une dérivée seconde généralisée, toute portion* P_1 *de* P *en contient une autre* P_2 *où les conclusions du théorème 6 sont exactes.*

Il suffit que, θ étant quelconque sur P_2, $|R(\theta, u|$ soit borné moyennant $0 < |u| < \eta_1$, η_1 étant indépendant de θ.

Des raisonnements analogues à la démonstration du théorème 6 permettent de montrer que, *si* F(θ) *possède en tout point* θ *une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$, *les points où* Φ(θ) *dérivée de* F(θ) *ou bien n'existe pas, ou bien n'admet point* $f(\theta)$ *pour dérivée approximative* (ou exacte), *ces points forment un ensemble de mesure nulle.*

Quand $f(\theta)$ est la somme d'une série trigonométrique partout convergente, les énoncés précédents relatifs à F(θ) sont un peu plus précis. On pourra consulter sur ces questions mes notes aux Comptes rendus des Académies des Sciences d'Amsterdam (fascicules de mai et juin 1920) et de Rome (Lincei).

SUR UNE RÉSOLUTION GRAPHIQUE

DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par Pierre A. TYPPA

(BELGRADE)

Donnons aux racines de l'équation :

$$u^3 + pu = q \ldots \tag{1}$$

les valeurs suivantes :

$$u_1 = \frac{x+y}{2},$$

$$u_2 = \frac{x-y}{2},$$

$$u_3 = -x,$$

ce que nous sommes autorisés à faire puisqu'il en résulte :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Substituons ces valeurs des racines dans les équations connues :

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = p$$

et

$$u_1 u_2 u_3 = q,$$

nous aurons :

$$y^2 + 3x^2 + 4p = 0 \ldots \tag{2}$$

et

$$x(x^2 - y^2) + 4q = 0 \ldots \tag{3}$$

Éliminons chacune des inconnues et nous obtenons :

$$x^3 + px + q = 0 \ldots \tag{4}$$

et

$$y^3 + 3py + Ri = 0 \ldots \qquad (R = \sqrt{4p^3 + 27q^2}). \tag{5}$$

Donc :

A chaque équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0$$

correspond une autre équation du même degré

$$y^3 + 3py + Ri = 0.$$

La liaison qui existe entre ces deux équations nous permet de considérer les variables x et y en coordonnées cartésiennes, et alors *les équations* (2) *et* (3) *représentent deux lieux géométriques qui nous offrent par leur intersection les racines des équations* (4) *et* (5).

L'équation (2) représente une ellipse, mais l'autre — l'équation (3) — est du troisième degré et difficile à construire. Nous tâcherons de tirer des équations précédentes une nouvelle équation, plus commode à construire, et dont le lieu géométrique passera par les points d'intersection de courbes (2) et (3).

En effet, si nous donnons à l'équation (3) la forme suivante :

$$x^2 - y^2 + \frac{4q}{x} = 0,$$

on peut calculer le binôme $x^2 - y^2$ en se servant des équations (4) et (5) légèrement transformées :

$$x^2 + p + \frac{q}{x} = 0 \ldots, \tag{4'}$$

$$y^2 + 3p + \frac{Ri}{y} = 0 \ldots, \tag{5'}$$

d'où il suit :

$$x^2 - y^2 = 2p - \frac{q}{x} + \frac{Ri}{y},$$

ce qui nous donne une nouvelle équation :

$$\frac{3q}{x} + \frac{Ri}{y} + 2p = 0 \ldots . \tag{6}$$

Cette équation (6) représente une hyperbole, qui passe par les points d'intersection des courbes (2) et (3), et par conséquent coupe l'ellipse (2) en quatre points dont trois sont les racines des équations (4) et (5).

En traçant ces deux courbes nous avons résolu graphiquement les deux équations (4) *et* (5) *à la fois.*

On peut y introduire même une circonférence qui pourrait remplacer une de ces courbes. Les trois couples des racines

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_3 \\ y_3 \end{cases}$$

représentent trois points qui déterminent une circonférence. Si l'on en calcule les paramètres en fonction de p et de q, on en reçoit :

$$\left(x - \frac{3q}{2p}\right)^2 + \left(y + \frac{Ri}{6p}\right)^2 = \frac{54q^2 - 100p^3}{36p^2} \ldots \tag{7}$$

comme l'équation de cette circonférence.

Exemple. — A l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

correspond l'équation

$$y^3 - 21y + 20 = 0.$$

Les couples de racines de ces deux équations

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

se trouvent sur les courbes :

l'ellipse

$$y^2 + 3x^2 = 28,$$

l'hyperbole

$$\frac{9}{x} + \frac{10}{y} = 7$$

et la circonférence

$$\left(x - \frac{9}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{10}{21}\right)^2 = \frac{9061}{21^2}.$$

Il est utile de savoir que la circonférence (7) passe par le point

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3q}{p} \\ y = -\dfrac{\mathrm{R}i}{p} \end{cases}.$$

Remarque I. — Pour adapter la méthode précédente à trois dimensions, on n'a qu'à remplacer y par $y - z$. Dans ce cas, il y a trois lieux géométriques :

le plan

$$x + y + z = 0,$$

la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2p = 0$$

et le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{3q}{x} + \frac{\mathrm{R}i}{y - z} + 2p = 0.$$

Remarque II. — La méthode est applicable au cas des racines imaginaires; il suffit de remplacer y par yi.

Trisection de l'angle.

A) Lorsqu'on applique la méthode précédente à l'équation :

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

en y posant $x = r\cos\alpha$, on aura :

$$x^3 - \frac{3r^2}{4}x = \frac{r^3\cos 3\alpha}{4}.$$

L'ellipse (2) apparaîtra sous la forme :

$$y^2 + 3x^2 = 3r^2$$

indépendante de l'angle, *ce qui permet de l'utiliser pour tous les angles.*

En coupant cette ellipse par la circonférence (7), on a la résolution du problème.

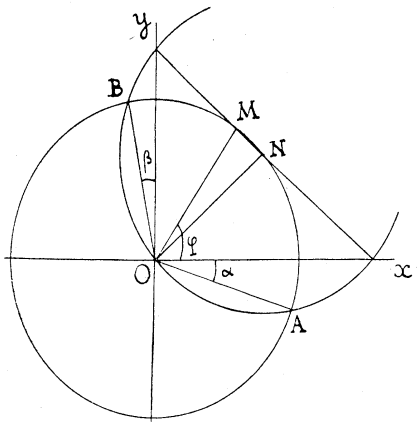
B) On pourrait y utiliser la circonférence :

$$y^2 + x^2 = 3r^2,$$

qui ne diffère de l'ellipse (2) que par les abscisses en raison $\sqrt{3} : 1$.

Si l'on trace une hyperbole qui différera de celle (6) en même raison, on aura par l'intersection de ces deux courbes la résolution.

Cette dernière méthode aboutit à une nouvelle méthode, toute mécanique.



Ayant l'angle φ à diviser en trois parties égales, on trace par son sommet comme centre une circonférence r et l'on fait glisser une longueur $= 2r$ suivant les axes $\overline{Ox}$

et $\overline{Oy}$. Lorsque cette droite passe par le point M, on fixe l'autre point de l'intersection N, d'où l'on décrit une nouvelle circonférence de la même grandeur que la précédente et qui la coupe aux points A et B.

Désignons l'angle

$$\overline{AOx} = \alpha, \qquad \overline{BOy} = \beta,$$

on a :

$$\alpha + \beta = 30^\circ,$$

$$\overline{xON} = 60^\circ - \alpha = (2\alpha + 2\beta) - \alpha = \alpha + 2\beta = \overline{NxO},$$

$$\overline{MNO} = 2(\alpha + 2\beta) = 2\alpha + 4\beta = \overline{NMO},$$

$$\overline{MON} = 180^\circ - 2.\overline{MNO} = (6\alpha + 6\beta) - (4\alpha + 8\beta) = 2\alpha - 2\beta,$$

d'où

$$\varphi = \overline{xOM} = (\alpha + 2\beta) + (2\alpha - 2\beta) = 3\alpha$$

et

$$\alpha = \frac{\varphi}{3}.$$

SUR LE MODULE ET LES ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Par M. GEORGES J. RÉMOUNDOS.

(ATHÈNES)

[1] J'ai entrepris des recherches sur le module et les zéros des fonctions analytiques ayant les deux buts suivants : 1) Compléter en certains points les théories classiques sur les fonctions entières pour obtenir des résultats plus avantageux; 2) Résoudre des problèmes analogues pour les fonctions analytiques non entières : holomorphes dans un domaine, algébroïdes dans un domaine ou dans tout le plan.

J'ai récemment communiqué la plupart de ces résultats à l'Académie des Sciences de Paris dans trois notes parues dans ses Comptes Rendus : 1) *Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières*, t. 170, n° 14, 6 avril 1920; 2) *Sur le module et les zéros des fonctions analytiques*, t. 170, p. 1557, 28 juin 1920; 3) Même titre, t. 171, p. 157, séance du 19 juillet 1920.

Je me propose maintenant, à l'occasion du Congrès, les deux buts suivants : 1) Indiquer les principes de la méthode qui m'a mené à certains résultats de la première des notes ci-dessus mentionnées; 2) Faire connaître d'autres résultats de mes recherches en question, qui ne sont pas encore communiqués.

1re partie.

[2] Soit $m(r)$ le module maximum d'une fonction entière :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots . \tag{1}$$

En dehors du théorème classique de Cauchy, exprimé par les inégalités :

$$A_n = |a_n| < \frac{m(r)}{r^n}$$

nous avons, depuis longtemps, une autre relation, dans le sens contraire, entre $m(r)$ et le module des termes de la série (1), la suivante :

Si nous avons les inégalités :

$$A_n r^n < \mu(r)$$

le module maximum $m(r)$ *de* $f(z)$ *satisfait à la formule :*

$$m(r) \leqslant \frac{r_1 \mu(r_1)}{r_1 - r} \qquad (\text{où } r_1 > r). \tag{2}$$

En prenant : $r_1 = r + \frac{1}{\log \mu(r)}$ et, en appliquant un théorème de M. Borel signalé dans mes trois Notes (des Comptes Rendus), nous arrivons facilement à l'inégalité asymptotique :

$$m(r) \leqslant [\mu(r)]^{1+\varepsilon} \tag{3}$$

satisfaite pour toutes les valeurs suffisamment grandes de r, sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale négligeable [Voir ma Note I].

Nous allons indiquer une méthode qui permet de compléter ce théorème et d'obtenir un autre résultat plus avantageux.

Soit $q(r)$ une fonction croissant plus vite que toute puissance finie de r. Une telle croissance sera appelée *transcendante*, puisque son ordre d'infinitude par rapport à r, considéré comme infiniment grand principal, est infini. La croissance de $q(r)$ étant transcendante, le rapport $q(r) : r^n$ tend vers l'infini pour chaque valeur finie de n. De plus, la fonction $q(r) : r^n$ est croissante pour toutes les valeurs de r qui satisfont à l'inégalité :

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > n;$$

c'est pour cela que ce rapport $\frac{rq'(r)}{q(r)}$ peut s'appeler *ordre* ou *poids* de la croissance transcendante de $q(r)$.

Ainsi le poids de e^r est r, celui de e^{e^r} est égal à e^r, le poids de la fonction e^{r^ρ} est ρr^ρ et ainsi de suite.

[**3**] *Caractéristique de la convergence uniforme.* — Nous savons qu'une série entière (1) converge uniformément dans tout cercle $|z| \leqslant r$, et, par conséquent, si nous posons :

$$R_n(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots,$$

à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier ν tel que, pour $n \geqslant \nu$ et pour tous les points du cercle $|z| \leqslant r$, on ait l'inégalité :

$$|R_n(z)| < \varepsilon .$$

Cette quantité $\nu = N(r, \varepsilon)$ dépend évidemment de r et ε et sera appelée *caractéristique* de la convergence de la série $f(r)$ dans les cercles de centre origine.

Il est clair que la rapidité de la convergence uniforme varie dans le sens inverse de la croissance de la caractéristique.

Il est facile de voir que, r croissant indéfiniment, une caractéristique dépasse toute quantité. Dans le cas contraire, la fonction $f(z)$ ne serait qu'un polynôme.

[**4**] Supposons maintenant que :

$$A_n < \frac{\mu(r)\, q(r)}{r^n} \tag{4}$$

et que la fonction $\frac{rq'(r)}{q(r)}$ dépasse une caractéristique $N(r, \varepsilon)$ de la série (1) d'une quantité supérieure à l'unité à partir d'une valeur de r; c'est-à-dire : nous supposons que, à partir d'une valeur de r, l'on ait :

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} - N(r, \varepsilon) > 1 .$$

Alors, aussi grand que soit r, il existe toujours un entier ν tel que :

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > \nu > N(r, \varepsilon)$$

et, par conséquent, la fonction $\frac{q(r)}{r^n}$ sera, pour $n \leqslant \nu$, croissante à partir de la valeur r et, d'autre part, nous aurons, pour $n = \nu$ et pour tous les points du cercle $|z| \leqslant r$, l'inégalité :

$$|R_\nu(z)| < \varepsilon .$$

Il est clair que cet entier ν varie avec r (en général).

Les quantités $\frac{q(r)}{r^n}$, où $n \leqslant \nu$, étant croissantes à partir de la valeur r, nous aurons, *a fortiori*, l'inégalité :

$$A_n < \frac{\mu(r)\, q(r_1)}{r_1^n} \qquad [n \leqslant \nu], \tag{5}$$

où r_1 est plus grand que r et quelconque.

La substitution de cette inégalité à (5) constitue le point principal de ma méthode. L'avantage de cette inégalité (5) consiste en ce que la nouvelle valeur r_1 ne figure pas dans le facteur $\mu(r)$; en d'autres termes : nous pouvons augmenter la valeur de r dans le facteur $\frac{q(r)}{r^n}$ sans le changer du tout dans l'autre $\mu(r)$.

Nous pouvons maintenant écrire :

$$|f(z)| < A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_\nu r^\nu + \varepsilon < \mu(r) q(r_1) \left[1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r}{r_1}\right)^\nu \right] + \varepsilon$$

ou bien

$$|f(z)| < \mu(r)\, q(r_1) \left[1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r}{r_1}\right)^\nu + \ldots \right] + \varepsilon = \mu(r)\, q(r_1) \frac{r_1}{r_1 - r} + \varepsilon .$$

En prenant enfin :

$$r_1 = r + \frac{1}{\log q(r)}$$

et en appliquant le théorème fondamental de M. Borel, nous obtenons la formule :

$$|f(r)| < \mu(r)\, [q(r)]^{1+\alpha},$$

α étant un nombre positif quelconque. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème. — Soit :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{6}$$

une fonction entière et posons :

$$M(r) = |a_0| + |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \ldots + |a_n|\, r^n + \ldots .$$

Si nous avons, à partir d'une valeur de r, l'inégalité :

$$|a_n| r^n < \mu(r)\, q(r) \tag{7}$$

où $q(r)$ est une fonction à croissance transcendante, dont le poids dépasse, à partir d'une valeur de r, une caractéristique de la convergence (uniforme) de la série (6) d'un excès supérieur à l'unité, la quantité $\mathrm{M}(r)$ satisfait, à partir d'une valeur de r, à l'inégalité :

$$\mathrm{M}(r) < \mu(r)\,[q(r)]^{1+\alpha} \qquad (\alpha \text{ étant positif arbitraire}), \tag{8}$$

sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale inférieure à $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \frac{1}{\log q(r_0)}$ [1], *r_0 étant la première des valeurs exceptionnelles considérées. Les intervalles exceptionnels n'existent pas si $q(r)$ est à croissance typique*[2]. [Voir ma Note des Comptes rendus déjà citée.]

Critique de notre résultat.

[5] L'avantage fourni par la formule (8) consiste en ce que : 1) Si $q(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $\mu(r)\, q(r)$, la formule (8), substituée à la place de l'inégalité (3) nous fait gagner *en grandeur*; 2) Si $q(r)$ est à croissance typique, tandis que le produit $\mu(r)\, q(r)$ ne jouit pas de cette propriété, nous gagnons *en régularité*, à cause de l'absence des intervalles exceptionnels, ce qui est parfois un avantage considérable.

D'une façon générale, l'avantage du complément apporté par notre théorème consiste en ce que, si $\mu(r)$ est décomposé en un produit de facteurs, notre théorème nous permet de mettre l'exposant $1 + \alpha$ à l'un des facteurs, pourvu qu'il jouisse des propriétés ci-dessus indiquées pour la fonction $q(r)$.

Les mêmes principes s'appliquent pour le complément du théorème sur le nombre n des zéros de module $\leqslant r$, exprimé par le dernier théorème de ma Note N° 1 des Comptes Rendus.

---

(1) α_1 étant plus petit que α et quelconque.

(2) J'ai insisté à répéter l'énoncé du théorème parce que il n'a pas paru complet dans les Comptes rendus (il y avait des lacunes).

2ième *partie.*

[6] Les théorèmes, que j'ai communiqués dans la seconde Note des Comptes Rendus, entraînent quelques conséquences intéressantes surtout pour les fonctions entières, que je crois utile de communiquer ici.

I. *Soit :*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

une fonction entière, m un nombre positif quelconque, θ et Θ deux nombres positifs quelconques inférieurs à l'unité (soit : $\theta < \Theta$), $\mu(r)$ le module maximum de $f(z)$ sur la circonférence $|z| = r$ et supposons : $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$.

Le nombre n des zéros de $f(z)$ de module égal ou inférieur à r satisfait, en général, à l'inégalité :

$$n < (1 + \varepsilon)[\log \mu(r)]^2 \qquad (\varepsilon \text{ positif quelconque}).$$

S'il y a des valeurs exceptionnelles de r, l'étendue totale L *des intervalles exceptionnels situés au-dessous d'une valeur r_0 est inférieure à une quantité qui ne dépend que des nombres $\varepsilon, \theta, \Theta, m, a_0, a_1$ et r_0.*

Plus précisément, l'étendue L *est inférieure à la quantité :*

$$\mathrm{R}\left(1 + \theta - \Theta + \frac{\Theta - \theta}{m}\right)$$

ou R *est un nombre assujetti à être supérieur ou égal aux nombres r_0 et $\frac{k}{\theta |a_1|}$, la quantité k désignant le plus grand des nombres :*

$$(1) \qquad e^{-\frac{1}{\log \Theta}}, \qquad e^{\frac{m\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log \Theta - \log \theta}}, \qquad e^{1+\sqrt{1-4\frac{\log|a_0|}{1+\varepsilon}}}.$$

Dans le cas où $|a_0| \geqslant 1$, nous avons l'inégalité :

$$n < (1 + \varepsilon)[\log \mu(r)]^2$$

et le dernier des nombres (1) *ne figure plus.*

Ce théorème s'étend complètement à toute fonction analytique holomorphe dans un cercle de centre origine pour les valeurs de r qui ne sortent pas du cercle d'holomorphie.

Si la fonction est entière, en prenant θ très petit, Θ très près de l'unité et m très grand, nous pouvons rendre aussi négligeable que l'on veut par rapport à R l'étendue totale des intervalles exceptionnels.

Remarque. — Le théorème précédent, ainsi que celui qui a paru dans la première Note des Comptes Rendus sur le nombre n des zéros, supposent que $|a_0| \neq 0$. Mais il est facile d'en déduire un théorème plus général, que je ne crois pas utile d'indiquer ici. On le trouvera avec les autres dans mon Mémoire étendu qui paraîtra prochainement dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure de Paris.*

Nous avons des conséquences et généralisations analogues du théorème de module minimum, que j'ai communiqué dans la seconde Note des Comptes Rendus.

SUR LE MODULE MAXIMUM DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES

Par M. THÉODORE VAROPOULOS

[**1**] Nous appelons *algébroïde* toute fonction transcendante ayant un nombre fini de branches dans tout le plan de la variable indépendante et n'admettant aucune singularité essentielle à distance finie (l'infini est le seul point singulier essentiel).

Soit $u = f(z)$ une fonction algébroïde à n branches déterminée par l'équation

$$u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_n(z)$ désignant des fonctions entières, et soit $M(r)$ le plus grand des modules maxima des $A_i(z)$ sur la circonférence de rayon $r = (z)$.

Dans la théorie de la croissance des fonctions algébroïdes, il est intéressant d'avoir relations très précises entre $M(r)$ et le module maximum $m(r)$ de la fonction algébroïde correspondante $u = f(z)$; la quantité $m(r)$ est évidemment égale au plus grand des modules maxima des branches u_1, u_2, ..., u_n de la fonction $u = f(z)$.

Dans ce petit travail nous allons donner une limite supérieure du module maximum $m(r)$ de la fonction algébroïde $u = f(z)$ déterminée par l'équation

$$(1) \qquad u^n + A_k(z)u^{n-k} + A_{k-1}(z)u^{n-k-1} + \ldots + A_n(z) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

[**2**] *Limite supérieure de* $m(r)$. — Supposons que l'on ait pour les valeurs suffisamment grandes de $r = |z|$ l'inégalité

$$m(r) > (1 + \varepsilon)M(r)^{\frac{1}{k}},$$

ε étant un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra; alors il y aura des points z de rayon r suffisamment grand satisfaisant à l'inégalité

$$|u| > (1 + \varepsilon)M(r)^{\frac{1}{k}};$$

cette hypothèse sera démontrée absurde, moyennant l'équation (1) qui détermine la fonction algébroïde, que nous écrirons sous la forme

$$u^n\left(1+\frac{A_k(z)}{u^k}+\frac{A_{k+1}(z)}{u^{k+1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}(z)}{u^{n-1}}+\frac{A_n(z)}{u^n}\right)=u^n(1+\theta)=0$$

en posant

$$\theta=\frac{A_k(z)}{u^k}+\frac{A_{k+1}(z)}{u^{k+1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}(z)}{u^{n-1}}+\frac{A_n(z)}{u^n}.$$

En effet, nous avons, pour tout point z, les inégalités

$$|A_k(z)|<M(r),\qquad |A_{k+1}(z)|<M(r),\ \ldots,\qquad |A_n(z)|<M(r),$$

et pour les points $\underline{z}$ l'inégalité

$$|u|>(1+\varepsilon)M(r)^{\frac{1}{k}}$$

On en déduit les formules

$$\left|\frac{A_k(z)}{u^k}\right|<\frac{1}{(1+\varepsilon)^k},\qquad \left|\frac{A_{k+1}(z)}{u^{k+1}}\right|<\frac{1}{(1+\varepsilon)^{k+1}}\frac{1}{M(r)^{\frac{1}{k}}},\ \ldots,\qquad \left|\frac{A_n(z)}{u^n}\right|<\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\frac{1}{M(r)^{\frac{n-k}{k}}}$$

et par conséquent :

$$(2)\quad |\theta|<\frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\left\{1+\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{M(r)^{\frac{1}{k}}}+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{1}{M(r)^{\frac{2}{k}}}+\ldots+\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-k}}\frac{1}{M(r)^{\frac{n-k}{k}}}\right\}$$

satisfaites pour tous les points $\underline{z}$. Mais nous savons que, lorsque le $|\underline{z}|=\underline{r}$ croît indéfiniment, le module maximum $M(\underline{r})$ tend vers l'infini et, par conséquent, le second membre de l'inégalité tend vers $\frac{1}{(1+\varepsilon)^k}$ qui est plus petit que l'unité. Il y aura donc des points $\underline{z}$ de rayon suffisamment grand pour lesquels le module de θ soit plus petit que l'unité.

Alors, pour ces points, il est impossible que la fonction algébroïde $u=f(z)$ satisfasse à l'équation (1) qui la détermine, parce que pour les mêmes points la qantité $1+\theta$ ne saurait être nulle.

Nous en concluons ainsi que l'inégalité

$$m(r) < (1 + \varepsilon)\mathrm{M}(r)^{\frac{1}{k}}$$

est satisfaite *constamment* à partir d'une valeur de r, ε étant positif quelconque.

Il est évident que la relation

$$m(r) < (1 + \varepsilon)\mathrm{M}(r)^{\frac{1}{k}}$$

dans le cas où $k = 2, 3, \ldots, n$ est plus avantageuse que la relation $m(r) < (1+\varepsilon)\mathrm{M}(r)$ de M. Rémoundos (*Bulletin de la Société math. de France*, t. XXXIX, 1911), parce que dans ce cas le rapport :

$$(1 + \varepsilon)\mathrm{M}(r)^{\frac{1}{k}} : (1 + \varepsilon)\mathrm{M}(r)$$

tend vers zéro.

HOMOGENEOUS POLYNOMIALS WITH A MULTIPLICATION THEOREM

By LEONARD EUGENE DICKSON

(CHICAGO)

[**1**] *The classic examples.* — It was known to Diophantus that

$$(1)\qquad (x_1^2+x_2^2)(\xi_1^2+\xi_2^2)=X_1^2+X_2^2,\qquad X_1=x_1\xi_1\pm x_2\xi_2,\qquad X_2=x_2\xi_1\mp x_1\xi_2.$$

We investigate all homogeneous polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$, which we write in the briefer notation $f(x)$, having the property that

$$(2)\qquad f(x)\cdot f(\xi)=f(X),$$

where $X_1, \ldots, X_n$ are bilinear functions of $x_1, \ldots, x_n$ and $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$(3)\qquad X_k=\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ijk}x_i\xi_j\qquad (k=1, \ldots, n).$$

Such a function $f(x)$ shall be said to admit the composition (3).

The multiplication theorem for determinants shows that a determinant whose $n=m^2$ elements are independent variables admits composition.

As generalizations of (1), Euler and Degen noted that a sum of 4 or 8 squares admits composition. A. Hurwitz proved(1) that a sum of n squares admits composition only when $n=1, 2, 4, 8$.

There is known only one further example, — norms of algebraic numbers. For example, $x_1^2+x_2^2$ is the norm of x_1+x_2i, where $i^2=-1$, and we have (1). In general, the product $l_1(x)\,l_2(x)\ldots l_n(x)$ is the norm of any one of the algebraic numbers

$$l_j(x)=x_1+\alpha_j x_2+\alpha_j^2x_3+\ldots+\alpha_j^{n-1}x_n,$$

(1) For a simple exposition and an account of the history of this problem, see Dickson, Annals of Math., t. XX, 1919, pp. 155-171, 297.

where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are the roots of an equation of degree n with rational coefficients. By means of the latter equation we can express the product $l_j(x) . l_j(\xi)$ in the form $l_j(X)$, where the X_k are bilinear functions (3). Hence the product of the norms of any two algebraic numbers equals the norm of their product, so that the norm function admits a composition (3).

[**2**] *Application to the theory of numbers.* — Let $f(x)$ admit the composition (3) and take $\xi_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$. Then $f(X) = y^2$ has solutions given by (3) and $y = f(x)$. Next, $f(x) . f(X) = f(z)$ gives solutions z and $w = f(x)$ of $f(z) = w^2$. Similarly, by repeated use of (2), we obtain solutions of $f(\lambda) = \mu^k$. This application is due to Lagrange.

[**3**] *Linear algebras.* — It will prove to be advantageous to make use of the notation of hypercomplex numbers $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, where the linearly independent units $e_1, \ldots, e_n$ have a multiplication table

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} e_k \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

while the n^3 constants γ and the coordinates $x_1, \ldots, x_n$ are ordinary complex numbers. Then

$$x\xi = \Sigma x_i e_i . \Sigma \xi_j e_j = \Sigma X_k e_k = X$$

if relations (3) hold, and conversely. Hence our problem is to find the polynomials which satisfy equation (2) when $x\xi = X$.

When the numbers γ are given, the totality of hypercomplex numbers $\Sigma x_i e_i$ are said to form a linear algebra. It is not assumed that multiplication is commutative or associative.

The determinant of the coefficients of $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in (3) is

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \Sigma x_i \gamma_{i11} & \ldots & \Sigma x_i \gamma_{in1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \Sigma x_i \gamma_{i1n} & \ldots & \Sigma x_i \gamma_{inn} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

which is called the right-hand determinant of x. Similarly,

$$\Delta'(x) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{jik} \right|_{j,k=1,\ldots,n} \tag{6}$$

is called the left-hand determinant of x.

LEMMA 1. — *Given any numbers g and x of any linear algebra, we can find a number ξ of the algebra whose coordinates are polynomials in the coordinates of g and x such that*

$$x\xi = \Delta(x) \cdot g . \tag{7}$$

Denote by $E_1^{(r)}, \ldots, E_n^{(r)}$ the cofactors (adjoint minors) of the elements of the r^{th} row of (5). Multiply $E_j^{(r)}$ by the j^{th} element $\Sigma_{i=1}^{i=n} x_i \gamma_{ijk}$ of the k^{th} row of $\Delta(x)$, and sum for $j = 1, \ldots, n$; we obtain $\Delta(x) . \delta_{rk}$, where, in Kronecker's notation, δ_{rk} equals 1 if $k = r$, but equals 0 if $k \neq r$. Writing

$$E^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} E_j^{(r)} e_j ,$$

and applying (4), we have

$$xE^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \cdot \sum_{j=1}^{n} E_j^{(r)} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Delta(x) \delta_{kr} e_k = \Delta(x) e_r .$$

Multiplying by g_r and summing for $r = 1, \ldots, n$, we get (7) for

$$g = \sum_{r=1}^{n} g_r e_r , \qquad \xi = \sum_{r=1}^{n} g_r E^{(r)} .$$

LEMMA 2. — *Given g and x, we can find η such that*

$$\eta x = \Delta'(x) . g . \tag{8}$$

Denote by $K_1^{(r)}, \ldots, K_n^{(r)}$ the cofactors of the elements of the r^{th} row in $\Delta'(x)$, and write

$$K^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} K_j^{(r)} e_j , \qquad \eta = \sum_{r=1}^{n} g_r K^{(r)} .$$

Then

$$K^{(r)} x = \sum_{i, j, k} K_j^{(r)} x_i \gamma_{jik} e_k = \sum_{k} \Delta'(x) \delta_{kr} e_k = \Delta'(x) e_r .$$

Multiplying by g_r and summing for r, we get (8).

THEOREM 1. — *If $f(x)$ is a homogeneous polynomial in $x_1, \ldots, x_n$ of degree d for which $f(x) \cdot f(\xi) = f(X)$ under the composition $x\xi = X$ in any linear algebra, then $f(x)$ divides the d^{th} powers of the determinants $\Delta(x)$ and $\Delta'(x)$ of the general number of the algebra.*

Set $g_1, \ldots, g_n$ be any ordinary complex numbers for which $f(g_1, \ldots, g_n) \neq 0$ and set $g = \Sigma g_r e_r$. Then, by (7),

$$f(x) \cdot f(\xi) = [\Delta(x)]^d \cdot f(g),$$

where $f(\xi)$ equals a polynomial in $x_1, \ldots, x_n$. Hence $f(x)$ divides $[\Delta(x)]^d$. Similarly, by (8), $f(\eta) \cdot f(x) = [\Delta'(x)]^d \cdot f(g)$.

Another proof of this theorem, without the use of hypercomplex numbers, is given in § 12.

[**4**] *Normalized composition.* — Let $f(x)$ be any homogeneous polynomial of degree d which admits a composition (3). There exist constants $t_{11}, \ldots, t_{n1}$ not all zero for which $f(t_{11}, \ldots, t_{n1}) = c \neq 0$. Let t_{21} for example be not zero. Then the transformation

$$x_1 = t_{11}x'_1 + x'_2, \qquad x_2 = t_{21}x'_1, \qquad x_i = t_{i1}x'_1 + x'_i \qquad (i = 3, \ldots, n)$$

has the determinant $-t_{21}$. Transform also the ξ's and the X's by the same transformation. We obtain from $f(x)$ a function $F(x')$ in which the coefficient of x'^d_1 is c (as is shown by taking $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$), and admitting composition. Dividing x'_1, ξ'_1 and X'_1 by $c^{\frac{1}{d}}$, we now have $c = 1$. After these transformations have been performed, we return to the initial notations for simplicity, and have a polynomial $f(x)$ of degree d which admits a composition (3) and has unity as the coefficient of x_1^d.

In (2) and (3) take $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Then

$$X_k = \xi'_k x_1, \qquad \xi'_k \equiv \sum_{j=1}^{n} \gamma_{1jk}\xi_j.$$

Since f is homogeneous, $f(X) = x_1^d f(\xi')$. Since $f(x)$ reduces to x_1^d, (2) gives $f(\xi) = f(\xi')$. We assume that $f(\xi)$ is not expressible as a polynomial in fewer than n variables. Then the ξ'_k are linearly independent and may be introduced as new variables in place of the ξ_k without altering f. The effect of this transformation on the ξ's is that we now have γ_{1jk} equal to Kronecker's δ_{jk}, so that

$$e_1 e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{1jk} e_k = e_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Without disturbing the normalization just effected, we can make a further normalization by means of a transformation on the x's. In (2) and (3) take $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$. Then

$$X_k = x'_k \xi_1, \qquad x'_k \equiv \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} x_i.$$

Then (2) becomes $f(x)\xi_1^d = f(x')\xi_1^d$. Thus the x'_k are linearly independent and may be introduced as new variables in place of the x_k, with the result that now

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik}, \qquad e_i e_1 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} e_k = e_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

THEOREM 2. — *If $f(x)$ is a homogeneous polynomial of degree d which admits a composition and is not expressible in fewer than n variables, we may assume that the coefficient of x_1^d is unity after applying a transformation cogredient in the x's, ξ's and X's. Then by applying a transformation on the x's which leaves $f(x)$ unaltered and a transformation on the ξ's which leaves $f(\xi)$ unaltered, we obtain for $f(x)$ a new composition $x\xi = X$ in a linear algebra having a principal unit e_1 for which*

$$e_1 e_j = e_j, \quad e_j e_1 = e_j \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Such a composition shall be said to be *normalized.*

[5] LEMMA. — *If $f(x)$ admits normalized composition, any factor $E(x)$ of $f(x)$ admits the composition if it has unity as the coefficient of the term involving only x_1.*

By (2), $E(X)$ divides $f(x)f(\xi)$, whence $E(X) = A(x)B(\xi)$. Take $x = e_1$, whence $X = \xi$, $E(\xi) = A(e_1)B(\xi)$. But if we take $\xi = e_1$, whence $X = x$, we get $E(x) = A(x)B(e_1)$. By multiplication,

$$E(x)E(\xi) = tE(X), \qquad t = A(e_1)B(e_1) = E(e_1) = 1.$$

The assumption that the composition is normalized is essential. For example, the algebra with $e_1^2 = e_2^2 = 0$, $e_1 e_2 = e_1$, $e_2 e_1 = e_2$ has no principal unit, and for it $X_1 = \xi_2 x_1$, $X_2 = \xi_1 x_2$. Thus $x_1 x_2$ admits composition, while its factors do not.

From this lemma and Theorem 1, we deduce :

THEOREM 3. — *If a polynomial admits normalized composition, each of its irreducible factors admits the composition and divides both $\Delta(x)$ and $\Delta'(x)$.*

[6] THEOREM. — *A binary form which admits normalized composition is a product of powers of two linear functions.*

A binary algebra with the principal unit e_1 is defined by

$$e_2^2 = ae_1 + be_2. \tag{10}$$

After introducing $e_2 - \frac{1}{2}be_1$ as a new e_2, we have $b = 0$ in (10). Then

$$\Delta(x) = x_1^2 - ax_2^2, \qquad X_1 = x_1\xi_1 + ax_2\xi_2, \qquad X_2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1,$$
$$\Delta(X) = \Delta(x)\,\Delta(\xi),$$

so that $\Delta(x)$ admits composition. By Theorem 3, only products of powers of the linear factors $x_1 \pm \sqrt{a}\,x_2$ of $\Delta(x)$ admit composition.

Another proof of this theorem follows from the fact that any binary algebra with a principal unit e_1 is associative, since (10) implies $e_2e_2^2 = e_2^2e_2$. When an algebra is associative, $\Delta(x)$ and $\Delta'(x)$ admit composition. In fact, as remarked by Poincaré, the transformations $[\xi]$ defined by $x' = \xi x$ form a group and the determinant of the transformation is $\Delta(\xi)$.

Hence for an associative algebra, a form admits composition if and only if it is a product of powers of irreducible factors of $\Delta(x)$. These factors are known[1] to be linear functions or determinants whose elements are linearly independent linear functions of $x_1, \ldots, x_n$. Such a determinant cannot equal a sum of 8 independent squares. A sum of 8 squares, which is known to admit composition under Cayley's algebra with 8 units, cannot therefore admit composition under an associative algebra.

Our problem is thus beyond the scope of the classic theory of linear associative algebras. Nor can we apply directly the theory of continuous groups, since transformations (3) need not form a group.

[7] *Application of covariant theory.* Our further progress depends upon :

THEOREM 4. — *If $f(x)$ admits normalized composition and possesses a covariant (or invariant) of degree δ and index λ which is not identically zero, then f^δ is divisible by Δ^λ and by Δ'^λ. Hence, if $\lambda > 0$, Theorem 3 shows that f has the same irreducible factors as Δ and Δ', and that Δ and Δ' admit the composition.*

Formulas (3) define a linear transformation on the x's of determinant $\Delta'(\xi)$. This tranformation replaces the function $f(X)$ of the initial variables X_k by the

---

(1) Proof and references in the writer's tract, Linear Algebras, Cambridge University, England.

function $f(\xi)\cdot f(x)$ of the final variables x_i. By the definition of a covariant E(X) of degree δ and index λ of $f(X)$,

$$[f(\xi)]^{\delta}\,E(x) = [\Delta'(\xi)]^{\lambda}\,E(X), \tag{11}$$

since the coefficients of the transformed form $f(\xi)\cdot f(x)$ are the products of those of $f(x)$ by $f(\xi)$, and since the covariant is homogeneous and of degree δ in those coefficients. Since $E(x)$ is independent of the ξ's and is not identically zero, (11) shows that $f(\xi)^{\delta}$ is divisible by $\Delta'(\xi)^{\lambda}$.

Similarly, since (3) give the X's as linear functions of the ξ's of determinant $\Delta(x)$, $f(x)^{\delta}$ is divisible by $\Delta(x)^{\lambda}$.

THEOREM 5. — *If a form in $n<5$ variables admits normalized composition and is not expressible in fewer than n variables, it has the same irreducible factors as Δ and Δ'.*

In fact, the Hessian of such a form is a covariant of index 2 which is not identically zero(1).

The following corollary to Theorem 5 will be used frequently :

THEOREM 6. — *If a form f in $n<5$ variables admits normalized composition and has an irreducible factor I which is not expressible in fewer than n variables, then f is a power of I.*

THEOREM 7. — *If an irreducible form $f(x)$ in $n<5$ variables admits normalized composition and is not expressible in fewer than n variables, any covariant of index λ and degree δ of $f(x)$ equals the product of $f^{\delta-\lambda r}$ by a constant.*

For, by Theorem 5, $kf(\xi)^r = \Delta'(\xi)$, where k is a constant $\neq 0$. In (11) take x equal to the principal unit ε. Then $X = \xi$ and

$$f(\xi)^{\delta-\lambda r}\,E(\varepsilon) = k^{\lambda}\,E(\xi).$$

[8] *Ternary forms.* — If $\Delta(x)$ is a product of linear functions, any form admitting composition is a product of powers of those linear functions in view of Theorem 3. Next, Theorem 6 excludes the case in which $\Delta(x)$ is the product of a linear function by an irreducible quadratic factor. Finally, let $\Delta(x)$ be irreducible. Then, by Theorem 5, the only possible forms admitting composition are powers of Δ. But if $f = \Delta$ admits composition, its Hessian H is of degree $\delta = 3$ and index $\lambda = 2$, and, by Theorem 7, $H = cf$, where c is a constant. However, on a

(1) P. Gordan and M. Nöther, *Math. Annalen*, t. X, 1876, p. 564.

cubic curve which is its own Hessian curve, every point is a point of inflexion and the curve is formed of straight lines. Hence we have proved the

THEOREM. — *Every form in three variables which admits a composition is a product of powers of three linear functions admitting the composition.*

[**9**] *Quaternary forms.* — By Theorem 5, a quaternary form which admits composition and is not equivalent to a ternary form has the same irreducible factors as $\Delta(x)$.

First, let Δ be the product of a linear form and an irreducible cubic form E. The case in which E is not equivalent to a ternary form is excluded by Theorem 6. Hence we may assume that E is an irreducible form in x_1, x_2, x_3, which admits a composition, three of whose four equations are $X_i = l_i + a_i x_4 (i = 1, 2, 3)$, where the l_i are linear in x_1, x_2, x_3. If each $a_i = 0$, E would admit a ternary composition, contrary to § 8. If not every $a_i = 0$, the partial derivative of $E(X) = E(x)E(\xi)$ with respect to x_4 gives

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E(X)}{\partial X_i} a_i \equiv 0,$$

which is a linear relation between the linear partial derivatives of E with constant coefficients. Hence the Hessian of E is identically zero, so that E is equivalent to a binary form (Gordan and Nöther, *loc. cit.*), contrary to its irreducibility.

By the same argument, Δ is not divisible by an irreducible quadratic form Q, provided $\Delta \neq Q^2$. When $\Delta = Q^2$, we may take $Q = \Sigma x_i^2$. By Euler's formula for the product of two sums of four squares expressed as a sum of four squares, Q admits composition. It is known that $\Delta = Q^2$ for this composition.

Finally, let $f = \Delta$ be an irreducible quartic form admitting composition and not equivalent to a ternary form. By Theorem 7, the Hessian H of f equals the product of the square of f by a constant. At a point $y = (y_1, \ldots, y_4)$ of a surface $f = 0$, the tangent plane

$$\Sigma x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$

is tangent also to the quadric polar

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} + \ldots = 0 \tag{12}$$

and hence intersects the latter in the two principal tangent lines to the surface at y. The determinant of the quadratic form (12) is H and is zero in our case, so that (12)

is a cone. Thus the principal tangent lines coincide for every point of f. The differential equation for the projections on the xy — plane of the asympotic lines on the surface $z = F(x, y)$ is

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0, \qquad r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

The condition for the coincidence of the asympotic lines (and hence of the inflexion tangents at every point) is $rt = s^2$. This is known to be the necessary and sufficient condition that the surface be a developable. Hence(1) $f = 0$ is a developable surface. Now every developable surface of the fourth order has as its edge of regression a twisted cubic curve(2). Taking the latter in the parametric form

$$x = t^3, \qquad y = t^2 s, \qquad z = t s^2, \qquad w = s^3, \tag{13}$$

we see that the plane

$$x\theta^3 + 3y\theta^2 + 3z\theta + w = 0$$

meets the curve in three coincident points. The envelope of these planes is $F = 0$, where F is the discriminant of the cubic in θ :

$$F = (xw - yz)^2 - 4(xz - y^2)(yw - z^2), \tag{14}$$

which is therefore the developable quartic surface whose edge of regression is the twisted cubic (13). I have verified(3) that the Hessian of F equals F^2, in accord with our initial requirement.

But the quartic form (14) does not admit composition. To prove this, we shall determine all the linear transformations which leave $F = 0$ invariant. Consider the general binary cubic form

$$E = xv_1^3 + 3yv_1^2 v_2 + 3zv_1 v_2^2 + wv_2^3.$$

---

(1) These arguments may fail if f is reducible. The Hessian of $q^2 = (x_1^2 + \ldots + x_4^2)^2$ is $3 \cdot 4^4 q^4$. The Hessian of $f = x_1 x_2 x_3 x_4$ is $-3f^2$; the tangent at $y = (0, y_2, y_3, y_4)$ is $x_1 = 0$ and the quadric polar of y has the factor x_1.

(2) Chasles, *Aperçu Hist.*, p. 406; R. Sturm, *Die Gebilde ersten u. zweiten Grades der Liniengeometrie*, 1892, I, pp. 55, 336, 819.

(3) M. W. Haskell, *Amer. Math. Monthly*, t. X, 1903, p. 2, had stated this fact in the form that the Jacobian of $\partial F/\partial x, \ldots, \partial F/\partial w$ is F^2.

Under the linear transformation

$$v_1 = \alpha V_1 + \beta V_2, \qquad v_2 = \gamma V_1 + \delta V_2, \qquad D \equiv \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

E becomes $XV_1^3 + 3YV_1^2V_2 + 3ZV_1V_2^2 + WV_2^3$, where

$$(15)\qquad \begin{cases} X = \alpha^3 x + 3\alpha\gamma^2 y + 3\alpha\gamma^2 z + \gamma^3 w, \\ Y = \alpha^2\beta x + (2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta)\, y + (2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2)\, z + \gamma^2\delta w, \\ Z = \alpha\beta^2 x + (2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma)\, y + (2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2)\, z + \gamma\delta^2 w, \\ W = \beta^3 x + 3\beta^2\delta y + 3\beta\delta^2 z + \delta^3 w. \end{cases}$$

We saw that $F = F(x, \ldots, w)$ is the discriminant of E and hence is an invariant of index 6 :

$$(16)\qquad F(X, \ldots, W) = D^6 F(x, \ldots, w).$$

Any linear transformation which leaves $F = 0$ invariant must leave invariant its edge of regression (13), viz., $z^2 = yw$, $z^3 = xw^2$, and hence[1] be of the form (15). If the 16 coefficients of transformation (15) were linear functions of four parameters ξ_i, then

$$D^3 = \alpha^3 . \delta^3 - 3\alpha^2\gamma . \beta\delta^2 + 3\alpha\gamma^2 . \beta^2\delta - \beta^3 . \gamma^3$$

would be a quadratic function of the ξ_i, and D^6 would equal a reducible function of the ξ_i and hence not equal to $F(\xi_1, \ldots, \xi_4)$. Hence, by (16), F does not admit composition. We have now proved the

THEOREM. — *Every quaternary form which admits composition and is not equivalent to a ternary form is either a power of a quadratic form or a product of powers of four linear functions.*

[**10**] *Quinary forms.* — Let f be a form in 5 variables which admits composition and is not equivalent to a form in 4 variables.

We first dispose of the case in which the Hessian of f is identically zero. Then[2] f can be transformed linearly into a polynomial in x_1, x_2 and

$$Q = x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_3,$$

---

(1) S. Lie, *Vorlesungen Kontinuierliche Gruppen*. pp. 417, 733.

(2) Gordan and Nöther, *loc. cit.*, p. 564.

where the P_i are homogeneous functions of like order of x_1, x_2. We may exclude the case in which the P_i are connected by a linear relation with constant coefficients, as $P_3 = c_1 P_1 + c_2 P_2$, since then

$$Q = X_3 P_1 + X_4 P_2, \qquad X_3 = x_3 + c_1 x_5, \qquad X_4 = x_4 + c_2 x_5,$$

and f would be a function of x_1, x_2, X_3, X_4. Hence each P_i is of degree $\geqq 2$. Each irreducible factor f_1 of f admits composition and f_1 divides the quintic function Δ (Theorem 3). Hence we may restrict attention to functions f of degree $\leqq 5$. Then $f = AQ + B$, where A and B are functions of x_1, x_2 only, and $A \not\equiv 0$. We may exclude the case in which f decomposes itself, since one factor would evidently be a common factor of AP_1, AP_2, AP_3, and B, and its removal would lead to a similar form f of lower degree. Aside from these excluded cases, I have verified that the only singular points of $f = 0$ are those having $x_1 = x_2 = 0$. Hence a linear transformation which multiplies f by a constant permutes the points with $x_1 = x_2 = 0$, and hence is

$$(17) \qquad X_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 \quad (i = 1, 2), \qquad X_i = \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_j \quad (i = 3, 4, 5).$$

This is the present form of (3), whose determinant is $\Delta'(\xi)$. Hence the latter is a product of functions of degrees 2 and 3. But f divides a power of Δ' by Theorem 1. Since the case of a decomposable f was excluded above, f is an irreducible quadratic or cubic. The former is excluded since the P_i are of degree $\geqq 2$. Hence

$$f = Q + B, \quad P_i = a_i x_1^2 + b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2, \quad |a_1 b_2 c_3| \neq 0,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{3} x_{2+i} P_i = x_1^2 \Sigma a_i x_{2+i} + x_1 x_2 \Sigma b_i x_{2+i} + x_2^2 \Sigma c_i x_{2+i}.$$

The three sums may be taken as new variables x_3, x_4, x_5. Then

$$Q = x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2^2 x_5.$$

Under transformation (17), $f(X) = mf(x)$, $m \equiv f(\xi)$. By partial differentiation with respect to x_3, x_4, x_5, respectively, we get

$$mx_1^2 = X_1^2 c_{33} + X_1 X_2 c_{43} + X_2^2 c_{53},$$
$$mx_1 x_2 = X_1^2 c_{34} + X_1 X_2 c_{44} + X_2^2 c_{54},$$
$$mx_2^2 = X_1^2 c_{35} + X_1 X_2 c_{45} + X_2^2 c_{55}.$$

By solving (17), let $x_1 = RX_1 + SX_2$, $x_2 = TX_1 + VX_2$. Thus

$$\begin{aligned} c_{33} &= mR^2, & c_{34} &= 2mRS, & c_{35} &= mS^2, \\ c_{34} &= mRT, & c_{44} &= m(RV + ST), & c_{45} &= mSV, \\ c_{35} &= mT^2, & c_{45} &= 2mTV, & c_{55} &= mV^2, \end{aligned}$$

$$|c_{33}c_{44}c_{55}| = m^3(RV - ST)^3 = \frac{m^3}{(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^3}.$$

Hence the determinant of (17) equals $m^3/(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^2$. Since m is a homogeneous cubic function of the c_{ij}, this gives $m = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\,L$, where L is linear. But $m = f(\xi)$ is irreducible.

Having disposed of the case of a vanishing Hessian, we conclude that Theorems 5-7 hold also for forms in 5 variables.

First, let $\Delta(x)$ be the product of a linear form and an irreducible quartic. By Theorem 6, the latter is equivalent to an irreducible quartic $E(x_1, \ldots, x_4)$. Let four of equations (3) be $X_i = l_i + a_i x_5 (i = 1, \ldots, 4)$, where l_i is linear in $x_1, \ldots, x_4$. If each $a_i = 0$, E admits composition on $x_1, \ldots, x_4$, contrary to § 9. If not every $a_i = 0$, partial differentiation of $E(X) = E(x)\,E(\xi)$ with respect to x_5 gives

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial E(X)}{\partial X_i} a_i = 0.$$

Hence the Hessian of E is identically zero, and E is equivalent to a ternary form. Thus Δ would be equivalent to a form in four variables, contrary to hypothesis.

Second, let Δ be the product of a quadratic and an irreducible cubic form E. As in the first case, E is equivalent to a form in x_1, x_2, x_3. Let three of equations (3) be

$$X_i = l_i + a_i x_4 + b_i x_5 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

where the a's and b's are not all zero by § 8. By partial differentiation of $E(X) = E(x)\,E(\xi)$ with respect to x_4 and x_5 in turn, we get

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E(X)}{\partial X_i} a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E(X)}{\partial X_i} b_i = 0,$$

one of which has coefficients not all zero. Hence the Hessian of E is identically zero, and E is equivalent to a binary form, contrary to its irreducibility.

Third, let $\Delta = LQ_1Q_2$, where L is linear and the Q's quadratic, Q_2 being irre-

ducible. By the arguments used in the first two cases, it remains only to treat $Q_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ with a composition on $x_1, \ldots, x_4$. By applying a suitable linear transformation leaving Q_2 unaltered, we may assume that the composition is that of quaternions :

$$(18)\quad \begin{cases} X_1 = \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 - \xi_4 x_4, & X_2 = \xi_2 x_1 + \xi_1 x_2 + \xi_4 x_3 - \xi_3 x_4, \\ X_3 = \xi_3 x_1 - \xi_4 x_2 + \xi_1 x_3 + \xi_2 x_4, & X_4 = \xi_4 x_1 + \xi_3 x_2 - \xi_2 x_3 + \xi_1 x_4. \end{cases}$$

If $L = a_1 x_1 + \ldots + a_4 x_4$ is free of x_5,

$$\Sigma a_i x_i \,.\, \Sigma a_i \xi_i = \Sigma a_i X_i = x_1 \Sigma a_i \xi_i + x_2 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 - a_3 \xi_4 + a_4 \xi_3) + \ldots .$$

By the coefficients of x_1, we get $a_1 = 1$. Then, by the coefficients of x_2, we get $a_2^2 = -1$, $a_2 a_3 = -a_3$, $a_2 a_4 = a_4$, whence $a_3 = a_4 = 0$, so that the coefficients of $x_3 \xi_3$ are not equal. Hence we may take $L = x_3$. Since the factor x_3 of Δ admits composition, $X_3 = x_3 \xi_3$.

If Q_1 is free of x_5, $Q_1 Q_2$ is a quartic in $x_1, \ldots, x_4$ admitting composition on those variables. By § 9, this is impossible unless $Q_1 = Q_2$.

Finally, let Q_1 involve x_5. Differentiating $Q_1(X) = Q_1(x) Q_1(\xi)$ partially with respect to x_5, we get

$$(19)\qquad \frac{\partial Q_1(X)}{\partial X_5} \xi_5 = \frac{\partial Q_1(x)}{\partial x_5} Q_1(\xi),$$

whence $Q_1(\xi) = \xi_5 l(\xi_1, \ldots, \xi_5)$. Thus $Q_1(x) = x_5 l(x)$. Write $l = t + c x_5$, where t is a linear function of $x_1, \ldots, x_4$. Let T be the same linear function of $X_1, \ldots, X_4$, and τ the same function of $\xi_1, \ldots, \xi_4$. Then (19) becomes

$$T + 2cX_5 = (t + 2cx_5)(\tau + c\xi_5).$$

If $c = 0$, $T = t\tau$ and the linear function t of $x_1, \ldots, x_4$ admits the composition (18), which was seen to be impossible.

Thus $c \neq 0$. Take $x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0$, whence $X_1 = 0, \ldots, X_4 = 0$ by (18). Thus

$$2cX_5 = 2cx_5(\tau + c\xi_5), \qquad \xi_5 = \tau + c\xi_5,$$

whence $c = 1$, $\tau = 0$, and $l = x_5$, $Q_1(x) = x_5$, $\Delta = x_5^3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$. We have now proved the

THEOREM. — *Every form in five variables which admits composition and is not equivalent to a form in four variables is a power of an irreducible quintic form, a product of powers of five linear functions, or is equivalent to a product of powers of* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ *and* x_5 *with the composition defined by* (18) *and* $X_5 = x_5 \xi_5$.

I have not succeeded in deciding whether or not an irreducible form $f(x_1, \ldots x_8)$ of degree 5 admits composition. If so, all its covariants are powers of f; in particular, its Hessian is not identically zero.

[**11**] *Further normalization.* — If we transform the variables cogrediently :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j, \qquad \xi_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \xi'_j, \qquad X_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} X'_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

we obtain from (3) a new composition which is easily verified to be the same as that derived from $x\xi = X$ in the algebra (4) by performing on the units the conjugate (transposed) transformation

$$E_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

We shall now determine what simplification can be accomplished on a normalized composition by means of a transformation on the x's, the ξ's and the X's. If T be the transformation on the x's, we afterwards apply the inverse transformation T^{-1} cogrediently to the x's, the ξ's and the X's (which is equivalent to a mere transformation of the units of the algebra). Hence, without altering the x's, we apply the transformation

$$(20) \qquad \xi_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \xi'_k, \qquad X'_s = \sum_{l=1}^{n} d_{sl} X_l \qquad (j, s = 1, \ldots, n).$$

Then, by (3),

$$X'_s = \sum_{i,j,k,l} d_{sl} \gamma_{ijl} c_{jk} x_i \xi'_k.$$

Comparing this with (3) written in accents, we have

$$(21) \qquad \gamma'_{iks} = \sum_{j,\, l=1}^{n} d_{sl} \gamma_{ijl} c_{jk} \qquad (i, k, s = 1, \ldots, n).$$

Since also the new composition shall be normalized, we require that

$$\gamma'_{ijk} = \gamma'_{jik} = \delta_{jk} (j, k = 1, \ldots, n).$$

For $i = 1$, (21) gives

$$\sum_{j,\, l=1}^{n} d_{sl} \delta_{jl} c_{jk} \equiv \sum_{j=1}^{n} d_{sj} c_{jk} = \delta_{ks}, \qquad (d_{sj})(c_{jk}) = 1.$$

Hence matrix (d_{sj}) is the inverse of (c_{jk}). For $k = 1$, (21) gives

$$\sum_{j,\, l=1}^{n} d_{sl} \gamma_{ijl} c_{j1} = \delta_{is} \qquad (i, s = 1, \ldots, n).$$

Multiply this equation by c_{ts} and sum for $s = 1, \ldots, n$, using

$$(c)(d) = 1, \qquad \sum_{s=1}^{n} c_{ts} d_{sl} = \delta_{tl}.$$

We get

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ijt} c_{j1} = c_{ti} \qquad (l, i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Conversely, from this equation with t replaced by l we obtain the former conditions by multiplying by d_{sl} and summing for $l = 1, \ldots, n$. The resulting transformation

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{n} c_{ti} \xi'_i \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} \gamma_{ijt} c_{j1} \xi'_i \tag{23}$$

has the determinant $\Delta'(c)$, where $c = \Sigma c_{j1} e_j$. Write ξ' for $\Sigma \xi'_i e_i$, and ξ for $\Sigma \xi_t e_t$. Then (23) may be written $\xi = \xi' c$. By our earlier result, $X = X' c$, where $\Delta'(c) \neq 0$.

THEOREM. — *Every linear transformation which converts a normalized composition into a normalized composition is obtained by hypercomplex multiplication* $\xi = \xi' c$, $X = X' c$, *where* c *is a hypercomplex number for which* $\Delta'(c) \neq 0$, *followed by a transformation on the units.*

The new composition is obtained by solving for $X'_1, \ldots, X'_n$ the scalar equations equivalent to

$$x(\xi' c) = X' c . \tag{24}$$

That $f(x)$ admits also the new composition follow from

$$f(X')f(c) = f(X) = f(x)f(\xi) = f(x)f(\xi')f(c),$$

and $f(c) \neq 0$. The last is a consequence of $\Delta'(c) \neq 0$ and Theorem 1.

In case the algebra is associative, (24) implies that $x\xi' = X'$, so that the new composition is identical with the old. Hence when the γ's are arbitrary, we cannot reduce one of them to zero by a transformation (2).

[**12**] *Proof of Theorem 1 without using hypercomplex numbers.* — Write equations (3) in the abbreviated form

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

where the c_{ki} are linear functions, of determinant $\Delta'(\xi)$, of the ξ's. Let the solution of (25) be

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} X_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so that each d_{ij} equals the quotient of a polynomial in the c_{ki} by $\Delta'(\xi)$. Then $f(x)$, which is of total degree d in $x_1, \ldots, x_n$, becomes a polynomial in the X's whose coefficients are homogeneous polynomials of degree d in the d_{ij}, and hence are equal to quotients of polynomials in the c_{ki} by Δ'^d. Inserting our expression for $f(x)$ into (2) and comparing coefficients of a term in the X's which occurs in the right member $f(X)$ with a (constant) coefficient k which is not zero, we see that the product of a certain polynomial in the c_{ki} by $f(\xi)$ is equal to $k\Delta'^d$. Hence $f(\xi)$ divides Δ'^d.

Similarly, by regarding (3) as giving the X_k as linear functions of the ξ's of determinant $\Delta(x)$, we see that $f(x)$ divides Δ^d.

SUR LE CALCUL DES VALEURS ABSOLUES

PAR D. RIABOUCHINSKI

Lorsqu'on tâche d'exprimer par des équations et d'étudier analytiquement, en n'utilisant que les notations généralement admises, une fonction effectivement discontinue, constituée par deux demi-droites respectivement parallèles aux parties positive et négative de l'axe des abscisses, ou une fonction qui diffère de la précédente en ce que les demi-droites sont réunies par un segment qui se confond avec l'axe des ordonnées, on se heurte, malgré la grande simplicité de ces fonctions, à des difficultés considérables.

On peut tirer de cette constatation deux conclusions différentes. Si l'on se place au point de vue que l'on a déjà atteint dans la connaissance des principes fondamentaux de l'Analyse la clarté et la rigueur absolues et définitives, on dira que la simplicité des fonctions considérées n'est qu'apparente et que l'on ne saurait y remédier. Mais si l'on se rappelle que le symbolisme mathématique a été créé et perfectionné, petit à petit, en vue de la solution de problèmes suggérés surtout par l'intuition sensible, on essayera, dans ce cas aussi, de modifier et de compléter ce symbolisme pour qu'il se prête d'une façon plus satisfaisante à l'étude des fonctions élémentaires considérées.

Je me placerai dans la présente communication à ce second point de vue.

J'exposerai sommairement les éléments d'une théorie, basée sur une généralisation d'opérations connues, qui permet de traiter analytiquement, avec beaucoup de facilité, les fonctions indiquées plus haut, ainsi que d'autres fonctions plus compliquées.

Nous serons conduit dans nos raisonnements à une nouvelle extension de la notion de nombre. Ces nouveaux nombres apparaîtront, ainsi que les nombres négatifs, fractionnaires, irrationnels et imaginaires, comme le résultat de certaines opérations inverses.

Définissons d'abord le sens que nous attribuerons à l'expression « opération inverse » que nous venons d'employer. Nous conviendrons de dire que l'opération

uniforme ou multiforme φ^{-1} est l'inverse de l'opération φ si elle satisfait à la condition

$$\varphi^{-1}[\varphi(a)] = a \tag{1}$$

pour une valeur a quelconque.

Nous dirons, par exemple, que

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et non pas

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = (4n+1)\frac{\pi}{2},$$

comme on aurait pu aussi convenir de le faire, vu que :

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1; \qquad \operatorname{arc\,sin} 1 = (4n+1)\frac{\pi}{2}.$$

De la définition que nous venons de formuler découle un corollaire très important.

Les expressions

$$1 = 1,$$

et

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

ne nous disent pas absolument la même chose. Nous ne savons rien sur l'origine des unités qui figurent dans la première, tandis que la seconde nous autorise à admettre que l'unité qui y figure a été obtenue en effectuant l'opération exprimée par le symbole sin sur la grandeur $\frac{\pi}{2}$.

Nous introduisons ainsi dans l'Analyse la notion d'origine d'une grandeur donnée.

On pourra toujours remplacer dans une expression quelconque $\sin\frac{\pi}{2}$ par l'unité et *vice versa*, mais à l'exclusion du cas où ces grandeurs figurent sous le symbole de la fonction inverse.

Une expression telle que

$$\sin(2\pi + a) = \sin a$$

montre que deux grandeurs peuvent être égales sans avoir la même origine. En effet, cette expression est équivalente aux deux égalités

$$\sin(2\pi + a) = \alpha_1,$$
$$\sin a = \alpha_2,$$

où

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

mais

$$\arcsin \alpha_1 \neq \arcsin \alpha_2.$$

Appliquons ces considérations à l'inverse de l'opération du passage à la limite, que nous désignerons par opération du retour de la limite, et à l'inverse de l'opération du passage à la valeur absolue, que nous appelons opération du retour à la valeur relative.

On exprime généralement par les symboles $+\infty$ et $-\infty$ les infiniment grands potentiels, et par le symbole ∞ une valeur fictive — l'infini actuel. Nous conviendrons cependant, par analogie aux nombres finis, de confondre les symboles $+\infty$ et ∞, en les opposant au symbole $-\infty$, et nous désignerons la valeur fictive susdite par le symbole J.

Nous conviendrons ensuite d'exprimer l'opération du passage à la limite, appliquée au nombre a, non par le symbole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0, \tag{2}$$

mais par le symbole

$$\frac{a}{\mathrm{J}} = \pm 0 \tag{3}$$

en lui donnant une signification identique à celle qu'on donne actuellement au symbole (2). Le nombre a étant arbitraire, il en résulte qu'il existe une infinité de zéros d'origine différente.

Si le nombre a qui figure dans l'expression (3) est positif, nous désignerons le zéro correspondant par $+0$ ou 0, et si ce nombre est négatif par -0. En affectant le zéro absolu du signe $+$ ou du signe $-$, selon qu'il appartient à l'ensemble des

nombres positifs ou à celui des nombres négatifs, et en confondant le zéro absolu avec le zéro positif, nous convenons par cela même d'appliquer à ces symboles la règle de signes ordinaire.

Nous désignerons le zéro $\frac{1}{J}$ par $\dot{o}$:

$$\frac{1}{J} = \dot{o}. \tag{4}$$

Nous choisirons pour exprimer l'opération inverse du retour de la limite le symbole J. Par conséquent, d'après l'égalité (1), on peut écrire, par exemple :

$$J.\frac{5}{J} = J.o = 5.$$

Si l'on applique l'opération J à un zéro dont l'origine n'est pas définie, on doit écrire :

$$J.\pm o = a$$

où a est un nombre arbitraire.

L'opération inverse J amène à la considération de l'expression impossible J.a, où $a \neq \pm o$. En effet, il n'y a pas de nombre fini tel que, si on lui applique l'opération du passage à la limite, on obtienne un nombre différent de zéro.

L'opération du passage à la limite appliquée au nombre a peut être interprétée, comme le symbolisme que nous avons adopté le souligne, comme exprimant que le dénominateur n de la fraction $\frac{a}{n}$ atteint, après avoir augmenté au delà de toute grandeur finie, la grandeur fictive J — l'infini actuel.

On se méfie généralement beaucoup des raisonnements où l'infini actuel apparaît d'une façon explicite. On peut cependant opérer avec cette grandeur, sans crainte de tomber dans des contradictions, si l'on se laisse guider par le principe de la considération de l'origine des grandeurs exposé plus haut et par le principe de la permanence des formes opératoires.

On a ainsi, par exemple, d'après les formules fondamentales (3) et (4),

$$a.o = \pm o,$$

$$J = \frac{1}{\dot{o}},$$

$$J.a = \frac{a}{\dot{o}},$$

$$a.o = \frac{ab}{J} = ab.\dot{o} = \pm o.$$

Si l'on a deux grandeurs égales

$$b_1 = b_2,$$

mais dont on ne connaît pas l'origine, il faudra écrire

$$\mathrm{J}b_1 - \mathrm{J}b_2 = \mathrm{J}(b_1 - b_2) = a, \tag{5}$$

où a est un nombre arbitraire. En effet, l'origine des grandeurs b_1 et b_2 étant inconnue, elle ne sera pas nécessairement la même, et, par conséquent, on pourra poser

$$b_1 = b + \frac{c_1}{\mathrm{J}} + \frac{d_1}{\mathrm{J}^2} + \ldots\ldots \frac{n_1}{\mathrm{J}^{\mathrm{J}}},$$

$$b_2 = b + \frac{c_2}{\mathrm{J}} + \frac{d_2}{\mathrm{J}^2} + \ldots\ldots \frac{n_2}{\mathrm{J}^{\mathrm{J}}},$$

où l'on suppose que la valeur et l'origine des grandeurs b qui figurent dans les secondes parties sont pareilles et que $c_1 - c_2 = a$.

Si dans l'expression (5) on sait que la valeur et l'origine des grandeurs b_1 et b_2 sont identiques, nous conviendrons de l'exprimer comme suit :

$$b_1 - b_2 = \frac{n_1 - n_2}{\mathrm{J}^{\mathrm{J}}} = (n_1 - n_2)\dot{\mathrm{o}}^{\mathrm{J}} = \pm(\mathrm{o}).$$

Par exemple, en désignant par x une grandeur variable, on a :

$$\mathrm{J}x - \mathrm{J}x = \pm(\mathrm{o}).$$

Si l'on a une expression de la forme $\frac{\pm \mathrm{o}}{\pm \mathrm{o}}$, où l'on ne connaît pas l'origine des zéros qui y figurent, on pourra lui assigner une valeur quelconque. En effet, on peut poser dans ce cas

$$\frac{\pm \mathrm{o}}{\pm \mathrm{o}} = \frac{a\dot{\mathrm{o}}}{b\dot{\mathrm{o}}} = \frac{a}{b},$$

où a et b sont des grandeurs quelconques.

Mais si l'on sait que l'origine des deux zéros est identique, il faudra assigner au symbole $\frac{\pm \mathrm{o}}{\pm \mathrm{o}}$ la valeur un. Par exemple, en désignant par x une grandeur variable, on a :

$$\left(\frac{x}{x}\right)_{x=\pm \mathrm{o}} = 1.$$

En exprimant par $|x|$ l'opération du passage à la valeur absolue, on trouve aussi que

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)_{x=\pm 0} = \pm 1.$$

Une expression de la forme

$$1 = \frac{1}{J} + 1$$

montre que les origines des grandeurs qui figurent dans la première et seconde parties sont différentes. En effet, en leur appliquant l'opération du retour de la limite, on obtient deux nombres différents :

$$J \neq 1 + J.$$

Notre théorie se distingue par conséquent de celle de G. Cantor, qui admet que

$$1 + J = J < J + 1.$$

Les nombres transfinis que nous considérons satisfont à la condition

$$1 + J = J + 1.$$

Ces nombres transfinis trouvent aussi une application, comme je l'ai montré dans un autre travail, dans les géométries hyperbolique et parabolique, où ils permettent de trouver des relations entre nombres finis.

Si l'on a une suite infinie de fonctions

$$f(x, 1), \quad f(x, 2), \quad f(x, 3), \quad \ldots, \quad f(x, n), \quad \ldots$$

il est tout naturel de convenir que cette suite de fonctions a pour limite la fonction $f(x, J)$. La fonction limite, qu'on obtient ainsi, coïncide toujours, à l'encontre de la théorie généralement admise, avec celle que fait pressentir l'intuition géométrique.

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour exprimer analytiquement les fonctions dont nous avons parlé au début de cette Communication.

La première de ces fonctions peut être exprimée par l'équation

(6) $$y = \frac{x}{|x|}$$

et la seconde par l'équation

$$y = \frac{1}{2}|\mathrm{J}x + 1| - \frac{1}{2}|\mathrm{J}x - 1|. \tag{7}$$

La fonction (6) est égale à l'unité positive ou à l'unité négative selon que x est positif ou négatif. A la valeur zéro correspond soit l'unité positive, soit l'unité négative, selon qu'on attribue le point zéro à l'ensemble des nombres positifs ou à celui des nombres négatifs.

La fonction (7) est égale à a, $|a| < 1$, lorsqu'on donne à la variable x une valeur actuellement petite $\frac{a}{\mathrm{J}}$, et à l'unité positive ou négative pour toute autre valeur respectivement positive ou négative de x.

La fonction (7) est la limite de la suite infinie de fonctions

$$y = \frac{1}{2}|nx + 1| - \frac{1}{2}|nx - 1|.$$

Ces fonctions représentent deux rayons parallèles à l'axe des abscisses et réunis par un segment de droite dont le coefficient angulaire est égal à n. Lorsque ce coefficient angulaire devient infiniment grand, le segment coïncide avec l'axe des ordonnées, tandis que dans la théorie généralement admise il est alors remplacé par un point isolé.

Pour pouvoir dériver et intégrer les fonctions (6) et (7), il faut définir la dérivation et l'intégration de la fonction élémentaire $|x|$.

En dérivant l'identité

$$x^2 = |x|^2,$$

on trouve :

$$\frac{d|x|}{dx} = \frac{x}{|x|}.$$

La fonction (6) qu'on obtient ainsi vient d'être interprétée plus haut. Les dérivées d'ordre supérieur peuvent être désignées par

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)', \quad \left(\frac{x}{|x|}\right)'', \quad \ldots .$$

Si l'on attribue à $\left(\frac{x}{|x|}\right)'$ la valeur $+(0)$, lorsque x est positif, il faudra lui attribuer la valeur $-(0)$, lorsque x est négatif, et inversement. Lorsque x est égal à zéro, on pourra lui attribuer arbitrairement l'une des deux valeurs $\pm(0)$.

En dérivant l'équation (7) on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{J}}{2}\frac{\mathrm{J}x+1}{|\mathrm{J}x+1|} - \frac{\mathrm{J}}{2}\frac{\mathrm{J}x-1}{|\mathrm{J}x-1|}.$$

Cette expression est égale à J lorsque $x = \frac{a}{\mathrm{J}}$, $|a|<1$, à J ou à $\pm(0)$, lorsque $x = \pm\frac{1}{\mathrm{J}}$, et s'annule pour les autres valeurs de x. Les dérivées d'un ordre supérieur s'annulent pour toutes les valeurs de x.

En intégrant la fonction $|x|$, on obtient :

$$y = \frac{1}{2}x|x| + c,$$

comme il est facile de le vérifier en dérivant cette expression.

En intégrant les formules (6) et (7), on trouve respectivement

$$y = |x| + c,$$

$$y = \frac{1}{4\mathrm{J}}[(\mathrm{J}x+1)|\mathrm{J}x+1| - (\mathrm{J}x-1)|\mathrm{J}x-1|] + c.$$

Ces deux équations peuvent être représentées par la même ligne brisée.

La recherche des points d'intersection des fonctions (6) et (7) avec une droite, nous amène au problème de la solution des équations absolues.

Pour donner une théorie générale de la solution de pareilles équations il est indispensable de considérer l'opération du retour à la valeur relative. Nous exprimons cette opération par le symbole $\pm\sqrt{\ }$.

(8) $$y = |x|, \qquad x = \pm\sqrt{y}.$$

Un nombre négatif, de même qu'il n'admet pas de racine carrée, n'admet non plus de retour à la valeur relative; mais, pour des motifs analogues à ceux qui ont conduit à l'introduction dans le calcul formel du symbole $\sqrt{-1}$, nous considérerons aussi le symbole $\sqrt{-1}$, représentant le résultat du retour impossible à une telle valeur relative. En désignant ce nouveau nombre imaginaire par j, on peut écrire :

(9) $$|j| = -1, \qquad j = \pm\sqrt{-1}.$$

Considérons la suite de formules qui découle de la définition de l'unité j et de l'identité

$$+\sqrt{x^2} = |x| \tag{10}$$

lorsqu'on veut leur appliquer les règles usuelles du calcul. En multipliant les deux parties de l'égalité (10) par $\pm$, on peut écrire :

$$\pm\sqrt{x^2} = x = \pm|x| \tag{11}$$

ou en remplaçant x par j :

$$j = \mp 1. \tag{12}$$

En faisant correspondre les signes $\pm$ de l'égalité (11) aux signes $\pm$ de l'égalité (8), et en comparant ensuite les expressions (9) et (12), on peut convenir d'écrire :

$$j = -\left|\overline{-1} = 1,\right.$$
$$-j = +\left|\overline{-1} = -1.\right.$$

Ces expressions montrent que l'on peut toujours remplacer j par l'unité et *vice versa*, mais à l'exclusion du cas où cette grandeur figure sous le symbole du passage à la valeur absolue; elles indiquent l'origine imaginaire des unités qui figurent dans les secondes parties.

Démontrons maintenant que l'on peut écrire :

$$\left|\overline{x} = x.\right. \tag{13}$$

Considérons la fonction $y = \pm\left|\overline{x}\right.$; il est facile de se rendre compte que pour $x > 0$ on peut la remplacer par la formule $y = \pm x$. Donc, dans ce cas, $\left|\overline{x} = x\right.$. Supposons ensuite que $x < 0$. On a :

$$y = \pm\left|\overline{x} = \pm\left|\overline{-(-x)} = \pm(-x)\right|\overline{-1} = \mp(-x)j = \pm xj,\right.\right.$$

et puisque $j = 1$, on trouve, dans ce cas aussi, que $\left|\overline{x} = x\right.$.

Appliquons ces résultats à la solution d'une équation absolue du premier ordre. Nous désignerons ainsi une équation de la forme

$$a|x - \alpha| + bx + c = \pm 0. \tag{14}$$

Transformons cette équation comme suit :

$$a|x-\alpha| + b(x-\alpha) + c + b\alpha = \pm 0$$

et en posant, d'après la formule (11),

$$x-\alpha = \pm|x-\alpha| \tag{15}$$

nous obtenons :

$$|x-\alpha| = -\frac{c+b\alpha}{a\pm b} \tag{16}$$

et par conséquent, en éliminant $|x-\alpha|$ des formules (15) et (16),

$$x-\alpha = \pm\left(-\frac{c+b\alpha}{a\pm b}\right). \tag{17}$$

Dans cette formule le signe + correspond au signe + et le signe — au signe —.

D'un autre côté, en appliquant à la formule (16) l'opération du retour à la valeur relative, nous obtenons :

$$x-\alpha = (\pm)_1\sqrt{-\frac{c+b\alpha}{a\pm b}}. \tag{18}$$

En comparant les formules (17) et (18) et en prenant en considération la formule (13), nous trouvons que

$$(\pm)_1 = \pm.$$

La solution générale de l'équation (14) prend donc la forme :

$$x = \alpha \pm \sqrt{-\frac{c+b\alpha}{a\pm b}},$$

ou, en désignant les deux racines par x_1 et x_2 :

$$x_1 = \alpha + \sqrt{-\frac{c+b\alpha}{a+b}},$$

$$x_2 = \alpha - \sqrt{-\frac{c+b\alpha}{a-b}}.$$

Les racines imaginaires ne sont pas en général conjuguées, et l'équation (14) peut avoir deux racines réelles, ou deux racines imaginaires, ou une racine réelle et l'autre imaginaire. Si l'on a simultanément $c + b\alpha = 0$ et $a + b = 0$ ou $c + b\alpha = 0$ et $a - b = 0$, l'une des racines est réelle et l'autre indéterminée.

La fonction

$$y = a|x - \alpha| + bx + c$$

est l'équation d'une ligne brisée à un seul sommet. Les racines de l'équation (14) expriment les points d'intersection, réels ou imaginaires, de cette ligne brisée avec l'axe des abscisses. Si l'un des tronçons de la ligne brisée coïncide avec l'axe des x, le point d'intersection devient indéterminé; à ce dernier cas correspond la racine indéterminée de l'équation (14).

Pour trouver les points d'intersection de la ligne exprimée par la formule (6) avec une droite, il faut résoudre l'équation

$$bx + c = \frac{x}{|x|} \tag{19}$$

qui est un cas particulier de l'équation

$$a|x - \alpha| + bx + c + e\frac{x - \alpha}{|x - \alpha|} = \pm 0$$

dont on trouve facilement les racines en appliquant la méthode qui nous a servi à exprimer celles de l'équation (14). On obtient ainsi :

$$x_1 = \alpha + \sqrt{-\frac{c + b\alpha + e}{a + b}},$$

$$x_2 = \alpha - \sqrt{-\frac{c + b\alpha - e}{a - b}},$$

En appliquant ces formules à l'équation (19), et en supposant que le coefficient angulaire b de la droite s'annule, on a :

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1 - c}{\pm 0}},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1 + c}{\pm 0}}.$$

La droite $y = 1$ coupera, par conséquent, la ligne $y = \frac{x}{|x|}$ en un point indéterminé, mais dont l'abscisse est nécessairement positive si le point est réel. La droite

$y = -1$ la coupera également en un point indéterminé, mais dont l'abscisse est nécessairement négative si le point est réel. Les autres racines seront imaginaires ou infinies, de même que les abscisses des points d'intersection avec toute autre droite $y = c$, $|c| \neq 1$.

La méthode que nous venons d'indiquer permet d'exprimer facilement les racines d'équations absolues plus compliquées. Nous conviendrons de désigner par ordre d'une équation absolue linéaire le nombre de passages à la valeur absolue qui y figurent, et par sa classe la façon dont ils y figurent.

Il existe, par exemple, deux classes d'équations absolues du second ordre :

$$a|x-\alpha| + b|x-\beta| + cx + d = \pm 0, \tag{20}$$

$$\big||a_2 x + b_2| + a_1 x + b_1\big| + ax + b = \pm 0,$$

quatre classes d'équations absolues du troisième ordre, huit classes d'équations absolues du quatrième ordre, et, en général, $2^{(n-1)}$ classes d'équations absolues d'ordre n.

La solution d'une équation absolue d'ordre n exige n applications de l'opération du retour à la valeur relative. Chacune de ces applications introduit les deux signes $\pm$. Le nombre total des racines réelles et imaginaires doit être égal au nombre des variations possibles de ces signes, c'est-à-dire à 2^n. Le nombre maximum des racines réelles peut être moindre et différent pour les équations du même ordre, mais de différentes classes.

Les quatre racines de l'équation (20) peuvent être exprimées, par exemple, par la formule :

$$x = \beta \pm \sqrt{\pm\left(\alpha - \beta(\pm)_1 \sqrt{-\frac{\pm b(\alpha-\beta) + \alpha c + d}{a(\pm)_1(\pm b + c)}}\right)} \tag{21}$$

où il faut prendre les quatre combinaisons possibles des signes $\pm$ et $(\pm)_1$. On démontre facilement que l'une de ces quatre racines est nécessairement imaginaire.

La formule (21) permet d'exprimer les points d'intersection, réels et imaginaires, de la ligne (7) avec une droite.

Nous nous bornerons, dans la présente Communication, à ces exemples élémentaires ; mais la théorie que nous venons d'exposer trouve aussi une application dans d'autres problèmes d'Analyse et de Physique Mathématique.

MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par CARL STÖRMER

CHRISTIANIA (NORVÈGE).

Dans les applications des équations différentielles sur les problèmes de la nature, où il faut connaître numériquement la valeur d'une intégrale, on est le plus souvent arrêté par le fait qu'il est impossible de trouver pour l'intégrale une expression analytique pouvant servir à un calcul numérique.

Cependant, comme il ne s'agit dans une telle application que d'une approximation plus ou moins grande, on peut avec beaucoup de succès appliquer les méthodes d'intégration numérique. Il y en a toute une série, par exemple les méthodes de Darwin, Runge, etc.

En 1904 j'eus besoin d'une pareille méthode pour calculer les trajectoires des corpuscules électrisés dans un champ magnétique, et en essayant diverses méthodes déjà connues, mais sans les trouver assez commodes pour mon but, je fus conduit moi-même à élaborer une méthode assez simple, dont je me suis servi ensuite. A l'aide de cette méthode, toute une série de trajectoires fut calculée par un travail numérique de mes assistants et de moi-même, qui monta jusqu'à 5.000 heures et qui dura pendant quelques années (1).

(1) Voir mes Mémoires : *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales* (Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève, juillet-octobre 1907), et *Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire*, I, II, III (Videnskabsselskabets Skrifter, *Math. naturv. kl.* 1913, Nr. 4, 10 et 14, Christiania).

Les calculs originaux, comprenant environ 3.000 pages in-folio avec 358 grandes planches, et encore 3.800 pages de développements mathématiques correspondants, appartiennent maintenant à la collection de manuscrits de la Bibliothèque de l'Université, Christiania.

Dans la pratique, cette méthode se montra très facile à suivre et donna des résultats très exacts.

Un travail récent d'un mathématicien russe, M. Kryloff (1), me donne l'occasion de rappeler de nouveau cette méthode à l'attention des géomètres. En effet, en comparant diverses méthodes d'intégration numérique connues, M. Kryloff arrive à la conclusion que ma méthode est la plus pratique, et qu'elle demande un travail beaucoup moindre que les autres méthodes quand il s'agit d'obtenir la même approximation.

M. Kryloff a aussi généralisé ma méthode à un système du premier ordre, de manière qu'il ne sera pas nécessaire de transformer un tel système en un autre du second ordre avant de commencer le calcul; cela constitue un progrès essentiel.

D'après cela, il me semble que la méthode mérite d'être plus connue, d'autant plus qu'elle peut rendre de réels services aux personnes qui s'occupent de l'application des équations différentielles. Nous allons en donner un court aperçu en renvoyant, pour les détails, aux Mémoires cités plus haut.

I. — Réduction des équations différentielles à une forme convenable pour l'application de la méthode d'intégration numérique.

Soit t la variable indépendante, et x, y, ... u les fonctions, définies par un système d'équations différentielles que nous supposons réduit à la forme canonique bien connue :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y, \ldots u, t), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y, \ldots u, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du}{dt} = h(x, y, \ldots u, t), \end{cases}$$

les fonctions aux seconds membres étant des fonctions connues de x, y, ... u et t, et le nombre d'équations étant égal au nombre de variables dépendantes.

---

(1) *Sur l'intégration numérique approximative des équations différentielles ordinaires* (Archives des Sciences physiques, cahier I et II, 1918, Moscou. En russe). M. G. de Meck, Christiania, a bien voulu me rendre le grand service de traduire ce Mémoire, et je lui exprime ici ma vive reconnaissance.

On en tire, en supposant les seconds membres dérivables par rapport aux variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

En y substituant les valeurs des dérivées d'après le système (1), le second membre devient une fonction connue de $x, y, \ldots u, t$.

On arrive ainsi au système suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}(x, y, \ldots u, t), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{G}(x, y, \ldots u, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} = \mathrm{H}(x, y, \ldots u, t). \end{cases}$$

C'est aux systèmes différentiels de cette forme que la méthode d'intégration numérique est immédiatement applicable.

Un cas particulier est celui où les fonctions au second membre ne contiennent pas t. C'est seulement à ce cas que nous avons jusqu'ici appliqué la méthode; mais, ainsi que M. Kryloff l'a remarqué, elle s'applique aussi bien aux cas généraux.

II. — Notations empruntées du calcul des différences. Formule caractéristique pour la méthode.

Soit $x(t)$ une fonction de t, et soit $x''(t)$ sa dérivée seconde. Considérons une série de valeurs équidistantes de t :

$$t_k = t_0 + k\Delta t,$$

Δt étant l'intervalle constant et k ayant les valeurs

$$\ldots n-2, \quad n-1, \quad n, \quad n+1, \quad n+2, \ldots.$$

Introduisons les notations :

$$x_k = x(t_k),$$
$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$
$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$$

et

$$\xi_k = x''(t_k)(\Delta t)^2,$$
$$\Delta\xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k,$$
$$\Delta^2\xi_k = \Delta\xi_{k+1} - \Delta\xi_k,$$
$$\Delta^3\xi_k = \Delta^2\xi_{k+1} - \Delta^2\xi_k,$$
$$\Delta^4\xi_k = \Delta^3\xi_{k+1} - \Delta^3\xi_k.$$

Avec ces quantités formons le tableau suivant :

(3)

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
t_{n-3}	x_{n-3}		$\Delta^2 x_{n-3}$		ξ_{n-3}		$\Delta^2\xi_{n-3}$		$\Delta^4\xi_{n-5}$
		Δx_{n-3}				$\Delta\xi_{n-3}$		$\Delta^3\xi_{n-4}$	
t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-3}$		ξ_{n-2}		$\Delta^2\xi_{n-3}$		
		Δx_{n-2}				$\Delta\xi_{n-2}$			
t_{n-1}	x_{n-1}		$\Delta^2 x_{n-2}$		ξ_{n-1}				
		Δx_{n-1}							
t_n	x_n								

Supposons qu'il s'agit d'exprimer $\Delta^2 x_{n-1}$ par

$$\xi_n, \quad \Delta\xi_{n-1}, \quad \Delta^2\xi_{n-2}, \quad \Delta^3\xi_{n-3} \quad \text{et} \quad \Delta^4\xi_{n-4},$$

nombres pas écrits ici, mais dont les places sont immédiatement au-dessous des nombres

$$\Delta^2 x_{n-2}, \quad \xi_{n-1}, \quad \Delta\xi_{n-2}, \quad \Delta^2\xi_{n-3}, \quad \Delta^3\xi_{n-4} \quad \text{et} \quad \Delta^4\xi_{n-5}.$$

En développant les différences d'après la formule de Taylor supposée applicable

ici, on trouve alors (1), en négligeant les différences $\Delta^5\xi$ du cinquième ordre, la formule approchée, formule qui est caractéristique pour notre méthode :

$$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right]. \tag{4}$$

On trouve aisément que si Δt est infiniment petit du premier ordre, cette formule est exacte aux infiniment petits du septième ordre près (2).

Cela posé, supposons que les nombres du tableau ci-dessus sont connus et que l'on sait calculer

$$\xi_n = x''(t_n)(\Delta t)^2,$$

ce qui aura lieu dans le cas d'intégration du système différentiel (2). Voici alors le procédé pour *calculer approximativement la valeur* x_{n-1} *à l'aide des nombres du tableau seulement :*

On met ξ_n à sa place, et à l'aide des soustractions on calcule successivement :

$$\Delta\xi_{n-1}, \qquad \Delta^2\xi_{n-2}, \qquad \Delta^3\xi_{n-3} \qquad \text{et} \qquad \Delta^4\xi_{n-4}$$

que l'on met également à leur place.

A l'aide de la formule approximative (4) on calcule alors $\Delta^2 x_{n-1}$. En le mettant à sa place, et en ajoutant Δx_{n-1}, on trouve Δx_n et ensuite x_{n+1}.

Cette valeur approximative x_{n+1} sera, pour Δt assez petit, très peu différente de la vraie valeur x_{n+1}. En effet, leur différence sera (3) :

$$x_{n+1} - \bar{x}_{n+1} = \frac{3}{40}x^{(7)}(t_n)(\Delta t)^7 + \ldots,$$

où $\bar{x}_{n+1}$ est la valeur approximative; donc *si* Δt *est infiniment petit du premier ordre, cette différence sera infiniment petite du septième ordre.*

---

(1) Voir les Mémoires cités.

(2) Voir *Résultats des calculs numériques*, III, p. 57, déjà cité.

(3) Voir *Résultats des calculs numériques*, III, *l. c.*

III. — La méthode d'intégration numérique.

La méthode d'intégration numérique du système différentiel (2) est maintenant facile à comprendre. Pour chacune des variables dépendantes x, y, ... u on dresse un tableau comme le tableau (3), et on applique la formule approximative (4); les ξ_n se trouvent en substituant pour les dérivées secondes leurs expressions comme fonctions de x, y, ... u et t, et en donnant à ces variables respectivement les valeurs x_n, y_n, ... u_n et t_n.

x_{n+1}, y_{n+1}, ... et u_{n+1} étant ainsi trouvées, on applique de nouveau le même procédé, et cela donne x_{n+2}, y_{n+2}, ... u_{n+2}, et ainsi de suite.

Un exemple fera bien comprendre les détails du calcul. Soit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 6y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -3x + 7y$$

et supposons que nous avons déjà calculé les tableaux :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
—0.3	2030448				36769				
		277334				6418			
—0.2	2307782		43289		43187		1241		
		320623				7659		254	
—0.1	2628405		50972		50846		1495		
		371595				9154			
0	3000000		60150		60000				
		431745							
0.1	3431745								

et

t	y	Δy	$\Delta^2 y$		η_1	$\Delta\eta_1$	$\Delta^2\eta_1$	$\Delta^3\eta_1$	$\Delta^4\eta_1$
—0.3	1289630				29361				
		199421				5639			
—0.2	1489051		35096		35000		1159		
		234517				6798		245	
—0.1	1723568		41915		41798		1404		
		276432				8202			
0	2000000		50142		50000				
		326574							
0.1	2326574								

On a ici, en admettant des indices négatifs :

$$x_1 = 3431745, \qquad \text{et} \qquad y_1 = 2326574,$$
$$\Delta x_0 = 431745, \qquad \Delta y_0 = 326574,$$
$$\Delta^2 x_{-1} = 60150 \qquad \Delta^2 y_{-1} = 50142.$$

On calculera d'abord ξ_1 et η_1 par les formules

$$\xi_1 = \frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2 = (-2x + 6y)(\Delta t)^2,$$
$$\eta_1 = \frac{d^2y}{dt^2}(\Delta t)^2 = (-3x + 7y)(\Delta t)^2$$

en y posant

$$x = x_1, \qquad x = y_1, \qquad \Delta t = \frac{1}{10},$$

ce qui donne

$$\xi_1 = 70960, \qquad \eta_1 = 59908,$$

et ensuite, par les soustractions, on en déduit :

$$\Delta\xi_0 = 10960, \qquad \text{et} \qquad \Delta\eta_0 = 9908,$$
$$\Delta^2\xi_{-1} = 1806, \qquad \Delta^2\eta_{-1} = 1706,$$
$$\Delta^3\xi_{-2} = 311, \qquad \Delta^3\eta_{-2} = 302,$$
$$\Delta^4\xi_{-3} = 57 \qquad \Delta^4\eta_{-3} = 57.$$

Cela posé, $\Delta^2 x_0$ et $\Delta^2 y_0$ seront données par la formule (4) :

$$\Delta^2 x_0 = \xi_1 + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{-1} + \Delta^3\xi_{-2} + \Delta^4\xi_{-3} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{-3}\right],$$
$$\Delta^2 y_0 = \eta_1 + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{-1} + \Delta^3\eta_{-2} + \Delta^4\eta_{-3} - \frac{1}{20}\Delta^4\eta_{-3}\right],$$

d'où, en substituant les valeurs

$$\Delta^2 x_0 = 70960 + \frac{1}{12}\left[1806 + 311 + 57 - \frac{1}{20}57\right],$$
$$\Delta^2 y_0 = 59908 + \frac{1}{12}\left[1706 + 302 + 57 - \frac{1}{20}57\right],$$

ce qui donne, en chiffres ronds :

$$\Delta^2 x_0 = 71141,$$
$$\Delta^2 y_0 = 60080.$$

Cela donne ensuite :

$$\Delta x_1 = 431745 + 71141 = 502886,$$
$$\Delta y_1 = 326574 + 60080 = 386654$$

et

$$x_2 = 3431745 + 502886 = 3934631,$$
$$y_2 = 2326574 + 386654 = 2713228$$

qui seront les valeurs correspondant à $t = 0.2$.

En mettant ces valeurs en place, les schèmes deviennent :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
—0.3	2030448				36769				
		277334				6418			
—0.2	2307782		43289		43187		1241		
		320623				7659		254	
—0.1	2628405		50972		50846		1495		57
		371595				9154		311	
0	3000000		60150		60000		1806		
		431745				10960			
0.1	3431745		71141		70960				
		502886							
0.2	3934631								

et

t	y	Δy	$\Delta^2 y$		η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
—0.3	1289630				29361				
		199421				5639			
—0.2	1489051		35096		35000		1159		
		234517				6798		245	
—0.1	1723568		41915		41798		1404		57
		276432				8202		302	
0	2000000		50148		50000		1706		
		326574				9908			
0.1	2326574		60080		59908				
		386654							
0.2	2713228								

De cette manière on peut continuer, et voici les premières valeurs que donne cette méthode (1) :

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x	3934631	4521836	5209188	6015718	6964341	8082681	9404075
y	2713228	3171977	3717362	4366995	5142220	6068926	7178531

Dans le cas actuel, il est facile de contrôler l'exactitude de la méthode ; en effet, le système est complètement intégrable, et l'intégrale particulière tabulée ici est la suivante :

$$x = 1000000(2e^{t} + e^{2t}),$$
$$y = 1000000(e^{t} + e^{2t}).$$

Voici les valeurs calculées par ces formules :

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x	3934631	4521837	5209191	6015724	6964355	8082704	9404116
y	2713228	3171978	3717366	4367003	5142236	6068952	7178575

Comme on le voit, l'écart n'est pas grand.

Si l'on prend un intervalle égal à la moitié, c'est-à-dire égal à 0,05, et si l'on fait le calcul avec deux chiffres de plus, on arrive pour $t = 0.8$ aux valeurs :

$$x = 9404112,$$
$$y = 7178571$$

qui diffèrent des valeurs exactes de quelques unités seulement.

Dans le Mémoire *Résultats des calculs numériques*, etc., n° III, déjà cité, nous avons aussi appliqué la méthode à un autre exemple, à savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Nous avons calculé ici l'intégrale particulière

$$x = 10000000 \cdot \cos t$$

(1) Voir le Mémoire déjà cité, *Résultats des intégrations numériques*, III.

en commençant avec la valeur 10000000 pour $t = 0$ et en choisissant l'intervalle

$$\Delta t = \frac{\pi}{60} = \text{trois degrés.}$$

En calculant toujours x avec neuf chiffres, on trouve alors, après soixante intervalles de calcul, la valeur extrêmement approchée :

$$x = -10000000{,}26 \quad \text{pour} \quad t = \pi$$

avec une erreur de 0,26 seulement.

Dans le Mémoire de M. Kryloff on trouve des exemples numériques calculés d'après d'autres méthodes, et ensuite d'après la mienne comme comparaison.

Il serait facile de multiplier les exemples, et chacun peut le faire par soi-même; nous ne nous y arrêterons donc pas.

IV. — Remarques générales sur le choix de la variable indépendante. Procédés pour le commencement du calcul et pour la bi-section ou dédoublement de l'intervalle.

Comme la méthode suppose applicable la série de Taylor, et comme, d'autre part, cela aura lieu partout où l'intégrale en question est une fonction holomorphe de t, il *sera bon dès le commencement de choisir une variable indépendante t de manière que les intégrales soient fonctions holomorphes de t dans un domaine aussi étendu que possible.*

Si pendant le calcul on s'approche d'une valeur de t donnant un point singulier de l'intégrale, cela se fera voir d'ailleurs sur les séries de différences, les séries d'ordre croissant ne diminuant pas aussi vite qu'à l'ordinaire, et il faudra alors choisir un intervalle plus petit; en général, la bi-section suffit, c'est-à-dire le choix de l'intervalle $\frac{1}{2}\Delta t$ au lieu de Δt. Pour dresser le schème correspondant, il faut trouver des formules d'interpolation correspondantes. Nous les donnerons ici, en renvoyant pour la démonstration aux Mémoires cités (1).

$$x_{n-\frac{1}{2}} = x\left(t_n - \frac{1}{2}\Delta t\right) = x_n - \frac{\Delta x_n + \Delta x_{n-1}}{4} + \frac{\xi_n}{8} + \frac{\Delta\xi_n + \Delta\xi_{n-1}}{32}$$
$$+ \frac{\Delta^2\xi_{n-1}}{384} - \frac{5}{1536}\left[2^3\Delta\xi_{n-2} + \Delta^4\xi_{n-3}\right] - \frac{\Delta^4\xi_{n-1}}{5120} + \dots.$$

(1) Voir *Sur les trajectoires*, etc., § 13.

En remplaçant n par $n-1$, on calculera de même $x_{n-\frac{3}{2}}$, et par des soustractions on aura les différences premières et secondes. D'ailleurs ces différences secondes peuvent être calculées indépendamment par la formule approchée :

$$\Delta^2 x_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\xi_n}{4} + \frac{\Delta^2 \xi_{n-1}}{32} - \frac{\Delta^4 \xi_{n-2}}{384}.$$

Ensuite on calculera, à l'aide des équations différentielles, les nouvelles ξ :

$$\xi_{n-\frac{1}{2}} = x''\left(t_n - \frac{1}{2}\Delta t\right)\frac{(\Delta t)^2}{4}$$

et les schèmes des variables dépendantes x, y, ... u avec intervalle $\frac{1}{2}\Delta t$ étant ainsi dressés, le calcul continuera d'après la méthode exposée. Les quantités $\Delta^4\xi$ étant du sixième ordre en Δt, elles seront à peu près $\frac{1}{64}$ part des différences dans le cas de l'intervalle Δt.

Si, d'un autre côté, les différences $\Delta^4\xi$ deviennent trop petites, on peut choisir l'intervalle égal à $2\Delta t$, et la formation des schèmes est alors immédiate.

Quant au commencement du calcul, on peut procéder avec approximations successives jusqu'à ce qu'on ait trouvé un intervalle Δt d'une grandeur convenable et des valeurs assez exactes des différences du schème. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de calculer l'intégrale correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$\left.\begin{array}{llll} x = x_0, & y = y_0, & \ldots & u = u_0 \\ \dfrac{dx}{dt} = x'_0, & \dfrac{dy}{dt} = y'_0, & \ldots & \dfrac{du}{dt} = u'_0 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

où ces équations seront choisies de manière à satisfaire aux intégrales premières, si on les a déjà trouvées; si l'on est par exemple sorti du système (1), il faut choisir les x_0, y_0, ... u_0, x'_0, y'_0, ... u'_0, de manière à satisfaire à ce système pour $t = 0$.

Ces intégrales premières peuvent d'ailleurs servir à l'épreuve quand on veut découvrir des erreurs pendant l'application de la méthode d'intégration numérique; en effet, si pendant ce calcul l'intégrale première cesse d'être vérifiée, cela montre que l'on a commis une erreur de calcul.

Cela posé on calculera, à l'aide des équations différentielles (2), les dérivées secondes.

$$x''_0, \quad y''_0, \quad \ldots \quad u''_0,$$

ce qui donne

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad \ldots \quad \omega_0 \qquad (\text{où } \omega_0 = u''_0(\Delta t)^2).$$

En choisissant un Δt assez petit on peut alors calculer les valeurs $x_1, y_1, \ldots u_1$ correspondant à $t = \Delta t$ par la formule de Taylor arrêtée au terme du second ordre :

$$x_1 = x_0 + x_0' \Delta t + \frac{x_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2,$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta t + \frac{y_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1 = u_0 + u_0' \Delta t + \frac{u_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2$$

et la connaissance de ces valeurs approchées permet de calculer $\xi_1, \eta_1, \ldots \omega_1$. En mettant ces nombres en place, on aura ainsi par des soustractions le schème suivant :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\ldots$
0	x_0				ξ_0			
		Δx_0				$\Delta\xi_0$		
Δt	x_1				ξ_1			

et des schèmes pareils pour $y, \ldots$ et u.

Cela posé, on remplace en première approximation la formule (4) par la suivante :

(4′) $$\Delta^2 x_{n-1} = \xi_n$$

et à l'aide de cette formule on calculera

$$\Delta^2 x_0 = \xi_1, \quad \Delta^2 y_0 = \eta_1, \quad \ldots \quad \Delta^2 u_0 = \omega_1$$

qu'on met à leurs places, ce qui donne ensuite, par des additions, les nombres $\Delta x_1, \Delta y_1, \ldots \Delta u_1$ et $x_2, y_2, \ldots u_2$, de manière que le schème pour x devient :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\ldots$
0	x_0				ξ_0			
		Δx_0				$\Delta\xi_0$		
Δt	x_1		$\Delta^2 x_0$		ξ_1			
		Δx_1						
$2\Delta t$	x_2							

Pour $y, \ldots u$ on aura des schèmes pareils.

Une nouvelle application du système (2) donne ξ_2, η_2, ... ω_2, et à l'aide de l'équation (4') on en déduit $\Delta^2 x_1$, $\Delta^2 y_1$, ... $\Delta^2 u_1$, qu'on met à leur place; par des additions on en déduit Δx_2, Δy_2, ... Δu_2, et enfin x_2, y_2, ... u_2, et ainsi de suite.

On continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu assez de valeurs pour calculer les différences de ξ, η, ... ω jusqu'au quatrième ordre inclusivement, et à l'aide de ces différences, on calculera enfin les dérivées supérieures

$$\begin{aligned} &x_0''', \quad x_0^{IV}, \quad x_0^{V}, \quad x_0^{VI}, \\ &y_0''', \quad y_0^{IV}, \quad y_0^{V}, \quad y_0^{VI}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_0''', \quad u_0^{IV}, \quad u_0^{V} \text{ et } u_0^{VI}. \end{aligned}$$

En effet, on peut dans ce calcul se servir des formules connues suivantes se rapportant au schème (3) et faciles à démontrer (1) :

$$x_n'''.(\Delta t)^3 = \frac{\Delta^2 \xi_n + \Delta^2 \xi_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 \xi_{n-1} + \Delta^3 \xi_{n-2}}{12},$$

$$x_n^{IV}.(\Delta t)^4 = \Delta^2 \xi_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 \xi_{n-2},$$

$$x_n^{V}.(\Delta t)^5 = \frac{\Delta^3 \xi_{n-1} + \Delta^3 \xi_{n-2}}{2},$$

$$x_n^{VI}.(\Delta t)^6 = \Delta^4 \xi_{n-2},$$

où l'on a négligé les différences du cinquième ordre de ξ.

En substituant les valeurs des dérivées supérieures dans la formule de Taylor

$$x_1 = x_0 + x_0' \Delta t + \frac{x_0''}{1.2}(\Delta t)^2 + \frac{x_0'''}{1.2.3}(\Delta t)^3 + \dots,$$

on calculera des valeurs plus exactes de x_1 et de même de y_1, ... u_1, et on *recommence le calcul des schèmes.*

Par tâtonnement on arrive ainsi finalement à des valeurs assez exactes pour que l'on puisse continuer avec confiance le calcul d'après la méthode exposée. Δt est alors supposé choisi assez petit pour que les différences du cinquième ordre de ξ, η, ... ω soient négligeables.

On peut naturellement aussi trouver des dérivées supérieures en différentiant les

(1) Voir le Mémoire *Sur les trajectoires des corpuscules*, etc., § 13, déjà cité.

équations différentielles plusieurs fois, comme on le fait lorsqu'il s'agit de développer l'intégrale en série. Cependant la méthode par approximations successives conduit en général plus vite au but.

L'usage des séries de différences que cette méthode d'intégration numérique a de commun avec plusieurs autres méthodes est très utile dans la pratique; en effet, une erreur dans le calcul se relèvera presque immédiatement en rendant les séries de différences irrégulières, et, d'autre part, on aura, dans le fait que les quatrièmes différences de ξ, η, ... ω sont très petites par rapport à ces quantités elles-mêmes, de bonnes indications que l'intervalle est bien choisi.

Il est inutile de rappeler quel champ immense d'application aura cette méthode d'intégration numérique. Dans le problème des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, problème fondamental pour la théorie des aurores polaires, la méthode a déjà rendu des services énormes.

D'après M. Kryloff, elle a été appliquée en Russie au problème de la stabilité des navires.

Un problème où elle rendra sans doute aussi de très grands services sera celui *des trois corps*, où l'ancienne méthode de Darwin a déjà été appliquée avec beaucoup de succès (*Acta mathematica*, T. 21). On sait qu'une méthode semblable à la mienne, mais, d'après mon opinion, pas aussi simple, a récemment, dans les mains de l'astronome Elis Strömgren et ses élèves, été extrêmement utile en élucidant plusieurs cas intéressants du problème restreint et même du problème général.

SUR LA

THÉORIE ALGÉBRIQUE DES FORMES A SÉRIES DE n VARIABLES

PAR J. DERUYTS

(LIÈGE)

On peut établir que :

Deux systèmes transformables $(p)(p')$ *sont cogrédients* [*ou contragrédients*] *sauf une substitution linéaire, quand il est possible d'associer par couples les termes* $p\,p'$, *de manière que les poids des termes correspondants, relativement à tous les indices* $1, 2 \ldots n$ *aient pour différence* [*ou pour somme*] *une même constante.*

Cela résulte des considérations suivantes :

1° Tout système transformable est équivalent par substitution linéaire au système des coefficients linéairement indépendants d'un ou de plusieurs covariants primaires (*Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1911);

2° Les systèmes transformables élémentaires, correspondant aux covariants primaires, peuvent être séparés les uns des autres, quand on connaît les poids des semi-invariants sources des covariants primaires.

REMARQUES SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR P. ZERVOS,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ D'ATHÈNES

Dans un Mémoire fondamental *Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, tome X) M. Goursat a fait une étude complète du problème de Bäcklund, à savoir du problème qui consiste à trouver deux multiplicités à deux dimensions d'éléments de contact $m_2(x, y, z, p, q)$ et $M_2(X, Y, Z, P, Q)$ se correspondant élément par élément de telle façon que les éléments correspondants vérifient quatre relations données à l'avance.

$$F_i(x, y, z, p, q;\ X, Y, Z, P, Q) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

M. Goursat introduit une variable auxiliaire u par l'adjonction d'une nouvelle relation $F_5 = u$ et il remplace le système (1) par un système équivalent :

$$X = f_1(x, y, z, p, q, u), \quad Y = f_2(\ ), \quad Z = f_3(\ ), \quad P = f_4(\ ), \quad Q = f_5(\ ). \tag{2}$$

On peut évidemment d'une infinité de manières remplacer le système (1) par un système de la forme (2).

Le problème de Bäcklund est alors défini par les formules (2) où les x, y, z, p, q et X, Y, Z, P, Q doivent être des fonctions de deux variables indépendantes, vérifiant les équations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0. \tag{3}$$

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) devient en vertu des (2) et (3)

$$a\,dx + b\,dy + c\,dp + e\,dq + h\,du = 0. \tag{5}$$

Ainsi pour résoudre le problème de Bäcklund il suffit de rechercher les intégrales à deux dimensions d'un système de Pfaff à six variables, formé par les équations (3) et (5).

On sait les études approfondies de M. Cartan sur le problème de Pfaff et ses résultats fondamentaux (Voir surtout *Annales de l'École Normale supérieure*, années 1899, 1900, 1910 et *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1901). M. Goursat en utilisant des notions fondamentales introduites par M. Cartan a fait voir d'une manière très simple comment on peut toujours ramener un système de Pfaff à six variables à une des formes suivantes que nous appellerons dans la suite des formes réduites :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \pi_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \pi_2 = dp - a\,dq - a\,dx - b\,dy = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} \pi_1 = dy_3 - y_2\,dy_1 = 0, \\ \pi_2 = dy_5 - y_6\,dy_4 - a\,dy_1 - b\,dy_2 = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \pi_1 = dy_3 - y_2\,dy_1 = 0, \\ \pi_2 = dy_5 - y_6\,dy_4 = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{IV})\quad \begin{cases} \pi_1 = dy_3 - y_2\,dy_1 = 0, \\ \pi_2 = dy_4 + y_5\,dy_1 + y_6\,dy_2 = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} \pi_1 = du = 0, \\ \pi_2 = dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

auxquelles nous ajoutons les formes réduites pour un système de Pfaff de classe inférieure à six.

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} \mathrm{W}_1 = dy_2 - y_2\,dy_1 = 0, \\ \mathrm{W}_2 = dy_4 - f\,dy_1 - y_5\,dy_2 = 0 \end{cases} \quad (f \text{ étant une fonction quelconque de } y_1, y_2, y_3, y_4, y_5).$$

$$(\mathrm{VII})\quad \begin{cases} \mathrm{W}_1 = dy_2 - y_4\,dy_1 = 0, \\ \mathrm{W}_2 = dy_3 - y_5\,dy_1 = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{VIII})\quad \begin{cases} \mathrm{W}_1 = dy_2 - y_3\,dy_1 = 0, \\ \mathrm{W}_2 = dy_3 - y_4\,dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{IX})\quad \begin{cases} \mathrm{W}_1 = dy_1 = 0, \\ \mathrm{W}_2 = dy_3 - y_4\,dy_2 = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{X})\quad \begin{cases} dy_1 = 0, \\ dy_2 = 0. \end{cases}$$

Nous trouvons dans le Mémoire de M. Goursat comment on intègre les systèmes ci-dessus (pp. 97, 98, 99). L'intégration du système de la forme générale (I) se ramène à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une forme particulière (Goursat, Mémoire cité, p. 101).

Rappelons-nous maintenant que nous sommes partis d'un système de quatre équations de la forme (1). Nous remarquons qu'on peut poser le problème suivant :

Étant données n équations $(n<4)$ de la forme

$$F_i(x, y, z, p, q;\ X, Y, Z, P, Q) = 0 \tag{6}$$

et une des formes réduites (B), déterminer $4-n$ relations de la même forme

$$F_k(x, y, z, p, q;\ X, Y, Z, P, Q) = 0, \tag{7}$$

telles que : En partant du système formé par les équations (6) et (7) on arrive à la forme réduite (B); et on peut naturellement étudier le degré, pour ainsi dire, de l'indétermination de ce problème.

On voit qu'on peut ramener l'étude de ce problème à l'étude des systèmes différentiels. Mais ici, il s'agit de faire la remarque qu'on peut chercher des conditions sous lesquelles il est possible, sans aucune quadrature et d'une manière élémentaire, de résoudre le problème posé.

Prenons, par exemple, le système

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad P = q$$

et comme forme réduite la forme (III).

Le système (3, 4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} W_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ W_2 = dZ - q\,dx - Q\,dy = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Si par b nous désignons une constante arbitraire on aura évidemment le système

$$\begin{cases} W_2 + bW_1 = 0, \\ W_2 - bW_1 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

équivalent au système (8). Ainsi, le système (8) peut s'écrire :

$$\begin{cases} d(Z + bz) - (q + bp)\,dx - (Q + bq)\,dy = 0, \\ d(Z - bz) - (q - bp)\,dx - (Q - bq)\,dy = 0. \end{cases} \tag{9'}$$

En comparant les deux systèmes (9') et (III) on voit qu'il suffit pour notre but d'avoir

$$(q + bp)\,dx + (Q + bq)\,dy = y_2 dy_1,$$
$$(q - bp)\,dx + (Q - bq)\,dy = y_6 dy_4$$

ou encore

$$(10)\qquad \begin{cases} q(dx + bdy) + (bpdx + Qdy) = y_2 dy_1, \\ q(dx - bdy) - (bpdx - Qdy) = y_0 dy_1. \end{cases}$$

Nous avons ici à notre disposition la fonction Q et la constante b qui ne sont pas encore définies. La forme (10) indique de poser

$$x + by = y_1 \quad \text{et} \quad x - by = y_1.$$

Il suffit, en effet, d'avoir

$$bpdx + Qdy = qf(dx + bdy),$$
$$bpdx - Qdy = qf(dx - bdy),$$

f étant une fonction quelconque de x, y, z, p, q — ou encore

$$bp\left(dx + \frac{Q}{bp}dy\right) = qf(dx + bdy),$$

$$bp\left(dx - \frac{Q}{bp}dy\right) = qf(dx - bdy).$$

On voit immédiatement qu'il faut prendre pour cela

$$\frac{Q}{bp} = b \quad \text{et} \quad bp = qf,$$

d'où on déduit

$$Q = b^2 p \quad \text{et} \quad f = \frac{bp}{q}.$$

Alors les premiers membres des (10) prennent la forme

$$(q + bp)\, d(x + by),$$
$$(q - bp)\, d(x - by),$$

à savoir la forme que nous voulions.

Et le système (9′) peut s'écrire :

$$(11)\qquad \begin{cases} d(Z+bz)-(q+bp)\,d(x+by)=0, \\ d(Z-bz)-(q-bp)\,d(x-by)=0 \end{cases}$$

et par suite : On peut prendre comme quatrième relation $F_4 = 0$ la relation

$$(12)\qquad Q - b^2 p = 0,$$

et on trouve ainsi un système

$$(13)\qquad X = x, \qquad Y = y, \qquad P = q, \qquad Q = b^2 p$$

qui conduit au système de Pfaff (11) qui appartient à la forme réduite (III). La vérification est immédiate.

Si, en particulier, on prend $b = i$ nous trouvons le système classique de la théorie des fonctions analytiques

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad P = q, \qquad Q = -p$$

et au système (11) équivaudrait le système :

$$d(Z+iz) = (q+ip)\,d(x+iy),$$
$$d(Z-iz) = (q-ip)\,d(x-iy)$$

qui se trouve dans le Mémoire cité de M. Goursat (page 114).

Nous pourrions multiplier les exemples et faire voir qu'il est possible d'indiquer une marche commune qu'on peut suivre pour quelques cas particuliers. Mais nous nous contentons ici de faire d'autres remarques relatives.

Ainsi, nous pouvons poser un problème analogue au précédent : Soient données quatre relations de la forme (1) :

Trouver des théorèmes généraux qui contiennent des propositions relatives au problème de Bäcklund qui soient vraies, *certaines des fonctions* F *étant quelconques* ou *ayant une forme générale déterminée*, comme il arrive, par exemple, pour la proposition d'après laquelle les équations de transformations

$$X = \varphi_1(x, y, z, p, q),$$
$$Y = \varphi_2(x, y, z, p, q),$$
$$Z = \varphi_3(x, y, z, p, q),$$
$$F(x, y, z, p, q;\ P, Q) = 0$$

nous conduisent toujours à une équation du second ordre([1] [2]). Cette proposition est vraie, F étant une fonction *quelconque* de x, y, z, p, q, P, Q.

Dans le même ordre d'idées on pourrait travailler directement pour un système de deux équations simultanées du premier ordre à deux fonctions inconnues, et trouver des résultats relatifs à ces systèmes([3]).

([1]) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, chapitre IX.

([2]) Clairin, *Sur les transformations de Bäcklund* (Annales de l'École Normale supérieure, 1902, p. 13).

([3]) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, page 259 et suivantes.

SUR LA TRANSFORMATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES

Par François RÀDL

(PRAGUE)

[1] Par une transformation on peut déduire la forme générale de certaines équations différentielles linéaires ordinaires

$$f(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

que l'on peut intégrer seulement à l'aide des quadratures.

Écrivons cette équation dans la forme du système

$$\begin{cases} Y' + aY + hy = 0, \\ Y = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} y, \end{cases} \tag{2}$$

a étant une fonction arbitraire; par l'élimination de Y nous obtiendrons l'équation (1), les valeurs $q_1 \ldots q_{n-1}$, h sont donc exprimables par les coefficients $p_1 \ldots p_n$. Si nous éliminons au contraire y, on obtient une équation de la forme (1) avec autres coefficients, donc une équation transformée f_1; cette équation donne de la même manière une équation f_2, et en continuant ainsi on peut développer la série

$$f, f_1, \ldots f_i, \ldots$$

que l'on peut aussi élargir sur l'autre côté à la série des équations

$$\ldots f_{-j}, \ldots f_{-1}, f, f_1, \ldots f_i, \ldots \tag{3}$$

deux équations voisines avec l'indice négatif dépendant l'une de l'autre de la même manière que les équations avec l'indice positif.

En écrivant chacune équation de cette série dans la forme du système (2), il est évident que généralement à l'équation f_i appartient la valeur h_i. Si cette valeur disparaît, l'ordre de l'équation f_i peut être abaissé d'une unité; l'équation d'ordre $n-1$, qui résultera de cette manière, peut être éventuellement abaissée par la transformation répétée à une équation d'ordre $n-2$, et en continuant ainsi on peut arriver à l'équation du premier ordre. On peut donc ensuite résoudre seulement par les quadratures l'équation f_i et par conséquent toutes les équations de la série (3).

Il s'agit de développer la forme des coefficients de toutes équations que l'on peut résoudre par cette méthode.

[**2**] Pour plus de simplicité, supposons dans le suivant $n=3$, c'est-à-dire l'équation

$$f(y) = y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0, \tag{4}$$

la généralisation pour n arbitraire étant ensuite évidente. Mais n doit être supposé

$$n \gtrless 3,$$

le cas spécial pour $n=2$ exige une recherche indépendante que nous ne voulons pas ici développer.

L'équation (4) peut être exprimée par le système

$$\begin{cases} Y' + aY + hy = 0, \\ Y = \bar{y}'^{-1} + a\bar{y} + h(h)y, \\ \bar{y} = y' + qy, \end{cases} \tag{5}$$

en éliminant $\bar{y}$ on obtient le système (2); nous pouvons écrire la même équation aussi sous la forme du système

$$\begin{cases} Y' + pY + k(k)\bar{y} + ky = 0, \\ \bar{y} = y' + ay, \\ Y = \bar{y}' + a\bar{y}, \end{cases} \tag{6}$$

par l'élimination de $\bar{y}$, Y on obtient dans les deux cas l'équation (4). Nous avons introduit dans ces systèmes les valeurs h, k, $h(h)$, $k(k)$, que nous voulons, à cause de certaines propriétés d'invariances que nous omettons ici, appeler *les invariants*. A l'équation f_i appartiennent les valeurs correspondantes h_i, k_i, $h_i(h)$, $k_i(k)$.

Supposons maintenant qu'on ait pour l'équation f_i simultanément

$$h_i = 0, \qquad h_i(h) = 0, \tag{7}$$

il est ensuite évident que l'intégration de cette équation exige seulement les quadratures. On pourrait facilement rechercher le cas plus général où disparaît h_i seulement, $h_i(h)$ étant différent de zéro; on doit ensuite transformer l'équation résultante d'ordre $n-2$, et, après un certain nombre de transformations, nous pourrions admettre que la valeur correspondante $h(h)$ disparaît. Mais on doit ensuite supposer la connaissance de la théorie du cas $n=2$, que nous voulons exclure.

L'objet du problème est maintenant d'exprimer les coefficients de l'équation f par les coefficients de l'équation f_i, et ce sont les invariants à l'aide desquels on peut résoudre le problème.

En effet, les invariants h, k, $h(h)$ étant donnés, l'équation f a la forme

$$y''' + \left[\int\int (k-h)dx^2 - \int h(h)dx\right] y'' + \left[2\int (k-h)dx - h(h)\right] y' + ky = 0, \tag{8}$$

Si donc on peut déduire la forme générale pour les invariants h, $h(h)$, k de l'équation f, de la condition (7), le problème est résolu.

[3] Nous déduirons auparavant les invariants h_{i-1}, $h_{i-1(h)}$, k_{i-1} de l'équation f_{i-1}. Pour rechercher la dépendance des invariants de deux équations voisines f, f_1, écrivons l'équation (4) sous la forme du système

$$f(y) = Y' + aY + hy = 0, \qquad Y = y'' + q_1 y' + q_2 y;$$

si nous écrivons ce système dans l'ordre inverse

$$\begin{cases} f_1(y) = h\left[\left(\dfrac{y}{h}\right)'' + q_1\left(\dfrac{y}{h}\right)' + q_2\dfrac{y}{h}\right] + hY = 0, \\ y = Y' + aY, \end{cases} \tag{9}$$

nous obtiendrons un système qui définit l'équation transformée f_1 par l'élimination de y. Mais on peut exprimer l'équation (4) aussi sous la forme du système

$$\begin{cases} Y'' + r_1 Y' + r_2 Y + ky = 0, \\ Y = y' + ay, \end{cases} \tag{10}$$

par comparaison des systèmes (9), (10), on conclut :

$$k_1 = h.$$

On reconnaît aussi tout de suite la dépendance des invariants des expressions différentielles

$$y'' + q_1 y' + q_2 y, \qquad h\left[\left(\frac{y}{h}\right)'' + q_1\left(\frac{y}{h}\right)' + q_2\frac{y}{h}\right],$$

dont la deuxième est déduite de la première par la substitution $y\left|\frac{y}{h}\right.$, de sorte que :

$$k = k_1 + \overline{k_1'(k)},$$
$$h(h) = \overline{h_1(k)},$$

les lignes désignent que l'on doit respecter la substitution $y\left|\frac{y}{h}\right.$, $h(x)$ signifie l'invariant h de l'expression

$$Y'' + r_1 Y' + r_2 Y.$$

En développant ces relations, on peut écrire pour les invariants des équations f_i, f_{i-1} :

$$h_{i-1} = k_i,$$
$$k_{i-1} = k_i + \left(\frac{k_i''}{k_i} + q_1\frac{k_i'}{k_i} + q_1' + q_2\right)',$$
$$h_{i-1}(h) = -\frac{k_i''}{k_i} + 2\left(\frac{k_i'}{k_i}\right)^2 + q_1\frac{k_i'}{k_i} + q_2$$

et ainsi tous les trois invariants de l'équation f_{i-1} sont exprimés par ceux de l'équation f_i.

Je citerai ici seulement les formules résultantes qui définissent indépendamment les invariants de l'équation arbitraire f_{i-p} de la série (3) :

$$h_{i-p} = h_{i-p+1},$$
$$k_{i-p} = \frac{d^3 l}{dx^3}\,\mathrm{H}_p\mathrm{M}_p,$$
$$h_{i-p}(h) = \frac{d^2 l}{dx^2}\,\frac{\mathrm{N}_p}{\mathrm{H}_p},$$

M_p, N_p étant certaines expressions dépendant de A, H; la valeur A est définie par le fait que la substitution

$$y \left| e^{-\int q dx} \right.$$

dans l'équation f_i donne les formules :

$$h_i = \frac{d^i l\Lambda}{dx^i};$$

$$H_p = \begin{vmatrix} \Lambda & x\Lambda & x^2\Lambda & \dots & x^p\Lambda & \Lambda' & \Lambda'' & \dots & \Lambda^{(p)} \\ \Lambda' & (x\Lambda)' & (x^2\Lambda)' & \dots & (x^p\Lambda)' & \Lambda'' & \Lambda''' & \dots & \Lambda^{(p+1)} \\ \vdots & & & & & & & & \\ \Lambda^{(2p)} & (x\Lambda)^{2p} & \dots & & & & & & \Lambda^{(3p)} \end{vmatrix}.$$

D'après (8), les coefficients de l'équation f sont donc établis. On peut aussi sans difficulté écrire l'intégrale générale de chaque équation de la série (3).

La valeur A est jusqu'ici arbitraire. On peut le déterminer par la condition

$$h_{-j} = 0$$

que l'on peut aussi écrire, comme on peut le démontrer,

$$H_{-j-1} = 0,$$

de sorte que la série (3) est limitée à la droite comme à la gauche.

[4] On peut inversement supposer, qu'on a pour l'équation f_{-j} simultanément les conditions

$$h_{-j} = 0, \qquad h_{-i}(k) = 0,$$

la série est finie à gauche. On trouve ainsi d'autres équations, dont la théorie est tout à fait analogue. On peut déterminer ces équations plus proche par la condition

$$h_i = 0.$$

Il est facile de rechercher le cas spécial, où l'équation f est équivalente à son équation adjointe; ensuite les équations f_i, f_{-i} de la série (3) sont aussi adjointes, et les deux cas, qui supposent la disparition ou de h, $h(h)$ ou de k, $k(k)$, se confondent.

Soit à la fin remarqué que ces recherches sont analogues aux déductions de M. Darboux sur l'équation de Laplace.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

ET UNE FAMILLE DE FONCTIONS ENTIÈRES

Par M. PIERRE BOUTROUX

(PARIS)

M'étant proposé de faire une étude générale des équations

$$(e) \qquad y' + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

ou

$$(e\,bis) \qquad z z' = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3, \qquad z = y^{-1},$$

dans lesquelles les A sont des polynômes en x, j'ai été amené à classer ces équations d'après le type de croissance auquel appartiennent leurs branches d'intégrales suivies sur les rayons rectilignes menés vers $x = \infty$. Si $A_0 \neq 0$, les branches $z(x)$ sont du type *méromorphoïde*. Si $A_0 = 0$ et $A_1 \neq 0$, elles sont du type *exponentiel*. Si $A_0 = A_1 = 0$, l'équation a des branches du type *algébroïde* (asymptotes à des fonctions algébriques pour x tendant vers l'infini).

Dans ce dernier cas, une distinction est à faire. Appelant m_2 et m_3 les degrés en x de A_2 et A_3, je dis que l'équation est du type A, B ou C suivant que m_3 est *supérieur*, *inférieur* ou *égal* à $2m_2 + 1$. Les équations du type A ont toutes leurs branches du type algébroïde au voisinage de $x = \infty$. Il n'en est pas de même des équations du type B.

Pour ce motif, je me suis attaché tout d'abord aux équations du type A. Et ces équations paraissent bien être, en effet, celles dont l'étude est le plus instructive. Supposant, pour fixer les idées, $m_3 = 3$, j'ai reconnu(1) que l'ensemble des déterminations de l'une quelconque des fonctions (multiformes) intégrales de l'équation

(1) Cf. notamment *Comptes Rendus* 1919 et 1920; *Annals of Mathematics*, Princeton, 1920.

est donné par l'ensemble des substitutions d'un groupe discontinu assez remarquable. Le groupe en question peut être engendré au moyen d'un nombre limité de substitutions fondamentales, et il se trouve que ces dernières sont en même nombre que les *points transcendants de l'équation à distance* finie et correspondent respectivement à ces points(1).

La connexion ainsi mise en évidence entre les points transcendants de l'équation et certaines propriétés, probablement fondamentales, des intégrales, paraît tenir à des causes profondes. Il est permis de croire que, d'une façon générale, la structure des intégrales des équations rationnelles du premier ordre est entièrement déterminée par le nombre et la nature de leurs points transcendants. Mais, s'il en est ainsi, ai-je pensé, une question nouvelle se pose. J'avais provisoirement négligé les équations (*e*) du type B et m'étais attaché aux seules équations du type A parce que les branches d'intégrales de ces dernières ont une croissance plus simple. Elles sont toutes algébroïdes. Au contraire, les équations du type B présentent des branches qui, au voisinage de $x = \infty$ (sur tout ensemble de rayons convergents), prennent une infinité de fois toute valeur donnée. C'est là une complication. Mais, par contre, il existe des équations du type B — celles pour lesquelles A_3 se réduit à une constante — qui se trouvent n'avoir *aucun point transcendant à distance* finie(2). Les conclusions des recherches dont je viens de parler m'amenèrent à penser que cette absence de points transcendants devait se manifester, dans la structure des intégrales, par des caractères particnlièrement simples. C'est, en effet, ce que j'ai pu constater en étudiant les plus simples des équations du type B (non intégrables par méthodes connues).

Dans la présente Communication, je me bornerai au cas $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, c'est-à-dire à l'équation

$$z z' = 2xz + 2. \tag{1}$$

En partant des considérations que je viens d'indiquer, on aboutit aux conclusions suivantes : Tandis que pour l'équation du type A, l'ensemble des points critiques algébriques d'une même intégrale [fonction multiforme $z(x)$] admet en général pour point-limite tout point du plan x, les points critiques d'une intégrale quelconque de (1) n'admettent *d'autre point-limite que* $x = \infty$. On en déduit que *toute intégrale* $z(x)$ *de* (1) *peut être définie par une relation* $F(x, z) = 0$ *où* F *est une fonction en-*

(1) Ces points sont les racines de A_3 où, lorsque $z = 0$, l'équation (*e bis*) se présente sous la forme $z' = \frac{0}{0}$.

(2) Plus généralement, toute équation (*e*) où A_3 est une constante, jouit de la même propriété et peut être étudiée par des méthodes analogues à celles que nous développerons plus bas.

tière de x et z. *Cette fonction entière est d'ordre* 3 *en* x, *d'ordre* $\frac{3}{2}$ en z. Elle peut être étudiée en détail par des méthodes analogues à celles que j'ai employées pour l'étude des *fonctions entières de M. Painlevé*, et au préalable, pour l'étude des *fonctions entières de Bessel*. Ces méthodes mettent notamment en évidence certaines intégrales remarquables de l'équation différentielle, que j'ai appelées « intégrales tronquées ».

M'attachant uniquement, dans les paragraphes qui vont suivre, à l'étude *descriptive directe* de l'équation (1), je vais montrer comment on peut vérifier ces assertions, et déterminer d'une manière complète la structure des intégrales en situant leurs points critiques et définissant le mécanisme des permutations qu'ils opèrent.

I. — Branches d'intégrales algébroïdes de l'équation (1).

[**1**] J'ai étudié ces branches dans mes *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, chapitres II, IV, page 60 et suivantes.

Ce sont des branches qui deviennent infinies comme x^2 lorsque x tend vers l'infini sur un rayon rectiligne et qui sont méromorphes en $x = \infty$. Plus précisément, posons $z = x^2 + 0$; la fonction 0 vérifie l'équation différentielle

$$0' = \frac{2}{x^2 + 0}. \tag{2}$$

les branches d'intégrales algébroïdes sont telles que, sur les rayons sur lesquelles elles deviennent infinies avec x, la différence $z - x^2 = 0$ tende vers une constante; cette différence est dès lors holomorphe en $x = \infty$ [car, si l'on fait $x = \xi^{-1}$ dans l'équation (2) on voit que toute intégrale $0(\xi)$ qui prend une valeur finie en $\xi = 0$ y est holomorphe].

La méthode de calcul exposée dans l'ouvrage cité ci-dessus permet de déterminer l'allure des diverses branches algébroïdes de (1). Appelons q^2 la valeur vers laquelle tend, pour l'une quelconque de ces branches, la différence $z - x^2$ suivie vers $x = \infty$ le long d'un rayon quelconque. Les calculs indiqués — légèrement modifiés quant aux notations et appliquées à l'équation (1) — conduisent aux constatations suivantes :

On peut trouver un nombre positif R qui satisfait aux conditions que voici :

Si $|q| < R$, la branche d'intégrale suivie (à partir de $x = \infty$ et de $z - x^2 = q^2$) sur un chemin quelconque n'atteignant pas et *n'enveloppant pas* le cercle de centre o

et de rayon R : 1° est holomorphe partout (ne présente aucun point critique)(1) à l'extérieur dudit cercle; 2° a pour partie principale x^2 lorsque $|x|$ est grand.

Si $|q| > R$, appelons γ_1 et γ_2 les cercles de centres $+iq$ et $-iq$ et de rayon(2)

(1) On voit immédiatement sur l'équation (1) que les points critiques (algébriques) des intégrales z se présentent aux points x où $z = 0$.

(2) Je précise ici quelque peu le calcul indiqué à la page 61 de l'ouvrage cité. Le calcul ainsi complété est d'ailleurs immédiat lorsqu'il s'agit de l'équation (1) :

$|q|$ étant supposé supérieur à R, appelons Σ le cercle de centre 0 et de rayon $2q$; considérons un rayon quelconque issu de l'origine, et suivons notre branche d'intégrale (définie par q^2) sur ce rayon, à partir de *l'infini* et jusqu'à la circonférence Σ. Tout le long de ce chemin, on a

$$|x^2 + q^2| > \frac{3}{4}|x^2|.$$

Aussi longtemps donc que

$$(a) \qquad |\theta - q^2| < \frac{1}{4}|x^2|$$

on aura

$$|x^2 + \theta| > \frac{1}{2}|x^2|,$$

d'où, d'après (2),

$$|\theta'| < \frac{4}{|x|^2}$$

et par intégration (θ partant de q^2 en $x = \infty$) :

$$(b) \qquad |\theta - q^2| < \frac{4}{|2q|} = \frac{2}{|q|}.$$

Or (*b*) entraîne (*a*). Donc l'inégalité (*b*) est satisfaite, sur le rayon considéré, jusqu'au contour de Σ.

Pénétrons maintenant dans Σ. A l'extérieur des cercles γ_1 et γ_2, on a

$$|x^2 + q^2| > |q|^{2\alpha}.$$

Donc, *aussi longtemps que l'on aura* :

$$(c) \qquad |\theta - q^2| < \frac{|q|^{2\alpha}}{2},$$

on aura

$$|x^2 + \theta| > \frac{|q|^{2\alpha}}{2},$$

d'où, d'après (2),

$$|\theta'| < 4|q|^{-2\alpha}.$$

$|q|^{\alpha}$, l'exposant α étant un nombre positif convenablement choisi entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ et *que l'on peut prendre d'autant plus voisin de* $\frac{1}{4}$ que *l'on* a pris R *plus grand* : la branche d'intégrale suivie (à partir de $z=\infty$ et de $z-x^2=q^2$) sur un chemin quelconque n'enveloppant aucun des deux cercles γ_1, γ_2 : 1° est holomorphe partout à l'extérieur desdits cercles; 2° a pour partie principale x^2+q^2 (ou, plus exactement, a même partie principale que x^2+q^2) à l'extérieur de ces cercles.

Le même calcul montre, d'ailleurs, que l'on peut toujours prendre R assez grand pour que la conclusion ci-dessus reste vraie lorsque le chemin sur lequel on suit $z(x)$ enveloppe *une fois au plus* le cercle γ_1 ou le cercle γ_2 [Observons, en passant, qu'un chemin fermé tournant autour de γ_1 et γ_2 — c'est-à-dire autour de $x=\infty$ — n'altère pas z puisque z est méromorphe en $x=\infty$].

[**2**] Réciproquement, considérons une intégrale qui admette un point critique en un point g_1 de *module supérieur* à R. On constate que, des deux branches d'intégrales obtenues en suivant (à partir(1) de $z=0$) un rayon quelconque allant de $x=g_1$ à $x=\infty$, l'une au moins est algébroïde au voisinage de l'infini. Il résulte alors de ce qui précède que, pour cette branche algébroïde, la différence $z-x^2$ tend (quand x devient infini) vers une valeur q^2 telle que $|g_1-iq|<|q|^{\alpha}$.

Combien de points critiques présente, dans chacun des cercles γ_1, γ_2, la branche d'intégrale ci-dessus considérée? J'ai étudié cette question au chapitre III, VIII de l'ouvrage cité plus haut (pp. 101-105). Mais je ne m'appuierai pas ici sur cette étude dont nous allons retrouver les résultats par une autre voie.

En intégrant on voit que, sur tout chemin issu du contour de Σ, intérieur à Σ et extérieur aux γ, et de longueur moindre que $2q$, on aura (tant que (*c*) est satisfaite) :

$$|\text{Variation de } \theta| < 8|q|^{1-2\alpha},$$

donc

$$(d) \qquad |\theta - q^2| < \frac{2}{|q|} + 8|q|^{1-2\alpha}.$$

Or, puisque $|1-2\alpha|<2\alpha$, l'inégalité (*d*) entraîne sûrement (*c*) si l'on a pris $|q|$ et par conséquent R assez grand. Donc l'inégalité (*d*) reste satisfaite sur tout chemin intérieur à Σ, extérieur aux γ et n'enveloppant pas ces cercles. On en conclut (cf. *loc. cit.*, p. 62 et suiv.) que z ne peut pas s'annuler hors des cercles γ, etc.

(1) Voir les deux notes ci-dessus.

II. — Branches non-algébroïdes. Lignes et demi-lignes de points critiques.

[3] En dehors de ses branches algébroïdes, qui deviennent infinies avec x, l'équation (1) possède un ensemble de branches d'intégrales non-algébroïdes au voisinage de l'infini. Pour étudier ces nouvelles branches, j'emploierai des méthodes analogues à celles qui m'ont permis de faire l'étude asymptotique des fonctions méromorphes de Bessel (définies par l'équation de Riccati) et des fonctions méromorphes de Painlevé (définies par des équations différentielles rationnelles du second ordre [1]).

J'introduirai tout d'abord, comme je l'ai fait à propos de ces dernières fonctions, la notion de *ligne de zéros* ou *ligne de points critiques* d'une intégrale [je rappelle que les points critiques des intégrales de (1) sont tous des zéros des intégrales et réciproquement].

Considérons une ligne $\mathfrak{L}$ du plan x, allant de $x = \infty$ à $x = \infty$ et touchant un ensemble de points P, lesquels n'ont d'autre point-limite que $x = \infty$. Supposons que, suivant cette ligne en partant d'une valeur initiale convenable de $z(x)$, et laissant les points P (touchés par $\mathfrak{L}$) tous d'*un même côté* (extérieur ou *intérieur* de $\mathfrak{L}$), on passe par tous les points P avec la valeur $z = 0$ (en sorte que tous les points P soient critiques pour la branche $z(x)$ suivie) : nous dirons, en ce cas, que la ligne $\mathfrak{L}$ est *ligne de zéros* ou *ligne de points critiques* pour la branche suivie.

Il nous sera souvent utile de préciser davantage la notion de *ligne de points critiques*.

A cet effet, nous distinguerons tout d'abord entre les lignes de points critiques *simples* ou *composées*. Nous dirons que la ligne $\mathfrak{L}$ est simple si l'on peut faire tendre un de ses points critiques vers l'infini dans des conditions telles que *tous ses autres points critiques et* (si l'on veut) *la ligne tout entière tendent vers l'infini en même temps*.

Plus précisément encore, nous dirons qu'une ligne $\mathfrak{L}$ est *normale* si elle satisfait à certaines conditions que nous allons énoncer :

Appelons $\ldots x_{-j}, \ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots x_j, \ldots$ la suite des points critiques — que nous nommerons aussi *sommets* — de la ligne $\mathfrak{L}$, numérotés dans l'ordre où nous les rencontrons lorsque nous suivons $\mathfrak{L}$. La position de l'un quelconque — soit x_0 — de ces points *définit* l'intégrale particulière z que nous considérons le long de $\mathfrak{L}$;

---

[1] *Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre* (Annales de l'École norm. supér., 1913 et 1914).

en d'autres termes, la position de x_0 joue le rôle de constante d'intégration, et, si nous faisons varier x_0 avec continuité, tous les points $\dots x_{-j}, \dots x_j \dots$ deviennent des fonctions continues de x_0. Appelons, en particulier, φ la fonction $x_1 = \varphi(x_0)$ [entièrement déterminée par l'équation différentielle]. Je dirai que la ligne $\mathfrak{L}$ est *normale* si : *a*) la fonction φ (ainsi que son inverse) est holomorphe le long de $\mathfrak{L}$ *et dans toute la région située de l'un des côtés de* $\mathfrak{L}$; *b*) pour x' point quelconque d'un arc quelconque x_{k-1}, x_k de $\mathfrak{L}$, *le point* $x'' = \varphi(x')$ *est situé sur l'arc* x_k, x_{k+1} de $\mathfrak{L}$.

Les points tels que x', x'', ... situés sur une ligne $\mathfrak{L}$ normale, et appartenant à une même branche d'intégrale $z(x)$, seront dits *sommets conjugués*. Tout arc x_k, x_{k+1} de ligne normale ayant pour extrémités deux sommets conjugués consécutifs [1] et ne contenant aucun autre couple de points conjugués sera dit *arc périodique*.

Il résulte de la définition de la ligne normale que si l'un quelconque de ses *arcs periodiques* ne se coupe pas lui-même, la ligne, indéfiniment prolongée dans les deux sens, ne saurait se couper elle-même.

Nous appellerons, d'autre part, *demi-ligne de points critiques* une ligne jouissant des mêmes propriétés que la ligne entière, mais définie seulement entre l'infini et un point P (point critique) situé à distance finie, — en d'autres termes, une ligne *ouverte,* n'ayant qu'une seule branche infinie.

La demi-ligne sera dite *normale* si elle contient le sommet conjugué $x'' = \varphi(x')$ d'un quelconque de ces points x', sous la seule condition que φ et son inverse soient holomorphes *le long* de la demi-ligne.

[**4**] Pour étudier les lignes de points critiques des intégrales de (1), nous commencerons par faire le double changement de variables [2] :

$$z = \frac{u}{x}, \qquad x^3 = \mathrm{X} \tag{3}$$

qui transforme l'équation (1) en

$$u\frac{du}{d\mathrm{X}} = \frac{2}{3}(u+1) + \frac{u^2}{3\mathrm{X}} \tag{4}$$

et nous comparerons les intégrales de (4) à celles de l'équation asymptote

$$u\frac{du}{d\mathrm{X}} = \frac{2}{3}(u+1) \tag{6}$$

---

[1] J'entends par là qu'il n'y a entre les extrémités de l'arc aucun autre point critique de la même branche $z(x)$.

[2] Comparer les changements de variables effectués, en vue de l'étude des fonctions de Bessel et Painlevé, dans le Mémoire cité ci-dessus.

ainsi qu'à celles de l'équation

$$u\frac{du}{dX}=\frac{2}{3}(u+1)+\frac{\lambda u^2}{3X} \tag{7}$$

où λ est un paramètre réel positif que nous ferons varier entre 0 et 1. Pour $\lambda=0$, l'équation (7) coïncide avec (6); pour $\lambda=1$, elle devient l'équation (4). Si, d'ailleurs, l'on revient aux variables x et z, en effectuant à rebours le changement de variables (3), l'équation (7) devient :

$$zz'=2zx+2-\frac{(1-\lambda)z^2}{x}. \tag{8}$$

[5] L'équation (7) a pour intégrale générale la fonction $u(X)$ définie par

$$\frac{2}{3}(X-X_0)=u-\log(u+1) \qquad (X_0 \textit{ constante}), \tag{9}$$

laquelle a pour points critiques les points X_0 et $X_j=X_0+2j i\pi$ (j entier quelconque). Le système des permutations opérées par ces points critiques est d'un type que j'ai décrit en détail dans mes *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles*, chapitre III, IV.

Par X_0 menons la parallèle à l'axe réel et appelons $\overline{X}$ et $\overline{X}_1$ deux points pris respectivement à gauche et à droite sur cette parallèle (côté des parties réelles négatives et côté des parties réelles positives). Appelons, d'autre part, u_0 et u'_0 les deux valeurs de u avec lesquelles on atteint $\overline{X}$ lorsqu'on suit la droite $X_0\,\overline{X}$ en partant de l'une ou l'autre des deux déterminations $u(X)$ qui s'annulent au point critique X_0. Appelons de même u_{10} et u'_{10} les valeurs avec lesquelles on atteint $\overline{X}_1$. On constate ce qui suit (cf. *loc. cit.*, pp. 86-88) :

a) L'ensemble des caractéristiques (1) *issues de* $\overline{X}$ *avec la valeur* u_0 *ou* u'_0 *présente deux points critiques et deux seulement.* Ces points sont X_0 et $X_1=X_0+2i\pi$ pour les caractéristiques correspondant à l'*une* des deux valeurs initiales (soit u_0), et X_0 et $X_{-1}=X_0-2i\pi$ pour les caractéristiques correspondant à l'*autre* valeur initiale.

b) L'ensemble des caractéristiques issues de $\overline{X}_1$ *avec l'une des deux valeurs* u_{10}, u'_{10} (soit u_{10}), *présente un point critique unique*, X_0. *L'ensemble des caractéristiques issues de* $\overline{X}_1$ *avec l'autre valeur initiale* (soit u'_{10}) *admet pour points critiques tous les points* X_j *de l'intégrale* $u(X)$ *à laquelle il appartient.* Ainsi, une ligne droite parallèle à l'axe

(1) J'appelle « ensemble des caractéristiques » la branche d'intégrale suivie (à partir d'une valeur initiale donnée) sur l'ensemble de rayons rectilignes issus d'un point donné.

imaginaire, touchant tous les points X_j en *les laissant à sa gauche*, sera ligne de points critiques pour $u(X)$ [elle est d'ailleurs évidemment ligne *normale* et *simple*].

c) Lorsque $\overline{X}$ et $\overline{X}_1$ tendent vers l'*infini* dans les directions réelles négative et positive, les valeurs u_0, u'_0 et u_{10} tendent toutes trois vers l'infini, tandis que u'_{10} tend vers -1.

[**6**] Ces diverses propriétés des fonctions $u(X)$ subsistent lorsque l'on passe de l'équation (6) à l'équation (7) où λ est petit, à condition toutefois que l'on parte d'un point X_0 dont la partie réelle ne soit pas voisine de 0.

Partons, *par exemple*, d'un point $X_0 = X_{10}$ dont la partie réelle soit négative et la partie imaginaire comprise entre $-i\pi$ et $+i\pi$. Quand λ varie au voisinage de 0, l'intégrale de (7) qui a un point critique en X_{10} admet une double série de points critiques $X_{11}, X_{12}, \ldots$ et $X_{1,-1}, X_{1,-2}, \ldots$ qui varient avec continuité à partir des positions $X_{10} + 2i\pi, X_{10} + 4i\pi, \ldots$ et $X_{10} - 2i\pi$, etc., qu'ils occupent pour $\lambda = 0$. Et l'on peut toujours joindre ces points critiques par une ligne L_1 qui soit *ligne normale de points critiques*. Il suffira de joindre $X_{1,-1}$ et X_{10} en ligne droite ou par un arc arbitraire voisin d'une droite; l'intégrale de (7) qui a un point critique en X_0 près de X_{10} a des points critiques $\ldots X_{-1}, X_1, \ldots$ voisins de $X_{1,-1}, X_{1,1}, \ldots$ et (si λ est petit) il est clair que, lorsque X_0 décrit l'arc $(X_{1,-1}, X_{10})$ considéré, le point X_1 décrit un certain arc $(X_{1,0}, X_{1,1})$, le point X_2 un arc $(X_{1,1}, X_{1,2})$, etc.; l'ensemble des arcs (arcs périodiques) ainsi définis forme une ligne normale L_1. Si l'on pose $X_1 = \Phi(X_0)$, la fonction Φ est holomorphe le long de L_1 et dans toute la région du plan X à *gauche* de L_1 (région ne contenant pas $X = 0$).

J'ajoute qu'à droite ou à gauche de L_1, les caractéristiques issues du point $\overline{X}$ ou du point $\overline{X}_1$ et ne passant pas par l'origine ne cessent pas de se comporter comme il a été dit ci-dessus (n° 5).

[**7**] Des faits ainsi énoncés relativement à la variable X on passe immédiatement aux faits correspondants relatifs à la variable x telle que $x^3 = X$ [changement de variable (3)]. Partons du point $x_{10} = X_{10}^{\frac{1}{3}}$ voisin de l'axe réel négatif. La ligne L_1 du plan X devient une ligne de points critiques normale $\mathfrak{L}_1$ du plan x. Cette ligne $\mathfrak{L}_1$ est composée de deux branches $x_{10} \ldots x_{1j} \ldots$ et $x_{10}, \ldots x_{1,-j} \ldots$ s'éloignant, à partir de x_{10}, vers les extrémités des demi-droites OA_6, OA_8 inclinées de 30° sur l'axe réel négatif (*fig.* 1).

Comment se comporte la ligne $\mathfrak{L}_1$ (ou toute autre ligne de points critiques définie de la même manière pour l'équation (7) où λ est petit) *lorsque, s'éloignant de* x_{10} *on en suit les branches infinies? Que devient, d'autre part, la ligne* $\mathfrak{L}_1$ *lorsque,* λ, *s'écartant de* 0, *croît jusqu'à la valeur* 1?

Telles sont les questions que nous devons nous poser et que nous allons chercher à résoudre à l'aide du calcul.

[8] Partons d'un point critique X_0, d'argument quelconque cette fois, mais de module supérieur à un certain nombre R'. Dans le cas de l'équation (6) on passe de X_0 au point critique suivant, X_1 ou X_{-1}, en faisant décrire un tour à u, dans le sens positif ou négatif, autour du point $u = -1$; on circulera, par exemple, à partir de $u = 0$, sur le cercle de centre -1 et de rayon 1. Décrivons le même chemin dans le cas de l'équation (7). Cette équation peut s'écrire

$$\frac{2}{3}\frac{dX}{du} = \frac{u}{(u+1) + \frac{\lambda}{2}\frac{u^2}{X}}.$$

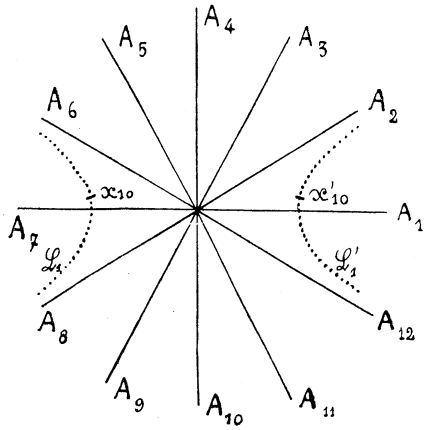


FIGURE 1.

Posons $u + 1 = e^{i\varphi}$, d'où résulte $du = i(u+1)\,d\varphi$ et $\frac{u^2}{u+1} = 2(\cos\varphi - 1)$ nous obtenons :

$$\frac{2}{3}\frac{dX}{d\varphi} = \frac{i(e^{i\varphi} - 1)}{1 + \frac{\lambda(\cos\varphi - 1)}{X}}. \tag{10}$$

D'ailleurs, si $\frac{\lambda}{|X|} < \frac{1}{4}$, nous avons toujours $\left|\frac{\lambda(\cos\varphi - 1)}{X}\right| < \frac{1}{2}$, d'où [1]

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{\lambda(\cos\varphi - 1)}{X}} - 1 \right| < \frac{2\lambda|\cos\varphi - 1|}{|X|}.$$

---

[1] On a

$$\left|\frac{1}{1+\alpha} - 1\right| \leqslant |\alpha| + |\alpha^2| \ldots,$$

somme qui est inférieure à $2|\alpha|$ si $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

On peut donc trouver un nombre positif borné h tel que, si R′ est assez grand, l'égalité (10) donne, pour $|X| > R'$ et $\lambda \leqslant 1$:

$$\left| \frac{2}{3} \frac{dX}{d\varphi} - i(e^{i\varphi} - 1) \right| < \frac{\lambda h}{|X|}. \tag{11}$$

Nous supposons que φ, toujours réel, varie de 0 à 2π ou de 0 à -2π, et que X parte de X_0. Dans ces conditions, aussi longtemps que l'on aura

$$|X| > \frac{|X_0|}{2}, \tag{12}$$

il en résultera, par intégration de (11) :

$$\left| \frac{2}{3}(X - X_0) + \cos\varphi - 1 - i(\sin\varphi - \varphi) \right| < \frac{2\lambda h|\varphi|}{|X_0|},$$

inégalité qui entraîne *a fortiori* l'inégalité (12) si l'on a pris R′ assez grand. On aura donc, pour $\varphi = \pm 2\pi$, deux nouveaux points critiques X_1 et X_{-1} de l'intégrale suivie, dont la situation approximative est donnée par les inégalités

$$|X_1 - X_0 - 2i\pi| < \frac{6\pi\lambda h}{|X_0|}, \qquad |X_{-1} - X_0 + 2i\pi| < \frac{6\pi\lambda h}{|X_0|}. \tag{13}$$

Nous supposerons R′ choisi assez grand pour que $\frac{6\pi\lambda h}{R'}$ soit petit par rapport à 2π, par exemple inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Nous déduisons alors des inégalités (13) les conséquences suivantes :

a) Si $|X_0| > R'$, l'un au moins des points correspondants X_1 et X_{-1} a un module supérieur à $|X_0|$. Appliquant la même remarque à X_1, X_{-1}, etc., nous voyons que *l'une au moins des deux suites* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ et $X_0, X_{-1}, \ldots$ *est formée de nombres dont les modules vont sans cesse en croissant.*

b) Si la partie imaginaire de X_0 est comprise entre $-i\pi$ et $+i\pi$ ($|X_0|$ étant toujours supposé supérieur à R′) *les suites* $|X_0|, |X_1|, \ldots$ et $|X_0|, |X_{-1}|, \ldots$ *sont toutes deux croissantes.*

c) Considérons, à partir de X_0, l'une des deux suites de points critiques, — par exemple $X_0, X_1 \ldots$, — dans le cas où la suite des modules est croissante. On a, avec la première inégalité (13) la suite d'inégalités

$$|X_2 - X_1 - 2i\pi| < \frac{6\pi\lambda h}{|X_1|}, \ldots \qquad |X_n - X_{n-1} - 2i\pi| < \frac{6\pi\lambda h}{|X_{n-1}|}.$$

Additionnant et remplaçant la somme des seconds membres par une intégrale définie plus grande, nous obtenons

$$|X_n - X_0 - 2ni\pi| < h_1 \lambda \log |X_n|, \tag{14}$$

h_1 étant un sombre borné indépendant de n.

[**9**] De ces faits nous allons tirer un certain nombre de conséquences relatives à l'équation différentielle (8) déduite de (7) par le changement de variables (3). Nous partirons d'une équation (8) *où* λ *est petit*, et d'un point critique x_0 tel que $|X_0| = |x_0^3|$ soit supérieur au nombre R′ considéré au n° 8. Mais on voit aussitôt que, si l'on fait croître λ, les inégalités du n° 8 continuent à être satisfaites pourvu que l'on prenne R′ assez grand. Plus précisément, on peut toujours donner à R′ une valeur *bornée* assez grande *pour que les inégalités* (13) *et* (14) *soient applicables pour tout* λ *entre* 0 *et* 1. Le nombre R′ étant supposé ainsi déterminé, *les propositions que nous allons énoncer seront vraies pour toute équation* (8) *où* $\lambda \leqslant 1$ *et, par conséquent, pour l'équation* (1).

a) Partant d'un point critique x_0 de module supérieur à $R'^{\frac{1}{3}}$, nous pouvons définir comme tout à l'heure les deux suites de points critiques $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ et $x_1, x_2, \ldots$ [en posant $x_j^3 = X_j$, les points X_j étant ceux définis au n° 8] : *L'une au moins des suites* $x_0, x_1, \ldots$ *et* $x_0, x_{-1}, \ldots$ *sera formée de nombres de modules croissants, se rapprochant indéfiniment de l'une des demi-droites*(1) $OA_2, OA_4, \ldots OA_{12}$, forment entre elles des angles de 60° (*fig.* 1). Supposons, pour fixer les idées, que ce soit le cas pour $x_0, x_1, \ldots$ Joignons x_0 à x_1 en ligne droite ou par un arc quelconque où $|x|$ soit croissant; si nous faisons glisser un point critique x'_0 le long de cet arc, nous avons un point critique x'_1 de la même branche qui glisse de x_1 en x_2, etc. Nous définissons ainsi une *demi-ligne normale de points critiques* $x_0, x_1, \ldots$ *dont tous les points, d'après les calculs du n° 8, seront de module supérieur à* $|x_0|$ *et qui sera asymptote à* $OA_2, OA_4, \ldots$ ou OA_{12}. — L'inégalité (14) montre, d'ailleurs, que, pour n très grand, la différence $(x_{n+1} - x_n)$ de deux points critiques consécutifs de la demi-ligne est (en module) de l'ordre de grandeur de $n^{\frac{-2}{3}}$.

b) Soit x_{10} une position de x_0, supérieure en module à $R'^{\frac{1}{3}}$ et *voisine de l'axe réel négatif*, — telle que *la partie imaginaire de* x_{10}^3 *soit comprise entre* $-i\pi$ et $+i\pi$. En ce cas, les deux suites de points $x_{10}, x_{11}, \ldots$ et $x_{10}, x_{1-1}, \ldots$ (définies au n° 7)

(1) Puisque, d'après l'inégalité (14), la suite correspondante $\ldots X_n, X_{n+1}, \ldots$ ou $X_{-n}, X_{-n+1}, \ldots$ se rapproche de l'axe imaginaire positif ou négatif du plan X, la distance de X_n ou X_{-n} à cet axe étant de l'ordre de grandeur de $\log |X_n|$.

sont toutes deux croissantes en modules et on peut leur appliquer les conclusions ci-dessus. On obtient, de la sorte, *une ligne entière de points critiques* (ligne $\mathfrak{L}_1$) ayant pour sommets les points $\ldots x_{1,-j}, \ldots x_{10}, \ldots x_{1,j}, \ldots$ et asymptote à OA_6 et OA_8 (*fig.* 1). Tous les points de cette ligne sont, en module, supérieurs à $|x_{10}|$. De plus, choisissant arbitrairement le chemin $(x_{10}, x_{1,1})$ [que nous prendrons par exemple rectiligne], nous pouvons, comme tout à l'heure, faire en sorte que, si x_{10} glisse le long de $\mathfrak{L}_1$, le point $x_{1,1}$ glisse aussi le long de $\mathfrak{L}_1$, et réciproquement; en d'autres termes, si l'on pose $x_{1,1} = \varphi(x_{1,0})$ la fonction φ est holomorphe le long de $\mathfrak{L}_1$ (ainsi que son inverse). *Faisons maintenant tendre* x_{10} *vers l'infini réel négatif* (la partie imaginaire de x_{10}^3 restant entre $-i\pi$ et $+i\pi$, ou, simplement, restant bornée) : la ligne $\mathfrak{L}_1$ se déplacera, et elle tendra manifestement tout entière vers l'infini avec x_{10} à l'intérieur et asymptotiquement aux côtés de l'angle A_6OA_8 : il en résulte, d'une part, que la ligne $\mathfrak{L}_1$ est ligne *simple* (non composée) au sens du n° 3, et, d'autre part, que la fonction φ [telle que $x_{1,1} = \varphi(x_{1,0})$] est holomorphe partout *à gauche* de la position de $\mathfrak{L}_1$ initialement considérée (*fig.* 1); donc la ligne $\mathfrak{L}_1$ est *ligne normale* au sens du n° 3.

c) Soit, semblablement, x'_{10} une position de x_0 (supérieure en module à $R^{\frac{1}{13}}$) *voisine de l'arc réel positif*, — telle que la partie imaginaire de x'^3_{10} *soit comprise entre* $-i\pi$ et $+i\pi$. Les mêmes calculs et raisonnements établissent l'existence d'une *ligne de points critiques*, $\mathfrak{L}'_1$, *ayant pour sommets les points* $\ldots x'_{1,j}, \ldots x'_{10}, \ldots x'_{1,j}, \ldots$ (*fig.* 1) et asymptote à OA_2 et à OA_{12}. On peut, comme tout à l'heure (*mais ce n'est pas toujours avantageux*) construire cette ligne de façon qu'elle soit *simple* et normale; lorsque x'_{10} tend vers l'infini réel positif (la partie imaginaire de x'^3_{10} restant bornée), la ligne $\mathfrak{L}'_1$ tout entière tend vers l'infini à l'intérieur et asymptotiquement aux côtés de l'angle A_2OA_{12}.

d) *L'équation* (8) *ou* (1) *ne change pas lorsqu'on y change* x *en* $e^{\frac{2i\pi}{3}}x$ *et* z *en* $e^{\frac{4i\pi}{3}}z$. Il en résulte que, si l'on fait tourner $\mathfrak{L}_1$ ou $\mathfrak{L}'_1$ de $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine, on obtient une nouvelle ligne de points critiques relative à la même équation différentielle. Les lignes ainsi obtenues sont asymptotes respectivement à OA_2 et OA_4, à OA_{10} et OA_{12}, à OA_4 et OA_6 et à OA_8 et OA_{10}.

[**10**] Les lignes telles que $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}'_1$, ainsi obtenues pour les intégrales de l'équation (1), sont déduites par variation continue des positions qu'elles occupent pour les petites valeurs de λ. Il en résulte que le mécanisme des permutations des branches $z(x)$ autour des sommets de ces lignes est toujours celui qui a été décrit au n° 5 [*car ce mécanisme n'est pas altéré par la variation de* λ]. En conséquence :

a) *Pour la ligne* $\mathfrak{L}_1$:

Si nous suivons, sur le bord *droit* de $\mathfrak{L}_1$ (bord situé du côté de l'origine), l'*une* des deux déterminations qui s'annulent en un sommet quelconque $x_{1,j}$ de la ligne, nous obtenons une branche d'intégrale qui s'annule en *tous* les points $x_{1,n}$; c'est la branche d'intégrale pour laquelle $\mathfrak{L}_1$ est ligne de points critiques; elle ne présente aucun autre point critique au voisinage de $\mathfrak{L}_1$ *à droite;*

Si nous suivons sur le bord droit de $\mathfrak{L}_1$ l'*autre* détermination nulle en $x_{1,j}$, nous avons une branche d'intégrale qui, tout le long de $\mathfrak{L}_1$, et au voisinage à droite, ne présente d'autre point critique que $x_{1,j}$;

Si nous suivons sur le bord gauche de $\mathfrak{L}_1$, et *dans toute la région à gauche de cette ligne, l'une ou l'autre* des deux déterminations qui s'annulent en $x_{1,j}$, nous avons une branche d'intégrale qui ne présente que deux points critiques dans la région considérée (savoir $x_{1,j}$ et $x_{1,j+1}$ *ou bien* $x_{1,j}$ et $x_{1,j-1}$) et qui tend vers l'*infini* avec x (c'est, au voisinage de l'infini, l'une des branches algébroïdes définies au paragraphe 1).

b) *Pour la ligne* $\mathfrak{L}'_1$:

Si nous suivons sur le bord *gauche* de $\mathfrak{L}'_1$ (bord situé du côté de l'origine) l'une ou l'autre des deux déterminations qui s'annulent en un sommet quelconque $x'_{1,j}$ de la ligne, nous avons une branche d'intégrale qui, tout le long de $\mathfrak{L}'_1$, et au voisinage à gauche, ne présente que deux points critiques ($x'_{1,j}$ et $x'_{1,j+1}$ *ou* $x'_{1,j}$ et $x'_{1,j-1}$) ;

Si nous suivons sur le bord droit *et dans toute la région à droite* que nous appellerons *intérieur* de $\mathfrak{L}'_1$ l'*une* des déterminations qui s'annulent en $x'_{1,j}$, nous avons une branche qui admet pour points critiques *tous* les points $x'_{1,n}$; *cette branche z tend vers* o *pour x tendant vers l'infini à droite de* $\mathfrak{L}'_1$, car, d'après le n° 5 (*proposition c*), lorsque x tend ainsi vers l'infini, la fonction u, égale à zx, tend vers -1 ;

Si nous suivons sur le bord droit, et dans toute la région à droite de $\mathfrak{L}'_1$, l'*autre* détermination nulle en $x'_{1,j}$, nous avons une branche qui ne présente d'autre point critique que $x'_{1,j}$ et tend vers l'infini avec x (branche algébroïde).

Il résulte de ces remarques que la ligne $\mathfrak{L}_1$, considérée comme ligne de points critiques conformément à la définition du n° 3, *laisse tous ses points critiques sur sa gauche*; la ligne $\mathfrak{L}'_1$, au contraire, laisse tous les siens *sur sa droite.*

[**11**] Les lignes et demi-lignes de points critiques considérées ci-dessus sont des lignes dont tous les sommets sont très éloignés de l'origine. Supposons maintenant que, partant (*pour* λ *quelconque entre* o *et* 1) d'une position initiale de la ligne $\mathfrak{L}_1$, nous fassions varier avec continuité le sommet x_{10} et l'arc périodique initial (x_{10}, x_{11}) : alors la ligne tout entière se déforme avec continuité, et, du fait que cette ligne est simple et normale (au sens du n° 3), on déduit aussitôt les conséquences suivantes :

a) *Si l'arc périodique* $(x_{10}, x_{1,1})$, *en se déplaçant, reste à l'intérieur de la position initiale de* $\mathfrak{L}_1$, *toute la ligne* $\mathfrak{L}_1$, *en se déformant, reste à l'intérieur de sa position initiale* (et ne cesse pas, par conséquent, d'être simple et normale).

b) Considérons la fonction φ (définie au n° 9, *b*), qui est relative à la ligne $\mathfrak{L}_1$ dans sa position initiale. Lorsque $\mathfrak{L}_1$ se déforme avec continuité, la fonction φ et son inverse ne cessent pas d'être holomorphes tout le long de $\mathfrak{L}_1$ *aussi longtemps que la ligne* $\mathfrak{L}_1$ *tout entière* (à l'exception des extrémités de ses deux branches asymptotes à OA_6 et OA_8) *reste à distance finie* (1). Aussi longtemps, dès lors, que cette dernière condition est satisfaite, *la ligne* $\mathfrak{L}_1$ *reste simple et normale et le mécanisme des permutations autour de ses sommets reste tel qu'il a été décrit au n° 10.*

c) Supposons, en particulier, que, lorsque λ varie de 0 à 1, l'on sache régler la déformation de la ligne $\mathfrak{L}_1$ (en fonction de λ) de manière que la demi-ligne $x_{0,1}, x_{1,1}, \ldots x_{1,n}, \ldots$ *reste constamment tout entière à l'intérieur de l'angle* A_7OA_5. Je dis que, dans ces conditions, *aucun point* x'_0 *de cette demi-ligne ne peut être rejeté à l'infini sans que tous les sommets conjugués de* x'_0 *sur la demi-ligne* (soit $x'_1, \ldots x'_n, \ldots$) *ne deviennent infinis en même temps*. Plus précisément, ces points seront tous rejetés vers l'infini, soit dans l'angle A_6OA_7 (et asymptotiquement à OA_6) — soit dans l'angle A_6OA_5 (et asymptotiquement à OA_6).

C'est bien, effectivement, ce qui a lieu pour $\lambda = 0$. Or je dis que, si le fait énoncé est exact pour $\lambda < \lambda'$, il l'est encore pour $\lambda = \lambda'$. En effet, pour λ arbitrairement voisin de λ', et par conséquent encore pour $\lambda = \lambda'$, si le point x'_k devient arbitrairement grand (en module), tous les points $x'_0, \ldots x'_n \ldots$ s'éloigneront arbitrairement, asymptotiquement à OA_6 et dans l'un des deux angles A_6OA_7, A_6OA_5. Dès lors, la suite des points $x'_0, x'_n, \ldots$ se trouvera, pour $\lambda = \lambda'$, à l'intérieur d'une ligne normale telle que celle du n° 9, *b* ou 9, *c*; en conséquence, ils seront sommets conjugués sur une ligne de points critiques du type $\mathfrak{L}_1$ ou $\mathfrak{L}'_1$, asymptote à OA_6 et OA_8 ou à OA_6 et OA_4, et tout entière très éloignée dans l'angle A_6OA_8 ou A_6OA_4; et ils tendront tous en même temps vers l'infini.

---

(1) En effet, étant donné les propriétés de l'équation (1), la fonction $\varphi(x)$ [ou son inverse] ne peut présenter une singularité que si elle devient infinie ou indéterminée. Or on constate aisément qu'elle ne peut pas devenir indéterminée pour $\lambda = \lambda'$ si elle reste déterminée pour $\lambda < \lambda'$. Donc elle ne cesse pas d'être déterminée tant que $\lambda \leqslant 1$.

III. — L'intégrale Z(x) de l'équation (8) qui s'annule à l'origine.

[**12**] Avant de poursuivre l'étude de l'intégrale générale de l'équation (8) ou (1), nous allons déterminer la situation approximative de certaines lignes de points critiques relatives à l'intégrale particulière Z(x) qui a un point critique à l'origine.

Et, tout d'abord, faisons quelques remarques préliminaires sur les intégrales $z(x)$ *réelles sur l'axe réel.*

Suivons, *à droite* d'un point x_0 de l'axe réel positif OA_1, les deux branches d'intégrale $z(x)$ de (8) qui s'annulent en ce point. Ces deux branches sont réelles. Celle qui est positive pour x réel voisin de x_0 reste toujours *positive et croissante* lorsque x croît au-dessus de x_0. Elle est du type algébroïde (§ I) et croît comme x^2. Au contraire, la branche qui est négative au voisinage de x_0 *oscille sans cesse*(1) *entre deux valeurs bornées négatives et tend vers* 0 lorsque x croît indéfiniment. — Dans les deux cas, *la branche d'intégrale qui s'annule en* x_0 *ne peut présenter aucun autre point critique sur l'axe réel positif.*

Cette même conclusion s'appliquera aux demi-axes OA_5 et OA_9 qui font des angles de 120° avec OA_1, en vertu de la remarque faite au n° 9, *d*.

On peut vérifier semblablement qu'une branche $z(x)$ qui s'annule en un point x_0 de l'axe réel négatif OA_7 est réelle à droite de ce point (sur le segment x_0, 0) et ne peut s'annuler une seconde fois. On voit de plus que, si x_0 tend vers *l'infini réel négatif, l'une* des deux branches issues de x_0 et suivies sur le segment (x_0, 0) jusqu'en un point arbitraire $\bar{x}$ tend vers l'infini en ce point, tandis que l'autre tend vers une valeur positive bornée $\bar{\zeta}$. La branche $z(x)$ qui prend en $\bar{x}$ une valeur réelle $\bar{z}$ voisine de $\bar{\zeta}$ et inférieure présente un point critique x_0 très éloigné sur l'axe réel négatif; lorsque $\bar{z}$ dépasse $\bar{\zeta}$ et *croît*, le point x_0 se dédouble en deux points critiques imaginaires conjugués qui s'éloignent de l'axe réel tandis que leur partie réelle croît; d'ailleurs lesdits points sont évidemment, pour $\bar{z}$ voisin de $\bar{\zeta}$, deux sommets conjugués d'une ligne de points critiques du type $\mathfrak{L}_1$ défini au n° 9, *b*; *lorsque* $\bar{z}$ *atteint une certaine valeur* $\bar{\zeta}'$ (*qui est d'autant plus grande que* λ *est plus petit et devient infinie pour* $\lambda = 0$) *les deux points critiques en question viennent respectivement sur les demi-droites* OA_5 *et* OA_9 (alors qu'ils sont *entre* ces droites pour $\bar{\zeta} < \bar{z} < \bar{\zeta}'$).

---

(1) En effet, si z approche de 0 par valeurs négatives, le terme $2z^{-1}$ est sûrement prépondérant dans le second membre de l'équation $z' = 2x + 2z^{-1} - (1-\lambda)x^{-1}z$, et z doit décroître; si, au contraire, z s'éloigne de 0, les premier et troisième termes du second membre deviennent prépondérants et z doit croître.

[**13**] Partons maintenant d'une équation (8) où λ est très petit. Nous avons vu plus haut comment, à partir d'un point x_{10} situé sur(1) OA_7 (*fig.* 1), nous pouvons définir une ligne normale de points critiques asymptote à OA_6 et OA_8. Pour définir cette ligne, nous avons supposé au n° 9 que $|x_{10}|$ était supérieur à un nombre R'. Mais il est clair que, si λ est arbitrairement petit, nous pouvons définir la ligne $\mathfrak{L}_1$ pour x_{10} arbitrairement voisin de l'origine. Appelons — pour plus de clarté — $\mathfrak{L}_{10}$ la ligne $\mathfrak{L}_1$ qui passe par l'origine. Nous allons montrer que nous pouvons choisir cette ligne de manière qu'elle soit *symétrique par rapport à l'axe réel*, c'est-à-dire formée de deux branches imaginaires conjuguées issues de $x_{10} = 0$.

Nous prendrons d'abord, *pour* $\lambda = 0$, une ligne $\mathfrak{L}_{10}$ définie comme il suit : appelant (dans le plan X) $X_{1,j} = 2ij\pi$ et $X_{1,-j} = -2ij\pi$ les sommets conjugués de o sur la ligne de points critiques (*voir* n° 5), menons par tous ces points les demi-droites infinies parallèles à l'axe réel positif; l'ensemble de ces demi-droites (avec l'axe réel positif lui-même), parcourues chacune dans les deux sens, donnent dans le plan x (par la transformation $x^3 = X$) une ligne normale de points critiques(2) $\ldots x_{1,-j}, \ldots 0, \ldots x_{1,j}, \ldots$ (ou $\mathfrak{L}_{10}$) tout entière située dans l'angle A_5OA_9; appelons $\varphi(x)$, comme plus haut, la fonction qui détermine la ligne normale et est telle que $\varphi(x_{1,-1}) = 0$, $x_{1,1} = \varphi(0)$, etc.

Lorsque λ varie au voisinage de o, la fonction φ varie avec continuité. D'autre part, appelons x'_1 et x'_{-1} les deux points critiques imaginaires conjugués, et *respectivement situés sur* OA_5 *et* OA_9, que nous avons considérés à la fin du n° 12 et que nous rencontrons sur la branche $z(x)$ égale à $\overline{\zeta}'$ en $\overline{x}$ (les points x'_1 et x'_{-1} sont très éloignés de o et $\overline{\zeta}'$ très grand si λ est très petit); joignons o et x'_1 en ligne droite, ou par un arc quelconque, déduit par continuité de la ligne droite, ne se coupant pas lui-même et intérieur à l'angle A_7OA_5, puis traçons l'arc ox_{-1} imaginaire conjugué de ox'_1; l'ensemble des deux arcs ox'_1, ox'_{-1} constitue un *arc périodique* (x'_{-1}, x'_1), qui, avec la fonction φ, détermine une ligne $\mathfrak{L}_{10}$ (ou $\ldots x'_{-j}, \ldots x'_{-1}$, $x'_1, \ldots x'_j, \ldots$), composée de deux branches imaginaires conjuguées et telle que, si x parcourt l'arc (x'_{-1}, x'_1), le point $\varphi(x)$ parcoure l'arc (x'_1, x'_2), etc. La ligne $\mathfrak{L}_{10}$ ainsi construite se déduit par continuité — quand λ varie à partir de o — de la position ci-dessus définie pour $\lambda = 0$; elle est donc (si λ est suffisamment petit) asymptote à OA_6 et OA_8 et tout entière dans l'angle A_5OA_9; il en résulte (n° 11) — puisque l'arc périodique initial (x'_{-1}, x'_1) est tout entier à distance finie dès que $\lambda > 0$ (note 2) — qu'elle est tout entière à distance finie (les extrémités des deux branches infinies exceptées) et, par suite, toujours simple et normale.

---

(1) Nous prenons ici sur l'axe réel même le point x_{10} qui, au n° 9, *b*, était supposé voisin de cet axe.

(2) Dans cette position particulière, la ligne normale a une infinité de sommets conjugués infinis en même temps. Cette circonstance ne se présente plus pour la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ définie ci-dessous pour λ *voisin* de o.

[**14**] Cela dit, faisons croître λ et suivons la déformation continue de la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ définie et rendue symétrique comme il vient d'être dit. *Tant que cette ligne reste tout entière intérieure à l'angle* A_5OA_9, toutes les conclusions que nous venons d'énoncer subsistent : en particulier $\mathfrak{L}_{10}$ est toujours tout entière à distance finie (ses extrémités exceptées) et ligne simple et normale; j'ajoute qu'elle ne peut se couper elle-même (n° 3) [puisque son arc périodique initial ne se coupe pas lui-même], en sorte que *ses deux branches symétriques restent tout entières de part et d'autre de* OA_7.

Il en est ainsi, disons-nous, tant que $\mathfrak{L}_{10}$ reste intérieure à A_5OA_9. Or je dis que, lorsque λ varie de 0 à 1, on peut toujours régler la déformation de l'arc périodique (x'_{-1}, x'_1), qui détermine $\mathfrak{L}_{10}$, de manière que *cette ligne ne sorte pas de l'angle* A_5OA_9.

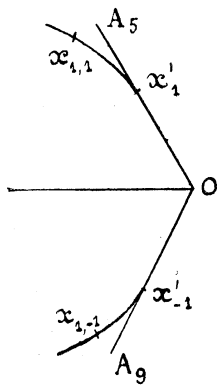


FIG. 2.

Pour λ voisin de 0, soit pour $\lambda < \lambda'$, non seulement notre ligne est tout entière dans A_5OA_9, mais il résulte des calculs du n° 8 qu'*une détermination* $z(x)$ *quelconque qui s'annule en un point de* $\mathfrak{L}_{10}$ *ne saurait présenter aucun autre point critique entre* $\mathfrak{L}_{10}$ *et les droites* x'_1A_5 et $x'_{-1}A_9$ (*fig.* 2). De là nous concluons d'abord qu'il est impossible que, pour $\lambda = \lambda'$, l'un des sommets conjugués de x'_1 (points x'_2, x'_3, etc.), ou l'un des sommets conjugués de 0 (que nous appellerons $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, etc.), vienne sur OA_5; car, si cette circonstance se présentait, nous aurions une détermination $z(x)$ qui, suivie le long de OA_5, présenterait *deux* points critiques sur cette droite, chose qui, nous l'avons vu, est impossible (n° 12). — Supposons, d'autre part, que $\mathfrak{L}_{10}$ touche OA_5 en un autre de ses points, soit x''_0 : il est impossible, pour la même raison, qu'au sommet conjugué x''_j de x''_0, ou un autre point critique x'''_0 de la branche z qui s'annule en x''_0, ... x''_j, ..., vienne sur OA_5 en même temps que x''_0. Dès lors, si la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ touche OA_5 en x''_0, nous pouvons toujours la déformer légèrement au voisinage de ce point de manière à rester au-dessous de OA_5 : cela revient à remplacer $\mathfrak{L}_{10}$ par une ligne normale intérieure (*voir* n° 11), donc toujours comprise dans l'angle A_5OA_9. — Si enfin, pour $\lambda = \lambda'$, il arrivait que — la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ ne

touchant pas OA_5 — un point critique x'''_0 appartenant à une des déterminations suivies sur $\mathfrak{L}_{10}$, et qui ne soit pas sommet de $\mathfrak{L}_{10}$, vienne à tomber sur OA_8, on pourrait *a fortiori* toujours déformer $\mathfrak{L}_{10}$ à l'intérieur de A_5OA_9 de façon que x'''_0 reste au-dessus de OA_5. Ainsi, *nous pouvons toujours régler la déformation de* $\mathfrak{L}_{10}$ *de manière que les conditions supposées satisfaites pour* $\lambda < \lambda'$ *le soient encore pour* $\lambda = \lambda'$.

[**15**] Ainsi se trouve établie, pour une équation (8) où $\lambda \leqslant 1$ et par suite pour l'équation (1), l'existence d'une ligne simple normale de points critiques $(\mathfrak{L}_{10})$ dont les deux branches imaginaires conjuguées, asymptotes à OA_6 et OA_8, sont respectivement comprises dans les angles A_7OA_8 et A_7OA_9. Et cette ligne est telle que toute branche $z(x)$ qui s'annule sur elle *ne présente aucun point critique entre* $\mathfrak{L}_{10}$ *et les droites* OA_5 *et* OA_9.

On peut compléter ce résultat en démontrant que les deux branches de $\mathfrak{L}_{10}$ sont, plus précisément, *situées dans les angles* A_6OA_5 *et* A_8OA_9. Mais je laisserai de côté ce point, qui n'est pas essentiel pour la suite.

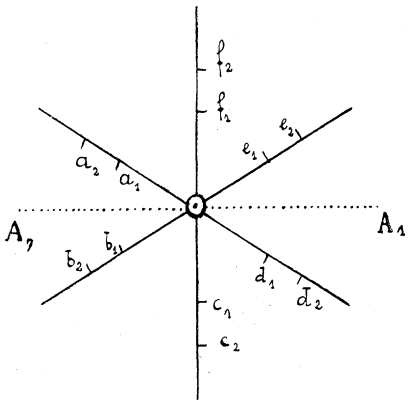


FIG. 3.

[**16**] Nous appellerons dorénavant a_1, a_2, ... la suite des sommets conjugués de $x_{10} = 0$ sur la branche de $\mathfrak{L}_{10}$ asymptote à OA_6 et b_1, b_2, ... la suite des sommets imaginaires conjugués (*fig. 3* où les branches de $\mathfrak{L}_{10}$ sont représentées schématiquement par des droites).

Le mécanisme des permutations autour de ces points se conserve lorsque λ *varie de* 0 *à* 1 ; donc, quel que soit λ entre 0 et 1, il sera, pour la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ actuellement considérée, tel qu'il était pour la ligne $\mathfrak{L}_1$ étudiée au n° 10 ; en particulier, la ligne $\mathfrak{L}_{10}$ laisse sur sa gauche tous les points critiques qu'elle touche.

Étant donné, d'ailleurs, que l'équation (8) ou (1) ne change lorsqu'on change x en $e^{\frac{2i\pi}{3}}x$ et z en $e^{\frac{4i\pi}{3}}z$, nous voyons que l'intégrale particulière $Z(x)$, qui a pour points critiques O et tous les points a et b, aura également pour points critiques

tous les points $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ déduits des points a et b en les faisant tourner autour de l'origine de $+\frac{2\pi}{3}$ (*fig. 3*). Plus précisément, la ligne $\mathfrak{L}_{20}$ ou $\mathfrak{L}_{30}$ obtenue en faisant tourner $\mathfrak{L}_{10}$ de $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine est *ligne de points critiques* pour l'intégrale $Z(x)$.

[**17**] Voyons avec précision quels sont les points critiques présentés au voisinage de l'origine par les différentes déterminations $z(x)$ nulles au point critique $x = 0$.

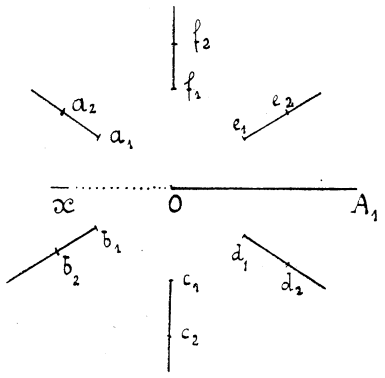


FIG. 4.

Dans ce but, supprimons, sur les lignes $\mathfrak{L}_{10}, \ldots, \mathfrak{L}_{30}$, les arcs $a_1 o b_1, \ldots e_1 o f_1$, et considérons les demi-lignes restantes $a_1, a_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots$, ainsi que le demi-axe réel positif, comme autant de coupures (*fig. 4*). — Partant d'un point $\bar{x}$ voisin de o sur l'axe réel négatif OA_7, suivons sans franchir les coupures les déterminations qui s'annulent à l'origine. D'après ce qui précède, l'*une* (détermination A) admettra comme points critiques les points $a_1, a_2, \ldots$, mais pas les points b *ni aucun autre point critique dans l'angle* $A_5 OA_9$ égal à $\frac{2\pi}{3}$ (*voir* n° 15 et fig. 1); l'*autre* (détermination B) admettra comme points critiques les points b, mais pas les points a ni aucun autre point critique dans $A_5 OA_9$.

D'ailleurs, en formant le développement en puissances de $\sqrt{x}$ qui représente autour de $x = 0$ l'intégrale $z(x)$ nulle en ce point, on voit que, lorsque x décrit $\pm\frac{1}{3}$ de circonférence infiniment petite autour de l'origine, z décrit $\pm\frac{2}{3}$ de circonférence autour de $z = 0$. Or l'équation différentielle, on l'a vu, ne change pas quand x se change en $e^{\frac{2i\pi}{3}} x$ et z en $e^{\frac{4i\pi}{3}} z$. De là on déduit aussitôt ce qui suit pour les déterminations A et B :

La détermination A *(suivie à partir de* $\overline{x}$ *sans franchir les coupures) admet comme points critiques (outre* $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$*) les points* $f_1, f_2, \ldots$ *et* $d_1, d_2, \ldots$*; elle n'admet pas d'autre point critique; la détermination* B *admet pour points critiques les points* $c_1, c_2, \ldots$ *et* e_1, e_2*, et ces points seulement.*

[**18**] De cette circonstance résulte la possibilité de grouper de plusieurs manières les points $a, \ldots f$, de manière à former, pour la même intégrale $Z(x)$, diverses lignes de points critiques répondant à la définition du n° 3.

Nous avons déjà défini au n° 16 trois telles lignes, $\mathfrak{L}_{10}$, $\mathfrak{L}_{20}$, $\mathfrak{L}_{30}$ (respectivement situées dans les angles A_3OA_2, A_3OA_1 et A_2OA_1), que nous pouvons appeler, d'après les noms de leurs sommets : *ligne* $\ldots b_n, \ldots, b_1, o, a_1, \ldots a_n, \ldots$, *ligne* $\ldots f_n, \ldots f_1, o, e_1, \ldots e_n, \ldots$, *ligne* $\ldots d_n, \ldots d_1, o, c_1, \ldots c_n, \ldots$. Pour chacune de ces lignes, le mécanisme des permutations est celui qui a été décrit au n° 10 (*cas de la ligne* $\mathfrak{L}_1$) : en particulier, chacune d'elles laisse tous ses sommets sur son *bord intérieur* [nous regardons comme côté intérieur de la ligne le côté de l'angle aigu formé par ses directions asymptotiques].

Considérons maintenant la ligne $\ldots a_n, \ldots a_1, o, f_1, \ldots f_n$ formée de la moitié supérieure de $\mathfrak{L}_{10}$ et de la moitié de gauche de $\mathfrak{L}_{20}$. Il résulte du n° 17 que cette ligne est *ligne de points critiques* (non-normale)(1) pour l'intégrale $Z(x)$. En effet, si nous suivons de bout en bout le bord *intérieur* de cette ligne en considérant la détermination de $Z(x)$ qui s'annule en a_1 et o, tous les points $\ldots a_n, \ldots a_1, o, f_1, \ldots f_n \ldots$ seront critiques pour ladite détermination. — La ligne de points critiques ainsi obtenue se trouve définie pour $\lambda \leqslant 1$. Donc, étant donné que le mécanisme des permutations se conserve quand λ varie, ce mécanisme sera toujours, pour la ligne en question, tel qu'il est lorsque λ est petit, *c'est-à-dire tel que nous l'avons décrit au n° 10 dans le cas de la ligne* $\mathfrak{L}_1$. En particulier si, sur un chemin tendant vers l'infini à l'intérieur de la ligne, nous suivons la détermination $Z(x)$ nulle aux points c et f, *cette détermination tend vers* o. Nous savons, d'autre part, qu'à l'intérieur de la ligne, la détermination en question ne présente aucun point critique : joignons alors a_1 et f_1 par un arc quelconque intérieur à la ligne considérée, et envisageons la ligne $\ldots a_n, \ldots a_1, f_1, \ldots f_n, \ldots$ formée de la branche supérieure de $\mathfrak{L}_{10}$ jusqu'à a_1, puis de l'arc a_1f_1 et enfin de la branche de gauche de $\mathfrak{L}_{20}$ à partir de f_1. La ligne ainsi définie est évidemment, elle aussi, ligne de points critiques du type $\mathfrak{L}'_1$ (en général, *non-normale*, mais cela n'importe pas ici).

Faisons maintenant tourner de $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine les lignes $\ldots a_n, \ldots o, \ldots f_n, \ldots$ et $\ldots a_n, \ldots a_1, f_1, \ldots f_n, \ldots$ que nous venons de définir. Nous obtenons de nouvelles lignes de points critiques du même type, savoir $\ldots d_n, \ldots o,$

(1) On peut vérifier que la ligne ainsi définie n'est pas normale.

$\ldots e_n, \ldots$, etc. Nous appellerons en particulier $\mathfrak{L}'_{10}$ *la ligne de points critiques* $\ldots d_n \ldots d_1, e_1, \ldots e_n, \ldots$.

Suivons, d'autre part, une ligne ainsi formée : branche de gauche de $\mathfrak{L}_{20}$ (*fig.* 3 et 5) jusqu'au voisinage de l'origine, puis arc (voisin de l'origine) contournant l'origine en la laissant à sa gauche, puis branche de gauche de $\mathfrak{L}_{30}$ jusqu'à l'infini. Il résulte du n° 17 que, si l'on suit sur un tel chemin la branche d'intégrale qui s'annule en f_1, f_2, tous les points $\ldots f_n, \ldots f_1, c_1, \ldots c_n, \ldots$ seront points critiques pour ladite branche. En d'autres termes, la ligne considérée est « ligne de points critiques » pour $Z(x)$ (les points critiques f et c étant sur le bord droit de la ligne). Toutefois (on la vérifie aisément) la ligne de points critiques ainsi définie n'est pas simple au sens du n° 3; elle est composée, nous la considérerons donc comme formée de la réunion de deux demi-lignes $\mathfrak{L}''_{10}$ et $\mathfrak{L}'''_{10}$ allant, l'une de l'axe réel (positif) aux points $f_1, \ldots f_n, \ldots$, l'autre de l'axe réel aux points $c_1, \ldots c_n, \ldots$.

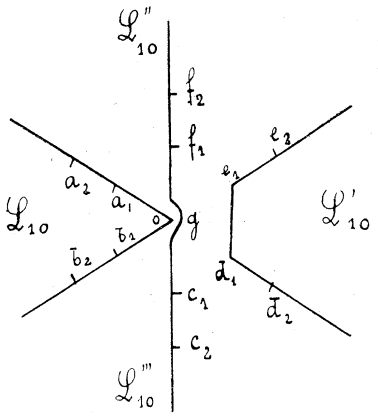


FIG. 5.

[**19**] Tout ce qui précède s'applique à une équation (8) quelconque où $\lambda \leqslant 1$. Nous allons désormais nous attacher spécialement à l'équation (1) [où $\lambda = 1$].

Traçons, dans le plan x, les trois lignes suivantes (*fig.* 5) : ligne $\mathfrak{L}_{10}$ telle qu'elle a été définie aux n^{os} 15-16, ligne $\mathfrak{L}'_{10}$ et ligne composée des deux demi-lignes $\mathfrak{L}''_{10}$, $\mathfrak{L}'''_{10}$ (définies au n° 18) qui se coupent sur l'axe réel en un point g.

Il résulte immédiatement des propriétés des lignes $\ldots a_n, \ldots o, \ldots f_n, \ldots$ et $\ldots c_n, \ldots o, \ldots t_n, \ldots$ (lignes du type $\mathfrak{L}'_1$ définies au n° 18), que les lignes $\mathfrak{L}_{10}$, $\mathfrak{L}''_{10}$ et $\mathfrak{L}'''_{10}$ sont lignes et demi-lignes de points critiques *pour une même détermination de* $Z(x)$. En d'autres termes, il existe une détermination de $Z(x)$ qui, suivie sur un chemin quelconque entre les lignes $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}''_{10}, \mathfrak{L}'''_{10}$, admet comme points critiques o et tous les points a, b, c et f. Cette détermination tend vers o lorsque x tend vers l'infini entre les lignes considérées.

Si, d'autre part, partant de cette détermination, on franchit la double ligne $\mathfrak{L}''_{10}$, $\mathfrak{L}'''_{10}$ entre c_1 et f_1, on a (entre $\mathfrak{L}''_{10}$, $\mathfrak{L}'''_{10}$ et $\mathfrak{L}'_{10}$) une branche d'intégrale qui admet comme points critiques d_1 et e_1 — et aussi les points d_2, e_2, etc. lorsqu'on atteint ces derniers points en passant entre d_1 et e_1; en d'autres termes, la détermination considérée, suivie sur l'axe réel à partir de g jusqu'à $\mathfrak{L}'_{10}$, *admet* $\mathfrak{L}'_{10}$ *comme ligne de points critiques.*

Nous démontrerons tout à l'heure que la fonction $Z(x)$ n'a pas de points critiques en dehors de sommets des lignes $\mathfrak{L}_{10}$, ... $\mathfrak{L}'''_{10}$.

IV. — Ensemble total des points critiques d'une intégrale quelconque de l'équation (1). — Intégrales tronquées.

[**20**] Les lignes de points critiques considérées aux nos 18-19 sont définies, jusqu'ici, pour l'intégrale particulière $Z(x)$ de (1) qui a un point critique à l'origine. Supposons maintenant que nous fassions varier ce point critique (*que nous appellerons désormais* a_0) d'une manière continue; alors les lignes *que nous appellerons désormais, sans indices, lignes* $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, etc., se déforment avec continuité, et, aussi longtemps qu'elles restent tout entières à distance finie, le mécanisme des permutations opérées par leurs sommets ... a_n, ... f_n, ... reste le même (n° 11).

[**21**] Envisageons en particulier la ligne $\mathfrak{L}_1$, et considérons-la de nouveau — comme aux nos 13-15 — non seulement pour $\lambda = 1$, mais pour λ quelconque entre 0 et 1 [équation (8)]. Pour plus de clarté, nous appellerons, pour un moment, $\mathfrak{L}_1^{(\lambda)}$ la ligne considérée et $\mathfrak{L}_{10}^{(\lambda)}$ la position de cette ligne que nous avons définie au n° 15.

Supposons que nous déformions $\mathfrak{L}_1^{(\lambda)}$ *à l'extérieur de* $\mathfrak{L}_{10}^{(\lambda)}$ de façon que la branche supérieure de la ligne au-dessus d'un certain point x'_0 *reste constamment intérieure à l'angle* A_7OA_3 (*fig. 1*), et appelons x'_1, ... x'_n, ... les conjugués de x'_0 sur ladite branche. Je dis qu'*aucun des points* x'_k *ne pourra tendre vers l'infini sans que tous les points* x'_0, ... x'_n, ... *ne tendent vers l'infini en même temps.* — Cette proposition est, comme on voit, une généralisation de celle du n° 11, *c*.

Le fait énoncé est exact pour λ voisin de 0, soit pour $\lambda < \lambda'$. Je dis qu'il ne peut cesser d'être exact pour $\lambda = \lambda'$.

Supposons, en effet, que, lorsqu'on déforme $\mathfrak{L}_1^{(\lambda')}$ avec continuité à partir de $\mathfrak{L}_{10}^{(\lambda')}$, on atteigne une position $\overline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$ de la ligne pour laquelle le point x'_k soit rejeté à l'infini (dans l'angle considéré). Envisageons, en ce cas, une position $\underline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$ de $\mathfrak{L}_1^{(\lambda')}$, voi-

sine de $\overline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$ et *intérieure* (qui, par conséquent, ne peut toucher ni la droite OA_3 ni la branche supérieure o, $x_{1,1}$, ... de $\mathfrak{L}_{10}^{(\lambda')}$), sur laquelle x'_k occupe une position de très grand module. Pour ε arbitrairement petit, on peut donner à $\mathfrak{L}_1^{(\lambda'-\varepsilon)}$ une position arbitrairement voisine de $\underline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$ (ne touchant, par conséquent, ni OA_3 ni la branche supérieure o, $x_{1,1}$, ... de $\mathfrak{L}_{10}^{(\lambda'-\varepsilon)}$ et passant par *le même* point x'_k. Sur cette position, tous les points x'_0, ... x'_n, ..., conjugués de x'_k, seront de très grand module. Il en sera donc de même, par continuité, sur $\underline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$. On en déduit, en raisonnant comme au n° 11, *c*, que, lorsque (laissant λ fixe égal à λ') on fait tendre $\underline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$ vers $\overline{\mathfrak{L}}_1^{(\lambda')}$, tous les points x'_0, ... x'_n, ... tendent vers l'infini en même temps.

En faisant tourner la figure de $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine, on pourra appliquer la même remarque aux lignes $\mathfrak{L}_1$ ou $\mathfrak{L}_3$.

[**22**] Cela dit, revenons à l'équation (1) et mouvons le long de l'*axe réel négatif* le point critique initialement situé à l'origine, point que nous appellerons désormais a_0.

Lorsque a_0 se meut ainsi, tous les points a_1, a_2, ... et b_1, b_2, ... se déplacent à l'intérieur de la position initiale $\mathfrak{L}_{10}$ de $\mathfrak{L}_1$ (en restant imaginaires conjugués), et l'on peut alors toujours joindre ces points et a_0 par une *ligne simple normale* $\mathfrak{L}_1$ tout entière intérieure à $\mathfrak{L}_{10}$ (*voir* n° 11, *a*) et symétrique par rapport à l'axe réel. Lors donc que a_0 tend vers l'infini réel négatif, toute la ligne $\mathfrak{L}_1$ tend vers l'infini en même temps (à l'intérieur de l'angle A_5OA_9) dans les conditions indiquées au n° 9, *b*.

Considérons, d'autre part, les sommets de la ligne $\mathfrak{L}'_1$ atteinte comme il a été dit au n° 19 en suivant l'axe réel à partir de a_0 vers la droite.

Je dis d'abord que ces points se déplacent à l'extérieur des lignes appelées $\mathfrak{L}_{20}$ et $\mathfrak{L}_{30}$ au n° 18 et que, d'autre part, ils ne peuvent jamais franchir ni toucher l'axe réel. En effet, lorsque a_0, partant de o, se meut de la manière indiquée *à l'extérieur de* $\mathfrak{L}_{20}$, on peut déformer la ligne normale $\mathfrak{L}_2$ (ayant pour sommets ... f_n, ... f_1, a_0, e_1, ... e_n, ...) de façon qu'elle soit toujours extérieure à sa position initiale $\mathfrak{L}_{20}$ (n° 11). Donc les *e* restent extérieurs à $\mathfrak{L}_{20}$, et de même, par symétrie, les *d* extérieurs à $\mathfrak{L}_{30}$. D'ailleurs, étant donné que les points imaginaires conjugués e_j et d_j sont critiques tous les deux pour la même branche $z(x)$ suivie à l'intérieur de la ligne $\mathfrak{L}'_1$ (n° 19), ils ne peuvent pas venir se confondre, donc pas devenir réels.

En conséquence, la proposition du n° 21 est applicable, et l'on est assuré que les points *e* ou *d* ne peuvent tendre vers l'infini que simultanément.

Joignons maintenant e_1 et d_1 en ligne droite. Pour $a_0 = 0$, il résulte des n^{os} 17-19 que la branche $z(x)$, pour laquelle a_0, e_1 et d_1 sont points critiques, jouit de la propriété suivante : *elle ne présente aucun autre point critique lorsqu'on la suit sur un chemin quelconque issu de* a_0 *et ne franchissant ni la ligne* $\mathfrak{L}_1$ *ni le segment* e_1d_1. Lorsqu'ensuite a_0 décroît tout en restant réel, les points e_1, d_1 restent imaginaires conju-

gués (à distance finie tant que a_0 est fini), la ligne $\mathfrak{L}_1$ se déplace à l'intérieur de sa position initiale, et par conséquent la propriété ci-dessus subsiste.

De là résulte en premier lieu que, *lorsque* a_0 *tend vers* $-\infty$, *les points* e_1 *et* d_1 *tendent simultanément vers l'infini dans la direction réelle positive.* En effet, la branche $z(x)$ que nous suivons à partir de a_0 pour atteindre e_1 et d_1 est l'une des branches algébroïdes étudiées au paragraphe I (nos 1-2) : si donc son point critique a_0 est très éloigné, elle ne peut, à droite de $\mathfrak{L}_1$, présenter d'autres points critiques qu'à l'intérieur d'un cercle γ_2 de centre $-a_0$ et de rayon $|a_0|^\alpha$, l'exposant α étant compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; *or le cercle* γ_2 *ainsi défini tend tout entier vers l'infini réel positif quand* a_0 *tend vers* $-\infty$.

De là résulte — d'après la remarque faite plus haut — que tous les sommets de $\mathfrak{L}'_1$ tendent vers l'infini en même temps lorsque la ligne $\mathfrak{L}_1$ tend elle-même vers l'infini.

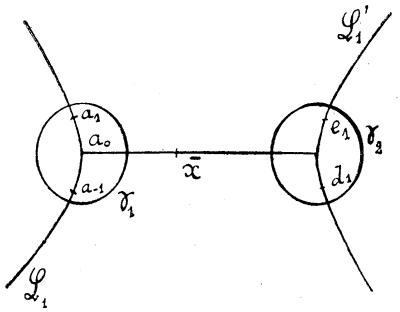


FIG. 6.

[**23**] Cette remarque va nous permettre de compléter l'analyse du paragraphe III en montrant que L'INTÉGRALE PARTICULIÈRE $Z(x)$ NULLE A L'ORIGINE N'ADMET AUCUN AUTRE POINT CRITIQUE QUE LES POINTS 0, a_1, a_2, ... f_1, f_2, ... DÉTERMINÉS DANS CE PARAGRAPHE; il s'ensuivra que, plus généralement, *toute intégrale* $z(x)$ *de* (1), *déduite de* $Z(x)$ *en faisant varier avec continuité le point critique initial* a_0 *à partir de* 0, *n'admet d'autres points critiques que les points* a_0, a_1, a_2, ... f_1, f_2 *déduits par variation continue des positions initiales de ces points.*

Pour établir ce résultat fondamental, partons d'une intégrale $z(x)$ déduite de $Z(x)$ comme il a été dit au n° 22, et pour lequel le point a_0, sur l'axe réel négatif, est de grand module. Pour cette intégrale, tous les sommets ... a_n, ... a_0, b_1, ... b_n, ... de $\mathfrak{L}_1$ et tous les sommets ... e_n, ... e_1, d_1, ... d_n, ... de $\mathfrak{L}'_1$ sont (d'après ce qui précède) très éloignés de l'origine (*fig.* 6 où $a_{-1} = b_1$).

Étant donné, d'ailleurs, le mécanisme des permutations autour des sommets de $\mathfrak{L}_1$ (*voir* n° 10), nous pouvons désigner comme il suit, *à droite de* $\mathfrak{L}_1$, les différentes branches $z(x)$ échangées par lesdits sommets : 1° une branche $\bar{z}(x)$, pour laquelle $\mathfrak{L}_1$

est ligne de points critiques et qui s'annule en tous les points a et b; 2° une série de branches $z_{a_n}(x)$, ... $z_{a_0}(x)$, ... $z_{b_n}(x)$, ... dont chacun n'admet — sur le bord droit de $\mathfrak{L}_1$ et au voisinage — qu'un point critique unique, ... a_n, ..., a_0, ... ou b_n, ...

Envisageons ces dernières branches en un point $\overline{x}$ de l'axe réel (entre $\mathfrak{L}'$ et $\mathfrak{L}'_1$) et considérons d'abord la branche $z_{a_0}(x)$ qui, comme il a été vu au n° 21, s'annule en a_0, e_1 et d_1; appelons γ_1 et γ_2 (n° 1) les cercles de centres a_0 et $-a_0$ (et de rayon $|a_0|^\alpha$ où $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$) qui contiennent respectivement les points a_1 et b_1 et les points e_1 et d_1. D'après le n° 1, notre branche, suivie à partir de $\overline{x}$ sur un contour fermé enveloppant γ_1 ou γ_2, ne présente aucun point critique à l'extérieur de γ_1 et de γ_2. D'ailleurs, comme ladite branche est méromorphe à l'infini, la permutation opérée sur elle par γ_1 décrit dans un sens arbitraire équivaut à la permutation opérée par γ_2 décrit dans l'autre sens. Remarquons enfin qu'étant donné le mécanisme des permutations autour des sommets de $\mathfrak{L}_1$ et de $\mathfrak{L}'_1$ (*voir* n° 10), tourner autour de γ_1, soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif [en partant de la détermination $z_{a_0}(\overline{x})$ spécifiée ci-dessus (1)], revient à tourner, soit autour de a_0, puis de b_1, soit autour de a_0, puis de a_1; tourner autour de γ_2, soit dans le sens négatif, soit dans le sens positif, revient à tourner, soit autour du seul point e_1, soit autour du seul point d_1.

De là résulte que la branche $z_{b_1}(x)$, suivie à partir de $\overline{x}$ entre $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}'_1$ présente comme points critiques les trois points b_1, e_1 et e_2 et ces points seulement. La branche $z_{a_1}(x)$ suivie dans les mêmes conditions présente des points critiques en a_1, d_1 et d_2 seulement. Répétant sur $z_{a_1}(x)$ et $z_{b_1}(x)$ le raisonnement fait ci-dessus sur $z_{a_0}(x)$, nous constatons que, quel que soit l'indice j, *les branches* $z_{b_j}(x)$ *et* $z_{a_j}(x)$, *suivies à partir de* $\overline{x}$ *entre* $\mathfrak{L}_1$ *et* $\mathfrak{L}'_1$, *présentant des points critiques, la première aux points* b_j, e_j *et* e_{j+1}, *la seconde aux points* a_j, d_j *et* d_{j+1}.

En d'autres termes *les branches* $z_{a_j}(x)$ *et* $z_{b_j}(x)$ *échangées par les sommets de* $\mathfrak{L}_1$ *coïncident avec les branches échangées par les sommets de* (2) $\mathfrak{L}'_1$.

[**24**] Cela dit, faisons revenir a_0 jusqu'à l'origine le long de l'axe réel et la ligne normale $\mathfrak{L}_1$ (déformée avec continuité) jusqu'à la position $\mathfrak{L}_{10}$. D'après ce qui pré-

(1) Ladite détermination ne s'annule qu'en a_0 sur le bord droit de $\mathfrak{L}_1$; lorsque nous franchissons $\mathfrak{L}_1$ en passant (par exemple) *au-dessus* de a_0, nous arrivons sur le bord gauche de $\mathfrak{L}_1$ avec une détermination qui s'annule en a_0 et b_1 et en ces points seulement; refranchissant $\mathfrak{L}_1$ *au-dessous* de a_{-1}, nous revenons en $\overline{x}$ avec la détermination $z_{b_1}(x)$ qui, sur le bord droit de $\mathfrak{L}_1$, ne s'annule qu'en b_1.

(2) Supposons, d'autre part, que nous mouvions sur $\mathfrak{L}_1$ le point appelé a_j; alors le point critique correspondant d_j varie en fonction de a_j; on a $d_j = \psi(a_j)$, la fonction ψ étant holomorphe ainsi que son inverse tout le long de $\mathfrak{L}_1$. Nous pouvons convenir de prendre comme ligne $\mathfrak{L}'_1$ la ligne décrite par d_j lorsque a_j décrit $\mathfrak{L}_1$. La ligne de points critiques $\mathfrak{L}'_1$, ainsi définie sera, manifestement, *simple et normale*.

cède, tous les points a, c, e et d restent, dans ce mouvement, constamment à distance finie, et la correspondance ci-dessus indiquée ne cesse donc pas d'exister entre ces points. Par suite, si, partant de la branche de $Z(x)$ définie au n° 19 entre $\mathfrak{L}_{10}$ et $(\mathfrak{L}''_{10}, \mathfrak{L}'''_{10})$, laquelle s'annule en tous les points a, b, e et f, on tourne autour d'un sommet quelconque (a_j ou b_j) de $\mathfrak{L}_{10}$, on tombe sur une branche d'intégrale qui n'admet *à droite* de $\mathfrak{L}_{10}$ que deux points critiques qui sont des sommets de $\mathfrak{L}'_{10}$ (points d_j, d_{j+1} *ou* e_j, e_{j+1}).

[**25**] Effectuons maintenant, comme au n° 16, le changement de variables $(x, e^{\frac{2i\pi}{3}}x)$ et $(z, e^{\frac{4i\pi}{3}}z)$. L'équation différentielle ne change pas et nous en déduisons que les points $f_1, f_2, \ldots$ et $c_1, c_2, \ldots$ (en lesquels se changent respectivement les e et les b) *échangent, à leur tour, les mêmes branches d'intégrales*. En d'autres termes, suivons sur le *bord droit* de $\mathfrak{L}''_{10}$ (*fig.* 5) la branche $z(x)$ qui (d'après le mécanisme des permutations de la ligne $\mathfrak{L}_{20}$ s'annule en *deux* sommets (et deux seulement) f_j et f_{j+1} de $\mathfrak{L}''_{10}$. Cette branche d'intégrale suivie jusqu'en g et ensuite *sur le bord droit* de $\mathfrak{L}'''_{10}$ présente sur ce dernier bord *deux* points critiques (et deux seulement) c_j, c_{j+1}. Les points c_j *et* f_j étant imaginaires conjugués, on voit (ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier directement) que la branche considérée prend une valeur réelle au point g.

Ainsi donc, comme nous l'avions annoncé, quelques permutations que l'on effectue autour des points critiques de $Z(x)$ on retombe toujours sur des branches qui ont comme seuls points critiques des points appartenant à l'ensemble a, b, f.

[**26**] La proposition fondamentale ainsi établie s'étend, comme nous l'avons dit, à une intégrale quelconque $z(x)$. Revenons, en particulier, à l'intégrale déduite de $Z(x)$ en mouvant a_0 depuis a_0 jusqu'à $-\infty$ sur l'axe réel, et appelons $Z_1(x)$ cette intégrale. Il résulte de ce qui précède que, pour cette intégrale, tous les points a, b, c et d (sommets des lignes $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}'_1$) s'évanouissent à l'infini. D'autre part, lorsque a_0 varie de la manière indiquée, les points f et c, en se déplaçant, restent nécessairement extérieurs aux positions $\mathfrak{L}_{10}$, $\mathfrak{L}_{20}$, $\mathfrak{L}_{30}$ (ou, par conséquent, $\mathfrak{L}_{10}$, $\mathfrak{L}''_{10}$, $\mathfrak{L}'''_{10}$) du n° 19. On en déduit facilement (en se référant à la proposition du n° 21 et remarquant que les points critiques f et c ne sauraient devenir tous infinis en même temps que les a, b, d et e) que, lorsque a_0 devient infini, les points f et c restent tous à distance finie et tendent vers certaines positions $f_{11}, \ldots, f_{1n}, \ldots$, et $c_{11}, \ldots, c_{1n}, \ldots$, deux à deux imaginaires conjuguées. D'après la théorème fondamental du n° 22, L'INTÉGRALE $Z_1(x)$ N'A PAS D'AUTRES POINTS CRITIQUES QUE LES POINTS f_{1j} ET c_{1j}.

D'ailleurs on peut toujours joindre les points f_{1j} d'une part et les points c_{1j} d'autre part par deux demi-lignes de points critiques $\mathfrak{L}''_1$ et $\mathfrak{L}'''_1$ respectivement asymptotes aux demi-axes imaginaires positif et négatif (OA_2 et OA_{10}).

Nous dirons — en employant une terminologie dont je me suis servi pour l'étude des fonctions de Bessel et Painlevé — que l'intégrale $Z_1(x)$ est une INTÉGRALE TRONQUÉE *dans les directions réelles*. C'est une intégrale qui a perdu les *deux tiers* de ses points critiques.

[**27**] En changeant x en $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$ et z en $e^{\pm\frac{4i\pi}{3}}z$, on déduit de $Z_1(x)$ *deux nouvelles intégrales tronquées* $Z_2(x)$ et $Z_3(x)$.

$Z_2(x)$ admet comme points critiques les seuls points e et b, sommets de deux demi-lignes asymptotes à OA_2 et à OA_8.

$Z_3(x)$ admet comme points critiques les seuls points a et d, sommets de deux demi-lignes asymptotes à OA_6 et à OA_{12}.

Il n'existe pas d'autre intégrale tronquée.

Les intégrales tronquées jouent, dans l'étude des points critiques ou *zéros* des intégrales de (1), le même rôle que dans l'étude des zéros des fonctions de Bessel ou Painlevé. On les rencontre en étudiant les fonctions — remarquables à divers égards — qu'engendrent les *points critiques considérés comme fonctions les uns des autres*. Considérons par exemple a_0 en fonction de f_1 en partant de l'intégrale $Z(x)$. Lorsque a_0 tend vers l'infini et f_1 vers f_{11}, le point f_{11} est un *point critique transcendant de la fonction* $a_0(f_1)$: si f_1 décrit n tours dans l'un ou l'autre sens de f_{11}, le point a_0 se change en a_n ou en b_n.

V. — Les fonctions entières $F(x, z)$.

[**28**] Des résultats obtenus ci-dessus on déduit immédiatement l'existence des relations entières $F(x, z) = 0$ qui, comme nous l'avons annoncé au début de cette communication, définissent les intégrales de l'équation (1).

Considérons d'abord l'intégrale particulière $Z(x)$. Nous avons vu qu'elle n'a d'autres *zéros* que 0 et les points $a, b, \ldots f$. Nous avons vu, d'autre part au n° 9, a que, pour n très grand, la différence $(a_{n+1} - a_n)$, ou $(b_{n+1} - b_n)$, ... ou $(f_{n+1} - f_n)$ est, en module, de l'ordre de grandeur de $n^{-\frac{2}{3}}$: il en résulte que, si l'on range les points $a, \ldots f$ dans l'ordre des modules croissants (ou du moins non décroissants), la suite formée est une suite *d'ordre* $\frac{1}{3}$.

Envisageons, d'autre part, l'ensemble des points $\overline{x}$ où $Z(x)$ prend une valeur arbitraire $\overline{z}$. Pour $\overline{z}$ voisin de 0, ces points sont respectivement voisins des points $0, a, \ldots f$. Il n'y en a donc qu'un nombre borné à distance finie. Par continuité, on constate qu'il en sera de même quelle que soit la valeur (bornée) de $\overline{z}$. D'ailleurs,

d'après le paragraphe I, les points $\bar{x}$ de grand module sont nécessairement situés à l'intérieur de certains cercles γ entourant respectivement les points $a_n, \ldots f_n, \ldots$ et dont le rayon est $|a_n|^\alpha, \ldots$ ou $|f_n|^\alpha$, α étant compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. On en conclut que, si l'on range les points $\bar{x}$ dans l'ordre des modules croissants (ou du moins non décroissants), la suite obtenue est encore d'ordre $\frac{1}{3}$.

Considérons, maintenant, l'ensemble des valeurs $\bar{z}'$ de Z échangées en un même point $\bar{x}$ par les divers points critiques o, $\ldots a_n, \ldots f_n, \ldots$. D'après le paragraphe I, si $\bar{z}'$ est de *grand module*, les déterminations de $z(x)$ égales à $\bar{z}'$ en $\bar{x}$ ne peuvent présenter sur l'ensemble des rayons issus de $\bar{x}$ qu'un nombre borné de points critiques $a_n, \ldots$ ou f_n de *grand module* et elles sont, en $\bar{x}$, de l'ordre de grandeur de $|a_n|^2, \ldots$ ou $|f_n|^2$. Donc la suite des $\bar{z}'$, rangés par ordre de modules croissants, est une suite d'ordre $\frac{2}{3}$.

De là on déduit que *la fonction* $Z(x)$ *peut être définie par une relation* $F(x, z) = o$ *où* F *est une fonction entière de* x *et* z, *d'ordre* z *en* x *et d'ordre* $\frac{3}{2}$ en z.

Ayant démontré ce résultat pour l'intégrale $Z(x)$ on l'étend immédiatement par continuité à une intégrale quelconque de l'équation (1).

QUELQUES REMARQUES SUR LA MULTIPLICATION COMPLEXE

PAR M. S. LEFSCHETZ

LAWRENCE (KANSAS), U. S. A.

[1] La multiplication complexe des fonctions abéliennes peut être envisagée sous deux aspects bien distincts. On peut se donner *a priori* la matrice aux périodes ou « matrice de Riemann », selon la nomenclature très commode de M. Scorza que nous emploierons dans la suite. Au contraire, partant, comme dans mon Mémoire couronné, d'une certaine multiplication complexe, on peut en dériver les propriétés de la matrice de Riemann, auquel cas il suffit de se limiter aux matrices pures. Les homographies de Riemann d'une telle matrice sont toutes générales, ce qui permet de la ramener à une autre isomorphe, soit Ω,

$$\Omega \equiv || \tau_{j_1}, \tau_{j_1}\alpha_j, \ldots, \tau_{j_1}\alpha_j^{q-1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_2}\alpha_j, \ldots\ldots \tau_{j_r}\alpha_j^{q-1} ||,$$

composée de façon évidente avec les deux tableaux

$$\tau \equiv || \tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \ldots, \tau_{j_r} ||, \qquad || 1, \alpha_j, \ldots, \alpha_j^{q-1} ||,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p; \qquad 2p = qr).$$

Ici comme partout p est le genre de Ω, et les α sont les multiplicateurs de la multiplication complexe T dont l'effet sur les intégrales de la variété abélienne relative à Ω peut être représenté par les équations

$$u'_j = \alpha_j u_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces multiplicateurs sont racines d'une équation

$$[f(\alpha)]^r = 0,$$

où $f(\alpha)$ est de degré q et irréductible dans le domaine de rationalité ordinaire.

Je vais pousser plus avant l'étude de ces matrices et montrer en particulier que les deux multiplications complexes dont j'ai fait l'étude complète dans mon Mémoire méritent une place importante dans ces recherches. Je rappelle que ces deux cas sont ceux où : *a*) les multiplicateurs sont tous réels; *b*) ils sont tous imaginaires, chacun étant une même fonction rationnelle de son conjugué. Ce dernier cas peut être caractérisé aussi de l'une de ces trois manières : 1° La solution de $f(\alpha) = 0$ se ramène à celle d'une équation irréductible de degré $\frac{1}{2}q$ suivie de celle d'une équation du second degré. 2° La matrice Ω possède une multiplication complexe pour laquelle

$$f(\alpha) = \prod_{i=1}^{i=\frac{q}{2}} [\alpha^2 - 2\zeta_i \alpha + \mathrm{R}(\zeta_i)]$$

où les ζ sont tous réels, racines d'une équation irréductible, et de plus le nombre $\mathrm{R}(\zeta_i) - \zeta_i^2$ [du corps algébrique $\mathrm{K}(\zeta_i)$] est positif, ainsi que tous ses conjugués. 3° Soit G le groupe de $f(\alpha) = 0$, S la substitution linéaire unique de G qui permute chaque racine α_j avec sa conjuguée $\bar{\alpha}_{ji}$. Le groupe G doit être permutable avec S.

[**2**] Je veux commencer par montrer que certaines conditions nécessaires pour l'existence même de Ω sont aussi suffisantes.

A une racine α_j de α correspondent un certain nombre r_j de lignes de τ. Je considère l'espace S_{r_j-1} défini par les r_j points d'un S_r dont les coordonnées homogènes sont les éléments des r_j lignes en question. L'existence d'une forme principale de Ω entraîne celle d'une autre que je nomme « forme alternée de τ »,

$$(1) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{r} \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j \alpha_k) x_\mu y_\nu$$

où les $\gamma_{\mu\nu}$ sont des polynômes à coefficients rationnels avec

$$\gamma_{\mu\nu}(x, y) = -\gamma_{\nu\mu}(y, x).$$

Soit dans un S_{r-1}, S_{r_j-1} l'espace qui contient les r_j points dont les coordonnées homogènes sont les éléments des r_j lignes de τ relatives au multiplicateur α_j. La forme (1) aura les propriétés suivantes :

a) Égalée à zéro, elle représente une réciprocité par rapport à laquelle S_{r_j-1} et S_{r_k-1} sont conjugués. Cette propriété définira en général ce que nous nommerons « forme bilinéaire » (alternée ou non), de τ.

b) La forme hermitienne

$$(2) \qquad \sum_{j,k=1}^{p} A_{jk} x_j \bar{x}_k ; \qquad A_{jk} = \frac{-1}{2i} \sum \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \bar{\alpha}_k) \tau_{j\mu} \bar{\tau}_{k\nu}$$

doit être définie, positive (Scorza).

En annulant dans (2) les variables autres que celles relatives à α_j, on trouve de suite qu'il faut que

c) La forme hermitienne

$$(3) \qquad \frac{-1}{2i} \sum_{\mu,\nu=1}^{r} \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \bar{\alpha}_j) y_\mu \bar{y}_\nu$$

doit être positive en tous les points de $S_{r_j - 1}$.

Je dis maintenant que les conditions *a* et *c* que nous venons de trouver nécessaires pour que Ω soit de Riemann *sont aussi suffisantes*.

Remarquons d'abord que si l'on a $\gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) = 0$ quand $\alpha_k \neq \bar{\alpha}_j$, conjugué complexe de α_j, et ceci pour chaque $\gamma_{\mu\nu}$, la proposition est certainement vérifiée, car alors la forme (2) se trouve être la somme de q formes définies, positives, de genres $r_1, r_2, \ldots, r_q$, et comme $r_1 + r_2 + \ldots + r_q = p$, la forme (2) est bien définie, positive. D'ailleurs si (1) est une forme alternée de τ, et $\varphi(\alpha_j, \alpha_k)$ un polynôme à coefficients rationnels, symétrique par rapport à α_j et α_k,

$$(4) \qquad \varphi(\alpha_j, \alpha_k) \sum \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) x_\mu y_\nu$$

est aussi une telle forme.

Débarrassons-nous pour l'instant de la condition imposée à φ et aux $\gamma_{\mu\nu}$ d'être des nombres rationnels. On aura en tous cas

$$\varphi(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{m,n=1}^{q-1} d_{mn} (\alpha_j^{m-1} \alpha_k^{n-1} + \alpha_j^{n-1} \alpha_k^{m-1}).$$

On peut montrer ensuite que les équations linéaires aux inconnues d_{mn},

$$\varphi(\alpha_j, \alpha_k) = 0, \qquad \text{si} \qquad \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k ;$$
$$\varphi(\alpha_j, \bar{\alpha}_j) = 1 ;$$

ont au moins solution et même une solution réelle, car elles restent invariables quand on permute chaque α avec son conjugué. On pourra encore écrire avec cette solution la forme alternée telle que (4) et la forme hermitienne analogue à (2), forme certainement définie, positive. Toutefois la forme alternée correspondante de Ω ne sera pas de Riemann.

Remplaçons maintenant les nombres réels d_{mn} que l'on vient d'obtenir par des nombres rationnels en différant aussi peu que l'on veut. Il leur correspondra une forme (4) et une forme alternée de Riemann pour Ω, à forme hermitienne (2) certainement définie, positive, c'est-à-dire qu'il existera une forme principale de Ω — autrement dit, la matrice est bien de Riemann. En effet, pour qu'une forme hermitienne

$$\sum A_{jk} x_j \bar{x}_k$$

soit définie, positive, il faut et il suffit que d'abord $A_{11} > 0$, puis que les racines de l'équation caractéristique

$$|A_{jk} - \varepsilon_{jk} x| = 0, \qquad (\varepsilon_{jk} = 1, \quad \varepsilon_{jk} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq k),$$

que l'on sait être réelles, soient toutes positives. Or si ces conditions sont satisfaites pour une forme donnée, elles le seront encore quand on change très peu les coefficients. Ceci achève la démonstration.

[3] Passons maintenant à des considérations d'un autre ordre. Donnons-nous une forme bilinéaire à coefficients rationnels de Ω, soit

$$\sum_{\rho, \sigma = 1}^{2p} c_{\rho\sigma} x_\rho y_\sigma. \tag{5}$$

Il lui correspond pour τ la forme

$$\sum \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) x_\mu y_\nu, \tag{6}$$

avec

$$\gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{m, n = 0}^{q-1} c_{(\mu-1)q+m, (\nu-1)q+n} \alpha_j^{m-1} \alpha_k^{n-1}.$$

A cette forme on peut en faire correspondre une autre analogue

$$\sum \gamma'_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) x_\mu y_\nu \tag{7}$$

où les γ' sont tels que

$$\gamma'_{\mu\nu}(\alpha_h, \alpha_l) = \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k),$$

si α_h, α_l peuvent être dérivés de α_j, α_k par une même substitution du groupe G de $f(\alpha) = 0$, tandis que $\gamma'_{\mu\nu}(\alpha_h, \alpha_l) = 0$ dans le cas contraire.

Soient maintenant

$$D = |c_{\varrho\sigma}|, \qquad \Delta(\alpha_j, \alpha_k) = |\gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k)|,$$

les déterminants d'ordres respectifs $2p$ et r des formes (5) et (6), puis désignons par v le déterminant de Vandermonde des α. Multiplions le tableau de D à droite par le tableau

$$\left.\begin{Vmatrix} v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v \end{Vmatrix}\right\} r \text{ termes}$$

où les zéros représentent des tableaux d'ordre q à éléments nuls, puis à gauche par le transposé du même tableau. On obtient un nouveau tableau, dont le déterminant — on le reconnaît facilement — est égal au déterminant des $\Delta(\alpha_j, \alpha_k)$, d'où la relation importante

$$D \cdot v^{2q} = |\Delta(\alpha_j, \alpha_k)|. \tag{8}$$

[**4**] Comme première application montrons que *si pour une paire de multiplicateurs* α_j, α_k, *la forme* (6) *est dégénérée*, Ω *est impure.* En effet, remplaçons (6) par (7), ou ce qui revient au même, supposons que (6) possède déjà la propriété qui sert à définir (7). Les coefficients de la forme (5) correspondante ne sont pas tous nuls. De plus, tous les $\Delta(\alpha_h, \alpha_l)$ sont nuls. En effet, ou bien α_h, α_l sont dérivés de α_j, α_k par une substitution de G, et alors sûrement

$$\Delta(\alpha_h\, \alpha_l) = \Delta(\alpha_j, \alpha_k) = 0,$$

ou bien il n'en est pas ainsi, donc

$$\gamma_{\mu\nu}(\alpha_h, \alpha_l) = 0$$

quels que soient μ, ν et de nouveau

$$\Delta(\alpha_h, \alpha_l) = 0.$$

Comme $v \neq 0$, on aura donc $D = 0$, et Ω qui possède une forme non dégénérée, non identiquement nulle, est bien impure.

[**5**] Comme deuxième application de la relation (8) supposons que l'on ait affaire à une multiplication complexe telle que *b*) du n° [I], et que de plus Ω possède une forme *alternée*, non dégénérée,

$$\sum \gamma'_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) x_\mu y_\nu \tag{9}$$

avec

$$\gamma'_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_j \neq \alpha_k.$$

Il faudra que r soit pair, et S_{r_j-1} est conjugué à lui-même par rapport au complexe obtenu en égalant (9) à zéro. Il y a bien entendu une forme alternée

$$\sum \gamma''_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) x_\mu y_\nu \tag{10}$$

avec

$$\gamma''_{\mu\nu}(\alpha_j, \alpha_k) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k.$$

Soient $\Delta'(\alpha_j, \alpha_k)$ le déterminant de (9), $\Delta''(\alpha_j, \alpha_k)$ celui de (10), $\varphi(\alpha_j)$, $\psi(\alpha_j, \alpha_k)$ des polynômes quelconques à coefficients rationnels, le second étant symétrique par rapport à ses variables.

On trouve de suite que le déterminant de la forme alternée la plus générale de Ω est, au facteur v^{2q} près, le produit des $\frac{1}{2} q$ déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi^r(\alpha_j)\Delta'(\alpha_j, \alpha_j) & \psi^r(\alpha_j, \alpha_j)\Delta''(\alpha_j, \bar{\alpha}_j) \\ \psi^r(\alpha_j, \bar{\alpha}_j)\Delta''(\alpha_j, \bar{\alpha}_j) & \varphi^r(\bar{\alpha}_j)\Delta'(\bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j) \end{vmatrix}.$$

Par suite Ω est impure ou pure suivant que le nombre

$$\frac{|\Delta'(\alpha_j, \alpha_j)|^2}{\left(\Delta''(\alpha_j, \bar{\alpha}_j)\right)^2},$$

qui appartient au corps algébrique $K(\zeta_j)$, est la puissance r^e exacte d'un nombre de ce corps. C'est l'application que nous avions en vue.

[6] La forme (6) posée égale à zéro représente une réciprocité R_{jk} de S_{r-1} en vertu de laquelle S_{r_j-1} et S_{r_k-1} sont conjugués. Donnons-nous deux telles réciprocités non dégénérées, soient R_{jk}, R_{jl}. Imitant un raisonnement de M. Scorza, on reconnaît en

$$R_{jl} \cdot R_{jk}^{-1} = A_{jkl}$$

une homographie non dégénérée de S_{r-1} qui transforme S_{r_l-1} en S_{r_k-1}. Un terme quelconque du tableau définissant cette homographie est un polynôme $\delta(\alpha_j, \alpha_k, \alpha_l)$ à coefficients rationnels. Parmi les expressions $\alpha_k^m \alpha_l^n$ on peut en choisir un certain nombre, soient

$$\zeta_1(\alpha_k, \alpha_l), \qquad \zeta_2(\alpha_k, \alpha_l), \qquad \ldots, \qquad \zeta_s(\alpha_k, \alpha_l),$$

entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire à coefficients rationnels. On peut écrire

$$\delta(\alpha^f, \alpha_k, \alpha_l) = \sum_{t=1}^{s} \beta_t(\alpha_j)\zeta_t$$

où les β sont des polynômes à coefficients rationnels, dont l'un au moins, par exemple $\beta_1(\alpha_j)$, n'est pas nul. On voit alors de suite que, d'abord, l'homographie

$$B_{kl} = \sum_{j=1}^{q} \frac{A_{jkl}}{\beta_1(\alpha_j)}$$

est à termes non tous nuls, et qu'ensuite elle définit une homographie de Riemann de Ω, en vertu de laquelle les intégrales au multiplicateur α_k sont transformées en celles au multiplicateur α_l. On en conclut que si $\alpha_k \neq \alpha_l$, et alors seulement, Ω possède une homographie non permutable avec celle aux multiplicateurs α.

On peut dire aussi que si, en vertu de réciprocités relatives à des formes (5), S_{r_j-1} est relié à deux espaces distincts du même type, Ω possède des homographies de Riemann non permutables.

[7] Supposons qu'il existe au moins un multiplicateur imaginaire α_j. Il y aura une réciprocité

$$\sum \gamma_{\mu\nu}(\alpha_j, \bar{\alpha}_j) x_\mu y_\nu = 0$$

reliant S_{r_j-1} à l'espace relatif au multiplicateur conjugué, et ceci pour chaque mul-

tiplicateur imaginaire. Donc si une paire de racines imaginaires est permutable par G avec une paire de racines dont une est imaginaire et l'autre n'est pas sa conjuguée, il y aura au moins une multiplication de Ω non permutable avec celle aux multiplicateurs α. Désignons par $\varphi(x)$ un polynôme quelconque à coefficients rationnels. Si tous les multiplicateurs sont imaginaires, il n'y aura d'autres multiplications que celles du type $\varphi(\mathrm{T})$, et l'on aura $1 + h = q$ (h : indice de multiplication), uniquement si l'on se trouve dans le cas b) du n° [I].

Supposons maintenant qu'il y ait des multiplicateurs imaginaires en même temps que des multiplicateurs réels, α_1 par exemple étant imaginaire et α_2 réel. Une substitution qui permute α_1 avec α_2, permute aussi $\overline{\alpha_1}$ avec un autre multiplicateur réel, soit α_3. L'espace S_{r_2-1} est transformé en lui-même par la réciprocité A,

$$\sum \gamma_{\mu\nu}(\alpha_2, \alpha_2) x_\mu y_\nu = 0$$

correspondant à la forme (1), et il est relié à S_{r_3-1} par une autre réciprocité B, d'où l'on conclut que AB^{-1} définit une homographie de Riemann transformant les intégrales au multiplicateur α_2 en celles au multiplicateur α_3 — donc non permutable avec l'homographie aux α. Ainsi, quand les multiplicateurs sont en partie réels, en partie imaginaires, les multiplications complexes ne sont pas toutes du type $\varphi(\mathrm{T})$ et $1 + h > q$.

En définitive, c'est bien seulement dans les deux cas a) et b) du n° [I] que les multiplications sont toutes du type $\varphi(\mathrm{T})$ et $1 + h = q$, le « groupe » de la multiplication complexe de Ω étant permutable.

UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS A UNE INFINITÉ D'INCONNUES

PAR R. WAVRE

Dans l'étude des systèmes d'équations

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n = c_p, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

où les a_{pn} et c_p sont donnés, les circonstances les plus différentes peuvent se présenter. Poincaré a montré que pour certains systèmes les inconnues peuvent être choisies arbitrairement, moyennant la convergence d'une seule série contenant linéairement les modules des inconnues, et il est facile de former, d'autre part, des systèmes où une incompatibilité est immédiatement mise en évidence.

Je me propose d'indiquer ici une méthode permettant de résoudre le système dans des cas assez généraux. L'idée de la méthode est celle-ci :

Additionnons les équations du système (1) multipliées respectivement par $1, t, \ldots t^{p-1}, \ldots$. Le système deviendra

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(t) = \mathrm{F}(t)$$

avec

$$(3) \qquad \mathrm{F}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p t^{p-1}, \qquad f_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pn} t^{p-1}.$$

Si les x_n sont tels que (2) soit satisfait et que le premier membre converge uniformément au voisinage de l'origine, l'identification du développement taylorien des deux membres au voisinage de l'origine prouve que nous avons bien une solution du système (1).

Considérons le système particulier :

$$\begin{aligned}(1-\lambda a_{11})x_1 - \lambda a_{12}x_2 - \ldots &= c_1,\\ -\lambda a_{21}x_1 + (1-\lambda a_{22})x_2 - \ldots &= c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\

la méthode classique d'itération donnera

$$\varphi_m(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{m-1}^{(k-1)}(0) f_k(s),$$

où $\varphi_p^{(k-1)}(0)$ désigne le k^e coefficient de Taylor de $\varphi_p(s)$. Et si :

$$M = max \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{s^n} \right| \qquad \text{sur } \Gamma,$$

$\varphi(s)$ est une série uniformément convergente de fonctions holomorphes dans C pour

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

et les inconnues sont

$$x_m = c_m + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_{mn} + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sum_{p=1}^{\infty} c_p a_{np} + \ldots .$$

Les inconnues $x_m^k (m \leqslant k)$ du système réduit à k équations à k inconnues seraient données par l'expression précédente où le symbole ∞ serait remplacé par k, et l'on voit aisément que sous nos hypothèses

$$\lim_{k=\infty} x_m^k = x_m,$$

ce qui légitime le principe des réduites.

Notre solution est la seule telle que $\varphi(s)$ soit holomorphe sur Γ.

Donnons encore un autre exemple où la même méthode s'applique. Remplaçons les hypothèses A et B par les suivantes :

A′ $f_n(t)$ et $F(t)$ holomorphes dans un cercle C de rayon $\rho > 1$,

B′ $f_n(t) < M$ dans C.

Prenons alors dans (6) pour contour Γ un cercle de rayon r tel que $1 < r < \rho$. La solution sera la même et $\varphi(s)$ sera uniformément convergente en vertu de (7) pour

$$\lambda < \frac{1}{M}.$$

Nous ne chercherons pas ici à tirer les conséquences qui découlent pour nos systèmes de la théorie des équations intégrales et terminerons en remarquant que le système (1) peut se ramener sous des conditions très générales à l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{s^n}\, ds = \mathrm{F}(t).$$

ON THE THEORY

OF SETS OF POINTS IN TERMS OF CONTINUOUS TRANSFORMATIONS

By Norbert WIENER

BOSTON (MASSACHUSETTS)

In an ordinary n-space there is a set of concepts of a non-metrical nature, and such that each may be defined in terms of the other. Among these are sequential limit, nonsequential limit, neighborhood, and biunivocal, bicontinuous transformation? In a more general space, these notions need be equivalent no longer. The question thus arises of determining the relations over a general range between biuniform, bicontinuous transformation and the other notions. This the author has done in a paper which is to appear in the *Bulletin de la Société Mathématique de France.*

The undefinable notions taken to start with, are a class of elements K and a set Σ of biunivocal transformations of the whole of K into itself. The derived set or set of limit-elements of a set E is defined as the set of all terms A belonging to K such that A remains invariant under all the transformations of Σ leaving E-A invariant. A closed set is one which contains its derived set. The author has proved that the necessary and sufficent condition that Σ consists precisely of all biunivocal transformations of K leaving derivative properties invariant is that it be a group, that if it contains an operation R, it contains the converse of R, and that it contains every biunivocal operation turning all closed sets into closed sets, and only turning closed sets into closed sets. In the terminology of my paper, a system of this sort is a (J_1).

It becomes a matter of some interest to determine what systems are systems (J_1). A vector system, or system (Ve), is defined as a system K of elements correlated with a system σ of entities and the operations $\oplus$, $\odot$, and $||\ \ ||$ in a manner indicated by the following propositions :

(1) If ξ and η belong to σ, $\xi \oplus \eta$ belongs to σ,

(2) If ξ belongs to σ, and n is a real number $\geqslant 0$, $n \odot \xi$ belongs to σ,

(3) If ξ belongs to σ, $||\xi||$ is a real number $\geqslant 0$,

(4) $n \odot (\xi \oplus \eta) = (n \odot \xi) \oplus (n \odot \eta)$,

(5) $(m \odot \xi) \oplus (n \odot \xi) = (m + n) \odot \xi$,

(6) $||m \odot \xi|| = m||\xi||$,

(7) $||\xi \oplus \eta|| \leqslant ||\xi|| + ||\eta||$,

(8) $m \odot (n \odot \xi) = mn \odot \xi$,

(9) If A and B belong to K, there is associated with them a single member AB of σ,

(10) $||AB|| = ||BA||$,

(11) Given an element A of K and an element ξ of σ, there is an element B of K such that $AB = \xi$,

(12) $AC = AB \oplus BC$,

(13) $||AB|| = 0$ when and only when $A = B$,

(14) If $AB = CD$, $BA = DC$.

$||AB||$ is an écart between A and B in the sense developed by Fréchet in his thesis, so that we may define a limit point of a set of points E as a point A such that for any positive ε there is a member B of E such that $||AB|| < \varepsilon$. I have proved that in a system (Ve) the set of all biunivocal transformations leaving limit properties invariant is the set Σ of a (J_4). Examples of such systems are Euclidean n-spaces, Hilbert space, the space whose elements are bounded sequences of real numbers, and in which limit is taken uniformly, and the space of functions continuous over a closed interval, with limit again taken uniformly. I have also shown that the space of all infinite sequences of real numbers, with limit taken in the non-uniform sense is á (J_4) though the question wether it is a (Ve) remains still undetermined.

The next question which arises is, when does sequential limit as defined in a space (J_4) satisfy the four conditions of Riesz, summarized by Fréchet into three. These are, as numbered by Fréchet :

a) The derivative of E + F is the sun of the derivatives of E and of F.

3° A set consisting of a single element has no limit-element, and

4° If A is a limit-element of a set E, and if B is distinct from A, then there is at least one set F which has A but not B for a limit-element.

In a system (J_1), these become :

(I) If there is a transformation from Σ changing the element A but leaving invariant all the elements of the class E, and there is also a transformation from Σ changing A but leaving invariant all the elements of a class F, then there is a transformation from Σ changing A but leaving invariant every element of E + F.

(II) Given any two elements A and B, there is a transformation from Σ changing A but leaving B invariant.

(III) If there is a set E not containing the element A, but such that every transformation from Σ that leaves all the elements of E invariant leaves A also invariant, then given any element B distinct from A there is a set F such that there is a transformation from Σ changing B but leaving each element of F invariant, while there is no transformation from Σ changing A but leaving each member of F invariant.

It is interesting to note that in every system satisfying (I) and (II), the derivative of any set of elements is closed.

It is a matter of a certain amount of interest to obtain a set of propositions completely defining the formal properties of K and Σ in some specific system. The author has done this in the case of the set of all bicontinuous biunivocal transformations of a line into itself. The undefinables are a set K of elements and a set Σ of biunivocal transformations. The set of postulates for the analysis situs group of a line is the following.

I K contains at least three distinct elements.

II, III, and IV are the three propositions which together are equivalent to the statement that Σ is a (J_1).

V Is (I) of the conditions that a (J_1) satisfy Riesz's set of postulates.

VI If A, B, C, and D belong to K and $A \neq B$, $C \neq D$, then there is a transformation from Σ changing A to B and C to D.

In the remaining postulates, a *connected* set is a set which cannot be divided into two non-null parts, neither of which has a limit-element in the other. *A boundary element* of a set is a limit-element of the set which is also a limit-element of the set of all elements not in the given set. *A segment,* is a closed connected set with at least two boundary elements.

VII If E is any sub-set of K, and A is an element of K not a limit-element of E, then there is a segment of which A is an interior element and which contains no element of E.

VIII There is an at most denumerable sub-set K′ of K such that no member of Σ except possibly the identity transformation leaves every member of K′ invariant.

IX If E and F are two connected sets, and two boundary elements of E are boundary elements of F, then every other element of E is an element of F.

Postulates I-IX inclusive form a categorical set of postulates for the analysis situs group of a line. Postulates I-VIII, on the other hand, apply to all Euclidean spaces and to a much wider group of systems. Indeed, they apply to every system (Ve) in which the sum of two members of σ is independent of their order and in which, if A, B, and C are any three distinct elements such that $||AB|| = ||AC||$, then there is a finite set $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ of elements such that :

(1) $B_1 = B$, $B_n = C$,

(2) For all k, $||AB_k|| = ||AB||$,

(3) For all k, $||B_kB_{k+1}|| < ||AB||$.

Examples of such systems are all Euclidean n-spaces, the space of all bounded sequences (x_n) with limit taken in the uniform sense, Hilbert space, and the space of all functions continuous over a closed interval, with limit taken in the uniform sense.

SUR LA THÉORIE DE L'INTERPOLATION

PAR K. OGURA

OSAKA (JAPON).

M. Whittaker (1) a traité la condition à laquelle doit satisfaire une fonction entière $f(z)$ pour que la formule de Gauss

$$(\mathrm{I}) \qquad f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!}\,\delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} + \frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!}\,\delta^{2n} f_0 \right]$$

soit applicable à toute valeur de z. Mais, puisqu'il me semble que son Mémoire contient quelques points inexacts, je me propose, dans cette Communication, de donner quelques catégories des fonctions entières qui peuvent être représentées par la formule de Gauss, et j'y ajouterai aussi des conditions analogues relatives aux formules de Stirling, de Bessel et de Newton.

I

[**1**] Considérons la fonction définie par

$$(1) \qquad f(z) = \int_a^b g(t)\,e^{-zt}\,dt,$$

où z désigne la variable complexe et t la variable réelle, et où $g(t)$ est une fonction

(1) E. T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* (1915), p. 181.

bornée et intégrable dans l'intervalle fini $a \leqq t \leqq b$. Alors on obtient

$$\delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} = f_n - \binom{2n-1}{1} f_{n-1} + \binom{2n-1}{2} f_{n-2} - \ldots - f_{-(n-1)}$$
$$= \int_a^b g(t) e^{(n-1)t} (e^{-t} - 1)^{2n-1} dt,$$

$$\delta^{2n} f_0 = f_n - \binom{2n}{1} f_{n-1} + \binom{2n}{2} f_{n-2} - \ldots + f_{-n}$$
$$= \int_a^b g(t) e^{nt} (e^{-t} - 1)^{2n} dt.$$

Il est facile de démontrer que

$$(2) \qquad e^{-zt} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{(n-1)t} (e^{-t} - 1)^{2n-1} \frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!} \right.$$
$$\left. + e^{nt} (e^{-t} - 1)^{2n} \frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!} \right] \text{ pour } \left| sh \frac{t}{2} \right| < 1,$$

et que cette série est uniformément et absolument convergente dans l'intervalle $-\lambda < t < +\lambda$ (où λ est la racine positive de $sh \frac{t}{2} = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1{,}762 \ldots$) pour toute valeur de z.

En multipliant la relation (2) par $g(t)$, puis en intégrant terme à terme de a à b, où $-\lambda < a < b < +\lambda$, on obtient

$$\int_a^b g(t) e^{-zt} dt = \int_a^b g(t) dt$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!} \int_a^b g(t) e^{(n-1)t} (e^{-t} - 1)^{2n-1} dt \right.$$
$$\left. + \frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!} \int_a^b g(t) e^{nt} (e^{-t} - 1)^{2n} dt \right],$$

ce qui aboutit à la formule de Gauss

$$f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!} \delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. + \frac{z(z^2 - 1^2) \ldots \left(z^2 - \overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!} \delta^{2n} f_0 \right].$$

Donc nous pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La formule de Gauss est applicable pour toute valeur de z à la fonction $f(z)$, si cette fonction peut s'écrire sous la forme*

$$f(z) = \int_a^b g(t)e^{-izt}dt, \tag{1}$$

où

$$-\lambda < a < b < +\lambda, \qquad \lambda = 1{,}762\ldots,$$

et où la fonction $g(t)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$.

De la forme de l'intégrale (1) on déduit que *la fonction $f(z)$ définie par le théorème I est une fonction entière pour laquelle on peut assigner trois nombres positifs et fixes* A, B *et* R *tels que*

$$|f(\pm ir)| < \mathrm{A} \qquad \textit{pour } r > \mathrm{R},$$
$$|f(re^{i\theta})| < \mathrm{B}\frac{e^{\lambda r|\cos\theta|}}{r|\cos\theta|} \qquad \textit{pour } r > \mathrm{R},$$

où $z = re^{i\theta}$.

[2] THÉORÈME II. — *La formule de Gauss est applicable pour toute valeur de z à la fonction $f(z)$, si cette fonction peut s'écrire sous la forme*

$$f(z) = \int_a^b g(t)e^{-izt}dt, \tag{3}$$

où

$$-\pi < a < b < +\pi$$

et où la fonction $g(t)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$.

La démonstration est analogue à celle du théorème I, il suffit donc de remarquer que

$$e^{-izt} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{i(n-1)t}(e^{-it}-1)^{2n-1}\frac{z(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!}\right.$$
$$\left. + e^{int}(e^{-it}-1)^{2n}\frac{z(z^2-1^2)\ldots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!}\right] \text{ pour } -\pi < t < +\pi,$$

et que dans ce cas cette série est absolument et uniformément convergente.

On peut prouver encore que *la fonction $f(z)$ définie par le théorème II est une fonction entière pour laquelle on peut assigner trois nombres positifs et fixes* A, B *et* R *tels que*

$$|f(\pm r)| < A \qquad \text{pour } r > R,$$

$$|f(re^{i\theta}| < B\,\frac{e^{\pi r|\sin\theta|}}{r|\sin\theta|} \qquad \text{pour } r > R;$$

donc *elle appartient à la fonction cardinale de M. Whittaker.*

[3] THÉORÈME III. — *Tous les théorèmes I et II relatifs à la formule de Gauss peuvent également subsister pour la formule de Stirling*

$$\text{(II)}\qquad f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!}\,\mu\delta^{2n-1}f_0 + \frac{z^2(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n)!}\,\delta^{2n}f_0\right]$$

et pour celle de Bessel,

$$\text{(III)}\quad f(z) = \mu f_{\frac12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-2}^2\right)\left(z-\overline{n-1}\left(z-\frac12\right)\right.}{(2n-1)!}\,\delta^{2n-1}f_{\frac12} + \frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)(z-n)}{(2n)!}\,\mu\delta^{2n}f_{\frac12}\right].$$

Il suffira de faire la preuve pour la formule (II) relative à la fonction du type (1). Puisque la série (2) est absolument convergente pour $-\lambda < t < +\lambda$, en dérangeant les termes de cette série, on obtient

$$e^{-zt} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac12(e^t+1)e^{(n-1)t}(e^{-t}-1)^{2n-1}\,\frac{z(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n-1)!} + e^{nt}(e^{-t}-1)^{2n}\,\frac{z^2(z^2-1^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{(2n)!}\right]$$

qui converge uniformément dans l'intervalle $-\lambda < t < +\lambda$. De plus, nous avons

$$2\mu\delta^{2n-1}f_0 = \left[f_n - \binom{2n-1}{1}f_{n-1} + \binom{2n-1}{2}f_{n-2} - \cdots - f_{-(n-1)}\right]$$
$$+ \left[f_{n-2} - \binom{2n-1}{1}f_{n-2} + \binom{2n-1}{2}f_{n-3} - \cdots - f_{-n}\right]$$
$$= \int_a^b g(t)(e^t+1)e^{(n-1)t}(e^{-t}-1)^{2n-1}dt.$$

La démonstration est donc effectuée de la même manière que celle du théorème I.

II

[**4**] Soit $f(z)$ une fonction entière, pour laquelle on peut assigner un nombre positif fixe R tel que

$$|f(z)| < e^{(\gamma+\varepsilon)|z|} \qquad \text{pour } |z| > R, \tag{4}$$

γ étant un nombre non-négatif fixe et ε un nombre positif si petit qu'il soit.

Alors nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Chacune des formules de Gauss, de Stirling et de Bessel est applicable à la fonction $f(z)$ du type* (4),

1° *Si* $0 \leqq \gamma < 1$;

ou bien

2° *Si* $1 \leqq \gamma < 2$ *complété par la convergence respective des formules* (1).

---

(1) Par exemple, toutes les formules de Gauss, de Stirling et de Bessel sont absolument convergentes, si

$$\overline{\lim}\sqrt[2n]{|\delta^{2n}f_0|} < 2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\sqrt[2n+1]{|\delta^{2n+1}f_{\frac{1}{2}}|} < 2 ;$$

ou

$$\overline{\lim}\sqrt[2n]{|\delta^{2n}f_0|} < 2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\sqrt[2n+1]{|\mu\delta^{2n+1}f_0|} < 2 ;$$

ou

$$\overline{\lim}\sqrt[2n]{|\mu\delta^{2n}f_{\frac{1}{2}}|} < 2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\sqrt[2n+1]{|\delta^{2n+1}f_{\frac{1}{2}}|} < 2 .$$

M. M. Fujiwara vient d'établir le théorème suivant : *La formule de Gauss est applicable à la fonction $f(z)$ du type* (4), *si* $0 \leqq \gamma < 2\log 2$ (= 1,3862 ....). Je dois ce renseignement à son obligeance.

Car, en appliquant à l'inégalité (4) un théorème connu sur la fonction entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

nous avons

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} \leqq \gamma.$$

Mais, si la fonction (5) satisfait à la condition

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_1 a_2 \ldots a_{n-1} c_n|} < \frac{1}{2},$$

où

$$|a_0| \leqq |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

cette fonction peut être représentée par la série de la forme

$$e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \frac{(z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})}{(a_1-a_0)\ldots(a_{n-1}-a_0)}$$

et l'on obtient encore

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|e_n|} < 1\,(^1).$$

Donc, si nous posons en particulier

$$a_0 = 0, \qquad a_{2n-1} = n, \qquad a_{2n} = -n,$$

$$e_0 = f_0, \qquad e_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}\, \delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}},$$

$$e_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{n[(n-1)!]^2}{(2n)!}\, \delta^{2n} f_0,$$

nous pouvons déduire que la fonction (5) peut être représentée par la formule de Gauss qui converge absolument, si cette fonction satisfait à la condition

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} < 1.$$

(1) G. Faber, *Math. Ann.*, 70 (1911), p. 84.

Il est évident que l'on peut obtenir les formules de Stirling et de Bessel en dérangeant convenablement les termes de la formule de Gauss; et donc nous avons obtenu la preuve de la première partie du théorème.

Pour prouver la deuxième partie, il suffira de citer le théorème suivant qui est une généralisation de celui de M. Pólya (1) : Toute fonction entière du type (4), où $0 \leqq \gamma < 2$, est uniquement déterminée quand les valeurs

$$\ldots, \quad f(-n), \quad \ldots, \quad f(-1), \quad f(+1), \quad \ldots, \quad f(+n), \quad \ldots$$

sont données.

[5] Le théorème analogue relatif à la formule de Newton

$$f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!} \delta^n f_{\frac{n}{2}} \tag{IV}$$

se démontre de la même manière. Voici ce théorème :

Théorème V. — *La formule de Newton est applicable à la fonction entière $f(z)$ du type* (4),

1° *Si* $0 \leqq \gamma < \frac{1}{2}$,

ou bien

2° *Si* $\frac{1}{2} \leqq \gamma < 1$ *complété par la convergence de la formule* (2).

---

(1) Pólya, *Rend. Palermo*, 15 (1915), p. 1.

(2) Par exemple, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\delta^n f_{\frac{n}{2}}|} < 1$, la formule de Newton converge absolument.

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR G. VALIRON

(STRASBOURG)

On connaît le complément important apporté par M. Borel au célèbre théorème de M. Picard. En se bornant pour simplifier au cas des fonctions entières l'énoncé bien connu du théorème de M. Picard était le suivant : $f(z)$ étant une fonction entière et a une constante, le nombre des zéros de $f(z) - a$ est infini, sauf peut-être pour *une* valeur particulière de a. A cet énoncé, M. Borel substitua celui-ci : sauf peut-être pour une valeur de a, le nombre des zéros de $f(z) - a$ intérieurs à tout cercle $|z| < r$ est de l'ordre de grandeur du logarithme du maximum du module de $f(z)$ dans ce cercle. C'est à cette proposition que se rattachent plus ou moins directement tous les travaux ultérieurs sur les fonctions entières.

L'an passé, M. Julia, utilisant des résultats de M. Montel, donna au théorème de M. Picard une forme nouvelle plus précise, il montra qu'il existe dans le plan des z un angle d'ouverture aussi petite que l'on veut (obtenu en faisant tourner une droite ou plus généralement une courbe autour de l'origine) à l'intérieur duquel les fonctions $f(z) - a$ ont une infinité de zéros, sauf peut-être pour une valeur de a.

Peut-on donner à cette proposition un complément analogue à celui que le théorème de M. Borel apporte au théorème de M. Picard? Dans un article qui vient de paraître dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, j'ai annoncé qu'on peut effectivement dans certains cas compléter dans ce sens le théorème de M. Julia. Bien que mes résultats soient encore incomplets, je ne crois pas utile de les faire connaître en partie ici, et de donner une esquisse de la méthode qui m'y a conduit.

[1] Les démonstrations de M. Borel reposaient sur les relations entre le maximum $M(r)$ du module d'une fonction entière pour $|z| \leqslant r$, le maximum $A(r)$ de la partie réelle de la fonction pour $|z| = r$ et le minimum du module à l'extérieur de certaines régions entourant les zéros. M. Wiman puis moi-même avons montré qu'on peut préciser beaucoup pour certaines valeurs de r la relation entre $M(r)$ et $A(r)$,

l'égalité fondamentale qui donne cette relation conduit d'ailleurs de suite au théorème primitif de M. Picard, puis au théorème de M. Borel en introduisant le théorème sur le minimum du module, et enfin à la proposition que j'ai en vue en appliquant la méthode non plus à une fonction entière, mais à une série entière de rayon de convergence fini.

L'égalité fondamentale est la suivante : si l'on pose

$$(1) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \left[f(z_0) + \frac{z - z_0}{z_0} g(z_0) + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 \mathrm{R}(z) \right]$$

avec

$$g(z_0) = z_0 f'(z_0) - n f(z_0),$$

n désignant le rang du terme de plus grand module du développement de Taylor de $f(z)$, on a

$$(2) \qquad |\mathrm{R}(z)| < \mathrm{AM}(r)\, n^{2\beta}, \quad \text{si} \quad |z - z_0| < C r n^{-\frac{2}{3}\beta},$$

ce qui donne

$$(3) \qquad |g(z_0)| < \mathrm{BM}(r)\, n^{\beta},$$

β étant compris entre $\frac{3}{4}$ et 1. Ces inégalités et égalités sont vérifiées pour toutes les valeurs ordinaires de $r = |z_0|$, c'est-à-dire pour les valeurs extérieures à une certaine suite d'intervalles exceptionnels, et en outre dans tout intervalle $r - \mathrm{D}\frac{r}{n}, r$, r étant valeur ordinaire. La démonstration se fait par la méthode que j'ai indiquée pour une inégalité analogue (*Comptes Rendus*, 1918).

Soit alors r une valeur ordinaire déterminée, et z_0 un point de module r pour lequel $|f(z_0)|$ est supérieur à $\frac{\mathrm{M}(r)}{\mathrm{K}}$, K étant un nombre fixe supérieur à 1, posons

$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \qquad z_0 = r e^{i\varphi_0},$$

et considérons le quadrillage formé par les circonférences

$$|z| = r - \frac{3\pi \mathrm{E} r}{n \mathrm{M}(r)}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{M}(r),$$

et par les demi-droites

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{4n\mu}{n}, \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n^{1-\frac{2}{3}\beta}.$$

Si z et z_1 sont deux points de l'une des $n^{1-\frac{2}{3}\beta}\,\mathrm{M}(r)$ mailles du quadrillage, tels que

$$|z_1 - z| < \frac{3}{2}\frac{\pi r \mathrm{E}}{n\mathrm{M}(r)},$$

on a

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1) + \varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ étant inférieur à une fonction de r qui tend vers o lorsque r croît indéfiniment. On déduit de cette égalité, en prenant pour z_1 une valeur annulant la partie réelle de $f(z_1)$, que l'une au moins des équations

$$f(z) = \log a + 2ki\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (|\log a| < \mathrm{E})$$

a une racine dans chaque maille. C'est le théorème de M. Picard (pour les fonctions d'ordre infini) complété par la connaissance trés précise de zéros dont le nombre est bien de l'ordre de $\mathrm{M}(r)$.

[**2**] Pour obtenir le théorème de M. Borel, il est nécessaire d'introduire les propositions sur l'ordre d'un produit canonique et sur le minimum du module. Je me bornerai au cas de l'ordre infini et je ne rechercherai pas à obtenir les résultats les plus précis ce qui nécessiterait l'introduction d'une théorie des produits canoniques intermédiaire entre celles de MM. Blumenthal et Denjoy. J'utiliserai les résultats de M. Blumenthal et démontrerai la proposition suivante : si une fonction est de la forme

$$g(z) = e^{f(z)}\,\mathrm{P}(z),$$

$\mathrm{P}(z)$ étant un produit canonique d'ordre $\rho(r)$, et $f(z)$ ayant pour maximum du module $\mathrm{M}(r)$, et si l'on a constamment

$$r^{\rho(r)^{1+\alpha}} < \mathrm{M}(r), \tag{4}$$

α étant un nombre positif fixe, le nombre des zéros de toute fonction $g(z) - a$ compris dans un cercle $|z| = r$ (r étant valeur ordinaire de $f(z)$) est supérieur à $\mathrm{M}(r)^\gamma$ ($\gamma < 1$).

Si N est le nombre des zéros dont le module est moindre que $r\left(1+\frac{1}{\rho(r)}\right)$ on a, d'après le théorème sur le minimum du module

$$\log|P(z)|>-r^{\rho(r)^{1+\varepsilon}}+N\log\delta,$$

δ étant la plus courte distance du point z aux zéros, et ε aussi petit que l'on veut. Comme N est moindre que $r^{\rho(r)^{1+\varepsilon}}$, il vient

$$\log|P(z)|>-r^{\rho(r)}\left(1+\log\frac{1}{\delta}\right).$$

Soit γ_1 un nombre fixe aussi voisin de o que l'on veut, formons le quadrillage

$$|z|=r-\frac{\lambda}{nM(r)^{1-\gamma_1}}, \qquad \lambda=0,1,2,\ldots,M(r)^{1-\gamma_1};$$

$$\varphi=\varphi_0+\frac{4\pi\mu}{n} \qquad \mu=0,1,2,\ldots,n^{1-\frac{2}{3}\gamma};$$

il existe $\frac{1}{9}n^{1-\frac{2}{3}\gamma}M(r)^{1-\gamma_1}N^{-1}$ mailles de ce quadrillage qui ne contiennent pas de zéros de $P(z)$ ainsi que les huit mailles adjacentes. Si z appartient à une telle maille, la détermination réduite de $\log P(z)$ vérifie l'inégalité

$$|\log P(z)|<r^{\rho(r)^{1+\varepsilon}}\log M(r)<M(r)^{\gamma_1},$$

il existe donc des points extérieurs à la maille, situés à une distance des bords supérieure à $\frac{3\pi Er}{2nM(r)}$ en lesquels la partie réelle de $\log g(z)$ est nulle. Si z_1 est un tel point, et si

$$|z-z_1|<\frac{3\pi Er}{2nM(r)}, \tag{5}$$

on a

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|\leqslant\sum\left|\frac{1}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\varphi n}\right|<r^{\rho(r)^{1+\varepsilon}}nM(r)^{1-\gamma_1},$$

d'où

$$\log g(z)=\left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1)+\log P(z_1)+\varepsilon(z).$$

L'équation

$$\log g(z) = \log a + 2ik\pi, \qquad (|\log a| < \mathrm{E})$$

où k est égale à la partie entière de $\frac{1}{2\pi}\log g(z_1)$ admet donc une racine dans le domaine (5). La proposition énoncée est démontrée.

Il suffit d'ailleurs que l'inégalité (4) ait lieu dans des intervalles d'étendue suffisamment grande pour que la conclusion subsiste, et on pourra étudier par cette méthode la proposition que M. Blumenthal appelle le grand théorème de M. Picard. Je remarquerai à ce sujet que les résultats obtenus par M. Sire pour les fonctions d'ordre fini égal à 1 laissent prévoir que l'ensemble des valeurs infra-normales de M. Blumenthal peut être partout dense et avoir la puissance du continu.

[3] L'égalité (1) est encore valable ainsi que les inégalités (2) et (3) pour une série entière de rayon de convergence égal à *un* dont le maximum du module $\mathrm{M}(r)$ vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 \mathrm{M}(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = +\infty;$$

mais les valeurs pour lesquelles elle a lieu ne sont plus aussi denses, tout ce que l'on peut dire c'est qu'il existe une suite de valeurs *remarquables* de r tendant vers un pour lesquelles l'égalité a lieu dans tout l'intervalle r, $r - \mathrm{D}\frac{r}{n}$. La démonstration du théorème de M. Picard est donc encore valable pour les séries entières dont le maximum du module vérifie une condition que l'on déduit de suite de la précédente.

Considérons alors une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans l'angle Δ, $-\omega \leqslant \varphi \leqslant \omega$ et dont le maximum $\mathrm{M}_1(r)$ du module dans le domaine

$$-\omega + \omega_1 \leqslant \varphi \leqslant \omega - \omega_1, \qquad |z| \leqslant r$$

vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_3 \mathrm{M}_1(r)}{\log r} = +\infty. \tag{6}$$

On peut toujours en faisant une transformation évidente ramener ce cas général à celui où l'angle Δ est le demi-plan $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Je me placerai donc dans ce cas.

L'inversion $z = 2\dfrac{1-Z}{1+Z}$ transforme le demi-plan en un cercle de centre $Z = 0$, et la fonction $\varphi(z)$ en une série entière $\Phi(Z)$ dont le seul point singulier sur le cercle de convergence est $Z = -1$, et dont le maximum du module pour $|Z| \leqslant R$ est au moins égal à $M_1\left(\dfrac{\nu(R)}{1-R}\right)$, $\nu(R)$ étant une fonction inférieure à 1 dont la limite pour $R = 1$ ne dépend que du rapport $\dfrac{\omega_1}{\pi}$. Le théorème de M. Picard s'applique, la fonction $\Phi(Z) - a$ a une infinité de zéros dans le cercle $Z < 1$, sauf peut-être pour une valeur de a; il en est donc de même de $\varphi(z) - a$ dans le demi-plan, ce qui donne un cas particulier du théorème de M. Julia avec une généralisation aux fonctions qui sont seulement holomorphes dans un angle.

D'une façon plus générale, si $\varphi(z)$ a des zéros, on peut former un produit canonique $P(z)$ avec ces zéros, et l'on a

$$\Phi(Z) = e^{F(Z)} P\left(2\frac{1-Z}{1+Z}\right),$$

$F(Z)$ étant une série entière. Soit $\rho(r)$ l'exposant de convergence de $P(Z)$, si l'on a

$$r^{\rho(r)^{1+\alpha}} < M_1(\nu r), \qquad (\alpha > 0),$$

cette inégalité ne peut avoir lieu pour les zéros des fonctions $\varphi(z) - a$. Car le maximum du module de $F(Z)$ pour $|Z| \leqslant R$ sera supérieur à $M_1\left(\dfrac{\nu}{1-R}\right)$ et on sera ramené à peu de choses près à la démonstration du n° 2.

On voit en particulier que pour toute fonction entière dont le maximum du module vérifie la condition (6) il existe un angle au moins d'ouverture aussi petite que l'on voudra dans lequel l'inégalité (6) est aussi vérifiée, l'ordre du produit canonique formé avec les zéros des fonctions $\varphi(z) - a$ intérieurs à cet angle ne peut descendre au-dessous de $\log M_1(\nu r)$ que pour une seule valeur de a au plus.

On peut étendre ce résultat à des fonctions moins rapidement croissantes que celles vérifiant la condition (6), et le préciser dans diverses directions.

SUR L'INTÉGRATION

DE

CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS INDÉTERMINÉS

PAR P. ZERVOS

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*C. R.*, 1908) [1] et dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Crelle* (1913), j'ai appliqué une méthode de M. GOURSAT [2] relative à l'intégration d'un système de Monge

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}, dx_1, \ldots, dx_{n+1}) = 0$$

et j'ai trouvé quelques cas d'intégration $n = 3$.

Dans le Mémoire cité j'ai donné quelques conditions suffisantes pour appliquer la méthode dans des cas plus généraux.

Nous remarquons ici que si on prend pour la fonction auxiliaire φ un polynôme d'une forme particulière, les conditions rappelées se simplifient beaucoup. Mais en laissant à part cela, je viens à une autre remarque, d'après laquelle on peut facilement trouver une série d'équations de Monge à quatre variables ($n = 3$) ayant une solution avec un paramètre α et des fonctions arbitraires de ce paramètre et de ses dérivées. Par exemple, soit un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\begin{aligned} r + f(x, y, p, q, t) &= 0, \\ s + \varphi(x, y, p, q, t) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

---

(1) *Sur une méthode de M. Goursat dans le problème de Monge.*

(2) E. Goursat, *Sur le problème de Monge* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1905).

Un tel système peut être remplacé par le système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ &dp + f\,dx + \varphi\,dy = 0, \\ &dq + \varphi\,dx - t\,dy = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Considérons pour chaque système de la forme (1) le système formé par les deux dernières équations du système (2)

$$\begin{aligned} &dp + f\,dx + \varphi\,dy = 0, \\ &dq + \varphi\,dx - t\,dy = 0. \end{aligned} \tag{A}$$

En mettant à part les cas particuliers qui peuvent évidemment se présenter, nous voyons que l'élimination de t entre les équations de tels systèmes (A) nous donnera des équations de Monge de la forme :

$$\mathrm{F}\left(x, y, p, q, \frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0. \tag{B}$$

D'après la formation des équations (B), on voit qu'il y a une correspondance entre le système (1) et (B).

L'étude de cette correspondance peut nous amener à diverses propositions.

On voit ainsi immédiatement par ce qui précède que les solutions des systèmes (1) nous donnent des solutions des équations (B). Appliquons cela à un exemple :

Soit le système en involution (1)

$$r + \frac{s^3}{3} = 0, \qquad t - \frac{1}{s} = 0. \tag{Σ}$$

En poursuivant la marche précédente, je prends

$$s = \frac{1}{t}, \qquad r = -\frac{1}{3t^3},$$

d'où les équations (A) deviennent

$$dp + \frac{1}{3t^3}\,dx - \frac{1}{t}\,dy = 0,$$

$$dq - \frac{1}{t}\,dx - t\,dy = 0.$$

(1) E. Goursat, *Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, pp. 60-61.

Ou encore

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dq}{dx} = \frac{1}{t} + t.\frac{dy}{dx}.$$

De la seconde équation je tire

$$t = \frac{\frac{dq}{dx} \pm \sqrt{\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx}}}{2\frac{dy}{dx}}.$$

d'où : une équation de Monge, qu'on peut déduire ici, est la suivante :

$$(E) \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{\left[\frac{dq}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right]^3} + \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dq}{dx} + \sqrt{\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx}}}.$$

Remarquons maintenant que l'intégrale générale du système (Σ) est représentée par le système des deux équations :

$$\begin{cases} y = \alpha + \dfrac{x - C}{[\psi''(\alpha)]^2}, \\ z = \psi(\alpha) + \left\{\dfrac{\psi'(\alpha)}{[\psi''(\alpha)]^2} + \displaystyle\int \frac{d\alpha}{\psi''(\alpha)}\right\}(x - C) + \frac{4}{3}\frac{(x-C)^2}{[\psi''(\alpha)]^3}, \end{cases}$$

$\psi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire et C une constante arbitraire d'où

$$p = \int \frac{d\alpha}{\psi''(\alpha)} + \frac{2(x-C)}{3[\psi''(\alpha)]^3}, \qquad q = \psi'(\alpha) + \frac{2(x-C)}{\psi''(\alpha)}.$$

Ces valeurs de y, z, p, q vérifient les équations (Σ), par conséquent elles vérifient l'équation (E). La vérification immédiate est très facile.

On pourrait facilement trouver d'autres exemples; mais ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est une analogie entre une théorie relative pour les équations du premier ordre et les théories précédentes pour le système (Σ).

TRANSFORMATION CONFORME DES AIRES INFINIES

SUR LE PLAN OUVERT

PAR M. J. REY-PASTOR

(MADRID).

[1] Il y a trois classes d'aires à connexion simple, soit fini ou infini le nombre de ses feuillets. La représentation conforme sur le plan complet des aires sans contour applicables par déformation sur la sphère complète, on la peut faire d'après la méthode du balayage de Poincaré ou bien d'après la méthode alternée. (Picard, *Traité d'Analyse.*)

Il y a d'autres aires représentables conformément sur le cercle et une troisième classe représentable sur le plan ouvert, sans le point à l'infini.

M. Poincaré (1883) a été le premier à prouver la possibilité de représenter sur le cercle une aire d'un nombre fini ou infini de feuillets qui laisse au moins trois points libres dans tous les feuillets. Cette méthode a été perfectionnée par M. Osgood (1907), et finalement M. Poincaré (1907) et M. Koebe (1907) ont démontré le théorème général d'existence de la représentation conforme de toutes les aires à connexion simple.

Toutes ces méthodes arrivent à la fonction analytique qui résout le problème par la voie indirecte et fort compliquée de l'équation de Laplace.

Quelques années après (1912), M. Carathéodory a donné une méthode directe pour la représentation sur le cercle des aires d'une feuille, qui appartiennent à la deuxième classe, au moyen d'un procédé de convergence. Soit A_1, A_2, A_3, ..., une série d'aires au contour analytique qui contient dans son intérieur le point O, et chacune d'elles est contenue dans la suivante de façon que chaque point intérieur de A reste compris dans un A_n. Nous exprimons ces conditions brièvement comme suit :

$$\lim A_n = A.$$

D'après la terminologie de Carathéodory l'aire A est le *noyau* de la succession A_n. On peut prendre, par exemple, un réseau de carrés dont les côtés ont zéro pour limite. Soit $f_n(x)$ la fonction qui transforme l'aire A_n sur le cercle C; alors on peut démontrer que l'aire A est représentable sur le même cercle au moyen de la fonction holomorphe définie comme limite de la succession $f_n(z)$.

Aussi on pourrait appliquer cette méthode pour la représentation conforme sur le cercle des surfaces de Riemann, bien entendu quand est vérifiée la condition essentielle :

$$\lim f'_n(0) \gtrless 0.$$

Il faut donc dire qu'il manque encore une méthode directe pour la représentation conforme des aires de la troisième classe, lesquelles sont caractérisées par la condition :

$$\lim f'_n(0) = 0.$$

Dans ce cas, la méthode de M. Carathéodory n'est plus applicable à cause des nouvelles difficultés qui s'y présentent.

Dans cette Communication nous nous proposons d'étudier ce troisième cas au moyen d'un théorème nouveau de limitation très simple (aussi applicable au second cas) qui pourra être de quelque utilité pour d'autres chapitres de la même théorie.

[**2**] Qu'on donne dans le plan de la variable complexe z une aire simple quelconque dont l'ensemble complémentaire a deux points au moins, et l'origine O est un point intérieur. D'après le théorème fondamental de la théorie, on peut trouver une fonction holomorphe

$$w = f(z),$$

laquelle transforme conformément A dans un cercle C dont le centre corresponde au point O. Le rayon ρ de ce cercle reste déterminé si nous imposons en outre la condition $f'(0) = 1$.

J'appelle *rayon* de l'aire A au point intérieur O ce nombre ρ ainsi déterminé.

Soit ρ le rayon de l'aire A au point O; si la fonction

$$w = \varphi(z)$$

transforme l'aire A dans une autre B, le rayon de celle-ci au point correspondant est évidemment

$$R = \rho\,|\varphi'(0)|. \tag{1}$$

Il résulte aussi aisément : si l'aire A est comprise dans l'aire B, et si r et ρ sont les rayons respectifs au point commun O, on a

$$r < \mathrm{R}\,(^1).$$

[**3**] Soit $d = \mathrm{OP}$ la distance du point intérieur O au contour de l'aire simple A. On peut construire une aire à deux feuillets qui contienne à l'intérieur l'aire A, quelle qu'elle soit. Il suffit de joindre deux plans d'après Riemann, l'un d'eux avec une coupure du point P jusqu'à son symétrique. Le rayon de cette aire infinie à deux feuillets, d'après un calcul tout à fait élémentaire, est $4(2+\sqrt{2})\,d$.

Alors, eu égard à [2], il résulte pour le rayon ρ de l'aire A la limitation

$$d < \rho < 4(2+\sqrt{2})\,d. \tag{2}$$

Ce nombre $4(2+\sqrt{2})$ n'est pas cependant le moindre possible qui vérifie cette inégalité ; nous désignerons par k ce nombre minimum qui, pour toutes les aires, remplit la condition

$$d < \rho < kd. \tag{3}$$

(On peut démontrer d'après Bieberbach : $k = 4$.)

[**4**] Si le contour de l'aire A reste compris entre les cercles de centre O et de rayons a et λa $(\lambda < 1)$, l'aire A est une partie de la surface à deux feuillets circulaires de rayon a, joints le long du segment $a, \lambda a$. Le rayon de cette surface au point O, après transformations élémentaires, est

$$\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\,a.$$

On obtient donc :

$$\rho < k'a,$$

k' étant la constante

$$k' = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} < 1. \tag{4}$$

[**5**] Considérons un cercle fixe C_q de rayon q dans le plan z, et soit $f(z)$ une fonction

$$w = z + a_1 z^2 + \ldots$$

(1) V. ma brochure : *Teoria de la representación conforme*. Barcelona, 1915.

holomorphe dans C, avec la condition qu'elle transforme C en une aire simple, et qu'on vérifie

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1.$$

On peut donc démontrer, plus aisément que l'a fait Koebe, la propriété suivante :

1° Toutes les aires transformées de C_q contiennent dans l'intérieur un cercle fixe.

2° Les aires transformées d'un cercle $C_{q\tau}$ concentrique avec C_q, et dont le rayon fixe est $q\tau<q$, restent toutes dans l'intérieur d'un cercle fixe C'_R.

Soit d la distance de l'origine au contour de l'aire C'_q transformée dans le plan w du cercle C_q. D'après [2], q étant le rayon de l'aire, on a la limitation

$$d<q<kd, \qquad d>\frac{q}{k},$$

ce qui démontre la première partie.

Quelle qu'elle soit, l'aire C'_q reste comprise dans la surface à deux feuillets composée de deux plans, un desquels avec une coupure du point q au point opposé $-q$; et cette surface, au moyen d'une fonction holomorphe l'on peut transformer dans un cercle C''_r. L'aire correspondante a C'_q dans cette transformation, $w'=\varphi(w)$ reste dans l'intérieur de C''_r.

Dans la correspondance conforme entre les z et les w', on a donc, pour toutes les valeurs $|z|\leqslant q$, la limitation $|w'|<r$, et d'après le lemme de Schwarz, on a pour toutes les valeurs telles que $|z|\leqslant q\tau$ l'inégalité $|w'|<\tau r$, c'est-à-dire, dans le plan w', les aires transformées du cercle $C_{q\tau}$ sont toutes à l'intérieur du cercle fixe $C''_{q\tau}$, et par conséquent les aires correspondantes $C'_{q\tau}$ dans le plan w sont comprises dans une courbe fixe et finie, transformée de la circonférence $C''_{\tau r}$.

[6] Pour aborder le troisième cas de la représentation conforme, nous compléterons ces préliminaires avec un nouveau théorème de limitation.

Considérons les cercles C_h C_q; dont le centre est O et les rayons $h<q$, dans le plan de la variable z, et soit $f(z)$ une fonction holomorphe quelconque. Si elle remplit les conditions

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1,$$

on vérifie dans C_h :

1° $$|f(z)-z|<m,$$

m étant une constante qui dépend des nombres h et q, mais pas de $f(z)$.

2° Le nombre h étant fixé, on a

$$\lim_{q\to\infty} m = 0.$$

Ces propriétés sont valables pour chaque fonction dans tout le domaine du plan qu'elle transforme en une aire simple.

D'après la formule de Cauchy-Taylor, on a

$$f(z) = z + z^2 \mathrm{P},$$

P étant exprimé dans tout point du cercle intérieur $C_{q\tau}(h < q\tau < q)$ par l'intégrale prise dans le sens positif :

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)\,dt}{t^2(t-z)};$$

Mais dans cette circonférence $C_{q\tau}$, ayant $|t| = q\tau$, si nous considérons seulement les points z du cercle C_h, nous avons les inégalités :

$$|z| \leqslant h, \qquad |t-z| \geqslant q\tau - h,$$

et alors

$$|\mathrm{P}| \leqslant \frac{1}{2\pi q^2\tau^2(q\tau - h)}\int_c |f(t)\,dt|.$$

D'autre part, eu égard au théorème (5), on a

$$|f(t)| \leqslant \mathrm{R}$$

et l'intégrale étant simplifiée, il résulte

$$|f(z) - z| = |z^2\mathrm{P}| \leqslant \frac{h^2\mathrm{R}}{q\tau(q\tau - h)}.$$

Fixes h et q, on peut prendre pour τ une valeur quelconque d'après la condition

$$h < q\tau < q,$$

par exemple

$$\mu = \frac{h+q}{2q},$$

et la constante m ne dépend pas de $f(z)$ parce qu'il résulte :

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{4Rh^2q}{q^2 - h^2}$$

et h étant fixé, si l'on fait $q \to \infty$, on a lim $m = 0$, la convergence étant uniforme dans toute l'aire A où les conditions imposées sont remplies.

[**7**] Cela posé, nous pouvons suivre un chemin à plusieurs reprises parallèle à celui qu'utilise Carathéodory dans le cas II, mais considérablement plus court, sans avoir besoin de plusieurs théorèmes généraux dont il fait usage.

Nous prenons une succession d'aires $A_1\ A_2\ \ldots$, chacune d'elles comprise dans les suivantes et telles que $A_n \to A$. Au lieu de représenter toutes ces aires sur le même cercle, comme dans le deuxième cas, nous prenons les fonctions

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots$$

qui transforment ces aires en cercles dans les conditions normales

$$f_n(0) = 0, \qquad f'_n(0) = 1.$$

Les rayons de ces cercles sont donc les rayons ρ_n des aires A_n au point O, et ils ont limite ∞.

Soit B une aire avec contour tout dans l'intérieur de A. D'après la définition de A_n, chaque point de A est compris dans un A_ν, et dans les suivants. Chaque point de l'ensemble fermé B est donc couvert par une aire A_ν et en appliquant le théorème de Borel on obtient une aire A_N de la succession A_n, laquelle contient dans son intérieur l'aire B.

Les aires transformées du domaine B par les fonctions $f_N, f_{N+1}, \ldots$ sont toutes dans un cercle fixe C'_R d'après le théorème (5).

La fonction $w_1 = f_N(z)$ transforme A_N dans le cercle C_N de rayon ρ_N.
La » $w_2 = f_{N+p}(z)$ » A_{N+p} » C_{N+p} » ρ_{N+p}

et transforme l'aire A_N dans un domaine D_N intérieur à C_{N+p}.

D'après [3] la distance du point O au contour de D_n est $d > \frac{\rho_n}{k}$, et, par hypothèse, en prenant N suffisamment grand, on aura

$$\rho_n > Rk$$

et par conséquent, ayant $d > R$, l'aire D_N contiendra à son intérieur le cercle C'_R.

Nous pouvons donc appliquer le théorème (6), et pour toutes les valeurs w' du cercle C'_R, on aura

$$|f_{N+p}(z) - f_N(z)| < \varepsilon$$

en prenant N suffisamment grand, et cela pour $p = 1, 2, 3 \ldots$

La succession de fonctions $f_N(z)$ est donc convergente *uniformément* dans toute aire partielle de A, et par conséquent elle définit une fonction limite

$$f(z) = \lim f_n(z)$$

holomorphe dans tout l'intérieur de l'aire A, et cette fonction n'est pas une constante parce que

$$f'_n(0) = 1.$$

Chaque point z_0 de A reste compris dans un A_n, et par conséquent il lui correspond une valeur finie de

$$w_0 = \lim f_n(z_0).$$

Réciproquement, soit w_0 un point quelconque du plan w, il est compris dans un certain cercle C'_ν. L'équation

$$w_0 = f_\nu(z)$$

a une et seulement une racine dans A_n, mais l'équation $w_0 = f(z)$ étant la limite de celle-là, elle a aussi (d'après le théorème d'Hurwitz) une seule racine dans A_n.

La représentation conforme de l'aire A sur le plan complet, sauf le point à l'infini, est donc démontrée.

ON THE

LOCATION OF THE ROOTS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL

By J.-L. WALSH

If there are plotted in the plane of the complex variable the roots of a polynomial $f(z)$ and the roots of the derived polynomial $f'(z)$, there are interesting geometric relations between the two sets of points. It was shown by Gauss that the roots of $f'(z)$ are the positions of equilibrium in the field of force due to equal particles situated at each root of $f(z)$, if each particle repels with a force equal to the inverse distance. The derivative vanishes not only at the at the positions of equilibrium but also at the multiple roots of $f(z)$.

From Gauss's theorem follows immediately the theorem of Lucas that the roots of $f'(z)$ lie in any convex polygon in which lie the roots of $f(z)$. In the present note I wish to prove the following theorem, the connection of which with Lucas's theorem will be pointed out later.

THEOREM I. — *If m_1 roots of a polynomial $f(z)$ lie in or on a circle C_1 whose center is α_1 and radius r_1, and if all the remaining roots of $f(z)$, m_2 in number, lie in or on a circle C_2 whose center is α_2 and radius r_2, then all the roots of $f'(z)$ lie in or on C_1, C_2, and a third circle C_3 whose center is*

$$\frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2} \text{ and radius } \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2}.$$

If the circles C_1, C_2, C_3 are mutually external they contain respectively the following numbers of roots of $f'(z)$: $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, 1.

The centers of the circles C_1, C_2, C_3 are collinear. If $r_1 = r_2$, the three circles have the same radius. If $r_1 \neq r_2$, the point $\frac{r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1}{r_1 - r_2}$ is a center of similitude for any pair of the circles C_1, C_2, C_3.

Theorem I is a generalization of the trivial theorem where $f(z)$ has but two roots, α_1 and α_2, of respective multiplicities m_1 and m_2. Then α_1 and α_2 are roots of $f'(z)$ of respective multiplicities $m_1 - 1$ and $m_2 - 1$, and there is a root of $f'(z)$ at the point $\frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2}$ which divides the segment (α_1, α_2) in the ratio $m_1 : m_2$.

We shall prove Theorem I from Gauss's theorem, making use of several lemmas.

LEMMA I. — *If m particles lie on or within a circle C, the corresponding resultant force at any point P exterior to C is equivalent to the force at P due to m coincident particles on or within C.*

The force at P due to a particle at any point Q is in magnitude, direction, and sense Q'P, where Q' denotes the inverse of Q in the unit circle whose center is P. To replace m points Q by m coincident points we replace the m vectors Q'P by m coincident vectors, and hence replace their terminals Q' by the center of gravity of the m points Q'. Denote by C' the inverse of the circle C in the unit circle whose center is P. Then under the conditions of the lemma all the points Q lie in or on C, all the points Q' lie in or on C', their center of gravity lies in or on C', and hence the inverse of the center of gravity lies in or on C. This completes the proof of the lemma.

LEMMA II. — *Let the points z_1 and z_2 be allowed to assume independently all positions on or within the respective circles C_1 and C_2 whose centers are α_1 and α_2 and radii r_1 and r_2 respectively. Then the locus of the point $\frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$ which divides the segment (z_1, z_2) in the constant ratio $m_1 : m_2 (m_1, m_2 > 0)$ is the interior (including the boundary) of the circle C_3 whose center is*

$$\frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2} \text{ and radius } \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2}.$$

Under our hypothesis, the point $\frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$ lies on or within C_3. For we have

$$|z_1 - \alpha_1| \leqq r_1,$$
$$|z_2 - \alpha_2| \leqq r_2,$$

and hence

$$\left| \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2} \right| = \left| \frac{m_1(z_2 - \alpha_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2(z_1 - \alpha_1)}{m_1 + m_2} \right| \leqq \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2}.$$

Any point z on or within C_3 corresponds to some pair of points z_1 and z_2 on or within C_1 and C_2 respectively. For let us set

$$z_1 - \alpha_1 = \left(z - \frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2}\right) \frac{r_1}{\frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2}},$$

$$z_2 - \alpha_2 = \left(z - \frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2}\right) \frac{r_2}{\frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2}}.$$

We are assuming that

$$\left| z - \frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2} \right| \leqq \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{m_1 + m_2},$$

and hence

$$|z_1 - \alpha_1| \leqq r_1,$$
$$|z_2 - \alpha_2| \leqq r_2;$$

of course we have

$$z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}.$$

This completes the proof of Lemma II.

We are now in a position to prove Theorem I. Suppose a point z external to C_1 and C_2 to be a position of equilibrium in the field of force. The force at z due to the m_1 particles in or on C_1 is equivalent to the force at z due to m_1 particles coinciding at some point z_1 in or on C_1, and the force at z due to the m_2 particles in or on C_2 is equivalent to the force at z due to m_2 particles coinciding at some point z_2 in C_2. Then z divides the segment (z_1, z_2) in the ratio $m_1 : m_2$ and hence lies in or on C_3. Therefore the three circles C_1, C_2, C_3 contain all positions of equilibrium. They contain also all multiple roots of $f(z)$ and hence they contain all roots of $f'(z)$.

If the circles C_1, C_2, and C_3 are mutually external, we allow the m_1 roots of $f(z)$ in C_1 to move continuously in C_1 and to coalesce at a point in C_1, and similarly allow the m_2 roots of $f(z)$ in C_2 to move continuously in C_2 and to coalesce in C_2. In the final position the numbers of roots of $f'(z)$ in C_1, C_2, and C_3 are $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, and 1 respectively. Throughout the motion of the roots of $f(z)$, the roots of $f'(z)$ move continuously, none enters or leaves any of the three circles, and hence the final number of roots of $f(z)$ in each of those circles is the same as the initial number. The proof of Theorem I is now complete.

If no point of the circle C_2 is exterior to C_1, no point of C_3 is exterior to C_1, so we are led to the following theorem which is equivalent to the theorem of Lucas quoted above :

If all the roots of a polynomial lie on or within a circle, then all the roots of the derived polynomial lie on or within that circle.

For polynomials all of whose roots are real the following theorem is easily proved either from Theorem I or directly by a proof similar to the proof of that theorem :

THEOREM II. — *If m_1 roots of a polynomial $f(z)$ lie in a closed interval l_1 of the axis of reals whose center is α_1 and length l_1, and if all the remaining roots of $f(z)$, m_1 in number, lie in a closed interval l_2 of the axis of reals whose center is α_2 and length l_2, then all the roots of $f'(z)$ lie in l_1, l_2, and a third interval l_3 of the axis of reals whose center is*

$$\frac{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}{m_1 + m_2} \text{ and length } \frac{m_1 l_2 + m_2 l_1}{m_1 + m_2}.$$

If the intervals l_1, l_2, l_3 are mutually external, they contain respectively the following numbers of roots of $f'(z)$: $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, 1.

There are various generalizations of Theorems I and II. It is entirely incidental in Theorem I that we considered the *interiors* of two circles. By slight changes in the formulas used we obtain a similar theorem for the interior of one circle and the exterior of the other. The theorems can easily be extended to give results concerning the roots of the derivative of a rational function, or the roots of the jacobian of two binary forms. The last generalization is particularly interesting because the results are invariant under linear transformation of the complex variable. For these and other results the reader is referred to a paper by the present writer which has appeared and several others which are expected to appear in the *Transactions of the American Mathematical Society.*

SUR UN

THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF A L'ÉQUATION DE FOURIER

Par STANISLAS ZAREMBA

(CRACOVIE).

[**1**] Nous appellerons « équation de Fourier » l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

où n désigne un entier positif quelconque.

C'est, on le sait, à l'intégration de cette équation, avec une valeur de n non supérieure à 3, que Fourier a ramené le problème de la distribution des températures dans un corps homogène, isotrope et athermane.

L'équation (1) donne lieu à un théorème étroitement apparenté au célèbre théorème de la moyenne de Gauss relatif à l'équation de Laplace. C'est ce théorème, avec indication de quelques-unes de ses conséquences, que je me propose d'exposer dans cette Communication.

[**2**] Nous simplifierons considérablement le langage en regardant les $n+1$ variables :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, t \tag{2}$$

comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point dans un espace euclidien (E_{n+1}) à $n+1$ dimensions.

Nous admettrons, ce que l'on suppose ordinairement d'une façon implicite, que l'expression « fonction vérifiant une équation différentielle » ne désigne pas simple-

ment une fonction qui vérifie cette équation différentielle à l'intérieur d'un certain domaine, mais une fonction qui, en dehors de cette condition, satisfait encore à celle d'avoir, dans le domaine considéré, des dérivées *continues* jusqu'à celles de l'ordre de l'équation différentielle inclusivement.

Considérons une fonction u des variables (2) vérifiant l'équation (1) à l'intérieur d'un certain domaine (D) et envisageons une seconde fonction v des mêmes variables, vérifiant à l'intérieur du domaine (D) l'équation adjointe (1) à l'équation (1), c'est-à-dire l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Désignons par (T) un domaine borné (2) qui, avec sa frontière (S), soit situé à l'intérieur du domaine (D). Le domaine (T) vérifiant certaines conditions de régularité, on aura, par le théorème de Green, la relation suivante :

$$\int_{(S)} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u v \right\} ds = 0, \tag{4}$$

où l'on a désigné par ds l'élément superficiel de (S), par

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$$

les cosinus directeurs de la normale intérieure au point de (S) auquel se rapporte ds, et par $\frac{\partial}{\partial \nu}$ l'opérateur différentiel défini par la formule :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5}$$

[3] Considérons dans l'espace (E_{n+1}) un point quelconque

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \sigma, \tag{6}$$

définissons la fonction r par les relations :

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2; \qquad 0 \leq r, \tag{7}$$

---

(1) Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, pp. 71-72.

(2) C'est-à-dire un domaine contenu dans une hypersphère de rayon fini.

désignons par c une constante positive et posons :

$$(8) \qquad G(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma; x_1, \ldots, x_n, t) = (\sigma - t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4(\sigma-t)}} - c^{\frac{n}{2}}.$$

Considéré comme fonction des variables (6), le premier terme du second membre de cette égalité représente une intégrale particulière bien connue de l'équation de Fourier, intégrale utilisée autrefois par Laplace et dont M. E.-E. Levi (1) a su brillamment tirer parti pour résoudre un problème contenant comme cas particulier le problème de Fourier; regardé au contraire comme fonction des variables (2), le premier terme du second membre de l'équation (8) est une intégrale particulière de l'équation (3). Nous avons donc :

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial G}{\partial \sigma} = 0$$

ainsi que

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

et si, en se bornant à considérer les valeurs réelles des variables, on convient avec nous de regarder l'expression

$$(\sigma - t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4(\sigma-t)}}$$

comme égale à zéro pour

$$\sigma - t = 0,$$

pourvu que l'on ait

$$r \neq 0,$$

les équations (9) et (10) seront vérifiées pour tous les systèmes de valeurs des variables (2) et (6), sauf pour

$$x_i - \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \sigma - t = 0.$$

(1) E.-E. Levi, *Sul problema di Fourier* (R. Accademia delle Scienze di Torino, Adunanza del 26 gennaio 1908).

Regardons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \sigma$ comme les coordonnées d'un point fixe, situé dans l'espace (E_{n+1}), et considérons les inégalités suivantes :

$$(11) \qquad \begin{cases} G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \sigma; x_1, x_2, \ldots, x_n, t) > 0, \\ \sigma - t > 0 \text{ (1)}. \end{cases}$$

Ces inégalités font correspondre au point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \sigma)$ de l'espace (E_{n+1}) un certain domaine $D(\xi, \sigma)$, situé dans cet espace. Cela posé, voici deux théorèmes que l'on démontrera avec la plus grande facilité :

THÉORÈME I. — Le domaine $D(\xi, \sigma)$ est un domaine convexe; la frontière $S(\xi, \sigma)$ de ce domaine admet en chacun de ses points une normale déterminée; les cosinus directeurs de la normale à la surface $S(\xi, \sigma)$ sont des fonctions continues des coordonnées du pied de la normale; enfin tous les points du domaine $D(\xi, \sigma)$ et de sa frontière $S(\xi, \sigma)$ appartiennent au domaine défini par les relations :

$$0 \leqq (\sigma - t) \leqq \frac{1}{c}; \qquad 0 \leqq r^2 \leqq \frac{2n}{ec},$$

où e représente la base des logarithmes népériens.

THÉORÈME II. — Continuons à regarder le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ comme un point fixe, situé dans l'espace (E_{n+1}); regardons par conséquent la fonction $G(\xi_1, \ldots \xi_n, \sigma; x_1, \ldots, x_n, t)$ comme fonction des seules variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ et formons pour la surface $S(\xi, \sigma)$ l'expression $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ conformément à la formule (5). Dans ces conditions, la fonction $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ sera une fonction continue et bornée, définie pour l'ensemble de tous ceux des points de $S(\xi, \sigma)$ dont aucun ne se confond avec le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$; cette fonction sera positive partout où elle existe, sauf au point

$$x_i = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad t = \sigma - \frac{1}{c},$$

où elle sera égale à zéro; enfin la fonction $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ aura $c^{\frac{n}{2}}$ pour limite lorsque le point $(x_1, \ldots, x_n, t)$ tendra vers le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$.

---

(1) Pour les valeurs réelles des variables qui seront seules envisagées dans ce travail, l'inégalité $\sigma - t > 0$ est une conséquence de la première des inégalités (11), à moins que n ne soit divisible par 4.

[**4**] Voici maintenant le théorème fondamental qui forme l'objet principal de cette Communication :

Théorème fondamental. — Désignons par $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ une fonction quelconque vérifiant l'équation (1) à l'intérieur d'un certain domaine (D) et soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ un point quelconque situé à l'intérieur de ce domaine. Dans ces conditions, il existera un nombre positif M tel que, pour toute valeur de c vérifiant l'inégalité

$$c > \mathrm{M} \tag{12}$$

et avec la valeur (8) de la fonction G, l'on ait :

$$\left(2\sqrt{\pi}\right)^n u(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma) = \int_{\mathrm{S}(\xi,\sigma)} u \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \nu} ds, \tag{13}$$

où l'on désigne par ds l'élément superficiel de la frontière $\mathrm{S}(\xi, \sigma)$ du domaine $\mathrm{D}(\xi, \sigma)$.

Pour établir ce théorème, remarquons que le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ étant, par hypothèse, situé à l'intérieur du domaine (D), il résulte du théorème I du numéro précédent qu'il existera certainement une valeur positive M, telle que l'inégalité (12) soit une condition suffisante pour que le domaine $\mathrm{D}(\xi, \sigma)$ et sa frontière $\mathrm{S}(\xi, \sigma)$ soient situés à l'intérieur du domaine (D). Supposons que l'on ait attribué à M une valeur vérifiant la condition précédente, admettons que l'inégalité (12) soit vérifiée, reportons-nous de nouveau au théorème I du numéro précédent, désignons par t' un nombre vérifiant les inégalités

$$\sigma - \frac{1}{c} < t' < \sigma$$

et soit $\mathrm{D}'(\xi, \sigma)$ la partie du domaine $\mathrm{D}(\xi, \sigma)$ qui est située dans la région de l'espace (E_{n+1}), où t satisfait à la condition :

$$t \leqq t'.$$

En se reportant aux théorèmes I et II du numéro précédent, ainsi qu'à l'équation (10), on reconnaîtra que, dans l'égalité (4), il est permis de substituer la frontière du domaine $\mathrm{D}'(\xi, \sigma)$ à la frontière (S) du domaine (T) et la fonction $\mathrm{G}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma; x_1, \ldots, x_n, t)$, considérée comme fonction des seules variables $x_1, \ldots, x_n, t$, à la fonction v. Après avoir formé l'équation qui résulte de l'équation (4) au moyen des substitutions précédentes, il suffira de passer à la limite, en faisant tendre t' vers σ, pour obtenir la formule (13).

Notre théorème doit donc être regardé comme démontré.

[5] Pour mettre en évidence la portée du théorème précédent, nous allons en déduire le suivant :

THÉORÈME. — Considérons dans l'espace (E_{n+1}) un domaine ouvert (D), vérifiant les conditions suivantes :

1° Les valeurs de la coordonnée t pour les points du domaine (D) admettent une borne inférieure a.

2° A tout point

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}),$$

situé à l'intérieur du domaine (D), correspond un nombre a_0 tel que l'ensemble de tous ceux des points de la droite

$$x_i = x_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sont situés à l'intérieur du domaine (D), soit caractérisé par l'inégalité

$$t > a_0.$$

3° Lorsque le plan

$$t = \text{const}.$$

contient un point intérieur au domaine (D), l'ensemble de tous ceux des points de ce plan qui sont intérieurs au domaine (D) est borné.

Cela posé, soit u une fonction vérifiant l'équation de Fourier à l'intérieur du domaine (D) et admettant une valeur périphérique déterminée en tout point de la frontière (S) de ce domaine.

Si l'on désigne alors par (S_1) et (D_1) les portions respectives de (S) et (D), situées dans la région de l'espace (E_{n+1}) définie par la relation

$$t \leqq t_1,$$

où t_1 est un nombre quelconque vérifiant l'inégalité

$$t_1 > a,$$

il existera toujours sur la partie (S_1) de la frontière du domaine (D) au moins un point où la fonction u atteindra la borne inférieure de ses valeurs dans (D_1) ainsi qu'un point au moins où elle atteindra la borne supérieure des mêmes valeurs.

Pour établir ce théorème, commençons par observer que les bornes des valeurs de u dans le domaine (D_1) coïncident avec celles de ses valeurs dans le domaine $(D_1 + S_1)$, somme des ensembles de points (D_1) et (S_1). Mais le domaine $(D_1 + S_1)$ est borné et fermé; d'autre part la fonction u est continue en tout point de ce domaine. Il existe donc, dans le domaine $(D_1 + S_1)$, au moins un point où la fonction u atteint la borne inférieure m de ses valeurs dans ce domaine.

Soit (E) l'ensemble de tous les points du domaine $(D_1 + S_1)$ en chacun desquels la fonction u acquiert la valeur m. L'ensemble (E) sera évidemment borné et fermé. Il existera donc dans cet ensemble au moins un point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ dont la coordonnée t sera égale à la borne inférieure σ des valeurs de cette coordonnée pour les points de l'ensemble (E).

Je dis que le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ sera situé sur la portion commune (S_1) des frontières des domaines (D_1) et (D). En effet, supposons que, contrairement à cette assertion, le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ ne soit pas situé sur (S_1). Dans ce cas, il coïncidera avec quelque point du domaine (D_1) et sera, par conséquent, un point situé à l'intérieur du domaine (D). Donc, d'après le théorème du numéro précédent, on aura

$$(14) \qquad \left(2\sqrt{\pi}\right)^n m = \int_{S(\xi,\sigma)} u \frac{\partial G}{\partial \nu}\, ds,$$

en attribuant à la constante c qui entre dans la formule (8) une valeur assez grande.

Mais toute constante étant une intégrale de l'équation de Fourier, la formule (13) nous donnera :

$$(15) \qquad \left(2\sqrt{\pi}\right)^n m = \int_{S(\xi,\sigma)} m \frac{\partial G}{\partial \nu}\, ds.$$

Les formules (14) et (15) donnent :

$$(16) \qquad 0 = \int_{S(\xi,\sigma)} (u - m) \frac{\partial G}{\partial \nu}\, ds.$$

Or, d'après le théorème II du numéro 3, la fonction $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ varie continuement sur $S(\xi, \sigma)$ et elle est positive, sauf en deux points(1). D'autre part, la différence $u - m$ est continue et non négative sur $S(\xi, \sigma)$. Par conséquent, il résulte de (16) que l'on a :

$$u - m = 0$$

(1) En l'un de ces points on a $\frac{\partial G}{\partial \nu} = 0$ et en l'autre la fonction $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ n'existe pas, mais a $c^{\frac{n}{2}}$ pour limite.

en tout point de $S(\xi, \sigma)$. Mais en tout point de $S(\xi, \sigma)$, distinct du point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$, on a :

$$t < \sigma,$$

Donc, contrairement à l'hypothèse, σ ne serait pas la borne inférieure des valeurs de t pour les points de l'ensemble (E). Cela prouve que le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \sigma)$ est bien situé sur (S_1). Il suffirait de changer u en $-u$ pour déduire de ce qui précède l'inexactitude du théorème aussi en ce qui concerne la borne supérieure des valeurs de u dans (D_1). Donc, en définitive, le théorème est complètement établi.

En s'appuyant sur le théorème précédent, on établirait avec la plus grande facilité les théorèmes qui, dans la théorie de l'équation de Fourier, correspondent à l'unicité de la solution du problème de Dirichlet et au théorème d'après lequel toute série de fonctions harmoniques, uniformément convergente sur la frontière d'un domaine borné, est uniformément convergente dans tout ce domaine.

SUR LES SOLUTIONS DISCONTINUES

DU

PROBLÈME DU CALCUL DES VARIATIONS DANS L'ESPACE

A n DIMENSIONS

Par M. NILOS SAKELLARIOU

(ATHÈNES).

[**1**] Soit l'intégrale :

$$(1) \qquad \mathfrak{J} = \int_{P_1}^{P_2} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\, ds,$$

avec

$$(ds)^2 = \sum_i (dx_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\theta_k = \arccos \frac{x'_k}{\sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n}}, \qquad \sum (\cos^2 \theta_i) = 1$$

et supposons que la courbe rectifiable

$$(2) \qquad x_i = x_i(s), \qquad s_1 \leqq s \leqq s_2,$$

située à l'intérieur d'une région R connexe de l'espace à n dimensions et joignant deux points $P_1(s_1)$, $P_2(s_2)$ de cette région, rende l'intégrale (1) minimum, et ait un point anguleux $P_0(s_0)$.

[**2**] En supposant que F satisfait pour toutes les valeurs des x_i dans R et des x_i, qui ne sont pas nulles à la fois, à la condition d'homogénéité

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; kx'_1, \ldots, kx'_n) = kF(x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n), \quad k > 0$$

et en employant les notations abrégées suivantes :

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n;\ x'_1, \ldots, x'_n) &= F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = F, \\ F_{x_i}(x_1, \ldots, x_n;\ x'_1, \ldots, x'_n) &= F_{x_i}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = F_{x_i}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on déduit :

$$(3) \qquad F = \sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i F_{x'_i}, \quad F_{x'_i} = \sum_{j=1}^{n} \cos\theta_j F_{x'_j x_i}, \quad \sum_{j,i=1}^{n} \cos\theta_j F_{x'_i x'_j} = 0.$$

[**3**] Des équations (3_3) on trouve facilement :

$$\begin{vmatrix} F_{x'_1x'_1} & \ldots & F_{x'_1x'_{n-1}} \\ F_{x'_2x'_1} & \ldots & F_{x'_2x'_{n-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{x'_{n-1}x'_1} & \ldots & F_{x'_{n-1}x'_{n-1}} \end{vmatrix} : \cos^2\theta_n = \ldots = \begin{vmatrix} F_{x'_1x'_2} & \ldots & F_{x'_1x'_n} \\ F_{x'_2x'_2} & \ldots & F_{x'_2x'_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{x'_{n-1}x'_2} & \ldots & F_{x'_{n-1}x'_n} \end{vmatrix} : \cos\theta_1 \cos\theta_n = F_1(x_1, \ldots, x_n;\ \theta_1, \ldots, \theta_n),$$

[**4**] Les équations de Lagrange-Euler de ce problème sont les suivantes :

$$(4) \qquad Q_i = \frac{d}{ds} F_{x'_i} - F_{x_i} = 0,$$

tandis qu'on a :

$$\sum \cos\theta_i Q_i = 0.$$

Pour l'intégration des (4), nous considérons $(n-1)$ d'entre elles, avec l'équation

$$\sum_i x_i' x_i'' = 0$$

et on tire le système :

$$(5) \qquad \begin{cases} x_i'' = x_i^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta_1, \ldots, \theta_n), \\ x_i' = \dfrac{dx_i}{ds} = \cos\theta_i \end{cases}$$

en supposant que $F_1 \neq 0$. Des équations (5), on trouve les extrémales du problème.

[**5**] Nous posons :

$$\mathcal{E} = \sum_i (\overline{F}_{x'_i} - F_{x'_i}) \cos \bar{\theta}_i = \mathcal{E}(\theta_1, \ldots, \theta_n ; \bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n),$$

où $\bar{\theta}_i$ désignent les angles que fait la direction positive de la tangente à une courbe $\overline{C}$ avec les axes ox_i au point d'intersection de cette courbe et de (2), et on a dans le cas de minimum : $\mathcal{E} \geqq 0$.

Les conditions de Legendre pour un extrémum de l'intégrale (1) sont les suivantes :

$$F_{x'_i x'_i} > 0, \quad F_1 > 0 \ \text{(min.)}, \quad F_{x'_i x'_i} < 0, \quad F_1 > 0 \ \text{(max.)}. \tag{6}$$

[**6**] Supposons qu'on ait une famille :

$$x_i = \chi_i(s, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \tag{7}$$

d'extrémales, qui dépendent de $(n-1)$ paramètres u, contenant l'arc $P_1 P_0$ pour $u_l = u_l^0$, $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$ et qui jouissent de la propriété que :

$$\chi_i, \quad \chi_{is}, \quad \chi_{iss}$$

sont de classe C′ dans le voisinage

$$\alpha \leqq s \leqq \beta, \quad |u_l - u_l^0| \leqq k_l,$$

tandis qu'on a :

$$\alpha < s_1, \quad s_0 < \beta,$$

et k_l sont de nombres positives dépendant de α, β. On demande de déterminer sur une courbe de (7), C_u, voisine de l'extrémale $C_u^0 = P_1 P_0$ un point $\mathbf{P}(s)$ et une direction $\bar{\theta}_i$ qui, associée à la direction θ_i de la tangente positive à C_u en $P(s)$, remplit les conditions :

$$F_{x'_i} - \overline{F}_{x'_i} = 0.$$

[**7**] Pour déterminer les s, $\cos \bar{\theta}_i$, on a les équations :

$$\begin{cases} S_i = F_{x'_i}(\chi_1, \ldots, \chi_n ; \chi_{1s}, \ldots, \chi_{ns}) - F_{x'_i}(\chi_1, \ldots, \chi_n ; \cos \bar{\theta}_1, \ldots, \cos \bar{\theta}_n) = 0, \\ T = \sum_i \cos^2 \bar{\theta}_i - 1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Le jacobien des (8) par rapport à s, $\cos\bar{\theta}_i$, est égal à $-2\overline{F}_1\Omega$, où

$$\Omega = \sum \cos\theta_i \overline{F}_{x_i} - \sum \cos\bar{\theta}_i F_{x_i}.$$

En supposant que :

$$\overline{F}_1 \neq 0, \qquad \Omega_0 \neq 0,$$

où Ω_0 représente la valeur de Ω au point

$$P_0(s_0, u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0; \cos\bar{\theta}_1^0, \ldots, \cos\bar{\theta}_n^0)$$

et que de plus :

$$F_{x'_i x'_l} \gtrless 0, \qquad \overline{F}_{x'_i x'_l} \gtrless 0,$$

nous pouvons écrire :

$$s = s(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad \cos\bar{\theta}_i = \bar{\theta}_i(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

et les conditions suivantes seront remplies :

$$s_0 = s(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0), \qquad \cos\bar{\theta}_i^0 = \bar{\theta}_i(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0),$$

$$F_1\Big(\chi_1[s(u_1, \ldots, u_{n-1}), u_1, \ldots, u_{n-1}], \chi_2, \ldots, \chi_n; \bar{\theta}_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \bar{\theta}_n(u_1, \ldots, u_{n-1})\Big) > 0$$

pour toutes les valeurs des u_l telles que :

$$|u_l - u_l^0| \leqslant k_l.$$

[8] Considérons maintenant le système suivant :

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = \cos\bar{\theta}_i, \frac{d\bar{\theta}_i}{ds} = -\frac{d^2\bar{x}_i}{ds^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\bar{\theta}_i}}, \tag{9}$$

où les $\frac{d^2\bar{x}_i}{ds^2}$ sont exprimées en fonction des $\bar{x}_i$, $\bar{x}'_i$ à l'aide des équations (4) et de l'équation

$$\sum_i \bar{x}'_i \bar{x}''_i = 0,$$

parce que entre les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \overline{F}_{x'_1x'_1} & \dots & \overline{F}_{x'_1x'_n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \overline{F}_{x'_{n-1}x'_1} & \dots & \overline{F}_{x'_{n-1}x'_n} \\ \cos\overline{\theta}_1 & \dots & \cos\overline{\theta}_n \end{vmatrix}, \dots\dots\dots\dots \begin{vmatrix} \overline{F}_{x'_2x'_1} & \dots & \overline{F}_{x'_2x'_n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \overline{F}_{x'_nx'_1} & \dots & \overline{F}_{x'_nx'_n} \\ \cos\overline{\theta}_1 & \dots & \cos\overline{\theta}_n \end{vmatrix}$$

il y en a un au moins différent de zéro, et aucun des dénominateurs des (9) n'est nul. Alors on conclut qu'on peut construire une courbe $\overline{C}_u$ par le point P dans la direction $\cos\overline{\theta}_i$, représentée par

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(s, u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Ainsi, on a une courbe brisée $C_u + \overline{C}_u$ qui possède le point angulaire P et sur laquelle le paramètre varie continument. Si l'on considère les u_l comme variables, on aura une famille de courbes brisées du problème qui contient la solution $P_1 P_0 P_2$ pour $u_l = u_l^0$.

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

L'INTÉGRATION LOGIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par M. JULES DRACH

(PARIS).

Au dernier Congrès international des Mathématiciens (Cambridge, 1912), j'ai été heureux de présenter, avec un aperçu rapide des points essentiels de ma théorie d'*intégration logique* des équations différentielles, quelques exemples d'équations particulières, nouvelles, qui peuvent s'intégrer par quadratures : l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel et celle des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré.

En poursuivant mes recherches, j'ai réussi à obtenir méthodiquement, et dans certains cas de manière complète, la *détermination effective* des équations *d'un type donné* qui présentent, au point de vue de l'intégration, une réduction suffisante pour que l'intégrale puisse s'exprimer par des quadratures partielles.

J'ai pu former ainsi les cas de réduction d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(y)}{\beta(y)},$$

où α et β sont des polynômes de degrés donnés n et $(n-2)$ en y, à coefficients *quelconques* en x — en particulier traiter en détail l'*équation de la balistique extérieure*, qui appartient à cette catégorie pour $n = 3$ [1]. On trouvera plus loin la détermination des cas de réduction d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi \mathrm{A}(x, y),$$

où φ est un paramètre et A une fonction arbitraire de deux variables. Enfin j'ai

[1] Cf. *Annales de l'École Normale Supérieure*, janvier 1920, et *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 158, p. 926, 1914.

donné explicitement le moyen de définir toutes les fonctions $F(x, y)$ pour lesquelles l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y)$$

possède une intégrale première (et une seule) rationnelle en $\frac{dy}{dx}$ (1).

La même méthode, convenablement modifiée, m'a également permis de déterminer les cas où l'équation différentielle des lignes géodésiques, écrite en *coordonnées symétriques*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

possède une intégrale première (et une seule) rationnelle en $\frac{dy}{dx}$ (2).

Enfin, j'ai étudié les cas de réduction possibles pour une équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [\varphi(x) + h]y$$

où $\varphi(x)$ est à déterminer et h un paramètre variable; dans les cas où l'intégration de l'équation se ramène aux quadratures, on peut déterminer effectivement la fonction $\varphi(x)$ (3).

Les méthodes employées ne sont, bien entendu, pas limitées à ces applications.

En donnant dans les pages qui suivent un bref résumé de quelques-unes de ces recherches (un exposé plus étendu paraîtra prochainement ailleurs), je voudrais signaler particulièrement deux points à l'attention des mathématiciens.

On verra, d'une manière générale, que les fonctions implicites à déterminer le sont par des équations où figurent des intégrales (dépendant de paramètres) prises dans le champ complexe, d'un point à un autre ou le long de certains contours fermés — c'est-à-dire des *fonctions de ligne*. Ces fonctions de ligne sont des solutions d'équations linéaires aux dérivées partielles *irréductibles, dont le groupe de rationalité est linéaire ou projectif*.

Elles sont le prélude aux fonctions de *surface*, ou de *volume* (comme le potentiel) qui interviendront dans les problèmes analogues relatifs aux équations d'ordre supérieur.

D'autre part, j'ai été amené à introduire *explicitement* dans le calcul — quand il s'agit d'un système différentiel quelconque — les *variables caractéristiques* d'Ampère, *lorsqu'elles sont des fonctions déterminées des arguments du système*, et à les regarder d'abord comme des variables *indépendantes*. La méthode d'intégration qui

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168, p. 497, 1919.
(2) *Ibid.*, t. 169, 1155, 1919.
(3) *Ibid.*, t. 168, p. 47 et p. 337, 1919.

en résulte pour ces équations aux dérivées partielles, qui sont d'ordre quelconque à deux variables, me paraît s'étendre à des cas très généraux que n'atteignent point les méthodes de Monge, d'Ampère ou de Darboux.

I. — *Réduction des équations* $\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}(y)$, *où* A *est une fonction rationnelle de* y, *à coefficients quelconques en* x.

Une équation

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}(y) = \frac{\alpha(y)}{\beta(y)}, \tag{1}$$

où α et β sont des polynômes en y, à coefficients quelconques en x, garde sa forme par une transformation

$$x = f(x_1), \qquad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}$$

où f, a, b, c, d sont des fonctions arbitraires de x_1 $(ad - bc \neq 0)$.

Il est possible en partant de là, de ramener, par des opérations qui n'exigent que des quadratures, l'équation (1) à une *forme canonique* où le nombre des coefficients arbitraires est réduit à son minimum. L'équation (1) canonique, ou mieux l'équation

$$\mathrm{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

ne présente de réduction que si l'un des invariants z; $\mathrm{K} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n$, où n est entier :

$$\mathrm{J} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \frac{\partial z}{\partial y}; \qquad \mathrm{I} = \{z, y\} = \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2$$

est *rationnel* en y. Les coefficients de cet invariant rationnel et les coefficients de A appartiennent alors à un certain *domaine de rationalité* [R] que l'on pourra définir et qui comprend généralement des fonctions arbitraires.

Lorsqu'on se propose de rechercher comment on doit choisir les coefficients de A pour que la *résolvante* dont dépend la détermination de K, J ou I possède une solution rationnelle — en supposant les degrés de α et β *déterminés*, c'est-à-dire l'équation (1) *donnée de forme* — on trouve, si l'on prend par exemple l'invariant en question égal à $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ où P et Q sont des polynômes de degré p, que les coefficients

de α et de β devront satisfaire à un système différentiel simultané (Σ), équivalent à une équation linéaire aux dérivées partielles, *dont l'ordre s'élève avec p*. Les coefficients de P et Q s'obtiennent immédiatement par de simples quadratures quand le système (Σ) est intégré : nous savons en effet qu'on peut toujours supposer que l'invariant *rationnel* qui correspond à une équation (1) est *unique*, à des transformations non essentielles près.

C'est ce système différentiel (Σ) dont l'ordre s'élève avec le degré p des polynômes P et Q [pour une équation (1) où le degré de α et de β en y est *fixé*] que nous avons réussi à intégrer de manière générale — par des quadratures partielles au plus dans les cas où les invariants rationnels en y sont z, ou K, ou J.

Lorsque c'est l'invariant I dont l'expression est rationnelle en y, on sait que la détermination de z se ramène à l'intégration d'un système, en général *irréductible*, de deux équations de Riccati. Il n'est alors pas possible d'expliciter, *de manière générale*, au moyen de quadratures partielles, les fonctions de plusieurs arguments qui, égalées à zéro, permettent de définir implicitement les coefficients de A et par suite ceux de P et de Q; on peut néanmoins le faire en *explicitant* les solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre déterminées, dont les coefficients, *rationnels* par rapport à la variable indépendante, renferment rationnellement un certain nombre de paramètres arbitraires.

La méthode qui conduit à ces résultats peut être indiquée sommairement : Dans tous les cas où la connaissance de l'invariant rationnel (K ou J) permet à l'aide de quadratures partielles d'exprimer la solution z, cette solution n'est définie qu'à certaines transformations près :

$$Z = \lambda z + \mu$$

lorsque J est rationnel, par exemple, transformations qui constituent le *groupe de rationalité*. Les déterminations multiples des intégrales qui interviennent dans l'expression de z donnent lieu à des transformations : $Z = \lambda_i z + \mu_i$, qui peuvent être regardées comme formant le *groupe de monodromie* de z. Eh bien, les intégrales du système (Σ) s'obtiennent — sauf exceptions évidentes — en écrivant d'une manière générale que les λ_i, μ_i sont des *constantes*, indépendantes de x et y.

Lorsque I est rationnel en y, z n'est défini *dans le domaine* [R] qu'à des transformations projectives près :

$$Z = \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varrho} \qquad (\lambda\varrho - \mu\nu = 1)$$

et les intégrales de (Σ) expriment encore, dans leur ensemble, que les valeurs particulières des λ, μ, ν, ϱ correspondant aux déterminations multiples de z sont des constantes absolues.

Le développement de ces remarques ne peut trouver place ici. Nous nous bornerons à indiquer, un peu plus en détail, l'application qu'on en peut faire aux équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)} \tag{1}$$

où P_3 est du troisième degré en y, P_1 du premier degré. Observons que la détermination des équations $\frac{dy}{dx} = A(y)$ de degré donné, dont la solution générale peut s'écrire :

$$\rho(x)(y-a_1)^{m_1}\dots(y-a_k)^{m_k} = \text{const.}$$

où les m_i sont des *constantes* réelles quelconques — cas qui correspond pour nous à :

$$K = \frac{\partial z}{\partial y} = \sum \frac{m_i}{y-a_i},$$

c'est-à-dire K rationnel à pôles simples et résidus constants — a été traitée complètement par M. Painlevé (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1894) et M. Korkine (*Math. Annalen,* t. 48).

[**1**] Les équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)} \tag{1}$$

[qui gardent leur forme par les transformations indiquées au début] ont donné lieu à de nombreuses recherches depuis Euler et Abel qui en ont formé des cas simples d'intégration par quadratures. Mais tous les auteurs qui s'en sont occupé : Z. Elliot, Halphen, Darboux, MM. R. Liouville et P. Appell se sont bornés, après les avoir transformées, comme on l'a dit plus haut, en des *formes canoniques* où le nombre des arbitraires est minimum, à en indiquer quelques cas nouveaux et particuliers d'intégration. Dès que l'on exprime en effet que, pour la différentielle $P_1 dy - P_3 dx$, il existe un multiplicateur de forme déterminée où interviennent des polynômes en y, on obtient, pour peu que le degré de ces polynômes s'élève (même pour les valeurs 2, 3, ...), un système différentiel (Σ) dont l'ordre est 2, 3, 4, ..., et dont l'intégration n'avait pu être abordée. C'est la théorie d'*intégration logique* des équations différentielles qui a permis de voir quelle était la difficulté de la question et comment on pouvait la résoudre.

On peut adopter pour (1) diverses formes canoniques, suivant le nombre des solutions distinctes de cette équation qui sont connues ou mises en évidence. Euler et Abel ont employé la forme

$$(A_0) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\varphi(x)}{y}$$

qui possède la solution double $y = \infty$; M. Appell a proposé la forme

$$(A_1) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + \Phi(x)$$

où aucune solution ne joue de rôle particulier et qui se transforme aisément en la précédente dès qu'on en connaît une solution particulière. Nous avons observé que l'équation différentielle de la *balistique extérieure* pouvait être mise sous la forme

$$(A_2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{y + \rho(x)}$$

qui peut aussi être regardée comme une forme *canonique* ou *réduite* des équations (1) dont on connaît trois solutions : il suffit de faire suivre la transformation projective sur y qui change ces solutions en 1, -1, ∞, d'un changement de la variable, pour obtenir la réduite (A_2). Enfin, au cours de recherches sur ce sujet, nous avons reconnu que, pour certaines applications à la théorie des fonctions, il pouvait être utile d'employer $\left(\text{même pour les équations générales } \frac{dy}{dx} = A(y)\right)$ une *réduite* où quatre solutions *isolées* ont été respectivement transformées en 0, 1, ∞ et x; cette réduite est ici :

$$(A_3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)}$$

où λ est la fonction arbitraire en x.

L'étude de la réduction des *diverses* formes canoniques, lorsque l'une des quantités z, K, J, I est rationnelle en y, conduit, par des méthodes analogues, à des formes analytiques différentes, car le passage de l'une à l'autre nécessite des intégrations, souvent théoriques. Il est d'ailleurs nécessaire de posséder des formes canoniques qui dérivent *aussi simplement que possible* de la forme générale, pour permettre l'application à cette dernière des résultats établis pour la forme canonique.

Observons encore que puisque la forme canonique ne comprend qu'*une* fonction arbitraire de x, tous les cas de réduction correspondront à des équations *déterminées*, dépendant au plus de constantes arbitraires en nombre fini.

Nous avons donné en détail (¹) les résultats de l'étude de la réduction de l'équation (A_2) de la *balistique extérieure* dans les cas où cette réduction conduit à l'intégration de cette équation par quadratures. Il suffira de s'y reporter pour comprendre la méthode.

[**2**] Indiquons, *à titre d'exemple*, pour l'équation d'Euler,

$$(A_0)\quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\varphi}{y}, \quad \text{ou pour} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \left(A = 1 + \frac{\varphi}{y}\right)$$

à quelles conditions elle possède un multiplicateur rationnel en y. Ce multiplicateur K a nécessairement la forme :

$$K = yK_1 = y \cdot \sigma \frac{(y-a_1)^{\alpha_1} \dots (y-a_m)^{\alpha_m}}{(y-b_1)^{\beta_1} \dots (y-b_n)^{\beta_n}}$$

et K_1 doit satisfaire identiquement à la résolvante :

$$y\frac{\partial K_1}{\partial x} + (y+\varphi)\frac{\partial K_1}{\partial y} + K_1 = 0.$$

On trouve ainsi que les a_i et les b_j sont des solutions particulières de l'équation (A_0) qui satisfont en outre à la condition

$$(\varepsilon)\quad \Sigma\alpha_i a'_i - \Sigma\beta_j b'_j = \Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1.$$

Enfin $\sigma' = 0$, ce qui permet de poser $\sigma = 1$.

La condition (ε) donne d'une part une intégrale

$$(\varepsilon_1)\quad \Sigma\alpha_i a_i - \Sigma\beta_j b_j = (\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1)x + C$$

et d'autre part, en tenant compte des expressions des a'_i, b'_j :

$$(\varepsilon_2)\quad \varphi\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{a_i} - \Sigma\frac{\beta_j}{b_j}\right) = 1,$$

qui déterminera φ quand les a et les b seront connus.

(¹) Cf. *Annales de l'École Normale Supérieure*, janvier 1920.

Il reste à intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad X(F) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\left(1 + \frac{\varphi}{a_1}\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial b_1}\left(1 + \frac{\varphi}{b_1}\right) + \ldots = 0$$

à $(m + n + 1)$ variables $x, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ où φ est donné par (ε_2); c'est cette équation qui constitue ici le système (Σ).

Observons que la solution z peut s'écrire

$$z = \int_{y_0}^{y} yK_1\,dy + f(x)$$

où $f(x)$ est défini par :

$$f'(x) + [(y + \varphi)K_1]_{y=y_0} = 0.$$

Les diverses valeurs de z en un point (x, y) se déduisent de l'une d'elles en ajoutant des périodes de $f(x)$ qui sont des constantes et des périodes de $\int_{y_0}^{y} yK_1\,dy$ qui *doivent* donc être des constantes.

Ces périodes de $\Omega = \int_{y_0}^{y} yK_1\,dy$ sont les produits par $2i\pi$ des *résidus* de Cauchy relatifs aux divers pôles $b_1, \ldots, b_n$. Ces résidus sont donc des solutions de (1) rationnelles en a_i, b_j :

$$R(b_i) = V_i$$

en nombre égal à n. Lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1$ est positif, le point à l'infini est un pôle dont le résidu est au signe près $\Sigma R(b_i)$.

On obtient les $(m - 1)$ solutions de (1) qui manquent en remarquant que $z(x, y)$ se réduit à une constante quand on y remplace y par une solution particulière de (A_0). Si l'on pose

$$Z_{a_i} = \int_{y_0}^{a_i} yK_1\,dy + f(x) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

on aura des constantes absolues :

$$C_i = Z_{a_i} - Z_{a_1} = \int_{a_1}^{a_i} yK_1\,dy$$

en fixant les chemins qui vont de a_1 à a_i et la situation, dans le plan complexe, des points a_i, b_j.

Ces nouvelles solutions de (1) sont des sommes de fonctions rationnelles des a_i, b_j et de logarithmes de telles fonctions multipliés par des constantes.

Lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1$ est négatif, le point à l'infini est un zéro pour yK_1; on peut le prendre pour une des limites de l'intégrale lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i + 1 \leqslant -2$. Il y a alors entre les C_i, en nombre m, une relation linéaire à coefficients constants qui remplace celle exprimant que le résidu intégral est nul.

Enfin, dans le cas où $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1 = 0$, la fonction yK_1 est régulière à l'infini; la relation (ε) change de forme et donne

$$(\varepsilon_1) \qquad \Sigma\alpha_i a_i - \Sigma\beta_j b_j = C$$

avec la même expression de φ. Mais la constante C est fonction des Γ_i, car le premier membre de (ε) est le résidu relatif à l'infini pour yK_1.

La nouvelle solution C_1 qui doit remplacer C s'obtient par un procédé régulier; elle est définie par :

$$\frac{1}{2}(\Sigma\alpha_i a_i^2 - \Sigma\beta_j b_j^2) + \Sigma\Gamma_i b_i = 2x\Sigma\Gamma_i + C'.$$

Ceci suppose simplement que les Γ_i, arbitraires, n'ont pas une somme nulle. On remarquera que toutes les solutions de (1) sont des intégrales $\int_{y_0}^{y_1} yK_1 dy$ prises entre deux points pour lesquels yK_1 a la même valeur — points identiques (contours fermés) ou points racines de $K_1 = 0$.

[3] Nous avons dit que l'on ne pouvait *en général* déterminer par des quadratures les équations pour lesquelles I est rationnel en y — dont l'intégration se ramène par là à celle d'un système de Riccati irréductible. Il est toutefois possible de traiter complètement un grand nombre de cas particuliers. Si, par exemple, on veut que pour l'équation de M. Appell(1)

$$(A_1) \qquad \frac{dy}{dx} = y^3 + \Phi$$

ou bien

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + (y^3 + \Phi)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

l'invariant

$$I = \{z, y\}$$

soit le quotient de deux polynômes du *troisième* degré en y, on trouve simplement :

$$I = \frac{3}{2}\frac{9x - y\sqrt{\omega}}{y^3\sqrt{\omega} - 9xy^2 - 2}$$

(1) Des résultats analogues s'obtiennent pour l'équation d'Euler lorsque I possède un pôle double ou deux pôles simples, en dehors du point $y = 0$.

avec

$$\omega = C - 54x^3 \qquad \text{et} \qquad \Phi = \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Rappelons enfin qu'en prenant l'équation canonique (A_3)

$$(A_3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)},$$

les cas les plus simples où I est rationnel en y, conduisent, pour déterminer λ, aux équations (rencontrées depuis par M. Richard Fuchs) qui déterminent les transcendantes uniformes découvertes par M. Painlevé.

Dans tous ces cas, z est le quotient de deux solutions de l'équation linéaire du second ordre : $\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{2} I$ et si l'on regarde tous les coefficients variables de I comme fonction de l'un d'eux, les tranformations subies par z ne dépendent pas de ce dernier.

II. — *Réduction d'une équation* $\frac{dy}{dx} = \varphi A(x, y)$, *où* φ *est un paramètre arbitraire et* A *une fonction quelconque de* x *et* y.

Soit une équation du premier ordre :

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} = R(x, y, \varphi)$$

qui dépend rationnellement d'un paramètre φ ; l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$(1) \qquad X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} R = 0$$

peut être regardée comme une équation à trois variables x, y, φ dont nous connaissons une solution φ, et si l'on désigne par z une autre solution formant avec φ un système fondamental, le *groupe de rationalité* de (1) sera le groupe

$$Z = F(z, \varphi), \qquad \Phi = \varphi$$

où F est arbitraire, ou bien l'un de ses sous-groupes types. Les cas de réduction

principaux de (E) sont ceux où, pour un choix convenable de z, l'un des éléments z, $K=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p$ où p est entier,

$$J=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}:\frac{\partial z}{\partial y}$$

ou enfin

$$I=\frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2,$$

a une expression rationnelle en φ — dont les coefficients appartiennent au *domaine de rationalité* défini par les coefficients de $R(x, y, \varphi)$. Il convient d'ajouter le cas où F est indépendant de φ, l'invariant correspondant étant le quotient $\frac{\partial z}{\partial y}:\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Si pour une équation où R est une fraction dont les deux termes sont *de degré donné* en φ, on se propose de déterminer les coefficients de R de manière que (E) offre un de ces cas de réduction, on obtiendra pour cela un système différentiel qui s'intégrera par des quadratures lorsque z peut ainsi s'obtenir — et dont l'intégration générale, lorsque z dépend d'un système d'équations de Riccati ou d'un système complet quelconque, ne peut être obtenue explicitement que par l'*explicitation* de la solution générale d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels *bien déterminés* ou d'équations du premier ordre bien déterminées à deux variables seulement.

Nous allons montrer ici, en nous bornant au cas le plus simple d'une équation où R est du premier degré en φ, cas que l'on peut amener aisément à la forme réduite :

$$(E)\qquad \frac{dy}{dx}=\varphi A(x, y),$$

comment on peut intégrer le système qui définit A pour qu'un des cas de réduction indiqués plus haut se présente.

[**4**] Supposons d'abord que l'équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+\varphi A\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

possède une solution z qui soit un *polynôme* entier en φ

$$z=\beta_0\varphi^m+\beta_1\varphi^{m-1}+\ldots+\beta_m,$$

ce qui entraîne les conditions :

$$(\Sigma)\qquad \frac{\partial \beta_0}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \beta_0}{\partial x}+A\frac{\partial \beta_1}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \beta_1}{\partial x}+A\frac{\partial \beta_2}{\partial y}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \beta_m}{\partial x}=0$$

Nous avons réussi à intégrer le système (Σ) en mettant en évidence les *caractéristiques d'Ampère* du problème, c'est-à-dire les variables qui peuvent figurer sous des signes de fonction arbitraire dans l'intégrale générale de (Σ). On peut toujours prendre — sauf cas singulier : $\beta_0 = x$, $\beta_m = y$, et l'on a ensuite $A\frac{\partial \beta_1}{\partial y} = -1$ qui détermine A.

Si l'on désigne par ω_i les racines du multiplicateur $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui est un polynôme en φ, on a évidemment :

$$-\frac{1}{A}(\varphi-\omega_1)\ldots(\varphi-\omega_{m-1})(dy-A\varphi\,dx)=d\beta_0\varphi^m+d\beta_1\varphi^{m-1}+\ldots+d\beta_m$$

et l'on vérifie aisément en formant la *résolvante* en $K=\frac{\partial z}{\partial y}$ que $\omega_i = \text{const.}$ est l'intégrale de $dy-\omega_i A dx = 0$.

On peut donc écrire :

$$(S_1)\qquad x\omega_i^m+\beta_1\omega_i^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}\omega_i+y=f_i(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,m-1)$$

et l'on exprime que les ω_i sont bien les racines de $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ en ajoutant

$$(S_2)\qquad mx\omega_i^{m-1}+(m-1)\beta_1\omega_i^{m-2}+\ldots+\beta_{m-1}=f_i'(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,m-1).$$

Ces deux groupes de $(m-1)$ équations définissent les β et les ω au moyen de x et y; les expressions obtenues dépendent de $(m-1)$ fonctions arbitraires $f_i(\omega_i)$ des arguments ω_i, qui sont les caractéristiques.

Ceci suppose que $\frac{\partial z}{\partial y}$, polynôme en φ, a toutes ses racines distinctes. Si l'on veut que la racine ω_1 soit double pour le multiplicateur, il suffit d'ajouter au groupe (S_2) l'équation dérivée :

$$m(m-1)x\omega_1^{m-2}+(m-1)(m-2)\beta_1\omega_1^{m-3}+\ldots=f_1''(\omega_1)$$

qui remplacera l'équation relative à la racine qui vient se confondre avec ω_1; etc...

L'étude du cas où z est *rationnel* en φ se fait en suivant les mêmes principes. Si l'on suppose que z n'a en φ que des pôles simples :

$$z=A_0+\frac{A_1}{\varphi-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{\varphi-a_n}$$

on formera

$$K=\frac{\partial z}{\partial y}$$

qui possède, en général, $(2n-1)$ racines distinctes $\omega_1, \ldots, \omega_{2n-1}$, et l'on observera que $\omega_i =$ const. est l'intégrale de $dy-\omega_i A dx=0$. D'autre part, on peut prendre, sans restreindre la généralité :

$$A_0=x, \qquad x-\frac{A_1}{a_1}-\ldots-\frac{A_n}{a_n}=y.$$

Les inconnues a_i, A_i, ω_i, en nombre $(4n-1)$ sont alors déterminées par le système :

$$(S_1) \quad x+\frac{A_1}{\omega_i-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{\omega_i-a_n}=f_i(\omega_i) \qquad (i=1,\ldots,2n-1)$$

$$(S_2) \quad \frac{-A_1}{(\omega_i-a_1)^2}-\ldots-\frac{A_n}{(\omega_i-a_n)^2}=f_i'(\omega_i) \qquad (i=1,\ldots,2n-1)$$

qui comprend $(2n-1)$ fonctions arbitraires des *caractéristiques* ω_i, et l'on a ensuite A par l'équation :

$$1=-A\Sigma\frac{\partial A_i}{\partial y}.$$

Il n'y a pas de difficulté à modifier ces résultats quand z ou $\frac{\partial z}{\partial y}$ possèdent en φ des zéros multiples.

[5] Si l'on veut que le multiplicateur K soit rationnel en φ, dans le cas où il n'a que des pôles simples,

$$K=B_0+\frac{B_1}{\varphi-b_1}+\ldots+\frac{B_n}{\varphi-b_n},$$

les éléments B_i, b_i, A doivent satisfaire aux relations

$$(\Sigma) \quad \frac{\partial b_i}{\partial x}+b_iA\frac{\partial b_i}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x}+b_iA\frac{\partial B_i}{\partial y}+B_i\frac{\partial b_iA}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial AB_0}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial B_0}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}A(B_1+\ldots+B_n)=0.$$

Un changement de la variable x permet de prendre

$$AB_0 = 1$$

et l'hypothèse $\varphi = 0$ donne, dans la résolvante en K :

$$B_0 - \frac{B_1}{b_1} - \ldots - \frac{B_n}{b_n} = g(y)$$

où g est arbitraire.

Chaque b_i, égalé à une constante, donne l'intégrale de $dy - b_i A dx = 0$, et B_i est un multiplicateur de cette équation; on peut donc poser

$$B_i = f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y},$$

$f_i(b_i)$ étant arbitraire.

L'expression de z est alors :

$$z = -x\varphi + \int g(y)dy + \varphi \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{b(\varphi - b)},$$

la limite inférieure des intégrales étant une constante et la limite supérieure l'une des variables $b_1, \ldots, b_n$ qui sont des caractéristiques d'Ampère, le chemin d'intégration évitant le point $b = \varphi$; la *configuration* de l'ensemble de tous ces points est supposée fixée.

Soit encore ω_k une racine de $K = 0$ (de degré n en φ); $\varphi_k = \text{const.}$ est toujours l'intégrale de $dy - \omega_k A dx = 0$. On conclut encore de là :

$$(S_1) \qquad -x\omega_k + \int g(y)dy + \omega_k \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{b(\omega_k - b)} = F_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

où les F_k sont des fonctions arbitraires, et l'on exprime que les ω_k sont bien les racines de $K = 0$, en ajoutant les relations :

$$(S_2) \qquad -x - \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{(\omega_k - b)^2} = F'_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

où les intégrales sont toujours prises le long de chemins évitant les points $b = \omega_k$. Ces $2n$ relations définissent les ω et les b au moyen de x et y; on a ensuite A par

$$\frac{1}{A} = g(y) + \sum_i \frac{f_i(b_i)}{b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial y}.$$

Les variables caractéristiques d'Ampère sont les ω_k et les b_i; on voit apparaître ici des fonctions arbitraires *engagées sous un signe de quadrature partielle.*

Il serait aisé de tenir compte des racines ou des pôles multiples de K.

[**6**] L'étude du cas où K a la forme

$$K = \frac{\partial z}{\partial y} = \sigma(\varphi - b_1)^{m_1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n}$$

où les m_i sont des constantes quelconques, nous a servi à élucider le cas général où $J = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y}$ est rationnel en φ.

Disons simplement que, dans le premier cas, on trouve pour dz la forme :

$$dz = \frac{(\varphi - b_1)^{m_1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n}}{b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n}} (dy - \varphi b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n} dx)$$

et que le problème revient à déterminer les b_i en x, y de manière que dz soit une différentielle exacte, quel que soit φ. On traite cette question en cherchant d'abord à quelles conditions

$$dz = (\varphi - b_1)^{m_1+1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n+1} \left(\frac{\lambda_1 db_1}{\varphi - b_1} + \dots + \frac{\lambda_n db_n}{\varphi - b_n} \right)$$

où les λ_i dépendent de $b_1, \dots, b_n$, est une différentielle exacte — ce qui exige que

$$\lambda_i = \frac{\partial \theta}{\partial b_i} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

θ satisfaisant aux équations

$$(T) \qquad (b_k - b_i)\frac{\partial^2 \theta}{\partial b_i \partial b_k} - \frac{\partial \theta}{\partial b_k}(m_i + 1) + \frac{\partial \theta}{\partial b_i}(m_k + 1) = 0.$$

Le système (T), rencontré par Darboux, est une généralisation de l'équation d'Euler et de Poisson; on sait l'intégrer par quadratures en partant de la solution

$$\theta = (\varphi - b_1)^{-(m_1+1)} \dots (\varphi - b_n)^{-(m_n+1)}.$$

Il reste à rechercher quelles sont les relations à établir entre les b et x, y pour que l'on ait, identiquement en φ :

$$\frac{\lambda_1 db_1}{\varphi - b_1} + \dots + \frac{\lambda_n db_n}{\varphi - b_n} = \frac{dy - \varphi b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n} dx}{b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n} (\varphi - b_1) \dots (\varphi - b_n)},$$

ce qui exige simplement :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\,db_i = \frac{dy - b_i\,.\,b_1^{m_1}\ldots b_n^{m_n}\,dx}{b_1^{m_1}\ldots b_n^{m_n}(b_i-b_1)\ldots b_i-b_n)} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Ce dernier système, complètement intégrable, peut être remplacé par un système d'équations immédiatement intégrables; en les intégrant on obtient $(n-2)$ relations entre $b_1, \ldots, b_n$ et deux relations donnant x, y au moyen des mêmes éléments. Par exemple, pour $n=2$, on a simplement :

$$-dx = \frac{\partial\theta}{\partial b_1}\,db_1 + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\,db_2, \qquad \text{d'où} \qquad x = -\theta(b_1, b_2),$$

$$-dy = b_1^{m_1+1}b_2^{m_2+1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2}\right)$$

qui définissent x, y en b_1, b_2; pour $n=3$, on a entre b_1, b_2, b_3 la relation :

$$\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\,db_1 + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\,db_2 + \frac{\partial\theta}{\partial b_3}\,db_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \theta(b_1, b_2, b_3) = \text{const.}$$

et ensuite :

$$dy = b_1^{m_1+1}b_2^{m_2+1}b_3^{m_3+1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2} + \frac{\partial\theta}{\partial b_3}\frac{db_3}{b_3}\right),$$

$$dx = (b_2+b_3+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\,db_1 + (b_3+b_1+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial b_2}\,db_2 + (b_1+b_2+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial b_3}\,db_3$$

avec

$$\lambda = m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3; \text{ etc.}$$

L'étude du cas où J est rationnel en φ amène à des conclusions analogues, avec des formules plus compliquées où figurent des fonctions arbitraires engagées sous des signes de quadrature partielle. Si les pôles de J sont simples, la difficulté essentielle du problème revient encore à l'intégration (qui se fait par quadratures partielles) d'un système

$$\text{(T)} \qquad (b_i-b_k)\frac{\partial^2\theta}{\partial b_i\partial b_k} + \frac{\partial\theta}{\partial b_i}[f_i(b_i)-1] - \frac{\partial\theta}{\partial b_k}[f_k(b_k)-1] = 0$$

où figurent n fonctions arbitraires d'un argument; les caractéristiques sont les pôles b_i de J.

Si l'on voulait enfin exprimer que I est rationnel en φ, il faudrait, comme nous l'avons dit, faire appel à d'autres représentations explicites que les intégrales définies; nous y reviendrons ailleurs.

[7] Montrons encore, pour terminer, sur un exemple tout à fait simple, quelle serait la difficulté de la détermination des cas où le groupe de rationalité de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A\varphi \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

est $Z = F(z)$, $\Phi = \varphi$, c'est-à-dire où il existe *une seule* fonction ρ, rationnelle en φ, telle que

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

forme avec $X(z) = 0$ un système complet.

[Quand il existe deux fonctions ρ_1, ρ_2 possédant cette propriété, on peut poser $K = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}$, c'est-à-dire qu'un multiplicateur est rationnel en φ].

Dans le cas examiné :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y}(dy - \varphi A dx + \rho d\varphi)$$

et ρ satisfait à la résolvante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + A\varphi \frac{\partial \rho}{\partial y} + A - \rho\varphi \frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Peut-on prendre pour ρ un polynôme du premier degré en φ

$$\rho = R + R_1 \varphi ?$$

On trouve immédiatement les conditions que doivent remplir R, R_1, A. En changeant la variable x, on peut écrire $R_1 = A$, et il reste à satisfaire aux relations :

$$A + \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial R}{\partial y} - R \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

ou à l'équation unique du second ordre :

$$R \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0.$$

Les caractéristiques de cette équation sont y et $x - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial x}} = -u$; nous allons les choisir comme variables indépendantes.

L'équation elle-même peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial x}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}\right),$$

c'est-à-dire exprime que :

$$(x+u)dx+\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}dy$$

est une différentielle exacte.

Il en est donc encore ainsi de

$$-x\,du+\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}dy=d\sigma,$$

ce qui permet de poser :

$$x=-\frac{\partial\sigma}{\partial u},\qquad \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

et donne :

$$R=\frac{\left(u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}.$$

Comme d'autre part

$$dR=\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy$$

donne, avec les nouvelles variables u, y :

$$dR=\frac{-1}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}d\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\frac{\partial R}{\partial y}dy,$$

on a pour σ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}\right)+\frac{\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}=0,$$

qui se réduit manifestement à :

$$\left(u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial y}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

et s'intègre *une fois* sous la forme :

$$u\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2=\sigma+f(u)$$

qui comporte une fonction arbitraire. Si l'on désigne par y [ou $g(y)$] *une intégrale de l'équation du premier ordre (non spéciale)*

$$d\sigma-\frac{\partial\sigma}{\partial u}du=0,$$

la relation

$$y=y(\sigma,u)$$

définit σ en u et y, et l'on en déduit implicitement, à l'aide de $x=-\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, l'expression de R au moyen de x et y.

On voit qu'il a été nécessaire d'*expliciter* une intégrale d'une équation du premier ordre qui n'est pas réductible. Mais la présence de l'arbitraire $f(u)$ permet aussi de former une infinité de cas où la question peut s'achever complètement; on observe en effet que la fonction $u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ vérifie une équation de la forme d'Euler, (A_0), étudiée précédemment.

III. — *Détermination des cas où l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2}=F(x,y)$ *possède une intégrale première rationnelle en* $\frac{dy}{dx}$.

[**8**] L'équation aux dérivées partielles

$$(a)\qquad X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}F(x,y)=0,\quad \text{où}\quad y'=\frac{dy}{dx},$$

F étant quelconque en x, y, possède, d'après une remarque de Jacobi, un multiplicateur constant que l'on peut prendre égal à l'unité. Si l'on ajoute aux relations

$$X(\varphi)=0,\qquad X(\psi)=0$$

la condition

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = 1$$

on définit les solutions fondamentales φ, ψ de (a) aux transformations près qui satisfont à

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1 .$$

Cette dernière équation est celle du *groupe de rationalité* de (a) dans le cas général. Les réductions possibles de ce groupe pourraient aisément être indiquées en partant des tableaux donnés par Lie ou M. Cartan. Par exemple s'il existe une équation, *et une seule,*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$$

où μ est *rationnel* en y', formant avec $X(\varphi) = 0$ un système complet, dans le *domaine de rationalité* [R] qui comprend F et les coefficients de μ, les transformations du groupe de rationalité seront simplement de la forme

$$\Phi = f(\varphi), \qquad \Psi = \frac{1}{f'(\varphi)} \psi + g(\varphi)$$

où f et g sont arbitraires dans le cas général. L'adjonction de φ permettra d'obtenir ψ par deux quadratures. Mais la détermination de φ, fonction des trois variables x, y, y' *attachée* au groupe $\Phi = f(\varphi)$ dans le domaine [R], n'est pas susceptible de réduction.

Le système d'équations aux dérivées partielles qui détermine les coefficients de μ et F ne pourra être intégré *explicitement* que si l'on adopte une *représentation explicite* pour les intégrales de certaines équations linéaires aux dérivées partielles bien déterminées, qui ne peuvent s'exprimer au moyen d'un nombre fini de quadratures. Il n'en est pas de même lorsque φ peut s'obtenir par des quadratures.

[**9**] Nous supposerons ici, pour prendre le cas le plus simple, que φ est *une intégrale* de (a) *rationnelle* en y' :

$$\varphi(y') = \varphi,$$

l'autre intégrale ψ s'obtient alors par la quadrature

$$\psi = \int \frac{dy - y' dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}},$$

où y' est défini en x, y, φ par l'équation précédente.

Examinons en détail le cas, qui suffit à préciser la méthode, où φ est un *polynôme* en y' de degré n :

$$\varphi = a_0 y'^n + \frac{n}{1} a_1 y'^{n-1} + \ldots ;$$

en écrivant l'identité en y' :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \mathrm{F} = 0$$

on obtient entre les a et F des relations :

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_0}{\partial x} + n \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0, \ \ldots$$

dont l'ensemble peut se remplacer par une équation aux dérivées partielles d'ordre $(n-1)$ à une inconnue λ et aux variables x, y; les a_i s'exprimant sous forme entière avec λ et ses dérivées. C'est cette équation E_{n-1} que nous allons intégrer.

Les transformations $\mathrm{Y} = \alpha y + \beta$, $\mathrm{X} = \gamma$ où α, β, γ sont des fonctions de x choisies de manière à conserver la forme de (a) permettent de prendre $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Les autres relations entre les a_i seuls peuvent se remplacer par

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0$$

où ω_i désigne l'une des racines de $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$, supposées distinctes, et où l'on a : $\varphi_i = \varphi(\omega_i)$. Ces relations (S) expriment que l'équation différentielle $\varphi = \varphi(y')$ a des solutions singulières qui sont données par : $dy - \omega_i dx = 0$, dont les intégrales sont $\varphi_i = \text{const.}$

A un autre point de vue les φ_i sont les *variables caractéristiques* d'Ampère pour E_{n-1} : la solution générale du système (S) dépend de $(n-1)$ fonctions arbitraires d'un argument qui est l'une des variables φ_i.

[**10**] Pour intégrer le système (S), nous partons de l'expression de $d\psi$ que nous écrirons en tenant compte de (S), sous la forme, décomposée en fractions simples :

$$d\psi = \mathrm{A}_1 \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{y' - \omega_{n-1}}$$

où les A_i s'expriment avec les ω_i et les facteurs intégrants $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ des différentielles : $dy - \omega_i dx$.

Posons :

$$\varphi = (y' - \mu_1) \dots (y' - \mu_n)$$

on aura, pour tout indice j :

$$d\psi_j = A_1 \frac{d\varphi_1}{\mu_j - \omega_1} + \dots + A_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{\mu_j - \omega_{n-1}}$$

et l'on peut déterminer les A_k en $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ de manière que les seconds membres soient, quel que soit j, des différentielles exactes. Cela revient à dire que l'on peut prendre :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = B_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

et former pour les B_i un système compatible.

Si l'on considère les μ_j comme des coordonnées cartésiennes exprimées en $\Phi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ par les relations :

$$\Phi = \mu_1 + \dots + \mu_n$$
$$\varphi_i = (\omega_i - \mu_1) \dots (\omega_i - \mu_n) \qquad (i = 1, \dots, n-1)$$

où les ω sont donnés par :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{1}{\omega - \mu_1} + \dots + \frac{1}{\omega - \mu_n} = 0,$$

les surfaces

$$\Phi = \text{const.}, \qquad \varphi_i = \text{const.}$$

sont deux à deux orthogonales, et :

$$d\mu_1^2 + \dots + d\mu_n^2 = H_1^2 d\varphi_1^2 + \dots + \frac{1}{n} d\Phi^2;$$

les dérivées des μ sont données par :

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_i} = H_i^2 \varphi_i \cdot \frac{1}{\mu_k - \omega_i}, \qquad \frac{\partial \mu_k}{\partial \Phi} = \frac{1}{n}$$

avec

$$H_i^2 \varphi_i = \frac{-1}{\varphi''(\omega_i)} \quad \text{où} \quad \varphi''(\omega_i) = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}\right]_{y' = \omega_i}$$

Il suffit de faire $\Phi = 0$ pour obtenir un système particulier de déterminations des A_k. En posant : $\mu'_j = \frac{1}{n}\Phi + \Psi_j$ on voit que les μ'_j sont les coordonnées cartésiennes des points d'un système orthogonal à n dimensions qui a *même représentation sphérique* que celui formé par les μ_j. Ce système général peut être obtenu par les méthodes de Darboux (Systèmes orthogonaux et coordonnées curvilignes, Livre II, Ch. 1) qui exigent l'intégration d'un système de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du second ordre de la forme de Laplace à une seule fonction inconnue — dont la solution générale dépend de n fonctions d'un argument. En y faisant $\Phi = 0$, on trouve l'expression des A_k.

Cette intervention des systèmes orthogonaux qui établit *a priori* la compatibilité des équations imposées aux A_k n'est pas essentielle à la question. En écrivant les conditions d'intégrabilité des $d\Psi_j$ on trouve aisément qu'il est nécessaire de prendre $A_k = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}$ où θ satisfait aux équations :

$$(T) \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\omega_i \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(\omega_k \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}\right)$$

et l'on peut remarquer que ω_m satisfait à toutes les équations (T) où les indices diffèrent de m. Les fonctions $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ qui satisfont à l'équation

$$\varphi = (\sigma - \mu_1) \ldots (\sigma - \mu_n)$$

où φ est un paramètre sont aussi des solutions de (T); on peut déduire de là l'expression de la solution générale θ sous forme d'*intégrale définie,* analogue à celle donnée par M. Appell pour l'équation d'Euler et de Poisson généralisée.

[**11**] Il reste à assujettir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, x, y$ aux relations exprimées par l'identité en y' :

$$\frac{dy - y'dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}} = A_1 \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \ldots + A_{n-1}\frac{d\varphi_{n-1}}{y' - \omega_{n-1}}$$

qui donne immédiatement :

$$A_1\omega_1^{\,k}d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^{\,k}d\varphi_{n-1} = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-4)$$

$$(\Omega) \qquad A_1\omega_1^{\,n-3}d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^{\,n-3}d\varphi_{n-1} = -dx,$$

$$A_1\omega_1^{\,n-2}d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^{\,n-2}d\varphi_{n-1} = dy,$$

pour déterminer les φ au moyen de x et y.

Ce système différentiel (Ω) est complètement intégrable (ce n'est d'ailleurs que le système $d\varphi_i = B_i(dy - \omega_i dx)$ écrit sous une autre forme).

On forme aisément de proche en proche les combinaisons intégrables :

$$\Sigma A_i d\varphi_i = d\theta,$$

$$\Sigma A_i \omega_i d\varphi_i = d\theta_1,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^2 + \frac{(n-1)}{1.2} a_2 \right) d\varphi_i = d\theta_2,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^3 + (n-1) a_2 \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} a_3 \right) d\varphi_i = d\theta_3,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^4 + \frac{3(n-1)}{2} a_2 \omega_i^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3} a_3 \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} a_4 - \frac{(n-1)^2(n-5)}{8} a_2^2 \right) d\varphi_i = d\theta_4,$$

$$\Sigma A_i \left[\omega_i^5 + 2(n-1) a_2 \omega_i^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_3 \omega_i^2 + \left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3.4} a_4 - \frac{(n-1)^2(n-6)}{4} a_2^2 \right) \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} a_5 - \frac{(n-1)^2(n-2)(n-6)}{4.3} a_2 a_3 \right] d\varphi_i = d\theta_5,$$

.....

où l'on voit apparaître comme coefficients des premiers membres des équations de (Ω) des combinaisons linéaires à coefficients constants de toutes les fonctions d'un même *poids* des coefficients de $\varphi(y')$ — par exemple,

$$a_1^2,\ a_2;\quad a_1^3,\ a_1 a_2,\ a_3;\quad a_1^4,\ a_1 a_3,\ a_2^2,\ a_4;\ \ldots.$$

Les formules se simplifient ici à cause de $a_1 = 0$.

Les relations qui déterminent $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ au moyen de x et y sont donc :

$$\theta = \text{const.},\quad \theta_1 = \text{const.}, \ldots,\quad \theta_{n-3} = -x + \text{const.},\quad \theta_{n-2} = y + \text{const.}$$

Tous les éléments définis d'abord en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont ainsi connus en x, y.

On observera ici un premier exemple d'une méthode nouvelle d'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables, d'ordre quelconque, qui nous paraît devoir être signalée.

Elle consiste, dans le cas où il existe n familles de caractéristiques auxquelles correspondent des variables φ_i, fonctions déterminées des éléments d'une solution (fonction inconnue et ses dérivées de tous ordres), à transformer le problème posé par l'introduction explicite de ces *variables caractéristiques* d'Ampère regardées comme indépendantes en un problème à $(n+2)$ variables que l'on traitera d'abord; on déterminera ensuite les n relations qui doivent définir les φ_i au moyen de x et y. Nous en indiquerons bientôt d'autres applications.

[**12**] Les indications qui précèdent permettent de traiter de la même manière le cas d'une intégrale φ rationnelle en y'.

Si l'on écrit cette intégrale : $\varphi = \dfrac{P(y')}{Q(y')}$, on peut supposer P et Q de même degré n en y'; les variables x, y jouent alors un rôle spécial, ce sont des variables caractéristiques qui s'ajoutent aux $(2n-2)$ autres provenant des racines de l'équation $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0$.

Dans le cas où P et Q ne sont pas de même degré en y' (cas particulier) les variables x et y ne donnent lieu à aucune difficulté.

On peut encore passer par l'intermédiaire des systèmes orthogonaux de l'espace euclidien à $2n$ dimensions, qui permet de simplifier les changements de variables. Tout ceci fera l'objet d'un travail plus étendu, publié ailleurs.

Il nous reste à signaler ici — comme aussi dans les exemples précédents — que la *réduction* des équations différentielles correspond à l'existence d'un nombre fini, quelconque d'ailleurs, de solutions particulières qui sont des transcendantes *plus simples* que les autres solutions; la première *extension nécessaire du domaine de rationalité* consiste en leur *adjonction*. Ceci confirme une observation générale faite dès le début de nos recherches(1).

(1) Cf. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 8 mai 1893 et *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1898, p. 310 et suivantes.

MÉMOIRES

DEUXIÈME SECTION

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES

REPRODUISANT UNE QUARTIQUE ELLIPTIQUE PLANE

PAR B. BYDZOVSKY

(PRAGUE)

Une quartique elliptique plane générale se reproduit par neuf transformations quadratiques, dont sept forment avec l'identité un groupe, les deux autres ne lui appartenant pas.

On rencontre tous les éléments nécessaires pour démontrer cette proposition déjà dans des travaux antérieurs sur ces courbes, et notamment dans le travail bien connu de Casey [1] sur les quartiques bicirculaires; il faut, néanmoins, savoir gré à M. Ciani [2] d'avoir fait récemment une étude systématique de ces transformations, où il en a fait ressortir les propriétés essentielles et où il a envisagé aussi plusieurs cas particuliers.

J'ai étudié la même question — sans connaître d'ailleurs le travail de M. Ciani, qui ne m'était pas accessible lors de sa publication — et je me suis aperçu de la possibilité de quartiques elliptiques se reproduisant par un plus grand nombre de transformations quadratiques qu'il n'en est dans le cas général. En étendant un peu le problème qui se présentait ainsi, je me suis proposé de déterminer toutes les quartiques elliptiques planes dont le nombre de transformations quadratiques diffère de celui du cas général.

Je vais indiquer succinctement la marche que j'ai suivie, ainsi que les résultats principaux auxquels je suis parvenu.

De toutes les méthodes à choisir, celle qui se prête — à mon avis — le mieux à la recherche en question, est l'expression des coordonnées des points de la courbe

---

(1) Dans les *Transactions of Royal Irish Academy*, vol. XXIV (On the bicircular quartics).

(2) *Le quartiche piane invertibili* (Giorn. di Matematica, 3e série, vol. X, pp. 31-75).

à l'aide des fonctions elliptiques. On se rend facilement compte qu'il est toujours possible de choisir le paramètre elliptique u de manière que la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \qquad (\text{modd per.})$$

donne la condition nécessaire — non pas suffisante, bien entendu — pour que quatre points de la courbe aux paramètres u_i soient en ligne droite. Soient $\alpha_1\ \beta_1$, $\alpha_2\ \beta_2$ les paramètres des quatre points réunis deux à deux aux points doubles; étant situés sur une même droite, ils satisfont à la relation

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \equiv 0.$$

Remarquons tout de suite que c'est là la seule relation à laquelle satisfassent les deux points doubles de la courbe générale.

Or, en cherchant toutes les transformations quadratiques reproduisant la courbe, on aboutit à deux résultats. D'abord, on trouve que les transformations quadratiques qui reproduisent chaque courbe de l'espèce considérée sont exprimées sur la courbe par les correspondances suivantes :

$$u' = u + \omega_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$
$$u' = -u, \quad u' = -u + \omega_i, \quad u' = -u + \alpha_1 + \beta_1, \quad u' = -u + \alpha_2 + \beta_2.$$

Les trois premières relations correspondent aux transformations quadratiques qui ne sont pas des inversions et que j'appellerai tout court des involutions quadratiques; les autres expriment des inversions quadratiques. Mais tandis que les quatre premières ont leurs centres d'inversion hors de la courbe, les deux dernières — je les appellerai inversions de Bertini — ont pour centres d'inversion l'un des points doubles de la courbe. Aussi — et c'est là une différence essentielle entre les deux catégories d'inversions — les quatre premières forment, avec l'identité et les trois involutions quadratiques, un groupe auquel les deux inversions de Bertini n'appartiennent pas, dans le cas général.

En second lieu, on trouve le résultat — et c'est sur celui-ci que je voudrais appeler votre attention — que la condition nécessaire pour qu'une quartique de l'espèce considérée se reproduise par un plus grand nombre de transformations quadratiques que la courbe générale, est que ses points doubles remplissent une ou plusieurs des conditions suivantes :

(1) $\qquad 4(\alpha_1 + \beta_1) \equiv 0, \quad$ qui entraîne $\quad 4(\alpha_2 + \beta_2) \equiv 0;$

(2) $\qquad 2(\alpha_1 + \alpha_2) \equiv 0, \quad$ qui entraîne $\quad 2(\beta_1 + \beta_2) \equiv 0;$

(3) $\qquad 2(\alpha_1 - \beta_1) \equiv 0.$

La première signifie que la courbe considérée est engendrée par deux involutions projectives de droites, ce qui n'a pas lieu dans le cas général. La seconde a lieu pour une quartique dont deux tangentes doubles se rencontrent sur la droite joignant les points doubles. Enfin la troisième peut signifier ou qu'il y a sur la courbe un rebroussement, ou bien qu'une des involutions quadratiques mentionnées plus haut n'a que deux points principaux, dont l'un double.

Or, en examinant la question dans quelle mesure les conditions trouvées sont suffisantes pour l'existence de nouvelles transformations quadratiques, on trouve que la condition (3) à elle seule ne suffit pas, en quoi elle diffère des deux autres qui sont suffisantes. On trouve, en effet, que la courbe particulière caractérisée par la condition (1) admet un groupe de seize transformations quadratiques, renfermant cette fois — en dehors des huit transformations du cas général — aussi les deux inversions de Bertini, exprimées maintenant par des relations de la forme

$$u' = -u + C,$$

où C est un quart de période. Les coniques d'inversion de ces deux transformations se composent, dans ce cas, de deux droites. Le groupe contient aussi quatre transformations cycliques du quatrième ordre. Les éléments principaux des transformations du groupe donnent une configuration qui est fort intéressante et qui suggère, en outre, l'idée d'élargir ce groupe en adjoignant une nouvelle transformation quadratique. On construit de cette manière un groupe de trente-deux transformations quadratiques; ce groupe est isomorphe — ce qui n'est pas étonnant — au groupe bien connu des trente-deux homographies reproduisant une quartique gauche de première espèce; mais il ne reproduit aucune quartique plane.

Quant à la condition (2), elle a pour conséquence qu'une des inversions du groupe du cas général se réduit à une homographie; cette homographie, composée avec les inversions de Bertini, donne lieu à deux nouvelles transformations quadratiques qui sont inverses l'une de l'autre.

Par les considérations que je viens d'esquisser, les cas particuliers, qui peuvent se présenter, ne sont pas encore épuisés. On peut, en effet, combiner les conditions indiquées plus haut, deux à deux, ou trois à trois. (On ne peut pas aller plus loin, puisqu'on ne peut pas imposer aux quatre paramètres des points doubles plus de trois conditions, ceux-ci remplissant, dès l'abord, la condition qu'on sait.)

La condition (3) peut se répéter deux fois, puisque la relation

$$2(\alpha_1 - \beta_1) \equiv 0$$

n'entraîne pas nécessairement cette autre :

$$2(\alpha_2 - \beta_2) \equiv 0.$$

Considérons la courbe pour laquelle ces deux conditions sont remplies. Deux cas peuvent se présenter : l'un dans lequel

$$\alpha_1 - \beta_1 \equiv \alpha_2 - \beta_2$$

et l'autre lorsque cela n'a pas lieu. Le deuxième cas n'entraîne aucune des deux conditions (1) et (2); par conséquent, il n'y a pas de transformations nouvelles dans ce cas-là. Mais le premier cas a pour conséquence la condition (2); dans ce cas-là, comme on l'a vu, de nouvelles transformations quadratiques s'ajoutent à celles du cas général.

Distinguons encore : si

$$\alpha_1 - \beta_1 \equiv 0, \qquad \alpha_2 - \beta_2 \equiv 0,$$

la courbe possède deux rebroussements. On a le résultat que la courbe à deux rebroussements possède en tout onze transformations quadratiques.

Passons au cas où $\alpha_1 - \beta_1$ est une demi-période; ce cas est le plus intéressant au point de vue des transformations, puisque la courbe présente, en dehors des transformations du cas général, encore six transformations nouvelles. Celles-ci ne forment pas, en général, de groupe avec les inversions de Bertini; mais on peut, par une spécialisation complémentaire, obtenir une courbe pour laquelle ces huit transformations appartiennent à un groupe avec quatre transformations du groupe du cas général. On a, dans ce cas, une courbe qui se reproduit par deux groupes différents de transformations quadratiques, un cas qui me paraissait assez intéressant pour être mentionné au moins.

Toutes les autres combinaisons de conditions deux à deux ou trois à trois, qu'on peut envisager, mènent — quant au nombre de transformations — aux cas considérés auparavant; la spécialisation introduite par là se manifeste le plus souvent parce qu'une ou plusieurs des transformations quadratiques se réduisent à des homographies. Par là on est amené à se poser une nouvelle question que voici : trouver les conditions pour que cela arrive et déterminer les courbes spéciales pour lesquelles cette circonstance a lieu. Je me contente de signaler ce problème et j'ajoute seulement qu'il se rattache à celui qui consiste à déterminer les courbes qui admettent un nombre de transformations quadratiques moindre que celui du cas général. En effet, une des causes pour lesquelles ce nombre diminue pourrait bien être celle qu'une ou plusieurs des transformations quadratiques se réduisent à des homographies. Mais il n'en est rien; on se rend compte, en faisant l'analyse nécessaire, que du moment où l'on impose à la courbe la condition qu'une de ses transformations quadratiques se réduise à une homographie, le nombre des transformations quadratiques augmente.

Il n'y a qu'une seule exception à cet égard : c'est une courbe admettant — en dehors de sept homographies — seulement huit transformations quadratiques. Cette courbe n'est qu'un cas particulier de la courbe plus générale, mentionnée plus haut, et caractérisée par la condition (1). Aussi n'est-ce pas là une diminution essentielle du nombre des transformations quadratiques, puisqu'on peut considérer les homographies comme des cas particuliers de ces transformations. Mais on trouve une courbe dont le nombre total de transformations de l'ordre deux au plus soit moindre que neuf : c'est la courbe au point tacnodal, considérée, au point de vue des transformations quadratiques, par M. Ciani dans son travail déjà cité. Il n'est pas, en effet, difficile de démontrer que la seule quartique elliptique qui se reproduit par moins de neuf transformations quadratiques (en ce sens plus large) est la courbe au point tacnodal. Celle-ci est caractérisée par la relation

$$2(\alpha_1 + \beta_1) \equiv 0;$$

on voit donc, en jetant un coup d'œil sur le tableau des transformations, que les inversions de Bertini coïncident, dans ce cas, avec une des inversions du groupe.

THE ANALYTIC GEOMETRY OF COMPLEX VARIABLES

WITH SOME APPLICATIONS TO FUNCTION THEORY

By Dr. J. S. TAYLOR

CAMBRIDGE (MASSACHUSETTS).

§ 1. — *Introduction.*

It is the purpose of this paper to present a brief summary of an attempt to develop the analytic geometry of complex variables and to apply some of the results to a geometric study of function theory. A fuller account will be published later.

The geometric method of representation which has been chosen is that involving the use of hyperspace. It has seemed that this method is on the whole simpler in its general conception than some of the other methods of representing complex numbers geometrically. In addition, it permits of indefinite extension both to the geometric representation of functions of n complex variables and to the development of the analytic geometry of multiple algebras. Furthermore, the use of hyperspace enables us to incorporate in the general subject not only the analytic geometry of reals but also all the classic ideas of the theory of functions of a complex variable.

§ 2. — *Complex Analytic Geometry.*

I shall deal almost entirely with algebraic functions of two complex variables of the type.

$$F(X, Y) = 0 \tag{1}$$

where $X = x + iu$ and $Y = y + iv (x, y, u, v$ all real; $i = \sqrt{-1})$ and where the coefficients of the different terms are any complex numbers.

Through some point O take four mutually perpendicular straight lines (each line perpendicular to each of the other three) thus obtaining a space of four dimensions. Choose one of the four lines as an x-axis, one as a y-axis, one as u-axis, and the remaining one as a v-axis. Given any pair of complex numbers $X_1 = x_1 + iu_1$ and $Y_1 = y_1 + iv_1$ we can represent this complex number pair by a point in the usual manner. Measure the distance x_1 from the origin along the x-axis, the distance u_1 parallel to the u-axis from the point thus reached, thence the distance y_1 parallel to the y-axis, and thence the distance v_1 parallel to the v-axis. The point P_1 thus obtained will be called the point (X_1, Y_1). It is evident that the same point would be reached if any other order of measuring the distances were chosen.

For any pair of complex numbers X and Y we get one, and only one, point in our four-space. And conversely, given any point P in the four-space we obtain one, and only one, complex number pair corresponding to it. Thus the fundamental characteristic of the analytic geometry of real variables is preserved.

It is to be noted that we have in our four-space two axes of reals (the x and y axes) and two axes of pure imaginaries (the u and v axes), The x and y axes determine a plane composed entirely of points representing real numbers and will, therefore, be called the plane of reals. (It is, in fact, the plane of the analytic geometry of two real variables.) Similarly, the plane determined by the u and v axes will be called the plane of pure imaginaries. The two planes are completely perpendicular to each other at the origin, the only point which they have in common (1). The pair of planes determined by the x and u axes and by the y and v axes are also completely perpendicular to each other. They will be called the X-plane and the Y-plane, respectively.

It will be best to consider next the questions of distance and angle. Here I find myself in some disagreement with present practice. A "minimal line" seems a creature both weird and startling. A "line" of "zero length"; two "points" algebraically different yet lying at a "zero distance" from each other. The algebraic notions involved are undoubtedly of great importance. But the use of such geometric language without a corresponding geometric representation seems dangerous. And even where a geometric representation is either stated or implied it would seem that "distance" has been given a meaning more algebraic than geometric. Geometrically, whatever else it may be, distance would seem to be fundamentally a measure of difference of position. And whatever method of geometric representation is employed it would seem that two quantities algebraically different should be represented by two geometrically distinct points, or configurations of points, and should, therefore, have a measure of "difference of position" other

(1) One plane is said to be "completely perpendicular" to another if it contains all the lines perpendicular to the second plane drawn through their common point.

than zero. A definition of distance which does not conform with this principle, valuable as it may be algebraically, would seem to do unnecessary violence to geometric language.

Since I am interested primarily in the geometric aspect of the questions to be considered, I have, therefore, sought to formulate a definition of distance which does not give a result of zero unless the two points involved are coincident. I have obtained two such definitions.

Given two number pairs (X_1, Y_1) and (X_2, Y_2), (where $X_1 = x_1 + iu_1$, $Y_1 = y_1 + iv_1$, $X_2 = x_2 + iu_2$, and $Y_2 = y_2 + iv_2$) we get two corresponding points P_1 and P_2 in our four-space. The real length of the line segment $P_1 P_2$ is defined to be

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}. \tag{2}$$

This, obviously, can never become zero unless the two points coincide. In this definition, however, we have disregarded the fact that our four-space involves two distinctly different sorts of units; that we have a peculiar kind of four — space with two axes of pure imaginaries. It would seem that it might be well to have in addition a definition of distance which takes account of this peculiar nature of the space.

We may do this by dealing separately with the real and pure imaginary components of the line segment $P_1 P_2$. It is possible to go from P_1 to P_2 along a path composed of two line segments, the first parallel to the plane of reals and the other parallel to the plane of pure imaginaries, in one, and only one, way. These two line segments are the legs of a right triangle having the line segment $P_1 P_2$ as the hypothenuse. Calling the leg parallel to the plane of reals the real component D_r and the leg parallel to the plane of imaginaries the imaginary D_i we write

$$\begin{cases} D_r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ D_i = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + v_1 - v_2)^2}. \end{cases} \tag{3}$$

This pair of equations may be incorporated in one by formulating the definition of what will be called the *complex length* of the line segment $P_1 P_2$, or the *complex distance* from P_1 to P_2.

$$D\,\text{complex} = D_r + i \,.\, D_i = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + i\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + v_1 - v_2)^2}. \tag{4}$$

This definition will prove of importance in the discussion of the derivative and the integral of a function of a complex variable.

It immediately suggests itself to consider what would happen if we should compute the value of $\sqrt{D_r^2 + (i.D_i)^2}$. Calling this quantity $\mathfrak{D}$ we would have

$$\mathfrak{D} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 - (v_1 - v_2)^2}. \tag{5}$$

This definition is open to the objection already stated that it may become zero for two non-coincident points. It may, however, prove of algebraic interest.

Finally we might enquire what happens geometrically if we do carry over bodily the definition of distance used in the analytic geometry of reals. Calling this distance d we have,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}, \\ &= \sqrt{[(x_1 + iu_1) - (x_2 + iu_2)]^2 + [(y_1 + iv_1) - (y_2 + iv_2)]^2}, \\ &= \sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 - (v_1 - v_2)^2]} \\ &\qquad \overline{+ 2i[(x_1 - x_2)(u_1 - u_2) + (y_1 - y_2)(v_1 - v_2)]}, \\ &= \sqrt{\mathfrak{D}^2 + 2i[(x_1 - x_2)(u_1 - u_2) + (y_1 - y_2)(v_1 - v_2)]}. \end{aligned} \tag{6}$$

The geometric meaning of $\mathfrak{D}$ has already been considered briefly. The two parts of the term enclosed in brackets under the last radical are found to be the products of the two legs of each of two right triangles, one obtained by the projection of the triangle discussed in defining D_r and D_i upon a plane parallel to the X-plane and the other by its projection upon a plane parallel to the Y-plane. The geometric interpretation of d is by no means a simple one. It is open also to the fundamental objection earlier made. Its algebraic importance is, however, not to be belittled. In fact, it will be found necessary, to make use of it in giving a geometric significance to some of the trigonometric functions of a complex angle.

It is to be noted that each of the four definitions of distance considered reduces to the definition of distance employed in the analytic geometry of reals whenever only real numbers are involved. As has been stated, all of the geometric configurations of the analytic geometry of two real variables are contained in the x-y plane, the plane of reals.

The next question to be considered is that of angles. Here, again, it is well to remember the peculiar nature of our four-space and to separate real and imaginary quantities. Any plane Z will, in general, cut the X-plane and the Y-plane each in a single point. Suppose Z cuts the X-plane in the point P. From P measure an arbitrary complex distance $a + bi$ in the X-plane, the distance a being mesured along the X-axis and the distance b along the u-axis. This gives some point P′ in

the X-plane, the complex distance PP′ being $a + bi$. Through the point P′ construct the plane W completely perpendicular to the X-plane. The plane W will, in general, intersect the plane Z in some point P″. Again using the definition of distance (4) we obtain the complex distance P′ P″, say $c + di$. The ratio of P′ P″ to PP′ will be by definition the tangent of the angle of intersection Θ of the plane Z with the X-plane.

$$\tan\Theta = \frac{P'P''}{PP'} = \frac{c + di}{a + bi}. \tag{7}$$

Or

$$\Theta = \tan^{-1}\frac{c + di}{a + bi}. \tag{8}$$

If $\tan\Theta$ has the same value whatever complex distance $a + bi$ we choose to measure from P in the X-plane, Θ will be said to be a "determinate angle" and the plane Z will be said to have a "determinate direction". If $\tan\Theta$ is not constant, Θ will be said to be an "indeterminate angle" and the plane will be said to have no "determinate direction". We have here, incidentally, a geometric representation of complex angles. It is possible to obtain a plane making a determinate angle Θ with the X-plane such that Θ has any desired complex value. To obtain all of the trigonometric functions of Θ it is necessary to use definition (6) for the "distance" PP″, the hypothenuse of the triangle having PP′ and P′P″ for the legs. In other words, the "length" of the line segment PP″ is taken to be

$$\sqrt{a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + 2i(ab + cd)}.$$

The angle of intersection Φ of two planes Z and Z′ is defined as the difference of their angles of intersection with the X-plane. In other words, $\Phi = \Theta' - \Theta$.

We are now ready to consider the geometric configuration corresponding to a function of two complex variables. The following discussions must necessarily be very brief.

Given $F(X, Y) = F(x + iu,\ y + iv) = 0$.

This equation gives rise to two equations involving only reals, obtained by equating the real and pure imaginary parts to zero separately. In four-space a single equation represents a three-space. Two simultaneous equations represent a two dimensional surface. Therefore, $F(X, Y) = 0$ represents a two dimensional surface in our four-space.

The most general linear equation in X and Y is of the form

$$AX + BY + C = (a + i\alpha)(x + iu) + (b + i\beta)(y + iv) + c + i\gamma = 0 \tag{9}$$

where a, α, b, β, c, γ, x, y, u, and v are all real. This equation is found to represent a plane. By giving all possible complex values to A, B, and C we get a four parameter family, or a four-fold infinitude, of planes. Since there is a six-fold infinitude of planes in four-space, we are dealing with only a special family of planes. This special family proves to be composed of all planes having a determinate direction in the sense just defined. The slope of the plane represented by equation (9) is defined to be

$$-\frac{A}{B}=-\frac{a+i\alpha}{b+i\beta}.$$

If, and only if, the plane has a real slope, there is a single infinitude of planes parallel to the x-y plane, the plane of reals, each of which intersects it in a straight line. There is also a single infinitude of planes parallel to the plane of imaginaries each of which intersects it in a straight line. Hence there is a double infinitude of possible choices for pairs of lines lying in the plane $AX + BY + C = 0$ which may be taken as a special set of coördinate axes. That is, by taking a pair of lines in the plane, one parallel to the plane of reals and the other parallel to the plane of imaginaries, and using their point of intersection as a new origin, any point in the plane may be represented by a single real coördinate measured along the first line and a single pure imaginary coördinate measured along the second line. Thus the plane can be dealt with largely as a simple Argand plane.

There are many interesting special cases. Unfortunately there is not room for a discussion of them here.

In dealing with equations of the second degree we get some very pretty configurations. By investigating three dimensional sections of them, in a way similar to that in which we study ordinary three dimensional surfaces by means of plane sections, it is possible to get a fairly clear idea of what they look like. The intimate connection of the circle with the hyperbola, and things of a like nature, come out very simply. They could probably be represented without much difficulty to even elementary classes in analytic geometry.

So far little has been done with equations of higher than the second degree. A more extended study than has as yet been made of the surfaces represented by such equations should prove fruitful.

The possible extensions of the methods here employed to functions of more than two variables by increasing the number of dimensions has been suggested. So, also, it is possible to develop an analytic geometry of a multiple algebra by choosing separate axes for measuring each sort of unit. A function of n variables of an m-fold algebra can be represented in a space of mn dimensions.

§ 3. — *Theory of Functions of a Complex variable.*

In the theory of functions of a real variable a function is considered primarily as a relation; it is the relation between the two interdependent variables which is represented geometrically. In the theory of functions of a complex variable, on the other hand, it is the transformation effected by it which we study geometrically. To be sure, a great deal has been done in the study of a function of a complex variables as a relation, notably by the use of line complexes; but such a point of view has not been the common one. It is hoped that a little more will be added to the conception of a function of a complex variable as a relation by the ideas to be presented here (1).

Unfotunately it seems necessary to make a change in the terminology used earlier in this paper. In function theory the relation between two interdependent complex variables is usually written

$$w = f(z), \quad \text{or} \quad u + iv = f(x + iy). \tag{1}$$

The choice of letters used earlier seemed the most natural in connection with the common usage in the analytic geometry of reals. For a similar reason it would seem best here to use the letters x and u for the axes of reals, and y and v for the axes of pure imaginaries. The x-u plane will be, then, the plane of reals and the y-v plane the plane of imaginaries. Also, the x-y plane will be the Z-plane, or the plane of the independent variable, while the W-plane will be the u-v plane. (It is, of course, immaterial which variable is considered to be independent.)

With this simple change in lettering equation (1) gives us a two dimensional surface in our four-space in the same way as before. For some algebraic purposes it will be best to write the equation of the surface in the form

$$u = f_1(x, y), \qquad v = f_2(x, y). \tag{2}$$

The ordinary conception of the function as an operation can be obtained from a study of the surface by projection. To obtain the point, or points, in the W-plane into which the function transforms any point z_1 in the plane of the independent

(1) Some of the things outlined have been found to be not entirely new. Here, as elsewhere, historical discussion has been reserved for the publication of the article in complete form.

variable, we may proceed as follows. Through the given point z_1 take the plane completely perpendicular to the Z-plane. This plane will, in general, cut the surface (2) in one or more points. Through each of these points construct the plane completely perpendicular to the W-plane. Each of these planes will intersect the W-plane in a single point. The points thus obtained are the points of the W-plane into which the point z_1 is tranformed by the function. The region of the W-plane into which a region in the Z-plane is transformed can be obtained in a similar manner.

As a matter of fact the surface (2) can be looked upon as being generated by setting up a correspondence (not necessarily one-to-one) between the double infinitude of planes completely perpendicular to the Z-plane and the double infinitude of planes completely perpendicular to the W-plane.

It is of special interest to note that the simple Riemann surfaces of the theory of functions of a complex variable are the projections of the surface upon the Z-plane. Some of the simple functions yield correspondingly simple surfaces in the four-space and give, perhaps, a further understanding of the corresponding Riemann surfaces.

Given the pair of functions $u = f_1(x, y)$ and $v = f_2(x, y)$, the question arises as to whether the function $w = f(z)$ has a derivative at a given point $P_1(x_1, y_1, u_1, v_1)$. Construct a the point P_1 the "tangent plane" of the surface represented by the pair of equations

$$
\begin{aligned}
&(u - u_1) - \left(\frac{df_1}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \cdot (x - x_1) - \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \cdot (y - y_1) = 0, \\
&(v - v_1) - \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \cdot (x - x_1) - \left(\frac{df_2}{dy}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} \cdot (y - y_1) = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

This will always be possible if $f_1(x, y)$ and $f_2(x, y)$ are algebraic functions having a finite value at the given point. If this "tangent plane" makes a determinate angle with the Z-plane in the sense earlier defined, then, and only then, $f(z)$ has a unique derivative at the point P_1.

More generally, given a two dimensional surface in the four-space, a relation between w and z is then defined. If this general functional relation $w = f(z)$ is such that u depends upon x and y alone and v depends upon x and y alone, and if at the point P_1 the tangent plane (3) exists and has a determinate direction, then, and only then, $f(z)$ has a unique derivative at that point.

While the algebra involved is by no means complicated it has seemed best to omit it here. The Laplace equations are obtained rather simply. Also, a simple geometric interpretation of the differential is obtained. If any complex distance dz

is measured from the point P_1 parallel to the z-plane, dw is the complex distance from the point thus reached to the plane represented by equations (3), measured parallel to the w-plane.

The definite integral $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ can also be given a geometric meaning. Obtain the points of the surface $w=f(z)$ corresponding to the values $z=z_1$ and $z=z_2$. Call these points s_1 and s_2, respectively. If the four points z_1, z_2, s_1, and s_2 all lie in a plane cutting the surface in a curve, then $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ is the "complex plane area" $z_1\, z_2\, s_2\, s_1$. That is, it is the limit of the sum of the rectangles having segments of the line segment $z_1\, z_2$ as bases and the corresponding values of $f(z)$ as altitudes, where the complex measure of linear dimension is used and a complex measure of plane area thus obtained. If the points z_1, z_2, s_1, and s_2 do not all lie in the same plane a similar interpretation is possible, differing only in that the plane rectangles used in successive approximations are not all coplanar. The extension of this interpretation to the indefinite integral is, of course, immediate.

The foregoing is little more than an outline of things which will later appear in more complete form. Perhaps ideas have been omitted of more importance than some of those included. Much remains to be done. More than a score of other problems have presented themselves in the course of the work. In the amplified publication of this paper I shall state the more interesting of them and only hope that semeone will consider the general field of sufficient importance to give it a more adequate treatement than I can ever hope to do.

SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DÉFORMATION

PAR E. CARTAN

(PARIS)

Le problème classique de la déformation des surfaces de Gauss a déjà été l'objet de plusieurs généralisations. Deux surfaces sont dites *déformées* l'une de l'autre au sens de Gauss, ou *applicables* l'une sur l'autre, si l'on peut établir entre ces deux surfaces une correspondance ponctuelle telle que deux morceaux infiniment petits correspondants soient *égaux* aux infiniment petits près du second ordre, ou encore puissent être amenés en coïncidence (toujours aux infiniment petits près du second ordre) par une des opérations du groupe des *déplacements* de l'espace. Un instant de réflexion montre que le problème de la *représentation conforme* peut aussi être regardé comme un problème de déformation, en substituant simplement, dans l'énoncé précédent, au groupe des déplacements celui des *transformations par similitude*, ou encore celui des *transformations conformes*. Le problème de la déformation projective des surfaces, formulé et étudié par M. Fubini, se rattache également au problème de Gauss, deux surfaces étant *projectivement applicables* si l'on peut établir entre elles une correspondance ponctuelle telle que deux morceaux infiniment petits correspondants des deux surfaces puissent être amenés en coïncidence, aux infiniment petits près du *troisième ordre*, par une transformation *projective*.

On peut donc formuler le problème général de la déformation de la manière suivante :

Étant donné dans l'espace à n dimensions un groupe fondamental de transformations G, *deux variétés à p dimensions* (S) *et* (S') *de cet espace sont dites déformées l'une de l'autre d'ordre h si l'on peut établir entre ces deux variétés une correspondance ponctuelle telle que deux morceaux infiniment petits correspondants des deux variétés puissent être amenés en coïncidence, aux infiniment petits près d'ordre* $h+1$, *par une transformation convenablement choisie (et variable avec le morceau considéré) du groupe* G.

Les déformations qu'on considère dans l'*Analysis situs* sont, comme on le voit, à regarder comme des déformations d'ordre zéro. La définition précédente ramène

donc à un même point de vue, si étrangères l'une à l'autre qu'on ait l'habitude de les considérer, les deux significations les plus habituelles du mot déformation.

J'ai supposé implicitement dans l'énoncé ci-dessus $p < n$, mais rien n'empêche de regarder l'espace lui-même comme l'objet de la déformation. Le groupe fondamental G étant donné, l'espace sera susceptible d'une déformation d'ordre h si l'on peut établir entre ses points une correspondance telle que deux morceaux infiniment petits correspondants quelconques puissent se déduire l'un de l'autre, aux infiniment petits près d'ordre $h+1$, par une transformation convenablement choisie du groupe G. Si une telle correspondance n'existe pas, ou plutôt si elle se réduit à une transformation du groupe G lui-même, on dira que l'espace n'admet pas de déformation d'ordre h. C'est ainsi que l'espace euclidien (dont on prend pour groupe fondamental le groupe des déplacements) n'admet pas de déformation du premier ordre : c'est là un théorème classique d'hydrodynamique d'après lequel la non existence, en chaque point d'une masse fluide en mouvement, de la déformation pure entraîne la propriété de la masse fluide de se mouvoir sans déformation à la manière d'un corps solide. Au contraire, l'espace dont on prend pour groupe fondamental le groupe des transformations par similitude admet une infinité de déformations du premier ordre, qu'on obtient par exemple en effectuant une inversion, ou plus généralement en effectuant une transformation conforme. L'espace dont le groupe fondamental est le *groupe conforme*, ou, comme on dit plus brièvement, l'*espace conforme*, n'admet pas de déformation du premier ordre. L'espace *projectif* en admet au contraire une infinité, toute déformation d'ordre zéro de cet espace étant en même temps une déformation d'ordre un; mais il n'admet aucune déformation du second ordre.

Si nous revenons aux variétés à $p < n$ dimensions, nous verrons de même que, suivant la nature du groupe G, il pourra arriver que deux variétés quelconques (S) et (S′) soient applicables l'une sur l'autre (exemple : surfaces de l'espace à trois dimensions avec le groupe conforme comme groupe fondamental), ou bien que toute variété (S) admette une infinité de variétés (Σ) applicables d'un ordre donné sur (S) sans les admettre toutes, ou enfin qu'une variété (S) n'admette aucune variété (S′) applicable sur elle autre que celles qui se déduisent de (S) par une transformation du groupe fondamental; on peut dire dans ce dernier cas que (S) n'admet aucune déformation d'ordre h. C'est ainsi qu'une hypersurface arbitraire est indéformable (du premier ordre) dans l'espace euclidien à $n \geqslant 4$ dimensions, ou dans l'espace conforme à $n \geqslant 5$ dimensions.

Enfin on peut effectuer une dernière généralisation du problème en substituant au point un autre élément générateur de l'espace (droite, plan, etc.). Si on se borne aux déformations du premier ordre, on peut dire alors que l'espace euclidien, indéformable en tant qu'espace ponctuel, l'est encore en tant qu'espace réglé, mais ne l'est plus en tant qu'engendré par des plans; de même l'espace projectif, défor-

mable en tant qu'espace ponctuel, cesse de l'être en tant qu'espace réglé ou en tant qu'espace engendré par des *éléments* (point et plan unis). On pourra étudier la déformation des *congruences de droites*, des *complexes de droites*, regardés comme des variétés engendrées par des *droites*.

On peut envisager la déformation d'un point de vue cinématique. Soient (S) et (S′) deux variétés à p dimensions applicables d'ordre h dans un espace E à groupe fondamental G. A chaque élément M de (S) [et à l'élément correspondant M′ de (S′)] correspond une transformation T du groupe G amenant M′ sur M et en même temps, à des infiniment petits près d'ordre $h+1$, les éléments infiniment voisins de M′ sur les éléments infiniment voisins de M. Convenons de réserver, par extension, le nom de *déplacements* aux transformations du groupe fondamental. On peut dire alors que la correspondance ponctuelle qui réalise l'application de (S′) sur (S) est un *mouvement* à p paramètres de la variété (S′) se déplaçant dans l'espace E de manière que les différents morceaux de (S′) viennent en coïncidence avec les morceaux correspondants de (S). A chaque instant (de la durée à p dimensions) l'espace peut être considéré comme soumis à un déplacement d'*entraînement* avec (S′), déplacement dont les propriétés pourront jouer un rôle prépondérant. C'est ainsi que dans le problème classique de Gauss il faudra et il suffira, pour réaliser l'application de (S′) sur (S), que la vitesse d'entraînement du point de contact soit nulle à chaque instant.

La déformation des variétés comporte plusieurs problèmes; un des plus importants est le suivant : *Étant donnée la variété* (S), *trouver toutes les variétés applicables sur* (S) *et, en même temps, déterminer la correspondance élément à élément qui réalise l'application.* Analytiquement ce problème comporte une solution théoriquement très simple. Imaginons qu'on ait formé le système d'équations aux dérivées partielles qui donne, en fonction des p paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$ qui fixent la position d'un élément de (S), les coordonnées $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'un élément variable de la variété (S′) la plus générale qui soit *égale* à (S), c'est-à-dire qui puisse se déduire de (S) par une transformation de G. *On aura les variétés* (S′) *applicables d'ordre h sur* (S) *en intégrant le système différentiel obtenu en ne conservant des équations précédentes que celles qui sont d'ordre inférieur ou égal à h.* En particulier, *les déformations d'ordre h de l'espace lui-même s'obtiendront en intégrant le système formé de celles des équations de définition du groupe* G *qui sont d'ordre inférieur ou égal à h.* C'est ainsi que les équations de définition du groupe ponctuel des déplacements euclidiens étant du premier ordre (elles peuvent être condensées dans la relation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

l'espace ponctuel euclidien n'admet aucune déformation du premier ordre. L'équa-

tion unique de définition du groupe projectif de la droite,

$$X'X''' - \frac{3}{2}X''^2 = 0,$$

étant du troisième ordre, toute déformation d'ordre zéro de la droite projective est en même temps une déformation du second ordre, tandis que la droite projective n'admet aucune déformation du troisième ordre.

Aussi importante que la formation du système différentiel qui donne les déformées d'une variété donnée (S) est la discussion de ce système, en particulier la recherche du degré d'indétermination de ses solutions. A l'un et l'autre de ces deux problèmes est particulièrement adaptée la théorie de la structure des groupes de transformations que j'ai développée dans plusieurs Mémoires des *Annales de l'École normale*(1), jointe à ma théorie des systèmes de Pfaff en involution(2). En combinant ces deux théories, dont la première a du reste son origine dans la seconde, on obtient une méthode que j'ai appliquée déjà à l'étude de la déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien et dans l'espace conforme à n dimensions(3), ainsi qu'à l'étude de la déformation projective de M. Fubini(4). Cette méthode s'applique, que le groupe fondamental G soit fini ou infini; mais quand il est fini, elle revêt une forme cinématique qui la rattache à la théorie du trièdre mobile. Un groupe quelconque G à n variables x_i, groupe que nous supposerons transitif pour simplifier, peut être défini par l'ensemble des transformations qui conservent un certain nombre d'expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots$ formées avec les variables x_i et un certain nombre de variables auxiliaires y. On peut supposer en particulier que les n premières expressions sont n formes linéaires indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_n$, les coefficients étant des fonctions des x et des y. Cela posé prenons une variété (S) à p dimensions, les coordonnées x_i d'un élément variable de (S) pourront s'exprimer en fonction de p paramètres $t_1, \ldots, t_p$; nous remplaçons dans les ω_i les x_i par ces valeurs et les y par des fonctions choisies arbitrairement des t_i, les expressions ω_i deviennent des expressions de Pfaff à p variables que nous désignerons par $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$. Cela posé, les variétés (S') applicables *du premier ordre* sur (S) sont données par le système de Pfaff

$$\omega_1 = \varpi'_1, \quad \omega_2 = \varpi'_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = \varpi'_n,$$

où les x et les y sont des fonctions inconnues des t. Pour avoir les variétés applicables du *second ordre* sur S, on égale les covariants bilinéaires des deux membres

(1) *Ann. Ec. Norm.* (3), t. XXI, p. 153-206 (1904); t. XXII, p. 219-308 (1905); t. XXV, p. 57-194 (1908).

(2) *Ann. Ec. Norm.* (3), t. XVIII, p. 241-311 (1901).

(3) *Bull. Soc. Math.*, t. XLIV, p. 65-99 (1916); t. XLV, p. 57-121 (1917); t. XLVI, p. 84-105 (1918).

(4) *Ann. Ec. Norm.* (3), t. XXXVII, p. 259-356 (1920).

des équations précédentes; en remplaçant dans les équations obtenues $\omega_1, \ldots, \omega_n$ par $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$, et en prenant les dérivées partielles par rapport à $dt_1, dt_2, \ldots, dt_p$, on obtient de nouvelles équations de Pfaff qui, jointes aux premières, fournissent le système de Pfaff qui donne les variétés cherchées. Les nouvelles équations de Pfaff sont d'une forme analogue aux premières, sauf que $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n$ sont remplacées par des combinaisons linéaires de $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots$ à coefficients fonctions connues de $t_1, \ldots, t_p$. Pour avoir les variétés applicables *du troisième ordre* on procède sur le second système de Pfaff obtenu comme on a procédé sur le premier, et ainsi de suite.

Si le groupe G est fini, les expressions ω_i peuvent être considérées comme les composantes suivant un système de référence mobile du déplacement d'entraînement infiniment petit qui amène les différents éléments de (S') en coïncidence avec les éléments correspondants de (S).

Comme, d'après la théorie de la structure des groupes, les covariants bilinéaires des ω_i ne font intervenir que des coefficients *constants* (ce sont les constantes c_{iks} de Lie dans le cas des groupes finis), la discussion des systèmes différentiels obtenus est simplifiée autant que la nature même des choses le permet; en particulier, il ne reste dans cette discussion aucune trace de la position particulière de (S) ou de (S') dans l'espace.

Quelquefois la discussion du système de Pfaff qui donne les variétés (S') applicables sur une variété donnée *arbitraire* (S) peut être assez compliquée, et même mettre difficilement en évidence la propriété de (S) d'être déformable en général, ou au contraire d'être indéformable en général. C'est ce qui arrive par exemple pour la déformation projective (du second ordre) des surfaces. Dans ce cas, j'ai eu recours à la formation du système de Pfaff qui donne les *couples* de variétés applicables l'une sur l'autre; dans l'exemple cité, une discussion très facile montre immédiatement que ces couples de surfaces projectivement applicables dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument, ce qui suffit à montrer qu'une surface est en général projectivement *indéformable* (du second ordre).

Je signalerai comme particulièrement digne d'étude le problème de la déformation projective des *congruences* et des *complexes* de droites dans l'espace réglé ordinaire.

Déformation projective des congruences de droites.

Deux congruences de droites quelconques sont toujours projectivement applicables du premier ordre : pour réaliser l'application, il suffit d'établir une correspondance arbitraire entre les deux familles de développables des deux congruences. Au contraire, une congruence arbitraire n'admet aucune *déformation* projective du

second ordre; la solution générale du système de Pfaff qui définit les couples de congruences projectivement applicables du second ordre dépend d'une seule fonction arbitraire de deux arguments; mais ce système de Pfaff admet aussi des solutions singulières, caractérisées par la propriété cinématique que dans le mouvement (de l'espace projectif) qui amène successivement en coïncidence chaque droite D′ de la seconde congruence sur la droite correspondante D de la première, non seulement la vitesse d'entraînement de la droite D′ (considérée comme un élément) est nulle, mais encore la vitesse d'entraînement de chacun de ses points. Les congruences de droites qui admettent une déformation projective *singulière* du second ordre dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Elles sont caractérisées par cette double propriété (¹) :

1° *Les lignes asymptotiques des deux surfaces focales de la congruence se correspondent;*

2° *L'équation différentielle des lignes asymptotiques de l'une quelconque des surfaces focales est de la forme*

$$A(\alpha)d\alpha^2 + B(\beta)d\beta^2 = 0,$$

α et β désignant les paramètres des deux familles de développables de la congruence.

La première propriété peut être remplacée par la suivante : *au voisinage de chacune de ses droites, la congruence a un contact du second ordre avec un certain complexe linéaire.*

On sait, d'après Darboux, que de toute congruence de droites on peut déduire une suite linéaire, illimitée dans deux sens différents, d'autres congruences de droites, chaque congruence de la suite ayant une surface focale commune avec la congruence suivante. *Si l'une des congruences admet une déformation projective singulière du second ordre, il en est de même de toutes les autres congruences de la suite.* On a ainsi un nouvel exemple géométrique d'un système différentiel tel que de toute solution de ce système on puisse déduire par différentiations une suite linéaire illimitée d'autres solutions.

Il y a plus. *Chacune des surfaces focales d'une congruence admettant une déformation projective singulière du second ordre est elle-même projectivement déformable du second ordre* (au sens de M. Fubini), et réciproquement si l'on considère une surface projectivement déformable du second ordre et sur cette surface le réseau conjugué de déformation projective que j'ai défini dans une Note récente aux *Comp-*

(¹) Cette double propriété indique que ces congruences se confondent avec les congruences W, bien connues des géomètres; de même leurs surfaces focales, dont il est question plus bas, ne sont autres que les surfaces Φ. (Remarque faite par M. Demoulin.)

tes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (1), les tangentes à l'une quelconque des deux familles de courbes qui constituent ce réseau conjugué engendrent une congruence admettant une déformation projective singulière du second ordre, de sorte *qu'à chaque surface admettant une déformation projective du second ordre correspondent deux congruences de droites admettant une déformation projective singulière du second ordre et réciproquement. De même chaque surface admettant une déformation projective du second ordre fait partie d'une suite linéaire de surfaces jouissant de la même propriété et qu'on peut obtenir de proche en proche par des différentiations.*

On peut enfin donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'une surface admette une déformation projective du second ordre, c'est qu'*il existe sur cette surface un réseau conjugué jouissant des deux propriétés suivantes :*

1° *La congruence des tangentes à l'une des deux familles de lignes qui constituent le réseau conjugué admet, au voisinage de chacune de ces tangentes, un complexe linéaire osculateur;*

2° *L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface est de la forme*

$$A(\alpha)d\alpha^2 + B(\beta)d\beta^2 = 0,$$

α *et* β *désignant les paramètres des deux familles de lignes du réseau conjugué.*

La première condition est sûrement remplie si les tangentes à l'une des familles des lignes du réseau conjugué appartiennent toutes à un même complexe linéaire.

Les variétés à lignes de courbure isothermes.

On sait qu'on peut établir une correspondance univoque (imaginaire) entre les droites de l'espace réglé à trois dimensions et les points de l'espace conforme à quatre dimensions. Au problème de la déformation projective des congruences de droites correspond le problème de la déformation conforme des variétés à deux dimensions de l'espace à quatre dimensions. Les variétés à deux dimensions qui admettent une déformation conforme du second ordre sont exceptionnelles; elles dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Portons plutôt notre attention sur celles d'entre elles qui admettent une déformation conforme *singulière* du second ordre; elles dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument; *elles sont caractérisées par la propriété d'admettre deux familles de lignes de courbure isother-*

(1) *C. R.*, t. 170, p. 1439 (1920). V. aussi le Mémoire cité note 4 (p. 400).

mes. Cette propriété est en réalité double : elle peut se décomposer dans la propriété d'admettre deux familles de lignes de courbure, qui correspond à la propriété 1° des congruences de droites qui admettent une déformation projective singulière du second ordre, et en outre dans la propriété de ces lignes de courbure d'être isothermes. De là résulte que *toute variété (à deux dimensions) à lignes de courbure isothermes de l'espace à quatre dimensions fait partie d'une suite linéaire de variétés également à lignes de courbure isothermes* qui se déduisent les unes des autres par différentiations. L'une des variétés de la suite peut être située sur une hypersphère (c'est-à-dire être une surface à lignes de courbure isothermes d'un espace à trois dimensions considéré comme plongé dans l'espace à quatre dimensions); dans ce cas, les deux variétés voisines s'obtiennent en prenant le conjugué harmonique μ d'un point quelconque M de la surface par rapport aux deux centres de courbure principaux relatifs à ce point, en élevant ensuite dans le plan normal (à deux dimensions) en M de la surface, considérée comme une variété de l'espace à quatre dimensions, la perpendiculaire en μ à la droite Mμ et en prenant les deux points d'intersection P et P′ de cette perpendiculaire avec les deux normales isotropes issues de M. Il peut du reste arriver que l'une de ces deux variétés voisines soit elle-même située dans un espace à trois dimensions. Il serait intéressant, et sans doute pas très difficile, d'étudier les suites linéaires fermées les plus simples, par exemple celles de quatre surfaces à lignes de courbure isothermes dont chacune serait située dans un espace à trois dimensions.

Quoi qu'il en soit, *il résulte de ce qui précède une correspondance inattendue entre les surfaces à lignes de courbure isothermes et certaines surfaces admettant une déformation projective du second ordre.*

La déformation projective des complexes de droites et la représentation conforme des hypersurfaces de l'espace à quatre dimensions.

La correspondance dont il a été question plus haut entre l'espace projectif réglé à trois dimensions et l'espace conforme à quatre dimensions montre l'identité qui existe entre le problème de la déformation projective (du premier ordre) des complexes de droites et le problème de la représentation conforme des hypersurfaces dans l'espace à quatre dimensions. Ce problème, comme je l'ai fait remarquer ailleurs, présente des complications tant par rapport à celui de la représentation conforme dans l'espace à trois dimensions que par rapport à celui de la représentation conforme dans l'espace à $n \geqslant 5$ dimensions. J'ai démontré dans un Mémoire antérieur(1) que les hypersphères de l'espace à quatre dimensions admettaient une

(1) *Bull. Soc. Math.*, t. XLV (voir ci-dessus, p. 400, note 3).

infinité de déformées dépendant de six fonctions arbitraires d'un argument, et j'ai indiqué une signification géométrique simple des six familles de caractéristiques du système différentiel qui donne ces hypersurfaces. En reprenant le problème et formant le système de Pfaff des couples d'hypersurfaces conformément applicables (du premier ordre) l'une sur l'autre, j'ai pu démontrer facilement que la solution générale dépend de *trois fonctions arbitraires de deux arguments. Une hypersurface arbitraire est donc conformément indéformable.* En dehors de sa solution générale, le système de Pfaff admet des solutions singulières dont chacune correspond à un couple de deux hypersurfaces représentables conformément sur une hypersphère, la correspondance ponctuelle établie entre ces hypersurfaces conservant les lignes de courbure, ainsi que le rapport anharmonique d'un point variable de chaque hypersurface et des trois centres de courbure principaux correspondants.

Laissons de côté les hypersurfaces qui admettent une représentation conforme sur l'hypersphère. Si l'on égale à zéro le ds^2 d'une hypersurface, on obtient une équation de Monge quadratique à trois variables; une telle équation admet une équation covariante qui définit en chaque point M de l'hypersurface un cône (tangentiel) du second ordre, ou, d'une manière plus précise, un cône enveloppe d'éléments plans à deux dimensions situés dans l'hyperplan tangent. Désignons-le par cône C relatif au point M. Ce cône C est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit et capable également d'un trièdre dont les faces sont deux à deux *conjuguées* par rapport à l'hypersurface. Si deux hypersurfaces sont représentables conformément l'une sur l'autre, et si le point M′ correspond sur la seconde hypersurface au point M de la première, *le cône* C′ *relatif au point* M′ *coïncide, dans la représentation conforme, avec le cône* C *relatif au point* M. On peut assez facilement déduire de là que la correspondance qui réalise la représentation conforme dépend au plus de trois constantes arbitraires.

Si l'on se donne *a priori* l'équation de Monge $ds^2 = 0$, les hypersurfaces correspondantes sont données par un système de Pfaff dont la solution *générale*, quand elle existe, dépend au plus de *constantes* arbitraires. Ce système peut admettre des solutions *singulières* caractérisées par la propriété des hypersurfaces intégrales *que l'une de leurs trois tangentes principales en un point quelconque* M *est située sur le cône* C *relatif à ce point.* Ces solutions singulières peuvent, dans certains cas, dépendre de *fonctions* arbitraires; on peut en citer deux exemples. Le premier est obtenu en partant d'une équation de Monge

$$ds^2 = A(u, v)du^2 + 2B(u, v)du\,dv + C(u, v)dv^2 + dw^2 = 0,$$

le ds^2 à deux variables formé par les trois premiers termes n'étant pas à courbure constante; les hypersurfaces correspondantes dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument; le cône C est en chaque point réduit à deux droites rectangulaires dont l'une coïncide avec l'une des tangentes principales. Le second exemple

est fourni par une hypersurface lieu de sphères (à deux dimensions) dépendant d'un paramètre; les hypersurfaces déformées dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

Les résultats très fragmentaires qui précèdent suffisent à montrer l'intérêt que présenterait une étude complète de la représentation conforme des hypersurfaces dans l'espace à quatre dimensions.

Si nous revenons aux complexes de droites, nous en déduisons des résultats analogues. En particulier on voit que les complexes de droites projectivement applicables (du premier ordre) sur un complexe linéaire dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. De même les complexes de droites lieux de congruences linéaires dépendant d'un paramètre admettent des déformés dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument. En dehors de ces complexes qui peuvent correspondre à des hypersurfaces réelles, citons le complexe des tangentes à une même surface; deux complexes de cette nature sont toujours projectivement applicables l'un sur l'autre, avec conservation des lignes asymptotiques des surfaces correspondantes.

CONJUGATE SYSTEMS OF CURVES R AND THEIR TRANSFORMATIONS

By LUTHER PFAHLER EISENHART

(PRINCETON.)

When the parametric curves on a surface S form a conjugate system, or net N, the cartesian coordinates, x, y, z, of N are solutions of an equation of Laplace, namely

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = \frac{\partial \log a}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{1}$$

which we call the *point equation* of N.

If θ_1 and θ_2 are two solutions of (1), and p and q are defined by

$$\theta_1 + p\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + q\frac{\partial\theta_1}{\partial v} = 0, \qquad \theta_2 + p\frac{\partial\theta_2}{\partial u} + q\frac{\partial\theta_2}{\partial v} = 0, \tag{2}$$

the equations

$$\bar{x} = x + p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \bar{y} = y + p\frac{\partial y}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \bar{z} = z + p\frac{\partial z}{\partial u} + q\frac{\partial z}{\partial v} \tag{3}$$

define a net $\overline{\mathrm{N}}$, whose point equation is

$$\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\log ap\,.\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\log bq\,.\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial v}. \tag{4}$$

From (3) it is seen that a point $\overline{\mathrm{M}}$ of $\overline{\mathrm{N}}$ lies in the tangent plane to N at the corresponding point M. We say that $\overline{\mathrm{N}}$ is a *derived net* of N, using the terminology of Guichard.

In general N is not a derived net of $\overline{\mathrm{N}}$. When it is, the points M and $\overline{\mathrm{M}}$ are the focal points of the congruence of line $\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}$, which is a W congruence, that is the

asymptotic lines correspond on the loci of M and $\overline{\mathrm{M}}$. Moreover, the parameters u and v can be chosen so that x, y and z are solutions also of the equation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=2\frac{\partial \log a}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+2\frac{\partial \log b}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{5}$$

as Tzitzeica has shown(1).

When the cartesian coordinates of a net N satisfy equations of the form (1) and (5), the tangents to the curves $v=$ const. and $u=$ const. of N form W congruences, and conversely. In this case we call N an R *net*, following Tzitzeica.

We show conversely that if N is an R net, and θ_1 and θ_2 are two solutions of (1) and

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=2\frac{\partial \log a}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+2\frac{\partial \log b}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta, \tag{6}$$

where c is a constant different from zero, equations (2) and (3) define an R net $\overline{\mathrm{N}}$ which we call a W *transform* of N. Equations (1) and (6) form a completely integrable system, that is any solution is expressible linearly in terms of four solutions. Hence we have theorem :

An R *net* N *admets* ∞^5 W *transforms for each value of the constant* c *in* (6).

These transformations admit a theorem of permutability, namely :

If $\mathrm{N}_i (i=1,2)$ *are* W *transforms of* N *by means of pairs of solutions of* (1) *and* (6) *for* $c=c_i$, *there can be found without quadratures an* R *net* $\overline{\mathrm{N}}_{12}$ *which is a* W *transform of* N_1 *and* N_2.

When h and l are any pair of solutions of the equations

$$\frac{\partial h}{\partial v}=(l-h)\frac{\partial \log a}{\partial v}, \qquad \frac{\partial l}{\partial u}=(h-l)\frac{\partial \log b}{\partial u}, \tag{7}$$

the equations

$$\frac{\partial x'}{\partial u}=h\frac{\partial x}{\partial u}, \ \frac{\partial x'}{\partial v}=l\frac{\partial x}{\partial v}; \ \frac{\partial y'}{\partial u}=h\frac{\partial y}{\partial u}, \ \frac{\partial y'}{\partial v}=l\frac{\partial y}{\partial v}; \ \frac{\partial z'}{\partial u}=h\frac{\partial z}{\partial u}, \ \frac{\partial z'}{\partial v}=l\frac{\partial z}{\partial v} \tag{8}$$

are consistent, and x, y and z are the cartesian coordinates of a net N′ parallel to N, and conversely.

If θ is any solution of (1) and θ' is defined by

$$\frac{\partial\theta'}{\partial u}=h\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\theta'}{\partial v}=l\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{9}$$

(1) *Comptes Rendus*, vol. 156 (1913), p. 666.

the equations

$$(10) \qquad x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'} x', \qquad y_1 = y - \frac{\theta}{\theta'} y', \qquad z_1 = z - \frac{\theta}{\theta'} z'$$

define a net N_1, such that the developables of the congruence G of lines joining corresponding points, M and M_1, of N and N_1, meet the surfaces on which N and N_1 lie in these nets. We say that N_1 is a T *transform* of N(1). The coordinates of N' are direction-parameters of G. Hence each net N' and a solution of (1) determine a T transform of N.

We have applied these general results to the determination of transformations T of an R net into R nets. If we put

$$x' = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} + \nu \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},$$

it is found that λ, μ, ν, h and l must satisfy a completely integrable system of equations of the first order. Moreover, we have

$$l - h = m\nu$$

where m is a constant. When such a parallel net is known, for each solution θ of (1) and (6) there is a corresponding solution θ' of (9) given without quadrature, and these functions determine an R net which is a T transform of N. From the foregoing results follows the theorem :

An R *net* N *admits* ∞^4 *parallel nets* N' *determining congruences* G *of transformations* T *of* N *into* R *nets*; *for each congruence* G *there are* ∞^3 *nets* N *determined by solutions* θ *of* (1) *and* (6).

Tranformations T admit a theorem of permutability similar to that for transformations W.

The transformations W and T of R nets are permutable. In fact, we have the theorem :

If $\overline{N}$ *is a* W *transform of an* R *net* N *by means of solutions* θ_1 *and* θ_2 *of* (1) *and* (6), *and* N_1 *is a* T *transform of* N *by means of a solution* θ_3 *of these equations, there can be found a net* $\overline{N}_1$ *which is a* W *transform of* N_1 *and a* T *transform of* $\overline{N}$.

---

(1) *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 18 (1917).

SUR LA CLASSIFICATION DES CONSTELLATIONS

Par M. CAMILLE JORDAN

(PARIS)

GÉNÉRALITÉS

Un système de n points $a, b, \ldots$ définit une *constellation* dont ils sont les *points fondamentaux*.

Les *droites fondamentales* sont celles qui les joignent deux à deux.

Les *plans de la constellation* sont ceux qui contiennent au moins trois points fondamentaux non en ligne droite. Soit P_n leur nombre.

Leurs intersections, en nombre D_n, sont les *droites de la constellation*. Parmi elles figurent les droites fondamentales. Nous appellerons les autres *droites accessoires*.

Les *sommets*, en nombre S_n, sont les points où passent trois plans au moins de la constellation formant un angle polyèdre. Les points fondamentaux rentrent dans cette catégorie. Les autres sont des *sommets accessoires*.

Les plans de la constellation partagent l'espace en cellules polyédriques convexes en nombre C_n. Les cellules extrêmes sont toutefois ouvertes vers l'infini.

Les sommets de ces polyèdres sont ceux de la constellation. Leurs arêtes, en nombre total A_n, sont les segments dans lesquels les droites de la constellation sont partagées par les plans qui les coupent. Leurs faces, en nombre total F_n, sont les polygones convexes formés dans chacun des plans de la constellation par les droites qu'il contient.

Au point de vue de l'*Analysis Situs* deux polyèdres convexes sont considérés comme pareils si leurs faces correspondantes, abstraction faite de leurs dimensions, ont le même nombre de côtés et sont assemblées de même.

Nous dirons donc que deux constellations sont du même type si les cellules qu'elles forment sont des polyèdres pareils, assemblés de la même manière. Une première condition pour qu'il en soit ainsi est que les nombres P_n, D_n, S_n, A_n, F_n soient les mêmes.

Il ne serait pas difficile de déterminer les valeurs qu'ont en général ces divers nombres lorsque les points fondamentaux sont arbitraires. Mais les chiffres trouvés sont susceptibles de réduction si la position relative de ces points est assujettie à quelque condition (plus de deux points sur une même droite ou plus de trois points dans un même plan, par exemple).

Supposons qu'on déplace infiniment peu les points fondamentaux (tout en respectant, s'il y a lieu, les conditions qui leur seraient imposées). Le type de la constellation sera en général conservé. Il ne pourra changer dans un déplacement continu de ces points que lorsque on traverse une situation particulière où le nombre des sommets subisse une nouvelle réduction. Elle pourra se produire de deux manières :

1° Des sommets d'abord différents, viennent à coïncider;

2° Un sommet accessoire s'éloigne à l'infini, les plans qui s'y croisaient devenant parallèles à une même droite.

Le nombre des types que l'on peut ainsi distinguer est tellement considérable dès que n surpasse 5 qu'une énumération complète ne semble guère possible. On peut toutefois les répartir en familles.

Cette classification repose sur la remarque que parmi les plans de la constellation on peut distinguer des *plans principaux*, caractérisés par la propriété suivante : ils laissent d'un même côté tous ceux des points fondamentaux qu'ils ne contiennent pas.

Pour établir leur existence, considérons un plan auxiliaire mobile, d'abord très éloigné. Transportons-le parallèlement à lui-même jusqu'au moment où il contiendra quelque point fondamental. S'il n'en contient qu'un a nous le ferons pivoter autour de ce point jusqu'à ce qu'il en contienne un autre b. S'il ne contient aucun point fondamental en dehors de la droite ab faisons-le tourner autour de cette droite jusqu'à ce qu'il contienne quelque autre point fondamental c. Le plan P ainsi obtenu appartiendra à la constellation et jouira évidemment de la propriété requise.

Parmi les droites fondamentales qu'il contient il en existe qui laissent d'un même côté tous ceux des points fondamentaux que P contient sans qu'elles-mêmes les contiennent. Soit mn l'une d'elles. Considérons un plan variable appliqué d'abord sur P. Faisons-le tourner autour de mn dans un sens tel qu'il continue à laisser du même côté les points qui ne sont pas sur mn; et continuons ce mouvement jusqu'à ce qu'il rencontre quelque autre point fondamental (s'il en existe en dehors de P). A ce moment ce sera un second plan principal rencontrant le premier suivant la droite fondamentale mn.

Poursuivant ainsi tant qu'il restera des arêtes à utiliser, on voit que (sauf le cas où tous les points fondamentaux sont dans un même plan) les plans principaux seront les faces d'un polyèdre évidemment convexe, ayant pour arêtes des droites fondamentales (*droites principales*) et pour sommets des points fondamentaux (*points*

principaux). Les autres points fondamentaux, s'il en existe, seront tous situés à son intérieur ou sur sa surface. Nous leur appliquerons l'épithète de *secondaires*.

Pour que deux constellations appartiennent au même type, il est évidemment nécessaire sinon suffisant, que les points principaux soient en même nombre et considérés isolément constituent des constellations de même type. De même pour les constellations partielles formées par les seuls points secondaires. On pourra d'ailleurs dans ces dernières constellations distinguer des points principaux du second ordre et des points secondaires. On poursuivra ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé la série des points fondamentaux, ou que ceux qui restent encore soient tous situés dans un même plan.

Les considérations qui précèdent, relatives aux constellations dans l'espace à trois dimensions, s'appliqueraient sans peine aux constellations dans un plan. Les plans de la constellation seraient remplacés par des droites, dont les points de rencontre seraient les sommets. Ceux-ci seraient les uns fondamentaux, les autres accessoires. Les cellules seraient remplacées par des polygones. On aurait des droites principales formant les côtés d'un polygone convexe dont les sommets seront principaux. Les autres points fondamentaux, s'il en existe, seraient tous intérieurs à ce polygone principal ou situés sur son périmètre; etc.

Il existe d'ailleurs un cas où le problème dans l'espace se ramène immédiatement au problème plan. C'est celui des constellations où sur les n points fondamentaux il y en a $n-1$, soit $a, b, c, \ldots$ situés dans un même plan, le dernier s étant en dehors. Les plans de la constellation autres que $abc\ldots$ passeront tous par s; leurs intersections avec le plan $abc\ldots$ seront les droites d'une constellation plane entre les $n-1$ points $a, b, c, \ldots$ dont le type définira complètement celui de la constellation des n points de l'espace.

On peut admettre que les points $a, b, c, \ldots$ étant posés sur la face supérieure d'un plan horizontal, s soit situé au-dessus de ce plan; car s'il était en dessous on n'aurait qu'à considérer, au lieu de la constellation proposée, sa symétrique par rapport à un point du plan horizontal, qui lui est superposable. On doit toutefois remarquer que la présence dans la figure d'un point s au-dessus du plan implique une distinction entre les deux sens dans lesquels peut s'effectuer une rotation autour de la verticale; de sorte qu'on ne devra pas considérer comme pareilles deux constellations planes qui ne le deviendraient que par retournement du plan.

Nous allons appliquer les considérations générales qui précèdent à quelques cas particuliers.

Constellations de cinq points.

Les cas suivants peuvent se présenter :

I. *Les cinq points sont dans un même plan.* — Il n'y a pas de polyèdre principal.

II. *Le polyèdre principal est un tétraèdre abcd.* — Le cinquième point s ne lui est pas extérieur. S'il lui est intérieur on aura quatre sommets accessoires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ intersections des droites as, bs, cs, ds avec les faces du tétraèdre respectivement opposées aux sommets a, b, c, d. Tous les sommets étant évidemmont distincts et à distance finie, on n'aura qu'un seul type.

Mais si s est sur une face du tétraèdre, un des sommets accessoires disparaît en se confondant avec lui.

S'il est sur une arête, tous les trois disparaissent en se confondant avec les points fondamentaux.

La présente hypothèse donne donc lieu à trois types.

III. *Le polyèdre principal est une pyramide quadrangulaire de sommet s et de base abcd.* — On est ramené à la considération de la constellation plane formée par les points $abcd$. Suivant que le quadrilatère $abcd$ sera quelconque, ou trapèze, ou parallélogramme, elle présentera l'un des aspects suivants.

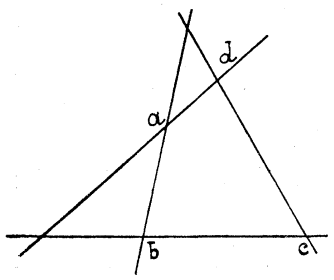


FIG. 1.

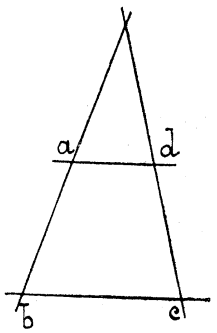


FIG. 2.

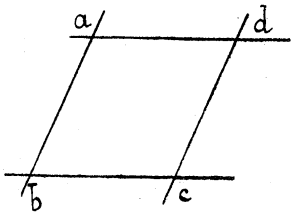


FIG. 3.

L'hypothèse III fournit ainsi trois types.

IV. *Le polyèdre principal a encore cinq sommets, mais n'est pas une pyramide.* — Il sera formé (*fig. 4*) par la juxtaposition de deux pyramides triangulaires ayant une

base commune abc, leurs sommets respectifs s, s' étant les deux derniers points fondamentaux.

L'ensemble étant convexe, la droite ss' rencontrera le plan abc en un point h situé à l'intérieur du triangle, lequel sera le point de rencontre commun aux quatre plans diagonaux abc, sas', sbs', scs'. C'est donc un sommet accessoire.

Le point de rencontre p des droites ah et bc en sera un autre où se croisent quatre plans $abc, sas', sbc, s'bc$. Il est situé à l'intérieur du segment bc.

Deux sommets analogues q, r se trouveront sur les segments ca, ab.

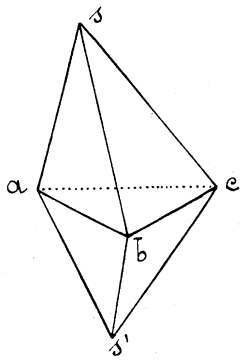


FIG. 4.

Considérons enfin une des arêtes passant par s ou par s', par exemple sa. Elle rencontrera la face opposée $s'bc$ en un point extérieur au segment sa. Mais il pourra suivant le cas être situé du même côté de s que le point a, ou du côté opposé, ou enfin être rejeté à l'infini. Suivant que l'une ou l'autre de ces circonstances se présente nous assignerons à cette arête le *caractère* $+, -$, ou zéro.

Nous pourrons déterminer un point analogue sur chacune des six arêtes et assigner à chacune un caractère.

Les sommets accessoires dont nous venons d'épuiser la liste sont évidemment distincts les uns des autres ainsi que des points fondamentaux. D'ailleurs les points h, p, q, r sont toujours à distance finie. Le type de la constellation ne dépendra donc que de la nature des caractères des arêtes.

Cherchons à déterminer parmi les combinaisons de caractères imaginables celles qui peuvent être réalisées.

A cet effet, prenons pour axes des coordonnées les trois arêtes sa, sb, sc. Soient l, m, n leurs longueurs respectives. Le plan abc aura pour équation

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$$

et les points a, b, c auront respectivement pour coordonnées

$$(l\,0\,0), \qquad (0\,m\,0), \qquad (0\,0\,n).$$

Soient $(\lambda\mu\nu)$ celles du sommet s'. Pour que le polyèdre soit convexe, il faut et il suffit qu'elles soient positives et satisfassent à l'inégalité

$$\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}>1.$$

Le caractère de l'arête $s'a$ n'est évidemment que le signe de la différence $\lambda-l$, ou, ce qui revient au même, du signe de la quantité $\frac{\lambda-l}{l}$ que nous pouvons désigner par A.

Ceux des arêtes $s'b, s'c$ seront de même les signes des quantités analogues

$$B=\frac{\mu-m}{m}, \qquad C=\frac{\nu-n}{n}.$$

Celui de l'arête sa sera le signe de l'abscisse du point où l'axe sa est rencontré par le plan $s'bc$.

Ce plan a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n & 1 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Posant $y=z=0$ et développant le déterminant, l'équation devient

$$(mn-n\mu-m\nu)x-mn\lambda=0$$

ou en remplaçant μ, ν par leurs valeurs $Bm+m$, $Cn+n$ et divisant par le facteur commun $-mn$.

$$(B+C+1)x+1=0.$$

Le caractère cherché sera donc le signe de la quantité $-(B+C+1)$ que nous désignerons par A'.

Ceux des arêtes sb, sc seront de même ceux des quantités

$$B'=-(C+A+1), \qquad C'=-(A+B+1).$$

D'ailleurs les conditions auxquelles λ, μ, ν étaient assujettis deviennent

$$(1) \qquad \begin{gathered} A+1>0, \qquad B+1>0, \qquad C+1>0, \\ A+B+C+2>0. \end{gathered}$$

On en déduit que les quantités

$$A' + B, \quad A' + C, \quad B' + C, \quad B' + A, \quad C' + B$$

sont toutes négatives. Donc si l'arête $s'a$ par exemple a un caractère positif ou nul, les deux arêtes sb, sc auront un caractère négatif.

L'axe des x pouvant être choisi à volonté parmi les trois arêtes issues de s, il est permis de supposer que A est au moins égal à B et à C. Mais ce premier choix fait, il faudra prendre pour axe des y celui qui donne au trièdre des axes la disposition classique.

Supposons donc d'abord que A, B, C soient tous positifs ou nuls; d'où A', B', C' négatifs. Le tableau des caractères aura l'une des formes suivantes :

$$(---++\,+), \qquad (---++\,0),$$
$$(---+\,0\,0), \qquad (---\,0\,0\,0).$$

D'ailleurs le système des conditions (1) sera toujours satisfait.

Si une seule des quantités B, C est négative, A', B', C' étant encore négatifs, on aura les nouveaux tableaux

$$(---++-),$$
$$(---+\,0-), \quad (---+-0), \quad (---00-)$$

et les relations (1) seront satisfaites pourvu que B soit > -1.

Si A est positif ou nul, B et C négatifs, B' et C' seront négatifs. Les relations (1) seront satisfaites si B et C sont > -1, ce qui n'empêchera pas d'en disposer de manière à rendre à volonté A' positif, nul ou négatif. On obtient ainsi les six tableaux suivants :

$$(---+--), \qquad (---\,0--),$$
$$(0--+--), \qquad (0--\,0--),$$
$$(+--\,0--), \qquad (+--+--).$$

Mais ils ne correspondent qu'à cinq types distincts; car les deux tableaux

$$(0--+--), \qquad (+--0--)$$

se changeraient l'un dans l'autre si l'on prenait pour axes coordonnés les arêtes issues de s'.

Supposons enfin A, B, C négatifs. S'ils sont assez petits en valeur absolue, A′, B′, C′ seront également négatifs; d'où le tableau

$$(------).$$

Pour d'autres valeurs de A, B, C, quelques-unes des quantités A′, B′, C′ pourraient cesser d'être négatives, mais les tableaux ainsi obtenus se changeraient dans les précédents en prenant s' pour origine au lieu de s.

Nous avons ainsi obtenu $4+4+5+1=14$ types distincts.

Constellations de six points.

Dans le cas général le nombre des plans de la constellation est 20; ils donnent lieu à trop de combinaisons pour que leur énumération semble abordable. Nous nous bornerons donc à traiter les trois cas particuliers où le nombre de ces plans se réduit à onze.

PREMIER CAS

Le polyèdre principal est un octaèdre à faces triangulaires. Les diagonales qui joignent les sommets opposés se rencontrent en un point O.

On a onze plans, à savoir ceux des faces, et trois plans diagonaux que nous prendrons pour plans coordonnés. Les sommets de l'octaèdre auront respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{lll}(a,0,0), & (0,b,0), & (0,0,c)\\ (-a',0,0), & (0,-b',0), & (0,0,-c'),\end{array}$$

a, b, c, a', b', c' étant positifs.

Chacune des droites qui joignent deux à deux ces points fondamentaux étant contenue dans l'un des plans diagonaux, chacun des sommets de la constellation sera situé dans l'un de ces plans.

Cherchons par exemple ceux qui se trouvent dans le plan Oxy. Ce seront les points de rencontre de ses intersections avec les autres plans.

Or la face de l'octaèdre qui passe par les points $(a00)$, $(0b0)$, $(00c)$ a pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

et les équations des autres faces seront données par des formules analogues où les quantités a, b, c ou quelques-unes seulement d'entre elles soient remplacées par $-a'$, $-b'$, $-c'$.

Faisant $z = 0$ dans ces équations, on voit que ces plans coupent le plan Oxy suivant les droites

$$(1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \frac{x}{-a'} + \frac{y}{-b'} = 1;$$

$$(2) \qquad \frac{x}{-a'} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{-b'} = 1.$$

Quant aux autres plans diagonaux, ils le coupent suivant les droites

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Ces six droites sont les côtés et les diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les points

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (-a', 0, 0), \quad (0, -b', 0).$$

En dehors des points fondamentaux elles se rencontrent en trois sommets accessoires, à savoir le point O où se croisent les diagonales, le point de rencontre P des deux côtés opposés (1) et celui Q des deux autres côtés (2).

Chacun des autres plans coordonnés contiendra de même, outre le point O, deux autres sommets accessoires P_1, Q_1 et P_2, Q_2, dont les coordonnées se déduisent de celles de P, Q par une permutation circulaire.

Les sommets ainsi déterminés sont évidemment distincts; mais chacun d'eux, sauf le point O, peut être rejeté à l'infini si les deux droites qui le déterminent sont parallèles.

Or posons

$$\frac{a'}{a} = \alpha, \qquad \frac{b'}{b} = \beta, \qquad \frac{c'}{c} = \gamma.$$

Pour que les deux droites (1) deviennent parallèles, il faudra qu'on ait $\alpha = \beta$; et les droites (2) le deviendront si $\alpha\beta = 1$.

Le type de la constellation dépendra donc des signes des six quantités

$$\alpha - \beta, \quad \beta - \gamma, \quad \gamma - \alpha, \quad \alpha\beta - 1, \quad \beta\gamma - 1, \quad \gamma\alpha - 1$$

que nous désignerons pour abréger par

$$A, B, C, L, M, N$$

et dont les signes seront les *caractères* de la constellation.

Entre les trois premiers de ces nombres existe la relation

$$A + B + C = 0.$$

Comme on peut choisir arbitrairement celui des axes qu'on appellera Ox, il est permis d'admettre que α est au moins égal à β et à γ.

Supposons en premier lieu qu'on ait $\alpha > \beta > \gamma$, A et B seront positifs, C négatif, et l'on aura les inégalités

$$M < L < N.$$

On peut y satisfaire en supposant :

M positif ou nul; L, N positifs.

M négatif; L négatif; N négatif, nul ou positif.

M négatif; L nul; N positif.

M négatif; L, N positifs.

Soit sept combinaisons possibles qu'on voit aisément être toutes réalisables.

Si $\alpha > \gamma > \beta$ on aura de même sept combinaisons, les polyèdres correspondants étant les symétriques des précédents.

Si $\alpha > \beta = \gamma$, A sera positif, B nul, C négatif, et l'on aura l'inégalité

$$M < L = N.$$

On peut y satisfaire en supposant

M positif ou nul; L = N positif

ou

M négatif; L = N négatif, nul ou positif.

Soit cinq combinaisons possibles.

Si $\alpha = \beta > \gamma$, A sera nul, B positif, C négatif, et

$$M = N < L,$$

d'où

M = N positif ou nul; L positif

ou

M = N négatif; L négatif, nul ou positif.

Soit cinq combinaisons possibles.

Enfin, si $\alpha = \beta = \gamma$, on aura $A = B = C = 0$, et $L = M = N$ pourra être négatif, nul ou positif

Le nombre total des types sera donc

$$7 + 7 + 5 + 5 + 3 = 27.$$

DEUXIÈME CAS

Le polyèdre principal est une pyramide tronquée.

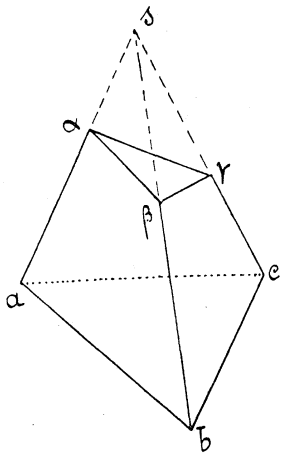


FIG. 5.

Les onze plans sont ceux des bases abc, $\alpha\beta\gamma$, les trois faces latérales et six plans diagonaux contenant chacune une arête de l'une des bases, telle que ab, et le sommet opposé γ.

Cherchons à déterminer les droites d'intersection de ces plans et les sommets où elles se rencontrent.

Considérons d'abord la face quadrangulaire $ab\alpha\beta$.

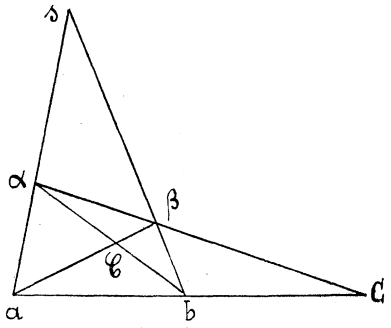


FIG. 6.

Elle est coupée par chacun des dix autres plans suivant un côté ou une diagonale du quadrilatère, et leurs points de rencontre autres que les points fondamentaux $ab\alpha\beta$ seront le sommet s de la pyramide; le point de concours $\mathcal{C}$ des diagonales; enfin celui des côtés ab, $\alpha\beta$ que nous désignerons par C.

La face contiguë $bc\beta\gamma$ contiendra de même trois sommets accessoires, à savoir s, le point de concours $\mathcal{A}$ des diagonales $b\gamma$, $c\beta$ et le point A de concours des droites bc, $\beta\gamma$.

La troisième face $ca\gamma\alpha$ contiendra de même, outre le point s, deux autres sommets accessoires $\mathcal{B}$, B analogues aux précédents.

Les points C, A, B étant contenus à la fois dans les plans abc et $\alpha\beta\gamma$ seront sur une même droite, intersection de ces deux plans.

Les droites d'intersection de la base abc avec les autres plans sont, outre les droites ab, bc, ca par chacune desquelles passent deux d'entre eux, les droites Aa, Bb, Cc; car le plan diagonal $a\beta\gamma$, par exemple, contient à la fois le point a et le point A, où la droite $\beta\gamma$ rencontre la base.

Les points de rencontre de ces droites deux à deux sont, outre les points fondamentaux a, b, c, le point de rencontre de Ab avec Cc; celui de Cc avec Aa; celui de Aa avec Bb; nous les appellerons l, m, n.

Les intersections de la face supérieure $\alpha\beta\gamma$ avec les autres plans seront de même, outre les droites CAB, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. Ces dernières se coupent deux à deux en trois points λ, μ, ν analogues à l, m, n.

Considérons enfin les plans diagonaux. Soit $ab\gamma$ l'un d'eux. Il passe par les points a, b, γ, par les points $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C qui sont respectivement situés sur les droites $b\gamma$, $a\gamma$, ab, enfin par les points λ, μ situés sur $C\gamma$.

Une permutation circulaire des lettres a, b, c; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; A, B, C; λ, μ, ν montre que le plan $bc\alpha$ passe par les points

$$b, c, \alpha, \mathcal{B}, \mathcal{C}, A, \mu, \nu$$

et le plan $ca\beta$ par les points

$$c, a, \beta, \mathcal{C}, \mathcal{A}, B, \nu, \lambda.$$

Échangeant enfin les lettres a, b, c, l, m, n avec les lettres grecques correspondantes, on voit que le plan $\alpha\beta c$ passe par les points

$$\alpha, \beta, c, \mathcal{A}, \mathcal{B}, C, l, m;$$

le plan $\beta\gamma a$ par les points

$$\beta, \gamma, a, \mathcal{B}, \mathcal{C}, A, m, n$$

et le plan $\gamma\alpha b$ par les points

$$\gamma,\ \alpha,\ b,\ \mathcal{C},\ \mathcal{A},\ \mathrm{B},\ n,\ l.$$

D'après cela, le plan $ab\gamma$ sera coupé par les cinq autres plans diagonaux suivant les droites ci-dessous :

Plan sécant.	Droite.
—	—
$bc\alpha$	$b\mathcal{B}\mu$
$ca\beta$	$a\mathcal{A}\lambda$
$\alpha\beta c$	$\mathrm{A}\mathcal{B}\mathrm{C}$
$\beta\gamma a$	$\gamma a\mathcal{B}$
$\gamma\alpha b$	$\gamma b\mathcal{A}$

Les points de rencontre de ces droites deux à deux sont les points a, b, γ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ déjà signalés et un dernier point p où se coupent les droites $b\mathcal{B}\mu$, $a\mathcal{A}\lambda$. Ce point commun aux trois plans $ab\gamma$, $bc\alpha$, $ca\beta$ sera intérieur au polyèdre, car les droites qui le déterminent sont les diagonales du quadrilatère $ab\mathcal{A}\mathcal{B}$ dont les côtés $a\mathcal{B}$, $b\mathcal{A}$ sont sur sa surface.

Permutant les lettres abc avec les lettres grecques $\alpha\beta\gamma$, on voit que les trois plans $\alpha\beta c$, $\beta\gamma a$, $\gamma\alpha b$ se couperont en un dernier sommet accessoire π intérieur au polyèdre. Il sera différent de p, car s'il se confondait avec lui, ce serait un point de concours pour les six plans diagonaux. Or les trois plans $ab\gamma$, $bc\alpha$, $\beta\gamma a$ concourent au point $\mathcal{B}$, lequel est sur la surface du polyèdre, et par suite distinct de p.

Les points fondamentaux a, b, c, α, β, γ et les sommets accessoires s, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, A, B, C, l, m, n, λ, μ, ν, p, π sont donc distincts. Mais quelques-uns des sommets A, B, C, l, m, n, λ, μ, ν peuvent être rejetés à l'infini. Il en est de même de s, si le tronc de pyramide dégénère en tronc de prisme.

Supposons d'abord dans la discussion que les bases abc, $\alpha\beta\gamma$ n'aient pas de côté parallèle. Les points A, B, C seront à distance finie. La droite ABC ne traverse pas le triangle abc et découpe la partie du plan qui lui est extérieure en diverses régions, dont une seule finie sera un triangle ayant avec abc un sommet commun. Nous pouvons admettre que ce sommet soit b.

La position relative des points a, b, c, A, C sera celle indiquée dans la figure ci-jointe.

Mais le point B où AC et ac se rencontrent au lieu d'être situé comme il est indiqué à la droite du point c pourrait être à la gauche du point a. De là deux cas à distinguer. Considérons d'abord le premier.

Le tronc de pyramide est complètement déterminé par la connaissance des points a, c, α, A, B, C, γ; car le point b, dernier sommet de la base, sera donné par l'intersection des droites Ac et Ca; le sommet s par celle des droites Aα, Cγ; enfin le point β par celle de sb avec αC.

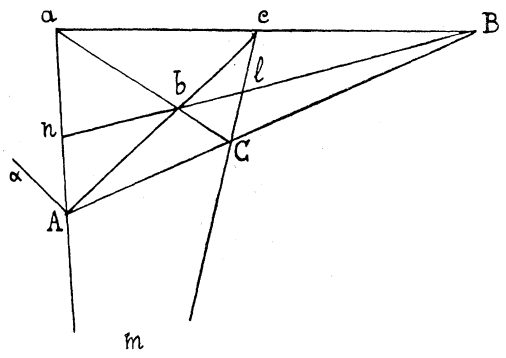


FIG. 7.

Voyons comment varie la forme de ce polyèdre lorsque les points a, c, α, A, B restant fixes, les points C et γ se déplacent sur les segments BA et Bα.

Quelle que soit leur position, la figure montre que les points l, n intersections de Bb avec Cc et Aa sont à distance finie. De même pour les points λ, ν.

Nous assignerons au point m, intersection de Aa et de Cc, le caractère + si les segments Aa, Am ont le même sens; le caractère — s'ils sont de sens contraire; le caractère zéro si Aa et Cc sont parallèles.

Nous assignerons au point μ, intersection de Aα avec Cγ, un caractère analogue.

Enfin s étant situé au-dessus du plan abc aura un caractère en général positif. Il sera nul si les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ étant parallèles la pyramide dégénère en un prisme.

Le type de la constellation dépendra de ces trois caractères.

Pour déterminer les combinaisons possibles, menons par les points c et C (*fig. 8*) des plans P, Q parallèles au plan aAα, lesquels coupent respectivement Bα aux points δ, ε.

Supposons d'abord que, comme la figure l'indique, le plan Q, et par suite C, ne soit pas contenu dans l'intervalle entre les deux plans aAα et P. Le caractère de m sera positif. Ceux de μ et de s le seront également si γ se meut sur le segment $\alpha\delta$. S'il arrive en δ le caractère de s s'annulera; et comme il ne doit pas devenir négatif, γ ne pourra aller plus loin.

Nous obtenons donc deux combinaisons de caractères

$$(+\,+\,+), \qquad (+\,+\,0).$$

Si les plans P et Q coïncident, le caractère de m sera nul et l'on aura deux nouvelles combinaisons

$$(0\,+\,+), \qquad (0\,0\,0),$$

la dernière correspondant au cas limite où $\gamma = \delta = \varepsilon$.

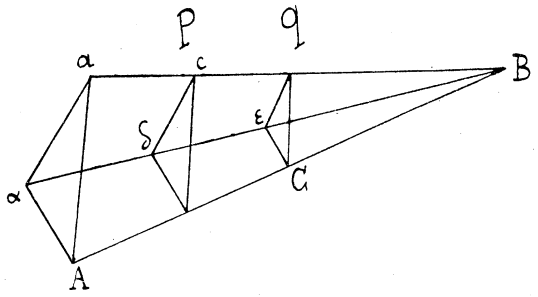


FIG. 8.

Enfin si Q est situé entre les plans $a\mathrm{A}\alpha$ et P le caractère de m sera négatif et le point ε étant entre α et δ on aura quatre combinaisons

$(-\,+\,+)$ si γ est compris entre α et ε,
$(-\,0\,+)$ si $\gamma = \varepsilon$,
$(-\,-\,+)$ si γ est compris entre ε et δ,
$(-\,-\,0)$ si $\gamma = \delta$.

L'hypothèse que B est à la droite du point c nous a donc fourni huit types.

Nous en obtiendrons un pareil nombre en supposant que B soit à la gauche de a. Dans cette nouvelle hypothèse les points C, γ ne devront plus se mouvoir sur les segments BA et Bα, mais sur leurs prolongements. Cette circonstance indifférente n'influe pas sur le raisonnement qui peut être répété sans changement.

Supposons maintenant que les droites $ac, \alpha\gamma$ soient parallèles. La droite CA leur sera parallèle et pourra avoir par rapport au triangle abc les deux positions indiquées ci-contre (*fig. 9 et 10*).

Dans l'un et l'autre cas, les points B, l, n, λ, μ seront rejetés à l'infini et il ne reste à discuter que la position des points m, μ, s.

Dans le premier cas, les points variables C, γ devront se mouvoir sur des parallèles à ac menées par les points A, α. Menons encore les plans auxiliaires P, Q. Une discussion toute semblable aux précédentes donnera encore huit types.

Dans le second cas, le point m, intersection de Aa et de Cc sera manifestement à distance finie. De même pour μ. Mais s peut être à distance finie ou à l'infini; d'où deux types.

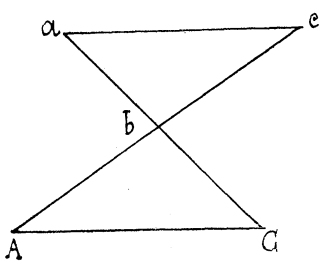


FIG. 9.

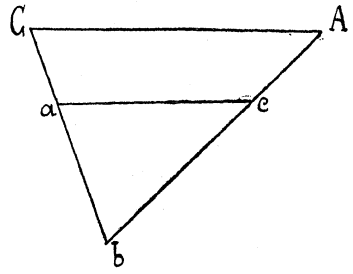


FIG. 10.

Enfin, si les faces abc, $\alpha\beta\gamma$ sont parallèles, les points A, B, C, l, m, n, λ, μ, ν disparaissent tous; et s peut être à distance finie ou à l'infini, ce qui donne deux derniers types.

Le nombre total des types possibles est donc

$$8 + 8 + 8 + 2 + 2 = 28.$$

TROISIÈME CAS

Cinq des points fondamentaux sont dans un même plan.

La question se ramène comme on l'a vu à l'étude de la constellation plane formée par ces cinq points.

Nous aurons par rapport à celle-ci à examiner successivement diverses hypothèses.

Première hypothèse. — Les cinq points sont en ligne droite. — On n'a qu'un type.

Deuxième hypothèse. — Le polygone principal est un triangle abc. — La droite qui joint les deux autres points fondamentaux de peut :

1° Se confondre avec un des côtés du triangle, tel que ab.

2° Passer par un sommet tel que a. Dans ce cas, l'un des points de sera certainement intérieur au triangle; mais l'autre peut être intérieur ou situé sur bc.

3° Enfin, dans le cas général, la droite de coupera (*fig. 11*) deux des côtés du triangle, tels que ab et ac en deux points δ, ε et le troisième côté en un point α extérieur au triangle.

Le point d peut être intérieur ou se confondre avec δ.

Le point c être intérieur ou se confondre avec ε.

Le point α être à droite de c, à l'infini, ou à gauche de b.

D'où douze combinaisons possibles.

L'hypothèse présente donne donc naissance à quinze types distincts.

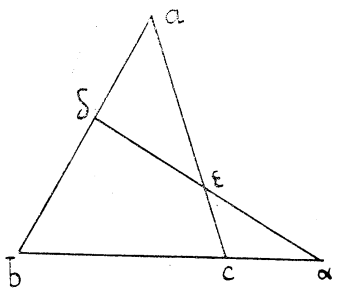


FIG. 11.

Troisième hypothèse. — Le polygone principal est un quadrilatère abcd. — Ses côtés et diagonales forment une configuration k de six droites. Celle-ci une fois donnée engendrera des constellations différentes suivant la position que prendra le cinquième point e à l'intérieur ou sur les côtés du quadrilatère. Mais le type de la constellation ne pourra changer que si l'une des droites qui joignent e aux sommets a, b, c, d devient parallèle à l'une des droites de k, ou se confond avec elle, ou enfin passe par un de leurs points de rencontre. Dans le premier cas, un sommet de la constellation est rejeté à l'infini; dans les deux autres, plusieurs sommets se réunissent en un seul.

Si donc nous formons une nouvelle configuration K en ajoutant aux droites de k les parallèles qu'on peut leur mener par les points a, b, c, d nous obtiendrons autant de types de constellations que le point e peut prendre de positions différentes par rapport aux droites de K sans sortir du quadrilatère $abcd$.

Nous aurons donc à rechercher tout d'abord, parmi les parallèles à ajouter aux droites de k, quelles sont celles qui pénètrent dans le quadrilatère. Ici, trois cas seront à distinguer :

1° *Le quadrilatère abcd n'a pas de côtés parallèles.* — Prenons pour origine des coordonnées le sommet a commun aux deux triangles formés par les prolongements des côtés opposés (*fig. 1*) et pour axes les côtés ab et ad. Le type d'une constellation ne changeant pas quand on réduit toutes les ordonnées dans le même rapport, nous pourrons supposer ces deux côtés égaux à l'unité. Soient λ, μ les coordonnées du sommet c. On aura nécessairement

$$\lambda > 1, \qquad \mu > 1.$$

Les côtés et diagonales auront les équations suivantes :

$$\begin{aligned} ab &\quad x = 0, \\ bc &\quad (\lambda - 1)y = \mu(x - 1), \\ cd &\quad (\mu - 1)x = \lambda(y - 1), \\ da &\quad y = 0, \\ ac &\quad \lambda y = \mu x, \\ bd &\quad x + y = 0. \end{aligned}$$

Parmi les parallèles à ces droites issues des sommets les seules qui pénètrent dans le quadrilatère sont :

La droite $x = 1$ issue de b.
La droite $y = 1$ issue de d.
La droite $(\lambda - 1)y = \mu x$ issue de a.
La droite $(\mu - 1)x = \lambda y$ issue de a.

Nous les désignerons respectivement par B, D, A_1, A_2.

La droite B rencontre A_2, ac, D, A_1, cd aux points dont les ordonnées sont respectivement

$$\frac{\mu - 1}{\lambda}, \quad \frac{\mu}{\lambda}, \quad 1, \quad \frac{\mu}{\lambda - 1}, \quad \frac{\lambda + \mu - 1}{\lambda}.$$

Tous ces nombres sont positifs et l'ordre de leurs grandeurs relatives dépendra des signes des quantités

$$1 - \frac{\mu}{\lambda}, \qquad \frac{\lambda + \mu - 1}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda - 1}$$

ou en chassant les dénominateurs, du signe des quantités

$$\lambda - \mu, \qquad (\lambda - 1)^2 - \mu.$$

De même l'ordre dans lequel se succèdent les intersections de D avec les autres droites dépendra des signes de

$$\mu - \lambda, \qquad (\mu - 1)^2 - \lambda.$$

La configuration formée dans l'intérieur du quadrilatère dépendra donc uniquement des signes des trois quantités

$$\lambda - \mu, \qquad (\lambda - 1)^2 - \mu, \qquad (\mu - 1)^2 - \lambda.$$

Celles-ci s'annulent toutes si l'on prend $\lambda = \mu =$ la racine > 1 de l'équation

$$(\lambda - 1)^3 - \lambda = 0.$$

Dans ce cas (*fig. 12*) l'intérieur du polygone est divisé en 14 régions et le cin-

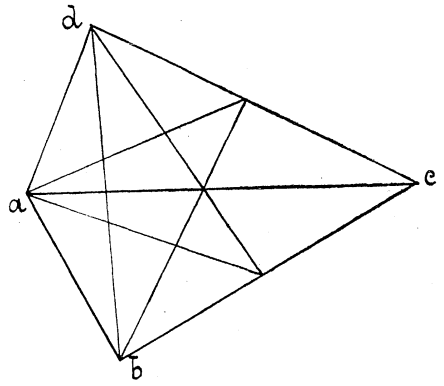


FIG. 12.

quième point fondamental pourra être situé soit à l'intérieur de l'une d'elles, soit sur l'un quelconque des 25 segments qui les bordent, soit enfin en un de leurs 8 points de croisement (autres que a, b, c, d). Le nombre des types qui en résulte est donc

$$14 + 25 + 8 = 47.$$

On en obtiendra de nouveaux si l'on fait varier λ et μ de manière à ce que les droites que nous avons rendues concourantes par une hypothèse particulière cessent de l'être.

Supposons en effet $\lambda - \mu$ positif. Les droites B, D qui se croisaient sur la diagonale ac formeront avec elle un triangle T situé au-dessous de ac. Le point e pourra être placé à son intérieur ou sur l'un de ses trois côtés ou sur l'un de ses sommets. Soit 7 positions différentes par rapport aux droites de K dont nous n'avions pas l'équivalent lorsque T se réduisait à un point.

Si $\lambda - \mu$ était négatif, le triangle T étant au-dessus de ac, on aurait encore 7 configurations nouvelles, distinctes des précédentes.

Si $(\lambda - 1)^2 - \mu$ n'est pas nul, les droites B, A_1 ne concourront plus sur cd, mais formeront un triangle T_1 qui suivant le signe de $(\lambda - 1)^2 - \mu$ sera intérieur ou extérieur au quadrilatère. Dans le premier cas, il donnera 7 types nouveaux; mais dans

le cas contraire, il n'en donnera que 3, car e, étant astreint à ne pas sortir du quadrilatère, ne pourra être placé que sur le côté du triangle par lequel il se rattache au quadrilatère. Or, il peut être situé à l'intérieur de ce côté ou à l'une de ses deux extrémités.

Si $(\mu - 1)^2 - \lambda$ n'est pas nul, on aura de même $7 + 3 = 10$ types nouveaux.

Le nombre total des types pour l'hypothèse actuelle (polygone principal quadrilatère sans côté parallèle) est donc

$$47 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 81.$$

2° *Le polygone abcd est un trapèze.*

Par les points a, b, c, d menons des parallèles aux côtés et aux diagonales du trapèze.

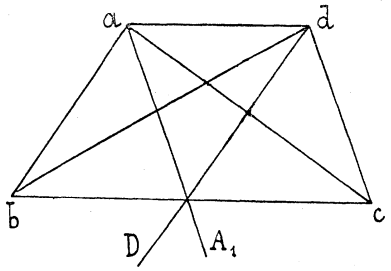


FIG. 13.

Les seules qui pénètrent dans le quadrilatère sont les droites D et A_2. Elles forment avec bc un triangle T qui peut être intérieur ou extérieur au trapèze, ou disparaître (si $bd = 2ac$). Dans ce dernier cas, qui est celui de la figure, l'intérieur du trapèze sera divisé en 8 régions, bordées par 15 segments, dont les points de concours autres que a, b, c, d sont au nombre de quatre, ce qui donne 27 types. Il faut en ajouter 7 si le triangle T reparaît à l'intérieur du trapèze, et 3 s'il reparaît à l'extérieur.

Le nombre total des types pour un trapèze est donc 37.

TROISIÈME CAS. — *Le quadrilatère est un parallélogramme.*

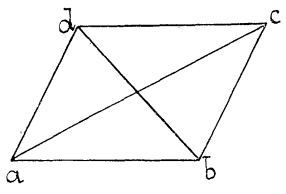


FIG. 14.

Ses diagonales partagent l'intérieur en quatre triangles qui jouent le même rôle dans la configuration k.

On peut donc choisir à volonté l'un d'eux pour y situer le point l. Il pourra être intérieur au triangle ou sur l'un de ses trois côtés (dont le rôle est différent), ou au point de concours des diagonales. On a ainsi 5 types distincts.

L'hypothèse 3 (quadrilatère principal) donne donc en tout

$$81 + 37 + 5 = 123 \text{ types.}$$

Quatrième hypothèse. — *Le polygone principal est un pentagone.* — Donnons à ses sommets les numéros 0, 1, 2, 3, 4, mod 5 dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour du pentagone, mais en nous réservant de choisir à notre convenance celui auquel nous attribuerons l'indice zéro.

Soit $\hat{m}$ (*fig. 15*) l'angle extérieur formé au point m par le côté $(m, m+1)$ avec le prolongement du côté précédent $(m-1, m)$; et soit α_m la somme des deux angles consécutifs $\hat{m}$, $\widehat{m+1}$.

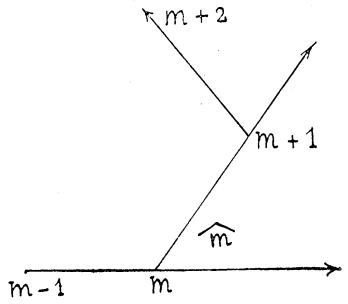


Fig. 15.

Suivant que α_m est $< \pi$, égal à π ou $> \pi$, le point d'intersection de la demi-droite $(m-1, m)$, avec le côté $(m+1, m+2)$ qui le suit de deux rangs, succédera à m, sera à l'infini ou précédera $m-1$.

On a d'ailleurs la relation

$$\hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 2\pi,$$

d'où cette conséquence que $\alpha_m + \alpha_n < 2\pi$ si les deux nombres m, n ne sont pas consécutifs.

Si donc parmi les nombres α_m il en est qui ne soient pas $< \pi$, il n'y en aura qu'un seul ou tout au plus deux qui seront consécutifs, et l'on pourra choisir les indices de manière que le premier d'entre eux soit α_0. Nous aurons donc à discuter successivement les trois cas suivants :

1er cas : $\alpha_0 > \pi$, $\alpha_4 < \pi$;

2^{e} cas : $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_4 < \pi$;

3^{e} cas : tous les α sont $< \pi$.

PREMIER CAS. — $\alpha_0 > \pi$, $\alpha_4 < \pi$.

Les points 4, 0, 1 étant donnés, achevons la construction du polygone conformément aux conditions ci-dessus.

La condition $\alpha_4 > \pi$ montre que le côté initial 4 0 doit être coupé par le côté 1 2 en un point p situé à la gauche du point 4. Ce point étant choisi à volonté, il restera à situer le point 2 sur le segment p 1 (*fig. 16*).

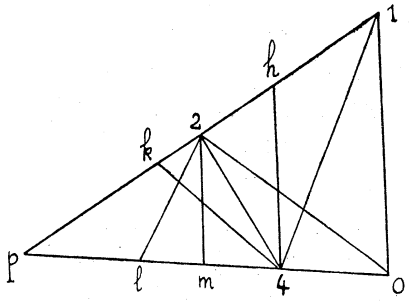


FIG. 16.

Cela fait, on connaîtra le champ dans lequel le point 3 pourra se mouvoir.

Il faudra, pour que le pentagone formé soit convexe, que 3 soit intérieur au triangle 2 4 p (périmètre exclu). D'autre part, la condition $\alpha_4 < \pi$ exige qu'il soit à gauche de la droite 4 h parallèle à 0 1.

Le point 2 peut avoir été placé soit sur le segment ph, soit en h, soit sur le segment 1 h; les trois hypothèses devront être étudiées séparément, car elles fourniront des types essentiellement distincts; suivant celle qui sera réalisée, la diagonale 2 4 rencontrera 0 1 au-dessous du point O, à l'infini, ou au-dessus du point 1.

Si 2 est sur le segment ph (comme dans la *fig. 16*), le point 3 pourra se mouvoir dans tout le triangle 2 4 p. Celles des lignes de K qui le traversent sont 4 k parallèle à 2 0, 2 l parallèle à 1 4, 2 m parallèle à 0 1. Elles partagent le triangle en 6 régions, bordées par 7 segments (ceux du périmètre étant exclus), lesquels se croisent en 2 points; ce qui donne naissance à $6 + 7 + 2 = 15$ types.

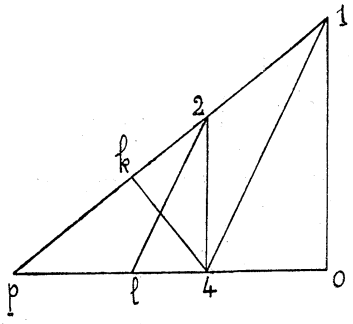


FIG. 17.

Si 2 coïncide avec h (*fig. 17*), le triangle 2 4 p qui coïncide avec h 4 p n'est

plus traversé que par $2l$ et $4k$. On a 4 régions, 4 segments, 1 point de croisement; donc 9 types.

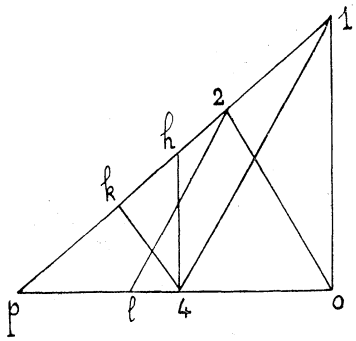


FIG. 18.

Enfin, si 2 est sur le segment $h1$ (*fig. 18*), le point 3 ne pourra se mouvoir que dans le triangle $4hp$, qui sera traversé par les deux lignes $4k$, $2l$. Elles déterminent encore 4 régions, 4 segments, 1 point de concours et 9 types.

Le cas $\alpha_0 > \pi$, $\alpha_4 < \pi$ nous a donc donné en tout $15 + 9 + 9 = 33$ types.

DEUXIÈME CAS. — $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_4 < \pi$.

Ce cas ne diffère du précédent qu'en ce que le point p est rejeté à l'infini, circonstance indifférente au raisonnement, qui pourra être répété sans changement et fournira encore 33 types.

TROISIÈME CAS. — *Tous les* α *sont* $< \pi$.

Considérons l'un des côtés du pentagone, 01 par exemple. Le côté 23 qui lui succède de deux rangs le rencontrera en un point p situé à droite du point 1; le côté 34 qui le précède de deux rangs le coupera au contraire en un point q situé à gauche du point 0.

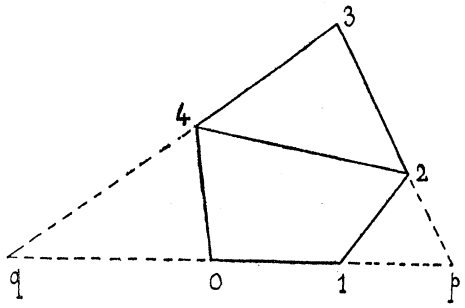


FIG. 19.

Quant à la diagonale 24, son point de rencontre avec 01 sera à la droite de p, ou à l'infini, ou à la gauche de q. Suivant celui de ces trois cas qui sera réalisé, nous assignerons au côté 01 le caractère $+$, 0 ou $-$.

On peut assigner un caractère analogue à chacun des cinq côtés. L'ensemble de ces caractères suffit à déterminer le type de la constellation; car leur connaissance précise l'ordre dans lequel se succèdent sur chaque côté du pentagone ses intersections avec les autres droites de la constellation; et les intersections mutuelles des diagonales, qui resteraient à considérer, sont toutes situées à l'intérieur du pentagone, et leur ordre de succession est invariable.

On peut concevoir 3^5 combinaisons de caractères. Mais toutes ne sont pas réalisables. Nous allons montrer en effet qu'un pentagone où tous les caractères ne sont pas nuls en présente nécessairement de positifs et de négatifs.

Si tous les caractères non nuls étaient négatifs, ils seraient positifs dans le pentagone symétrique. Il suffira donc d'établir qu'il y a contradiction à supposer l'existence d'un pentagone sans caractère négatif, mais où l'un des côtés, 4 o par exemple, ait un caractère positif.

D'après cette supposition, chaque côté $(m-1, m)$ sera rencontré par la diagonale $(m+1, m+3)$ en un point p_m situé sur le prolongement dudit côté ou à l'infini. En particulier, le point p_0 sera à distance finie.

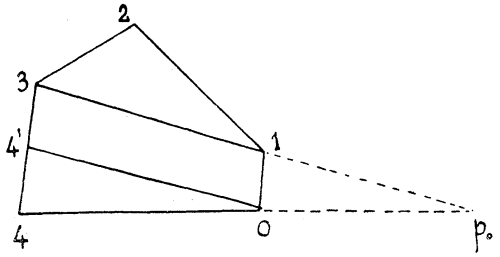


FIG. 20.

Par le point o menons une parallèle à 1 3 laquelle coupe le côté 3 4 en un point 4' et cherchons les caractères des côtés du nouveau pentagone o 1 2 3 4'.

Celui du côté 4'o est nul.

Ceux des côtés 1 2, 3 4 seront les mêmes que dans le polygone primitif o 1 2 3 4.

Celui du côté o 1 sera positif; car le point p_1 où il rencontre la diagonale 2 4 étant situé sur le prolongement de o 1 (ou à l'infini), le point p'_1 où il sera rencontré par la nouvelle diagonale 2 4' sera encore sur le prolongement de o 1 et sûrement à distance finie.

On voit de même que le caractère du côté 2 3 sera positif.

Ainsi de l'existence supposée du pentagone o 1 2 3 4 où le caractère du premier côté 4 o était positif et les autres non négatifs, on déduit celle d'un autre pentagone où le premier caractère est nul, le second et le quatrième positifs, le troisième et le cinquième n'étant pas altérés.

Par une opération analogue on obtiendra un troisième pentagone où le premier

caractère restant nul, le second le deviendra, le quatrième restant positif, le troisième et le cinquième le devenant s'ils ne l'étaient déjà.

Il reste donc à démontrer l'impossibilité d'un pentagone 01234 où 40 et 01 aient des caractères nuls, les autres caractères étant positifs.

Prenant 01 pour unité de longueur, soient a la longueur du côté 40; b, c celles des diagonales 13, 24 respectivement parallèles à 40 et à 01.

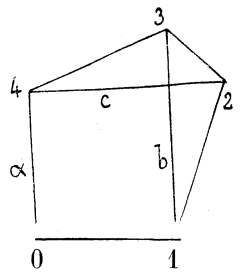


FIG. 21.

Prenant pour axes coordonnés 40 et 01 (*fig. 21*) ces données détermineront les coordonnées des divers sommets et les paramètres directeurs des côtés et des diagonales.

Ceux des côtés 12, 23, 34 seront :

$$\frac{a}{c-1}, \qquad -\frac{b-a}{c-1}, \qquad b-a.$$

Ceux des diagonales correspondantes 03, 14, 20 seront :

$$b, \qquad -a, \qquad \frac{a}{c}$$

et les caractères de ces côtés seront les signes des différences

$$\Delta_2 = \frac{a}{c-1} - b, \qquad \Delta_3 = a - \frac{b-a}{c-1}, \qquad \Delta_4 = b - a - \frac{a}{c}.$$

Or elles sont liées par la relation

$$(c-1)(\Delta_2 + \Delta_3) + c\Delta_4 = 0,$$

où c et $c-1$ sont positifs. Elles ne peuvent donc être toutes positives.

On devra donc rejeter comme irréalisables les combinaisons suivantes de caractères :

Un positif, quatre nuls.....	5	combinaisons
Deux positifs, trois nuls.....	10	—
Trois positifs, deux nuls.....	10	—
Quatre positifs, un nul.....	5	—
Cinq positifs.....	1	—
Total.....	31	—

et 31 autres combinaisons contenant des caractères négatifs sans caractères positifs.

Toutes les combinaisons restantes, en nombre $3^5 - 2.31 = 181$ sont admissibles.

En effet, la combinaison (ooooo) est réalisée par un pentagone régulier (inscrit dans un cercle de rayon 1), et toutes les autres pourront s'obtenir en déplaçant légèrement ses sommets sur le cercle circonscrit.

Car si le sommet m par exemple se déplace sur le cercle d'un petit arc $2\alpha_m$ les azimuts des deux côtés et des deux diagonales qui y passent seront accrus de α_m, les autres côtés ou diagonales n'ayant pas changé.

Faisons cette opération sur chacun des cinq sommets. Les azimuts des côtés successifs 01, 12, ..., 40 auront crû respectivement de

$$\alpha_0 + \alpha_1, \qquad \alpha_1 + \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_4 + \alpha_0$$

et ceux des diagonales 23, 34, ..., 12 de

$$\alpha_2 + \alpha_3, \qquad \alpha_3 + \alpha_4, \ \ldots, \ \alpha_1 + \alpha_2.$$

Les caractères du nouveau polygone seront les signes des différences

$$\Delta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \ \ldots, \ \Delta_5 = \alpha_4 + \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2,$$

lesquelles satisfont à la condition

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 = 0.$$

On pourra néanmoins choisir les arbitraires α de telle sorte que quatre des différences ci-dessus prennent des valeurs arbitraires, et si parmi ces valeurs il en est de positives et de négatives on peut disposer de leur grandeur de telle sorte que leur somme $-\Delta_5$ soit à volonté positive, nulle ou négative.

On doit toutefois remarquer qu'on peut choisir à volonté parmi les cinq sommets du pentagone celui auquel on assignera le chiffre o. Deux combinaisons de caractères correspondront donc au même type si elles se déduisent l'une de l'autre par une permutation circulaire, ce qui réduit le nombre des types distincts à

$$\frac{180}{5} + 1 = 37.$$

L'hypothèse d'un pentagone principal donne donc en tout

$$33 + 33 + 37 = 103 \text{ types.}$$

Récapitulant tout ce qui précède on aura l'énumération suivante :

Tous les points en ligne droite	1	type
Triangle principal	15	—
Quadrilatère principal	123	—
Pentagone principal	103	—
Total	242	types.

SUR LES

PROPRIÉTÉS DE LA SPHÈRE QUI TOUCHE QUATRE PLANS TANGENTS

CONSÉCUTIFS D'UNE SURFACE DÉVELOPPABLE

PAR B. HOSTINSKY

(PRAGUE)

[1] Soit A un point ordinaire d'une courbe gauche, et M_1, M_2, M_3, M_4 quatre autres points sur la courbe, très voisins de A. La sphère qui passe par ces quatre points admet une figure limite, lorsque tous ces points se confondent avec A; il est connu qu'on obtient ainsi la sphère osculatrice ordinaire.

Considérons maintenant quatre plans osculateurs P_1, P_2, P_3, P_4 de la courbe très voisins au plan osculateur P en A. Il y a huit sphères distinctes qui touchent ces quatre plans. Lorsque ces quatre plans se confondent avec P, une seule des huit sphères admet une figure limite bien déterminée dont le rayon est en général fini et différent de zéro. J'ai démontré ce résultat dans un travail qui a paru dans les Mémoires de l'Académie Tchèque (Rozpravy) à Prague en 1907; plus tard, j'ai publié un Mémoire plus développé *Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6e série, t. V, 1909). Le même résultat a été trouvé par M. A. Ranum (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XVII, 1910), qui a publié un intéressant travail sur ce sujet (*The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1915).

J'appellerai, dans ce qui suit, la sphère limite en question *sphère osculatrice de seconde espèce* de la courbe gauche donnée.

[2] Rapportons la courbe au trièdre principal en A. Ax sera la tangente, Ay la normale principale et Az la binormale. Le centre de la sphère osculatrice ordinaire qui se trouve à l'intersection de trois plans normaux consécutifs aura, dans ce système, les coordonnées

$$0, \qquad R, \qquad -T\frac{dR}{ds};$$

R et T désignent le rayon de courbure et le rayon de torsion au point A.

Le centre de la sphère osculatrice de seconde espèce se trouve à l'intersection de trois plans rectifiants consécutifs, les coordonnées de ce point seront

$$T : R\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{R}\right), \qquad 0, \qquad -T^2 : R^2\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{R}\right).$$

[**3**] La condition pour qu'une courbe soit sphérique peut être obtenue en exprimant que la sphère osculatrice ordinaire est immobile dans l'espace; on arrive ainsi à l'équation connue

$$R + T\frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) = 0$$

qui doit être vérifiée en tout point de la courbe.

Cherchons, d'une manière analogue, à exprimer la condition pour que tous les plans osculateurs d'une courbe gauche soient tangents à une même sphère. En d'autres termes, il faut exprimer la condition que la sphère osculatrice de seconde espèce soit immobile dans l'espace. En employant, par exemple, la méthode cinématique de Darboux, on trouve l'équation

$$\frac{d}{ds}\left[T : R\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{R}\right)\right] = -1$$

qui exprime la condition cherchée.

[**4**] Soit Γ une courbe gauche donnée dont l'arc, compté d'une origine fixe, sera désigné par la lettre t. Décrivons, autour de chaque point de Γ comme centre, une sphère de rayon r; r est une fonction de t. Comment faut-il choisir r en fonction de t, pour que les sphères ainsi construites soient des sphères osculatrices ordinaires d'une autre courbe C? (Problème de Jamet). E. Cesàro a donné, dans ses *Lezioni di geometria intrinseca*, la solution suivante : Déformons la courbe Γ, sans en altérer la courbure, de telle manière qu'elle devienne plane. Dans le plan de cette nouvelle courbe Γ_1, choisissons un point arbitraire S et construisons toutes les sphères passant par S dont les centres sont situés sur Γ_1. Opérons maintenant la déformation inverse, chaque sphère étant invariablement liée à son centre sur la courbe; lorsque Γ_1 reprend la forme primitive Γ, on obtient la famille de sphères cherchée.

Passons au problème suivant qui est analogue à celui de Jamet : Soit Γ une courbe donnée dont l'arc sera désigné par la lettre t. Décrivons, autour de chaque point de Γ comme centre, une sphère de rayon r; r est une fonction de t. Comment

faut-il choisir r en fonction de t, pour que toutes les sphères ainsi construites soient des sphères osculatrices de seconde espèce d'une autre courbe C? Désignons par m la distance du point A de la courbe C au centre de la sphère osculatrice de seconde espèce, et par σ l'angle que fait la droite rectifiante de C avec la tangente en A; on a, d'après une formule connue,

$$tg\sigma = -\mathrm{T} : \mathrm{R}.$$

Désignons par s l'arc sur la courbe C, limité par un point fixe et par le point A. Les quantités

$$u = s + m\cos\sigma, \qquad v = m\sin\sigma$$

peuvent être regardées comme coordonnées curvilignes sur la surface rectifiante (surface développable engendrée par le plan rectifiant Axz). On trouve par un calcul facile que le carré de l'élément linéaire sur la surface rectifiante est égal à

$$du^2 + dv^2,$$

d'où résulte la conclusion suivante : Si l'on applique la surface rectifiante sur le plan, u et v deviennent coordonnées Cartésiennes rectangulaires, la courbe C ($m=0$ ou $v=0$) prend la forme de la droite $v=0$ et Γ, lieu de centres des sphères osculatrices de seconde espèce, devient une courbe plane Γ'. La distance v de tout point de Γ' à la droite $v=0$ est égale au rayon de la sphère osculatrice de seconde espèce. On est donc conduit à la solution suivante du problème : Déformons la courbe Γ, sans en altérer la courbure, de telle manière qu'elle devienne plane. Dans le plan de la nouvelle courbe Γ_1 prenons une droite auxiliaire D et construisons toutes les sphères tangentes à D dont les centres sont situés sur Γ_1. Opérons ensuite la déformation inverse, chaque sphère étant invariablement liée à son centre sur la courbe; lorsque Γ_1 reprend sa forme primitive Γ, on a la famille de sphères cherchée.

[5] Le rayon r ne dépend pas de la torsion de la courbe Γ ni dans le problème de Jamet, ni dans le second problème.

La relation entre r et t peut s'exprimer toujours au moyen d'une équation différentielle du second ordre, où figure, en dehors de la fonction inconnue $r(t)$ et de ses dérivées, seulement le rayon ρ de courbure de la courbe Γ.

En effet, on trouve que, si r est le rayon de la sphère osculatrice ordinaire,

$$(1) \qquad r^2 - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \rho^2\left[1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right]^2 = 0.$$

Les deux constantes arbitraires contenues dans l'intégrale générale de cette équation déterminent la position du point S pris dans le plan de Γ_1.

Si r est le rayon de la sphère osculatrice de seconde espèce, on trouve

$$1-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\varrho^2\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2=0. \tag{2}$$

Les deux constantes arbitraires contenues dans l'intégrale générale déterminent la position de la droite D dans le plan Γ'.

Les équations (1) et (2) admettent l'expression

$$r=\pm t+\text{const.} \tag{3}$$

comme intégrale singulière commune. On sait que la formule (3) convient à une famille de sphères qui touchent une surface le long d'une ligne de courbure et dont les centres sont précisément les centres de courbure correspondants.

SUR LA

DEUXIÈME INDICATRICE D'UNE SURFACE EN UN POINT ORDINAIRE

PAR J. SOBOTKA

(PRAGUE)

[1] Au moyen de l'indicatrice de Dupin on peut construire en un point ordinaire P d'une surface le centre de courbure d'une section normale quelconque de ce point quand on connaît les centres de courbure pour trois sections normales.

Nous voulons généraliser cette construction dans le sens suivant :

On doit construire le deuxième centre de courbure au point P *d'une section normale arbitraire par* P *quand on connaît ces centres pour quatre telles sections.*

Soit P_1 le premier, P_2 le second centre de courbure d'une courbe plane au point P et portons

$$P_1Q = \frac{1}{3} P_2P_1.$$

Alors PQ est un diamètre de la parabole qui a au point P avec la courbe un contact du troisième ordre. On appelle la droite PQ l'axe de déviation de la courbe. Si la courbe est une section normale d'une surface S au point P, nous la pouvons appeler un axe principal de déviation. Les axes principaux de déviation pour le point P de la surface S forment un cône k.

Si l'on rapporte la surface au système de coordonnées rectangulaires $P(x, y, z)$, où x et y sont les tangentes principales, on peut ici remplacer l'équation de la surface par

$$2z = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3. \tag{1}$$

Alors l'équation du cône k sera

$$z(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + \left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right)^2 = 0, \tag{2}$$

où r_1, r_2 désignent les rayons principaux de courbure.

La droite PP_2 décrit un cône dont l'équation est

$$(2') \qquad -3z(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + \left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right)^2 = 0.$$

Ces cônes sont du quatrième ordre, la droite z est triple pour tous les deux, le plan tangent (xy) est double et les touche le long des droites tangentes principales.

$$(3) \qquad Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0$$

est l'équation des plans tangents le long de la droite z.

Les droites perpendiculaires à z, situées dans les sections normales et passant par leurs centres de courbures, décrivent la surface

$$(4) \qquad z\left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}\right) - (x^2 + y^2) = 0.$$

La courbe propre commune aux surfaces (2') et (4) est du sixième ordre, le point P est un point double isolé pour elle; cette courbe donne le lieu des seconds centres de courbures pour les sections principales.

Dans les plans $Q = 0$ ces centres sont situés sur la normale z; ils sont confondus avec les centres ordinaires de courbure.

Il s'ensuit que ces plans coupent la surface osculatrice

$$(5) \qquad 2z = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2}$$

suivant des paraboles qui ont avec la surface S un contact du troisième ordre.

Exécutons maintenant la transformation suivante :

$$x = \frac{2r_1r_2x'z'}{r_2x'^2 + r_1y'^2}, \qquad y = \frac{2r_1r_2y'z'}{r_2x'^2 + r_1y'^2}, \qquad z = z',$$

dans laquelle à tout point U corresponde un point U', conjugué par rapport au paraboloïde (5) et situé sur la droite UU' coupant la normale z perpendiculairement.

Par cette transformation le cône k devient le cylindre

$$(6) \qquad Ax'^3 + 3Bx'^2y' + 3Cx'y'^2 + Dy'^3 + 2\left(\frac{x'^2}{r_1} + \frac{y'^2}{r_2}\right) = 0,$$

qui a z pour droite double, et les plans tangents le long d'elle contiennent les tangentes principales de la surface S.

Par cette transformation la construction du cône k est réduite à la construction de la courbe (6) dans le plan (xy).

Nous pouvons donner encore une autre transformation du cône k. Dans tout plan normal nous menons par P la droite perpendiculaire à l'axe de déviation contenu dans ce plan; le lieu de cette droite est un cône k' dont l'équation est

$$(7) \qquad (x^2+y^2)\mathrm{Q} - z\left(\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}\right)^2 = 0.$$

Ce cône coupe la surface (4) suivant une courbe du cinquième ordre; on peut mener par elle aussi la surface

$$(8) \qquad \mathrm{Q} - \left(\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}\right) = 0,$$

c'est le cylindre projetant de cette courbe sur le plan (xy). Nous appelons cette courbe la deuxième indicatrice du point P.

Considérons encore la courbe

$$(8') \qquad \mathrm{A}x^3 + 3\mathrm{B}x^2y + 3\mathrm{C}xy^2 + \mathrm{D}y^3 + \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} = 0$$

qui est symétrique de la courbe (8) dans le plan (xy) avec P comme centre de symétrie. Cette courbe donne la liaison suivante de leurs points avec les droites du cône k.

Soit K un point situé sur cette courbe et P_1 le centre de courbure de la section dans le plan $(\mathrm{K}z)$; alors la droite de ce plan, perpendiculaire à la droite KP_1 et passant par P, appartient au cône k et correspond au point K et *vice versa*.

Nous pouvons déjà exécuter la construction proposée au début de ce travail.

Nous connaissons les deuxièmes centres de courbures des quatre sections données, par conséquent nous pouvons construire les quatre axes de déviations correspondants a_1, a_2, a_3, a_4 et ensuite les points correspondants A_1, ..., A_4 de la courbe (8') qui est définie par le point double P, dont les tangentes sont les tangentes principales, par ces droites tangentes et par les quatre points A_1, ..., A_4. Ensuite on peut construire linéairement le point simple A dans lequel cette courbe est coupée par le plan normal quelconque. Du point A on déduit l'axe de déviation correspondant a.

[**2**] Quand on n'étudie qu'un contact du troisième ordre, on remplace la surface S, comme nous avons déjà dit, par la surface

$$(1) \qquad 2z = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + \mathrm{A}x^3 + 3\mathrm{B}x^2y + 3\mathrm{C}xy^2 + \mathrm{D}y^3.$$

Une quadrique générale osculatrice du second ordre pour le point P a l'équation

$$2z = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + 2(gx + hy)z + lz^2. \tag{2}$$

Considérons les sections de cette surface par un plan arbitraire contenant le point P. Pour cela, soit $\bar{x}$ la trace de ce plan sur le plan (xy). Nous tournons le système des coordonnées autour de l'axe z jusqu'à ce que l'axe x se confonde avec $\bar{x}$. Si cet axe fait avec x l'angle φ, on a pour les nouvelles coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

$$x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \qquad y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi, \qquad z = \bar{z}.$$

Coupons maintenant les deux surfaces (1), (2) par le plan $\bar{y} = \alpha z$; pour un contact du troisième ordre de cette section on aura la condition

$$(\mathrm{D}tg^3\varphi + 3\mathrm{C}tg^2\varphi + 3\mathrm{B}tg\varphi + \mathrm{A}) - \left(\frac{tg^3\varphi}{r_2} + \frac{tg\varphi}{r_1}\right)h - \left(\frac{tg^2\varphi}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)g = 0. \tag{3}$$

Il suit de cette équation que chaque surface osculatrice du second ordre possède au point P trois tangentes ayant la propriété, que les plans menés par elles coupent les surfaces (1), (2) dans des courbes qui ont au point P un contact du troisième ordre.

La polaire q de z par rapport à la quadrique est située dans le plan (xy), dans lequel elle a l'équation : $-gx - hy + 1 = 0$.

Toutes les quadriques osculatrices qui ont la même droite polaire q de z définiront les mêmes directions (3). Quand on désigne par u et v les coordonnées de la droite q, on peut écrire l'équation (3) aussi

$$(\mathrm{D}tg^3\varphi + \mathrm{C}tg^2\varphi + 3\mathrm{B}tg\varphi + \mathrm{A}) + \left(\frac{tg^3\varphi}{r_2} + \frac{tg\varphi}{r_1}\right)u + \left(\frac{tg^2\varphi}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)v = 0.$$

On voit que pour un φ donné les droites polaires q passent par le même point R placé sur la droite $\bar{x}$ pour laquelle $+(x, \bar{x}) = \varphi$. Laissons varier φ; alors le point R décrit une courbe Γ identique avec (8).

Ainsi, pour construire une conique qui a un contact du troisième ordre avec la surface S, étant située dans un plan quelconque N, mené par le point P, on coupe ce plan par la courbe Γ en un point simple R, et par ce point on trace une droite arbitraire q dans le plan (xy); ensuite on fait passer une quadrique osculatrice à la surface S au point P, qui a les droites z et q pour polaires réciproques. Alors le plan N coupe cette quadrique suivant la conique cherchée.

A METHOD OF CLASSIFYING

ALL THE POLYGONS HAVING A GIVEN SET OF VERTICES

By F. H. MURRAY

(CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS.)

Suppose a system of points on a plane to be such that no three are collinear; let these be numbered in any order $a_1, a_2 \ldots, a_n$, and construct the line segments

$$\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \ldots, \overline{a_{n-1} a_n}, \overline{a_n a_1}.$$

This set of segments forms a closed curve described in some sense, which can be represented by the sequence of points

$$(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Such a closed curve will be termed a polygon corresponding to the given set of points, and these points $a_1 \ldots a_n$ will be termed the vertices of the polygon. It is immediately evident that every other sequence $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n,)$ in which every point occurs just also represents a polygon with the same set of vertices, and every polygon corresponding to the given set of points can be represented in this manner.

Polygons of this kind have been studied by L. Poinsot and others(1); but a systematic discussion and classification of the polygons with n vertices seems to be still lacking. It is the purpose of this paper to present one method of classification based on the theory of permutation groups; this classification is particularly interesting if the n points are equally spaced on the circumference of a circle.

The method will be applied to the cases $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; certain generalizations will be indicated afterwards.

---

(1) Ostwald, Klassiker: *Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper;* Max Brückner: *Ueber die gleicheckig-gleichflächige diskontinuierlichen und nicht konvexen Polyeder;* Abteilungen der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher, Band 86, Halle, 1906.

§ 1. — The group of a polygon.

Suppose the n points equally spaced along the circumference of a circle, and numbered in the order in which they occur if the circumference is described in the clockwise direction. With this notation the polygon $(a_1 a_2 \dots a_n)$ is a particularly simple one; it is transformed into itself by the permutation on its indices

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \dots n \\ 2\ 3\ 4 \dots 1 \end{pmatrix} = 1\ 2\ 3 \dots n.$$

since this permutation replaces every line segment $a_i a_{i+1}$ by the one following it, hence leaves the set unchanged. All powers of this substitution, or the cyclic group generated by this substitution also leave the polygon unchanged; and if the polygon is considered as described in a definite sense this cyclic group contains all the permutations on the indices which leave the polygon unchanged. *The group of permutations on the vertices of a polygon which leave it unchanged is defined to be the group of the polygon.*

The group of the polygon having a definite sense is therefore a cyclic group; if P′ is represented by the sequence $(a_1 a_2 \dots a_n)$ its group is the cyclic group $(1, 2 \dots n)$, consisting of all powers of the substitution $1\ 2\ 3 \dots n$.

The polygon $P'' = (a_n a_{n-1} \dots a_1)$ evidently has the same cyclic group; it remains to consider the group of the polygon P to which no sense is assigned. P can be considered as the combination of the two polygons P′, P″; its group consists of all substitution which either leave both P′ and P″ unchanged, or transform P′ into P″ and P″ into P′. One substitution transforming P′ into P″ is

$$t = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \dots\dots\dots\dots n \\ n(n-1)(n-2) \dots 1 \end{pmatrix}$$

the substitution t and $1\ 2\ 3 \dots n$ generate the *dihedral* group of order $2n$, represented by $(1\ 2\ 3 \dots n)'$. This particular dihedral group will be called the *regular* group. The reason for this will appear immediately.

In a similar manner to any other polygon P'_i corresponds a cyclic group $(a_1(i) a_2(i) \dots a_n(i))$, and to the corresponding polygon considered as having either sense corresponds a dihedral group $(a_1(i) a_2(i) \dots a_n(i))'$. Among all possible dihedral groups formed in this manner the *regular* group is most interesting from the a geometrical point of view because of the significance of its substitutions; to every

substitution of the cyclic group $(1\,2\,3\,\ldots\,n)$ corresponds a rotation through an angle which is a multiple of $\frac{2\pi}{n}$, and to every substitution of the group not in the cyclic group corresponds a reflection with respect to some diameter. If n is odd, every such diameter passes one vertex; if n is even, there are two cases; a diameter of this kind passes through two vertices, or it does not pass through any vertex. Every diameter of this kind is a line of symmetry, and the substitutions of the regular group not in the cyclic group therefore correspond to lines of symmetry of the polygons which have the regular group. These polygons are usually called the regular polygons.

§ 2. — Types of polygons.

On any given polygon $P_k = (a_1(k)a_2(k)\ldots a_n(k))$ perform the substitutions of the cyclic group $(1\,2\,3\,\ldots\,n)$; there result n polygons $P_k^{(1)}\ldots P_k^{(n)}$, which need not all be distinct. From the geometric significance of the substitutions of the group $(1\,2\,\ldots\,n)$ it is seen that this set of polygons is obtained from P_k by rotations through multiples of the angle $\frac{2\pi}{n}$. The groups of these polygons are also related in a simple manner : the n groups are all of the form $S^{-l}GS^l$, where

$$S = 1\,2\,3\,\ldots\,n, \qquad l = 1, 2, \ldots, n,$$

as is immediately evident. This set of n polygons is defined to be the type to which any one of the set belongs; two polygons therefore belong to the same type if, and only if, one can be obtained from the other by a rotation through a multiple of the angle $\frac{2\pi}{n}$.

To every type T_1 corresponds another type T'_1 called the *conjugate* of the first, which is constructed as follows : if P_k is any polygon of the type T_1, reflect P_k about any one of the n diameters which are lines of symmetry for the regular polygons; the type of the polygon obtained by this reflection is defined to be the type conjugate to the first type T_1. It is seen immediately that T_1 is conjugate to T'_1, and the type T'_1 is the same whatever the line of reflection chosen.

It may occur that the types T_1 and T^t_1 are the same; in this case the type T_1 is a *self-conjugate* type.

It can be immediately shown that *every polygon of a self-conjugate type has a line of symmetry, and if a polygon has a line of symmetry, its type is self-conjugate.*

For if $1, S, S^2 - S^{n-1}$ are the substitutions of the cyclic-group generated by

1 2 3 ... n, and t a substitution of the regular group not in the cyclic group, the regular group consists of the substitutions

$$1, S, S^2 \dots S^{n-1},$$
$$t, tS, tS^2 \dots tS^{n-1}.$$

If the type of P_k is self-conjugate, then P_k operated on by some power of S is the same polygon as P_k operated on by some substitution tS^l. Or,

$$P_k(S^h) = P_k(tS^l).$$

Then

$$P_k = P_k(tS^l)S^{-h},$$
$$= P_k(tS^{l-h}).$$

Consequently the substitution tS^{l-h} transforms P_k into itself: tS^{l-h} corresponds to a reflection with respect to some one of the n diameters, which must therefore be a line of symmetry for P_k. If P_k has a line of symmetry every polygon obtained from P_k by a rotation also has a line of symmetry, hence every polygon of T_1 has a line of symmetry.

Also, if P_k has a line of symmetry a reflection with respect to this line leaves P_k unchanged, hence leaves the type of P_k unchanged; the theorem is therefore demonstrated.

If the n polygons of a given type are not all distinct, some power of S not the identity transforms some polygon P of the type into itself; hence the group of P has a sub-group in common with the cyclic sub-group of order n of the regular group. Sub-groups of the regular group will be termed regular sub-groups.

If the group of P has a regular sub-group belonging also to the cyclic sub-group of order n, the polygons of its type will not all be distinct; hence the theorem: *A necessary and sufficient condition that the n polygons of the type of a polygon* P *be not all distinct is, that the group of* P *have a regular sub-group belonging to the regular cyclic sub-group of order n.*

It has already been seen that to every polygon corresponds a certain substitution group; but to a given dihedral group on n letters several polygons may correspond. For if $\overline{S}$ is a generating substitution of a cyclic group, every power of $\overline{S}$ prime to n is also a generating substitution, and every such power of $\overline{S}$ corresponds to a certain polygon. Hence if $\varphi(n)$ is the number of integers less than n and prime to n, there are $\frac{\varphi(n)}{2}$ polygons which have the same dihedral group.

Each of the $\frac{\varphi(n)}{2}$ polygons has the same lines of symmetry and each type contains the same number of distinct polygons, since the regular sub-group is constant.

§ 3. — Application of the method for $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

As a result of the discussion above it is natural to commence the classification, for a given value of n, by a classification of the dihedral groups according to the sub-groups which they have in common with the regular group, and a division of the groups into sets conjugate under the powers of the substitution $(1\,2\,3 \cdots n)$, corresponding to the division of the polygons into types. If a regular sub-group occurs in a dihedral group G_1, then if the powers of $(1\,2\,3 \cdots n)$ transform G_1 into $G_1, G_2 \ldots G_k$, they transform the regular sub-group g_1 into $g_1, g_2 \ldots g_k$, which are also regular sub-groups. But just as a polygon may be said to represent all the others of the same type, it is evident that g_1 represents $g_2 \ldots g_k$, and if all the dihedral groups containing g_1 are constructed, their conjugates contain $g_2 \ldots g_k$. In the classification of the dihedral groups, therefore, it is convenient to consider first the groups containing just one of the set $g_1 \ldots g_k$.

Accordingly, the first step in the classification of the dihedral groups is the classification of all the regular sub-groups into sets, the sub-groups in each set being conjugate under the regular cyclic-group of order n; then choose one sub-group from each set, and determine all the dihedral-groups containing each of the sub-groups chosen. These dihedral groups and the others conjugate to them under the regular cyclic group of order n will include all the dihedral groups containing any regular sub-group.

When these groups have been constructed there will remain a certain number of dihedral groups not containing any regular sub-group; if P is a polygon corresponding to such a group, there are evidently n distinct polygons in the same type as P, and each type is distinct from its conjugate type.

If $n = 1$, the polygon reduces to a point, its group to the identical transformation.

If $n = 2$, the polygon is a straight line segment, its group the group on two letters, which can be considered as a dihedral group.

If $n = 3$, the polygon is a triangle, its group the symmetric group on three letters which is also a dihedral group.

If $n = 4$, there are three dihedral groups, the regular group and two others conjugate under the regular cyclic group; consequently one type besides the square, which is the only regular polygon here. Since the three dihedral groups on 4 letters have a group of order 4 in common, each of the substitutions besides the identity being of order 2, it follows that each non-regular polygon has two lines of symmetry.

Since 5 is a prime, no two cyclic groups of order 5 can have a sub-group other than the identity in common; hence no polygon except the regular polygons can have more than one line of symmetry. For if P had two lines of symmetry, the succession of two reflections is a rotation, and the corresponding group would therefore possess a regular sub-group of the regular cyclic sub-group of order 5. Since this is impossible, each non-regular polygon can have at most one line of symmetry. Since there are 24 substitutions on 5 letters of order 5, there are 6 dihedral groups, the regular group and 5 others. It has been seen that none of these 5 dihedral groups can have a regular sub-group contained in the regular cyclic subgroup of order 5, hence the type of each polygon contains 5 distinct polygons. From this it follows that the five groups must be conjugate under the cyclic group of order 5. A construction of any one shows immediately a line of symmetry. Hence for $n = 5$ there are two self-conjugate types corresponding to the non-regular polygons.

For $n = 6$ there are 60 dihedral groups, with one polygon to each group. It is found that all types are represented by the following substitutions; the number of distinct polygons in each type follows the substitution :

1 2 3 4 5 6 (1);	1 2 3 4 6 5 (6);	1 2 5 6 3 4 (2);
1 3 2 4 6 5 (3);	1 4 3 2 5 6 (3);	1 4 6 2 5 3 (3);
1 4 2 3 6 5 (3);	1 4 6 5 2 3 (3);	

(the last two belong to distinct conjugate types);

1 4 6 2 3 5 (6);	1 2 6 4 3 5 (6);	1 4 5 3 2 6 (6);
1 4 2 3 5 6 (6);	1 4 6 5 3 2 (6);	1 4 2 5 6 3 (6);

the last two belong to distinct conjugate types and neither has any line of symmetry.

For $n = 7$ there are 3 polygons corresponding to each dihedral group. Since 7 is a prime, no polygon except the regular polygons can have more than one line of symmetry. The regular sub-groups are therefore of order 2, and there is just one conjugate set. There are 5! dihedral groups in all, with 7 polygons in each type. It is found that the polygons having lines of symmetry belong to the types represented by the following 8 substitutions and their powers :

1 2 3 4 5 6 7;	1 4 2 3 6 7 5;	1 3 4 2 7 5 6;	1 2 3 5 4 6 7;
1 3 2 5 4 7 6;	1 2 4 3 6 5 7;	1 3 7 5 4 2 6;	1 3 2 4 5 7 6.

Methods of constructing the polygons having any given regular sub-group can easily be found.

§ 4. — Some generalizations.

For any value of n, suppose the classification of dihedral groups completed. Then suppose any n points given in the plane, no three of which are collinear. Corresponding to each order numbering these points $a_1, a_2 \ldots a_n$ there is a polygon $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, and a closed curve C can be drawn, passing through each point a_k just once, and passing through the n points in the order $a_1, a_2 \ldots a_n$. The polygon $(a_1 \ldots a_n)$ is one such curve.

The classification of all the polygons having the n points as vertices, with respect to the polygon $(a_1 \ldots a_n)$ can be made in such a way that the curve C plays a part analogous to that of the circle in the case discussed above. For a permutation which is a power of $1\,2 \ldots n$ corresponds to a cyclic interchange of vertices along C; a permutation corresponding to a reflection with respect to a diameter in the case of a circle, corresponds here to a division of C into two arcs C_1, C_2, by two points Q_1, Q_2, such that there is the same number of vertices $a_1 \ldots a_n$ on each arc (Q_1 or Q_2 may be points of the set $a_1 \ldots a_n$), and the substitution for a vertex a_k of the vertex $a_{k'}$ which is the same number of vertices away, along C, from Q_1, or Q_2, but on the opposite arc. If Q_i is a point of the set it is left unchanged.

With this geometric interpretation of the permutations of the regular group a geometric classification of the polygons can be given in a manner analogous to that given above. This classification is especially interesting if the curve C is convex, in such a way that no line intersects it in more than two points. It is easily demonstrated that any two lines $\overline{a_i a_j}$, $\overline{a_k a_l}$ of a polygon P intersect in the *interior* of C if and only if a_i and a_j divide a_k and a_l on C; that is, if a_i lies on one arc, a_j on the other of the two arcs of which a_k and a_l are end-points. If a_i and a_j divide a_k and a_l, a_{i+1} and a_{j+1} divide a_{k+1} and a_{l+1}; from this fact it follows that if a given pair of lines intersects in the interior of C, every pair of lines corresponding to this pair either in the type of P or in the conjugate type intersects in the interior of C.

Still another generalization can be obtained as follows.

If any finite number of points in a space of three dimensions are represented by $a_1, a_2, \ldots a_n$, a line can be represented by a pair of points $\overline{a_i a_j}$, a plane by a triplet $\overline{a_i a_j a_k}$. Consequently any configuration consisting of points, lines through two points and planes through three points of the set can be represented as a combination

$$S = (a_1 \ldots a_k, \ldots \overline{a_i a_j} \ldots \overline{a_l a_n a_m} \ldots).$$

For every such representation there exist some permutations, perhaps only the identity, which transform this representation of the set of points, lines and planes into itself. The set of all such permutations evidently forms a group and is defined to be the group of the configuration. This group is evidently dependent on the particular sequence in which the points are numbered.

Given the n points and any configuration S, on these points, the substitutions of a given permutation group G formed with the letters $a_1 \ldots a_n$ transform S_1 successively into $S_2 \ldots S_N$; the configuration

$$\bar{S} = (S_1, S_2, \ldots S_N)$$

is transformed into itself by all the permutations of G. Hence the group of $\bar{S}$ contains G as a sub-group.

From this point of view the polygons discussed above are particular linear configurations in the plane. Other interesting configurations can be obtained by superposing all the polygons which have the same dihedral group; this group is evidently a sub-group of the group of the resulting configuration. Similarly the regular group is a sub-group of the group of the configuration obtained by superposing all the polygons of a given type, together with those of the conjugate type.

In the plane it was seen that those polygons are most interesting whose dihedral groups contain regular sub-groups; in space those configurations are the most interesting whose groups contain sub-groups corresponding to rotations about a fixed point, or reflections with respect to planes through this fixed point. The regular polyhedra and regular star-shaped bodies are special cases of these.

SUR LA TRANSFORMATION DE LIE

PAR M. CLAPIER

(MONTPELLIER)

Parmi les transformations de contact, la plus célèbre est celle de Sophus Lie, qui fait correspondre la géométrie de la sphère à la géométrie de la droite; je me propose de montrer quelle est, au point de vue didactique, l'origine de cette transformation et l'une de ses plus intéressantes applications.

Une transformation de contact de deuxième classe est caractérisée par deux relations

$$\varphi(xyz,\ x_1y_1z_1) = 0, \qquad \psi(xyz,\ x_1y_1z_1) = 0$$

entre les coordonnées de deux points $M(xyz)$ et $M_1(x_1y_1z_1)$ qui appartiennent à deux espaces E et E_1.

Le cas le plus simple consiste à supposer que ces relations sont bilinéaires et ont la forme

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \Pi' &= A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D' = 0 \end{aligned}\right\}$$ A, B, C, D, A', B', C', D' fonctions linéaires de x, y, z.

A un point M du premier espace correspond dans le second une droite D_1, intersection des plans Π et Π'. De sorte qu'aux points de l'espace E correspondent dans l'espace E_1, les droites d'un complexe k_1; et inversement aux points de l'espace E_1 correspondent les droites d'un complexe k, appartenant au premier espace.

La correspondance entre les plans Π et Π' étant homographique, le complexe k_1 est en général un complexe du second degré tétraédral; il en est de même du complexe k. Dans le cas particulier où l'un des complexes est linéaire, l'autre est formé par les droites qui rencontrent une conique (1).

(1) Vessiot, *Leçons de Géométrie supérieure* (Lyon, 1906).

Le cas qui se présente naturellement à l'esprit est celui où le complexe (k_1) est formé par les droites qui rencontrent le cercle isotrope. Ce sont les lignes de longueur nulle, et les droites de ce complexe satisfont à l'équation de Monge

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = 0; \tag{1}$$

cherchons le complexe correspondant k.

M étant fixe, nous avons les relations différentielles

$$\begin{aligned} A dx_1 + B dy_1 + C dz_1 &= 0, \\ A' dx_1 + B' dy_1 + C' dz_1 &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\dfrac{dx_1 - i dy_1}{dz_1}$ est une fonction linéaire de xyz; et, à l'aide d'une transformation homographique, nous pourrons poser

$$\frac{dx_1 - i dy_1}{dz_1} = y \qquad \text{et} \qquad \frac{dx_1 + i dy_1}{-dz_1} = \frac{1}{y}.$$

Les relations différentielles précédentes s'écriront :

$$\begin{cases} dx_1 - i dy_1 - y dz_1 = 0, \\ y(dx_1 + i dy_1) + dz_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Intégrons-les, de manière à obtenir une droite D_1 du complexe k_1; nous obtenons avec les constantes α et γ, expressions linéaires en x, y, z,

$$\begin{cases} x_1 - i y_1 - y z_1 - \alpha = 0, \\ y(x_1 + i y_1) - z_1 + \gamma = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Pour obtenir les droites D du complexe k, il suffit de différencier ces nouvelles équations, en y supposant fixes x_1 y_1 et z_1; on obtient, après l'élimination de z_1, la condition

$$y d\gamma - \gamma dy - d\alpha = 0.$$

Complétons la transformation homographique ci-dessus, en posant :

$$\alpha = x, \qquad \gamma = z;$$

nous avons la relation différentielle

$$z dy - y dz + dx = 0, \tag{4}$$

qui caractérise le complexe k; c'est bien un complexe linéaire.

Les relations finies (3) prennent la forme des relations φ et ψ posées *a priori* pour définir la transformation de Lie (¹),

Remarque. — Pour définir la transformation de Lie, il suffit de se rappeler qu'elle fait correspondre le complexe des droites isotropes à un complexe linéaire. Celui-ci se ramène à la forme (4) ou à l'une des deux formes suivantes :

$$x dy - y dx + dz = 0,$$
$$z dx - x dz + dy = 0.$$

Pour obtenir la première de ces deux relations différentielles, on pose :

$$\frac{dx_1 + i dy_1}{-dz_1} = x, \qquad \frac{dx_1 - i dy_1}{dz_1} = \frac{1}{x}$$

et on déduit les deux relations finies, qui peuvent aussi caractériser la transformation

$$\begin{cases} x_1 + i y_1 + x z_1 + z = 0, \\ x(x_1 - i y_1) - y - z_1 = 0. \end{cases}$$

Ce sont celles qui ont été utilisées par M. Vessiot, qui en déduit les formules

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = -\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\frac{x(px+qy)+y-p}{q+x}, \quad y_1 = -\frac{z}{2i} + \frac{1}{2i}\frac{x(px+qy)-y+p}{q+x}, \\ z_1 = -\frac{px+qy}{q+x}, \qquad p_1 = \frac{qx+1}{q-x}, \qquad q_1 = -i\frac{qx-1}{q-x}. \end{cases}$$

Application. — Appliquons une transformation de contact à une multiplicité M_2 définie par l'équation

$$(1)\qquad F(x\,y\,z\,p\,q) = 0;$$

elle transforme cette multiplicité en une seconde multiplicité

$$(2)\qquad F_1(x_1\,y_1\,z_1\,p_1\,q_1) = 0$$

Les éléments unis suivant une courbe se transforment en éléments unis suivant une autre courbe; une bande caractéristique de l'équation aux dérivées partielles (1)

(¹) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, § 978.

se transforme en une bande caractéristique de l'équation (2). Si on applique la transformation de Lie qui change les droites en sphères, les tangentes asymptotiques d'une surface intégrale se transforment en sphères osculatrices de la surface transformée.

Les lignes asymptotiques de la première vont se changer en lignes de courbure de la seconde; une bande caractéristique asymptotique sur une surface intégrale se transforme en une bande caractéristique de courbure sur la surface transformée.

Si l'équation (1) est l'équation la plus générale pour laquelle les courbes caractéristiques d'une surface intégrale sont des lignes asymptotiques de cette surface, l'équation (2) sera telle que les caractéristiques situées sur une surface intégrale soient des lignes de courbure de cette surface.

Sophus Lie a démontré le théorème suivant :

Théorème. — 1° Pour que les caractéristiques d'une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire soient des lignes asymptotiques de cette surface, il faut et il suffit que les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe de droites;

2° Pour que les caractéristiques d'une surface intégrale quelconque d'une équation linéaire soient des lignes asymptotiques de cette surface, il faut et il suffit que l'équation admette comme lignes intégrales une congruence de droites.

Exemples. — L'équation

$$F = (px + qy)^2 - 2a(py - qx) - a^2 = 0$$

admet pour équation différentielle des courbes intégrales

$$a(dx^2 + dy^2) + (xdy - ydx)dz = 0;$$

les tangentes à ces courbes forment un complexe de droites du deuxième degré. En appliquant les formules de transformation (5), on obtiendra une équation $F_1 = 0$, pour laquelle les caractéristiques seront des lignes de courbure d'une surface intégrale.

Si de même on cherche l'équation (1) telle que les tangentes aux courbes intégrales forment un complexe tétraédral, on trouve :

$$F = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2z^2 - 2bcYz - 2cazX - 2abXY = 0,$$
$$X = px, \qquad Y = qy, \qquad a + b + c = 0$$

et on en déduit, par les formules de la transformation de Lie, l'équation (2) correspondante.

— L'équation $F_1 = 0$, déduite ainsi de l'équation $F = 0$, donne toutes les équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques sont lignes de courbure pour la surface intégrale. S'il arrive que la forme de (2) soit linéaire, deux cas pourront se présenter : 1° ou bien les caractéristiques sont des droites isotropes; 2° ou bien ces caractéristiques coupent orthogonalement une famille de sphères à un paramètre (Lie).

L'équation (1) elle-même peut être quelconque ou avoir une forme linéaire.

Dans le cas général, une courbe intégrale est une enveloppe de caractéristiques, et les tangentes à un même système de caractéristiques situées sur une surface intégrale appartiennent à un complexe de droites. La transformation de Lie leur fera correspondre des sphères osculatrices appartenant à un même complexe de sphères.

Si l'équation (1) est linéaire, à la congruence des lignes intégrales correspondra une congruence de sphères; celles-ci ont une enveloppe qui correspond à une des nappes de la focale de la congruence. De sorte qu'à une surface intégrale de l'équation (1) correspondra une surface intégrale de l'équation (2) considérée comme enveloppe d'une famille de sphères appartenant à une congruence. Ces sphères de la congruence dépendant de deux paramètres formeront une intégrale complète; l'intégrale singulière correspondra à la focale de la congruence des droites intégrales de l'équation linéaire.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant dû à Lie :

Théorème. — Si les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles sont des lignes de courbure d'une surface intégrale, deux cas peuvent se présenter :

1° Les sphères osculatrices d'un même système de caractéristiques situées sur une surface intégrale appartiennent à un même complexe de sphères;

2° Une intégrale complète est obtenue par une congruence quelconque de sphères.

Exemple. — Considérons les surfaces dont les normales sont tangentes à une sphère; elles satisfont à l'équation

$$(px + qy - z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(1 + p^2 + q^2),$$

Soient O, l'origine centre de la sphère, I le point de contact de la normale MI. Une caractéristique est une spirale développante située dans un plan quelconque passant par l'origine; une intégrale quelconque s'obtiendra en faisant rouler ce plan sur un cône quelconque de centre O, OM sera la génératrice de contact. Les sphères

osculatrices à une de ces surfaces le long de la caractéristique ont pour centre I et pour rayon IM; elles dépendent de trois paramètres : le paramètre dont dépend le rayon IM suivant la développante de cercle choisie et les deux paramètres qui fixent la position du point I sur la sphère. Les caractéristiques sont donc lignes de courbure.

D'une manière générale, les surfaces définies par une relation entre le rayon vecteur OM et la distance de l'origine au plan tangent sont des surfaces moulures, sur lesquelles les caractéristiques forment un système de lignes de courbure.

SUR QUELQUES FORMULES DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE

PAR N. HATZIDAKIS

(ATHÈNES).

[**1**] *Quelques mots sur la méthode cinématique.* — Dans la *Géométrie infinitésimale,* il y a deux voies à suivre : la voie *différentielle* et la voie *cinématique.* La première, historiquement la plus ancienne, est, peut-être, la plus naturelle, puisqu'elle n'est qu'une continuation de la *Géométrie analytique,* avec emploi des différentielles des coordonnées; mais elle n'est point la plus courte. La méthode cinématique, au contraire, développée surtout par les géomètres français (1) et systématisée par Darboux dans son livre magistral sur la théorie des surfaces, quoique plus indirecte, est de beaucoup plus élégante. Dans cette méthode — qui a aussi l'avantage d'être *intrinsèque,* c'est-à-dire sans coordonnées — toute la théorie des courbes, des surfaces et des variétés des hyperespaces se rattache au mouvement d'un *trièdre mobile,* animé d'un mouvement à un, à deux, ..., à k paramètres indépendants; les *éléments géométriques intrinsèques* des figures : courbure et torsion absolues, courbures normale et géodésique, torsion géodésique, etc., etc., apparaissent alors comme des composantes de rotations instantanées suivant les axes d'un trièdre mobile.

[**2**] *Formules générales relatives à une couple de courbes.* — En m'appuyant sur cette méthode extrêmement féconde, j'ai donné, à différentes époques, des applications, plus ou moins générales, à la théorie des courbes et des surfaces (2); notamment, j'ai trouvé (3) trois formules générales qui relient les courbures et les torsions d'une *couple de courbes* avec les éléments de leur position *mutuelle.*

---

(1) La méthode de Cesàro (*Geometria intrinseca*) n'est, sous une notation différente, qu'un *cas particulier* des formules de Darboux (*Surfaces,* I) $\left(\text{Pour } \frac{1}{R} = 0,\ V_z = 0,\ \frac{dz}{ds} = 0\right)$.

(2) *Displacements depending on one, two, ..., k parameters in a space of n dimensions* (American Journal of Mathematics, 1900). — *Sur une relation remarquable entre deux courbes,* etc. (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1900).

(3) *Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace* (Bulletin des Sciences Math., 1899).

[3] *Formules générales relatives aux courbes d'une couple de surfaces.* — Je vais maintenant donner trois formules, plus générales que celles mentionnées au paragraphe 2, relatives à des courbes d'une *couple de surfaces*, c'est-à-dire de deux surfaces quelconques de l'espace.

Considérons, à cet effet, dans l'espace à trois dimensions, deux surfaces quelconques (S) et (S_1) qui se correspondent point par point au moyen d'une certaine construction géométrique ou bien au moyen de deux relations entre u, v et u_1, v_1. Le long de deux courbes correspondantes (C) et (C_1) sur (S) et (S_1), nous aurons $s_1 = \varphi(s)$, où s et s_1 sont les arcs de (C) et (C_1). Les normales MN, M_1N_1 à (S), (S_1) aux deux points correspondants M, M_1 de ces courbes auront une perpendiculaire commune; traçons de M et de M_1 deux parallèles MX et M_1X_1 à cette perpendiculaire commune; elles seront évidemment situées sur les plans tangents aux deux surfaces en M et M_1, respectivement. Imaginons-nous encore les droites MΣ, $M_1\Sigma_1$ normales respectivement aux plans (MX, MN) et (M_1X_1, M_1N_1). Les rotations instantanées (P, Q, R) et (P_1, Q_1, R_1) des deux trièdres (MX, MN, MΣ) et (M_1X_1, M_1N_1, $M_1\Sigma_1$) seront liées, puisque MX est parallèle à M_1X_1, par les relations :

$$(\alpha)\quad P_1 = P + \frac{d\Theta}{dt}\ (^1),\quad Q_1 = Q\cos\Theta + R\sin\Theta,\quad R_1 = -Q\sin\Theta + R\cos\Theta,$$

où Θ est l'angle MN, M_1N_1.

Considérons, d'autre part, les deux trièdres (MX, MN, MΣ) et (MT, MN, MII, rotations p', q', r'), où MII signifie la perpendiculaire commune à MT [la tangente à (C)] et MN; nous aurons les relations :

$$(\beta)\quad P = p'\cos\omega + r'\sin\omega,\quad Q = q' + \frac{d\omega}{dt},\quad R = -p'\sin\omega + r'\cos\omega$$
$$[\omega \equiv \text{angle}(MX, MT)];$$

de la même manière, les deux trièdres (M_1X_1, M_1N_1, $M_1\Sigma_1$) et (M_1T_1, M_1N_1, M_1II_1) nous donnent :

$$(\beta_1)\quad P_1 = p_1'\cos\omega_1 + r_1'\sin\omega_1,\quad Q_1 = q_1' + \frac{d\omega_1}{dt},\quad R_1 = -p_1'\sin\omega_1 + r_1'\cos\omega_1$$
$$[\omega_1 \equiv \text{angle}(M_1X_1, M_1T_1)].$$

---

(1) Par un choix convenable du sens de l'angle Θ on évite l'ambiguïté du signe du terme $\frac{d\Theta}{dt}$. Même remarque, plus loin, pour les angles ω, ω_1, ∂, ∂_1 (t est la variable indépendante dont dépendent s et s_1).

Comparons encore les deux trièdres (MT, MN, MΠ) et (MT, MP, MB ≡ trièdre *principal* de (C), rotations p, $q \equiv 0$, r); nous trouvons :

$$p' = p + \frac{d\vartheta}{dt}, \qquad q' = q\cos\vartheta + r\sin\vartheta \equiv r\sin\vartheta, \qquad r' = -q\sin\vartheta + r\cos\vartheta \equiv r\cos\vartheta$$

$$[\vartheta \equiv \text{angle (MN, MP)}],$$

ou bien :

$$(\gamma) \qquad p' = -\frac{d\tau_g}{dt}, \qquad q' = \frac{d\sigma_g}{dt}, \qquad r' = \frac{d\sigma_n}{dt},$$

$d\tau_g$, $d\sigma_g$, $d\sigma_n$ étant resp. l'angle de torsion géodésique et les angles de contingence géodésique et normale de (C) par rapport à la surface (S).

Nous aurons enfin, de la même manière :

$$(\gamma_1) \qquad p_1' = -\frac{d\tau_{1g}}{dt}, \qquad q_1' = \frac{d\sigma_{1g}}{dt}, \qquad r_1' = \frac{d\sigma_{1n}}{dt},$$

où $d\tau_{1g}$, $d\sigma_{1g}$, $d\sigma_{1n}$ sont les éléments analogues de (C_1) par rapport à l'autre surface (S_1).

Ces formules préliminaires établies, éliminons, entre les quinze équations (α), (β), (β_1), (γ) et (γ_1) les douze rotations P, Q, R; P_1, Q_1, R_1; p', q', r'; p_1', q_1', r_1'; il viendra :

$$(A) \begin{cases} -d\tau_{1g}\cos\omega_1 + d\sigma_{1n}\sin\omega_1 = -d\tau_g\cos\omega + d\sigma_n\sin\omega + d\Theta, \\ d\sigma_{1g} + d\omega_1 = (d\sigma_g + d\omega)\cos\Theta + (d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega)\sin\Theta, \\ d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1 = -(d\sigma_g + d\omega)\sin\Theta + (d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega)\cos\Theta. \end{cases}$$

Ce sont les trois formules cherchées. Elles constituent trois relations qui relient les six éléments des deux courbes relatifs aux deux surfaces dont elles font partie : $d\sigma_n$, $d\sigma_g$, $d\tau_g$, $d\sigma_{1n}$, $d\sigma_{1g}$, $d\tau_{1g}$ *aux trois éléments :* ω, ω_1, Θ *qui déterminent leur position mutuelle.*

Il va sans dire que les mêmes formules donnent aussi les éléments *absolus* de l'une des deux courbes, (C_1) : $d\sigma_1$, $d\tau_1$ en fonction de ceux de l'autre : $d\sigma$, $d\tau$ et des *cinq* éléments : ϑ, ϑ_1, ω, ω_1, Θ de leur position mutuelle, puisque

$$d\sigma_1 = \sqrt{d\sigma_{1n}^2 + d\sigma_{1g}^2}, \quad d\tau_1 = d\tau_{1g} + d\vartheta_1.$$

On trouve, de plus, tang Θ en fonction des huit quantités :

$$d\sigma_n, \ \ldots, \ d\tau_{1g}, \ \omega, \ \omega_1.$$

[4] *Invariants.* — Nous pouvons aussi présenter les mêmes relations sous forme d'*invariants*, c'est-à-dire d'expressions qui sont les mêmes pour chacune des deux courbes. Introduisons, à cet effet, deux droites parallèles MY, M_1Y_1, perpendiculaires à MX, M_1X_1; par un choix convenable du sens des angles, on aura, dans tous les cas : $\Theta = \Phi - \Phi_1$, où

$$\Phi \equiv \text{angle}(MN, MY), \qquad \Phi_1 \equiv \text{angle}(M_1N_1, M_1Y_1)$$

et les formules (A) prendront la forme *invariante :*

$$(A')\begin{cases} -d\tau_{1g}\cos\omega_1 + d\sigma_{1n}\sin\omega_1 + d\Phi_1 = -d\tau_g\cos\omega + d\sigma_n\sin\omega + d\Phi, \\ (d\sigma_{1g} + d\omega_1)\cos\Phi_1 + (d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1)\sin\Phi_1 \\ \qquad = (d\sigma_g + d\omega)\cos\Phi + (d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega)\sin\Phi, \\ -(d\sigma_{1g} + d\omega_1)\sin\Phi_1 + (d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1)\cos\Phi_1 \\ \qquad = -(d\sigma_g + d\omega)\sin\Phi + (d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega)\cos\Phi. \end{cases}$$

L'existence de ces trois invariants s'explique *cinématiquement* tout de suite : *ce sont les rotations des deux trièdres parallèles :*

$$(MX, MY, MZ), \qquad (M_1X_1, M_1Y_1, M_1Z_1),$$

MZ, M_1Z_1 étant les normales aux plans

$$(MX, MY), \qquad (M_1X_1, M_1Y_1).$$

Un quatrième invariant, conséquence des (A) ou des (A'), est le suivant :

$$(d\sigma_{1g} + d\omega_1)^2 + (d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1)^2 = (d\sigma_g + d\omega)^2 + (d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega)^2;$$

ce sont les rotations :

$$\sqrt{Q_1^2 + R_1^2}, \quad \sqrt{Q^2 + R^2}$$

qui devaient bien être égales.

[5] *Quelques applications.* — 1° Comme première application, supposons que les normales aux deux surfaces le long des deux courbes considérées soient parallèles; nous aurons alors $\Theta = 0$ et les formules (A) se déduiront aux trois *invariants* d'une couple de courbes quelconques :

$$(A_1)\begin{cases} -d\tau_{1g}\cos\omega_1 + d\sigma_{1n}\sin\omega_1 = -d\tau_g\cos\omega + d\sigma_n\sin\omega, \\ d\sigma_{1g} + d\omega_1 = d\sigma_g + d\omega, \\ d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1 = d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega; \end{cases}$$

et, en prenant comme droite M_1X_1 la tangente M_1T_1 à (C_1), nous retrouvons les formules plus simples mentionnées au paragraphe 2 :

$$(A_1')\begin{cases} -d\tau_{1J} = -d\tau_g \cos\omega + d\sigma_n \sin\omega, \\ d\sigma_{1g} = d\sigma_g + d\omega, \\ d\sigma_{1n} = d\tau_g \sin\omega + d\sigma_n \cos\omega. \end{cases}$$

2° Supposons ensuite que le long des (C) et (C_1), $\Theta = \frac{\pi}{2}$; les deux surfaces sont orthogonales suivant les deux courbes, et nous trouvons alors les formules :

$$(A_2)\begin{cases} -d\tau_{1J}\cos\omega_1 + d\sigma_{1n}\sin\omega_1 = -d\tau_g\cos\omega + d\sigma_n\sin\omega, \\ d\sigma_{1g} + d\omega_1 = d\tau_g\sin\omega + d\sigma_n\cos\omega, \\ d\tau_{1g}\sin\omega_1 + d\sigma_{1n}\cos\omega_1 = -(d\sigma_g + d\omega). \end{cases}$$

Tel est, par exemple, le cas *d'une surface* (S) *et de sa développée* (S_1).

3° *Application à la sphère* (S) *de Gauss.* — Dans ce cas, nous aurons :

$$\Theta = 0, \quad d\tau_{1g} = ds\sin\omega, \quad d\sigma_{1g} = ds\,\text{tang}\,\vartheta + d\omega, \quad d\sigma_{1n} = ds\cos\omega,$$

et par suite :

$$ds^2 = d\sigma_{1n}^2 + d\tau_{1g}^2, \qquad \text{tang}\,\omega = \frac{d\tau_{1g}}{d\sigma_{1n}}.$$

Pour une ligne de courbure nous aurons donc $\omega = 0$ et pour une ligne asymptotique $\omega = \frac{\pi}{2}$. Résultats bien connus.

MEMOIRES

TROISIÈME SECTION

MISE AU POINT

DES

HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES NÉBULAIRES

par M. Louis MAILLARD

(LAUSANNE)

§ 1. — Les hypothèses.

Les nébuleuses-types. — Pour expliquer la formation mécanique du système solaire, on a recours à des nébuleuses fictives, qui peuvent se ramener à trois types principaux :

la nébuleuse de Laplace (1796-1811) : les rotations et les révolutions y sont toutes de sens direct;

la nébuleuse de Kant (1755) : la théorie n'exclut pas les mouvements de sens rétrograde, mais elle ne permet guère de les prévoir et d'en préciser les circonstances;

la nébuleuse de Faye (1884-1896) : d'abord homogène, elle possède ensuite un noyau central. Les planètes, issues d'anneaux circulaires, se succèdent de l'intérieur à l'extérieur. La nébuleuse agit sur chacune de ses particules; tant qu'elle est homogène, la loi d'attraction est

$$\Phi_1 = Ar;$$

une fois le Soleil constitué, elle devient :

$$\Phi_2 = \frac{B}{r^2}.$$

(r, distance d'une particule au centre de force.)

Dans l'intervalle, Faye admet que la loi d'attraction est

$$\Phi = a \cdot r + \frac{b}{r^2}.$$

(a, b, paramètres. Quand le temps croît,

a décroît de A à o, tandis que
b croît de o à B.)

Dans les anneaux, les vitesses linéaires de circulation croissent

durant une première période, du bord intérieur au bord extérieur;
durant une seconde période, du bord extérieur au bord intérieur.

Il s'ensuit (selon Faye) que les rotations des planètes sont

de sens direct durant la première période;
de sens rétrograde durant la seconde.

Suivant l'expression de la loi de force, les orbites sont successivement

des ellipses rapportées à leur centre (Φ_1),
des spirales qui se resserrent constamment (Φ),
des ellipses rapportées à un foyer (Φ_2).

Enfin, le sens des révolutions des satellites est, pour chaque système planétaire, celui de la rotation de la planète.

***

Les objections. — Résumons les principales objections que soulève cette hypothèse :

1° La séparation d'anneaux discontinus n'est pas plus possible à l'intérieur de la nébuleuse de Faye qu'à l'extérieur de la nébuleuse de Laplace. Le cas inexpliqué des planètes télescopiques devrait être la règle.

2° De l'intérieur à l'extérieur de l'anneau, la variation de la vitesse linéaire correspond exactement, à toute époque, à la loi de force centrale; cette variation ne saurait donc engendrer des tourbillons durables et d'allure systématique.

3° Selon le sens de leur rotation, les planètes se trouvent classées en deux groupes : au second appartiennent Uranus et Neptune, de rotation rétrograde. Or, le tableau du système impose un classement en deux groupes séparés par les planètes télescopiques : à l'extérieur, quatre grosses planètes de faible densité; à l'intérieur, quatre planètes beaucoup plus petites et plus denses.

4° Le sens des révolutions des satellites est celui de la rotation de leur planète... sauf pour les satellites (rétrogrades) VIII et IX de Jupiter, et IX de Saturne : chacune de ces planètes tournant sur elle-même en sens direct. Cette « anomalie » (que Faye ignorait) semble infirmer la règle.

5° Pour satisfaire aux exigences de la géologie, Faye fait naître la Terre avant le Soleil, ce qui accorde à la planète une existence de 30 à 50 millions d'années. — A la vérité, il est difficile de poursuivre des concordances géologiques tant que les données de la géologie sont aussi discordantes. Evalué par une vingtaine de méthodes, l'âge de la Terre est compris entre quelques millions et plus de 40 milliards d'années!

Au reste, pour le problème thermodynamique, peu importe. Avec les corps radioactifs, l'énergie disponible est très largement augmentée. Ainsi, la proportion d'hélium contenu dans les roches uranifères permet de leur attribuer une existence de 400 millions d'années. — Par surcroît, l'énergie se matérialise; elle est dégagée par la destruction des atomes, et la chaleur libérée entretient le rayonnement solaire et stellaire. Dès lors tombent les entraves que Faye avait imposées à sa théorie.

6° L'expression de la loi de force Φ ne peut convenir. « Elle correspond, dit Henri Poincaré, à une nébuleuse formée d'un noyau central d'une certaine masse qu'enveloppperait une atmosphère parfaitement homogène. Il est peu vraisemblable que la nébuleuse solaire ait offert cette constitution dans la période intermédiaire. La loi d'attraction réelle avait sans doute une forme beaucoup plus compliquée. »

Φ ne peut être qualifiée de loi naturelle : elle donne une attraction infinie à une distance infinie. Pour a et b constants (tous deux différents de zéro), les orbites ne sont plus elliptiques; dès lors, privée de tout contrôle tiré de l'observation, la théorie prend un caractère un peu artificiel. — On sait pourtant que dans un système d'étoiles doubles, l'orbite apparente de l'étoile satellite est une ellipse décrite suivant la loi des aires autour de l'étoile principale E, projetée en un point distinct du foyer. E doit être situé sur le grand axe de l'orbite vraie; sinon, à une distance donnée, l'attraction de E varierait avec la direction : ce qui est exclu(1).

Ces objections n'ont pas été réfutées valablement. Il paraît donc nécessaire de reprendre le problème(2).

---

(1) Laplace a établi que, les corps célestes s'attirant à très peu près comme si leur masse était condensée à leur centre de gravité, cette propriété s'applique à la loi Φ. Mais elle subsiste aussi pour toute loi de force très peu différente de Φ_1, Φ, Φ_2; ainsi pour les lois

$$f = \frac{\mu m}{r^2} \cdot e^{-\alpha r} \quad (\alpha \text{ très petit}) \qquad \text{(Laplace)};$$

$$f = \frac{C}{r^{3-\alpha}} \quad (\alpha \text{ voisin de } 1) \qquad \text{(Green, 1832)};$$

$$f = \frac{\mu m}{r^{2+\varepsilon}} \quad (\varepsilon = 0{,}000000\,1612) \qquad \text{(Newcomb, 1896)};$$

$$f = \mu m \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\right] \cdot e^{-\alpha r} \quad (\alpha \text{ très petit}) \qquad \text{(Neumann, 1896)}.$$

(2) Nous n'entendons pas ignorer ou sous-estimer l'hypothèse suggestive et ingénieuse de M. Émile Belot (*Essai de cosmogonie tourbillonnaire*, 1911). Elle fait provenir le système

*
* *

Autre hypothèse. — Nous proposons l'hypothèse suivante, qui admet deux périodes, comme celle de Faye, mais qui nous conduira à des résultats très différents :

Séparée d'un ensemble d'ordre supérieur, la nébuleuse (solaire) possède deux mouvements principaux : une translation rapide autour d'un centre inconnu, très éloigné, et une rotation très lente sur elle-même.

La rotation lui donne une forme à peu près sphérique. — La matière nébuleuse est rare et froide; les particules se meuvent en tous sens, d'où il suit que la masse est à peu près homogène.

La nébuleuse (S) contient en puissance toute l'énergie rayonnante du système solaire; l'attraction et le refroidissement superficiel la contractent; la contraction, qui commence par la surface, diminue très rapidement avec la distance au centre.

Deux particules quelconques s'attirent selon la loi de la gravitation universelle. La nébuleuse entière attire l'une quelconque de ses particules; au début, sa force attractive est proportionnelle à la distance de la particule au centre; en finale, elle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

Durant l'évolution mécanique du système, une particule décrit une spirale telle que si la contraction cessait brusquement, cette trajectoire serait une ellipse rapportée à un centre de force, S, *situé entre le centre de figure et le foyer.*

§ 2. — Loi de la force attractive.

Les trajectoires. — L'équation de la trajectoire elliptique d'une particule M, de masse m, est

en coordonnées rectangulaires :

$$x^2(1-e^2)+2e\beta x+y^2-k^2=0,$$

---

solaire de la rencontre à très grande vitesse, du choc et de la compénétration d'une nébuleuse animée d'un mouvement tourbillonnaire (sorte de tube-tourbillon) et d'une nébuleuse amorphe.

Moyennant des hypothèses secondaires, cette théorie fournit des relations remarquables entre divers éléments du système. Mais son agencement ne va pas sans présenter quelques difficultés.

Nous n'en disons pas plus, parce que nous n'aurons pas à y recourir.

en coordonnées polaires :

$$\frac{k^2}{r} = e\beta\cos\varphi + \sqrt{k^2 - \alpha^2 e^2\cos^2\varphi}.$$

[α, β, paramètres ; k, ordonnée du point sur $+\mathrm{S}y$;
$e \leqslant 1$, excentricité, *indépendante de* α *et* β ;
a, b, demi-axes ; $p = \dfrac{b^2}{a} = \sqrt{k^2 - \alpha^2 e^2}$.
α, β et k sont liés par la relation

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 = 1 ;$$

α décroît de $k = b$ très grand jusqu'à une valeur voisine de O ($\alpha = 0$ pour $\beta = k = p$), tandis que β varie d'une valeur voisine de O ($\beta = 0$ pour $\alpha = k = b$) jusqu'à la valeur $k = p$. — Enfin k, compris entre b et p, diminue constamment quand le temps t croît.]

***

Connaissant la trajectoire de M, *on peut calculer l'expression de la force centrale.* J'ai trouvé, en partant de l'équation en coordonnées polaires, la loi

$$\mathrm{F} = \frac{\mu m r}{\left(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}\right)^3}.$$

Si C est la constante des aires, on a la relation

$$\frac{\mu}{\mathrm{C}^2} = \alpha^2(1 - e^2) + \beta^2 = k^2 - \alpha^2 e^2 = p^2,$$

c'est-à-dire

$$\mu = \mathrm{C}^2 p^2.$$

Pour $r \to \infty$, $\lim \mathrm{F} = 0$.

***

Cas limites. — 1° *Cas initial* : $\beta = 0$, $\alpha = k = b$.

$$F_1 = \frac{\mu m r}{\alpha^6} = \frac{\mu m r}{b^6}; \qquad \frac{dF_1}{dr} > 0.$$

$$\mu = C^2 b^2 (1 - e^2) = n^2 b^6 \qquad \left(n = \frac{2\pi}{T}\right);$$

donc

$$F_1 = m \cdot n^2 \cdot r.$$

Équation de la trajectoire (ellipse de centre S) :

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}.$$

Sur cette trajectoire, la vitesse de M est

$$v_1 = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\alpha^3} \cdot r. \qquad \frac{dv_1}{dr} > 0.$$

2° *Cas final* : $\alpha = 0$, $\beta = k = p$.

$$F_2 = \frac{\mu m}{p^3 r^2}; \qquad \frac{dF_2}{dr} < 0.$$

$$\mu = C^2 p^2 \quad \text{et} \quad \frac{C^2}{p} = \mathcal{M}, \quad \text{masse du Soleil};$$

donc

$$F_2 = m \cdot \mathcal{M} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Équation de la trajectoire (ellipse de foyer S) :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Sur cette trajectoire, la vitesse de M est

$$v_2 = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}. \qquad \frac{dv_2}{dr} < 0.$$

* * *

Les surfaces de niveau. — Soit $SM = r$; $S\zeta$ l'axe de rotation de la nébuleuse (S); ρ, la distance de M à cet axe.

Quelle est, à une époque donnée (α et β différents de zéro, *d'ailleurs quelconques*), *la condition d'équilibre de* M, *soumis à l'action de* F *et de la force centrifuge?*

L'égalité

$$\frac{\mu r}{\left(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}\right)^3} = \omega^2 \rho$$

(ω, vitesse angulaire) ne peut être satisfaite, *quels que soient* α *et* β, que si $r = \alpha$.

F se réduit alors à

$$f = \frac{\mu m r}{\alpha^6} = \frac{\mu m}{\alpha^5}.$$

Les trajectoires sont des cercles passant par S.

En tout point M(ξ, η, ζ), où la condition nécessaire est satisfaite, passe une surface de niveau

$$\frac{\mu}{\alpha^6}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \omega^2(\xi^2 + \eta^2) = N.$$

[N, constante, déterminée par la condition $r = \alpha = \rho$: $N = \frac{\mu}{\alpha^4} - \alpha^2\omega^2$.]

Cette surface est un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe $S\zeta$; les carrés des demi-axes sont

$$a^2 = b^2 = \frac{N\alpha^6}{\mu - \alpha^6\omega^2} = \alpha^2, \qquad c^2 = \frac{N\alpha^6}{\mu}.$$

La différence des axes diminue et tend vers o *avec* α.

Dans le plan de l'équateur, seul, l'attraction et la force centrifuge sont directement opposées :

$$\rho = r.$$

La contraction rapproche du centre les particules situées dans ce plan. Sur les ellipses méridiennes, les particules sont attirées vers l'équateur par la composante tangentielle de la force centrifuge. La matière s'écoule donc sur une pellicule limi-

tée à une surface de niveau, et se rassemble en un bourrelet, puis en un disque équatorial. Les mouvements en tous sens, annulés par les chocs, n'y ont pas de résultante systématique, tandis que la rotation de la nébuleuse y subsiste. A la périphérie, la contraction tend à modifier la vitesse linéaire en grandeur et en direction, tandis que F tend à décentrer les trajectoires.

Dénudée, la surface de niveau se refroidit par rayonnement; elle se contracte, et dès lors, en ses points plus rapprochés de S, l'attraction l'emporte sur la force centrifuge. r diminue plus vite que $\alpha (r < \alpha$, F imaginaire); l'ellipsoïde abandonne un anneau limité par deux cercles; le cercle extérieur est décentré.

Tant que l'on a $r < \alpha$, l'équilibre est impossible; il en est ainsi jusqu'à ce que la masse entière se soit contractée, tandis que l'attraction de S augmente par la chute incessante des particules. Près de S, elles se choquent en grand nombre, avec perte de force vive et production de chaleur; leur agglomération est le germe du Soleil.

A mesure que la masse centrale augmente, α diminue; lorsque la condition $r = \alpha$ est de nouveau satisfaite, un nouvel anneau se sépare, et ainsi de suite.

La discontinuité des anneaux s'explique donc par la discontinuité de F *en* $r = \alpha$ *et par la contraction rapide qui, après une séparation, laisse pour un temps* $r < \alpha$.

§ 3. — Les anneaux planétaires.

Largeur moyenne. — Soit un anneau d'une certaine épaisseur ε; dans le plan équatorial, le bord extérieur est à peu près un cercle de centre C, de rayon $r = \alpha + h$; le bord intérieur, un cercle de centre S, de rayon α.

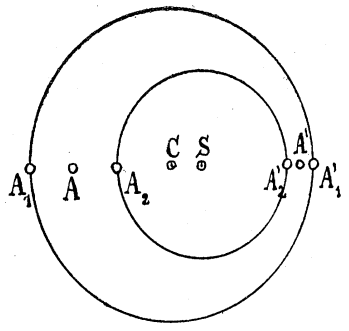


Figure 1. — [Plan équatorial de (S)].

$$\left[\mathrm{CA_1} = \mathrm{CA_1'} = r;\quad \mathrm{SA_2} = \mathrm{SA_2'} = \alpha;\quad \mathrm{CS} = c.\right.$$

$$\mathrm{A_2A_1} = \text{largeur max.} = r + c - \alpha = h + c;$$
$$\mathrm{A_2'A_1'} = \text{largeur min.} = r - c - \alpha = h - c;$$

$$\text{largeur moyenne} = h = r - \alpha.$$

$$\mathrm{SA} = \alpha + \frac{1}{2}\mathrm{A_2A_1} = \alpha + \frac{1}{2}(h + c) = \mathrm{CA'};$$

$$\mathrm{SA'} = \alpha + \frac{1}{2}\mathrm{A_2'A_1'} = \alpha + \frac{1}{2}(h - c) = \mathrm{CA}.$$

O, milieu de CS :

$$\left.\mathrm{OA} = \alpha + \frac{1}{2}h = \mathrm{OA'}.\right]$$

* * *

Le régime de la séparation s'étend de $r = \alpha$ à $r = \alpha + h$ pourvu que dans les expressions de F et de v le terme

$$\beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}$$

soit négligeable devant α^2, c'est-à-dire que

$$\beta\sqrt{r^2 - \alpha^2} = \frac{1}{q}.\alpha^2 \quad \text{pour} \quad r = \alpha + h.$$

(q, entier arbitrairement grand).

On a alors

$$q^2\beta^2(2\alpha h + h^2) = \alpha^2,$$

et

$$h = \alpha\left[\left(1 + \frac{1}{q^2\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

La largeur moyenne h diminue donc et tend vers zéro avec α. Pour un α donné, h est d'autant plus grand que $q\beta$ est plus petit;

$$q\beta < 1, \qquad \beta < \frac{1}{q}$$

donne

$$h > \alpha(\sqrt{2} - 1) > 0{,}4\,\alpha.$$

Pour

$$q\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad h = \alpha,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour β extrêmement petit.

Si

$$q\beta > 1,$$

$$h = \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{1}{q\beta}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{q\beta}\right)^4 + \dots\right],$$

soit, approximativement,

$$h = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{q^2\beta^2}.$$

***

VITESSE DE ROTATION. — *Une particule tourne avec un anneau équatorial autour de* S. *Quelle est la variation de sa vitesse linéaire, v?*

La condition d'équilibre de la particule dans le plan de l'équateur est

$$\frac{\mu r}{\left(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}\right)^2} = \omega^2 r.$$

Donc,

$$v = \omega r = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}\cdot r}{\left(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{2}{\mu^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dr} = \frac{2\alpha^2\sqrt{r^2 - \alpha^2} - \beta(r^2 + 2\alpha^2)}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}\left(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2}\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Sur un cercle séparateur, $r = \alpha$, la dérivée est infinie. Pour $r = \alpha + h$, le signe de la dérivée est celui de

$$2\alpha^2\sqrt{2\alpha h + h^2} - \beta(3\alpha^2 + 2\alpha h + h^2).$$

Si l'on pose

$$\frac{2\alpha^2\sqrt{2\alpha h + h^2}}{3\alpha^2 + 2\alpha h + h^2} = \lambda,$$

la dérivée est positive, nulle ou négative, suivant qu'on a

$$\beta \gtrless \lambda.$$

$$\left(\lambda_{\max.} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right).$$

Nous avons donc à considérer les deux périodes

I. $\beta < \lambda$,

F rapproché de F_1; v croît avec r; et

II. $\beta > \lambda$,

F se rapproche de F_2; v décroît quand r croît.

Il y aura en outre une période intermédiaire entre les régimes I et II.

***

Dans toute la région $r < \alpha$, F imaginaire, le sphéroïde nébuleux (S), d'abord à peu près homogène, puis pourvu d'un noyau, attire chacun de ses points. Sur la courbe des vitesses $[v = \psi(r)]$, le raccord se fait par un point anguleux. Une fois l'anneau séparé, chacun de ses points est attiré par (S) selon la loi de Newton, finalement suivant F_2.

La loi d'attraction change donc, ce qui est une cause d'instabilité de l'anneau.

Pour α quelconque ($\neq 0$), on a, à la séparation ($r = \alpha$) :

$$v = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}, \quad r = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}.$$

Sous le régime de la loi F_2, on a, dans les mêmes conditions :

$$v_2 = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{3}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{3}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour $\beta = \alpha$,

$$v_2 = \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2} = v.$$

Dans ce cas seulement, une fois l'anneau séparé l'expression de la vitesse reste la même. Cette égalité est une cause de stabilité de l'anneau.

§ 4. — Les tourbillons planétaires.

Chute d'une particule vers S. — *Un anneau équatorial tourne autour de* S, *dans le sens direct, avec la vitesse angulaire* ω. *La particule* M *tombe vers* S *avec l'accélération* γ. *Quel est le mouvement relatif de* M ?

[*Axes* : + $M_0 z$, direction du centre de force S ;
+ $M_0 x$, tangente au bord extérieur de l'anneau, sens de la rotation.

Position initiale : $M_0 (t = 0, \quad x = z = 0)$.

Vitesse initiale : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0$ (contraction en M_0)].

Période I. — Vitesse linéaire de circulation décroissante quand z croît; ω à peu près constante.

Equations du mouvement de M :

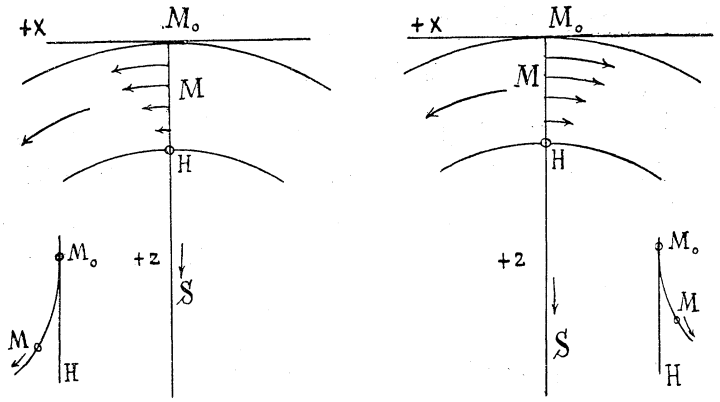
$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dz}{dt}, \qquad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma - 2\omega \frac{dx}{dt};$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma z;$$

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = 2\omega \cdot z, \qquad (4) \qquad \frac{dz}{dt} = v_0 + \gamma t - 2\omega x.$$

Substituons (4) dans (1) :



Période I. *Période II.*

FIG. 2. — [Plan équatorial de (S)].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\omega^2 x = 2\omega(v_0 + \gamma t).$$

Intégrons, puis développons :

$$2\omega x = v_0(1 - \cos 2\omega t) + \gamma\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right);$$

$$(5) \qquad x = \omega t^2\left(v_0 + \frac{1}{3}\gamma t\right) + \omega^3[\,].$$

Introduisons cette valeur dans (4), intégrons et développons :

$$z = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 - \frac{1}{3}\omega^2 t^3\left(2v_0 + \frac{1}{2}\gamma t\right) + \omega^3[\,].$$

Pente de la tangente en M : $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{v_0 + \gamma t - \omega x}{2\omega z}$.

Dévié vers la gauche de M_0S, M décrit un arc de faible courbure *dans le sens rétrograde.* Le signe de la déviation ($x > 0$) est dû à la différence positive des vitesses linéaires de circulation de M_0 à H(1).

(1) Pour ω constant, le phénomène est comparable à la déviation vers l'est dans la chute des corps terrestres, bien que la pesanteur ait alors une expression différente.

Période II. — Vitesse linéaire de circulation croissante avec z; de M_0 à H, la différence des vitesses est négative. S'il ne s'agit que du signe de la déviation x, on peut se ramener au cas précédent en remplaçant ω par $-\omega$,

$$\text{d'où } x < 0.$$

Dévié vers la droite de M_0S, M décrit un arc de faible courbure *dans le sens direct.*

Passage de I à II : Il existe donc nécessairement une période transitoire pendant laquelle la déviation de M par rapport à M_0S est insensible.

*
* *

Centres de condensation. — Les matériaux qui tombent dans l'équateur sur des surfaces de niveau, enlevant au sphéroïde (S) une pellicule extérieure, ont des mouvements en tous sens, de résultante négligeable, tandis que l'anneau équatorial ainsi constitué circule autour de S dans le sens direct.

La concentration des matériaux s'effectue surtout dans la région moyenne de l'anneau, soit sur une ellipse voisine du cercle de centre O, de rayon $OA = \alpha + \frac{h}{2}$.

[Figure 1, page 474. — Attiré par A_1 et A_2, A est à très peu près en équilibre relatif; de même A', attiré par A_1' et A_2'.]

*
* *

Rotation des tourbillons. — La matière s'agglomère le long d'une ellipse presque circulaire; les centres de condensation attirent les particules voisines, qui ont des vitesses initiales toutes de même sens (I, rétrograde; II, direct)(1).

---

(1) Dès le début de la période I, un point P, de masse unité, à la distance

$$PS = r \text{ du centre de force (de masse } \mathfrak{M}),$$
$$PA = \rho \text{ d'un centre de condensation (de masse } m),$$

est en équilibre si

$$\mathfrak{M} r = \frac{m}{\rho^2}.$$

Soit $m = 10^{-n}\,\mathfrak{M}$; alors

$$r \cdot \rho^2 = 10^{-n}.$$

(r et ρ sont exprimés en unités astronomiques.)

Pour $r = 100$, $\rho = 10^{-\frac{1}{2}(n+2)}$,	Pour $r = 1000$, $\rho = 10^{-\frac{1}{2}(n+3)}$,
$n = 10$, $\rho = 10^{-6}$ (= 150 km)	
$n = 8$, $\rho = 10^{-5}$ (= 1500 km)	$n = 9$, $\rho = 10^{-6}$
$n = 6$, $\rho = 10^{-4}$ (= 15000 km)	$n = 7$, $\rho = 10^{-5}$

Etc.

Des tourbillons, centrés à peu près sur le cercle de rayon $\alpha + \frac{h}{2}$, se produisent à l'intérieur de l'anneau; tous de même sens, ils se réunissent, et leur fusion est facilitée par toute dissymétrie de l'anneau, par l'inégalité des masses tourbillonnantes et de leurs vitesses de circulation. Le tourbillon résultant est une nébuleuse planétaire (P), qui tourne sur elle-même

dans le sens rétrograde (durant la période I) ou

dans le sens direct (durant la période II).

*
* *

L'excentricité de l'ellipse décrite par le centre d'un tourbillon planétaire reste faible; elle est nulle dans le cas *théorique* où ce centre décrit le cercle de rayon $\alpha + \frac{h}{2}$; et Henri Poincaré a démontré que, *lorsque la loi d'attraction varie avec le temps* (quelle que soit sa forme), *une orbite circulaire demeure circulaire, son rayon seul variant avec t.* — Mais, dans notre cas, la contraction superficielle tend à modifier la grandeur et la direction de la vitesse; celle-ci de circulaire devient elliptique; et la loi d'attraction change après que l'anneau est définitivement séparé de (S).

*
* *

En résumé, les centres des tourbillons planétaires décrivent autour de S, dans le sens direct, des ellipses peu excentriques et peu excentrées;

durant la période I ($\beta < \lambda$), les rotations sont rétrogrades;

durant la période II ($\beta > \lambda$), les rotations sont directes.

Lors du passage de I à II (de $\beta = \lambda$ à $\beta = \alpha$), les tourbillons (s'il s'en forme) n'ont pas de résultante de sens déterminé.

$\alpha > \beta$: matière peu condensée, anneaux larges;

$\alpha < \beta$: densités plus fortes, anneaux plus étroits.

§ 5. — Formation des planètes et des satellites.

Les analogies. — D'une manière générale, dans chaque nébuleuse planétaire (P), les phénomènes de construction vont se succéder comme dans la nébuleuse solaire (S), avec des paramètres particuliers α_P et β_P, et des périodes 1 et 2 propres à chaque système.

Dans la formation des planètes d'une part, des satellites d'autre part, il y aura donc des analogies. Il y aura aussi des différences : car si, dès le début, nous avons négligé l'attraction exercée sur (S) par des corps extérieurs, il n'est pas possible de négliger de même l'attraction de (S) sur les systèmes (P).

Voici comment s'établit la transposition de la nébuleuse solaire à une nébuleuse planétaire :

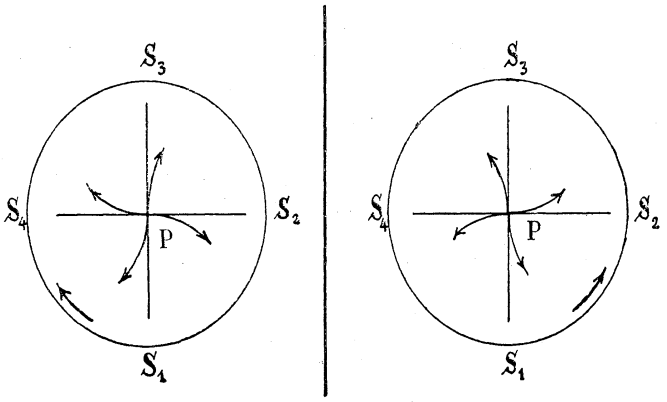
Nébuleuse (S).	*Nébuleuse* (P).
Centre de force : S, noyau du Soleil.	Centre de force : P, noyau de la planète.
anneau planétaire	anneau satellitaire
tourbillon planétaire	tourbillon satellitaire
planète	satellite
I, rotation (rétrograde) d'une planète, en sens contraire de la rotation de (S).	1, rotation d'un satellite en sens contraire de la rotation (rétrograde ou directe) de (P).
II, rotation (directe) d'une planète dans le sens de la rotation de (S).	2, rotation d'un satellite dans le sens de la rotation de (P).
Sens de la révolution des planètes autour de S : sens (direct) de la rotation de (S).	Sens de la révolution des satellites autour de P : sens (rétrograde ou direct) de la rotation de (P). — Ce sens a pu changer quand (S) a passé de I à II.

***

Sens de la rotation d'une nébuleuse planétaire. — *Une nébuleuse planétaire* (P), *sphéroïde de rayon* ρ, *gravite autour de* S *dans le sens direct. Quel sera le sens de sa rotation ?*

Durant la période I, P est dévié dans sa chute vers la gauche de la direction PS; lors d'une révolution complète de P autour de S, le centre de force se situe, par rapport à P, successivement dans les directions

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_1.$$



Période I. *Période II.*

FIG. 3. — [Plan équatorial de (P)].

La rotation de (P) *est de sens rétrograde.*

Durant la période II, P est dévié dans sa chute vers la droite de la direction PS; *la rotation est de sens direct.*

Dans la seconde période, la rotation directe s'accélère à mesure que P se rapproche de S. Qu'en est-il dans la première période?

***

CHANGEMENT DU SENS DE LA ROTATION. — *Sur l'équateur de* (P), *qui coïncide avec l'équateur de* (S), *un point* M *est astreint par l'attraction de* (P) *à décrire une ellipse voisine d'un cercle de rayon* ρ, *avec la vitesse initiale* v_0 (*rétrograde ou directe*).

Le système (P) *gravite autour de* S *dans le sens direct. Quel est le mouvement relatif de* M, *attiré par* S (*accélération* γ)?

[*Axes :* + Px, sens de la circulation de (P) autour de S ;
+ Pz, direction du centre de force S].

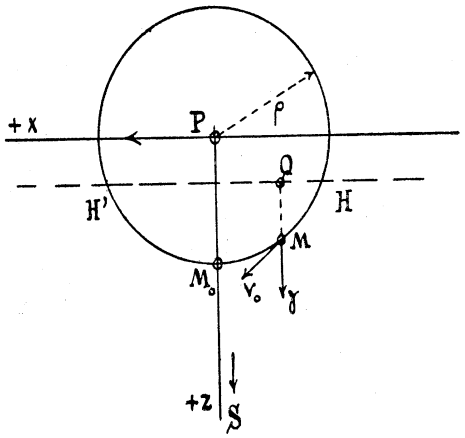


FIG. 4. — [Plan équatorial de (P)].

La vitesse de M à l'instant t est

$$v^2 = 2\gamma(z-a).$$

Pour $z = z_0$, $v = v_0$:

$$v_0^2 = 2\gamma(z_0 - a),$$

d'où

$$a = z_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma} \leqslant \rho - \frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

Supposons γ croissant avec t.
Au début, pour une faible valeur de γ, a prend une valeur négative.

Pour (1) $a \leqslant -\rho$, ou $\rho \leqslant \frac{v_0^2}{4\gamma}$,

M parcourt le cercle entier, dans le sens de la vitesse initiale v_0.

Pour (2) $-\rho < a < \rho$, ou $\rho > \frac{v_0^2}{4\gamma}$,

M décrit l'arc HM_0H', dans un sens, puis dans le sens opposé, et cet arc diminue à mesure que γ augmente.

Pour $a = \rho, \quad v = 0;$

après une série d'oscillations autour de M_0, M demeure en ce point, qui est un centre de libration. Pour une amplitude très petite, la durée d'une oscillation simple est

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}}.$$

M_0, toujours dirigé vers S, décrit autour de P, dans le sens direct, un tour entier du cercle ρ, dans le temps de la révolution de (P) autour de S. Ainsi :

Rétrogrades durant la période I, les rotations des nébuleuses planétaires ont pu changer de signe durant la période II.

Dans ce cas, les révolutions dans un système (P) *seront*

rétrogrades pour les satellites extérieurs, les plus anciens;

directes pour les satellites intérieurs, les plus récents.

La condition (2) implique, pour une vitesse initiale donnée,

un diamètre assez grand ou

une attraction assez forte.

Elle a pu être satisfaite

dans les nébuleuses des planètes extérieures, les plus grosses; ou

dans les nébuleuses des planètes les plus proches de S.

***

Inclinaison des axes planétaires. — La loi de force F ne permet pas de prévoir quelles seront les inclinaisons des axes (non plus que les excentricités) dans des cas donnés. — Mais le cas d'un axe de rotation de (P) rigoureusement perpendiculaire au plan idéal de l'équateur de (S) est si théorique, si exceptionnel, que sa probabilité est très faible.

Soit donc, à la fin de la première période, une nébuleuse (P) tournant sur elle-même autour de l'axe QQ′, dans le sens rétrograde. Dès le début de la seconde période, l'attraction F agit comme un frein dans le sens direct, et dans des plans perpendiculaires à l'axe ΠΠ′, qui est parallèle à celui de la nébuleuse (S).

En tout point M de (P) passe

un cercle ϖ, dans un plan parallèle à l'équateur de (S);

un cercle q, dans un plan parallèle à l'équateur de (P).

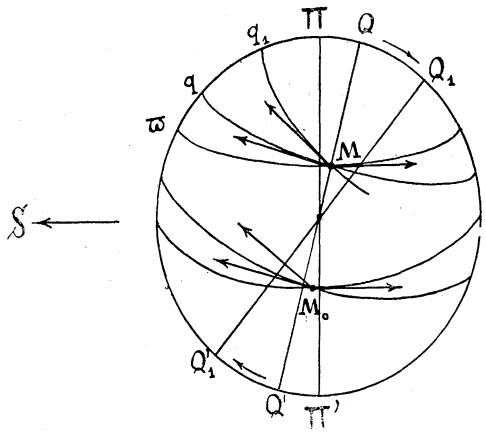


FIG. 5.

Suivant la tangente à q, M a une vitesse de sens rétrograde; suivant la tangente à ϖ, une vitesse de sens direct. La composition de ces vitesses montre que *la trajectoire de* M *se redresse sur le plan équatorial de* (S); QQ′ *s'incline en* Q_1Q_1'.

Si Q_1 passait au-dessous, Q_1' au-dessus de ce plan, la rotation de (P) serait dès lors de sens direct.

En résumé, *à mesure que la loi d'attraction se rapproche de* F_2, *les rotations rétrogrades des nébuleuses planétaires tendent à devenir directes.*

§ 6. — Les concordances.

LES COMÈTES. — Les matériaux échappés à la chute vers l'équateur se détachent du sphéroïde (S) et poursuivent leur gravitation en tous sens, sur des ellipses allongées. Telle est l'origine des comètes.

La variation de F ne fait que resserrer leurs orbites primitives, centrées sur S, qui est devenu le foyer des orbites actuelles.

* * *

Les planètes extérieures. — La nébuleuse (S), d'abord presque homogène, possède ensuite un faible noyau central.

Les planètes ultra neptuniennes pourront avoir des rotations rétrogrades ou directes, car F ne croît pas indéfiniment avec r :

$$\text{Pour } r \to \infty, \qquad \lim F = 0 \quad \text{et} \quad \lim v = 0.$$

Les planètes les plus éloignées du Soleil pourraient donc avoir des rotations directes et des satellites tournant autour d'elles dans le sens direct. Si dans un tel système planétaire les révolutions des satellites étaient les unes directes, les autres rétrogrades, ce sont *les satellites les plus éloignés de la planète qui tourneraient autour d'elle en sens contraire de sa rotation actuelle.*

La première période se rapporte aux systèmes des grosses planètes extérieures, formés par des tourbillons de sens rétrograde (α grand, anneaux larges); les masses sont fortes, les densités faibles.

En prenant pour unités la masse et la densité de la Terre, on a les valeurs actuelles suivantes :

	Masse.	Densité[1].
(Soleil	333432	0,256)
Neptune	17,3	0,22
Uranus	14,6	0,23
Saturne	95,2	0,13
Jupiter	318,4	0,25

Neptune et Uranus ont des rotations rétrogrades; le satellite de Neptune (distance : 13 rayons de la planète) et les quatre satellites d'Uranus (de 7,7 à 23,6 rayons) ont des révolutions rétrogrades. — Le système de Neptune, le plus ancien, n'a pas été troublé visiblement par le *freinage* direct au début de la deuxième période.

Cette influence agit sur le système d'Uranus alors que la planète, sphéroïde nébuleux, tournait en sens rétrograde autour de son axe QQ′ (*fig.* 5, p. 486); cet axe s'est incliné très fortement; mais après la constitution définitive de la planète, la rotation de celle-ci demeure rétrograde.

Saturne et Jupiter proviennent de nébuleuses qui tournaient sur elles-mêmes en

---

(1) D'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. La détermination de la densité n'est pas rigoureusement certaine. — Au surplus, comme l'a fait remarquer M. A. Véronnet, il y a lieu de corriger ces nombres bruts en tenant compte des températures moyennes; alors, la série des densités décroît du Soleil (densité 10) à Neptune.

sens rétrograde durant la séparation des anneaux extérieurs et de leurs tourbillons satellitaires. Le régime II s'installe, la rotation de (P) se ralentit, s'annule, puis change de signe; les satellites séparés ensuite sont directs, comme les rotations actuelles des deux planètes. — Le satellite rétrograde de Saturne est à la distance 214 de la planète; les neuf autres satellites, tous directs, en sont distants de 3 à 59 rayons; on ne connaît aucun satellite dans l'intervalle (155 rayons).

Les deux satellites rétrogrades de Jupiter sont au-delà de 300 rayons de la planète; les distances des sept satellites directs vont de 6 à 164,5. Aucun satellite n'a été découvert dans l'intervalle (165 rayons).

L'évolution des deux planètes ne paraît pas être achevée; les anneaux de Saturne, distants de 1,5 à 2,25 seulement, ont dû se former sous le régime

$$\lambda_P \ll \beta_P \leqslant \alpha_P,$$

qui n'est pas le régime final.

***

Les planètes télescopiques. — Rétrogrades (I), puis directes (II), les rotations des tourbillons ne peuvent avoir une allure systématique lorsque $\beta = \lambda$

$$\left(\lambda_{max} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = 0{,}6\,\alpha\right).$$

Sur les cercles séparateurs ($r = \alpha$), le régime des vitesses linéaires reste le même, après la séparation, lorsque $\beta = \alpha$. Les planétules ne peuvent s'agglomérer en une grosse masse; elles gravitent conformément à la loi de Newton, donc à la troisième loi de Kepler. Mais leur formation ne peut être continue jusqu'à $\alpha = 0$.

***

Les planètes intérieures. — $\beta > \lambda$: les tourbillons planétaires, de sens direct, ont une résultante unique; pour $\beta > \alpha$, le régime des vitesses dans un anneau change après la séparation, ce qui rend l'anneau instable. — Les anneaux sont plus

étroits (α petit), la matière est plus dense; les mouvements deviennent plus rapides; les satellites sont plus rares :

	Masse.	Densité.
Mars.....	0,11	0,7
La Terre,.....	1	1
Vénus.....	0,8	0,9
Mercure.....	0,06	1,1

La Lune, qui est un gros satellite (diamètre 0,3), réalise le cas d'une révolution de même durée que la rotation.

D'après Schiaparelli et Lowell, Vénus et Mercure graviteraient dans les mêmes conditions relatives que la Lune. Mais le fait demeure incertain.

Les planètes intra-mercurielles, qui ne peuvent être, de l'opinion générale, que des corpuscules, ont des mouvements de sens direct, si la loi F_2 leur est applicable. Il faut toutefois faire une réserve : *l'attraction gravitique ne peut grandir indéfiniment quand r tend vers* 0; à de très petites distances, F_2 est en défaut (1).

L'aplatissement des surfaces de niveau diminue avec α : l'aplatissement du Soleil est insensible.

---

(1) Il en est de même, dans des conditions semblables, pour toutes les lois physiques de la forme $A.r^{-n}$ $(n > 0)$; de même encore pour le coefficient

$$\beta^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

qui figure dans la transformation de Lorentz, et qui devient infini pour $v = V$, vitesse de la lumière.

Le fait qu'une formule est en défaut dans un cas-limite signifie seulement qu'un raccord est à trouver, qu'une découverte est à faire.

Dans notre cas, pour α très petit, nous aurions à peu près

$$F = \frac{\mu.mr}{(\alpha^2 + \beta r)^3},$$

qui pour $r = 0$ donne $\lim F = 0$.

§ 7. — Conclusion.

L'hypothèse et la loi d'attraction qui en découle paraissent fournir une solution, au moins provisoire et approximative, du problème cosmogonique restreint au système solaire.

Nous nous sommes interdit toute hypothèse secondaire. Nous ne pouvons pas préciser beaucoup la variation des masses, ni celles des inclinaisons. Nous n'avons aucune règle pour exprimer les excentricités. — Il n'est pas difficile cependant de trouver des relations intéressantes entre les valeurs numériques actuelles de ces éléments : Les coordonnées étant connues de quelques points d'un plan, on peut relier ces points par une infinité d'arcs de courbes. Une hypothèse de simplification et d'esthétique permet de choisir arbitrairement l'une de ces courbes, dont l'équation empirique exprime une certaine loi. — Quant à démontrer qu'il s'agit alors d'une loi naturelle, c'est une autre question.

Il est assez effrayant de penser à tout ce que néglige et veut négliger notre hypothèse : résistance variable du milieu, chocs et demi-chocs; variations de température; alternatives de refroidissement suivi d'une contraction, et de réchauffement suivi d'une dilatation; variation des densités, pour des causes diverses; courants et tourbillons de convection; marées; attractions mutuelles des corps d'un même système planétaire ou de deux systèmes voisins; actions électromagnétiques, actions chimiques, etc.

Il est donc sage de s'en tenir aux concordances générales, et de renoncer à proposer de nouvelles « harmonies de la Nature ».

DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION SÉCULAIRE DE LA TERRE

DANS LA THÉORIE D'ARRHENIUS

PAR

ÉMILE SCHWOERER

Correspondant de l'Institut de France.

(COLMAR)

D'après la théorie d'ARRHENIUS, la lumière exerce sur les surfaces situées dans son champ d'action une pression, dite pression de radiation, qui est due au *choc* de cet agent, considéré comme un fluide fictif frappant normalement ces surfaces. Ce fluide recevant une quantité de mouvement de la source dont il émane, transporte cette quantité de mouvement à travers l'espace et la communique aux obstacles qu'il rencontre. Autrement dit, les corps qui reçoivent de la lumière, de la chaleur rayonnante, sont comme *repoussés* par elles.

Il m'a semblé qu'il serait intéressant d'étudier l'action de cette pression sur le mouvement de la Terre.

I. — RÉSULTATS DE L'ANALYSE.

On sait que la pression qu'exercent, en tous sens, les atomes d'un gaz est en raison inverse du volume et en raison directe de la température absolue. Si, donc, nous désignons par D la distance moyenne inconnue des atomes correspondant à un volume V_0, on a, pour un autre volume V et pour la distance atomique r, la relation

$$V = V_0 \left(\frac{r}{D}\right)^3$$

La combinaison de cette formule avec celle des gaz parfaits donne

$$P = P_0 \left(\frac{D}{r}\right)^3 \frac{T}{T_0},$$

équation qui nous montre que l'intensité de la répulsion calorifique, considérée comme une force interatomique, est inversement proportionnelle au cube de la distance des atomes, quelle qu'elle soit d'ailleurs. C'est ce que HIRN a développé dès la première édition (1862) de son *Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur*. On peut donc admettre que, si la chaleur agit aussi répulsivement sur les corps se trouvant dans l'espace, cette répulsion suit la même loi, mais que son intensité, à égalité de distance, dépend non de la masse des corps, comme dans l'attraction newtonienne, mais de leur température et de leur surface. La température spécifique des rayons solaires est, à toutes distances, la même que celle de la photosphère, et, pendant un temps limité, nous pouvons considérer cette température comme invariable.

Cela posé, l'action totale du Soleil sur un corps M peut être exprimée par une équation de la forme

$$F = -G\left(\frac{D}{r}\right)^2\left(1-\eta\frac{D}{r}\right),$$

G désignant l'intensité de l'attraction rapportée à l'unité de masse et à la distance D,

r le rayon vecteur à l'instant dt, et

η un coefficient égal à la valeur absolue du rapport de la répulsion et de l'attraction.

Soit ds l'élément de la trajectoire décrit par M pendant l'instant dt. La composante tangentielle de la force accélératrice est

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -G\left(\frac{D}{r}\right)^2\left(1-\eta\frac{D}{r}\right)\frac{dr}{ds},$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\int 2GD^2\left(1-\eta\frac{D}{r}\right)\frac{dr}{r^2} = G\frac{D^2}{r}\left(2-\eta\frac{D}{r}\right) + \text{const.}$$

Supposons que le point P où se trouve M, correspondant à la valeur D du rayon vecteur, soit précisément le périhélie et mesurons les angles décrits à partir de ce rayon vecteur. Soit V la vitesse en ce point. Il en résulte, pour la valeur de la constante,

$$c = V^2 - GD(2-\eta),$$

et l'on a, par suite, pour la vitesse à une distance quelconque,

$$(1)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=V^2-GD\left[(2-\eta_1)-\frac{D}{r}\left(2-\eta_1\frac{D}{r}\right)\right].$$

La force dont il s'agit étant centrale, nous avons, d'autre part, l'équation des aires

$$(2)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt}=C,$$

dans laquelle C désigne le double de l'aire décrite dans l'unité de temps.

Éliminons dt entre les équations (1) et (2), posons

$$V^2=2\alpha GD,$$

et remarquons que

$$C=VD,$$

d'où

$$C^2=2\alpha GD^3.$$

Il vient, en intégrant,

$$\theta\sqrt{1+\frac{\eta_1}{2\alpha}}=\arccos\left[\frac{D(2\alpha+\eta_1)-r}{r\sqrt{4\alpha^2\left(1+\frac{\eta_1}{2\alpha}\right)^2-4\alpha\left(1+\frac{\eta_1}{2\alpha}\right)+1}}\right]$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \cos\left(\theta\sqrt{1+\frac{\eta_1}{2\alpha}}\right)=\frac{D(2\alpha+\eta_1)-r}{r(2\alpha+\eta_1-1)}.$$

L'équation polaire des courbes du second degré, rapportées à leur foyer, est

$$(4)\qquad \cos\theta=\frac{a(1+e)-r}{er},$$

et la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que l'excentricité e est

$$<,=\ \text{ou}\ >1.$$

On voit que les seconds membres des équations (3) et (4) sont semblables et qu'on peut poser

$$D(2\alpha + \eta) = a(1 + e),$$
$$(2\alpha + \eta - 1) = e,$$

d'où

$$\cos\left(\theta\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\alpha}}\right) = \frac{a(1+e) - r}{er}. \tag{5}$$

Les premiers membres des équations (3) et (4) diffèrent, par contre, entre eux, et d'autant plus que le radical de l'équation (3) est plus grand; en d'autres termes, d'autant plus que la valeur de η est plus grande. Si, comme il en est dans le cas particulier de nos planètes, la somme

$$(2\alpha + \eta - 1)$$

est très petite, le premier membre de l'équation (3) correspond à une ellipse peu excentrique; si, en même temps, le terme η est aussi très petit, nous pouvons représenter la courbe lieu de M par une ellipse (*fig. 1*) dont le grand axe tourne lentement autour du foyer O.

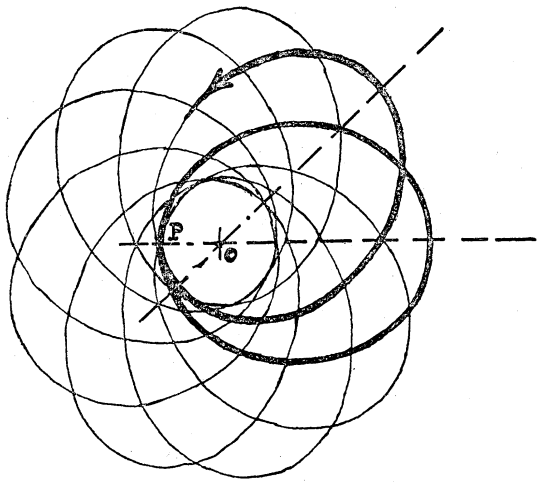


FIG. 1.

On voit, en effet, que les valeurs minima et maxima de r correspondent à

$$\cos\left(\theta\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\alpha}}\right) = +1,$$
$$\cos\left(\theta\sqrt{1 + \frac{\eta}{2\alpha}}\right) = -1,$$

c'est-à-dire aux valeurs

$$\theta = \frac{N\pi}{\sqrt{1+\frac{\eta}{2\alpha}}},$$

N représentant les demi révolutions de M autour du point de départ initial P.

Après une première et une deuxième demi révolution, on a :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{\eta}{2\alpha}}},$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{\eta}{2\alpha}}};$$

après une troisième et une quatrième demi révolution, on a :

$$\theta_3 = \frac{3\pi}{\sqrt{1+\frac{\eta}{2\alpha}}},$$

$$\theta_4 = \frac{4\pi}{\sqrt{1+\frac{\eta}{2\alpha}}}.$$

II. — Application au mouvement de la Terre.

Pour rendre ces résultats de l'analyse plus frappants, faisons-en une application au mouvement de la Terre, en posant d'abord, arbitrairement,

$$\eta = 0{,}00005,$$

c'est-à-dire en supposant la répulsion solaire égale au vingt-millième de l'attraction.

Nous avons ici

$$e = 0{,}01675 = (2\alpha + \eta - 1),$$

d'où

$$2\alpha = 1{,}01670.$$

Notre équation générale (5) devient ainsi

$$\cos(\theta \cdot 1{,}000024589) = \frac{a \cdot 1{,}01675 - r}{0{,}01675\, r},$$

ce qui nous apprend qu'à chaque révolution sidérale complète, le périhélie avancerait de

$$\begin{aligned}\lambda &= 1296000'' (1{,}000024589 - 1)\\ &= 31'',8678,\end{aligned}$$

et que, par suite, en

$$\frac{1296000}{31{,}8678} = 40668,$$

soit

$$4 \cdot 10^4 \text{ ans},$$

il décrirait une circonférence complète.

Quelque faible que soit la valeur que nous avons arbitrairement adjugée à η, elle dépasse cependant énormément celle qui résulterait de la répulsion solaire, si celle-ci naissait d'une impulsion, comme il en serait dans l'hypothèse d'Arrhenius.

Examinons la question de ce point de vue.

La quantité moyenne de chaleur solaire reçue par la Terre s'élève, par seconde, à

$$Q = (0{,}5\Sigma) \text{ calories},$$

Σ étant la section équatoriale de notre Terre en m^2.

Le travail mécanique que représente cette quantité de chaleur est

$$EQ = (216\Sigma) \text{ kilogrammètres}.$$

Le rayonnement solaire se propageant avec une vitesse de

$$\Upsilon = 3 \cdot 10^8 \text{ m. par sec.},$$

la pression totale exercée sur la Terre est, en kg,

$$p_1 = \frac{EQ}{\Upsilon} = 0{,}72 \cdot 10^{-6}\,\Sigma,$$

si la surface est absorbante, et

$$p_2 = \frac{2EQ}{\Upsilon} = 1{,}44 \cdot 10^{-6}\,\Sigma,$$

si la surface est parfaitement réfléchissante.

En prenant la moyenne de ces nombres, on a

$$p_m = 1{,}08 \cdot 10^{-6}\,\Sigma$$

pour la valeur de la pression de radiation ou de la force motrice répulsive exercée par le Soleil sur le globe terrestre.

En divisant cette valeur par la masse de la Terre, ou par

$$\frac{P}{g},$$

et en remarquant que

$$\frac{\Sigma}{P} = \frac{\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta} = \frac{3}{4R\Delta}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2\pi}{4 \cdot 10^7}\right)\frac{1}{5500},$$

il vient

$$\gamma = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-7}}{6366198 \cdot 5500}\,g$$

pour la valeur de la force accélératrice répulsive, de la force motrice rapportée à l'unité de masse.

D'autre part, la masse du Soleil étant 333432 fois celle de la Terre et la distance moyenne de la Terre au Soleil étant 23439,2 rayons terrestres, on a

$$\Gamma = \frac{333432}{(23439{,}2)^2}\,g$$

pour la valeur de l'attraction solaire rapportée aussi à l'unité de masse.

Le rapport de ces deux nombres, ou la valeur de η, est

$$\eta = 3{,}81 \cdot 10^{-14}.$$

Introduisant cette valeur dans notre équation générale et effectuant les calculs, on trouve pour l'accroissement annuel de la vitesse de la Terre :

$$\lambda = 2'',4 \cdot 10^{-8}.$$

Il en résulte pour l'augmentation de la longitude, le siècle étant pris pour unité,

$$\Lambda = \frac{1}{2}(2'',4 \cdot 10^{-8})(100n)^2,$$

ou

$$\Lambda = 1'',2 \cdot 10^{-4} n^2,$$

n étant le nombre de siècles écoulés.

Telle est donc l'équation séculaire de la Terre dans la théorie d'Arrhenius.

SUR LE PROBLÈME MIXTE POUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR M. J. HADAMARD

(PARIS)

Les petits mouvements (tels que les vibrations) d'une masse aérienne homogène sont régis par l'équation des *ondes sphériques*.

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (\omega, \text{ constante donnée}).$$

D'autres espèces d'oscillations dans les milieux continus sont régis par l'équation un peu différente.

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0;$$

dans le cas où le milieu n'est pas primitivement homogène, (1) ou (1′) sont remplacées par d'autres équations, mais qui appartiennent encore à la forme générale

$$(E) \qquad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

(a_{ik}, b_i, c : fonctions données de $x_1, \ldots, x_m$).

Pour un milieu à 2 dimensions seulement, l'équation serait celle des *ondes cylindriques*

$$(I) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (\omega, \text{ constante donnée})$$

ou encore celle des *ondes cylindriques amorties*

$$(I') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0.$$

Si le milieu remplit l'espace (à 3 ou 2 dimensions) tout entier, il suffit, pour déterminer le mouvement, (analytiquement parlant, pour connaître u), de se donner l'état initial de ce mouvement : d'une manière précise, de se donner, pour $t = 0$, les conditions

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = h(x, y, z),$$

où g et h seront des fonctions données.

On aura à chercher u de manière à vérifier ces conditions et l'équation aux dérivées partielles : un tel problème est le problème de *Cauchy*.

Si, au contraire, le milieu est limité, — par exemple si la masse aérienne mentionnée tout d'abord est renfermée dans un récipient solide, — le problème d'analyse auquel on est conduit est différent. Il faut se donner encore u et $\frac{\partial u}{\partial t}$, pour $t = 0$, dans la portion d'espace occupée par le milieu (c'est ce qu'on appelle les *conditions initiales*) et, en outre, u ou sa dérivée normale (suivant les cas) pour toutes les valeurs positives du temps, sur la paroi. C'est ce qu'on appelle un *problème mixte*. La théorie d'un tel problème ressemble jusqu'à un certain point à celle du problème de Cauchy, mais non d'une manière complète, et présente au contraire très nettement, des caractères analogues à ceux du problème de Dirichlet pour les équations du type elliptique, et en particulier, nous allons y rencontrer des expressions toutes pareilles aux *fonctions de Green*.

Le problème de Cauchy a été résolu pour (1) par Kirchhoff. Pour l'équation (I), sa résolution est l'œuvre de M. Volterra (1). J'ai été conduit, ultérieurement, à reprendre pour les étendre à d'autres équations de la forme (E), les résultats de M. Volterra. Ma méthode diffère de celle suivie de l'illustre géomètre par le rôle qu'y joue la quantité

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\omega^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}$$

(où x_0, y_0, t_0 sont des constantes), analogue au potentiel élémentaire newtonien. La substitution directe de cette quantité dans la formule fondamentale qui sert de base à toute la théorie donnant lieu à des intégrales définies dont chacune est dépourvue de sens, M. Volterra introduit, au lieu de l'expression (2), son intégrale par rapport à t_0. Au lieu de tourner ainsi la difficulté je me suis efforcé de l'aborder de front (2),

(1) *Acta Math.*, t. XVIII.

(2) Voir mes Mémoires des *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 1905 et des *Acta Math.*, t, XXXI, 1908. Un exposé d'ensemble consacré à cette théorie paraîtra prochainement sous les auspices de l'Université Yale.

en usant directement de l'expression (2) et donnant un sens, sinon à chacune des intégrales obtenues, du moins à leur ensemble.

Pour le problème mixte, les premières solutions acquises sont encore dues à M. Volterra, lequel, partant de sa solution du problème de Cauchy, a formé des fonctions analogues aux fonctions de Green, pour des formes simples du domaine R dans lequel u doit être déterminé.

J'ai, d'autre part, résolu le problème mixte, en définissant une « fonction de Green » correspondante, pour le cas où le nombre m des variables indépendantes est égal à deux(1).

Peut-on trouver également la solution du problème mixte, pour l'équation (1) ou toute autre équation hyperbolique à trois variables, en se plaçant à mon point de vue tel que je l'ai défini il y a un instant? La réponse est affirmative. On devra, O (x_0, y_0, t_0) étant un point arbitrairement donné dans R :

1° Tracer le conoïde caractéristique(2) de sommet O;

2° Par la courbe L, intersection de ce conoïde et de la variété cylindrique C qui représente les parois(3), faire passer une seconde multiplicité caractérisque G;

3° Trouver une solution V de l'équation adjointe qui soit infinie (d'ordre convenable) le long de cette caractéristique et d'autre part, égale, le long de C, à la solution élémentaire de pôle O.

Or, ce dernier problème est résolu dans mon Mémoire des *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*(4). Il en est donc de même, du moins pour m impair, de la question proposée.

Toutefois, la solution n'est ainsi acquise, jusqu'à présent, que si toutes les données sont analytiques (hypothèse impliquée dans les opérations du Mémoire auquel nous venons de faire allusion). Cet inconvénient en entraîne d'ailleurs un autre, à savoir que même dans le cas de données analytiques, on ignore si le domaine d'existence de la solution est suffisamment étendu, le domaine de convergence des développements en série entière employée pour la représenter étant, en général, beaucoup trop restreint.

Il y a donc intérêt à résoudre le même problème sans l'emploi du calcul des limites. C'est à quoi l'on peut arriver à l'aide d'intégrales doubles analogues aux

---

(1) *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. XXXI (1903), p. 208 et suivantes.

(2) Voir les Mémoires cités ci-dessus.

(3) Je rappelle qu'une courbe du plan doit être, au point de vue du mouvement, considérée comme définissant un cylindre (t étant pris comme troisième coordonnée); une surface de l'espace, comme définissant un hypercylindre, etc.

(4) 3e Série, t. XXI; 1904.

potentiels de surface (l'expression (2) jouant le rôle habituellement dévolu à $\frac{1}{r}$ et le point (x_0, y_0, t_0) décrivant C). Sans insister en détail, ici, sur les propriétés de ces potentiels (intégrales doubles de la forme

$$\iint_{\Sigma} \frac{\rho d\Sigma}{\sqrt{\omega^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} \tag{3}$$

étendues à une portion Σ de C décrite par le point (x_0, y_0, t_0),) j'indiquerai simplement que si la portion Σ est limitée par la ligne L et que la densité ρ soit de la forme

$$\rho = [G(x_0, y_0, t_0)]^{\beta} V,$$

G étant le premier membre de l'équation de la caractéristique ci-dessus mentionnée, β un exposant supérieur à -1 et V une fonction régulière, le potentiel (3) est de la forme

$$[G(x, y, t)]^{1+\beta} W, \tag{4}$$

W étant à son tour régulier. C'est ce que l'on reconnaît aisément, par exemple lorsque C et G se réduisent à deux plans(1).

Si, maintenant, β était inférieur à -1, l'intégrale (3) n'aurait de sens que moyennant le traitement spécial que j'ai exposé dans mes Mémoires précédents(2). L'évaluation (4) subsisterait encore dans ces nouvelles conditions; c'est ce que l'on reconnaît en faisant dépendre la caractéristique G d'un paramètre auxiliaire λ et différentiant par rapport à λ.

Remplaçons enfin l'expression (3) par une de ses dérivées partielles (par rapport à x, y ou t), ce qui conduit à introduire sous le $\iint$ la quantité

$$[\omega^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2]^{\frac{3}{2}}$$

en dénominateur (et nécessite, par conséquent, à nouveau le traitement spécial auquel nous avons fait allusion il y a un instant). Le résultat sera, cette fois, de l'ordre de G^{β} (et non plus de $G^{1+\beta}$).

On arrive à des résultats tout analogues en considérant des potentiels analogues

---

(1) Le plan auquel G se réduira ne devra pas cesser d'être caractéristique, c'est-à-dire (pour l'équation (1)) qu'il devra être incliné à 45° sur l'axe des t.

(2) Voir *Acta Math.*, t. XXXI, p. 339 et suiv.

aux potentiels de double couche, c'est-à-dire en remplaçant, sous $\int\int$, l'expression (2) par une de ses dérivées convenablement choisie (dérivée Conormale) par rapport à un déplacement du point (x_0, y_0, t_0).

C'est à un potentiel de cette espèce (dont l'introduction est suggérée par les recherches de M. Volterra)(1) qu'il conviendra de s'adresser pour notre but actuel, la fonction désignée tout à l'heure par V devant être déterminée de manière à faire prendre au résultat les valeurs données sur C.

Comparée à la solution précédemment indiquée par M. Volterra, celle que nous proposons ici présente des avantages et des inconvénients. Elle ne ramène pas, comme la première, la détermination de la fonction auxiliaire V à un cas particulier du problème même que l'on a en vue. Par contre, la détermination de V et, par conséquent, la résolution du problème mixte, peuvent ainsi se ramener à une équation intégrale; c'est ce qui n'avait jamais été obtenu jusqu'ici en dehors du cas de $m = 2$.

Une théorie analogue peut se développer pour toute valeur impaire de m. Quant aux équations à un nombre pair de variables indépendantes, on les atteindra par la méthode — qu'on peut appeler méthode de « descente » — et que j'ai exposée dans le Mémoire cité des *Acta Mathematica*(2).

---

(1) Voir, en particulier, Congrès de Paris, 1900.

(2) P. 369 et suiv. Voir aussi ma récente Note des *Comptes Rendus* (t. CLXX, p. 149, 19 janvier 1920 et l'exposé d'ensemble, mentionné plus haut, qui sera publié par l'Université Yale.

L'ÉTAT ACTUEL DES RECHERCHES SUR LES DÉPLACEMENTS DU PÔLE

Par M. Giovanni BOCCARDI

(TURIN)

I

Qu'on me permette de rappeler quelques principes théoriques. Puisqu'il est infiniment peu probable qu'à l'origine l'axe instantané de rotation de notre globe et l'axe polaire principal d'inertie aient coïncidé, on peut se proposer la question suivante : « Est-il possible de constater par l'observation la non-coïncidence susdite? » Du temps d'Euler et, après lui, pendant un siècle, en passant par Laplace jusqu'à Pontécoulant, on déclarait que, puisque aucune variation n'avait été constatée dans les latitudes, les deux axes devaient être *pratiquement coïncidants*. On allait même jusqu'à dire que « les oscillations de l'axe terrestre qui dépendent de l'état initial du mouvement sont depuis longtemps anéanties[1]. »

D'après la théorie, l'axe instantané et celui d'inertie décrivent, *dans l'espace*, autour de l'axe du couple résultant de la quantité de mouvement, les surfaces latérales de deux cônes à base circulaire, dans un jour sidéral moins 4^m42^s. Les ouvertures des deux cônes sont entre elles dans le rapport de 1 : 305 environ. Du fait que le cône de l'axe d'inertie est décrit dans un temps légèrement plus court que celui de la rotation terrestre, il suit que le pôle instantané, I, quand l'axe instantané OI a décrit dans l'espace son cône, de beaucoup plus petit que l'autre, se trouve déplacé *sur le globe*, dans le *sens direct*, par rapport à un système d'axes coordonnés avec l'origine dans le pôle d'inertie, C.

Le rapport 1 : 305 résulte des valeurs des moments principaux d'inertie A et C, qu'on a déduits de la théorie de la précession et nutation. C'est ce rapport qui fixe la différence de 4^m42^s, dont nous venons de parler.

Le chemin parcouru par le pôle I sur le sphéroïde terrestre se comprend très bien

---

[1] Pontécoulant, liv. IV, chap. II.

par la représentation cinématique de Poinsot, c'est-à-dire d'un cône de plus grande ouverture fixe dans la Terre (et mobile avec elle dans l'espace), l'axe duquel accomplit une rotation autour de l'axe du couple résultant OG, dans un jour sidéral moins 4^m42^s, pendant que le petit cône, décrit dans le même temps par l'axe OI autour de OG, — tout en restant fixe dans l'espace — roule sur la surface intérieure du premier. A tout instant la position de l'axe instantané OI est donnée par la génératrice commune aux deux cônes. Le chemin du pôle I sur le sphéroïde est la *polhodie*, qui devrait être parcourue en 305 jours sidéraux, c'est-à-dire en 303, 8 jours moyens. C'est le *cycle eulérien*.

Il y a donc une correspondance dans les mouvements de l'axe instantané. D'un côté, le très faible déplacement de cet axe dans *l'espace* (déplacement qui atteint à peine à $0'',0006$) donne lieu à un déplacement plus considérable du même axe dans l'intérieur du globe, qui peut atteindre $0'',64$; de l'autre, le grand déplacement de l'axe instantané *dans l'espace*, la précession (qui atteint à peu près 47°) produit un très petit déplacement de l'axe OI dans le globe, dont la période est d'un jour sidéral moins 4^m42^s et l'étendue varie entre $0'',00$ et $0'',04$; c'est la *nutation diurne*, dont le sens est *rétrograde*, comme celui de la précession. J'ai proposé de donner à ce dernier déplacement le nom de *polhodie secondaire* ou *diurne*, pour réserver le nom de *nutation diurne* au déplacement *dans l'espace* de l'axe instantané, par la raison que toutes les nutations sont des mouvements dans l'espace. Cette polhodie diurne étant connexe avec le phénomène de la précession qui dépend des positions du Soleil et de la Lune, on comprend que le rayon de ce petit cercle soit variable, tandis que le rayon du cercle de la polhodie eulérienne devrait être constant d'après la théorie.

II

Les recherches des astronomes observateurs sur cette question, surtout depuis 1880, ont eu pour objet de constater par l'observation seulement la polhodie eulérienne, au moyen des variations de la latitude, que l'on a déterminée systématiquement, dans différents lieux terrestres. Il sera utile de nous entendre sur ce sujet, en précisant les termes et en fixant ce que peuvent nous donner des observations de ce genre.

Remarquons d'abord que la position du pôle d'inertie sur le sphéroïde terrestre nous échappe, et qu'il serait presque impossible de l'établir par des observations astronomiques. Au contraire, on peut fixer la position du pôle instantané en se servant du mouvement diurne. En effet, la colatitude est l'angle entre la verticale du lieu et l'axe instantané de rotation, ou, si l'on veut, la distance en arc, sur le globe terrestre, entre le lieu où l'on observe et la position du pôle instantané sur le globe

lui-même; mais comme il est impossible de voir *directement* la position du pôle instantané soit sur la sphère céleste soit sur le sphéroïde terrestre, on a recours à des points visibles, observables, que l'on suppose fixes sur la voûte céleste, c'est-à-dire aux étoiles. La distance angulaire de ces points au pôle étant bien connue, on en déduit la distance du zénith au pôle, la colatitude. Cependant le pôle instantané se déplace sur la voûte céleste par effet de la précession et de la nutation avec tous leurs termes, qui sont très nombreux; par conséquent, lorsqu'on veut déduire de l'observation des étoiles(1) les déplacements du pôle sur le globe, on doit nécessairement supposer bien connus les déplacements du pôle sur la voûte céleste, c'est-à-dire les variations de la distance du pôle à chacune des étoiles observées.

Remarquons aussi que les mouvements d'ensemble du globe avec tous ses points, le pôle instantané y compris, mouvements qui constituent la précession et la nutation, ou les déplacements du pôle sur la sphère céleste, sont sans effet sur la colatitude, qui est donnée par la distance du zénith au pôle; de sorte que s'il était possible d'observer le pôle lui-même sur le ciel, les mouvements d'ensemble du globe ne produiraient aucune variation $\Delta\varphi$ sur la latitude, et il en est de même lorsqu'on observe une étoile au lieu du pôle, que l'on suppose fixe sur le globe, pourvu que l'on connaisse bien les variations dans la position de l'étoile dues aux mouvements d'ensemble du globe. Mais s'il restait à découvrir quelque mouvement sensible du pôle instantané dans l'espace, l'inexactitude qu'il s'ensuivrait sur la position de l'étoile nous conduirait à une valeur inexacte de la latitude φ, dans laquelle on trouverait un $\Delta\varphi$ apparent, illusoire, que l'on attribuerait à un déplacement inexistant du pôle sur le sphéroïde. En d'autres termes, si l'on suppose le pôle instantané fixe sur le sphéroïde, ou ses mouvements sur ce dernier bien connus, l'observation pourrait mettre en lumière des mouvements encore inconnus du pôle sur la sphère céleste c'est-à-dire des mouvements d'ensemble de notre globe.

On a donc deux problèmes différents. Dans le premier cas, de l'observation des étoiles on déduit les déplacements du pôle dans l'espace; dans le second, de la même observation on déduit les déplacements du pôle sur le globe.

Mais aujourd'hui on suppose absolument bien connus tous les déplacements sensibles du globe et du pôle dans l'espace, et l'on cherche à déduire de l'observation des étoiles, par rapport au zénith, les déplacements du pôle sur le globe. La théorie de la précession et de la nutation a été faite dans l'hypothèse que le pôle soit fixe sur notre sphéroïde. Il y a là un petit cercle vicieux inévitable dans plusieurs recherches astronomiques, dans lesquelles on commence par supposer bien connues les lois d'un phénomène et, en partant de cette hypothèse, on passe à l'investigation d'un autre; sauf à revenir ensuite sur le premier pour y apporter des retouches.

Puisque, d'après la théorie, le cône de la nutation diurne, dans l'espace, de l'axe

(1) Distance du zénith à l'étoile.

instantané a une ouverture insaisissable par l'observation, on suppose cet axe absolument fixe dans l'espace(1), tandis que l'axe d'inertie fixe dans le globe se déplace avec celui-ci dans l'espace et donne lieu à la variation des latitudes. Mais ces variations peuvent se produire : 1° dans une Terre absolument rigide, comme le veut la théorie d'Euler; 2° dans une Terre pas encore absolument rigide par des déplacements de masses dans son intérieur, avec variation des moments d'inertie. Si ces déplacements étaient considérables, on ne pourrait plus compter sur la fixité de l'axe polaire dans l'espace.

III

L'examen et la discussion d'une longue série d'observations de latitude faites à l'Observatoire de Greenwich amenèrent M. Chandler à reconnaître une période de 427 jours moyens dans les variations de la latitude, et par conséquent un allongement de la période eulérienne de 304 jours moyens relative à la polhodie. Chandler reconnut en outre une période annuelle donnant lieu à des variations encore plus faibles. Les observations systématiques faites dans les six stations internationales situées dans l'hémisphère boréal ont confirmé cette période en la portant à 434 ou 435 jours. Des observations très récentes, par exemple celles de Greenwich et de Pino Torinese, ont montré que cette période n'est qu'une moyenne, les spires de la polhodie s'accomplissant tantôt dans l'espace de 13 mois et encore moins, tantôt en 15 mois. Quant à l'amplitude de ces spires, elle est très variable, car l'excursion du pôle sur le sphéroïde oscille entre $0'',18$ et $0'',64$. En effet, les observations faites à Pino ont donné, pour le mois d'août 1919, un maximum de la latitude dépassant d'à peine $+0'',09$ la valeur moyenne; tandis qu'en 1910-11 l'excursion s'est montée à $\pm 0'',32$.

Or cette variabilité de la durée et de l'amplitude des variations de la latitude, lorsque la théorie exigerait que la polhodie fût un cercle de rayon constant et parcouru toujours dans l'espace de 304 jours, ont amené plusieurs astronomes à attribuer ces variations à d'autres causes, et à déclarer qu'il s'agit là d'un phénomène bien différent du déplacement du pôle dans le cas du mouvement de rotation non troublé. D'ailleurs nos observations sont si précises qu'on ne peut aucunement attribuer la variabilité de l'amplitude des spires à des erreurs d'observation.

C'est surtout l'allongement énorme de la durée de 304 jours à 435 jours, qui a donné lieu à des discussions. On connaît l'explication proposée par Simon Newcomb.

(1) Sauf, bien entendu, les déplacements de la précession, etc.

D'après ce savant, le pôle d'inertie ne resterait pas fixe sur le sphéoroïde, mais il se déplacerait de manière à prolonger la période. Toutefois, la condition posée par Newcomb, que la nouvelle position C' du pôle d'inertie se trouve toujours sur la droite joignant la position primitive C à celle du pôle instantané I, a été contestée récemment par M. Souleyre. Les recherches plus récentes de M. Schwayder l'ont amené à admettre que le pôle d'inertie décrit sur le sphéroïde un petit cercle avec rayon de $0'',12$. Quoi qu'il en soit, nous constatons avec satisfaction que l'on doit s'incliner devant l'évidence et reconnaître que notre globe est loin d'avoir atteint la rigidité que l'on suppose.

Une discussion encore plus ample a eu pour objet ce qu'on appelle le terme de Kimura ou le terme z. Ce savant japonais annonça dès 1902 que les équations de condition, que l'on est obligé de poser pour déduire des observations des mêmes étoiles faites à la même latitude dans les six stations internationales, donnent une somme des carrés des résidus plus petite lorsqu'au lieu des deux inconnues x et y (les coordonnées du pôle instantané par rapport au système d'axe avec origine dans le pôle d'inertie) on en introduit une troisième z, ce qui revient à admettre que le mouvement du pôle instantané ne s'accomplit pas dans un plan. Toutefois, quelqu'un d'entre nous fit remarquer que d'après les principes de la théorie des moindres carrés, plus on introduit d'inconnues, plus la somme des carrés des résidus résulte petite. Le vrai criterium pour pouvoir admettre une troisième inconnue devrait être une raison théorique ou, tout au moins, pour ceux qui ont pleine confiance dans la méthode des moindres carrés, le fait que pour chaque inconnue l'erreur probable résultât plus faible. Or ce n'est pas le cas dans la variation des latitudes.

Mais l'existence du terme de Kimura, admise par le Bureau de l'*Erdmessung* de Potsdam, qui au lieu de deux coordonnées commença à en donner trois, fut contestée même en Allemagne. On l'attribua soit à une imparfaite connaissance de la constante d'aberration, soit à la méthode de réduction des observations, dite *en chaîne*, soit à des anomalies de la réfraction ou à d'autres causes. Ce terme qui d'abord se monta jusqu'à $\pm 0'',04$ et dans ces dernières années atteignit $\pm 0'',07$, donna lieu à des discussions animées, à des mémoires très étendus. Enfin le Bureau de Potsdam lui-même a fini par y renoncer, en reconnaissant qu'il n'appartient pas au déplacement du pôle, mais à des causes météorologiques affectant les observations, de manière que son effet soit le même pour toutes les stations d'un hémisphère et ait le signe contraire pour l'autre.

Du reste, en général, les observations systématiques de latitude commencent à montrer presque partout des variations que l'on attribue à des causes météorologiques. C'est bien là une des caractéristiques de l'état actuel de ces recherches. Les plus enthousiastes des résultats des six stations internationales, aujourd'hui réduites à deux, ont dû reconnaître que la grande précision des observations qu'on y fait

n'est qu'apparente, puisqu'on y constate des sauts inexplicables. Disons dès maintenant que si l'on avait adopté pour faire les moyennes des observations des périodes plus courtes, ou si l'on avait tracé des diagrammes pour les observations une à une, on aurait fini par reconnaître l'existence de variations à courte période, soupçonnées dans les observations de Poulkowo et de Carloforte et mises en lumière par les observations de Pino Torinese. Nous y reviendrons tout à l'heure.

IV

Qu'on me permette de relever que dans l'étude des variations de l'angle entre l'axe instantané et la verticale du lieu, on a eu le tort de rejeter tout sur les déplacements de l'axe susdit, oubliant ou laissant de côté des déplacements de la verticale. Et toutefois ces derniers déplacements peuvent évidemment se produire plus facilement.

Déjà Tisserand (1) avait fait remarquer que les déplacements de masses dans les océans ou dans l'atmosphère d'un hémisphère à l'autre pourraient donner lieu à des déplacements appréciables de l'axe instantané. Or dans l'Observatoire de Pino, par une longue série d'observations par la méthode de Struve avec un excellent instrument installé dans le 1er vertical, on a mis en pleine lumière des variations de la latitude avec période d'une demi-révolution sidérale de la Lune. Ces variations ont la période et la phase de celles que la théorie prévoit comme conséquence des déplacements de la verticale par l'attraction perturbatrice de la Lune, qui diminue la pesanteur. Pour ce qui est de l'amplitude de ces variations qui, d'après la théorie, devrait être tout au plus de $\pm 0''{,}02$ pour la latitude de 45° (2), les observations ont donné des variations neuf ou dix fois plus grandes. Nous laissons aux théoriciens le soin de donner l'explication de ce fait ou de revoir leur théorie. Il est évident que la Lune produit une marée de l'écorce solide du globe; peut-être on a eu tort d'attribuer à celui-ci un coefficient d'élasticité trop faible. Il peut se faire aussi que, comme pour la marée fluide, on doive avoir égard aussi à l'attraction secondaire due à la masse fluide déplacée elle-même.

En vain on s'appuie sur les indications données par le pendule horizontal installé dans les caves du Bureau de Potsdam, qui donnent, en rapport avec le passage de la Lune au méridien, un soulèvement d'à peine 30 centimètres dans la couche terrestre locale, autant qu'on peut le déduire des indications de ce pendule, ce qui

(1) *Mécanique céleste*, vol. II.

(2) La latitude moyenne de Pino est de $45°\,2'\,16''{,}30$ (pavillon du 1er vertical).

donne au globe un faible coefficient d'élasticité. Dans tout cela on a perdu de vue que le pendule horizontal ne peut révéler que les déplacements des couches locales, des déplacements différentiels. Il arrive ici la même chose que lorsqu'on veut étudier les changements de niveau de la mer. Quand on s'en rapporte aux maréographes on perd de vue que par suite des déplacements de la croûte solide, par conséquent de l'appareil lui-même, on ne peut constater que les différences des variations de niveau.

Non, pour avoir des indications plus sûres sur les vraies variations du niveau du globe et des déplacements de la verticale, on doit chercher des points *de repère hors du globe* lui-même. Les variations de la latitude bien constatées, nous l'avons vu, peuvent donner des renseignements sur les déplacements du pôle instantané, soit dans l'intérieur du sphéroïde par les déplacements de celui-ci, soit dans l'espace. Pour ce qui est du pôle d'inertie, nous avons vu comment on a pu conjecturer ses déplacements sur le sphéroïde; et il y a aussi quelqu'un qui soupçonne dans ce pôle un mouvement non par rotation, mais par translation autour du pôle instantané, ce qui donnerait lieu à des variations dans la latitude. Du reste, la nutation dont on s'occupe en astronomie, avec tous ses termes, consiste en un déplacement par translation autour de la position moyenne du pôle.

V

De tout ce que nous venons de dire il résulte évidemment qu'il reste beaucoup à faire dans ces recherches, et que le plan d'observation conçu en 1898 pour les stations internationales, et suivi constamment jusqu'à nos jours, doit être modifié, sans quoi il y aura perte de forces et de moyens pécuniaires. Après vingt et un ans ces stations ont donné tout ce qu'on pouvait en tirer.

Je ne fais que citer les principaux défauts du plan adopté par M. Albrecht en 1898. Avant tout, on a eu tort de disposer les stations dans un seul hémisphère, et toutes à une latitude presque identique. Ceci pouvait paraître nécessaire au commencement, lorsqu'on n'avait que de vagues données sur le déplacement du pôle boréal, et l'on voulait s'assurer si celui-ci s'éloignait effectivement d'une station pour se rapprocher de l'autre située à 180° de longitude. Pour éviter l'introduction de toute différence dans le mode d'observer, non seulement on disposa les six stations à la même latitude et l'on employa la même méthode d'observation, celle de Talcott-Horrebow, mais on adopta dans les différentes stations le même modèle d'instrument, les mêmes étoiles à observer, la même manière d'observer jusque dans ses moindres détails, la même méthode de réduction. Ce plan ne pouvait

mettre en lumière que la réalité des déplacements du pôle; mais il mettait dans l'impossibilité de constater des variations de la latitude dépendant, par exemple, de la position des différents lieux sur le globe, de la latitude elle-même. La distribution des stations à des latitudes très différentes aurait permis de constater non seulement la réalité de la polhodie eulérienne, mais aussi d'autres déplacements du pôle, soit sur le globe, soit dans l'espace. Voilà le but que l'on doit se proposer maintenant.

En outre, la méthode de Talcott exige que l'on observe un grand nombre d'étoiles disposées d'une manière spéciale, ce qui oblige à laisser presque entièrement de côté les étoiles fondamentales, dont la position et le mouvement propre sont bien connus, pour s'en tenir à des étoiles qui sont bien loin de remplir cette condition. Quant à la compensation des erreurs dans le grand nombre d'étoiles, elle ne peut avoir lieu que d'une manière approchée; elle n'élimine pas les erreurs systématiques en correspondance avec l'heure de l'observation; enfin elle suppose qu'on observe partout à la même date les mêmes couples d'étoiles, ce qui n'est pas possible surtout pour l'état du ciel.

Encore, si l'on suivait toujours les mêmes étoiles, on pourrait en perfectionner les positions et les mouvements propres! Mais non, on a voulu changer chaque mois l'un des deux groupes d'étoiles, ce qui introduit un manque d'homogéité très fâcheux. En vain on a cru pouvoir y remédier en adoptant la méthode de réduction *en chaîne* et la péréquation des déclinaisons. Ce sont des procédés trop allemands pour pouvoir être acceptés par ceux qui en connaissent tout le malfondé. Le fait est que des critiques sérieuses ont été faites de tous les côtés au plan adopté pour les stations de latitude. Le fait qu'un changement d'étoiles dans les observations photographiques de Greenwich a changé notablement l'allure du diagramme de la latitude est impressionnant.

En outre, la méthode de Talcott n'est pas différentielle dans le sens strict. Dans les observations à l'équatorial l'étoile de comparaison et la planète, ou la comète, se trouvent dans la même plage du ciel, et alors on peut compter sur la complète élimination des erreurs tenant à la position de l'instrument, surtout pour ce qui est de la distance zénithale et par conséquent de la réfraction. Mais par la méthode de Talcott on observe à la même distance zénithale, mais *des deux côtés du zénith*, par conséquent dans des plages du ciel qui peuvent être très différentes. Et alors, qui nous mettra à l'abri des anomalies de la réfraction?

De même, les distances zénithales en valeur absolue diffèrent notablement d'une couple à l'autre des étoiles observées, et quelqu'un d'entre nous put annoncer dès 1900 (1) que la variation de la latitude obtenue par la méthode de Talcott augmente avec la distance zénithale, ce qui fut confirmé plusieurs années après par un astronome japonais, M. Hirajama.

---

(1) *Comptes rendus de l'A. d. S.*, 4 avril 1900.

Mais peut-être la plus grande erreur dans le plan adopté pour la réduction des observations a été de grouper, pour en faire la moyenne, toutes les observations faites pendant un dixième de l'année. Dans 36,5 jours toutes les variations à courte période de la latitude restent effacées, et ces variations n'intéressent pas moins que la polhodie eulérienne. Il est illusoire de donner les coordonnées x et y du pôle instantané de dixième en dixième de l'année. D'un côté on ne connaît pas la vraie amplitude de la polhodie (ce que l'on aurait en faisant les moyennes de trois en trois jours ou en traçant les diagrammes de toutes les observations), et de l'autre on oblige celui qui détermine une latitude d'un lieu quelconque à observer pendant 36,5 jours ou à supposer que les variations des valeurs des coordonnées x et y soient proportionnelles au temps. Si, par exemple, on fait une station pendant six ou sept jours, ce qui arrive très souvent dans les opérations géodésiques, dans les voyages d'exploration, surtout par voie de mer, on obtient une latitude affectée par la variation due au déplacement de la verticale par suite de l'attraction lunaire, et par conséquent en rapport avec l'heure de l'observation.

D'ailleurs les observations faites à Pino en 1919-20 ont montré l'existence de variations diurnes dans la latitude, que l'on avait soupçonnées et cherchées vainement jusqu'à ce jour. On a observé toujours avec la méthode de Struve plusieurs étoiles pendant toute la nuit, ce qui en hiver a représenté bien un intervalle de 12 heures à 14 heures. On a exclu les observations de jour pour éliminer toute cause d'erreur, et on a pris toutes les précautions pour éliminer l'équation physiologique ou personnelle. Il est résulté des variations dans la latitude s'exprimant bien avec la formule :

$$\mu \cos(\nu + \theta') \tag{1}$$

dans laquelle μ est un petit arc compris entre $\pm 0'',05$ et $\pm 0'',12$; ν est un arc déterminé, correspondant à l'origine du temps sidéral pour une époque donnée, et θ' est le temps sidéral (qui peut embrasser des heures ou même des jours) multiplié par 1,00089 ; ce qui fait une variation d'environ 1° tous les trois jours sur l'argument de la formule (1). Pour un intervalle d'une nuit on peut prendre au lieu de θ' tout simplement le temps sidéral écoulé depuis l'origine à laquelle correspond ν, donc la formule est alors

$$\mu \cos(\nu + \alpha)$$

où α est l'ascension droite de l'étoile observée.

Lorsqu'on a fait les différences entre les valeurs données pour la latitude par toutes les étoiles observées pendant une nuit et comparées deux à deux, on a constaté que cette différence observée était presque égale à la différence donnée par le calcul au moyen de la formule suivante :

$$\mu [\cos(\nu + \alpha) - \cos(\nu + \alpha')] . \tag{2}$$

Naturellement, on a éliminé la variation avec période de 14 jours et l'on s'est assuré que les différences observées n'indiquaient aucunement une correction à apporter à la constante d'aberration. Pour ce qui est des possibles parallaxes des étoiles on a pu ne pas s'en préoccuper pour des raisons que j'ai publiées d'abord dans une Note des *Comptes Rendus* (16 février 1920) et ensuite dans un Mémoire plus étendu(1).

Il est à remarquer que les différences observées entre les valeurs φ et φ' données par les étoiles deux à deux atteignent parfois 0″,10, 0″,12, jusqu'à 0″,15, ce qui ne peut aucunement être attribué à des erreurs d'observation, la comparaison se faisant entre des moyennes des valeurs de φ obtenues pendant une quinzaine de jours(2). Or ces différences observées sont représentées par la formule (2) avec des différences O — C qui sont bien souvent inférieures à 0″,02 et atteignent tout au plus 0″,05.

Il serait impossible d'attribuer à des causes météorologiques les différences constatées. En effet, en hiver, pendant 12 heures à 14 heures les conditions météorologiques sont restées bien souvent tout à fait les mêmes, et cependant on a constaté des variations de la latitude suivant la formule indiquée. En outre, le mouvement du Soleil, qui constitue la période des variations météorologiques est, en moyenne, de 1° par jour, tandis qu'ici la variation de l'argument est de moins de 1° tous les trois jours. Mais je ne puis répéter ici tout ce que j'ai écrit à ce sujet dans mon Mémoire. Je me bornerai à annoncer que M. Spencer de l'Observatoire de Greenwich se propose de vérifier sur ses observations photographiques faites avec la lunette flottante, la variation de la latitude due à l'action de la Lune, son plan de travail ne lui permettant pas de vérifier la variation diurne; tandis que M. Yamamoto, professeur à l'Université de Kyoto, m'a demandé toutes les explications et les conseils nécessaires pour constater de son côté les variations découvertes à Pino.

Enfin H.-M. Tucker(3), en discutant une longue série de déterminations de la latitude faites à l'Observatoire du Mont Hamilton, a constaté que la moyenne des valeurs de la latitude obtenues pendant 8 jours s'écarte, en moyenne, de $\pm$0″,14 de la valeur φ_0 de la latitude rapportée au pôle moyen, ce qui fait plus que l'on n'ait constaté à Pino pour la variation par l'action de la Lune.

---

(1) Recherches faites à l'Observatoire de Pino Torinese sur une variation diurne de la latitude. Turin, 1920.

(2) Toujours après en avoir éliminé la variation avec période de 14 jours.

(3) Publications of the astronomical society of the Pacific, vol. XXXII, n° 185.

VI

Résumons. Les observations systématiques ont montré partout des variations de la latitude qui suivent une loi compliquée. Les périodes longues et courtes s'enchevêtrent, se superposent, de manière que le plan primitif des stations internationales ne peut suffire aucunement. Les déplacements du pôle se compliquent avec ceux de la verticale et les deux sont compliqués encore davantage par des causes météorologiques. M. Spencer a constaté qu'après élimination de la variation de 430 jours, il reste sur chaque observation une erreur qu'il appelle *erreur de la nuit*. D'ailleurs il avoue que les conditions d'installation de l'instrument, sur un terrain peu solide à proximité de la Tamise laissent beaucoup à désirer.

Deux conclusions se dégagent de tout ce que nous venons de dire. La première est que la précision des observations actuelles nous permet d'aborder des problèmes autrefois insolubles; la seconde est que la question des variations de la latitude n'est pas exclusivement du ressort de l'astronomie, et ce n'est pas une raison au contraire de dire que jusqu'à présent les astronomes s'en sont occupés *ex professo*. Tout porte à reconnaître que notre globe est loin d'avoir atteint la rigidité si commode pour la thèorie. Les recherches sur les déplacements de l'axe polaire et de la verticale ont besoin de points de repère hors de notre globe; mais par suite de l'influence des causes météorologiques, séismiques, vulcanologiques, etc., ces recherches sont plutôt du ressort de la géophysique.

LA COURBE DÉCRITE PAR LE PÔLE

A LA SURFACE DE LA TERRE

Par M. Da COSTA LOBO

(COÏMBRE)

On connaît l'intérêt qu'ont pris les investigations sur la courbe décrite par le pôle à la surface de la Terre. Les conclusions de Laplace et de Poisson n'ont pas été démenties; cependant la rigueur des observations des derniers temps a permis de mettre en évidence les petites variations qu'elles comportaient.

Je n'ai pas à m'en détenir, ni à propos de la théorie, ni à propos des observations. Je vais directement aux faits déjà acquis dans l'intention de préparer leur interprétation.

On sait combien est réduite l'amplitude de la variation des positions relevées par l'observation : environ 21 mètres, $10^{m},50$ relativement à une position moyenne. Cela rend le problème très délicat, et, c'est évident, il faudra de nombreuses observations, pendant beaucoup d'années, pour qu'on puisse fixer la trajectoire définitive, ou mieux une trajectoire moyenne qui puisse nous fournir la position du pôle à une époque quelconque.

En attendant, l'esprit humain ne peut pas se passer de préparer le futur, de faire des hypothèses. La figure qu'on relève des positions observées renseigne bien sur les difficultés où nous avons à nous heurter. Cependant cette figure est de nature à nous frapper.

Le chemin suivi jusqu'à présent a été de représenter les coordonnées des points occupés en fonction du temps. Ces formules sont bien connues, et on se rappellera ce qu'elles nous permettent d'obtenir de ces valeurs, et qui est encore très douteux; elles ne sont pas utilisables pour qu'on puisse avoir la solution générale de la question. Pour obtenir ce résultat, il conviendra de recourir à l'expression analytique d'une courbe comprenant des paramètres desquels on puisse disposer de manière qu'elle s'accorde le plus possible avec celle décrite par le pôle. C'est-à-dire, je serais très désireux d'avoir une expression analytique d'une courbe qu'on puisse utiliser comme on fait de celle de l'ellipse pour l'étude du mouvement de translation de la Terre. Et, heureusement, cette courbe était bien connue à l'époque où l'on a pu utiliser les observations dans ce but.

En même temps la connaissance d'une courbe analytique, qui pourrait satisfaire à ce point de vue, aurait l'avantage de faciliter la détermination des causes principales du mouvement de l'axe.

En me proposant la recherche de cette courbe, j'ai été amené à la découverte d'un nouveau genre de courbes, une desquelles s'accorde avec la figure de la courbe obtenue par le relèvement des observations, et pour lequel je propose la désignation de spirales réversibles, exactement conseillé par celle qu'il nous convient d'utiliser.

Voici les formules générales de ces trois groupes de courbes qu'on rencontre appartenir à ce même genre. Ces courbes montrent quelque ressemblance avec les courbes du second degré, une fermée, une avec une branche infinie et l'autre avec deux branches.

1^er^ GROUPE :

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \sin\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b,$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \cos\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b;$$

2^e^ GROUPE :

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b,$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \operatorname{cotg}\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b;$$

3^e^ GROUPE :

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \sec\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b,$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\alpha \operatorname{cosec}\left(\frac{q_1}{p_1}\theta + n\pi\right)} + b.$$

son étude peut être réduite à celle des expressions suivantes :

1^re^

$$\rho = \mathrm{A}a^{\sin\frac{\theta}{p}},$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\cos\frac{\theta}{p}};$$

2^e^

$$\rho = \mathrm{A}a^{\operatorname{tg}\frac{\theta}{p}},$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\operatorname{cotg}\frac{\theta}{p}};$$

3^e^

$$\rho = \mathrm{A}a^{\sec\frac{\theta}{p}},$$

$$\rho = \mathrm{A}a^{\operatorname{cosec}\frac{\theta}{p}}.$$

Mais on comprend l'avantage des expressions générales lorsqu'on veut les utiliser pour des applications, comme celles dont nous nous occupons.

Toutes les courbes du premier groupe, celles qui présentent une configuration semblable à celle de la courbe polaire, sont celles aussi qui donnent une plus grande justification à la désignation de *spirales réversibles* pour ce genre de courbes.

Faisons l'étude de la *spirale réversible sinus*. La variation du vecteur est continue dès le minimum $\frac{A}{a}$ jusqu'au maximum Aa, supposant $a > 1$, du maximum au minimum si $a < 1$, et la courbe possède un axe de symétrie. Pour les considérations suivantes, il suffira de supposer $a > 1$ et p entier, pour simplifier.

On obtient toutes les valeurs pour ρ faisant varier θ de $-\frac{1}{2}p\pi$ jusqu'à $\frac{3}{2}p\pi$, et la courbe correspondant à la variation de $\frac{1}{2}p\pi$ jusqu'à $\frac{3}{2}p\pi$ est symétrique de celle qui correspond à la variation de $-\frac{1}{2}p\pi$ jusqu'à $\frac{1}{2}p\pi$, et dans cette partie nous avons un minimum pour $-\frac{1}{2}p\pi$, et un maximum pour $\frac{1}{2}p\pi$.

On a la valeur A, moyenne géométrique pour $\theta = p\pi$ et $\theta = p.2\pi$. La courbe est reproduite indéfiniment pour les valeurs supérieures de θ.

Il est évident que p est le nombre de spires qu'il faut pour décrire complètement la courbe; $\frac{p}{4}$ pour que ρ aille du minimum à A, ou de A au maximum.

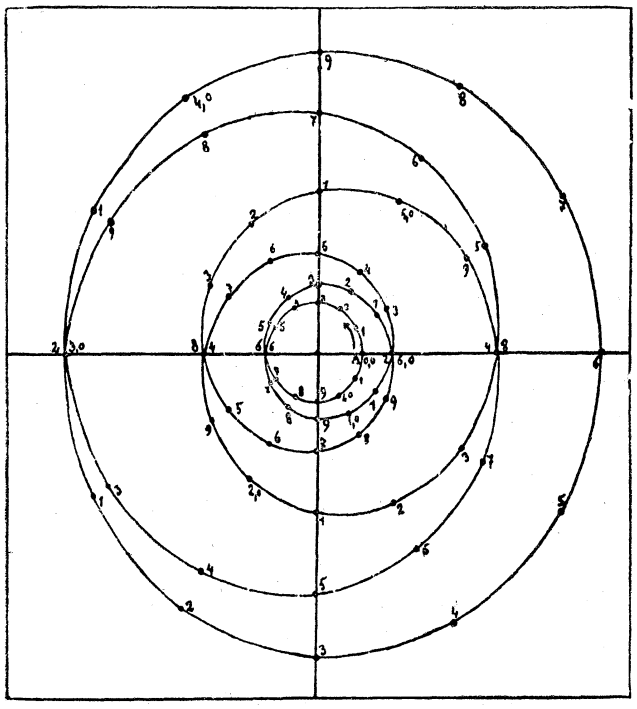


FIG. 1.

En d'autres termes, la courbe est décrite quand $\frac{\theta}{p}$ varie de o à 2π. On a la représentation dans la figure 1.

Au cas où $p = 1$, la courbe prend la forme simple d'une seule révolution.

Quand on prendra b constant, on modifiera également tous les vecteurs, et on peut déterminer b de manière que la courbe passe par l'origine. On pourra représenter b par une expression périodique en vue d'obtenir que la courbe s'harmonise le plus possible avec la courbe décrite par le pôle.

On peut disposer de la constante n afin d'obtenir la correspondance du minimum avec un certain argument. Pour qu'il soit sur l'axe, c'est-à-dire pour $\theta = 0$, on devra prendre $n = \frac{3}{2}$.

Il est très facile de déterminer les constantes, étant donnés le maximum et le minimum des vecteurs, et la valeur de la rotation qu'on a à faire pour passer de l'un à l'autre.

En voulant introduire le temps, compté comme il est d'usage, on prendra

$$\theta = \frac{N}{n} t$$

où l'on suppose que $\frac{1}{n}$ est la fraction d'un temps quelconque pris pour unité, N l'angle parcouru pendant n unités, pendant un an si l'on prend pour $\frac{1}{n}$ une fraction de l'année.

En prenant

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10}$$

comme il est d'usage, on obtient

$$\rho = A a^{\sin\left(\frac{N}{n.p} t + \frac{3}{2}\pi\right)}$$

Pour le tracé de la courbe de la figure 1 on a pris

$$N = 300^\circ, \quad n = 10, \quad p = 6, \quad A = 4, \quad a = 2{,}5.$$

Avec ces valeurs de A et a on a : $M = 10$, $m = 16$, valeurs qui s'harmonisent avec celles de la courbe observée.

En coordonnées paramétriques la courbe est représentée par les équations

$$x = \mathrm{A}a^{\sin\frac{\theta}{p}}\cos\theta,$$

$$y = \mathrm{A}a^{\sin\frac{\theta}{p}}\sin\theta,$$

en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\log\sqrt{x^2+y^2}:\mathrm{A}}{\log a} = \sin\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{p}.$$

Il est évident qu'on obtient des résultats analogues avec *la spirale réversible cosinus*.

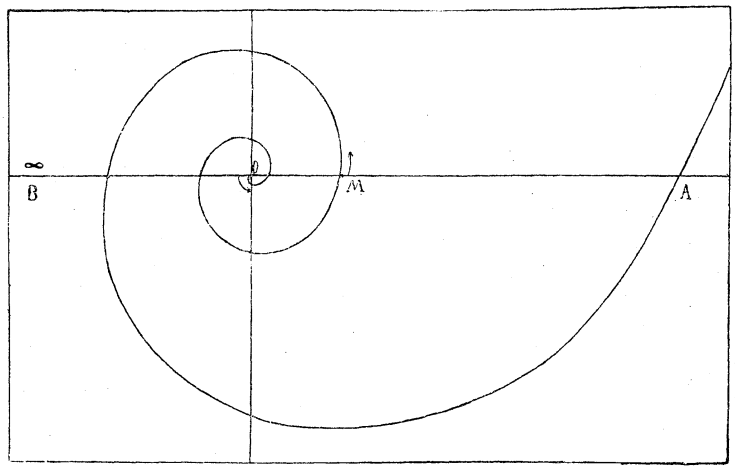


FIG. 2.

Cette courbe est identique à celle du sinus, mais elle se présente dans une autre position.

Il suffit de faire dans l'équation du cosinus

$$\theta = \frac{p}{2}\pi - \theta',$$

on obtient

$$\rho = \mathrm{A}a^{\sin\frac{\theta'}{p}}$$

*
* *

A titre de renseignement, j'observerai que le deuxième groupe est représenté par une seule branche qui, de l'origine, va jusqu'à l'infini avec un nombre fini de spires. On a sa représentation dans la figure 2 pour la tangente, en prenant $A = 4$, $a = 2,5$, $p = 6$. La courbe termine du côté B à l'infini.

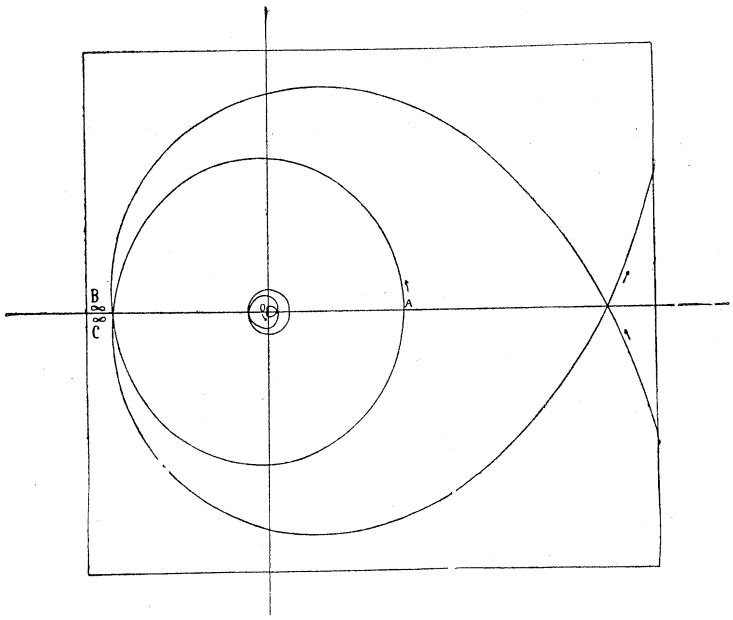


FIG. 3.

Du troisième groupe, la courbe des sécantes est représentée par deux branches (*fig. 3*), une desquelles est fermée et l'autre s'étend à l'infini.

QUELQUES COVARIANCES DE LA GRAVIFIQUE

PAR Th. DE DONDER et H. VANDERLINDEN

(BRUXELLES)

[**1**] La force totale généralisée sera définie par (1) :

$$\mathcal{F}_\sigma \equiv \sum\left[\frac{dT_\sigma^{\ \nu}}{dx_\nu} - \sum\begin{Bmatrix}\sigma & \nu\\ \alpha & \end{Bmatrix} T_\alpha^{\ \nu}\right] \qquad \sigma = 1, 2, 3, 4,$$

où $T_\sigma^{\ \nu}$ représente le tenseur symétrique.

Nous nous proposons de montrer que la covariance de la force généralisée est définie par les relations

$$\mathcal{F}'_\sigma = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sum_\lambda \mathcal{F}_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\sigma},$$

où le symbole $\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$ représente le jacobien des variables x_1, x_2, x_3, x_4, par rapport aux nouvelles variables x_1', x_2', x_3', x_4'.

Démonstration. — En vertu des cogrédiences fondamentales de la Gravifique (2), on trouve aisément la covariance du tenseur asymétrique :

$$T'^{\ \nu}_\sigma = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} T_\alpha^{\ \beta},$$

---

(1) Th. De Donder, *La Gravifique* [Bull. acad. roy. de Belgique, Cl. des Sciences, 1919, pp. 201 à 210, formule (27)].

(2) Th. De Donder, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* [Archives du Musée Teyler, série 2, tome III. Haarlem, 1917, formules (362) à (366)].

d'où l'on déduira la covariance de

$$\sum \frac{d\mathrm{T}_\sigma^{\ \nu}}{dx_\nu}.$$

La covariance de l'accolade de Christoffel est donnée par

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma & \nu \\ \alpha & \end{matrix} \right\}' = \sum_k \sum_l \sum_p \left[\left\{ \begin{matrix} k & l \\ p & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_\sigma \partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_k} \right].$$

En substituant dans l'expression de la force généralisée $\mathcal{F}_\sigma'$, et en tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right] + \sum \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \cdot \frac{\partial^2 x'_\beta}{\partial x_l \partial x_\lambda} \cdot \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\beta} \equiv 0,$$

on obtient, après quelques réductions immédiates, la covariance annoncée.

On pourrait aussi trouver cette covariance sans utiliser les accolades de Christoffel, en remarquant que l'on peut écrire aussi :

$$\mathcal{F}_\sigma \equiv \sum \left[\frac{d\mathrm{T}_\sigma^{\ \nu}}{dx_\nu} - \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_\alpha g_{\alpha,\mu,\sigma}\, g^{\mu\nu}\, \mathrm{T}_\nu^{\ \alpha} \right].$$

[2] Récemment (1), nous avons donné une nouvelle définition de la force généralisée, en posant :

$$\mathrm{F}_i \equiv \sum_\beta \left[\frac{d\mathrm{S}_i^{\ \beta}}{dx_\beta} - \sum_\alpha \left\{ \begin{matrix} i & \beta \\ \alpha & \end{matrix} \right\} \mathrm{S}_\alpha^{\ \beta} \right],$$

ce que l'on peut écrire aussi

$$\mathrm{F}_i \equiv \sum_\beta \left[\frac{d\mathrm{S}_i^{\ \beta}}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum \sum \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\nu\beta,i}\, \mathrm{S}_\alpha^{\ \nu} \right].$$

Rappelons que

$$\mathrm{S}_i^{\ \beta}$$

(1) Th. De Donder et H. Vanderlinden, *Théorie nouvelle de la Gravifique* [Bull. acad. roy. de Belgique, mai 1920, formules (28) et (29)].

est le nouveau tenseur asymétrique, et que les nouveaux potentiels gravifiques sont désignés par

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}(-g)^{-1/2}.$$

En opérant comme dans le premier paragraphe, nous obtenons la covariance :

$$\mathrm{F}'_i = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sum \mathrm{F}_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right] \mathrm{S},$$

où

$$\mathrm{S} \equiv \sum \mathrm{S}_\alpha{}^\alpha.$$

La nouvelle force généralisée, en vertu des équations différentielles du champ gravifique, vaut (1) :

$$\mathrm{F}_i = \frac{d\Gamma}{dx_i}.$$

La covariance de Γ est :

$$\Gamma' = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \cdot \Gamma;$$

on en déduit immédiatement la covariance de

$$\frac{d\Gamma}{dx_i}.$$

Posons maintenant

$$\gamma_i \equiv \mathrm{F}_i - \frac{d\Gamma}{dx_i};$$

grâce aux covariances précédentes et à la relation (2) :

$$\mathrm{S} = 2\Gamma,$$

---

(1) Th. de Donder et H. Vanderlinden, *Théorie nouvelle de la Gravifique* [Bull. Acad. roy. de Belgique, mai 1920, formules (30) et (20)].

(2) *Id.*, formule (21).

nous obtenons la covariance des équations

$$\gamma_i = 0,$$

à savoir :

$$\gamma'_i = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sum_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_i}.$$

[**3**] De la covariance de $\mathcal{F}_\sigma$, on déduira immédiatement que l'expression (1) :

$$p^\sigma \equiv \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ & \sigma \end{matrix} \right\} u^\mu u^\nu$$

est contravariante, c'est-à-dire qu'on aura :

$$p'^\sigma = \sum \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\alpha} p^\alpha.$$

[**4**] Considérons le champ non déformé :

$$\delta s^2 = -\delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2 + c^2 \delta t^2.$$

Dans ce cas, les accolades de Christoffel sont toutes identiquement nulles, et l'on aura :

$$p^\sigma = \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2}.$$

Effectuons un changement de variables, en rapportant le système étudié à un trièdre trirectangle en mouvement; d'où le changement de variables :

$$\begin{cases} x = x'_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = y'_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = z'_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \\ t = t' \end{cases}$$

avec les conditions

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \varepsilon_{ij}.$$

---

(1) Th. De Donder, *La Gravifique* (Deuxième communication). [Bull. acad. roy. de Belgique, p. 322, formule (78)].

Nous trouvons

$$p'^{\sigma} = \frac{d^2 x'_\sigma}{ds^2} + \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\alpha} \cdot u^\beta u^\gamma .$$

En utilisant les formules de transformation, on obtient finalement

$$p'^4 = \frac{d^2 x'}{ds^2} + 2\left(q' \frac{dz'}{ds} - r' \frac{dy'}{ds}\right) u'^4 + a'_{x'} (u'^4)^2$$

et deux relations analogues pour p'^2 et p'^3. Nous avons posé

$$p' \equiv \dot{\alpha}_2 \alpha_3 + \dot{\beta}_2 \beta_3 + \dot{\gamma}_2 \gamma_3 \equiv -(\alpha_2 \dot{\alpha}_3 + \beta_2 \dot{\beta}_3 + \gamma_2 \dot{\gamma}_3);$$

les points au-dessus des symboles indiquent les dérivées par rapport à $t \equiv x_4$. Nous avons posé en outre :

$$\begin{aligned} a'_{x'} \equiv \quad & \alpha_1 \ddot{x}'_0 + \beta_1 \ddot{y}'_0 + \gamma_1 \ddot{z}'_0 \\ & + x'(\alpha_1 \ddot{\alpha}_1 + \beta_1 \ddot{\beta}_1 + \gamma_1 \ddot{\gamma}_1) \\ & + y'(\alpha_1 \ddot{\alpha}_2 + \beta_1 \ddot{\beta}_2 + \gamma_1 \ddot{\gamma}_2) \\ & + z'(\alpha_1 \ddot{\alpha}_3 + \beta_1 \ddot{\beta}_3 + \gamma_1 \ddot{\gamma}_3). \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les valeurs trouvées pour (p'^1, p'^2, p'^3) fournissent le théorème de Coriolis dans *l'espace-temps* de la gravifique du système étudié ici.

Ces considérations peuvent se traduire dans *l'espace et le temps*, et en posant [1]

$$f^\sigma \equiv \frac{d^2 x_\sigma}{dl^2} + \sum \sum \left[\begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & \sigma \end{Bmatrix} - v^\sigma \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & 4 \end{Bmatrix} \right] v^\mu v^\nu, \qquad \sigma = 1, 2, 3.$$

on trouve :

$$f'^1 = \frac{d^2 x'}{dl^2} + 2\left(q' \frac{dz'}{dt} - r' \frac{dy'}{dt}\right) + a'_{x'}.$$

Remarquons que ces résultats peuvent être obtenus sous une forme différente par un calcul direct. Il en résulte une nouvelle interprétation du théorème de Coriolis.

---

[1] Th. De Donder, *La Gravifique* (Deuxième communication). [Bull. acad. roy. de Belgique, p. 322, formules (95) et (96)].

ACTIONS HÉRÉDITAIRES DISCONTINUES

ET

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI EN RÉSULTENT

PAR M. BRILLOUIN

(PARIS)

[1] Considérons un corps qui se meut dans l'air avec une vitesse supérieure à la vitesse du son, suivant une orbite de petit rayon de courbure — sous l'influence d'actions auxiliaires convenables. Le corps produit dans l'air un trouble qui se propage avec la vitesse du son, et reste concentré près du front d'onde, enveloppe des ondes émises à chaque instant par le mobile à partir de sa position actuelle. Ce front d'onde a la forme d'un cône, d'angle au sommet $arc\ sin(V : v)$ lié au mobile, lorsque le mobile se meut uniformément en ligne droite avec la vitesse v, supérieure à la vitesse V du son. On peut se faire une idée du front d'onde dans les mouvements plus compliqués en imaginant ce cône déformé par application de son axe le long de la trajectoire courbe. Il est toujours facile de dessiner ce front lorsque la loi du mouvement est connue (1). Sur le front d'onde, enveloppe des ondes émises par le mobile, le mouvement doit être considéré comme provenant de deux points de la trajectoire infiniment voisins, consécutifs. A l'intérieur de l'espace limité par le front d'onde, les ondes minces émises à chaque instant passent l'une après l'autre, sans se combiner. Un autre mobile, atteint par le front d'onde, subirait à ce moment une action violente et brève, mais parfaitement définie par les pressions développées dans l'air au front d'onde; puis, ayant traversé le front d'onde, et pénétré dans le domaine occupé par les ondes, le mobile continuera à subir une action, mais moins intense, car elle provient des ondes isolées qui succèdent à l'onde

(1) Ce phénomène, connu depuis trente-cinq ou quarante ans *au moins* des théoriciens et de quelques artilleurs, est de notoriété publique depuis la guerre; il produit le *claquement* des projectiles à grande vitesse.

d'addition qui forme le front. Il en sera de même du mobile source lui-même si sa trajectoire fortement courbée le ramène à traverser le front d'onde qu'il a lui-même engendré.

Ainsi, lorsqu'un mobile se meut dans les conditions énoncées, il peut exercer sur lui-même, par l'intermédiaire de l'air, des actions retardées; ces actions s'exerceront d'une manière discontinue, si les rencontres (dans l'espace et le temps à la fois) du mobile et de son front d'onde sont ponctuelles; le mobile subira à chacune de ces rencontres une impulsion, modifiant sa trajectoire.

Il pourra arriver aussi que ces actions soient permanentes, si, en raison de la forme fermée et de la loi des vitesses de la trajectoire, le mobile est constamment sur le front d'onde qu'il a émis. Il subit alors une action due au mouvement qui l'animait à une certaine époque antérieure, c'est-à-dire avec un retard fini, bien déterminé. On peut la qualifier, suivant la terminologie de M. Volterra, d'action *héréditaire*. Mais une action héréditaire d'une telle origine diffère profondément de celles que M. Volterra a étudiées : la moindre modification dans les constantes initiales, ou dans la loi des autres actions sur le mobile, le fera échapper à cette action, soit totalement, soit en la réduisant à une ou plusieurs impulsions isolées; on peut dire que ces actions héréditaires (apparentes) sont *discontinues* et *conditionnées*.

[**2**] Un exemple très simple suffit à montrer toute la complication qui peut en résulter.

Supposons le mobile animé d'une vitesse v uniforme sur une circonférence de rayon R. Entre deux positions du mobile séparées par un angle $2\alpha < 2\pi$, il s'écoule un temps

$$t_k = \frac{2\alpha + 2k\pi}{v} \mathrm{R},$$

avec k entier suivant le nombre de tours complets accompli par le mobile entre les passages considérés aux deux positions.

D'autre part, le temps de parcours de la corde par le trouble aérien est

$$t' = \frac{2\mathrm{R}\sin\alpha}{\mathrm{V}}.$$

Si les durées de parcours t' et t_k sont les mêmes, le mobile qui passe en un point M recevra les ondes qu'il a émises aux époques t_0, t_1, t_2, ... antérieures, en

des points situés, en amont, aux distances angulaires $2\alpha_0$, $2(\alpha_1+\pi)$, $2(\alpha_2+2\pi)$, ... que déterminent les équations

$$\sin\alpha_0 = \frac{V}{v}\alpha_0,$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{V}{v}(\alpha_1+\pi),$$

$$\sin\alpha_k = \frac{V}{v}(\alpha_k+k\pi),$$

en désignant toujours par α_0, α_1, ..., α_k des angles compris entre o et π.

Chacune de ces équations a deux racines (1). En outre, les équations n'ont de racines réelles que si k est un entier plus petit que $\frac{v}{\pi V}$. Le nombre d'ondes qui atteignent le mobile est donc *au plus* égal au plus petit entier immédiatement supérieur à $\frac{v}{xV}$.

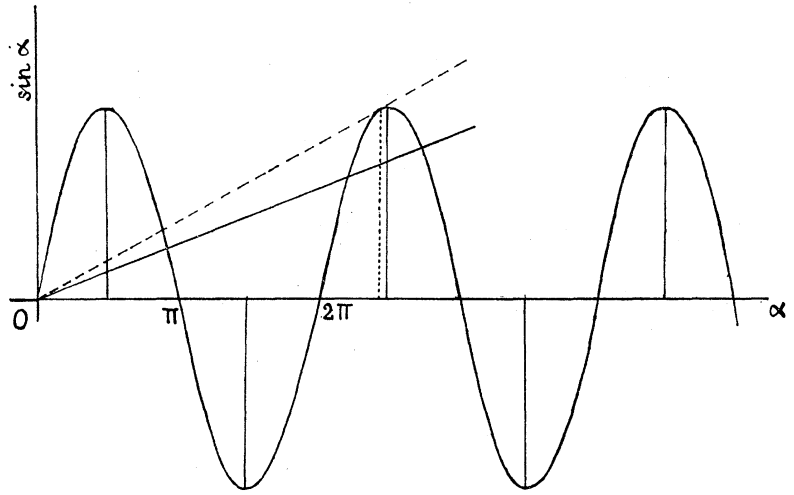


FIG. 1.

En général, aucune de ces ondes n'est sur le front d'onde; pour qu'elle y soit, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial t_k}{\partial\alpha} = \frac{\partial t'}{\partial\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \alpha=\alpha_k.$$

ou

$$\frac{1}{v} = \frac{\cos\alpha_k}{V}.$$

(1) En comptant la racine o de la première équation.

L'angle α_k correspondant au front d'onde, lorsqu'il existe, est donc déterminé par les équations

$$\cos(\alpha_k) = \frac{V}{v}, \qquad \sin\alpha_k = \frac{V}{v}(\alpha_k + k\pi),$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha_k = \alpha_k + k\pi$$

avec la condition

$$\frac{V}{v} = \cos\left(\sqrt{\frac{v^2}{V^2} - 1} - k\pi\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

La figure 1 montre bien comment les choses se passent. Faisons croître la vitesse v; la pente $\frac{V}{v}$ de la droite diminue progressivement. Tant que $\frac{V}{v}$ est supérieur à 1, la droite ne rencontre la sinusoïde qu'à l'origine; le phénomène que je veux étudier ne se produit pas. Puis $\frac{V}{v}$ diminuant, au-dessous de 1, la droite rencontre le premier arc de sinusoïde, entre 0 et π; la première équation a une racine (outre, *zéro*); mais les autres n'en ont pas.

La vitesse v augmentant encore, la droite devient tangente au deuxième arc de sinusoïde positif ($k = 2$). C'est le front d'onde qui rattrape le mobile après un peu plus de deux tours. Il y a trois actions héréditaires dont une est double. Puis celle-ci se dédouble, et la figure montre suffisamment comment varient les racines : α_0 augmente, α_1' diminue, α_1'' augmente. Pour une vitesse plus grande encore, la droite devient tangente au troisième arc de sinusoïde positif ($k = 4$); c'est le front d'onde qui rattrape le mobile après un peu plus de quatre tours, etc. Il n'y a évidemment pas de racines pour les valeurs impaires de k.

Lorsque k est très grand, les premières racines α_k'' diffèrent peu de π par défaut, et les premières racines α_k' diffèrent peu de 0 par excès. La valeur qui correspond au front d'onde diffère peu de $\frac{\pi}{2}$.

Les racines de l'équation $\alpha_k + k\pi = \operatorname{tg}\alpha_k$ sont bien connues,

$\alpha_k + k\pi$,	$v : V$
$3.90^0 - 12^0 32' 48''$	5 environ
$5.90^0 - 7^0 22' 32''$	8 —
$7.90^0 - 5^0 14' 22''$	11 —
$9.90^0 - 4^0 3' 59''$	14 —
.....	

α_k tend vers $\frac{\pi}{2}$, par défaut, pour les grandes valeurs de R ; en même temps $v : V$ tend vers

$$\sqrt{k^2\pi^2+1} \qquad (k \text{ pair}).$$

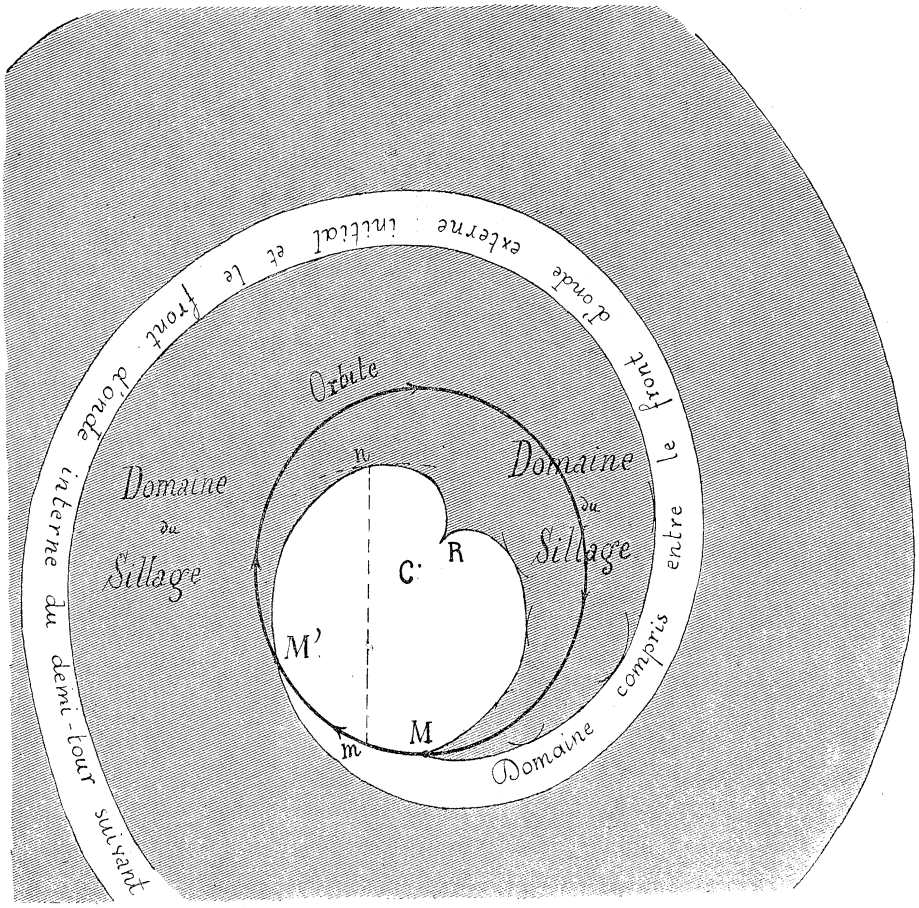


FIG. 2. $\frac{r}{V}=4$.

Le mobile n'est pas rattrapé par l'onde émise antérieurement.

Sur chacune de ces figures (2 et 3) sont tracées les enveloppes des ondes émises par le mobile M aux époques antérieures à son passage en M. La nappe qui part extérieurement à l'orbite est, dans toutes ses spires, un véritable front d'onde ; les points atteints par les ondes sont entre l'enveloppe et l'orbite. La nappe qui part intérieurement à

Sur des circonférences *de même rayon* R, la fréquence correspondante tendrait vers

$$\frac{V\sqrt{k^2\pi^2+1}}{2\pi R}.$$

Les vitesses pour lesquelles le mobile est exactement rattrapé par le front de l'onde forment une suite discontinue.

Le rayon des orbites n'est pas déterminé par ces conditions.

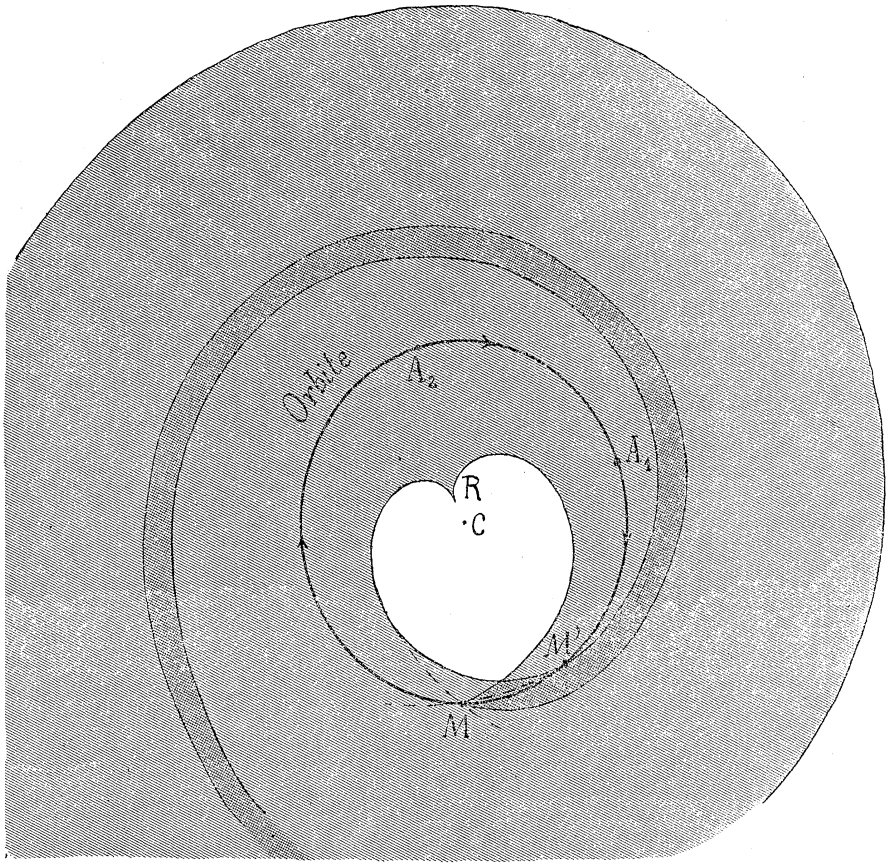


FIG. 3. $\frac{v}{V} = 5$.

Le mobile est rattrapé par deux ondes émises antérieurement (positions A_1 et A_2).

l'orbite est aussi, jusqu'au point de rebroussement R, une limite extérieure aux ondes, Au delà de R, cette enveloppe n'est plus un véritable front; (ex. : point *n* provenant d'une émission au passage en *m*). C'est une propriété intéressante dont l'étude ne saurait trouver place ici.

[**3**] Les équations du mouvement ne peuvent pas être formées sans une connaissance approfondie des propriétés du milieu qui transmet ces actions. C'est là un problème généralement très difficile et presque inabordable. Mais quelques caractères généraux de ces actions peuvent néanmoins être indiqués.

L'action dépend évidemment de la distance, r entre la position actuelle et la position source antérieure; de la vitesse antérieure, en direction et grandeur, au moins par l'angle compris entre cette vitesse et la distance r, et aussi de la vitesse actuelle. Le détail est du domaine de la physique théorique; retenons seulement l'influence de positions antérieures à déterminer par la loi même du mouvement qu'on cherche.

Soient :

x, y, z	la position actuelle;
$\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$	la vitesse actuelle;
x_1, y_1, z_1	une position antérieure;
x'_1, y'_1, z'_1	la vitesse correspondante;
v	la vitesse à un instant quelconque;
ds	un élément de trajectoire $\left(ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\right)$.

L'équation qui déterminera si le mobile est rejoint par une des ondes qu'il a émises antérieurement est

$$\tau = \mathrm{V}\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{v} = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}. \tag{1}$$

S'il s'agit du front d'onde, on aura en outre

$$\frac{\mathrm{V}ds_1}{v_1} = \frac{(x_1 - x)dx_1 + (y_1 - y)dy_1 + (z_1 - z)dz_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}. \tag{2}$$

Il faudra d'abord résoudre l'équation 1, qui a généralement des racines, pourvu que la trajectoire ait des boucles ou des quasiboucles, et que la vitesse v soit beaucoup plus grande que V.

L'ensemble des deux équations, 1 et 2, telles que ce soit un front d'onde qui rattrape le mobile, n'a de racine que pour des valeurs isolées très particulières des v, séparées les unes des autres par des intervalles étendus.

Sans vouloir analyser les actions subies, le caractère important est qu'elles dépendent de certains états antérieurs définis par les équations 1 et 2. Les équations seront donc de la forme

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \mathrm{X}(t) + \Sigma\mathrm{X}(t - \tau), \\ m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \mathrm{Y}(t) + \Sigma\mathrm{Y}(t - \tau), \\ m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \mathrm{Z}(t) + \Sigma\mathrm{Z}(t - \tau). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En général, on ne peut pas traiter séparément l'équation (1), ou les deux équations (1), (2) d'une part, et les équations du mouvement. Ces équations sont étroitement associées et constituent un ensemble inséparable. L'intégration de ces équations différentielles, dont le second membre dépend de certains états antérieurs, définis par l'équation 1 au moyen de tous les états intermédiaires, est un problème mathématique beaucoup plus difficile que l'intégration des équations ordinaires du point matériel, et que l'imagination de mathématiciens purs ne s'est, semble-t-il, jamais posée.

C'est sur ce problème purement mathématique que je voudrais attirer l'attention des mathématiciens.

Ce problème, — ou mieux certaines variantes de ce problème un peu plus compliquées, — permet d'entrevoir l'introduction de nombres entiers, jouant un rôle important dans les intégrales de certains mouvements périodiques suivant les valeurs des constantes, des aires et des forces vives par exemple, et cela par l'intervention d'un mécanisme de propagation dépourvu de mystère. Peut-être pourra-t-on trouver, — moyennant quelques hypothèses également claires — l'origine des quanta de Planck, dans une propriété de ce genre de l'électro-magnétisme (1).

---

(1) Voir *Actions mécaniques à hérédité discontinue par propagation; essai de théorie dynamique de l'atome à quanta* (C. R., t. 168, 1919, p. 1318; erratum, t. 169, p. 48); et *Actions à hérédité discontinue et voies spectrales* (C. R., t. 171, nov. 1920, p. 1000) (cas d'une vitesse de propagation variable avec la distance à un centre fixe; relation entre la loi de la vitesse de propagation en fonction du rayon vecteur et la périobe propre des orbites circulaires privilégiées).

UN NOUVEAU THÉORÈME

POUR CALCULER LES TENSIONS DES BARRES SURABONDANTES DES POUTRES

ET ARCS A MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ

PAR M. FARID BOULAD

(LE CAIRE)

Parmi les ouvrages à barres surabondantes qu'on rencontre assez souvent dans les constructions métalliques, les poutres et les arcs à montants et Croix de Saint-André sont les plus fréquents.

Les méthodes de calcul données jusqu'à ce jour pour déterminer exactement les tensions des barres de ces ouvrages à liaisons hyperstatiques intérieures, ne semblent pas pratiques, notamment lorsqu'il s'agit de rechercher les efforts maxima développés dans les éléments de ces ouvrages sous l'action des charges mobiles.

On pourrait cependant calculer les tensions des barres surabondantes de ces ouvrages, par une méthode exacte et pratique[1] que nous exposerons dans un Mémoire sous presse avec un exemple d'application et une étude de la construction des lignes d'influence des efforts dans les divers éléments d'une poutre de pont parabolique à montants et Croix de Saint-André.

Cette méthode est fondée sur un nouveau théorème que nous nous proposons d'appeler théorème *des deux tensions conjuguées*, dans le genre du théorème des deux moments de M. Maurice Levy.

Nous établirons d'une façon directe et simple l'équation des tensions des barres surabondantes, en faisant appel aux deux principes de proportionnalité et de super-

---

[1] Qu'il nous soit permis de remercier ici M. Raimondi, Ingénieur en Chef des Ponts et des Travaux des Chemins de Fer de l'État Égyptien, d'avoir bien voulu nous donner, en même temps que des conseils éclairés, l'occasion de vérifier la stabilité de quelques poutres de pont à montants et Croix de Saint-André au moyen de la nouvelle méthode ci-dessus, afin de nous rendre compte de l'avantage que présente cette méthode, d'être d'une application pratique.

position des forces et de leurs effets élastiques ainsi que du principe de réciprocité de ces effets.

D'ailleurs, la façon que nous adopterons pour déterminer les équations des efforts de liaisons hyperstatiques intérieures, s'étend à un système articulé quelconque surabondant. Elle conduit à des équations dans lesquelles les coefficients des inconnues sont essentiellement positifs et figurés sous une forme plus simple et pratique que celle qui résulte de l'application du principe plus général des dérivées du travail de déformation.

I. Notations et conventions. — Considérons une poutre réticulaire plane, droite ou courbe, extérieurement isostatique, comportant une série de n panneaux de forme quadrilatère à deux diagonales dites : *Croix de Saint-André.*

Numérotons dans l'ordre (1), (2) ... (n) de (1) à (n), ces divers panneaux, en partant de celui de gauche et représentons par Ψ_c cette poutre soumise à l'action d'un système quelconque de charges C appliquées aux nœuds.

Cela posé, pour étudier ce système articulé surabondant Ψ_c sollicité par les charges C, nous allons tout d'abord le ramener à l'état isostatique, sans que l'équilibre soit troublé, en le décomposant en deux systèmes partiels isostatiques définis ci-après :

1° Le système dit *principal* qu'on obtient en admettant qu'on supprime, dans chacun des panneaux de cette poutre, l'une quelconque des deux diagonales, considérée comme barre surabondante, et qu'aux deux nœuds où chaque barre a été coupée, on applique deux forces directement opposées, égales et de sens contraire à la tension inconnue de la barre surabondante. Ces forces de liaisons, qui sont les réactions de cette tension aux deux nœuds opposés, seront considérées comme des *forces extérieures*.

2° Le système dit *surabondant* relativement au système principal est celui que l'on forme par l'ensemble des barres surabondantes déjà supprimées, considérées isolément et soumise chacune à ses deux extrémités à l'action de deux forces directement opposées, égales et de même sens que la tension inconnue de la barre surabondante considérée.

A présent désignons par :

X_k, la valeur algébrique de la tension inconnue de la barre surabondante dans un panneau quelconque (k) du *système proposé*. La valeur algébrique commune de deux réactions de cette tension aux deux nœuds où cette barre est supposée coupée dans *le système principal isostatique*, est égale à $-X_k$.

Σ_e, *le système principal isostatique* soumis à la seule action des charges données C.

$\Sigma_{-x,c}$, ce même *système principal* sollicité par les forces de liaisons $-X_k$ et les charges données C.

Φ_x, *le système surabondant relatif,* sous l'action des tensions inconnues X_k.

K, chacun de deux nœuds opposés, près desquels la barre surabondante du panneau (k) a été coupée à ses deux extrémités.

γ_k, la valeur algébrique de la variation ou déformation élastique subie par la distance (écartement) entre deux nœuds opposés quelconques k du système principal Σ_c sollicité par les charges données C.

L_k la valeur algébrique de la variation ou déformation élastique de la distance entre les deux nœuds opposés dans un panneau quelconque (k) du système principal Σ_p sans charges C et sans forces $-X_k$ et soumis à la seule action de deux forces *arbitraires* répulsives égales et de valeur commune P appliqué aux deux nœuds opposés s d'un autre panneau quelconque (s) de ce même système. Ces deux forces P seront dites *unitaires*. En vertu du principe de réciprocité, on a : $\alpha_k^{\,s} = \alpha_s^{\,k}$.

λ_k, la variation ou déformation de la longueur totale a_k d'une barre surabondante k considérée isolément et soumise à l'action de deux forces *répulsives unitaires* de valeur commune P agissant à ses deux extrémités.

La valeur algébrique commune de deux forces quelconques égales et directement opposées, sera considérée + ou — selon que ces deux forces sont *répulsives ou attractives.*

La valeur algébrique de la variation δl de la distance l, en valeur absolue entre deux points quelconques, sera considérée + ou — selon que ces deux points s'écartent ou se rapprochent.

II. Équation des trois tensions surabondantes. — Nous venons de décomposer le *système proposé* Ψ_e en deux *systèmes partiels isostatiqnes,* savoir : *Le système principal* $\Sigma_{-x,c}$ *et le système surabondant relatif* Φ_x. Comme l'équilibre n'a pas été troublé, il est évident que la superposition de ces deux systèmes partiels donne le système proposé et que *le système principal* se comportera en se déformant comme *le système proposé.*

Il en résulte la remarque suivante : *Que la variation ou déformation élastique de la longueur de la barre surabondante quelconque k sollicitée dans le système surabondant Φ_x par sa tension X_k, est égale à la variation élastique de la distance entre les deux nœuds opposés k dans le système partiel $\Sigma_{-x,c}$ où cette barre surabondante a été coupée à ses deux extrémités.*

Dès lors, si l'on considère trois panneaux consécutifs quelconques $(k-1)$, (k) et $(k+1)$ (*fig. 1*) du système $\Sigma_{-x,c}$ et la barre surabondante k du panneau (k) et,

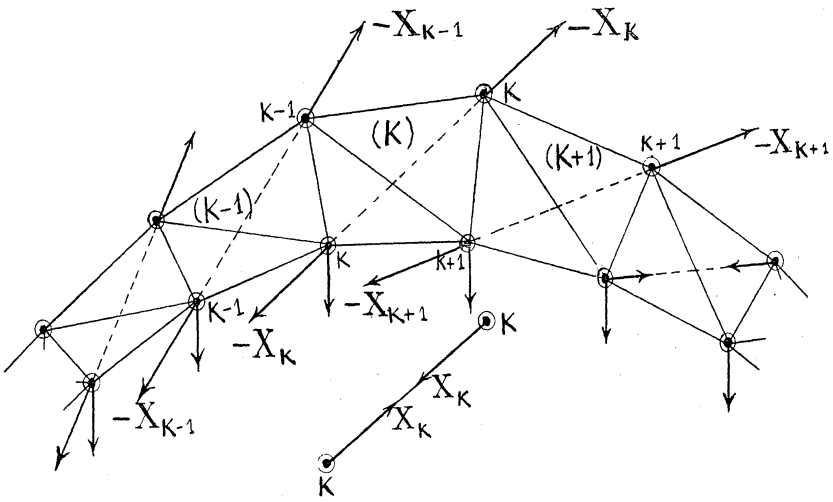


FIG. 1.

si l'on applique la remarque ci-dessus à cette barre surabondante on a, en vertu des deux principes de proportionnalité et de superposition, la relation suivante :

$$X_k \frac{\lambda_k}{P} = -X_{k-1} \frac{\alpha_k^{k-1}}{P} - X_k \frac{\alpha_k^{k}}{P} - X_{k+1} \frac{\alpha_k^{k+1}}{P} + \gamma_k$$

ou l'équation

$$(1) \qquad X_{k-1}\,\alpha^k{}_{k-1} + X_k(\alpha^k{}_k + \lambda_k) + X_{k+1}\,\alpha^k{}_{k+1} = P.\gamma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Tous les coefficients $\alpha^k{}_{k-1}$, $\alpha^k{}_k$, $\alpha^k{}_{k+1}$, λ_k figurés dans cette équation, sont positifs. On peut les évaluer aisément avec γ_k, soit graphiquement par la construction de Williot ou par celle de Keelof, soit numériquement par application du principe du travail virtuel.

III. DÉFINITION D'UNE POUTRE CONTINUE FICTIVE DONT LES MOMENTS SUR APPUIS ONT MÊMES VALEURS QUE LES TENSIONS X_k DES BARRES SURABONDANTES DE LA POUTRE A TREILLIS Ψ_c. — Imaginons une poutre continue à fibre neutre horizontale, reposant librement sur $(n+2)$ appuis de niveau $A_0 A_1 \ldots A_{n+1}$ et comportant $(n+1)$ travées de longueurs arbitraires $l_1, l_2 \ldots l_{n+1}$ (Dans la pratique, ces longueurs seront prises égales entre elles).

Désignons, comme d'habitude, les données élastiques de cette poutre fictive, par :

F_k et F_k' (*fig.* 2), les deux *foyers* respectifs de gauche et de droite dans une travée quelconque $A_{k-1}A_k$.

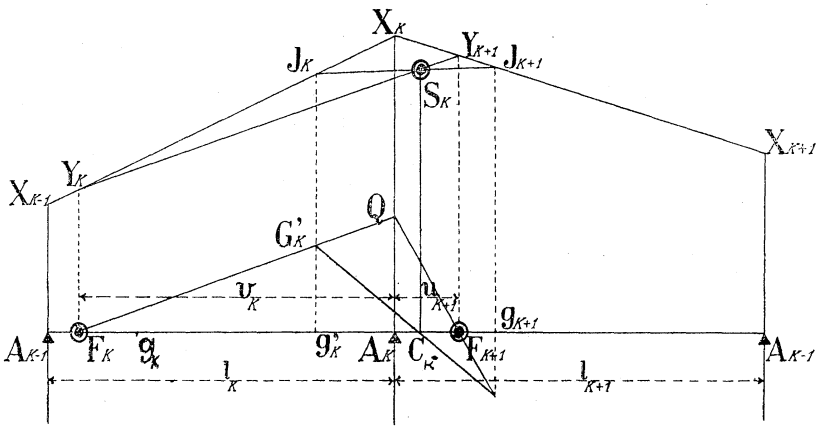


FIG. 2.

g_k et g'_k, les positions respectives sur $A_{k-1}A_k$ des deux *verticales trisectrices* de gauche et de droite de cette même travée.

u_k et v_k, les distances respectives du *foyer* de gauche F_k aux deux appuis.

C_k, la position de la *contre-verticale* de l'appui A_k.

Ceci posé, en se rapportant à la relation (1), on démontre aisément que, pour que les moments sur trois appuis consécutifs quelconques A_{k-1}, A_k et A_{k+1} de cette poutre fictive aient mêmes valeurs que les tensions inconnues ci-dessus X_{k-1}, X_k et X_{k+1}, il faut et il suffit que les deux conditions ci-après I et II soient remplies :

I. — *Que la position de la verticale trisectrice g_k et g_k' et de la contre-verticale C_k de l'appui A_k soit définie, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, par les rapports suivants :*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_{k-1}g_k}{g_kA_k} = \dfrac{\alpha^k{}_{k-1}}{\lambda_{k-1}} \qquad \text{et} \qquad \dfrac{A_{k-1}g'_k}{g'_kA_k} = \dfrac{\alpha_k^{\,k}}{\alpha_k^{\,k-1}}, \\ \dfrac{g'_kC_k}{C_kg_{k+1}} = \dfrac{\alpha_k^{\,k+1} + \lambda_k}{\alpha_k^{\,k} + \alpha_k^{\,k-1}}. \end{cases}$$

On remarquera que les deux foyers F_0 et F_{n+1} dans les deux travées extrêmes coïncident respectivement avec les deux appuis A_0 et A_{n+1}.

II. — *Que les charges qui produisent des moments sur appuis de mêmes valeurs que les tensions surabondantes X_k soient définies par la quantité γ_k dans l'équation* (1).

IV. Relation définissant un couple de points conjugués F_k et F_{k+1} quelconques dans deux travées contigues quelconques $A_{k-1}A_k$, A_kA_{k+1}. — Si l'on pose

$$\sigma_k = \alpha^k_{k-1} + \alpha^k_k + \alpha^k_{k+1} + \lambda_k$$

on tire de l'équation (1) la relation suivante :

$$\frac{\alpha_k^{k-1} l_k}{v_k} + \frac{\alpha_k^{k+1} l_{k+1}}{u_{k+1}} = \sigma_k \tag{3}$$

entre les deux *points correspondants* F_k et F_{k+1}. La construction graphique de ces deux points est indiquée à la figure 2.

V. Théorème des deux tensions linéairement composées et conjuguées. — Si l'on désigne par Y_k et Y_{k+1} les deux moments dûs à la continuité de la poutre fictive, produits respectivement aux *points conjugués* F_k et F_{k+1} on a, entre ces deux moments, déjà appelés *tensions conjuguées*, la relation suivante :

$$\frac{\alpha_k^{k-1} l_k Y_k}{v_k} + \frac{\alpha_k^{k+1} l_{k+1} Y_{k+1}}{u_{k+1}} = P \cdot \gamma_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Soient F_kY_k et $F_{k+1}Y_{k+1}$ les deux ordonnées représentant respectivement les deux *tensions conjuguées* Y_k et Y_{k+1}, et S_k un point fixe dit *pôle* situé sur la *contre-verticale* et ayant pour ordonnée la valeur suivante :

$$C_kS_k = \frac{P \cdot \gamma_k}{\sigma_k}.$$

Énonçons ci-après le théorème ci-dessous :

La droite Y_kY_{k+1} *joignant les deux tensions conjuguées aux deux points* F_k *et* F_{k+1}, *pivote autour du pôle fixe* S_k *de l'appui* A_k *lorsque la position de ces deux points conjugués varie sur* $A_{k-1}A_kA_{k+1}$.

En outre, on a la proposition suivante :

La droite joignant entre eux les deux points Y_k *et* Y_k' *des tensions conjuguées aux deux foyers* F_k *et* F_k', *détermine sur la verticale des appuis* A_{k-1} *et* A_k *les deux ordonnées* $A_{k-1}X_{k-1}$ *et* A_kX_k *représentant les valeurs des tensions surabondantes* X_{k-1} *et* X_k.

LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES ET LES SCIENCES D'OBSERVATION

Par M. Giovanni BOCCARDI

(TURIN)

Tous les auteurs de traités d'arithmétique ou de calcul numérique se font un devoir de traiter assez longuement la théorie des approximations numériques, quoique dans la pratique ordinaire cette théorie ne trouve aucune application. Je ne conteste aucunement l'utilité de ces recherches dans les questions théoriques ou dans la construction de Tables devant donner des chiffres tout à fait exacts; mais comme dans ces dernières années quelques astronomes ont trouvé à redire à la pratique ancienne et générale des astronomes et de tous les calculateurs, et d'un autre côté des mathématiciens ont voulu tirer de l'oubli la théorie des approximations numériques, en la déclarant de grande utilité ou même d'absolue nécessité dans les sciences d'observation, j'ai été amené à faire des réflexions sur ce dernier sujet, et je me permets de les soumettre à votre examen.

I

Je dis de suite que je vois dans les approximations numériques d'un côté et les sciences d'observation de l'autre deux champs différents, soit que nous considérions le but qu'elles se proposent et les moyens qu'elles emploient, soit surtout si nous examinons le principe général, le *criterium* qui les dirige.

Le *but* des approximations numériques est d'abord de chercher les relations entre les données *dont on connaît bien* l'approximation et les résultats, pour décider du degré de précision de ceux-ci. Par exemple, on fait la somme de plusieurs logarithmes sur le dernier chiffre desquels il reste l'incertitude de ± 5 unités de l'ordre suivant, et l'on cherche sur combien de *chiffres exacts* on peut compter sur la somme; on construit des tables numériques, dans lesquelles on veut absolument garantir le dernier chiffre, et l'on cherche avec combien de décimales doivent être calculées les valeurs des quantités dont les nombres des tables sont le résultat.

Un autre but est de modifier légèrement les règles des opérations arithmétiques de manière à obtenir, en écrivant moins de chiffres, le résultat avec le nombre strict de chiffres dont on a besoin, ou bien de manière à obtenir seulement la partie certaine du résultat.

Dans les sciences d'observation, au contraire, on ne met pas de bornes au nombre des chiffres à obtenir; on s'arrête là où l'on est forcé de s'arrêter, et l'on serait heureux de pouvoir aller plus loin dans le degré de précision. Par exemple, il y a deux cents ans on se bornait à donner la parallaxe du Soleil à la seconde ronde. Denys du Séjour employait 10″ dans ses calculs d'éclipses. Plus tard on alla jusqu'aux dixièmes de seconde, et bientôt après on prétendit discuter des centièmes. Aujourd'hui nous adoptons $8'',806 \pm 0'',004$. Souvent on donne quelques chiffres de plus, comme résultat purement numérique, pour qu'on ne soit pas choqué de voir que les chiffres du résultat ne correspondent pas exactement, numériquement, aux opérations que l'on a faites. Voilà pourquoi, du temps de Bessel (1841), et même aujourd'hui, on donne la valeur du demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre jusqu'aux mètres, tout en avouant qu'il reste sur cette valeur une erreur moyenne de $\pm$ 80 mètres.

Quelle est la raison de cette différente manière d'agir dans les approximations numériques et les sciences d'observations? C'est que dans les premières on part de données certaines, on connaît parfaitement le degré d'approximation des nombres que l'on emploie, tandis que dans les sciences d'observation on n'a que des limites, souvent assez grossièrement approchées elles-mêmes, entre lesquelles sont comprises les valeurs que l'on emploie. Dans le premier cas on est en pleine et pure mathémathique, tandis que dans le second on se met en contact avec le monde extérieur, on tire parti d'observations qui, comme toutes les choses humaines, sont imparfaites et telles que l'on ne peut presque jamais garantir leur degré de précision. Dans les sciences d'observation il faut toujours s'attendre à l'imprévu. Vous mesurez un angle avec le théodolite et par hasard vous prenez la quatrième division de la minute pour la cinquième; ou bien vous lisez un niveau divisé de dix en dix parties et vous prenez la troisième division pour la quatrième. Cela arrive assez souvent.

Donc, par la force des choses, dans les sciences d'observation on ne peut se proposer le même but que dans les approximations numériques.

Mais il y a une autre différence essentielle. Dans les approximations numériques on veut garantir le dernier chiffre auquel on s'arrête dans le résultat, quoique le chiffre suivant dépasse 5. Dans la valeur de π le chiffre exact de la quatrième décimale est 5. On écrira 3,1415. Tandis que dans les sciences d'observation le chiffre exact est celui qui rapproche le résultat le plus possible de la vérité, celui qui produit la moindre erreur dans les applications. Pour nous, la quatrième décimale de π est 6; nous écrivons

$$3,1416.$$

Et si l'on emploie 3,1415 dans les mesures réellement accomplies on s'éloignera de beaucoup de la véritable valeur du résultat. Certainement on aura la satisfaction de savoir ce qui doit venir lorsqu'on aura employé 3,1415; mais on apprendra avec regret qu'en faisant de la sorte on ne peut compter, par exemple, que sur le chiffre des dixièmes dans le résultat. Bien merci! Les principes sont sauvés, l'opération chirurgicale sera réussie parfaitement au point de vue de la science et de l'art. Seulement il y a le petit inconvénient que le patient a succombé!

Non, les buts dans les deux champs sont très différents, et les mathématiciens n'ont pas raison de se plaindre que dans les sciences d'observation on ne se soucie guère de toutes leurs règles et agencements pour *garantir tel chiffre*.

Quant aux opérations abrégées, à mon humble avis, on perd un temps considérable à en apprendre la pratique; et pour ce qui est des élèves, on les a entendu quelquefois s'excuser de n'avoir pas employé les opérations abrégées *parce qu'ils n'en avaient pas eu le temps!*

II

Quant aux *moyens*, la différence est encore frappante. Dans la théorie des approximations, on ne fait qu'*une* opération, simple ou complexe; en tout cas, on n'accomplit qu'*une seule fois* le calcul, et, sûr des principes mathématiques, on déclare que le résultat a telle approximation.

Au contraire, dans les sciences d'observation on ne se fie jamais à un seul témoin. On fait l'opération, par exemple une mesure, on la répète dix, cent, mille fois. Pourquoi cela? C'est que toute mesure a son imperfection inévitable, et l'on cherche plusieurs témoins pour faire ressortir la vérité. Ajoutons, en passant, que même dans les approximations numériques, dès que l'on prend la plume pour faire des calculs, on entre dans le terrain des actions humaines, et ce serait une grave imprudence de faire *une* seule fois n'importe quelle opération. La répétition, la vérification s'impose. Mais, même ici, la différence entre les deux procédés est évidente. On refait un calcul pour voir si l'on retombe exactement sur le même résultat; tandis qu'on refait plusieurs fois une mesure, pour voir si les différents résultats vont d'accord, et pour juger, d'après cela, du degré d'approximation que l'on a atteint. Là on sait d'où l'on part et on connaît bien à quelle approximation on doit aboutir; ici on juge *a posteriori* du degré de précision du résultat.

Sans doute, en multipliant les mesures on risque parfois d'être trompé par leur accord satisfaisant ou même excellent, parce qu'une erreur systématique peut se glisser et les fausser toutes de la même manière; mais la pratique des hommes de science est précisément de chercher à obtenir le même résultat par des voies toutes

différentes. La parallaxe du Soleil, cette constante astronomique fondamentale, qui a été obtenue par six ou sept méthodes différentes, soit théoriques ou de la mécanique céleste, soit d'observation directe, cette parallaxe nous offre un exemple frappant par l'excellent accord entre les résultats obtenus par des voies si différentes.

Et l'on comprend quel est le principe directeur, le *criterium* fondamental de cette multiplication des opérations; c'est qu'on a confiance dans la *compensation des erreurs*. C'est là le noyau de la question, et j'allais dire la barrière qui sépare les deux domaines.

Dans les approximations numériques on se place toujours dans le cas le plus défavorable. On connaît parfaitement, non pas l'erreur elle-même, mais l'erreur *maximum* que l'on peut craindre sur chacune des données, et en s'appuyant sur cette base, on détermine sur quel chiffre on peut *absolument compter* dans le résultat. Sans doute on a raison au point de vue théorique, et vu le but que l'on se propose, de *garantir absolument tel chiffre*.

Mais dans les sciences d'observation on est plus pratique; on se règle comme dans toutes les choses humaines, où l'on ne cherche pas l'exactitude absolue ou la certitude mathématique, qui serait irréalisable. D'autant plus que les données sur lesquelles nous nous appuyons et travaillons n'ont pas une incertitude absolument bien garantie. Donc, il serait impossible, inutile et même dangereux de se priver des avantages des choses humaines qui, heureusement, ne présentent pas l'inflexibilité des mathématiques. Dans les sciences d'observation on se dit que le cas théorique des approximations, où l'erreur *maximum* se présente sur *toutes* les données, n'arrivera presque jamais, et l'on se borne à ce qui arrive presque toujours. Il y a là une question de bon sens.

Prenons un exemple. *Quelle est l'erreur à craindre sur une somme de dix logarithmes ayant tous le même nombre de décimales?*

La théorie des approximations nous dira que, puisque l'erreur *maximum* sur le dernier chiffre est ± 5, sur dix logarithmes il est à craindre que les dix erreurs soient toutes égales à $+5$ ou à -5, et alors l'erreur à craindre sur la somme se monte à 5,0 de la dernière décimale. Soit! mais avec cette erreur sur quel chiffre peut-on compter sur le résultat? Un instant de réflexion suffit pour faire voir que cette erreur, si les chiffres précédents sont tous des 9, ne nous permettra pas de garantir ni le chiffre des millièmes, ni la caractéristique elle-même.

$$\text{Exemple :} \qquad 3{,}99999 + 5{,}0 = 4{,}00004.$$

Et alors? N'a-t-on pas raison dans les sciences d'observation de s'en tenir aux chiffres qui nous éloignent le moins possible de la vérité, et encore de compter sur la compensation entre les erreurs des dix logarithmes? J'emprunte un exemple à

l'un des traités publiés dernièrement sur les approximations, en en rectifiant les nombres d'après les indications de l'auteur. Il s'agissait d'additionner les logarithmes à 5 décimales des cinq nombres suivants :

$$\begin{aligned}
\log\ 2 \ldots\ldots\ldots &\ 0{,}30103\\
\text{»}\ 22{,}32 \ldots\ldots\ldots &\ 1{,}34869\\
\text{»}\ 47 \ldots\ldots\ldots &\ 1{,}67210\\
\text{»}\ 9 \ldots\ldots\ldots &\ 0{,}95424\\
\text{»}\ 970{,}1 \ldots\ldots\ldots &\ 2{,}98682\\
\hline
S = &\ 7{,}26288
\end{aligned}$$

L'auteur donne les limites entre lesquelles la somme S est comprise, c'est-à-dire

$$7{,}26288 - 5 \cdot \frac{0{,}1^5}{2} \leqq S < 7{,}26288 + 5 \cdot \frac{0{,}1^5}{2},$$

ou bien

$$7{,}262855 \leqq S < 7{,}262905.$$

Il ajoute : « Sur S il n'y a que trois chiffres décimaux qui soient connus. » J'ai refait le calcul avec 8 décimales comme ci-après :

$$\begin{aligned}
\log\ 2{,}00 \ldots\ldots\ldots &\ 0{,}30130000\\
\text{»}\ 22{,}32 \ldots\ldots\ldots &\ 1{,}34869419\\
\text{»}\ 47{,}00 \ldots\ldots\ldots &\ 1{,}67209786\\
\text{»}\ 9{,}00 \ldots\ldots\ldots &\ 0{,}95424251\\
\text{»}\ 970{,}10 \ldots\ldots\ldots &\ 2{,}98681650 +\\
\hline
&\ 7{,}26288106 +
\end{aligned}$$

Donc, dans le calcul à 5 figures, la cinquième décimale, 8, était parfaitement exacte, lorsque théoriquement il n'y avait que la troisième qui fût exacte ! Sur dix logarithmes on pourrait craindre théoriquement une erreur de 5 sur le dernier chiffre de la somme; mais cherchons la probabilité d'une pareille erreur. Combien de cas favorables y a-t-il à cela? Bornons-nous à considérer le chiffre immédiatement suivant, sans discuter s'il a été forcé ou non. Il n'y a que dix cas qui sont également possibles. Le chiffre après le dernier de la table peut être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Mais puisque avec 6, 7, 8 et 9 on a dû forcer, nous pouvons dire que le chiffre qui suit peut être un des suivants :

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ +5;$$

Ici -1 veut dire que l'on a forcé avec 9; -2, qu'on a forcé avec 8, et ainsi de suite.

Quant à 5, puisqu'il s'agit de logarithmes, on a été obligé de forcer; pour d'autres tables on était libre. Dans le cas des logarithmes, la probabilité de -5 est nulle; dans les autres cas, il y a deux probabilités égales pour $+5$ et -5; mais la somme de ces deux probabilités est égale à celle de l'un des autres cas, par exemple à la probabilité de $+4$.

En général, la probabilité qu'il y ait une erreur de 5, sur le dernier chiffre de tous les dix nombres déduits d'une table, est le rapport de l'unité au nombre de toutes les combinaisons 10 à 10 des dix chiffres de 0 à 9, c'est-à-dire

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 91}{10} = 184\ 235\ 948\ 260.$$

Or, les praticiens ont bien raison de ne pas s'arrêter devant des cas ou des hypothèses si peu probables.

Et ici il n'y a pas à dire que tout le monde ne souscrit pas aux conclusions du calcul des probabilités; dans le cas actuel, nous avons une question de simple bon sens; nous avons un seul cas favorable à une erreur de $+5$ contre plus de 184 billions de cas contraires. Quel homme de bon sens pourrait s'attarder devant de pareilles hypothèses?

Dans la vie humaine, dans la vie pratique (peut-être sans s'en apercevoir), on est forcé de se régler toujours avec des principes de probabilité. De même que les concepts géométriques nous sont suggérés par l'étude du monde extérieur, quoique la nature soit bien loin de les réaliser parfaitement, c'est l'étude du monde extérieur qui nous donne l'idée des chances, de la probabilité de tel événement ou de tel autre, quoique, dans la pratique, la *fréquence*, le nombre des cas effectivement arrivés, n'atteigne pas exactement le nombre calculé d'après la théorie. Plus on multiplie les épreuves, plus on approche de la probabilité théorique.

III

Mais ici je dois exposer une idée qui pourrait paraître subversive. Je pense que la loi des grands nombres, ou si l'on veut, le théorème de Bernouilli, est parfois en opposition avec la méthode des moindres carrés. Je m'explique. Dans l'exemple de l'addition de dix logarithmes, le principe des moindres carrés nous dit qu'il faut calculer l'erreur probable ou moyenne que l'on a à craindre sur le dernier chiffre d'un nombre déduit d'une table, et ensuite le multiplier par $\sqrt{m}$, si l'on a pris m

nombres de la table. L'erreur probable, celle qui est au milieu de toutes les erreurs possibles est $\pm 0{,}25$; par conséquent sur la somme de dix logarithmes on a une erreur probable de

$$\pm 0{,}25\sqrt{10} = \pm 0{,}791.$$

Si l'on veut l'erreur moyenne d'un nombre déduit d'une table, on a

$$\sqrt{\frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x^2\,dx}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dx}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}2887.$$

Donc sur la somme de dix logarithmes l'erreur moyenne serait de

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{3}} = \pm 0{,}9129.$$

Mais remarquons que dans ceci, comme dans toutes les recherches de MM. Schlesinger et Plummer sur ce sujet, et en général dans toutes les recherches où il entre les moindres carrés, *on suppose que la probabilité d'une erreur donnée* est fonction seulement de la grandeur de l'erreur elle-même, et en outre, qu'elle *reste constante* quel que soit le nombre des cas considérés. Je laisse de côté la première condition, qui a été contestée par plusieurs mathématiciens, et je m'arrête à la seconde.

D'après la règle donnée ci-dessus, à mesure que m augmente, il augmente aussi l'erreur à craindre sur la somme des nombres déduits de la table. Or ceci est en contradiction avec l'expérience. Si l'on additionne les logarithmes de 1000 nombres entiers pris au hasard à cinq décimales, ordinairement on est loin d'avoir une erreur *effective* cette fois puisqu'on peut la calculer avec des tables plus étendues, de

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000}{3}} = 9{,}13\,(^1).$$

Si l'on fait l'addition des mêmes logarithmes avec huit décimales, on trouvera probablement que dans la somme à cinq figures la cinquième était exacte, ou en erreur de deux ou trois unités. A quoi tient cela? A la compensation des erreurs, positives ou négatives, entre elles. C'est une application du théorème de Bernouilli.

(1) On est bien loin de l'erreur de 500 que donnerait la théorie des approximations!

En effet, les chiffres suivant la cinquième décimale de 000 à 999 peuvent se calculer par le développement en série qui donne les logarithmes; donc ils ne viennent pas au hasard. Toutefois la vertu, la puissance des grands nombres est telle que *pratiquement* ces chiffres viennent pour nous au hasard, et ils ont tous la même probabilité. Nous sommes donc dans le cas de probabilités égales, et le théorème de Bernouilli nous dit que à mesure que m augmente, il augmente aussi la probabilité que tous les chiffres se présentent le même nombre de fois, et par conséquent qu'il y a compensation entre les erreurs positives et négatives, lorsqu'on s'arrête à cinq décimales. Je ne dis pas que la compensation est d'autant plus complète que m augmente. Ce serait une fausse interprétation du théorème de Bernouilli, qui nous dit simplement qu'il est de plus en plus probable que la *fréquence* se rapproche de la *probabilité* théorique, ce qui n'empêche pas qu'entre le nombre théorique et le nombre effectif il reste une grande différence. Ici, il s'agit d'erreurs *relatives*. Toutefois il est bien singulier que, lorsque la formule des moindres carrés porte à croire que la différence entre les erreurs positives ou négatives augmente avec m, dans la pratique cela n'a pas lieu.

J'ai fait l'addition des logarithmes des nombres depuis 10001 jusqu'à 10400, avec huit figures et ensuite j'ai arrondi à cinq figures. L'écart entre les deux sommes est résulté à peine de 1,757 de la cinquième décimale. Or, pour les vingt premiers logarithmes cette différence était de 1,397, c'est-à-dire qu'après quatre cents logarithmes l'erreur *effective absolue* est restée du même ordre de grandeur. Quant à l'erreur relative par rapport à ce que l'on pouvait craindre, elle est diminuée énormément.

Il y a peu de mathématiciens qui contestent le principe des grands nombres, mais je ne sais pas s'il y en a plusieurs qui partagent mon opinion. La voici.

Du moment que l'on admet que lorsque m augmente infiniment il est de plus en plus probable que chaque événement se présente un nombre de fois α tel que le rapport $\frac{\alpha}{m}$ approche de plus en plus de la probabilité théorique du dit événement, on doit avouer que lorsque m est très grand, la probabilité de chaque événement, qui *théoriquement devrait rester toujours la même, pratiquement diminue dans le rapport du nombre de fois qu'il vient d'arriver sur les m épreuves*. Si l'on n'admet pas cela, on n'admet pas le théorème de Bernouilli. S'il y a cas dix cas possibles et leur probabilité est la même (par exemple les dix cas du chiffre suivant, de 0 à 9) lorsqu'on constate que sur dix mille cas un de ces chiffres s'est présenté un nombre de fois notablement inférieur à 1000, on a le droit de croire que dans les dix mille épreuves suivantes l'événement en question n'a plus simplement la probabilité $\frac{1}{10}$ de se présenter, mais une probabilité plus grande. Je ne dis pas qu'il est *certain* que cela aura lieu, mais que cela est *bien probable*; or, cela suffit pour m'autoriser à dire que les probabilités, qui théoriquement devraient rester constantes, ne le sont plus pratiquement.

Cela n'a rien d'étrange, si l'on se souvient que nous sommes sur le terrain de la probabilité. Qu'est-ce qui nous fait penser à la probabilité d'un événement? C'est le manque d'arguments irréfutables. Dans ce cas on cherche par ci par là des arguments indirects, des raisons plus ou moins probantes, on en vient à l'idée de la probabilité de l'événement, que l'on représente par une fraction. Si les arguments en faveur augmentent, la probabilité se rapprochera de la vérité, le jugement *présomptif* sur l'arrivée de tel événement deviendra de plus en plus fondé. Donc, en matière de probabilités, le jugement, ou la prévision que nous faisons d'un événement, n'a rien de définitif, il varie suivant les éléments que nous possédons pour prévoir. Or, quand un des dix événements également probables s'est présenté un nombre de fois considérablement inférieur à la fréquence qu'aurait exigé sa probabilité théorique, c'est-à-dire à $\frac{m}{10}$, un nouvel élément de prévision nous vient du théorème de Bernouilli. Nous devons croire qu'il est plus probable que l'événement se présente dans les m épreuves suivantes un nombre de fois supérieur à $\frac{m}{10}$.

Je sais bien que le résultat d'une première série n'ira pas influer sur la deuxième. En outre, il est bien entendu que je parle de la continuation de la série d'épreuves *dans les mêmes conditions*. Sans doute, la deuxième série, que je vais faire après la première, n'ira pas se joindre à celle que fit Buffon dans le jeu de *pile* ou *face*.

Dans un Mémoire(1) que j'ai publié dernièrement j'ai montré que le jeu du Loto, et précisément dans la loterie publique en Italie, après deux ou trois ans les écarts entre le nombre théorique de fois que chacun des 90 numéros aurait dû sortir et le nombre effectif de fois qu'il est sorti, suivent parfaitement la loi des erreurs de Gauss. Le Loto nous offre un excellent exemple du hasard. Théoriquement à chaque tirage de cinq nombres la probabilité pour qu'un numéro sorte est la même, $\frac{1}{18}$. Mais si l'on fait la statistique des tirages pendant une dizaine d'années, les écarts ne suivent plus la loi des erreurs, la courbe classique ne se présente plus, parce que commence à se vérifier le théorème de Bernouilli, les 90 numéros se présentent un nombre de fois de plus en plus égal à $\frac{m}{90}$. Au bout de soixante-deux ans, un écart de $\frac{1}{50}$ sur $\frac{m}{90}$ se présente à peine quelquefois. Donc, après soixante-deux ans de tirages, les 90 numéros sont sortis un nombre de fois *pratiquement égal*. Ce qui veut dire que si après quinze ou vingt ans un numéro s'est présenté un nombre de fois considérablement inférieur à $\frac{m}{90}$, on doit s'attendre à ce que dans les années suivantes il se présente avec une fréquence supérieure à $\frac{m}{90}$.

---

(1) *La probabilitá e i giuochi di azzardo*. Napoli, 1920.

Malheureusement le gros public se trompe dans l'application de ce principe intuitif; il s'empresse de jouer sur un numéro retardataire, de là la ruine des joueurs.

Comme astronome, j'ai cherché à emprunter à l'astronomie quelques données de fait pour avoir une idée de la valeur de m, qui commence à réaliser le théorème de Bernouilli. On sait qu'après deux mille passages méridiens d'étoiles aux différents fils du micromètre, les dix dixièmes de seconde de temps, qui peuvent se présenter, apparaissent un nombre de fois, qui ordinairement ne s'écarte du nombre théorique, 200, que de $\frac{1}{50}$. Donc, on a pratiquement une limite de m, un nombre *minimum* d'épreuves, après lesquelles le théorème en question commence à se vérifier.

Il faut en dire autant des écarts qui se présentent lorsqu'on mesure une grandeur de manière à éliminer toute erreur systématique, et un nombre de fois si grand que l'on ait le droit de s'attendre à une bonne vérification de la loi de Gauss. Si, en dressant le tableau des écarts, on constate qu'il y a une lacune, on doit s'attendre à ce qu'elle soit comblée, et ceci aussi bien si l'on fait la statistique lorsque la série des observations a été finie, que si l'on l'interrompt. Donc, dans la partie qui suit, les écarts, qui se sont présentés en défaut dans la première, ont plus de probabilité de se présenter. Voilà un paradoxe! Même avant d'observer on peut avoir des renseignements sur ce qui va arriver; et la probabilité théorique n'est plus la même dans la pratique, dès qu'une donnée de fait, la première partie des observations, vient modifier nos idées, nos prévisions.

IV

Revenons aux approximations numériques.

De même que pour les praticiens c'est un simple amusement théorique de savoir quelle est l'erreur *maximum* que l'on peut craindre sur un résultat, lorsqu'il leur intéresse de savoir quel est l'écart moyen ou probable entre le résultat et la valeur réelle, il est de peu d'importance pour les praticiens de connaître les erreurs *relatives*. Pour nous, ce sont les erreurs *absolues* qui nous intéressent. Prenons l'exemple d'une triangulation géodésique, où l'on mesure une base sur laquelle on appuie des triangles. Ce pourra faire plaisir de savoir que, d'après une double mesure dans les deux sens contraires, la base a été mesurée avec l'approximation de $\frac{1}{100\,000}$; mais, d'abord, ceci ne vient qu'après avoir comparé les deux mesures entre elles et en avoir pris la moyenne comme valeur la plus proche de la vérité; en second lieu, ce qui nous intéresse c'est de savoir l'erreur *absolue* que l'on peut craindre sur la base et sur les côtés des triangles successifs qui s'y appuient. Les côtés successifs s'expriment en kilomètres non pas en fonction de la base.

De même, quand on sait que sur la valeur adoptée pour la constante d'aberration, $20'',47$, il reste une incertitude de $\pm 0'',02$, on peut dire que l'on connaît cette constante à $\frac{1}{1000}$; mais ceci n'a aucun intérêt pour les applications. On pourrait multiplier les exemples. Bref, à mon humble avis, dans les sciences d'observation la théorie des erreurs relatives ne présente aucun intérêt pratique, et, peut-être, cela a lieu aussi dans la vie pratique. Par exemple, si quelqu'un a été victime d'un vol considérable, ce qui doit l'intéresser avant tout c'est moins de savoir si on lui a volé $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$ de sa fortune, et par conséquent s'il doit déchoir ou non de sa première condition, mais de savoir combien il lui reste pour vivre. C'est la perte *absolue* qui intéresse davantage.

Disons un mot de la critique que quelques-uns ont faite dernièrement à la pratique générale et constante de tous les astronomes, géodésiens, topographes, marins, etc. On a eu raison de dire que lorsqu'on calcule une première orbite avec trois observations, on aurait tort d'employer un nombre de chiffres décimaux supérieur à 6 dans les logarithmes. Quelqu'un d'entre nous a montré, il y a dix-huit ans, qu'en calculant avec 6 décimales l'exemple donné par Gauss dans sa *Théoria motus*, on aboutissait à une orbite qui, sans doute par hasard, se rapprochait de l'orbite effective plus que l'autre obtenue par Gauss avec 7 décimales. Mais ce cas d'une première orbite, dans laquelle l'incertitude des éléments est très grande, a été le point de départ d'une charge à fond contre les chiffres qu'on a appelés *oiseux*, *inutiles*, peut-être même *dangereux*.

De grâce, le bon sens des praticiens leur a suggéré de garder un chiffre de plus de celui qui est absolument garanti, *pour éviter l'accumulation des erreurs*. Or cette réponse ne plaît pas aux critiques, qui soutiennent, par exemple, que entre 0 et 9 pour les chiffres qui suivent le chiffre certain, tous les cas ont le même droit d'être supposés, et alors ils veulent qu'on s'en tienne à 0, en s'arrêtant au seul chiffre certain. Sans doute la probabilité pour tous les cas de 0 à 9 est égale, mais si l'on prend 0 on s'expose à la plus grande erreur probable, ce qui n'aurait pas lieu si l'on prenait le chiffre suivant, que nous supposons différent de 0 ou de 9.

Si l'on voulait s'en tenir seulement aux chiffres absolument garantis *au point de vue arithmétique*, on remplirait les calculs d'une foule d'erreurs grossières. Nous avons vu que la parallaxe solaire, à la distance moyenne, est égale à

$$8'',806 \pm 0''004.$$

Ici le chiffre 6 (qui résulte de la discussion faite par M. Hinks des observations de la planète Eros en 1900-01), est tout à fait incertain. La valeur, que l'on obtiendra par exemple par les observations de l'opposition très favorable de 1931, sera peut-être $8'',790$ ou $8'',810$. Mais alors faut-il se borner à $8'',7$ ou à $8'',8$, ou bien

tout simplement à 8″, puisqu'il n'y a que le chiffre des secondes qui soit certain? Dira-t-on qu'il faut arrondir 0″,79 et écrire 8″,8? Mais alors le chiffre *certain* est celui des praticiens, c'est-à-dire le chiffre qui expose à une erreur moindre.

Lorsqu'on détermine l'heure, en mer, par le sextant on a à craindre six ou sept erreurs instrumentales ou d'observation, et le montant de chaque erreur est, dans des conditions ordinaires, de 10″. Il s'ensuit qu'une erreur de 1′ et même davantage est possible, et alors les partisans du chiffre certain voudraient qu'on s'arrêtât à 1′.

Dans ce cas, pas besoin d'introduire la parallaxe solaire, la dépression, etc., ce qui donnerait l'heure à 5 ou 6 secondes. Mais tous les officiers de marine s'insurgeraient, car l'expérience leur a appris qu'avec une dizaine de hauteurs du Soleil ils obtiennent l'heure à la seconde ronde.

De même, lorsque l'officier de bord possède la marche d'un chronomètre, par exemple de $+2^s,4$ par jour, il ne peut garantir tout à fait le chiffre 4, qui pourra être même 2,3 ou bien 5 ou 6. Mais il se gardera bien de calculer la correction pour dix ou douze jours après (s'il n'a pu faire d'autres observations) en prenant tout simplement + 2 comme marche. Au bout de douze jours son heure serait certainement en erreur de 4 ou 5 secondes. Il en est de même pour la marche des pendules dans les observatoires. Là on écrit la marche diurne jusqu'à $0^s,001$; mais certainement le chiffre des centièmes n'est pas garanti. Faut-il pour cela s'en tenir à $0^s,1$? Mais s'il ne fait pas beau pendant vingt jours, on n'aurait plus l'heure à la seconde, on ne pourrait la donner à la ville, au bureau des signaux de télégraphie sans fil.

En conclusion, l'activité des théoriciens et des praticiens s'explique sur deux terrains bien différents. Le but, les moyens, les principes sont dans un contraste frappant. A mon humble avis, en matière d'approximation, les théoriciens et les praticiens doivent marcher chacun de son côté; et l'on n'a pas raison de reprocher à ceux qui s'occupent des sciences d'observation de ne pas se soucier de toute la théorie des approximations numériques, qui a absorbé tant d'intelligence et donné lieu à une bibliographie assez étendue.

UNE APPLICATION DES POLYNÔMES D'HERMITE

A UN PROBLÈME DE STATISTIQUE

Par ALF. GULDBERG

(CHRISTIANIA)

Dans la fin de son intéressant ouvrage : *Théorie des probabilités*, M. Borel appelle l'attention sur quelques problèmes qui dans ces derniers temps ont beaucoup intéressé les biologistes et les statisticiens.

Je me permets de faire quelques remarques sur ce sujet.

Considérons un ensemble statistique, par exemple des hommes adultes dans une région donnée. Nous rangeons cet ensemble après une certaine marque ; par exemple nous rangeons les hommes adultes d'après les hauteurs.

Le tableau (1) montre 8.585 hommes adultes nés en Angleterre rangés par les hauteurs :

(1)

HAUTEUR EN POUCES	NOMBRE DES HOMMES	HAUTEUR EN POUCES	NOMBRE DES HOMMES
57	2	67	1329
58	4	68	1230
59	14	69	1063
60	41	70	646
61	83	71	392
62	169	72	202
63	394	73	79
64	669	74	32
65	990	75	16
66	1223	76	5
		77	2

Rapportant aux coordonnées rectangulaires les hauteurs comme des abscisses x, le nombre des hommes comme des ordonnées correspondantes y, on aura une représentation graphique de notre ensemble. Les statisticiens appellent cette représentation grafique la courbe de répartition de l'ensemble.

Les statisticiens du siècle passé croyaient qu'un ensemble statistique, rangé par une marque, s'approchait toujours, quand l'ensemble augmentait infiniment, d'une répartition qui suivait la Loi des erreurs de Gauss.

Mais il est loin d'en être toujours ainsi.

A la fin du siècle passé, l'attention a été appelée sur ce fait.

L'étude des courbes de répartition a depuis ce temps beaucoup occupé les statisticiens.

M. Karl Pearson, auteur d'une théorie générale des courbes de répartition, exige d'une fonction de répartition (1) :

« 1. Any expression for frequency must be a graduation formula. »

« 2. The graduation formula must not depend upon the calentation of constants having such a high probable error that their value is practicelly worthless. »

« 3. There must be a systematic methode of approaching frequency distributions, which can be applied to all cases with reasonable practical ease. »

M. Pearson dit : « Now the immense majority, if not the totality, of frequency distributions in homograde material show, when the frequency is definitely increased, a tendency to give a smooth curve chareterised by the following properties » :

« 1. The frequency starts from zero, increases slowly or rapielly to a maximum, and then falls again to zero — probably at a quite differente rate — as the character for which the frequency is measured is stedily increased. »

« 2. In the next place these is generally contact of the frequency curve at the extremities of the range. »

De ces hypothèses M. Pearson déduit l'équation différentielle des courbes de répartitions :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+a)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}$$

où a_0, b_0, b_1, ... sont des constantes. M. Pearson se borne cependant au cas où

(1) *On the general theory of skew correlation and non linear regression*, p. 4.

seulement les trois premières constantes b_0, b_1, b_2, du dénominateur, sont différentes de zéro.

Les différentes valeurs de ces constantes donnent une série de « types » de courbes (1) qui d'après M. Pearson renferme la majorité des courbes de répartition.

« I might almost say, without exception, — in a wide range of economic, physical, biometric, and actuarial data. » (Pearson, *l. c.*, p. 9.)

MM. Edgeworth (2) et Charlier (3) basent une théorie des fonctions de répartition, en employant une idée de Laplace, sur l'hypothèse des erreurs élémentaires.

Bruns (4) a exposé une théorie générale des fonctions de répartition en regardant les fonctions de répartition comme des fonctions arbitraires d'une variable réelle. Les développements de Bruns sont assez compliqués, et Bruns n'a pas réussi (*l. c.*, p. 45) à démontrer la convergence de la série qui sert de base de sa théorie, lacune qui dernièrement a été remplie par M. v. Mises (5).

Dans la suite je montrerai comment les travaux classiques d'Hermite sur ses polynômes donnent la base d'une théorie générale des fonctions de répartition de n variables.

[**1**] Je considère d'abord une fonction de répartition d'une variable, c'est-à-dire une fonction arbitraire d'une variable réelle. Les expressions analytiques d'une fonction arbitraire sont en nombre infini, mais toutes ne sont pas également applicables à la théorie des fonctions de répartition. Parmi toutes les solutions possibles il est dès lors naturel de regarder celle qui s'attache autant que possible à la fonction de répartition normale et dont les propriétés nous sont connues. La fonction de répartition normale est, comme on sait, la fonction de Gauss $e^{-k^2x^2}$

La majorité des fonctions de répartition est encore caractérisée par ce fait que la fonction est finie pour toutes les valeurs réelles de la variable, et que la fonction, et ses dérivées, s'approchent de zéro quand la variable approche de $\pm\infty$.

En outre il faut que la solution cherchée soit propre au calcul numérique.

On est ainsi amené à chercher un développement d'une fonction de répartition arbitraire en employant l'exponentielle $e^{-k^2x^2}$ comme la fonction « génératrice » (6).

---

(1) Voir W. P. Elderton, *Frequency-curves and correlation.*

(2) *Camb. Phil. Trans.*, t. XX.

(3) *Meddelanden fran Lunds Astron. Observatorium.* Lund, 1906.

(4) *Wahrscheinliehkeitsrechnung und Kollektivmasslehre.* Leipzig, 1906. (Voir par exemple p. 111 s. et p. 45.)

(5) *Jahresbericht d. d. Mathematischer-Vereinigung*, 1912.

(6) Nous mettons ce mot entre guillemets afin de distinguer le sens que nous lui donnons pour le moment de son sens usuel.

Désignons par $(-1)^n U_n e^{-\frac{a}{2}x^2}$ la dérivée d'ordre n de $e^{-\frac{a}{2}x^2}$, de sorte qu'on ait successivement

$$U_0 = 1,$$
$$U_1 = ax,$$
$$U_2 = a^2x^2 - a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en général

$$U_n = a^n x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} x^{n-2} - \ldots.$$

Les polynômes $U_0, U_1, \ldots$ sont les polynômes d'Hermite.

On a les formules fondamentales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n U_{n'} dx = 0, \qquad n \neq n',$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n^2 dx = n! a^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Soit $f(x)$ notre fonction de répartition arbitraire, nous écrivons formellement la série :

$$f(x) = \Sigma A_n U_n e^{-\frac{a}{2}x^2}; \tag{2}$$

les A_n sont des constantes.

Nous considérons la série comme uniformément convergente dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et représentant la fonction $f(x)$. Les constantes A_n se déterminent donc en multipliant la série par U_n et intégrant de $-\infty$ à ∞. On aura.

$$\frac{\sqrt{a}}{n! a^n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) U_n dx. \tag{3}$$

Les recherches de M. Kneser[1] et Mme Myller-Lebedeff[2] montrent que la série (2) dont les coefficients sont déterminés par la formule (3) converge uniformément dans

---

[1] *Math. Annalen*, t. 58.

[2] *Id.*, t. 64.

l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et représente la fonction $f(x)$, pourvu que $f(x)$ soit une fonction continue et qu'elle n'ait qu'un nombre fini de maxima et minima, et qu'à l'infini elle soit infiniment petite au moins de troisième ordre.

La convergence de la série (2) est aussi démontrée par MM. Galbrun et Berger.

La série (2) a été d'abord, autant que je sache, appliquée à la théorie de la répartition par J.-P. Gram (1), plus tard par Thiele (2), MM. Edgeworlh (3) et Charlier (4). La série (2) sert de base de la théorie de la répartition de Bruns (5).

Dans le calcul numérique on ne peut pas employer la série (2), mais on se borne à quelques termes de la série. On obtient donc une formule d'approximation. On remarque que la formule d'approximation obtenue en interrompant la série au $n^{\text{ième}}$ terme,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \mathrm{A}_i \mathrm{U}_i e^{-\frac{a}{2}x^2}$$

est la meilleure approximation, dans le sens des moindres carrés, de notre fonction par les fonctions

$$\mathrm{U}_0 e^{-\frac{a}{2}x^2}, \quad \ldots \quad \mathrm{U}_{n-1} e^{-\frac{a}{2}x^2}$$

les observations ayant les mêmes poids $e^{-\frac{a}{2}x^2}$

En effet, si l'on cherche à déterminer les n constantes $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{n-1}$ pour que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \mathrm{F}(x)]^2 e^{\frac{a}{2}x^2} \, dx$$

soit un minimum, on retrouvera les valeurs des constantes A_n données par la formule (3).

[**2**] Nous avons jusqu'ici regardé un ensemble statistique d'un phénomène caractérisé par une marque.

Nous allons considérer maintenant un ensemble statistique d'un phénomène caractérisé par deux marques, par exemple le nombre des mariages caractérisé par l'âge de la femme et l'âge du mari.

---

(1) *Am rakkentviklinger*, Köbenhavn, 1879.
(2) *Theory of observations*, London.
(3) *Camb. Phil. Trans.*, t. 20.
(4) *Arkiv f. Math. Astron. och Fysik*, t. 3.
(5) *Wahrscheinlichkeitslehre u. Kollectivmaslehre*, Leipzig, 1906.

Le tableau (2) montre comme 5.317.520 mariages en Angleterre se répartissent d'après l'âge de la femme et l'âge du mari. Les chiffres qui signifient le nombre des mariages sont des milliers.

AGE DU MARI \ AGE DE LA FEMME	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
15	2	2													
20	16	173	46	4	1										
25	4	185	402	84	10	2	1								
30	1	41	265	411	84	12	2	1							
35		9	69	251	369	80	12	2	1						
40		3	17	71	219	309	66	12	2	1					
45		1	6	20	66	178	252	59	10	2	1				
50			2	8	19	57	146	195	44	10	2				
55			1	3	8	18	46	110	141	35	6	1			
60				1	3	8	16	39	81	101	23	4	1		
65				1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1	
70					1	1	2	5	8	18	31	31	6	1	
75						1	1	2	3	5	10	14	12	2	
80								1	1	1	2	4	5	3	1
85											1	1	1	1	

Pour un âge fixe du mari on peut trouver l'âge moyen de la femme. Si l'âge moyen de la femme varie quand varie l'âge du mari, on dit que l'âge de la femme et l'âge du mari sont en corrélation.

L'image géométrique d'un ensemble de phénomènes caractérisés par deux marques est une surface, appelée la surface de répartition ou la surface de corrélation.

Désignons les deux variables qui caractérisent le phénomène par x et y, l'équation de la surface de corrélation soit

$$z = f(x, y).$$

La moyenne des y pour $x = x_p$ sera $\bar{y}_{x_p}$ ou en abrégé $\bar{y}_x$.

On a

$$\bar{y}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_p, y)\, y\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_p, y)\, dy} \tag{4}$$

et d'une façon analogue

$$\bar{x}_y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y_p)\, x\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y_p)\, dx}. \tag{4'}$$

Les formules (4) et (4') donnent, si l'on varie x_p ou y_p respectivement, les courbes de *régression* de y sur x et de x sur y.

Dans le cas de la corrélation *normale* c'est-à-dire si la surface de corrélation est la surface de Bravais

$$z = \mathrm{K} \cdot e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)},$$

K, a, b, c étant des constantes, les courbes de régression sont des *droites*.

Le statisticien anglais M. Yule(1) a étudié la corrélation, sans connaître la surface de corrélation; il suppose donc que la forme des courbes de régression est connue. Ce procédé est admis et particulièrement continué par M. Pearson(2) dans le cas où la corrélation n'est pas normale. M. Pearson dit : « Yule's method of approaching the problem from the form of the regression curves is, however, available and capable of very great extension. »

Dans ces recherches le coefficient de corrélation joue un rôle important.

M. Hagström (3) a récemment fait une critique rigoureuse de l'usage du coefficient de la corrélation (4). Il me semble que cette critique est en général bien fondée.

La recherche des fonctions de corrélation à deux ou plusieurs variables a été, autant que je sache, commencée par M. Charlier (5) de l'hypothèse des erreurs élémentaires et continuée par MM. Jörgensen (6) et Wicksell (7).

---

(1) *Roy. Soc. Proc.*, t. 60.
(2) *l. c.* p. 21.
(3) *Skandinavisk Aktuarictidsskrift*, 1919, pp. 1 et 204.
(4) Voir aussi Bruns, *l. c.*, p. 160.
(5) *Arkiv f. Math. Astron. och. Fysik*, t. IX, 1914.
(6) *Undersögelser over fregvensflater og korrelation*, 1915.
(7) *Kungl. Vetenskaps akademiens handlingar*, 1917.

La solution complète et détaillée de ce problème est assez étendue.

M. Jörgensen dit (*l. c.*, p. 4) : « Le problème est si grand et si difficile, que ce n'est que par un travail assidu et sérieux de plusieurs hommes que nous pouvons obtenir un résultat utile. »

M. Pearson dit (*l. c.*, p. 21) : « Mais bien qu'une grande somme de progrès ait été réalisée dans la considération de ces surfaces, leur théorie complète n'est pas faite à cause des difficultés analytiques. »

Dans une théorie des fonctions de corrélation à deux variables les mêmes considérations se répètent, qui valent pour une fonction de répartition à une variable. La différence est que la Loi de *Bravais* remplace ici la Loi de *Gauss* comme fonction génératrice.

Nous n'avons qu'à appliquer les résultats d'Hermite. Hermite introduit deux systèmes des polynômes rationnels et entiers en x, y, les $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$. Posons, pour abréger,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \varphi(x, y),$$

dont la partie réelle soit définie et positive, et désignons par $\psi(x, y)$ le contravariant quadratique et par δ l'invariant de φ.

Le premier système des polynômes $U_{m,n}$ est défini par l'équation

$$e^{-\varphi(x+h, y+h_1)} = e^{-\varphi(x,y)} \sum \frac{h^m h_1^n}{m!\,n!} U_{m,n}.$$

Le second s'en déduira par une substitution linéaire effectuée sur les accroissements h et h_1 ; nous ferons :

$$h = \frac{\partial \psi(k, k_1)}{\partial k}, \qquad h_1 = \frac{\partial \psi(k, k_1)}{\partial k_1}.$$

L'équation de définition des V est donc

$$e^{-\varphi\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial k}, y + \frac{\partial \psi}{\partial k_1}\right)} = e^{-\varphi(x,y)} \sum \frac{k^m k_1^n}{m!\,n!} V_{m,n}.$$

On a les formules fondamentales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(x,y)} U_{m,n} V_{p,q}\, dx\, dy = 0, \qquad m \neq p, \qquad n \neq q.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(x,y)} U_{m,n} V_{m,n}\, dx\, dy = m!\,n!\,(4\delta)^{m+n}\sqrt{\frac{\pi^2}{\delta}}.$$

Soit $f(x, y)$ la fonction de corrélation arbitraire; nous écrirons formellement la série

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} U_{m,n} e^{-\varphi(x,y)}. \tag{5}$$

Nous considérons la série (5) comme uniformément convergente dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et représentant la fonction $f(x, y)$. Les coefficients $A_{m,n}$ se déterminent par la relation

$$A_{m,n} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi \cdot m!\, n!\, (4\delta)^{m+n}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, V_{m,n}\, dx\, dy. \tag{6}$$

Les conditions de convergence de la série (5), dont les coefficients sont déterminés par la formule (6), se déduisent des recherches de M^me^ Myller-Lebedeff.

La série (5) peut servir de base à une théorie générale de la corrélation, comme Bruns a déjà exposé une théorie détaillée des fonctions de répartition à une variable sur la série (2).

La généralisation aux fonctions de corrélation à plusieurs variables est immédiate.

M. Émile Borel dit(1) : « Il y a, il est vrai, bien des parties de la théorie moderne des fonctions dont la portée pratique n'apparaît pas immédiatement; mais, outre l'intérêt qui s'attache à leur beauté propre, qui nous assure que cette portée n'apparaîtra pas un jour? »

J'ai essayé d'apporter ici une petite contribution en montrant l'application des polynômes d'Hermite à une branche moderne de la statistique qui doit son origine à Bravais, contemporain d'Hermite.

---

(1) *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Préface, VII.

SUR UN

PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA MÉCANIQUE VIBRATOIRE

PAR B. HOSTINSKY

(PRAGUE)

[1] Un système mécanique à n degrés de liberté et sans frottement se trouve dans une position d'équilibre stable. Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de forces perturbatrices ou extérieures. Alors tout mouvement infiniment petit du système autour de cette position s'obtient par une superposition des oscillations propres du système; les périodes de ces oscillations seront dites périodes propres du système.

Admettons maintenant que le système soit soumis à l'action d'un système de forces périodiques dont la période est précisément égale à une période propre du système mécanique. Dans ce cas, le mouvement sera instable en général; une résonance se produira et une coordonnée au moins croîtra indéfiniment. Mais il y a des cas où la résonance ne se produit pas, et je me propose de traiter le problème suivant : *La période d'un système de forces perturbatrices étant exactement égale à une période propre du système mécanique, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement soit stable.*

Remarquons que les conditions cherchées n'imposent aucune restriction au système mécanique donné, mais qu'elles sont relatives seulement aux forces perturbatrices.

[2] Commençons par traiter un problème plus général, où les équations différentielles du mouvement contiennent des termes appelés gyroscopiques. Tel est le cas des systèmes mécaniques étudiés par Lord Kelvin (voir *Treatise on the natural Philosophy*, vol. I, n° 345 X); différentes parties du système portent alors des roues tournantes avec vitesses angulaires constantes. On arrive aux équations du même genre dans la théorie des marées en considérant le mouvement de molécules d'eau dans les mers, la Terre étant supposée tourner avec une vitesse angulaire constante.

En employant les notations de Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, t. III; voir

aussi l'article de Darwin-Hough-Fichot dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. VI, vol. 2), nous écrirons les équations du mouvement, dans le cas où il n'y a pas de forces perturbatrices, sous la forme

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(a''_{kl}\frac{d^2q_k}{dt^2}+a'_{kl}\frac{dq_k}{dl}+a_{kl}q_k\right)=0;$$

$$l=1,2,\ldots,n.$$

Les quantités $q_1, \ldots, q_n$ sont les coordonnées du système et les constantes a'', a', a satisfont aux relations

$$a''_{kl}=a''_{lk},\qquad a'_{kl}=-a'_{lk},\qquad a_{kl}=a_{lk}.$$

Les valeurs $q_1=q_2=\ldots=q_n=0$ correspondent à un mouvement défini par les valeurs constantes des vitesses angulaires, rappelées plus haut; si toutes ces vitesses étaient égales à zéro, les termes gyroscopiques a'_{kl} disparaîtraient (vibrations autour de l'équilibre absolu).

Pour intégrer les équations (1) posons

$$(2)\qquad q_k=\alpha_{kl}e^{\lambda_l t}\ \text{(oscillation propre complexe).}$$

Les quantités α_k satisfont aux équations homogènes

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}(a''_{kl}\lambda_l^2+a'_{kl}\lambda_l+a_{kl})=0.$$

En éliminant les α_{kl} on obtient l'équation

$$\Delta(\lambda_l)=0$$

dont les racines sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$; elles sont purement imaginaires et deux à deux égales et de signes contraires.

Si (2) représente une oscillation propre complexe quelconque, on en obtient une autre en changeant λ_l en $-\lambda_l$, et α_k en la quantité complexe conjuguée β_k :

$$(3)\qquad q_k=\beta_{kl}e^{-\lambda_l t}.$$

[3] Supposons que l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ ait $2n$ racines distinctes, et soient

$$Q_k = K_k e^{\lambda t}$$

les composantes généralisées d'une force (ou d'un système de forces) perturbatrice agissant sur le système mécanique. Les équations du mouvement contraint s'obtiennent alors en remplaçant le zéro dans le second membre de (1) par Q_k. En posant

$$T_l = \sum_{m=1}^{n} K_m \beta_{ml},$$

on a, d'après Poincaré, l'expression suivante de la vibration contrainte

$$q_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda_l T_l \alpha_{kl}}{\lambda - \lambda_l} e^{\lambda t}.$$

L'intégrale générale des équations différentielles s'obtient en ajoutant à cette expression l'intégrale générale du système homogène (1).

La quantité T_l n'est autre chose, comme l'a remarqué M. Fichot, que le travail virtuel, multiplié par $e^{(\lambda-\lambda_l)t}$, de la force extérieure pour un déplacement donné par la formule (3).

Si λ est égal à une racine λ_l, les q_k deviennent infinies; il y a résonance, *en général*. Pour qu'il n'y ait pas de résonance, il faut et il suffit que

$$T_l = 0$$

ou

$$\sum_{m=1}^{n} K_m \beta_{ml} = 0. \tag{4}$$

Écrivons encore la condition analogue relative à la racine $-\lambda_l$ et à la force perturbatrice complexe conjuguée à Q_k :

$$\sum_{m=1}^{n} K'_m \alpha_{ml} = 0, \tag{5}$$

K'_m étant la quantité complexe conjuguée de K_m.

Introduisons maintenant des quantités réelles. On a, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de K_m,

$$K_m = L_m + M_m i, \qquad K'_m = L_m - M_m i.$$

Soit

$$K_m e^{\lambda t} + K'_m e^{-\lambda t} = 2L_m \cos \lambda t - 2M_m \sin \lambda t$$

l'expression de la force perturbatrice. Alors la résonance peut avoir lieu, si $\lambda = \lambda_l$ ou si $\lambda = -\lambda_l$. Pour que le mouvement soit stable dans ces cas, il faut et il suffit que les équations (4) et (5) soient satisfaites par les quantités L_m et M_m. En posant

$$\alpha_{ml} = u_{ml} + iv_{ml}, \qquad \beta_{ml} = u_{ml} - iv_{ml},$$

l'équation (4) se décompose en deux relations réelles distinctes suivantes :

$$\sum_{m=1}^{n} (L_m u_{ml} + M_m v_{ml}) = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{m=1}^{n} (L_m v_{ml} - M_m u_{ml}) = 0. \tag{6'}$$

L'équation (5) conduit de même aux relations (6) et (6') qui constituent la solution du problème proposé.

[**4**] Revenons maintenant au cas, où les valeurs $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ correspondent à une position d'équilibre absolu. Nous avons, dans ce cas, $\alpha'_{kl} = 0$, et $\Delta(\lambda) = 0$ est une équation séculaire. Il faut prendre

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk} = \beta_{kl}, \qquad v_{kl} = 0,$$

de sorte que les conditions de stabilité s'expriment comme suit :

$$\sum_{m=1}^{n} L_m u_{ml} = 0, \qquad \sum_{m=1}^{n} M_m u_{ml} = 0. \tag{7}$$

On a donc le théorème suivant :

Soit un système mécanique à n degrés de liberté, sans frottement. Si $q_m = u_m(\cos \lambda_l t + i \sin \lambda_l t)$ *représente une oscillation harmonique propre du système et si* $Q_m = L_m \cos \lambda_l t + M_m \sin \lambda_l t$ *exprime la force perturbatrice, les équations* (7) *expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement soit stable.*

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les racines de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ étaient simples. Mais l'analyse peut s'étendre au cas de racines multiples. Si r désigne l'ordre de multiplicité de la racine λ_1, on sait qu'il y a r oscillations propres distinctes avec la période $2\pi : \lambda_1$; en introduisant successivement les quantités correspondantes à la place de u_{ml} dans les équations (7), on obtient $2r$ conditions de stabilité.

[**5**] Prenons un exemple simple qui se rattache à la transmission de vibrations sur une balance. Soient A et B les extrémités du fléau d'une balance ordinaire; nous allons remplacer, pour simplifier, les plateaux par deux pendules simples AM et BN($AM = BN = a$) dont A et B sont les points de suspension. Nous admettons que tous les mouvements de la balance ont lieu dans un même plan vertical MABN. La position du système dépend de trois paramètres : $q_1 =$ angle de AM avec la verticale, $q_2 =$ angle de BN avec la verticale, et $q_3 =$ inclinaison du fléau sur le plan horizontal. Les valeurs $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ correspondent à une position d'équilibre stable.

Nous allons examiner les petits mouvements de la balance autour de cette position d'équilibre dans trois cas différents, en prenant, pour fixer les idées, q_1^0, 0, 0 comme valeurs initiales de q_1, q_2, q_3, les valeurs initiales des dérivées premières étant toutes nulles.

Considérons, en premier lieu, les oscillations propres. L'équation $\Delta(\lambda) = 0$ admet six racines simples; elles sont purement imaginaires et deux à deux égales et de signes contraires. Une racine que nous désignerons λ_1 correspond à la période propre d'un plateau, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{a}},$$

g étant l'accélération de la pesanteur. On trouve pour les quantités α_{k1}

$$\alpha_{11} = u_{11} = 1, \qquad \alpha_{21} = u_{21} = -1, \qquad \alpha_{31} = u_{31} = 0.$$

Supposons, en second lieu, qu'une force horizontale périodique agisse sur le

premier plateau en M et que sa période soit exactement égale à celle du plateau, c'est-à-dire à $2\pi : \lambda_1$. Nous avons

$$Q_1 = L_1 \cos \lambda t, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q_3 = 0;$$

donc toutes les quantités L_k et M_k sont égales à zéro, à l'exception de L_1. Par conséquent

$$L_1 u_{11} + L_2 u_{21} + L_3 u_{31} \neq 0;$$

la condition de stabilité n'est pas vérifiée. Le mouvement n'est pas stable, les amplitudes deviennent infinies. Tout cela est bien connu.

Proposons-nous, en troisième lieu, de choisir les L_i d'une telle manière que le mouvement soit stable. Il suffit, par exemple, de prendre $L_2 = L_1$; car on voit que, dans ce cas, la condition de stabilité

$$L_1 u_{11} + L_2 u_{21} + L_3 u_{31} = 0$$

se trouve vérifiée.

Nous avons, en résumé, le résultat suivant : Si un seul plateau est soumis à une force périodique f dont la période est égale à la période propre du tableau, il y a résonance; mais si tous les deux plateaux sont soumis à des forces égales à f, il y a stabilité.

[**6**] Ajoutons enfin que des phénomènes analogues se présentent lorsqu'on étudie les vibrations des corps élastiques. Mais ici les conditions de stabilité s'expriment en annulant certaines intégrales définies, au lieu des sommes finies considérées précédemment.

Soit, par exemple, z le déplacement transversal d'une corde homogène tendue qui donne le son fondamental de la corde. On a

$$z = \sin \pi x (A \cos rt + B \sin rt),$$

la longueur de la corde étant égale à l'unité. Supposons que différentes parties de la corde soient soumises à l'action des forces périodiques transversales

$$Q(x, t) = f(x) \cdot \cos nrt,$$

n étant un nombre entier. Cela revient à dire que la période de la force est partout

égale à la période du $n^{\text{ième}}$ son harmonique de la corde. Il y a résonance, en général; mais le mouvement est stable, si

$$\int_0^1 f(x) \,.\, \sin n\pi x \,.\, dx = 0 \,.$$

Le facteur $\sin n\pi x$ qui mesure l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ son harmonique correspond à ce que nous avons désigné plus haut par u_{ml}; $f(x)$ correspond à L_m, et la variable continue x correspond à l'indice de sommation m dans la première équation (7).

SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES

PAR D. RIABOUCHINSKI

Je me propose d'exposer dans cette communication une méthode qui facilite la solution de problèmes hydrodynamiques plans possédant un axe de symétrie, et je l'illustrerai par des exemples ayant rapport à la théorie de la résistance des fluides.

Supposons d'abord que les lignes de courant sont disposées d'une façon symétrique par rapport à l'axe réel et que le problème autorise de poser

$$\frac{y}{|y|} = \frac{\psi}{|\psi|}. \tag{1}$$

Montrons que dans ce cas l'expression

$$x + i|y| = f(\varphi + i|\psi|) \tag{2}$$

permet, comme l'expression

$$x + iy = f(\varphi + i\psi) = f_1(\varphi, \psi) + if_2(\varphi, \psi), \tag{3}$$

de trouver les relations cherchées :

$$x = f_1(\varphi, \psi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi). \tag{4}$$

En effet, en tenant compte de l'égalité (1), on peut transformer l'équation (2) comme suit :

$$x + i\frac{\psi}{|\psi|}y = f\left(\varphi + i\frac{\psi}{|\psi|}\psi\right) = f_1(\varphi, \psi) + i\frac{\psi}{|\psi|}f_2(\varphi, \psi)$$

et l'on obtient aussitôt les relations (4).

On remarquera que l'on peut aussi écrire, dans ce cas,

$$\zeta = \frac{d(x + i|y|)}{d(\varphi + i|\psi|)} = \frac{1}{q} e^{i\frac{\psi}{|\psi|}\theta}$$

Il nous reste à déterminer encore le sens qu'il faut donner à l'égalité (1) lorsque y ou ψ sont égales à zéro. Nous partagerons l'axe imaginaire et la ligne de courant ψ égale à zéro en deux parties disposées d'une façon symétrique par rapport à l'origine des coordonnées et nous les désignerons respectivement par $+o$ et $-o$, en attribuant les parties $+o$ à l'ensemble des valeurs positives des grandeurs considérées et les parties $-o$ à l'ensemble des valeurs négatives, et nous dirons, par exemple, que

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)_{x=+0} = 1, \qquad \left(\frac{x}{|x|}\right)_{x=-0} = -1.$$

Il sera en général plus facile d'établir la relation (2) que la relation (3), car chacune des variables

$$z_1 = x + iy, \qquad w_1 = \varphi + i\psi \tag{5}$$

remplit tout le plan, tandis que les variables

$$z = x + i|y|, \qquad w = \varphi + i|\psi| \tag{6}$$

ne remplissent que des demi-plans, qui peuvent être interprétés comme les plans des variables (5) pliés en deux.

Supposons maintenant que les lignes de courant sont simultanément symétriques par rapport aux axes réel et imaginaire. On pourra écrire dans ce cas

$$f[\pm(\varphi + i\psi)] = \pm f(\varphi + i\psi),$$
$$\frac{x}{|x|} = \frac{\varphi}{|\varphi|}$$

et remplacer, par conséquent, une expression de la forme

$$|x| + iy = f(|\varphi| + i\psi) \tag{7}$$

par la suivante

$$x + i\frac{\varphi}{|\varphi|}y = f\left(\varphi + i\frac{\varphi}{|\varphi|}\psi\right) = f_1(\varphi, \psi) + i\frac{\varphi}{|\varphi|}f_2(\varphi, \psi)$$

et l'on obtient les égalités (4). On trouve aussi que

$$\zeta = \frac{d(|x| + iy)}{d(|\varphi| + i\psi)} = \frac{1}{q} e^{i\frac{\varphi}{|\varphi|}\theta}.$$

La relation (7) ramène le problème à la recherche de la relation entre les points des variables (5) pliés en deux en prenant comme arête l'axe imaginaire.

Il est facile de remarquer que dans le cas considéré il suffirait aussi d'établir une correspondance entre les plans des variables (5) pliés en quatre. On trouverait alors que

$$\zeta = \frac{d(|x| + i|y|)}{d(|\varphi| + i|\psi|)} = \frac{1}{q} e^{i\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\psi}{|\psi|}\theta},$$

$$x + i\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\psi}{|\psi|}y = f\left(\varphi + i\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\psi}{|\psi|}\psi\right) = f_1(\varphi, \psi) + i\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\psi}{|\psi|}f_2(\varphi, \psi),$$

$$x = f_1(\varphi, \psi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi).$$

Supposons maintenant que les lignes de courant sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire, mais non par rapport à l'axe réel. Nous conviendrons d'assigner dans ce cas la même valeur et le même signe aux lignes équipotentielles disposées d'une façon symétrique par rapport à l'axe imaginaire; on peut satisfaire à cette condition en représentant les lignes équipotentielles, par exemple, comme suit :

$$\varphi(|x|, y) = \text{const.}$$

Les lignes de courant étant symétriques par rapport à l'axe imaginaire et la composante v de la vitesse ne devant pas varier brusquement, il en résulte que

$$(v)_{x=\pm 0} = 0. \tag{8}$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi(|x|, y)}{\partial|x|} = \dfrac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}, \\ \dfrac{x}{|x|}v = \dfrac{\partial\varphi(|x|, y)}{\partial y}\dfrac{x}{|x|} = -\dfrac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}, \end{cases} \tag{9}$$

on trouve, en tenant compte de la condition (8), que

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{x}{|x|}v\right)}{\partial y}=\left(\frac{\partial^2\varphi(|x|,y)}{\partial|x|^2}+\frac{\partial^2\varphi(|x|,y)}{\partial y^2}\right)\frac{x}{|x|}=\pm 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{x}{|x|}v\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\pm 0.$$

Les composantes de vitesse u et $\frac{x}{|x|}v$, exprimées par les formules (9), vérifient, par conséquent, dans tout le plan, la condition de non-compressibilité ainsi que la condition que le mouvement est irrotationnel.

Les expressions (8) et (9) permettent aussi d'écrire, comme il est facile de le vérifier, que

$$\zeta=\frac{d(|x|+iy)}{d(\varphi+i\psi)}=\frac{1}{q}\left[\frac{u}{q}+i\,\frac{x}{|x|}\,\frac{\left(\frac{x}{|x|}v\right)}{q}\right]=\frac{1}{q}e^{i\frac{x}{|x|}\theta},$$

où $q, =\sqrt{u^2+v^2}$, est la vitesse et θ — l'angle qu'elle forme avec l'axe réel.

Si l'on parvient à établir une relation entre les variables ζ et $w, =\varphi+i\psi$, on obtiendra après avoir effectué l'intégration une expression de la forme

$$|x|+iy=f(\varphi+i\psi)=f_1(\varphi,\psi)+if_2(\varphi,\psi)$$

et, par conséquent,

$$x=\pm\sqrt{f_1(\varphi,\psi)},\qquad y=f_2(\varphi,\psi). \tag{10}$$

Considérons enfin le cas où, les lignes de courant étant symétriques par rapport à l'axe réel, la relation (1) ne peut pas cependant être admise. Cela a lieu lorsque les points de la ligne équipotentielle et de la ligne de courant, égales à zéro, ne correspondent pas aux points des axes réel et imaginaire.

Nous conviendrons d'assigner dans ce cas la même valeur et le même signe aux lignes de courant disposées d'une façon symétrique par rapport à l'axe réel et de les représenter comme suit :

$$\psi(x,|y|)=\text{const.}$$

Les lignes de courant étant symétriques par rapport à l'axe réel, il en résulte que la composante v de la vitesse s'annule en même temps que y

$$(v)_{y=\pm 0} = 0. \tag{11}$$

Si l'on pose

$$u = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, |y|)}{\partial |y|},$$

$$\frac{y}{|y|} v = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, |y|)}{\partial |y|} \frac{y}{|y|},$$

on trouve, en tenant compte de la condition (11),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \frac{y}{|y|} v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \pm 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \frac{y}{|y|} v}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 \psi(x, |y|)}{\partial |y|^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, |y|)}{\partial x^2} \right) \frac{y}{|y|} = \pm 0,$$

$$\zeta = \frac{d(x + i|y|)}{d(\varphi + i\psi)} = \frac{1}{q} e^{i \frac{y}{|y|} \theta},$$

et si l'on parvient à établir une relation entre ζ et w, on pourra écrire, après avoir effectué l'intégration,

$$x + i|y| = f(\varphi + i\psi) = f_1(\varphi, \psi) + i f_2(\varphi, \psi)$$

et, par conséquent,

$$x = f_1(\varphi, \psi), \qquad y = \pm \sqrt{f_2(\varphi, \psi)}. \tag{12}$$

Les expressions (10) et (12) montrent qu'aux valeurs de φ et ψ rendant négatives $f_1(\varphi, \psi)$ et $f_2(\varphi, \psi)$, qui figurent sous le symbole du retour à la valeur relative, ne correspondent aucuns points sur le plan de la variable $x + iy$.

Dans l'application de la méthode que nous venons d'indiquer on est souvent amené à employer la représentation conforme déterminée par l'équation

$$\frac{dt}{dw} = \frac{A}{(b^2 - w^2)^{3/2}}$$

ou, sous sa forme intégrale,

$$t = \frac{aw}{\sqrt{b^2 - w^2}} + C,$$

qui transforme le plan plié en deux en lui-même.

Dans le premier exemple que nous considérerons, nous comparerons l'inertie additive, rapportée à l'unité de longueur d'un cylindre dont la section est un quadrilatère rectangle, en supposant d'abord qu'il ne se forme pas de surfaces de glissement sur les côtés qui sont parallèles au mouvement et, ensuite, que de pareilles surfaces de glissement existent.

Les plans des variables w, ζ, t qui correspondent au premier cas sont représentés sur la planche I.

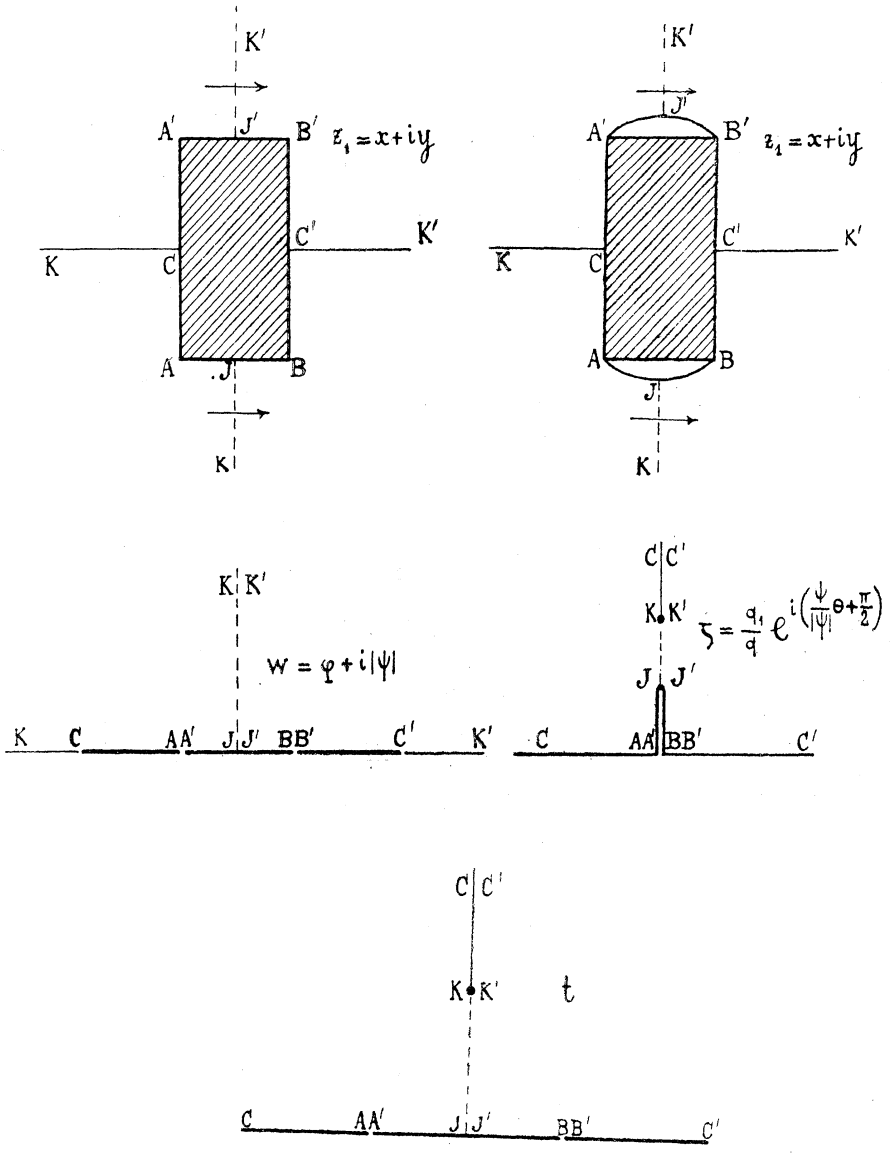


PLANCHE I.

On établit la correspondance entre les plans des variables w, ζ, $= iq_1 \frac{dz}{dw}$, et t en posant

$$\zeta = i\sqrt{1-t^2}.$$

$$w = \frac{q_0 bt}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha + t^2}}.$$

Nous désignons par q_0 la vitesse du courant relatif à l'infini, par q_1 sa vitesse aux points J, J', par b et tang α — deux constantes qu'il reste à exprimer en fonction des dimensions de la section du cylindre.

Lorsque $w = \infty$, on a

$$t = -i\operatorname{tang}\alpha, \qquad q = q_0, \qquad \theta = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{q_0}{q_1} = \cos\alpha. \tag{13}$$

En désignant par l — la largeur et par d — l'épaisseur du cylindre, on trouve que

$$\frac{l}{2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}dt = b\operatorname{tang}^2\alpha\cos\alpha\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sqrt{t^2-1}\,dt}{(\operatorname{tang}^2\alpha + t^2)^{3/2}} = b(\mathrm{E} - \cos^2\alpha\mathrm{K}),$$

$$\frac{d}{2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}dt = b\operatorname{tang}^2\alpha\cos\alpha\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-t^2}\,dt}{(\operatorname{tang}^2\alpha + t^2)^{3/2}} = b(\mathrm{E}' - \sin^2\alpha\mathrm{K}').$$

$$\frac{d}{l} = \frac{\mathrm{E}' - \sin^2\alpha\mathrm{K}'}{\mathrm{E} - \cos^2\alpha\mathrm{K}}, \tag{14}$$

où E et K sont des intégrales elliptiques complètes, E', K' — les intégrales complémentaires et sin α, cos α — leurs modules.

Nous calculerons l'énergie cinétique T du fluide autour du cylindre en mouvement et l'inertie additive M en utilisant les formules

$$2\mathrm{T} = -\rho q_0^2\left(\frac{1}{q_0}\int\varphi\,dy + \mathrm{S}\right) = \mathrm{M}q_0^2,$$

$$\mathrm{M} = -\rho\left(\frac{1}{q_0}\int\varphi\,dy + \mathrm{S}\right),$$

où S est l'aire de la section du cylindre et l'intégrale est prise le long du contour de cette section dans le sens négatif.

Le long des côtés parallèles au mouvement, l'intégrale s'annule et, par conséquent,

$$M = -\rho\left(\frac{4}{q_0}\int_{-\infty}^{-1}\varphi\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}dt + S\right) = \rho(\pi b^2\sin^2\alpha - S) = \rho\left[\frac{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\sin^2\alpha}{(E-\cos^2\alpha K)^2} - S\right].$$

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{l} = 0$, le cylindre devient un plan mince. En désignant l'inertie additive correspondante par M_0,

$$M_0 = \rho\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

on peut écrire

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\sin^2\alpha}{(E-\cos^2\alpha K)^2} - \frac{4}{\pi}\frac{d}{l}. \tag{15}$$

Dans le tableau I nous avons calculé pour différentes valeurs du paramètre α les valeurs correspondantes du rapport $\frac{d}{l}$ d'après la formule (14), du rapport $\frac{M}{M_0}$ d'après la formule (15) et du rapport $\frac{q_0}{q_1}$ d'après la formule (13).

TABLEAU I.

α^0	$\frac{d}{l}$	$\frac{M}{M_0}$	$\frac{q_0}{q_1}$
90	0	1	0
80	0,025	1,05	0,174
70	0,111	1,16	0,342
60	0,298	1,29	0,500
50	0,676	1,42	0,643
40	1,478	1,65	0,766
30	3,355	2,00	0,866
20	9,007	2,50	0,940
10	40,03	3,50	0,985
0	∞	—	1

Calculons à présent l'inertie additive dans le second cas (planche 1), lorsque les surfaces de glissement existent. Nous utiliserons dans ce but les formules que nous avons déjà indiquées dans notre travail *Sur les surfaces de glissement dans les fluides* (1). Nous avons obtenu dans ce travail la solution du problème du mouvement de deux plans minces, disposés l'un derrière l'autre, orthogonalement au courant, lorsque leurs arêtes sont réunies par des surfaces de glissement. Il est évident que les résultats de ce travail sont également valables pour le cas que nous considérons actuellement. En utilisant ces résultats on trouve :

$$\frac{q_0}{q_1} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}},$$

$$\frac{d}{l} = \frac{E' - \sin^2\alpha K'}{\sin^2\alpha + E - \cos^2\alpha K},$$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)^2}{(\sin^2\alpha + E - \cos^2\alpha K)^2} - \frac{4}{\pi}\frac{d}{l}.$$

L'inertie du fluide inclus entre la surface de glissement et le corps du cylindre est comprise dans cette expression de M.

$M_0, = \rho\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$, exprime, comme dans la formule (15), l'inertie additive du plan mince.

q_0 exprime la vitesse à l'infini, q_1 — la vitesse sur la surface de glissement; l est la largeur, d — l'épaisseur du cylindre.

Dans le tableau II nous avons calculé les valeurs des rapports $\frac{d}{l}$, $\frac{M}{M_0}$, $\frac{q_0}{q_1}$ en fonction du paramètre α.

TABLEAU II.

α^0	$\frac{d}{l}$	$\frac{M}{M_0}$	$\frac{q_0}{q_1}$
90	0	1	0
80	0,012	1,08	0,088
70	0,054	1,14	0,176
60	0,141	1,32	0,268
50	0,314	1,74	0,364
40	0,668	2,24	0,467
30	1,490	3,63	0,578
20	3,956	9,18	0,699
10	17,58	79,9	0,840
0	∞	∞	1

(1) *Procedings of the London Mathematical Society*, sér. 2, vol. 19, part. 3; *Bulletin de l'Institut aérodynamique de Koutchino*, fasc. VI. Paris, 1920.

Si l'on représente graphiquement les données des tableaux I et II et si l'on compare les deux courbes $\frac{M}{M_0} = f\left(\frac{d}{l}\right)$, on remarquera qu'on obtient dans le second cas des valeurs sensiblement plus considérables, comme il fallait du reste s'y attendre d'après le théorème de Lord Kelvin de l'énergie minima, les surfaces de glissement pouvant être considérées comme des surfaces de giration.

Le mouvement qui correspond au second cas ne saurait être engendré en partant du repos, en vertu du théorème de Lagrange; on s'en rend également bien compte en remarquant que pour que le fluide inclus entre la surface de glissement et le corps du cylindre puisse soutenir l'impulsion initiale, il faudrait admettre qu'il est congelé et assujetti au corps.

Mais le mouvement qui correspond au premier cas ne saurait non plus prendre naissance, puisqu'il conduit à des pressions négatives dans la proximité des arêtes.

Nous considérerons maintenant une forme de mouvement qui ne contredit, au moment initial, à aucune des conditions du problème et qui peut, par conséquent, être engendrée en partant du repos, mais qui, une fois engendrée, fait aussitôt naître une cavitation; la continuité étant ainsi violée, le théorème de Lagrange ne peut plus être appliqué et l'apparition de surface de giration devient possible.

Soit un cylindre dont la section est limitée par un segment de droite et un arc de courbe concave (sur la planche 2 cette courbe est représentée schématiquement par un demi-cercle). Nous supposons qu'on met ce cylindre en mouvement orthogonalement à sa face plate, et que les vitesses de décollement sur la face concave, au moment initial, sont égales et normales à la surface du cylindre. La forme de la face concave et la vitesse de décollement doivent être calculées comme les surfaces et vitesses de glissement dans le problème des discontinuités stationnaires.

Les plans des variables z, w, ζ, $\log\zeta$, t_1, t qui déterminent ce problème sont indiqués sur la planche 2.

Sur la surface de décollement

$$\frac{d\psi}{ds} = q_1, \qquad \psi = q_1 r\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Au point B, $\varphi = 0$, $\psi = -q_1 r\frac{\pi}{2}$; au point AA′, $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

On représentera le plan w sur le plan t_1 en posant

$$\frac{dw}{dt_1} = M\frac{\sqrt{a+t_1}}{\sqrt{a-t_1}}$$

ou, en choisissant les constantes d'intégration de façon à faire correspondre les points B et AA′ aux points $+a$ et $-a$,

$$W = -\frac{i}{2}q_1 r\left(\arcsin\frac{t_1}{a} - \sqrt{1-\left(\frac{t_1}{a}\right)^2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

On représentera ensuite le demi-plan t_1 sur le demi-plan t, en posant

$$\frac{t_1}{a} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \,.\, t}{t - \operatorname{tang}\alpha}.$$

Dans cette transformation les points $\pm a$ correspondront aux points ± 1 du plan de la variable t.

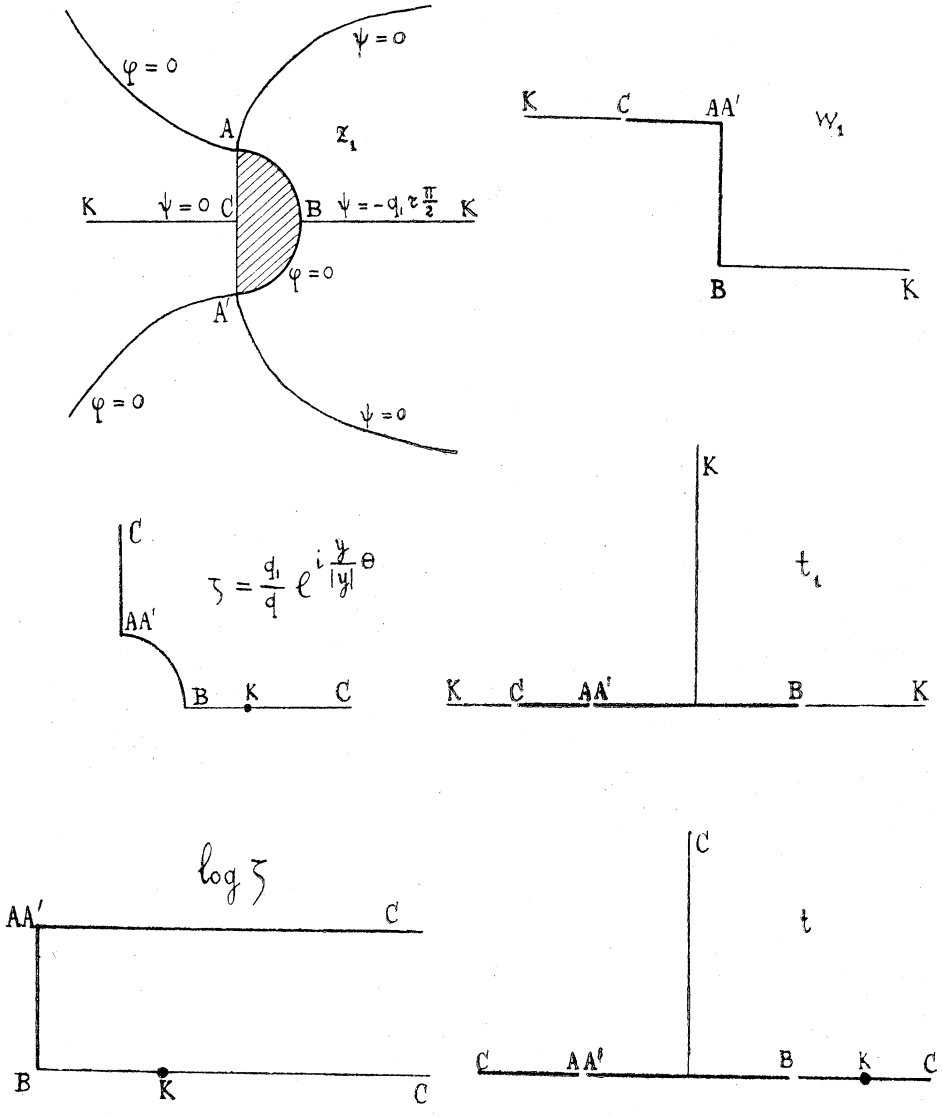


PLANCHE 2.

En excluant $\frac{t_1}{a}$, on a :

$$W = -\frac{i}{2} q_1 r \left(\arcsin \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \,.\, t}{t - \operatorname{tang}\alpha} - \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \operatorname{tang}\alpha \,.\, t}{t - \operatorname{tang}\alpha} \right)^2} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Pour représenter le plan ζ sur le plan t, posons

$$t = \frac{1}{2}\left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right),$$

où les constantes d'intégration ont été choisies de façon à faire correspondre les

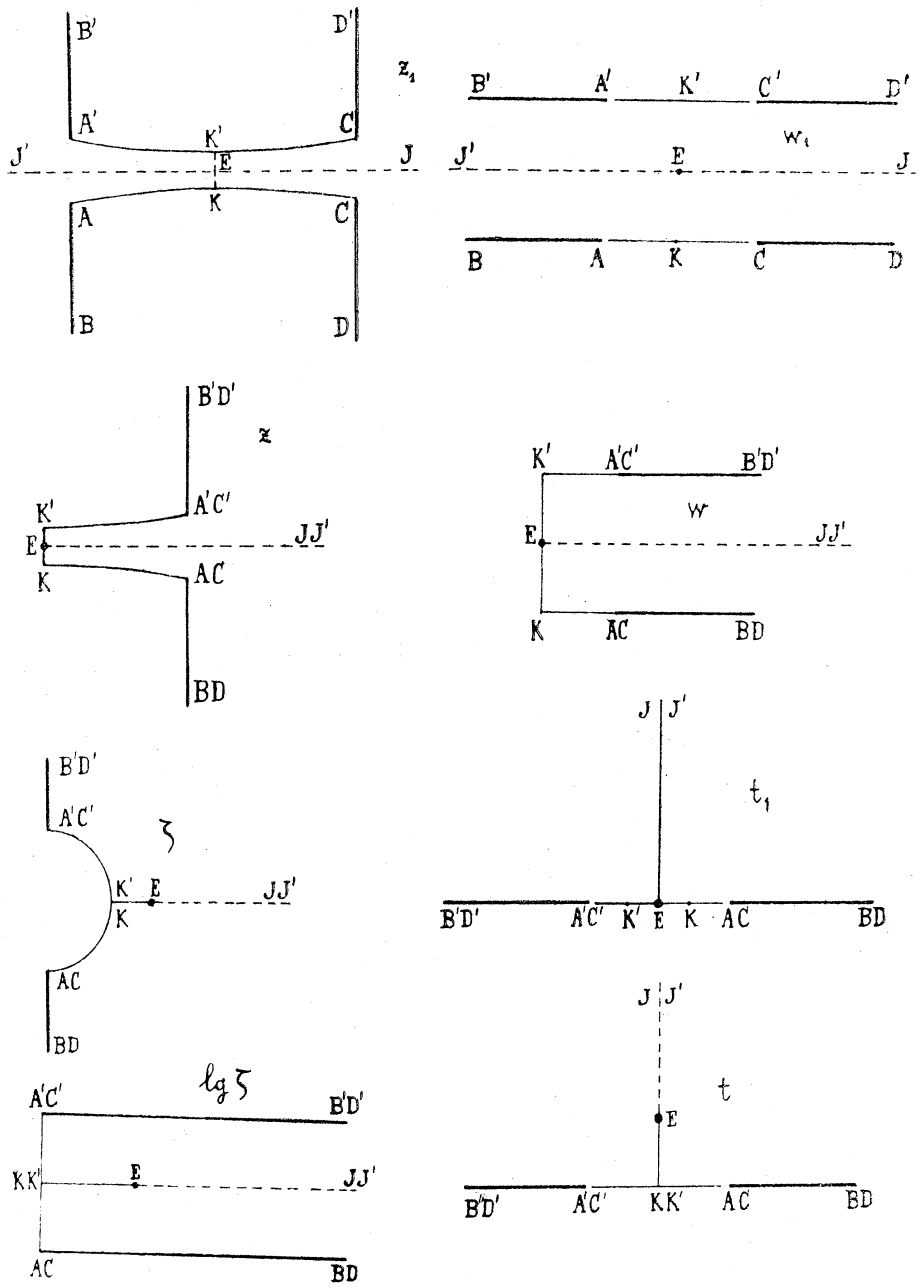


PLANCHE 3.

points AA′ et B respectivement aux points $t = -1$ et $t = 1$ du plan t. Lorsque $t = \operatorname{tang}\alpha$, on a $w = \infty$, $\theta = 0$, $q = q_0$ et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^2\right].$$

Je me propose de revenir avec plus de détails, à la question que je viens d'effleurer, dans un autre travail.

Nous étudierons maintenant le problème d'un jet liquide réunissant deux ouvertures en mince paroi opposées. Ce problème rappelle quelque peu celui de la soufflerie aérodynamique de M. Eiffel.

Les plans des variables z_1, z, w_1, w, ζ, $\log\zeta$, t_1, t sont indiqués sur la planche 3.

On obtient les relations suivantes entre les variables w, ζ et la variable auxillaire t :

$$t = i\operatorname{tang}\alpha \operatorname{ch}\frac{w\pi}{2q_1 b},$$

$$t = \frac{1}{2}\,i\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right).$$

En désigant par $2d$ — la distance entre les parois, par $2l$ — l'évasement des ouvertures, par $2l_1$ — la largeur minima de la veine fluide, par q_1 et q_0 les vitesses sur la surface libre et au milieu de la veine (point $\mathcal{C}$), par x et y les coordonnées de la surface libre, on trouve :

$$\frac{l_1}{l} = \frac{\mathrm{E} + \sin\alpha}{\mathrm{E} + 1},$$

$$\frac{d}{l} = \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{E}'}{1 + \mathrm{E}},$$

$$\frac{q_1}{q_0} = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}},$$

$$\frac{x}{d} = \frac{\dfrac{\theta}{|\theta|}\left\{\mathrm{E}' - \mathrm{K}' - \left[\mathrm{E}\left(\cos\alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right) - \mathrm{K}\left(\cos\alpha, \frac{\pi}{2} - |\theta|\right)\right]\right\}}{\mathrm{E}' - \mathrm{K}'},$$

$$\frac{y}{l} = \pm\frac{\mathrm{E} + \sin\alpha\sqrt{1 + \sin^2\theta\cot^2\alpha}}{\mathrm{E} + 1}.$$

La vitesse q en un point de la section minima de la veine fluide et l'ordonnée y correspondante sont liées par la relation

$$\frac{y}{l_1} = \frac{\sin\alpha\sqrt{1-\frac{\tang^2\omega}{\tang^2\alpha}} + \mathrm{E}\left(\sin\alpha, \sqrt{1-\frac{\tang^2\omega}{\tang^2\alpha}}\right)}{\sin\alpha + \mathrm{E}}$$

où

$$\tang\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{q} - \frac{q}{q_1}\right).$$

J'ai calculé dans le tableau III les valeurs des rapports $\frac{d}{l}$, $\frac{l_1}{l}$, $\frac{q_1}{q_0}$ pour différentes valeurs du paramètre α.

TABLEAU III.

α^0	$\frac{d}{l}$	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{q_1}{q_0}$
0	∞	0,611	1
10	0,825	0,676	1,19
20	0,550	0,742	1,43
30	0,383	0,797	1,73
40	0,264	0,854	2,14
50	0,171	0,896	2,75
60	0,099	0,941	3,73
70	0,045	0,972	5,68
80	0,012	0,991	11,4
90	0	1	∞

Lorsque $\alpha = 0$, la longueur $2d$ de la veine devient infinie et l'on obtient comme coefficient de contraction le coefficient de Kirchhoff

$$\frac{l_1}{l} = \left(\frac{\mathrm{E}+\sin\alpha}{\mathrm{E}+1}\right)_{\alpha=0} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}611.$$

Le dernier problème que nous considérerons est celui de la résistance de deux plans inclinés, dont les arêtes sont réunies par des surfaces de glissement, et qui sont disposés d'une façon symétrique par rapport à un axe qu'on suppose perpendiculaire à la direction du mouvement.

Les plans des variables z et w et des variables auxillaires sont indiqués dans la planche 4.

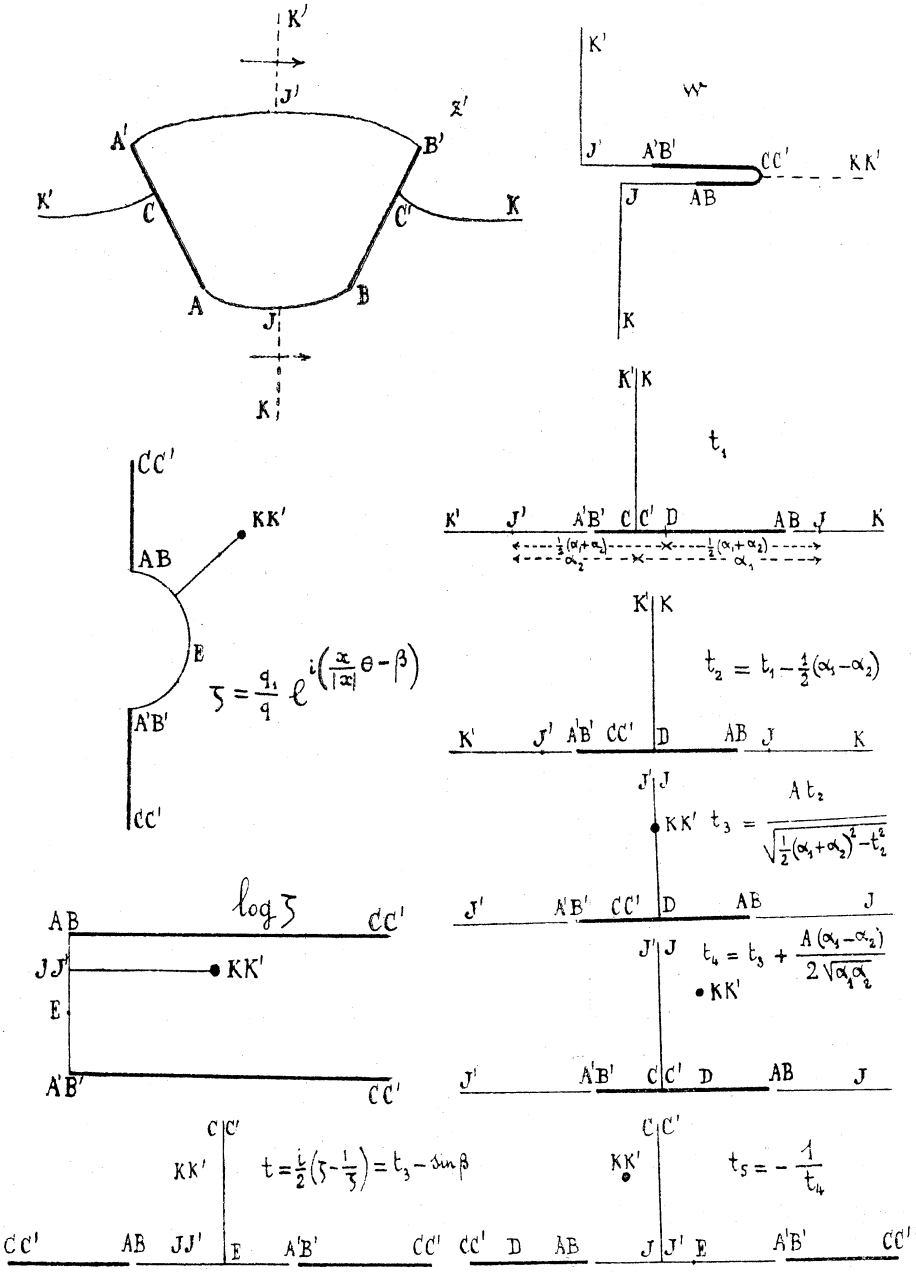


PLANCHE 4.

Les transformations successives qu'on est amené à faire sont aussi indiquées sur cette planche. En posant dans ces formules

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=\cos^2\gamma, \qquad \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=\sin^2\gamma, \qquad \frac{\sin^2\gamma}{\sqrt{\cos 2\gamma}}=\mathrm{K},$$

$$\alpha_1=q_1 b, \qquad \mathrm{A}=\cot\alpha,$$

on peut représenter la relation de dépendance entre les variables z et w et la variable auxillaire t comme suit :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}=-\dfrac{q_1 b\cos^2\gamma}{\sqrt{1+t_3^2\,\mathrm{tang}^2\alpha}}-2q_1 b\sin^2\gamma\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{1+t_3^2\,\mathrm{tang}^2\alpha}-t_3\,\mathrm{tang}\,\alpha\right)+\pi q_1 b\sin^2\gamma, \\ \qquad t_3=-\dfrac{1}{t+\sin\beta}-\mathrm{K}\cot\alpha, \\ \qquad t=\dfrac{1}{2}i\left(\zeta-\dfrac{1}{\zeta}\right). \end{array}\right.$$

En désignant par q_1 la vitesse sur la surface de glissement, par q_0 la vitesse à l'infini et en posant

$$\mathrm{W}=\varphi=\infty, \qquad \psi=0, \qquad \theta=0, \qquad \frac{q_1}{q}=\frac{q_1}{q_0},$$

on a :

$$-\frac{1}{t+\sin\beta}-\mathrm{K}\cot\alpha=i\cot\alpha,$$

$$t=-\frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{q_0}+\frac{q_0}{q_1}\right)\sin\beta+\frac{i}{2}\left(\frac{q_1}{q_0}-\frac{q_0}{q_1}\right)\cos\beta.$$

En éliminant t et en égalant les parties réelles et les coefficients de i, on obtient :

$$(17)\quad \frac{q_1}{q_0}=\frac{1+\mathrm{K}\cot\beta}{1-\mathrm{K}\cot\beta},$$

$$\mathrm{tang}\,\alpha=\frac{2\mathrm{K}(1+\mathrm{K}^2)\sin\beta}{\mathrm{tang}^2\beta-\mathrm{K}^2}.$$

En désignant par l la largeur de chacun des plans minces, on a :

$$(18)\quad l=\int_1^{\infty}\frac{dl}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}dt+\int_{-1}^{-\infty}\frac{dl}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}dt.$$

Il faut poser dans cette expression

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1}\left(|t| + \sqrt{t^2 - 1}\right),$$

$$(19) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{q_1 b \mathrm{K} \cos^2\gamma \operatorname{tang}\alpha}{(1+\mathrm{K}^2)^{3/2}} \frac{\left(t + \dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\mathrm{K}} + \sin\beta\right) - \sqrt{(t-t_1)(t-t_2)}}{[(t-t_1)(t-t_2)]^{3/2}},$$

où

$$t_1 = -\left(\sin\beta + \frac{\mathrm{K}\operatorname{tang}\alpha}{1+\mathrm{K}^2}\right) + i\,\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1+\mathrm{K}^2},$$

$$t_2 = -\left(\sin\beta + \frac{\mathrm{K}\operatorname{tang}\alpha}{1+\mathrm{K}^2}\right) - i\,\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1+\mathrm{K}^2}.$$

La distance d entre les arêtes inférieures des plans minces s'exprime comme suit :

$$(20) \qquad d = 2\int_{-\sin\beta}^{-1} \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt,$$

où

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1-t^2}\cos\beta - t\sin\beta,$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{q_1}.$$

et $\dfrac{d\varphi}{dt}$ a la valeur (19).

Les intégrales (18) et (20) se ramènent à des intégrales elliptiques et élémentaires.

Nous pouvons calculer à présent la force sustentatrice Q du système de deux plans. En posant dans la formule (16) $(t + \sin\beta) = +0$, on trouve qu'au point J le potentiel des vitesses a la valeur $\pi q_1 b \sin^2\gamma$, la circulation est donc égale à $2\pi q_1 b \sin^2\gamma$ et, par conséquent, d'après le théorème de Joukovski,

$$\mathrm{Q} = 2\pi \sin^2\gamma\, b\rho q_1 q_0.$$

La pression normale R du courant sur chacun des plans sera

$$\mathrm{R} = \left(\frac{b}{l}\right)\left(\frac{q_1}{q_0}\right)\frac{\pi\sin^2\gamma}{\sin\beta}\,\rho q_0^2 l.$$

On éliminera $\frac{b}{l}$ au moyen de l'égalité (18), $\frac{q_1}{q_0}$ au moyen de l'égalité (17), $\sin^2\gamma$ et $K = \frac{\sin^2\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma}}$ au moyen du rapport $\frac{d}{l}$ et l'on obtiendra ainsi le coefficient de résistance $R : \rho q_0^2 l$ en fonction de l'angle d'attaque β et du rapport de la distance d entre les arêtes inférieures des plans à la largeur l.

THE PRESSURE OF WAVES OF SOUND

Sir JOSEPH LARMOR

(CAMBRIDGE)

The pressure of sound waves in air and water against an obstacle has had recent important applications in military science. There has however been difficulty felt on the side of theory as to how trains of waves in a fluid exert pressure at all. The following simple considerations are therefore offered.

The pressure of light, exactly equal to the density of energy in front of the obstacle, is of course fundamental now in physical theory. The law for waves in a material molecular medium on the other hand could not be exact on account of thermal effects.

Let us consider transmission of disturbance of small amplitude in an elastic fluid, constituted so that in the actual circumstances $\partial p/\partial \rho$ is equal to c^2, which is the square of the velocity of propagation. Using the hydrodynamic formulae, we are concerned only with velocity and pressure at each point considered, and displacements do not come into the analysis. If there is a velocity potential φ the pressure is given in terms of it by the usual formula

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{V} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{vel.}^2 .$$

For small change of density, if ϖ is the variation of pressure,

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_0 \varpi + \ldots$$

so that

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{d\varpi}{\rho_0}\left\{1 - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_0 \varpi + \ldots\right\}$$
$$= \frac{\varpi}{\rho_0}\left\{1 - \frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_0 \varpi\right\}.$$

Thus substituting, and transposing a factor, there being no extraneous potential energy V, remembering that $\partial\rho/\partial p$ is equal to c^{-2},

$$\frac{\varpi}{\rho_0} = -\left(1 + \frac{\varpi}{2\rho_0 c^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\text{vel.}^2\right)$$
$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varpi^2}{2\rho_0^2 c^2} - \frac{1}{2}\,\text{vel.}^2,$$

for in the second term, which is of smaller order, the first-order value $-\varpi/\rho$ may be substituted for $\partial\varphi/\partial t$. Thus the change of pressure is determined up to the second order(1) by

$$\varpi = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho\,\text{vel.}^2$$
$$= -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{W} - \text{T}$$

where W is the volume-density of potential energy, and T that of kinetic energy.

It is to be noted that the correcting factor above introduced is purely constitutive: thus for statical changes the fall of the potential V of the applied forces must be equal not to $\frac{\varpi}{\rho}$ but to $\frac{\varpi}{\rho_0}\left(1 - \frac{\varpi}{2\rho c_1^2}\right)$, where $c_1 = c/\sqrt{\gamma}$, γ being the ratio of specific heats of the gas.

If φ is everywhere purely fluctuating, as it can be taken to be in a disturbance constituted of superposed sound waves in an enclosure where their degradation is slow, the first term in ϖ is alternating in each period of the waves, so that any steady pressure arises only from the other part.

At a nodal surface where there is no velocity, there is thus excess of pressure equal to the mean potential energy per unit volume : at a loop or antinodal surface, where there is no compression, there is defect of pressure equal to the kinetic energy per unit volume.

The first case includes that of plane waves of sound incident *directly* on a reflector, as at the reflector the medium cannot be displaced : then the pressure of the waves is the volume density of the energy at the reflector, in keeping with Maxwell's rule for radiation. But for oblique incidence the relation is more complex. The attraction of a sheet of paper by a vibrating tuning-fork, described by Guthrie and dis-

(1) This formula, with indication of its consequences as *infra* was proposed for proof in the Cambridge Mathematical Tripos Examination, 1917, 30 May, afternoon question 12. In the usual discussions initiated by Lord Kelvin, the second term of the formula, which accounts for the pressure on a reflector, seems to have been overlooked.

cussed by Lord Kelvin, is due both to the partial node formed at its surface and to the stronger vibration developed on the nearer side of the sheet.

The repulsion exerted on a resonator has been considered by Lord Rayteigh. When the interior cavity is small compared with the wave length, there are only changes of pressure inside which are constant throughout but of entranced amount: and this constant outward pressure on the walls can be replaced by an equal pressure over the area of the aperture, thus giving a simple rule to estimate the repulsion.

For a train of progressive waves $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c.$ vel.: thus there is no steady alteration of pressure within the waves, it is all alternating. Thus the waves can exert pressure on being reflected back by an obstacle, only because they carry momentum along with them through the medium. And the amount thus convected is sufficient, for it is per unit volume, for a progressive train of waves travelling along x,

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left\{ \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \varpi \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{where} \qquad \varpi = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

giving a quadratic part equal to $\frac{1}{c} \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$, which is the total energy for unit volume divided by c. When this momentum is deflected and perhaps also partly absorbed and partly transmitted at a reflecting surface, the appropriate pressure on the surface results.

THE RAYS OF DIFFRACTION THAT ACCOMPANY TELESCOPIC IMAGES

Sir JOSEPH LARMOR

(CAMBRIDGE)

If one examines an astronomical photograph of a field of stars, rays projecting from the images are sometimes apparent : and they are precisely the same for all the stars in the field. Such rays are very conspicuous also in other optical point images. The view is here advanced that these rays are due to straight line portions of the boundary of the aperture of the telescope : that then there is the usual central image with its rings, while a ray shoots out from it at right angle to the direction of each such straight edge.

These ray patterns were figured by Sir John Hirschel long ago in the *Encyclopedia Metropolitana*. A striking case is when the aperture of a telescope is limited to an equilateral triangle, which gives three double rays forming a hexagonal system. For this case the mathematical explanation was worked out by Airy in his tract on *Physical Optics*. By a known principle of correspondence for diffraction in an image plane, one can pass from this case to a triangle of any form, the three double rays being then at right angle to the sides through their middle points.

The demonstration of these statements emerges readily on treating the appropriate diffraction integral by integration by parts. The subject seems to merit closer attention in astronomical and other connexions.

SUR LA CINÉMATIQUE PLANE

PAR J.-A. BARRAU

(GRONINGEN)

Les systèmes cinématiques plans de deux degrés de liberté, lorsqu'ils sont algébriques, peuvent être représentés par des surfaces algébriques du même degré, contenues dans le *bicylindre cinématique*

$$c^2 + s^2 = 1 .$$

Les systèmes du premier degré sont ceux d'orientation fixe; les systèmes du deuxième degré sont ceux où un point du plan mobile doit rester dans une droite du plan fixe(1).

Les surfaces représentantes peuvent être cylindriques, les systèmes correspondants sont alors parallèles. Cela veut dire que les *lignes d'orientation*, lieux de l'origine du plan mobile pour des valeurs constantes de c et s, sont des droites parallèles. Un tel système, de degré n, est obtenu en soumettant toutes les positions d'un mouvement de degré n à une translation dans la même direction. Le système du second degré est forcément parallèle.

La surface représentante d'un système cubique ou biquadratique est commune à tous les individus d'un faisceau de variétés quadratiques, auquel appartient le bicylindre cinématique. Ces systèmes peuvent donc être classifiés suivant la distribution des facteurs élémentaires des faisceaux. Adoptant la notation de Segre, nous trouvons, sans compter les systèmes parallèles, les types :

$[(11)\,111]$,	$[(21)\,(11)]\,B$,	$[(22)\,1]$,
$[(11)\,21]$,	$[(21)\,2]$,	$[(32)]$,
$[(11)\,3]$,	$[(\overset{\cdot}{3}1)\,1]$,	
$[(11)\,(11)\,1]$,	$[(41)]$,	$\left[\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}\right]$.
$[(21)\,(11)]\,A$,	$\left[\left\{\begin{matrix}3\\11\end{matrix}\right\}\right]$,	

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, tome III (1917), p. 73.

Le cas $[(21)(11)]$ donne lieu à deux types A et B, parce que les deux bicônes d'un tel faisceau jouent des rôles différents; par contre les deux bicônes d'un faisceau $[(11)(11)1]$, ou d'un faisceau singulier $\left[\left\{3\right\}11\right]$, ne donnent pas de types différents.

Pour les types de la première colonne, les courbes d'orientation sont des hyperboles ou des ellipses, la droite-sommet du bicône ayant avec chaque individu du faisceau deux points d'intersection distincts, réels ou imaginaires.

Pour les types de la deuxième colonne ces courbes sont des paraboles, puisque la droite-sommet du bicône touche les hyperquadriques du faisceau.

Pour les types de la troisième colonne les lignes d'orientation sont des droites, la droite-sommet étant commune à tous les individus.

La base d'un faisceau singulier $\left[\left\{3\right\}2\right]$ est dégénérée en un plan et une surface cubique, cette dernière représente le système cinématique cubique le plus général.

Pour l'étude détaillée d'un type particulier il se recommande de poser

$$c = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad s = \frac{2t}{1+t^2}\left(t = tg\frac{\varphi}{2}\right),$$

où φ est l'angle d'orientation du plan mobile. On trouve ainsi qu'après une transformation affine du plan fixe, le système cubique général peut être représenté par les formules

$$u = t(t^2+1), \qquad v = -(t^2+1), \qquad w = F_3(t),$$

où u, v, w sont les coordonnées trilinéaires des droites d'orientation, liées aux coordonnées cartésiennes employées pour le plan fixe, tandis que F_3 est un polynôme du degré 3.

L'enveloppe des droites d'orientation est donc (après cette affinité) une *hypocycloïde à trois rebroussements*; la direction ψ de ses tangentes est donnée par

$$\operatorname{tg}\psi = m = -\frac{u}{v} = t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi,$$

$$2\psi = \varphi,$$

la vitesse angulaire du plan mobile est deux fois celle de la droite d'orientation.

Si $w = 0$, les droites d'orientation forment un faisceau; un changement convenable d'origine dans le plan mobile permet de décrire, après transformation affine du plan fixe, le système cubique général par les formules simplifiées

$$u = t(t^2+1), \qquad v = -(t^2+1), \qquad w = 0.$$

Pour le système biquadratique à droites d'orientation, on obtient dans le cas général, après une transformation affine du plan fixe,

$$u = ct(t^2 + 1), \qquad v = (t^2 - c + 1)(t^2 + 1), \qquad w = F_4(t),$$

donc

$$m = \frac{-ct}{t^2 - c + 1}.$$

L'enveloppe des droites d'orientation est une courbe de classe 4, degré 6, nombre de tangentes doubles 3 (la droite à l'infini la touche aux points cycliques), inflexions 0; points doubles 4, points de rebroussement 6. Les valeurs 0, 1 et ∞ de c sont spéciales; pour la valeur 2 on a

$$m = \frac{2t}{1 - t^2}, \qquad \psi = \varphi,$$

les droites d'orientation sont alors les positions que peut avoir une droite fixe du plan mobile.

Quand on prend, par exemple,

$$u = 2t(t^2 + 1), \qquad v = (t^2 - 1)(t^2 + 1), \qquad w = 2t(t^2 - 1),$$

une droite du plan mobile doit glisser le long d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Quand $w = 0$, les droites d'orientation forment un faisceau, une droite du plan mobile doit toujours passer par un point du plan fixe, le système est *conchoïdal*.

Quand w est divisible par $(t^2 + 1)$, l'enveloppe des droites d'orientation devient une conique; par des changements convenables d'origine dans le plan fixe, ainsi que dans le plan mobile, on peut soumettre le cas général (toujours après une affinité du plan fixe) à cette description simplifiée.

Passons aux cas $n > 4$.

Choisissant comme centre de projection un point P du bicylindre cinématique B, nous pouvons projeter les points de B sur un espace tangent E. La projection de chaque surface représentante S sera une surface Σ dans E et inversement. Les éléments de E, singuliers pour cette projection, sont la droite-sommet l_∞ de B et le plan d'intersection π de E avec l'espace tangent à B en P.

La relation entre les degrés n de S et ν de Σ est

$$n = 2\nu - k,$$

où k est le nombre de fois qu'on doit compter l_∞ comme commune à π et Σ.

Pour que $n = 5$, il faut prendre

$$\nu = 3, \quad k = 1 \qquad \text{ou} \qquad \nu = 4, \quad k = 3.$$

Dans le premier cas, Σ est une surface cubique dont l_∞ est une des 27 droites. Le système cinématique du cinquième degré qui en résulte devient plus spécial, quand Σ n'est plus du type général, on peut aller (omettant toujours les systèmes parallèles) jusqu'à prendre Σ *réglée* avec l_∞ comme directrice simple. Mais alors S est réglée aussi et les courbes d'orientation sont dégénérées en deux droites. Un tel système est déterminé par une correspondance (2, 1) entre les directions des droites d'orientation et les positions d'un plan mobile décrivant un mouvement elliptique. Quand ce mouvement est une simple rotation, les droites d'orientation forment un faisceau; le cas le plus simple est donné par la relation

$$\varphi = 4\psi.$$

EXPRESSION MONO ET POLYPARAMÉTRIQUE DU TEMPS

DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par Édouard GUILLAUME

(BERNE)

[**1**] Les travaux (1) que j'ai l'honneur de résumer ici ont été inspirés par le « conventionalisme géométrique » d'Henri Poincaré (2). Nous admettrons qu'il n'y a qu'*un* temps physique et qu'*un* espace sensible, et que nos algorithmes ne sont que des *conventions* représentatives, qui doivent être soigneusement distinguées de la réalité représentée. C'est le point de vue que Poincaré a mis en lumière à propos des géométries — euclidienne et non-euclidiennes — qui peuvent les unes comme les autres servir indifféremment à la description de l'espace physique, au même titre que des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées polaires.

Le peu de place dont nous disposons nous oblige à être bref. Nous supposerons que le lecteur connaît la Théorie de la relativité restreinte et la Théorie de la relativité générale.

[**2**] Si je dis : « soit donné un plan euclidien », cette phrase possède deux sens bien distincts. Pour le physicien, elle signifie qu'il existe une surface matérielle et une règle matérielle que je puis appliquer sur la surface pour en faire la topographie; le résultat des opérations est un complexe de déplacements, jouissant d'un

---

(1) Ed. Guillaume, *Les bases de la Physique moderne* (Archives des Sciences physiques et naturelles, (4), *43*, pp. 5, 89, 185, Genève 1917; *La théorie de la relativité en fonction du temps universel*, ibid., (4), *46*, p. 281, 1918; *Représentation et mesure du temps*, ibid., (5), 2, p. 125, 1920; *Sur l'impossibilité de considérer comme des périodes les paramètres représentant le temps dans la Théorie de la relativité; Application au déplacement des raies solaires*, ibid., (5), 2, p. 248, 1920. — *La Théorie de la relativité et le temps universel* (Revue de Métaphysique et de Morale, n° 3, 1918; *La Théorie de la relativité et sa signification*, ibid., 1920. — *Les bases de la Théorie de la relativité* (Revue générale des Sciences, n° du 15 avril 1920).

(2) Consulter à ce propos : Louis Rougier, *La Philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Paris, Félix Alcan.

ensemble de propriétés que je résume en disant que la surface est un « plan euclidien ». Pour le mathématicien, se donner un tel plan, c'est se donner une certaine relation analytique compatible avec d'autres relations analytiques appelées *invariants*. Les invariants jouent en quelque sorte le rôle de la règle matérielle du physicien. On voit donc qu'il faut au moins *deux* données distinctes pour définir un plan. Celui-ci n'existe que *relativement* à la règle. Semblablement, une équation linéaire à trois variables ne saurait à elle seule représenter un plan.

Cela posé, considérons « deux systèmes trirectangles cartésiens $S_1(x_1, y_1, z_1)$ et $S_2(x_2, y_2, z_2)$ en translation relative uniforme de vitesse v le long de leurs axes O_1x_1 et O_2x_2 supposés coïncidents ». Un mécanicien prétendra que ce mouvement est représenté par les relations :

$$(1) \qquad x_1 = x_2 + vt; \qquad y_1 = y_2; \qquad z_1 = z_2,$$

alors qu'un relativiste voudra le représenter par les relations (*transformation de Lorentz*) :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \beta(x_2 + \alpha c\tau_2); \qquad c\tau_1 = \beta(c\tau_2 + \alpha x_2); \qquad y_1 = y_2; \qquad z_1 = z_2; \\ \alpha = v : c; \qquad \beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2), \end{cases}$$

Un physicien de laboratoire ne comprendra rien à cette querelle, car pour lui la phrase énoncée : « deux systèmes trirectangles, etc. », correspond à un complexe physique parfaitement déterminé, qu'il sera capable de construire, et il n'admettra pas que le fait d'écrire telles ou telles relations y puisse rien changer. Force sera donc au mathématicien de réfléchir, ce qui l'amènera à formuler la conclusion suivante : le physicien a raison, et les relations ci-dessus ne représentent que des modes particuliers de groupement des systèmes entre eux, ce que l'on appelle une *correspondance* entre deux *continus*. Ces correspondances ne doivent pas altérer les continus *donnés*.

Une première comparaison entre les relations (1) et (2) nous montre que dans les relations (1) le temps est représenté par un paramètre *unique* t pour les deux systèmes à la fois (représentation *monoparamétrique*), tandis qu'avec les relations (2), il est représenté par un paramètre différent τ_i dans chaque système S_i : c'est, dirons-nous, une représentation *polyparamétrique*. Elles doivent être équivalentes, puisqu'il s'agit de représenter le même temps. Cherchons les conditions d'équivalence. A cet effet, nous remarquerons que devant les paramètres temporels τ, il y a toujours un coefficient c, qui possède les dimensions d'une vitesse. Il doit bien en être ainsi, puisque les termes des formules sont homogènes. Posons donc :

$$(3) \qquad c\tau_1 = u_1; \qquad c\tau_2 = u_2.$$

Pour le physicien, les grandeurs u_1 et u_2 ont un sens parfaitement défini : ce sont les mesures, dans S_1 et dans S_2, des traces laissées par un rayon lumineux qui traverse les systèmes.

[**3**] Ainsi, les relations (2) contiennent quelque chose de plus que (1) : aux deux systèmes, il nous faut ajouter un *rayon lumineux*. Or, les systèmes sont formés de plans euclidiens, ce qui présuppose l'existence d'au moins une règle matérielle mensuratrice. En introduisant la lumière, nous pourrons l'utiliser comme élément mensurateur et obtenir une topographie des systèmes différente de la première. Nous allons procéder de façon à n'avoir qu'une topographie, et nous verrons pourquoi M. Einstein en obtient deux, d'où les incessants conflits dans les représentations.

[**4**] On peut donc dire, en résumé, que les relations (2) établissent une correspondance entre les systèmes cartésiens donnés par l'intermédiaire d'une propagation lumineuse dont elles fournissent la loi (1). La question que nous nous poserons est alors celle-ci : *peut-on trouver un système de rayons lumineux tel que les relations* (1) *et* (2) *deviennent compatibles?* Envoyons un rayon à travers les systèmes S_1 et S_2. Pendant un intervalle de temps infiniment petit, la trace u_1 augmente de du_1 ; pour l'observateur situé sur S_2, l'accroissement sera du_2, du_1 et du_2 étant liés par la transformation de Lorentz. *Il est dès lors tout naturel d'admettre que* du_1 *et* du_2 *s'effectuent* SIMULTANÉMENT *dans chacun des systèmes.* Cela veut dire qu'il doit exister un paramètre t tel que l'on ait :

$$du_1 = c_1 dt; \qquad du_2 = c_2 dt. \tag{4}$$

En intégrant ces équations dans l'hypothèse où c_1 et c_2 ne dépendent pas de t, on aura :

$$u_1 = c_1 t + r_1; \qquad u_2 = c_2 t + r_2, \tag{5}$$

et l'on peut disposer des constantes de façon à tenir compte de la parfaite symétrie des systèmes. On parvient alors aux relations remarquables :

$$\begin{cases} u_1 = c\tau_1 = ct + \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2 = \dfrac{c}{\beta} t + \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1, \\ u_2 = c\tau_2 = \dfrac{c}{\beta} t - \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2 = ct - \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1. \end{cases} \tag{6}$$

(1) Pour l'étude de cette loi, voir notre dernière note dans les *Archives* de Genève, (5), *3*, p. 311.

En remplaçant $c\tau_2$ par sa valeur dans la première équation (2), on obtient :

$$\underline{x_1 = x_2 + vt},$$

soit exactement la première relation (1), ce qui donne la réponse à la question posée.

[5] Comparons maintenant les deux modes de représentation du temps. Prenons une horloge indiquant le temps en secondes. Les deux modes ne diffèrent que par le choix de la variable temporelle *indépendante*. Les relativistes, qui utilisent la représentation polyparamétrique, prendront l'un des τ, par exemple τ_1, comme variable indépendante, et ils établiront une correspondance univoque et réciproque entre les positions de l'aiguille sur le cadran et les valeurs successives du paramètre τ_1; alors les autres τ deviendront dépendants. Dans la forme monoparamétrique, par contre, c'est t qui, naturellement, constitue la variable indépendante, dont les valeurs doivent correspondre aux positions de l'aiguille de l'horloge; tous les τ sans exception sont alors des variables dépendantes. Comparons maintenant les relations suivantes :

$$c\tau_2 = \frac{c}{\beta}\tau_1 - \alpha x_2, \tag{7}$$

$$c\tau_2 = \frac{c}{\beta}t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}x_2. \tag{8}$$

La première est utilisée dans la forme relativiste, et τ_2 constitue ce que l'on appelle le *temps propre* du système S_2. La seconde est utilisée dans la forme universelle, et nous dirons que τ_2 est le *temps local* du système S_2. Si l'on imagine qu'une horloge placée en x_2 sur S_2 possède deux aiguilles, nous voyons que les temps propres et locaux ne différeront que par un décalage constant, de sorte que les aiguilles pourront être rigidement liées entre elles. Si d'ailleurs on différentie (7) et (8), les termes en dx_2 sont nuls, et l'on voit clairement que la *marche* des horloges est identique. Ce résultat a une importance physique fondamentale. *Puisqu'en effet les phénomènes physiques ne dépendent que d'équations différentielles et non des constantes d'intégration, il est indifférent de prendre τ_1 ou t comme variable temporelle indépendante.*

Faisons-nous une image physique des temps propres et locaux. On facilite grandement l'intuition en remplaçant les temps par les chemins décrits $u = c\tau$ et $U = ct$, car il est facile d'imaginer que ces chemins sont parcourus *simultanément* par des mobiles. Au lieu d'avoir les temps nous aurons les *chemins optiques* propres et locaux. Cela posé, au point d'abscisse x_1, envoyons dans le système S_1 un

rayon lumineux obliquement par rapport à O_1x_1, par exemple dans le plan vertical $x_1O_1z_1$, ce rayon faisant avec O_1x_1 un angle dont le sinus est α. Soit l la longueur du rayonau bout d'un certain temps. Si l'observateur fait usage de la représentation polyparamétrique, il posera :

$$u_1 = l;$$

si, par contre, il utilise la représentation monoparamétrique, il posera

$$U = l.$$

Cela veut dire que, dans le premier cas, il désignera par τ_1 le temps $l : c$ de parcours; dans le second, c'est la variable t qu'il choisira pour représenter ce *même* temps. Que dira maintenant l'observateur entraîné avec le milieu S_2? Pour lui, le chemin simultanément parcouru est perpendiculaire à la direction commune Ox et est plus court que l; il est égal à :

$$\sqrt{l^2 - \alpha^2 l^2} = \frac{l}{\beta}. \tag{9}$$

de sorte qu'il est parcouru avec la vitesse $\sqrt{c^2 - v^2}$ ou $c : \beta$. Mais le segment $l : \beta$ ne donne pas encore le chemin optique propre ou local. Il faut tenir compte en outre des décalages provoqués par les constantes additives des relations (7) et (8). Ces corrections se font facilement si l'on mène par l'origine O_2, dans le plan $x_2O_2z_2$, les obliques dont les coefficients angulaires sont respectivement $-\alpha$ et $-\frac{\beta - 1}{\alpha\beta}$. On peut dire que ces obliques donnent les lois des zéros des horloges propres et locales. Ces lois dépendent de α, c'est-à-dire de la vitesse relative de la paire de systèmes envisagée.

[**6**] Il résulte de la façon dont nous avons introduit la simultanéité au n° 4 [éq. (4)] que

$$\frac{du_1}{c} = d\tau_1; \qquad \frac{du_2}{c} = d\tau_2 \tag{10}$$

ne peuvent être que des mesures différentes de la *même* durée. Cela exige que les horloges avec lesquelles cette durée serait mesurée aient des périodes différentes Θ_1 et Θ_2 telles que

$$\Theta_1 . d\tau_1 = \Theta_2 . d\tau_2. \tag{11}$$

Pour éviter toute contradiction, nous poserons :

$$c = 300\,000 \frac{\text{kilomètres}}{\text{unité de temps}}, \tag{12}$$

en laissant l'unité de temps varier selon les périodes. Quand nous utiliserons la *seconde*, nous poserons :

$$c_0 = 300\,000 \text{ km/sec}. \tag{13}$$

Il est très remarquable qu'ici *les périodes sont celles des ondes lumineuses mêmes constituant les rayons.* On sait en effet que le phénomène de Doppler-Fizeau s'exprime par :

$$\Theta_1 = \frac{\Theta_2}{\beta(1 + \alpha \cos \varphi_2)}. \tag{14}$$

Si, maintenant, nous posons $x_2 = c\tau_2 \cos \varphi_{12}$ dans la seconde relation (2) et que nous multiplions cette relation avec (14), nous obtiendrons une relation de la forme (11), ce qui justifie notre affirmation.

Je ne pouvais laisser passer ce résultat fondamental sans le communiquer immédiatement à M. Einstein, qui me répondit comme suit : « Es hat gar keinen vernünftigen Sinn die Periodenlänge Θ mit der Zeit τ des Eintreffens jener mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Ebene zu vergleichen, die zur Zeit $\tau = 0$ den Koordinatenursprung passiert. »

Ainsi, pour M. Einstein, il n'existe pas seulement des calculs justes ou faux; il y a aussi des relations « déraisonnables ».

Avec son principe de la constance *absolue* de la vitesse de la lumière, il ne fait pas la distinction entre c et c_0, selon l'unité de temps qui entre en ligne de compte. Il est alors obligé d'introduire des unités (kilomètres et secondes) *contractables*, donc d'avoir une double métrique selon qu'il mesure une longueur avec un mètre ou par le temps que met la lumière à la parcourir avec une vitesse numériquement invariable.

Une des conséquences fondamentales des considérations précédentes consiste en ce que le calcul du déplacement des raies spectrales du Soleil dans le champ de gravitation est impossible. Pour les détails, voir nos Notes et Mémoires.

[**7**] Nous n'avons considéré jusqu'ici que deux systèmes S_1 et S_2. Qu'arrive-t-il si l'on en introduit un troisième S_3? Nous commencerons par remarquer que le continu « Espace-Temps » à 4 dimensions — l' « univers » de Minkowski — devient avec nos conventions un continu *Espace-Horloge*, puisque nous distinguons soigneusement le temps des horloges qui le marquent, et celles-ci sont essentiellement des

rayons lumineux. La question qui se pose est alors celle-ci : *peut-on trouver un système de rayons lumineux tels que l'on puisse établir une correspondance entre les trois systèmes* A UN MÊME INSTANT t ? Cette question admet une solution, et l'on en trouvera l'exposé dans le mémoire suivant de M. Willigens (cf. le présent Volume, p. 603). Examinons rapidement ici le côté physique de la question.

En Mécanique, la vitesse d'un mobile n'est autre, à un facteur près, que le rapport de l'accroissement Δs de son élongation à l'accroissement concomitant $\Delta\rho$ de la rotation terrestre, donc $\frac{\Delta s}{\Delta\rho}$. Nous dirons que la Terre est l'*horloge-mère* des systèmes mécaniques. Si l'on utilise une horloge marquant le temps t, la vitesse en question sera proportionnelle à $\frac{\dot{s}}{\dot{\rho}}$, en désignant par $\dot{s}$ et $\dot{\rho}$ les dérivées de s et ρ relativement à t.

Dans la Théorie de la relativité, c'est la *lumière* qui constitue l'horloge-mère, et une vitesse sera, par définition, proportionnelle à $\frac{\Delta s}{\Delta u}$, où Δu représente le chemin rectiligne que parcourrait un rayon lumineux pendant le temps que le mobile met à décrire l'arc Δs sur sa trajectoire. Cela dit, on trouve immédiatement la règle de composition des vitesses en dérivant la transformation (2) par rapport à t et en formant les quotients $\frac{\dot{x}}{\dot{u}}, \frac{\dot{y}}{\dot{u}}, \frac{\dot{z}}{\dot{u}}$. Bornons-nous aux mouvements parallèles à une direction commune Ox. Posons :

$$(15)\qquad \frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1} c_0 = v_{13}\ \text{km/sec}; \qquad \frac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2} c_0 = v_{23}\ \text{km/sec}; \qquad \alpha c_0 = v_{12}\ \text{km/sec},$$

Nous obtenons :

$$(16)\qquad v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12} v_{23}}{c_0^2}}.$$

On voit donc que nous nous trouvons en présence d'un algorithme nouveau, auquel on peut donner le nom de *cinématique homographique*, exprimée à l'aide de *dérivées homogènes* (vitesses homogènes). Si le produit $v_{12} v_{23}$ est négligeable vis-à-vis de c_0^2, on voit qu'on retombe sur la règle de composition des vitesses de la Mécanique classique, règle de la forme :

$$(17)\qquad \mathrm{V}_{13} = \mathrm{V}_{12} + \mathrm{V}_{23},$$

et le vecteur résultant V_{13} coïncide avec la somme $\mathrm{V}_{12} + \mathrm{V}_{23}$. Par contre, dans la

règle (16), le vecteur v_{13} ne s'applique pas sur la somme $v_{12} + v_{23}$. Nous formulerons ce fait en disant qu'il y a, dans la Théorie de la relativité, mouvement avec *aberration* (voir la figure au Mémoire suivant). Cette expression généralisée est naturelle, puisque (16) représente exactement l'aberration proprement dite lorsque S_3 est formé d'un train d'ondes lumineuses. En outre, la position relative de deux systèmes S_1 et S_2 dépendra du système S_3 sur lequel on se place pour les envisager. Il faut donc que les positions $S_{1,3}$ et $S_{2,3}$ que leur assigne l'observateur situé sur S_3 soient des positions *apparentes*. D'une façon symétrique, on écrira les mouvements comme suit :

$$(18) \qquad X_{1,2} = X_{2,1} + v_{12}t; \qquad X_{2,3} = X_{3,2} + v_{23}t; \qquad X_{1,3} = X_{3,1} + v_{13}t.$$

Nous avons vu que le « temps propre » se compose de deux termes, l'un dépendant de la variable temporelle indépendante, l'autre du lieu. Dans son « univers », Minkowski utilise un système de rayons lumineux-horloges tel que les deux termes aient une somme invariable, c'est-à-dire que les valeurs du temps propre d'un système soient indépendantes des autres systèmes. Minkowski a fait ce choix pour avoir un « univers » aussi simple que possible. Si l'on introduit un paramètre temporel indépendant t, comme ci-dessus, le temps propre est remplacé par les temps locaux. L' « univers » s'en complique, mais la représentation dans l'espace à 3 dimensions est simple et intuitive.

[**8**] Si les vitesses v_{ik} dans (16) sont des vitesses apparentes, est-il possible de trouver les vitesses vraies? Soit Ω_{ik} la vitesse vraie relative des systèmes S_i, S_k. Cette vitesse, si elle existe, ne saurait dépendre d'un troisième système S_j, autrement dit elle ne peut être qu'une fonction de la seule vitesse apparente v_{ik}. La question revient donc à celle-ci : peut-on trouver des fonctions Ω_{ik} de v_{ik} telles que l'on ait :

$$\Omega_{13}(v_{13}) = \Omega_{12}(v_{12}) + \Omega_{23}(v_{23})?$$

Il est très remarquable que cette équation fonctionnelle admette une solution bien déterminée. Il suffit, en effet, de prendre pour les Ω_{ik} les arguments ayant v_{ik} comme tangentes *hyperboliques*. Ainsi donc, les mouvements vrais des points matériels s'effectueraient sur des arcs de géodésiques de surfaces à courbure négative. Mais, pour l'instant, on ne voit pas comment on doit situer ces surfaces par rapport aux trièdres de référence S_1, S_2, S_3. Tant que les mouvements réels ne seront pas parfaitement connus, la Théorie de la relativité conservera un aspect mystérieux. Aussi bien, le problème des vitesses vraies est-il l'un des plus urgents de la Physique mathématique actuelle.

[**9**] Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que la Théorie *restreinte*, c'est-à-dire sans champ de gravitation. La définition de la simultanéité que nous avons donnée au n° 4 s'étend immédiatement à la *Relativité générale*. Comme on sait, la relativité restreinte est caractérisée par la forme quadratique :

$$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation d'une *sphère* lumineuse élémentaire (1). Dans son extension à la gravitation, Einstein envisage des formes quadratiques générales :

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + \ldots + g_{44}du^2 + 2g_{12}dx\,dy + \ldots + 2g_{34}dz\,du,$$

où les g_{ik} sont des fonctions des coordonnées. Conformément à notre hypothèse (n° 4), nous admettrons qu'ici aussi les accroissements $dx, dy, \ldots$, s'effectuent *simultanément* dans l'univers physique, et que x, y, z représentent des *coordonnées cartésiennes* de l'espace ordinaire. En égalant à zéro cette forme, nous obtenons une onde lumineuse élémentaire, et nous voyons que cette onde n'est plus une sphère, mais une *quadrique*, plus particulièrement un ellipsoïde. C'est là l'effet spécifique de la gravitation sur la lumière.

Avec notre hypothèse sur la simultanéité et le système de référence cartésien, on peut voir que le calcul d'Einstein conduisant au mouvement du périhélie de Mercure revient à ajouter à la force newtonienne en raison inverse du carré, un terme en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

Et, je le demande, ces résultats ne sont-ils pas une confirmation éclatante des idées profondes d'Henri Poincaré, qui voulait que toutes les manifestations du monde physique fussent représentables dans « notre » espace et « notre » temps?

---

(1) Il est essentiel de remarquer que $ds^2 = 0$ ne représente une sphère qu'en tant que du est supposé indépendant de dx, dy, dz. Lorsque Einstein montra, dans son célèbre Mémoire de 1905, que $x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = u_2^2$ se transforme en $x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = u_1^2$ au moyen de la transformation de Lorentz, il conclut (*Ann. d. Phys. 17*, § 3, p. 901, 3e alinéa) : « Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 ». Or, *cette conclusion est erronée*, car si l'on pose $u_2 = \text{const.} = u_2^0$, u_1, par contre, n'est pas constant et dépend de (x_1, y_1, z_1). Il est facile de voir qu'en réalité la transformée est un *ellipsoïde* de révolution autour de O_1x_1, ayant α pour excentricité et l'origine O_1 pour foyer. Cet ellipsoïde pourrait être appelé « ellipsoïde de Poincaré », en l'honneur de l'illustre mathématicien qui le signala le premier (Cf. *Science et Méthode*, p. 239).

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU TEMPS UNIVERSEL

DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par Ch. WILLIGENS

(INTERLAKEN)

Si l'on considère la tranformation de Lorentz :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \beta(x_2 + \alpha u_2), \qquad u_1 = \beta(\alpha x_2 + u_2), \\ y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2, \qquad \alpha = v : c_0, \qquad \beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \\ u_1 = c_0\tau_1, \qquad u_2 = c_0\tau_2, \end{cases}$$

qui correspond à une translation du système $S_2(x_2, y_2, z_2, u_2)$ par rapport au système $S_1(x_1, y_1, z_1, u_1)$ avec une vitesse v et si l'on pose[1]

$$(2)\qquad u_1 = c_1 t + r, \qquad u_2 = c_2 t - r,$$

on obtient :

$$r(1+\beta) = (\beta c_2 - c_1)t + \alpha\beta x_2.$$

Supposons l'observateur dans le système S_1 et posons $c_1 = c_0$ vitesse de la lumière, différentions la relation précédente en posant, conformément à la définition de Minkowski, $dx_2 = 0$, nous obtenons

$$\beta c_2 - c_0 = 0;$$

---

[1] Cf. Ed. Guillaume, *La théorie de la relativité en fonction du temps universel* (Arch. des sciences physiques et naturelles (4), 46, p. 281, 1918).

soit $c_2 = \frac{c_0}{\beta}$, par suite

$$r = \frac{\alpha\beta}{1+\beta} x_2 = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2.$$

en portant cette valeur de v dans les relations (2) nous obtenons :

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 = c_0\tau_1 = c_0 t + \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2, \\ u_2 = c_0\tau_2 = \dfrac{c_0}{\beta} t - \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2. \end{cases}$$

En permutant les indices et en remplaçant α par $-\alpha$ nous obtenons en outre :

$$(3') \qquad \begin{cases} u_1 = c_0\tau_1 = \dfrac{c_0}{\beta} t + \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1, \\ u_2 = c_0\tau_2 = c_0 t - \dfrac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1. \end{cases}$$

En remplaçant dans la première relation (1) u_2 par sa valeur en fonction de t et de x_2 on obtient la relation

$$(4) \qquad \underline{\underline{x_1 = x_2 + vt}}.$$

Les paramètres τ_1 et τ_2 peuvent être considérés comme représentant le temps local. Si l'observateur est sur S_1 tous les points de S_2 sont au repos relatif et on tire de la première relation (3), en posant $\frac{dx_2}{dt} = 0$,

$$d\tau_1 = dt.$$

On voit que toutes les horloges locales vont également vite et sont synchrones avec l'horloge universelle. Par contre, il y a un déphasage constant entre une horloge locale et l'horloge universelle.

De la relation $d\tau_1 = dt$ résulte que l'on doit obtenir les mêmes équations différentielles, quel que soit le mode de représentation de la mesure du temps. On doit en tout cas parvenir à des résultats identiques, les formules établies n'étant que des conséquences de la transformation de Lorentz. Les résultats différents, obtenus pour la question du déplacement des raies spectrales annoncé par M. Einstein, font sentir la nécessité d'un nouvel examen, les expériences n'ayant pas été concluantes.

Cherchons une interprétation du temps t, dans les diagrammes connus qui servent à représenter la transformation de Lorentz.

Le premier mode de représentation, consiste à introduire dans la transformation de Lorentz des quantités imaginaires en posant :

$$\alpha = ai, \qquad c_0 = -\bar{c}_0 i.$$

Si l'on considère un système d'axes rectangulaires ox_1, ou_1, le système ox_2, ou_2 s'en déduira par une rotation d'un angle $-\varphi$ autour de l'origine, tel que

$$a = \operatorname{tg}\varphi, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos\varphi, \qquad ab = \sin\varphi,$$

$$\frac{ab}{1+b} = \frac{1-b}{ab} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

la première relation (3') prend la forme

$$\bar{c}_0\tau_1 = -x_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{\bar{c}_0}{\cos\varphi} t \tag{5}$$

qui représente une droite parallèle à la bissectrice de ox_1 et ox_2. On peut mettre cette expression sous la forme

$$\bar{c}_0\tau_1 = mx_1 + \bar{c}_0 t\,\frac{1+m^2}{1-m^2}. \tag{5'}$$

Laissons t constant et faisons varier m, ce qui revient à faire varier a. La droite enveloppe une courbe définie par les relations :

$$\begin{cases} x_1 = -\bar{c}_0 t\,\dfrac{4m}{(1-m^2)^2}, \\ \bar{c}_0\tau_1 = \bar{c}_0 t\,\dfrac{1-4m^2-m^4}{(1-m^2)^2}. \end{cases}$$

La forme de cette courbe est donnée par la figure 1.

Nous avons un système de courbes homothétiques avec l'origine comme centre et le temps t comme rapport d'homothétie.

La valeur de a étant donnée, si nous menons à la courbe correspondant à la valeur t du paramètre la tangente parallèle à la bissectrice de l'angle x_1ox_2, cette

tangente sera le lieu des points correspondants aux événements simultanés à l'instant t dans les systèmes S_1 et S_2.

Nous voyons que la simultanéité est donnée par un élément tangentiel de la courbe.

Si nous choisissons un système d'axes correspondant à une autre valeur de a, nous aurons une autre tangente, mais la valeur de t restera la même.

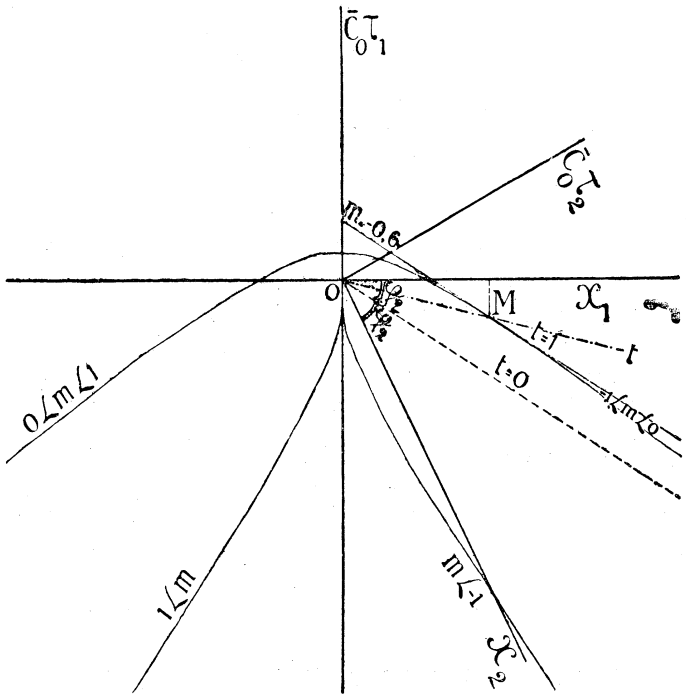


FIG. 1.

De la relation $x_1 = x_2 + vt$ résulte, si l'on prend deux points A et B d'abscisses $x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B$,

$$x_1^A - x_1^B = x_2^A - x_2^B;$$

la contraction de Lorentz disparaît.

Le second mode de représentation de la transformation de Lorentz consiste à envisager un plan dans lequel la rotation est remplacée par le glissement sur elles-mêmes de deux hyperboles équilatères conjuguées

$$x_1^2 - u_1^2 = \pm 1.$$

Si dans la relation

$$c_0\tau_1 = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1 + \frac{c_0}{\beta} t \tag{6}$$

on pose

$$\frac{\beta - 1}{\alpha\beta} = \mu,$$

on obtient

$$c_0\tau_1 = \mu x_1 + c_0 t \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}; \tag{6'}$$

les axes ox_2 et ou_2 sont deux diamètres conjugués des hyperboles indiquées ci-dessus, et tels que

$$\operatorname{tg}(x_1 o x_2) = \alpha.$$

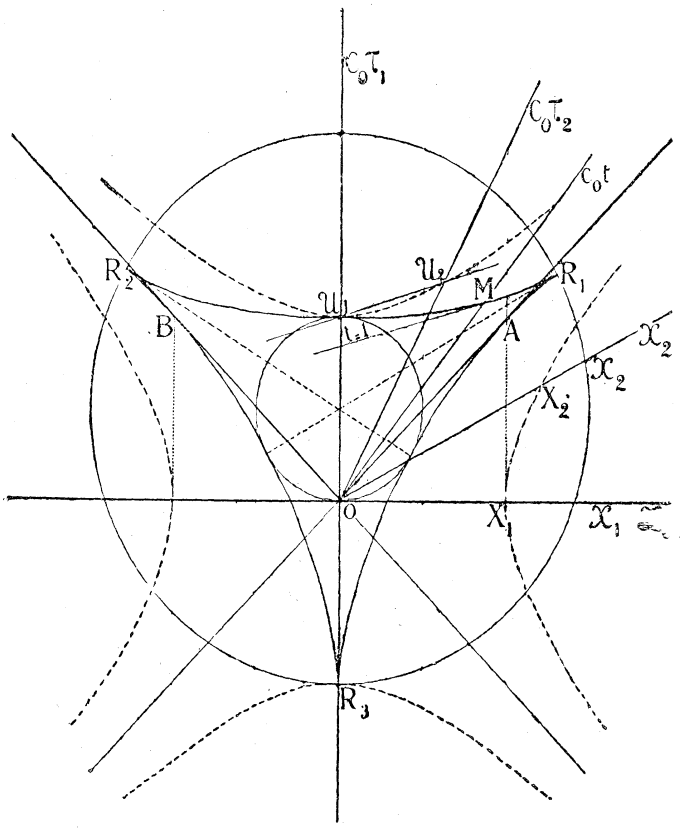


FIG. 2.

Le demi diamètre de l'hyperbole est toujours choisi comme unité sur les directions correspondantes. On vérifie sans peine que la droite (6) est parallèle à la droite de jonction des points d'intersection de ou_1 et ou_2 avec l'une des hyperboles. Elle découpe donc sur ces deux axes des longueurs mesurées par les mêmes nombres, comme la bissectrice dans le cas précédent.

L'enveloppe de la droite (6′) est représentée par les relations

$$\begin{cases} x_1 = c_0 t \dfrac{4\mu}{(1+\mu^2)^2}, \\ c_0\tau_1 = c_0 t \dfrac{1+4\mu^2-\mu^4}{(1+\mu^2)^2}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que cette courbe est de quatrième ordre et de troisième classe, doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Elle est ainsi caractérisée, comme une *hypocycloïde à trois rebroussements* (¹).

Le temps t est de nouveau défini comme rapport d'homothétie des courbes. Cette représentation est indiquée dans la figure 2. On peut faire des remarques tout à fait analogues à celles du cas précédent.

Faisons, pour terminer, une application de la formule

$$x_1 = x_2 + vt. \tag{4}$$

Considérons trois systèmes S_1, S_2, S_3, animés les uns par rapport aux autres de vitesses $v_{1,2}$, $v_{2,3}$, $v_{3,1}$.

En nous servant de la forme

$$u = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{c_0 t}{\cos\varphi} \tag{5}$$

et en observant que φ est l'angle de rotation des axes pour passer d'un système à l'autre, on peut facilement construire trois droites $t_{1,2}$, $t_{2,3}$, $t_{3,1}$ répondant à la même valeur de t, les indices indiquant seulement pour quelle association de systèmes cet élément tangentiel définit la simultanéité (*fig. 3*).

(¹) Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Journal de Crelle, 1865).

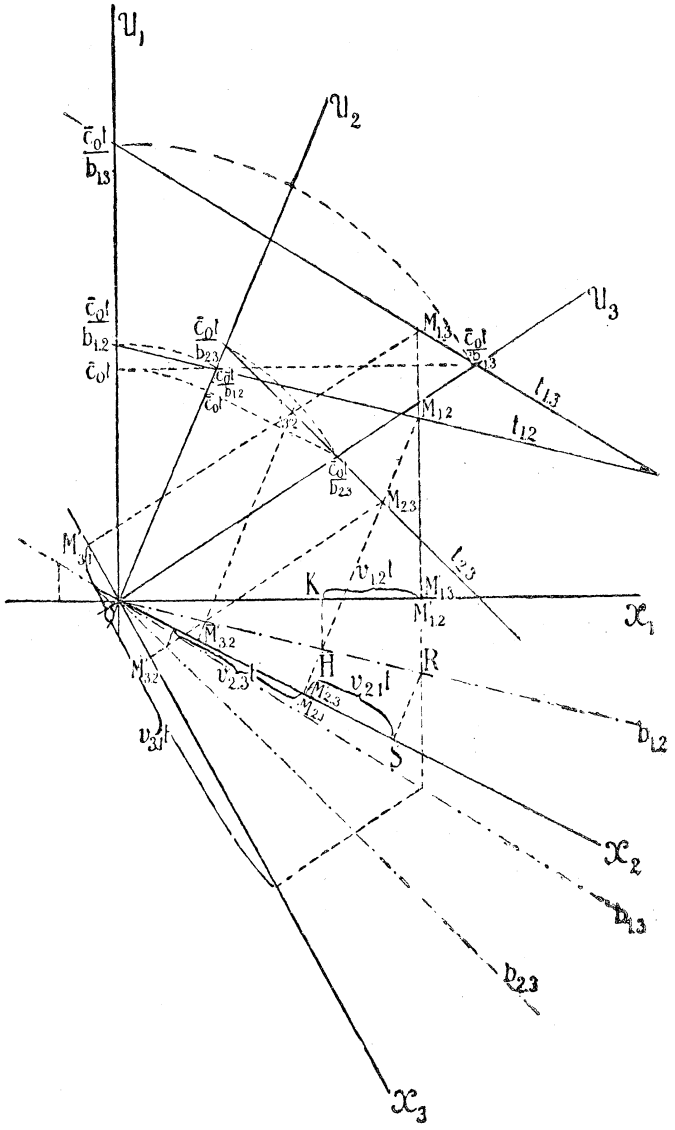


FIG. 3.

Prenons sur $t_{1,2}$ un point $M_{1,2}$ qui sera projeté sur ox_1 en $M'_{1,2}$ et sur ox_2 en $M'_{2,1}$. La perpendiculaire de $M_{1,2}$ sur ox_2 coupe la bissectrice $b_{1,2}$ de l'angle x_1ox_2 en H qui se projette en K sur ox_1. Nous avons

$$OM'_{1,2} = x_1, \qquad OK = x_2;$$

donc

$$KM'_{1,2} = x_1 - x_2 = v_{1,2}t.$$

Si par un procédé analogue nous construisons $v_{1,3}\,t$ et que nous portions dans le système trirectangle S_1, dans lequel est supposé situé l'observateur, les longueurs obtenues, nous obtenons les positions $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$ des systèmes S_2 et S_3 vus depuis S_1 (*fig. 4*).

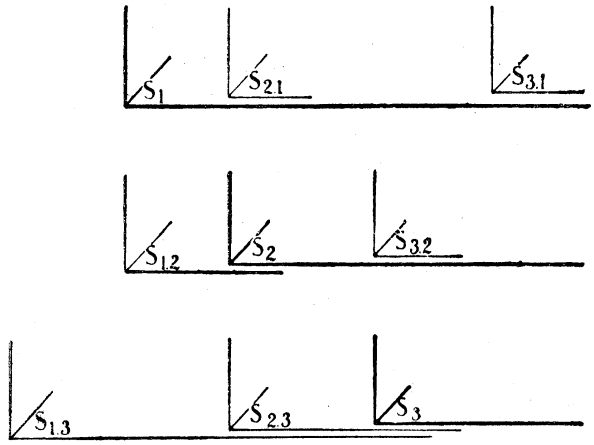


FIG. 4.

Si nous répétons la même construction, en transportant l'observateur successivement dans S_2 et dans S_2, nous avons l'aspect des trois systèmes qui est différent suivant celui dans lequel se trouve l'observateur. Ce dernier système est indiqué en trait plus fort dans la figure et il est caractérisé par un seul indice.

La différence de dispositif met donc en évidence une aberration, variable suivant le système de l'observateur.

MÉMOIRES

QUATRIÈME SECTION

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES

NOUVELLE MÉTHODE DE RECHERCHE DES FACTEURS — GÉNÉRALISATIONS

PAR A. GÉRARDIN

(NANCY)

Édouard Lucas, surtout dans sa remarquable *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (Amer. J. of Math., Baltimore, 1878) a donné un très intéressant procédé pour reconnaître la *primalité* de certains nombres.

Exemple. — La série modulaire :

4, 14, 194, 4870, 3953, 5970, 1857, 36, 1294, 3470, 128, 0. (mod 8191)

montre que le module est un nombre premier.

D'importants résultats ont été obtenus par cette méthode dans l'étude des nombres de Mersenne $2^x - 1$ (E. Fauquembergue et Powers).

Éd. Lucas disait encore (*loc. cit.*, p. 316) : « ... Nous ferons observer que nous pensons n'avoir qu'effleuré le sujet qui nous occupe. Il reste à trouver, comme pour les nombres premiers, un critérium des nombres composés affranchi de l'incertitude des calculs numériques... C'est là un problème important à résoudre. En second lieu, lorsque l'ensemble des calculs démontre que le nombre essayé n'est pas premier, peut-on arriver facilement, par la connaissance de la série des résidus calculés, à la décomposition du nombre que l'on avait supposé premier? Ces résidus forment, comme nous l'avons dit, un fragment d'un *Canon Arithmeticus généralisé* que l'on peut comparer aux tables des logs, des sin. et des cos., ainsi que l'on compare le *Canon Arithmétique* lui-même aux tables de logs des nombres. C'est là un second problème à résoudre. »

Et Éd. Lucas écrivait encore (*loc. cit.*, p. 308) : « Lorsque le nombre essayé n'est pas premier, nous avons vu qu'on ne trouvera aucun résidu nul. Soit, par exemple, le nombre

$$p = 2^{11} - 1 = 2047;$$

les résidus que nous considérons sont, dans ce cas,

$$1,\ 3,\ 7,\ 47,\ \mathbf{160},\ 1034,\ 620,\ -438,\ -576,\ \mathbf{160}.$$

Je dirai simplement ici que, si l'on a une série modulaire

$$a \ldots b \ldots y\mathrm{N} \ldots d \ldots e \ldots x\mathrm{N} \qquad (\mathrm{mod\ P}),$$

N étant le nœud (**160** dans l'exemple précédent) et P le nombre à factoriser, on aura les facteurs par

$$\mathrm{P}h = x^2 - y^2.$$

J'ai utilisé les lois de Lucas avec

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2,$$

et beaucoup d'autres lois aussi, avec diverses valeurs pour u_0. On arrive, pour un nombre donné P, à répartir tous les nombres au plus égaux à $\mathrm{P} - 1$ en k arbres modulaires contenant certains nœuds, tous les autres nombres étant différents. La loi de factorisation est toujours la même, et on peut l'étendre partiellement à $a, b, \ldots, d, e$.

Cette méthode donne d'ailleurs de très intéressantes applications et des théorèmes nouveaux. Je vais en citer *quelques-uns :*

1° Soit à factoriser P. Il suffit de trouver la plus petite valeur entière de y telle que

$$\mathrm{P}y + 1 = x^2.$$

S'il n'y a pas de valeur $y \leqslant \mathrm{P} - 3$, *le nombre* P *est premier; s'il y a une valeur, le nombre est factorisé.*

2° Le procédé se ramène à la résolution en nombres minima de

$$4\alpha\beta\mathrm{P} = (\alpha x + \beta y)^2 - (\alpha x - \beta y)^2 = \mathrm{A}^2 - a^2.$$

3° J'ai trouvé des factorisations générales de certaines formes. Ainsi :

$$(2^{4n+2}+1)(2^{2n}+1) = (2^{3n+1}+2^n)^2+1,$$

ce qui donne

$$2^{4n+2}+1 = (2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)$$

(résultats d'Euler-Sophie-Germain Aurifeuille).

4° J'ai d'innombrables séries récurrentes ne donnant que des nombres décomposés à simple lecture et se ramenant, d'après un travail de M. P. Poulet, aux produits terme à terme de deux autres séries du n^e ordre.

JEUX SCIENTIFIQUES INÉDITS A. G.

LES NOMBRES ENTIERS

On connaît d'innombrables procédés pour deviner un nombre pensé, à l'aide d'un certain nombre d'opérations. Je n'en parlerai pas.

Quelques rares auteurs (Bachet, Édouard Lucas, W. Rouse-Ball, Ahrens) ont trouvé certains résultats, à l'aide de tableaux, en utilisant des *bases de numération*.

Mais au lieu d'écrire, comme eux, la liste des nombres envisagés, pour former le tableau désiré, dans une base de numération, puis de les répartir suivant certaines lois sur divers cartons, j'ai établi un schéma général à une variable, que l'on se donne à volonté, et il n'y a plus qu'à écrire la solution sans aucune peine.

J'expose ce modèle, ainsi que divers exemples simples comme le problème X de Bachet : *Inscrire les cent premiers nombres sur différents cartons de manière que, connaissant les cartons où se trouve un nombre, on puisse deviner ce nombre immédiatement.* (Cf. *Interm. des Math.*, 1916, p. 176-8.)

J'ai utilisé, d'autre part, les *combinaisons de p nombres n à n* (Exemples de démonstration, modèle pour $p = 8$, $n = 3$). Soit un carton T, que j'appelle Table de Base, et où j'inscris dans l'ordre naturel tous les nombres à utiliser : sachant, d'autre part, qu'un carton H doit laisser *voir*, en l'appliquant sur T, une liste connue de certains nombres, il suffit de perforer les cases correspondantes.

J'ai la méthode générale permettant de résoudre les théorèmes analogues au suivant :

« *Avec une simple Table de Base de 36 nombres, on pourrait donner à chaque habitant de la Terre, à chaque seconde de son existence, plusieurs milliards de jeux différents composés de neuf Tables de huit nombres et tels que la juxtaposition de deux Tables perforées fournit sans calcul, à simple lecture, un nombre pensé quelconque inférieur à 36, sans épuiser toutes les solutions de cette question élémentaire.*

J'ai aussi appliqué mes méthodes à des listes de mots français, à lettres ou syllabes permutables (métagrammes) et j'ai obtenu, parmi cinquante autres, le *jeu de Paille-Maille.*

L'ensemble de mes procédés, démonstrations, généralisations, exemples... comporte la matière d'un fort volume inédit, avec nombreuses figures.

Ces jeux simples, à la portée des parents ou des jeunes élèves, s'établissent sur des feuilles de papier ou de carton, très facilement : ils excitent l'émulation et attirent vers la découverte de l'inconnu.

MACHINES A CONGRUENCES A. GÉRARDIN

THÉORIE ET PRATIQUE

Résultats acquis depuis 1912.

La méthode exposée p. 613-615 donne donc une étude analogue à celle de

$$(1)\quad ax^2+bx+c=y^2, \qquad (2)\quad z^2-at^2=d, \qquad (3)\quad \lambda P+1=w^2$$

par mes procédés mécaniques en usage depuis mars 1912.

J'en ai donné le détail théorique et pratique dans mes communications écrites et verbales des Congrès français, international et anglais dès 1912, et je rappelle simplement le procédé que j'utilise depuis 1906. Supposons (1). Utilisant une liste des R. Q. des plus petits nombres premiers, on établit facilement le tableau des valeurs possibles de x pour chaque module successif. Je représente un R. Q. par une case blanche ou perforée, et un N. R. Q. par une case noire ou pleine. J'obtiens ainsi p bandes et la solution m'est donnée (lorsque toutes les conditions sont remplies) par une colonne entièrement blanche ou perforée. Mes machines (dont l'une donne la suite illimitée des nombres premiers) travaillent à raison de deux cents colonnes par seconde. De très nombreuses factorisations de nombres de forme spéciale x^4+1 par exemple, ont été obtenues; six mille équations

$$x^3 \pm y^2 = \pm a, \quad |a|<2000, \quad y\leqslant 12000, \quad \text{résolues, etc.}$$

Exemple :

$$1025 = 32^2+1^3 = 31^2+4^3 = 30^2+5^3 = 5^2+10^3 = 33^2-4^3 = 45^2-10^3$$
$$= 95^2-20^3 = 255^2-40^3 = 355^2-50^3 = 513^2-64^3 = 1930^2-155^3 = 2139^2-166^3$$
$$= 9419^2-446^3.$$

(Je montre à la Section le cliché entre 0 et 25, donnant trois solutions et des généralisations.)

Les résultats mécaniques, d'ailleurs toujours étudiés « en série », ont parfois montré d'intéressantes généralisations.

Comme je l'écrivais déjà en 1913, certaines équations s'étudient même par le calcul mental; j'en citerai une inédite :

$$(4M^2-2)x^2+x+(R^2+2MR)=y^2$$

admettant par exemple comme solution *initiale* $x_0=\frac{1}{2}$ et comme solutions entières, trouvées par ma méthode universelle,

$$x=-2MR,\ \ldots\ -(128M^5R-64M^3R-4M^2+6RM)\ \ldots.$$

Ainsi

$$14x^2+x+5=y^2$$

admet la solution

$$x=-3580,\qquad y=13395.$$

La solution de $x^2-Ay^2=1$ intervient dès que l'on a une solution d'un problème pour en trouver d'autres, à l'aide des formules classiques. Mais on ne connaît à ce jour que les Tables de Legendre jusqu'à 1003; Bickmore, *Brit. Assoc.*, 1893, de 1000 à 1500; Whitford, de 1500 à 1700. Ce dernier auteur a publié en 1912 la liste de trois cents auteurs ayant étudié cette question, presque tous à l'aide des fractions continues.

J'ai une méthode extrêmement simple, utilisant encore mes machines, et qui m'a déjà donné quelques centaines de solutions inédites. Ce travail, *encore en série*, permet, avec des auxiliaires très petites, d'avoir parfois pour x et y des nombres immenses.

Exemple. — Pour

$$x^2-1358y^2=+1,$$

Bickmore a donné :

$$1358\quad 36;\quad 1\quad 5\quad 1\quad 2\quad 2\quad (36)$$
$$62\quad 11\quad 47\quad 22\quad 31\quad (2).$$

Il serait intéressant de savoir le temps employé à ce calcul; mon auxiliaire égale *une unité* : on trouve

$$x = 2\ 999\ 823, \qquad y = 81\ 404.$$

Voici quelques brèves notes qui expliqueront ma méthode :

On sait passer de

$$X^2 - AY^2 = 2 \quad (4)$$

à l'équation $x^2 - Ay^2 = +1$: A, Y et $X^2 - 2$ sont de même forme. Je pose

$$A = a^2 - 2b^2, \qquad |\gamma| = \alpha^2 - 2\beta^2, \qquad X^2 - 2 = (a^2 - 2b^2)(\alpha^2 - 2\beta^2)^2$$

d'où par exemple

$$X = a(\alpha^2 + 2\beta^2) - 4\alpha\beta b, \qquad b(\alpha^2 + 2\beta^2) - 2\alpha\beta a = \pm 1$$

qui conduit au système

$$(b\alpha - a\beta)^2 - A\beta^2 = \pm b, \qquad (2b\beta - a\alpha)^2 - A\alpha^2 = \pm 2b,$$

« équations simultanées ».

J'ai trouvé pour A, a, b, α, β, des « séries d'identités » dont voici un exemple :

$$A = 49z^2 \pm 20z + 2, \qquad a = 11z \pm 2, \qquad b = 6z \pm 1,$$
$$\alpha = 3, \qquad \beta = 1, \qquad X = 49z \pm 10, \qquad Y = 7,$$
$$x = (49z \pm 9)(49z \pm 11), \qquad y = 343z \pm 70.$$

Ainsi

$$A = 2263, \qquad z = 7 \text{ (avec le signe } -),$$
$$X = 333, \qquad Y = 7, \qquad x = 110\,888, \qquad y = 2\,331.$$

J'ai aussi des résultats intéressants et généraux pour les équations

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm D,$$

et je publirai des tables pour A inférieur à 3000, en vérifiant d'abord les calculs de nos devanciers.

On parvient ainsi à étudier facilement la factorisation de nombres de trente ou quarante chiffres, tandis que les tables éditées à ce jour (Lehmer) donnent les nombres premiers jusqu'à 10.017.321 (Carnegie, 1909).

BIBLIOGRAPHIE

Sphinx-Œdipe, 1912, pp. 24, 31, 37, 47, 61, 111, 188; 1913, pp. 13, 34, 36, 94, 119, 147, 158; 1914, pp. 5, 23, 30, 34, 48, 60, 79; 1915, pp. 53, 65, 83; 1916, pp. 4, 22, 39, 55, 71, 81; 1917, pp. 1, 8, 17; 1919, p. 159; 1920, p. 94, etc.....

Exemples tels que :

$$404^4 + 1 = 26\ 639\ 462\ 657 = 53\ 401 \times 498\ 857.$$

Table fondamentale du million, 23 déc. 1913; Mémoire triple de Malo, 1912-13; Rapport Dupeux, Académie de Stanislas, 1914; Prix Gaussail, Académie de Toulouse, 1914; *Wiskundig Tijdschrift* et *Mathematical Gazette*, 1913; Sociétés savantes : Grenoble, 1912; Strasbourg, 1920; A. F. A. S. : Nimes, 1912; Tunis, 1913; Le Hâvre, 1914; Strasbourg, 1920; *Dict. des Contemp.*, 1914; Congrès de Cambridge et Congrès de Dundee, 1912 (problème d'Hermite); Corresp. et Chroniques de l'*Ens. Math.*, 1912, 13, 17, 20; *Interm. des Math.*, 1917 et *passim*, etc...; Utilité des *Quadratic Partitions* du Lt-Col. Allan Cunningham de Londres.

VINGT-DEUX PROPOSITIONS DE FERMAT

PAR H. BROCARD

(BAR-LE-DUC)

Dans le seul volume publié de la *Théorie des Nombres* d'Édouard Lucas (1891), on trouve le passage suivant :

« Mais après toutes ces propositions de Fermat que l'on considère comme les dernières, il y en a d'autres encore. Nous publierons à la suite de cet ouvrage, d'après les extraits d'une correspondance et de manuscrits inédits, les énoncés et le commentaire de vingt-deux propositions aussi difficiles, aussi inaccessibles. »

M. L. Aubry qui nous transcrit ce passage, ajoute : « En faisant allusion aux extraits d'une *correspondance*, Lucas n'envisageait probablement pas celle de Fermat, mais plutôt celle d'un contemporain ou même commentateur non contemporain, qui en écrivant à différents correspondants a pu signaler des propositions venant de Fermat. »

En tout cas il semble hors de doute qu'elle existe et qu'elle n'a pas été rencontrée ou remarquée des chercheurs. Il y aurait un intérêt énorme à la retrouver ou à la faire connaître, car elle se trouve peut-être dans une de nos grandes bibliothèques.

Nous avons pensé à faire un pressant appel en vue de provoquer des recherches systématiques destinées à éclairer l'énigme de ces vingt-deux propositions.

Si on ne les a pas retrouvées dans les papiers de Lucas, c'est probablement parce qu'il les aura enveloppées d'un titre abréviatif connu de lui seul et qui n'aura pu retenir l'attention.

M. A. Gérardin n'a rien retrouvé, concernant ces vingt-deux propositions, dans ce qui reste des archives d'Édouard Lucas qui lui ont été remises par C.-A. Laisant et Delannoy.

SUR LA RÉFORME DU CALENDRIER ET LE "CHRONOS"

Par M. Paul DELAPORTE

(PARIS)

M. Paul Delaporte expose le système mathématique de division du Temps qu'il propose, non pas pour le substituer *de plano* de façon exclusive aux anciennes règles divisionnaires mais, au moins provisoirement, comme un auxiliaire scientifique et économique du Calendrier.

Ce système consiste à partager le Temps en *septaines*, *quatorzaines* et *vingt-huitaines* ou périodes hebdomadaires indépendantes, mais d'emploi parallèle à celui de la semaine.

Il désigne ce système de division sous la dénomination de « Chronos » et donne à l'année constante de 364 jours et de périodes isochrones, qu'il crée, le nom d' « Année économique ». Des jours complémentaires ramènent la concordance avec l'année civile.

M. Paul Delaporte décrit ensuite la « Règle à calculer le Temps » établie par lui d'après le système de division du « Chronos ». Cette règle permet de connaître, par simple lecture, le nombre de jours qui séparent des dates différentes; de trouver le jour correspondant à une date donnée et vice versa, et de mesurer de façon rationnelle, ce que ne permet pas de faire le Calendrier, toutes les périodes annuelles d'origine et de durée quelconques.

SUR LES NOMBRES TRANSFINIS

Par L. GUSTAVE DU PASQUIER

(NEUCHATEL, SUISSE).

[1] En voyant quelles opinions divergentes la théorie des nombres transfinis a fait surgir, on peut espérer élucider la nature de ces êtres mathématiques en les subsumant, avec les nombres réels, sous un même concept plus général, celui de *nombres hypercomplexes*. Envisageons, en premier lieu, un nombre complexe général

$$\alpha \equiv (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n)$$

où je suppose les n coordonnées a_h rationnelles. Les deux parenthèses symbolisent l'acte psychique qui, reliant les coordonnées entre elles, fait qu'elles constituent un seul et même être mathématique. Pour faire de ces complexes à n coordonnées des nombres, il faut et il suffit qu'on les soumette au calcul. On le fait en posant trois définitions primordiales, celle de l'égalité de deux complexes et celles de deux opérations ou procédés indiquant comment, de deux complexes donnés α et β, on déduit un troisième complexe γ. Les divers systèmes possibles de nombres complexes à n coordonnées rationnelles ne diffèrent que par l'une ou l'autre de ces trois définitions primordiales.

Faisons un pas de plus et supposons illimité le nombre des coordonnées. On obtient

$$a \equiv (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots),$$

objet que j'appellerai *un nombre hypercomplexe*, ou plus brièvement *un hypercomplexe*.

Si nous supposons que les a_h forment une suite de nombres entiers positifs à croissance monotone, du moins à partir d'un certain indice, nous avons affaire à un *nombre transfini ordinal*. Les transfinis ordinaux apparaissent bien ainsi comme des nombres hypercomplexes soumis au calcul.

Envisageons, en second lieu, une suite illimitée de nombres rationnels d'ailleurs quelconques :

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots \textit{ ad infinitum.}$$

Concevons de nouveau que, dans cet ordre, ils forment un seul et même être mathématique, un hypercomplexe que j'écris à l'aide des parenthèses symboliques

$$r \equiv (r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots).$$

Si nous supposons la suite des r_λ convergente, elle aura une limite u. Méray, Cantor, Weierstrass, disent que cette suite convergente *définit* un nombre réel qui est précisément la limite u. Je dirai, ici, que ce nombre réel u est constitué par la suite illimitée elle-même, que les termes de la suite sont les coordonnées de u. D'après cette conception, tout nombre réel a donc une infinité de coordonnées, c'est un nombre hypercomplexe soumis au calcul. C'est de ce point de vue qu'on peut essayer de comparer les nombres réels (hypercomplexes réels) et les nombres transfinis ordinaux (hypercomplexes transfinis).

[**2**] Examinons la définition de l'égalité. Si

$$\begin{cases} u \equiv (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots), \\ v \equiv (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n, \ldots\ldots) \end{cases}$$

désignent deux nombres hypercomplexes réels, on les dit *égaux*, si le nombre hypercomplexe réel

$$(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots\ldots, u_n - v_n, \ldots\ldots)$$

a des coordonnées qui deviennent infiniment petites. Peu importe que u et v aient les mêmes coordonnées ou non, pourvu qu'à partir d'un indice fini n, et quelque petit que l'on choisisse $\varepsilon > 0$, on ait toujours

$$|u_{n+p} - v_{n+p}| < \varepsilon,$$

quelle que soit la loi de variation relative imposée aux indices u et $p > 0$. Si l'on fait rentrer dans une même classe tous les hypercomplexes réels égaux entre eux, l'ensemble ainsi constitué n'est plus dénombrable et a par conséquent la puissance $\mathfrak{r}$ du continu.

Deux nombres hypercomplexes transfinis, α et β, sont dits *égaux*, s'ils présen-

tent le même type ordinal, d'après la terminologie de George Cantor (1). En adoptant cette définition de l'égalité, on constate que toutes les suites fondamentales qui sont équivalentes représentent le même hypercomplexe transfini. En les faisant rentrer dans une même classe, on voit que l'ensemble de tous les nombres hypercomplexes transfinis « égaux entre eux » a la puissance du continu. On le vérifie déjà sur ω, le plus petit des nombres transfinis. Toute suite illimitée de nombres entiers a_n qui, à partir d'un indice fini, choisi d'ailleurs aussi grand que l'on voudra, vont en augmentant constamment, et parmi lesquels aucun n'est le dernier, est équivalente à la suite des nombres naturels et constitue par conséquent un hypercomplexe transfini « égal » à ω. On pourrait aussi définir ω à l'aide de toute série à termes constants positifs simplement divergente, en formant la suite

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_n, \ldots\ldots$$

où s_n représente la somme des n premiers termes de la série.

[3] Quant à l'addition, dans le cas des hypercomplexes réels où elle se définit simplement par l'addition des coordonnées correspondantes, elle est commutative, associative, et admet une seule opération inverse, la soustraction, toujours possible et univoque. L'addition est dans ce cas purement numérique et n'éveille aucune idée de situation spatiale; la somme $u + v$ dépend uniquement de la valeur numérique des coordonnées de u et de v.

L'inverse a lieu dans l'addition des hypercomplexes transfinis. On définit la somme $\alpha + \beta$ par l'hypercomplexe que l'on obtient en écrivant les coordonnées de β à la suite des coordonnées de α. Vu la définition de l'égalité, cette somme est donc totalement indépendante de la valeur numérique des coordonnées de α et de β, leur type ordinal entre seul en ligne de compte. La notion de situation spatiale est mise en œuvre. Il suit de là que l'addition des hypercomplexes transfinis n'est pas commutative. Si n représente un nombre naturel quelconque, on a $n + \omega = \omega$, tandis que $\omega + n > \omega$. Si l'on veut introduire la soustraction comme opération inverse de l'addition, il faut donc distinguer entre une « soustraction à droite » et une « soustraction à gauche. » Remarques analogues à propos de la multiplication, puisque $n.\omega = \omega$, tandis que $\omega.n > \omega$. Seules, les lois associatives restent valables, ainsi que la loi distributive pour le cas où le facteur à droite est une somme.

Malgré cette différence fondamentale, les hypercomplexes transfinis ont ceci de

(1) G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig, 1883. Voir aussi *Mathematische Annalen*, t. 49 (1897), p. 207; *ibid.*, t. 21 (1883), p. 545.

commun avec les hypercomplexes réels qu'il est impossible de leur donner une forme canonique

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots\ldots$$

au moyen d'*unités relatives*, c'est-à-dire de complexes spéciaux $l_1, l_2, l_3, \ldots$ formant une base, tandis que cette possibilité existe pour les systèmes ordinaires de nombres complexes généraux.

[**4**] Dans les deux exemples traités de nombres hypercomplexes, l'ensemble de tous les nombres « égaux entre eux » a la même puissance. Comme les nombres réels, par le postulat de Méray-Cantor, peuvent servir à représenter, et même à définir, le continu linéaire, il s'ensuit que si l'on réussissait à établir une correspondance univoque entre les deux catégories d'hypercomplexes en question, en utilisant judicieusement le nombre infini des coordonnées, on en déduirait une solution du problème célèbre : le continu peut-il être bien ordonné? La difficulté d'arriver au but par cette voie ne gît pas seulement dans le fait que les coordonnées sont dans le premier cas des nombres entiers, dans le second des nombres rationnels. Elle provient en plus grande partie de ce que, dans les hypercomplexes réels, on se borne aux suites qui ont le type ordinal ω. La définition classique de la convergence implique même ce fait. Par exemple, le nombre hypercomplexe

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \ldots, \frac{2n-3}{3n}, \ldots\right)$$

dont les coordonnées forment un ensemble dénombrable du type $\omega.3$ et admettent les points de condensation 1, 0 et $\frac{2}{3}$, ne peut pas être utilisé tel quel pour définir un nombre réel. Si on voulait opérer sur lui conformément aux règles, il faudrait préalablement lui substituer un hypercomplexe du type ordinal ω, par exemple

$$\left(1; 0; \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \ldots\ldots, \frac{2n-3}{3n}, \ldots\ldots\right),$$

en ne prenant en considération que *la terminaison* de l'hypercomplexe, ou bien

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots\ldots, \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots\ldots\right),$$

en ne faisant entrer en ligne de compte que la limite supérieure. Il en sera toujours ainsi quand une ou plusieurs coordonnées seront séparées de la première par une

infinité d'autres. C'est en cela que gît la principale difficulté, quand on essaie de réaliser une correspondance entre hypercomplexes transfinis et réels.

Pour la surmonter, il faut définir autrement l'égalité des hypercomplexes. Par exemple, deux hypercomplexes seront dits égaux si, à partir d'un indice déterminé n, d'ailleurs aussi grand que l'on voudra, ils ont les mêmes coordonnées. Ils seront réputés inégaux, si cette identité des coordonnées correspondantes ne finit pas par être réalisée à partir d'un indice assignable. Quant à la question : Peut-on, en modifiant convenablement la définition de l'égalité, établir une correspondance univoque avec les hypercomplexes transfinis et arriver par cette voie à faire du continu un ensemble bien ordonné? elle est encore ouverte pour le moment. Il faudra scruter le domaine presque inexploré des divers systèmes possibles de nombres hypercomplexes. En particulier, on est amené à étudier les systèmes avec *une transfinité* de coordonnées, en définissant convenablement l'égalité de ces objets et en adoptant pour l'addition une définition analogue à celle des hypercomplexes réels. Ces systèmes-là, en effet, formeront en quelque sorte un pont entre nombres réels et nombres ordinaux transfinis.

[**5**] Les considérations précédentes mettent en lumière quelques points souvent discutés. Le premier concerne la nature essentiellement symbolique des nombres réels. En les envisageant comme nombres hypercomplexes, ce qui n'est qu'une autre formulation du point de vue de Méray-Cantor, on voit que rien, dans la définition d'un nombre réel, ne permet de se le représenter comme correspondant parfaitement à une grandeur mesurable. Les hypercomplexes réels forment un vaste système de symboles construit *à priori*, et les calculs effectués sur eux n'ont pour objet que ces symboles eux-mêmes. Il faut donc un postulat pour les relier aux vecteurs, ou aux points d'une droite.

Le point de vue ici adopté permet de jeter encore un petit rayon de lumière dans le domaine du transfini. La notion de nombre implique deux espèces de relations très différentes et qui trouvent leur expression verbale dans les termes de nombre cardinal et nombre ordinal. Pour les ensembles finis, on peut ignorer cette différence, pourtant fondamentale des points de vue philosophique et psychologique. Cela tient à ce que, du point de vue mathématique, nombres ordinaux finis et nombres cardinaux finis obéissent aux mêmes lois de calcul. Mais ce n'est plus le cas pour les ensembles infinis. La différence psychologique et philosophique se manifeste aussi mathématiquement; nombres ordinaux et cardinaux transfinis demandent à être traités séparément. Cela s'explique par le fait que les nombres ordinaux ont, du point de vue philosophique, un degré de généralité de moins que les cardinaux. Ces derniers sont basés sur les trois notions de : 1) élément; 2) ensemble; 3) correspondance univoque, ou équivalence ou puissance, alors que les ordinaux impliquent en outre 4) une loi de succession. Cette spécification plus avancée est sans doute

aussi la raison pourquoi l'étude des ordinaux transfinis est plus féconde que celle des nombres cardinaux. Le point de vue ici adopté fait ressortir avec force la différence de nature entre ces deux catégories d'êtres transfinis. Tandis que les nombres transfinis ordinaux peuvent, comme les nombres réels, être envisagés et traités comme des hypercomplexes, il est impossible de subsumer sous ce même point de vue les nombres transfinis cardinaux. Ceux-ci constituent une nouvelle espèce d'êtres mathématiques, et les symboles qui les représentent obéissent à des lois de calcul entièrement différentes. Certains philosophes n'ont pas suffisamment tenu compte de cette différence. Leurs raisonnements sont parfois obscurs et leurs conclusions souvent confuses, parce qu'il y manque une séparation franche et nette entre transfinis ordinaux et transfinis cardinaux.

[**6**] On peut établir une différence de principe entre les nombres transfinis ordinaux de la seconde classe et ceux des classes supérieures. Cela tient à ce que l'on peut arriver aux nombres transfinis de la seconde classe en ne faisant appel qu'à la suite illimitée des nombres naturels; il suffit d'avoir la notion nette de l'infini énumérable et d'appliquer le second principe de Cantor. Mais pour définir les ordinaux transfinis des classes supérieures à la seconde on est obligé : 1) d'amalgamer les deux notions si radicalement différentes de nombre ordinal et de nombre cardinal; 2) de faire intervenir des ensembles d'une puissance supérieure à la première. Or, notre esprit ne conçoit pas nettement de telles puissances. Tant qu'il s'agit de l'infini énumérable, notre pensée est aidée par l'imagination qui se figure nettement la suite illimitée des nombres naturels par des points équidistants alignés sur une droite indéfinie. Grâce à cette image, tout le monde se figure la même chose lorsqu'il entend ou lit les mots : « Et ainsi de suite, indéfiniment ». Mais dès qu'on arrive au transfini d'une puissance supérieure à la première, l'intuition spatiale nette et univoque fait défaut, l'imagination ne peut plus seconder la pensée et celle-ci est obligée de s'en tenir exclusivement à des mots ou à des symboles qui ne sont pas toujours très clairs. Cette raison psychologique profonde, jointe à celle d'ordre philosophique sus-mentionnée, fait que les nombres ordinaux transfinis des classes supérieures sont des êtres problématiques sur qui nous avons encore de la peine à raisonner, entités que de nombreux mathématiciens refusent d'admettre comme objets de la pensée mathématique, les reléguant dans le domaine de la philosophie, ou de la métaphysique, ou les réservant pour des générations futures qui seront capables de concevoir le transfini aussi nettement que nous concevons la suite illimitée des nombres naturels.

Quoiqu'il en soit, nous n'avons pas le droit de les exclure *a priori* du domaine mathématique. La mathématique doit rester une science où règne la liberté des conceptions. Le seul critère que l'on doive invoquer pour exclure du domaine mathématique des notions nouvelles est le principe de la contradiction.

Si l'on n'admet pas le théorème de Zermelo qui dit que tout ensemble peut être bien ordonné, et ce théorème n'est pas universellement admis aujourd'hui, l'arithmétique des nombres *cardinaux* transfinis se réduit à peu de chose. En fait de résultats définitivement acquis, il faudrait s'en tenir à deux nombres cardinaux transfinis : $\mathfrak{a}$, puissance de l'infini énumérable, et $\mathfrak{r}$, puissance de l'infini non dénombrable, reliés entre eux et avec les nombres cardinaux naturels par un nombre fini de relations. C'est seulement en admettant le théorème de Zermelo qu'on peut démontrer que la puissance de tout ensemble est équivalente à un aleph et qu'on arrive à la suite illimitée et bien ordonnée des alephs, avec leurs curieuses règles de calcul, sur lesquels on a essayé d'ériger une arithmétique.

Dans le champ des nombres transfinis cardinaux, il me semble que les progrès ultérieurs doivent être attendus d'une dissection de la notion classique exprimée par les mots « de même puissance », notion qui s'est trouvée bien moins féconde qu'on pouvait s'y attendre à première vue. Je pense que nous verrons un phénomène analogue à celui qui s'est produit après l'introduction des séries infinies convergentes comme généralisation des progressions géométriques infinies décroissantes. La notion générale de série convergente ayant amené des contradictions (comme l'ont fait les ensembles « de même puissance »), le progrès fut réalisé par des distinctions plus fines et par des subdivisions. On découvrit qu'il faut distinguer suivant qu'une série convergente est absolument convergente ou non, uniformément convergente ou non, convergente pour toute valeur finie de la variable, ou non; si bien qu'actuellement, l'analyse mathématique distingue huit catégories de séries convergentes et une infinité de catégories de séries divergentes, suivant qu'elles sont « sommables du premier ordre », ou « sommables du deuxième ordre », etc. Dans la théorie des nombres transfinis cardinaux, les progrès ne seront peut-être pas définitifs avant qu'on ne soit arrivé à scinder, ou à subdiviser en plusieurs catégories, la notion générale d'*équipuissance*.

[**7**] Je termine en résumant quelques conclusions auxquelles on arrive quand on envisage les nombres transfinis comme des hypercomplexes. Ce point de vue me semble mettre en lumière ce qui suit :

1) La séparation très nette entre nombres transfinis ordinaux et nombres transfinis cardinaux; les premiers sont susceptibles d'être envisagés et traités comme des nombres hypercomplexes, les seconds ne le sont pas.

2) L'existence de nombres hypercomplexes à *une transfinité* de coordonnées, c'est-à-dire dont les coordonnées forment un ensemble d'un type ordinal différent de ω.

3) L'importance qu'il y aurait à étudier, du point de vue mathématique, les différents systèmes possibles de nombres hypercomplexes, à une infinité ou à une trans-

finité de coordonnées. Peut-être arriverait-on, par là, à se rapprocher de la solution du problème de bien ordonner le continu.

4) Les nombres ordinaux transfinis de la deuxième classe doivent être considérés comme définitivement acquis au domaine mathématique. Il n'en est pas de même des nombres ordinaux transfinis des classes supérieures.

5) Pour les nombres transfinis cardinaux, les progrès ultérieurs doivent être attendus d'une dissection de la notion classique d'*équipuissance*, c'est-à-dire d'une distinction plus fine à établir entre les ensembles ayant la même puissance.

PRATIQUE COURANTE

DE LA

MÉTHODE NOMOGRAPHIQUE DES POINTS ALIGNÉS

A PROPOS DE SES APPLICATIONS DE GUERRE

PAR M. D'OCAGNE

(PARIS)

[**1**] Les applications très nombreuses et très variées qui ont été faites de la méthode nomographique des points alignés aux diverses techniques de guerre ont sensiblement contribué à confirmer l'utilité pratique et la commodité de cette méthode (1).

Dans le cas des équations à trois variables, cette commodité, outre une plus grande facilité de construction, tient surtout à une plus grande netteté de lecture comportant un plus haut degré de précision dans les interpolations à vue (voir les *fig.* 5 et 5 *bis*, pages 22 et 23 de la brochure citée). Mais l'avantage le plus marqué du principe de l'alignement résulte bien certainement de la possibilité de constituer des tables graphiques *à plus de deux entrées* pour des relations non susceptibles d'être remplacées, moyennant l'introduction de certaines variables auxiliaires, par une suite de relations ne comportant pas chacune plus de deux entrées, ce qu'exigent tous les procédés dérivés du principe des lignes concourantes.

Pour rendre cette observation plus claire par un exemple particulièrement typique, nous choisirons celui de la correction de la portée du tir (entraînant celle de l'angle de tir) pour une pièce, un obus et une charge donnés (voir la *fig.* 6, page 28 de la brochure citée). Pour *chaque valeur de la portée*, la correction en portée résul-

(1) La plupart de ces applications ont été étudiées à la *Section de nomographie* que l'auteur de la présente communication, alors mobilisé comme lieutenant-colonel, a été chargé d'organiser et de diriger (après avoir servi au front comme chef du groupe de canevas de tir d'une armée). Un exposé succinct des principes qui ont été appliqués de façon courante à cette Section, illustré de divers exemples empruntés à l'Artillerie et à l'Aviation, vient d'être publié par l'auteur, à la librairie Gauthier-Villars, sous le titre de *Principes usuels de Nomographie*.

tant d'un certain poids du mc. d'air (fonction de la température et de la pression atmosphérique) et de la composante du vent suivant l'axe de la pièce, peut être fournie par un abaque cartésien sur lequel les lignes cotées correspondant aux diverses valeurs de cette correction sont des droites parallèles entre elles.

Il faudrait donc, pour une pièce, un obus et une charge donnés, une collection d'autant d'abaques que l'on aurait à considérer de valeurs distinctes de la portée, ce qui, outre l'encombrement qui en serait la suite, aurait l'inconvénient ou que l'on serait obligé de se reporter à un abaque à part pour avoir le poids du mc. d'air, ou que l'on devrait répéter celui-ci, sous forme d'échelle binaire, sur chacun des abaques répondant à une portée donnée, et encore cet autre, bien plus grave, qu'*il ne serait pas possible d'opérer d'interpolation à vue entre les valeurs adoptées pour la portée sur ces abaques,* valeurs variant, par exemple, de 100 en 100 mètres.

Pour une pièce dont la portée pratique varierait de 4.000 à 8.000 mètres, cela ferait notamment une collection de 41 abaques distincts, avec impossibilité de l'interpolation à vue pour la portée. Il n'est pas besoin d'insister sur l'absence de toute valeur pratique d'une telle solution.

Avec les points alignés, tous les nomogrammes partiels viennent se juxtaposer sur *une seule feuille* pour y déterminer un *réseau de points à deux cotes* (portée et correction de la portée) *au milieu duquel l'interpolation à vue, précédemment impossible, peut se faire avec toute la précision désirable.* De plus, l'accolement à ce réseau du nomogramme, également à points alignés, donnant le poids du mc. d'air, complète le graphique de façon à ramener toutes les déterminations correspondant au cas considéré à la lecture d'un nomogramme unique sur lequel il suffit de prendre successivement deux alignements, le premier faisant connaître le poids du mc. d'air en fonction de la température et de la pression, le second, la correction cherchée en fonction de ce poids, de la vitesse du vent et de la portée.

[**2**] En ce qui concerne la mise en œuvre même de la méthode, la pratique acquise à la Section de nomographie a confirmé l'intérêt qui s'attache, pour ce genre d'application, à l'emploi de ces coordonnées tangentielles spéciales désignées sous le nom de *coordonnées parallèles.*

Nous nous en tiendrons pour cela au cas de beaucoup le plus courant (auquel, pour cette raison, nous nous bornons également dans la brochure citée) où l'équation donnée entre les variables z_1, z_2, z_3 est de la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0$$

(f_i, ou g_i, ou h_i, représentant une fonction de la seule variable z_i).

Pour construire un abaque cartésien de cette équation, il suffit de faire corres-

pondre aux variables z_1 et z_2 les parallèles aux axes cartésiens, définies respectivement par

$$x = f_1, \qquad y = f_2,$$

ce qui donne, pour les droites cotées z_3, l'équation

$$g_3 x + h_3 y_1 + f_3 = 0.$$

Ceci montre que l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ g_3 & h_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour substituer à ce nomogramme à entrecroisement un nomogramme à alignement (figure corrélative de la précédente), il suffit de remarquer que le déterminant précédent exprime aussi l'alignement des points

$$x = -\frac{1}{f_1}, \qquad y = 0,$$

$$x = 0, \qquad y = -\frac{1}{f_2},$$

$$x = \frac{g_3}{f_3}, \qquad y = \frac{h_3}{f_3},$$

dont, en *coordonnées pluckériennes*, les équations tangentielles sont respectivement

$$u - f_1 = 0,$$
$$v - f_2 = 0,$$
$$g_3 u + h_3 v + f_3 = 0,$$

équations identiques à celles qui, en coordonnées cartésiennes, définissent le nomogramme à droites concourantes, ou abaque, correspondant.

Pourquoi, dès lors, en conservant ces trois mêmes équations, y regarder u et v comme des coordonnés tangentielles parallèles, au lieu de pluckériennes? Parce que, alors que, comme on vient de le voir, on a à porter, dans le cas des coordonnées pluckériennes, les échelles fonctionnelles de $-\frac{1}{f_1}$ et de $-\frac{1}{f_2}$ respectivement sur les axes Ox et Oy, ce sont, dans le cas des coordonnées parallèles, les échelles fonctionnelles de f_1 et f_2 qu'il suffit de porter respectivement sur les axes Au et Bv,

autrement dit les échelles des fonctions mêmes qui figureraient sur l'abaque cartésien, *au lieu des inverses de ces fonctions*, ce qui, dans l'immense majorité des cas, constitue un avantage très appréciable, les fonctions f_1 et f_2 étant généralement de celles dont on possède les étalons de graduation (métrique, logarithmique, sinusoïdale, tangentoïdale, etc.).

De plus, une fois ces échelles fonctionnelles portées sur Au et Bv, la construction de l'échelle (z_3) s'ensuit le plus souvent avec la plus grande facilité (voir le n° 13 de la brochure citée), en particulier grâce à cette remarque très simple, résultant de la théorie des coordonnées parallèles, à savoir que le point d'équation

$$au + bv + 1 = 0$$

n'est autre que le barycentre des masses a et b affectées respectivement aux points où toute droite passant par ce point coupe les axes parallèles Au et Bv. Si donc, à la valeur considérée pour z_3 on associe un couple quelconque de valeurs de z_1 et z_2 (convenablement choisi pour la simplicité du calcul) qui satisfasse à l'équation donnée, il suffit, sur la droite joignant les points cotés z_1 et z_2, pris dans les échelles fonctionnelles déjà construites de f_1 et f_2, de prendre le barycentre des masses $\frac{g_3}{f_3}$, appliquée au point z_1, et $\frac{h_3}{f_3}$, appliquée au point z_2, pour avoir le point z_3 cherché.

Cette remarque, combinée avec la théorie des projections d'échelles, telle qu'elle est donnée dans les divers ouvrages traitant des principes de la Nomographie (voir notamment le n° 11, p. 18, de la brochure ici citée), fournit, dans la plupart des cas, une construction très expéditive des nomogrammes rencontrés dans la pratique.

[3] Lorsque, pour passer du nomogramme à droites concourantes au nomogramme à points alignés on change les coordonnées cartésiennes en coordonnées pluckériennes, l'alignement obtenu sur le second nomogramme s'exprime en coordonnées ponctuelles, ainsi que nous l'avons plus haut par la condition

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ g_3 & h_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, le point dont l'équation en coordonnées parallèles est

$$au + bv + c = 0,$$

étant représenté, lorsqu'on le rapporte aux axes cartésiens liés à Au et Bv (origine O

au milieu de AB; Ox confondu avec OB; Oy parallèle à Au et Bv) par les coordonnées

$$x = \frac{b-a}{a+b}, \qquad y = \frac{-c}{a+b},$$

l'unité de longueur sur Ox étant prise égale à OB, on voit que si, dans la définition du nomogramme à alignement, on prend u et v pour des coordonnées parallèles, cet alignement s'exprime par

$$\begin{vmatrix} -1 & f_1 & 1 \\ 1 & f_2 & 1 \\ h_3 - g_3 & -f_3 & h_3 + g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En donnant la théorie générale de la transformation homographique des nomogrammes à alignement, nous avons fait remarquer que le passage du déterminant de l'un des nomogrammes à l'autre revient à la multiplication du premier par le déterminant de la transformation homographique particulière qui lie l'un à l'autre les deux nomogrammes.

Ce déterminant est ici le suivant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

C'est donc, au point de vue mathématique, à une multiplication par ce déterminant qu'équivaut la substitution des coordonnées parallèles aux coordonnées pluckériennes dans l'interprétation, en coordonnées tangentielles, des équations qui, en coordonnées ponctuelles, auraient conduit à un nomogramme à droites alignées.

THE FOURIER AND BESSEL FUNCTION CONTRASTED

By G. GREENHILL

(LONDON)

[**1**] In Chapter XXVI *Théorie de la chaleur*, 1822, Fourier introduces his function, which we denote after him by F, defined by

$$(A) \qquad F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{(\Pi k)^2},$$

and $F = F(\theta)$ is a solution of the differential equation (D. E.).

$$(1) \qquad \theta \frac{d^2F}{d\theta^2} + \frac{dF}{d\theta} + F = 0.$$

Writing

$$(2) \qquad F_n = F_n(\theta) = \left(-\frac{d}{d\theta}\right)^n F(\theta) = \sum \frac{(-\theta)^k}{\Pi(k+n)\Pi k},$$

as in § 9, then F_n is a solution of the D. E.

$$(3) \qquad \theta \frac{d^2F_n}{d\theta^2} + (n+1)\frac{dF_n}{d\theta} + F_n = 0.$$

Changing n into $-n$, and writing $F_{-n}(\theta)$ for the n-th integral of $F(\theta)$, the definition in (A) shows that

$$(4) \qquad F_{-n}(\theta) = \theta^n F_n(\theta).$$

Thence the D. E. 's

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^{2n}(\theta^n F_n) = F_n, \tag{5}$$

or with

$$y = \theta^n F_n,$$

$$\theta^n \frac{d^{2n} y}{d\theta^{2n}} = y, \tag{6}$$

having a solution

$$y = \theta^n F_n(\omega\theta), \qquad \omega^n = 1$$

(Lommel, *Math. Ann.*, II).

Also

$$\frac{d}{d\theta}\left(\theta^{n+1}\frac{dF_n}{d\theta}\right) + \theta^n F_n = 0, \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\theta^{n+2}\frac{d^2F_n}{d\theta^2}\right) - \theta^n F_n = 0, \tag{7}$$

and so on; equations required in whirling problems.

Two years later, in the *Transactions of the Berlin Academy*, 1824, Bessel introduced his function, now denoted by $J(x)$, and it proves that :

$$F(\theta) = J_0(2\sqrt{\theta}), \quad J_0(x) = F\left(\frac{1}{4}x^2\right) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots \tag{B}$$

the well known expansion.

The question I wish to submit to the Congress is to decide which of the two functions should prevail in mathematical analysis. In my opinion the Fourier function has great advantage of superiority in Applied Mathematics.

[**2**] By comparison with the Fourier function in (A) the exponential function is defined in a series by

$$\exp(-\theta) = e^{-\theta} = \sum \frac{(-\theta)^k}{\Pi k} \tag{C}$$

but there is the important distinction that $F(\theta) = 0$ has an infinite number of positive roots, whereas $\exp(-\theta)$ can only vanish for $\theta = \infty$.

These roots of the Fourier function can be derived immediately from the tabulated roots of the associated Bessel function.

The definition of F_n by differentiation of F_0 shows that F_n also has an infinite number of roots, and that the roots of F_n and F_{n+1} interlace, or alternate.

The exponential values of the sine and co-sine,

$$(1) \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \sum \frac{(-\theta^2)^k}{\Pi 2k},$$

$$(2) \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \sum \frac{\theta(-\theta^2)^k}{\Pi(2k+1)},$$

suggest the corresponding combinations of the Fourier function :

$$(3) \qquad \frac{1}{2}[F(i\theta) + F(-i\theta)] = \sum \frac{(-\theta^2)^k}{(\Pi 2k)^2} = 1 - \frac{\theta^2}{1^2.2^2} + \frac{\theta^4}{1^2.2^2.3^2.4^2} - \ldots.$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2i}[F(i\theta) - F(-i\theta)] = \sum \frac{\theta(-\theta^2)^k}{[\Pi(2k+1)]^2} = \theta - \frac{\theta^3}{1^2.2^2.3^2} + \frac{\theta^5}{1^2.2^2.3^2.4^2.5^2} - \ldots$$

and here are the equivalents of Kelvin's function written as ber $(2\sqrt{\theta})$ and bei $(2\sqrt{\theta})$; so that denoting by analogy the Fourier function in (3) and (4) by Fer (θ) and Fei (θ),

$$(5) \qquad \text{ber } x = 1 - \frac{x^4}{2^2.4^2} + \frac{x^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \ldots = \text{Fer}\left(\frac{1}{4}x^2\right),$$

$$(6) \qquad \text{bei } x = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{x^{10}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} - \ldots = \text{Fei}\left(\frac{1}{4}x^2\right).$$

A Table for ber x and bei x, Kelvin's abbreviations for Bessel real and imaginary, has been calculated by Professor A.-G. Webster and printed in the *Report of the British Association*, 1912.

The exponential function

$$y = e^{-2\theta} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

satisfies the D. E.

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0;$$

and then with

$$y_n = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n y$$

(8) $$\frac{d^2 y_n}{dx^2} + x\frac{dy_n}{dx} + (n+1)y_n = 0$$

equations analogous to (1), (3), § 1.

Again with

$$y_n = e^{-\frac{1}{2}x^2} z_n = e^{-\frac{1}{4}x^2} \mathrm{D},$$

(9) $$\frac{d^2 z_n}{dx^2} - x\frac{dz_n}{dx} + nz_n = 0$$

(10) $$\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{d^2\mathrm{D}}{dx^2} + \mathrm{I} = 0, \qquad \mathrm{I} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2,$$

the D. E. for D, the function of the parabolic cylinder.

[3] Later mathematicians have adopted the Bessel function in analysis, but I propose to point out here the advantage of the Fourier function in mathematical applications, as more natural for the purpose.

I hope to elicit an expression of opinion of the Congress, Historical and Paedagogical, of the rival merits of Fourier and Bessel, and to effect a rehabilitation of Fouriers's form in Applied Mathematics.

Bessel, as an astronomer, chose the variable he met first, and this would be e, the eccentricity of an elliptic orbit in planetary motion.

But in physical applications of a radiation from a centre or axis, it is more natural to make r^2 the variable, square of the distance r from the centre or axis, and then $4\pi r^2$ is the spherical surface, or πr^2 the circular area over which the flux takes place.

The advantage of the Fourier notation is manifest when the passage is investigated, in Lord Rayleigh's manner, of the tesserel harmonic $\mathrm{P}_n^p(\mu = \cos\theta)$ direct into the Fourier function F_p, as the order n is increased indefinitely.

In the representation of the harmonic near the pole, $\theta = 0$, on the surface of a sphere, as the radius a is enlarged to infinity, the passage is made through

(1) $$\frac{1}{2}(1-\mu) = \mathrm{hav}\,\theta = \sin^2\frac{1}{2}\theta = \frac{r^2}{4a^2} = \frac{m^2 r^2}{4n^2} = \frac{x}{n^2}, \qquad n^2 = m^2 a^2,$$

agreeing with the definition, in the limit $n \to \infty$,

$$(2) \qquad P_n^p(\mu) \to F_p(x) = F_p\left(\frac{1}{4}m^2r^2\right).$$

The successive Fourier functions are then derived by the differentiation of $F(x)$ with respect to x, as the successive tesseral harmonics $P_n^p(\mu)$ are derived by successive differentiation of $P_n(\mu)$ with respect to μ.

I have made a collection of applications in the *Philosophical Magazine*, November 1919, to show the advantage of Fourier's choice of variable over its square root, in the analogous Bessel function.

[**4**] In a posthumous Note by Clifford on the Bessel function, printed in his *Mathematical Papers*, 1878, page 346, a function is introduced which we shall denote after him by $C(x)$, defined by

$$(D) \qquad C(x) = \sum \frac{x^k}{(\Pi k)^2},$$

so that $C(x)$ is merely Fourier's $F(-x)$ and there is no need then to employ the C function, except for greater simplicity of sign.

A reference at the end of Clifford's *Note to Todhunter's book on the Functions of Lamé, Laplace, and Bessel*, 1875, shows that Clifford had the book before him. But it is curious he makes no reference to Chapter XXXI, where we find almost word for word an equivalent of the treatment in Fourier's *Théorie de la Chaleur*, and a pleasing contrast to Todhunter's usual arid style, mysterious until it is noticed to be a mere literal translation of the elegant French diction of Fourier.

The advantage of the Fourier notation to the Bessel function is manifest when we change to its differentiation and integration; a tiresome factor, makes its appearance with Bessel, some power of the variable x, and destroys the simplicity of the Law.

But this factor is absent when the Fourier form is employed and his variable, the square of the variable adopted by Bessel.

[**5**] Take for example the linear D. E. of the second order, in the form

$$(1) \qquad N\frac{d^2y}{dx^2} + 2P\frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad (\text{or R}),$$

where N, P, Q, R, are functions of x, and reduce it to a canonical form where P is absent by putting $y = uv$; then

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2u}{dx^2}v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2P\left(\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}\right) + Quv = 0.$$

and removing $\frac{du}{dx}$ by putting

$$(3) \qquad N\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \quad \frac{d\log v}{dx} + \frac{P}{N} = 0, \quad v \exp \int \frac{P}{N}\,dx = \text{a constant},$$

the canonical form is obtained

$$(4) \qquad \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} + I = 0$$

where I, called the differential invariant, is given by

$$(5) \qquad I = \frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{P}{N}\frac{dv}{vdx} + \frac{Q}{N} = -\frac{P^2}{N^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{P}{N}\right) + \frac{Q}{N}.$$

Thus for $I = kx^m$, any power of x, and

$$(6) \qquad x^2\frac{d^2u}{dx^2} + kx^{m+2}u = 0,$$

the D. E. leads at once to Fourier's form by a mere change of the independent variable to

$$(7) \qquad z = \frac{kx^{m+2}}{(m+2)^2},$$

and then

$$(8) \qquad x\frac{du}{dx} = (m+2)z\frac{du}{dz}, \quad x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} = (m+2)^2\left(z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz}\right),$$

and the D. E. (6) becomes

$$(9) \qquad z^2\frac{d^2u}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{m+2}\right)z\frac{du}{dz} + zu = 0.$$

Fourier's equation (3) § 1 for

$$u = F_n(z), \qquad n = -\frac{1}{m+2}.$$

The reduction is equally simple for another more general form of the D. E.

$$(10) \qquad \frac{d}{dx}\left(x^q \frac{du}{dx}\right) + kx^m u = 0, \quad \text{or } x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + qx\frac{du}{dx} + kx^{m-q+2}u = 0,$$

by a change to the new variable.

$$(11) \qquad z = \frac{kx^{m-q+2}}{(m-q+2)^2},$$

and then we obtain Fourier's equivalent form (3), § 1,

$$(12) \qquad z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{q-2}{m-q+2} + 1\right) z\frac{du}{dz} + zu = 0,$$

for

$$n = \frac{q-1}{m-q+2}, \qquad u = \mathrm{F}_n(z).$$

This is the D. E. required for the vertical stability of a wire, mast, tree, column, tower, chimney, pile of books, cornstalk, etc. Then there is the flagstaff in Kew Gardens, a tree pole of Douglas fir, 66 m. high, tapering from 84 to 30 cm.

[**6**] Thus, as in *Phil. Mag.*, November 1919, page 525, for a vertical cylindrical rod, the D. E. becomes

$$(1) \qquad ek^2 \frac{d^2p}{dx^2} + xp = 0, \qquad p = \frac{dy}{dx},$$

where k is the radius of gyration of the horizontal section across the plane of flexure, and e is the elastic length of the material, quotient of the modulus of elasticity divided by the density; and the solution is

$$(2) \qquad p = b\,\mathrm{F}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{x^3}{9ek^2}\right).$$

The smallest root of $\mathrm{F}_{-\frac{1}{3}} = 0$ is about 0.88, say $\frac{8}{9}$; this makes the critical height

$$(3) \qquad x = 2(ek^2)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}ed^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

for a circular rod of diameter d.

Thus for a steel rod we may take $e = 250$ millions cm, one quarter a quadrant of the Earth, $Q = 10^9$ cm, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}e} = 500$.

For a vertical steel wire, one millimetre in diameter $d = 0.1$ cm, the critical height $x = \left(\frac{1}{2}ed^2\right)^{\frac{1}{3}} = 500\, d^{\frac{2}{3}} = 107.7$ cm, a little over one metre; or for a critical height of one metre, $x = 100$ cm, $d^{\frac{2}{3}} = 0.2$, $d = 0.089$ cm, nearly one millimetre; this can be shown experimentally with the wire held vertically in a vice. A wax candle after a hot day will give a correct illustration.

For a lath of wood, of thickness a cm, $k^2 = \frac{1}{12}a^2$, $x = \left(\frac{2}{3}ea^2\right)^{\frac{1}{3}}$, and we may take $e = \frac{1}{6}Q$ for wood.

If the yield point of a substance such as steel is reached at 0.2 °/₀ extension, we divide the elastic length by 500 and call it the breaking length of the substance, the length hanging down vertically that would yield and break at the highest point of suspension.

For steel the breaking length would be $\frac{Q}{2000}$ or 5 km, while the elastic length is 2500 km.

[7] In a more general form of the D. E. (6), § 5

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + (kx^p + h)u = 0 \tag{1}$$

change the dependent variable to $w = ux^{-q}$; then

$$x^2\frac{d^2w}{dx^2} - 2qx\frac{dw}{dx} + (kx^p + c)w = 0, \qquad c = q(q+1) + h \tag{2}$$

and then make $c = 0$ by taking $2q + 1 = \sqrt{(1 - 4h)}$.

This D. E. is reducible at once to Fourier form (3), § 5, for $n = -\frac{2q+1}{p}$, by taking a new independent variable $x = \frac{kx^p}{p^2}$.

The D. E. is given by Gray and Mathews in their *Bessel Functions*, page 222.

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + (2\lambda + 1)r\frac{du}{dr} + (k^2\mu^2r^{2\mu} + \lambda^2 - \mu^2n^2)u = 0. \tag{3}$$

Here taking a new dependent variable $y = ur^{\lambda-\mu n}$, the D. E. becomes

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2} + (1+2\mu n)r\frac{dy}{dr} + k^2\mu^2 r^{2\mu}y = 0, \tag{4}$$

and then, with the new independant variable $x = \frac{k^2\mu^2 r^{2\mu}}{4\mu^2}$,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (n+1)x\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{5}$$

as in Fourier (3), § 1.

[8] The simplest dynamical application to bring out the advantage of the Fourier function is the one employed by Gray and Mathews at the outset of their *Bessel Functions*, to the vibration of a chain hanging vertically; as worked out in *Phil. Mag.*, page 502.

To realise the experiment it is easier to revolve the chain by hand, bodily in steady motion, and to investigate the permanent shape. The plane vibration will then be imitated by the shadow of the revolving chain thrown on a vertical wall.

Take the condition of relative equilibrium of the length x above the lowest point,

$$\mathrm{T}\frac{dy}{dx} + \int_0^x \frac{\sigma\omega^2}{g}y\,dx = 0 \tag{1}$$

with $\mathrm{T} = \sigma x$ as at rest, σ the line density. Putting $g = \omega^2 l$, where l is the height of the equivalent conical pendulum revolving at the same rate, and differentiating with σ constant

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{y}{l} = 0, \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{y}{l} = 0, \quad y = b\mathrm{F}\left(\frac{x}{l}\right); \tag{2}$$

and then l is the height of the subtangent at the lowest point, supposed free.

With a variable line density σx^n, and $\mathrm{T} = \frac{\sigma x^{n+1}}{n+1}$, the D. E. changes to

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma x^{n+1}}{n+1}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\sigma\omega^2 x^n y}{g} = 0, \tag{3}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (n+1)\frac{dy}{dx} + (n+1)\frac{y}{l} = 0, \qquad y = b\mathrm{F}_n(n+1)\frac{x}{l};$$

and l is still the subtangent at the lowest point.

The result is much more complicated as given by Gray and Mathews in the *Bessel Functions*, page 222.

A similar treatment is given in the *Phil. Mag.*, page 503, of Lecornu's problem of the oscillation of a weight, raised or lowered by a chain with given velocity, uniform or variable, the density of the chain being neglected.

The stability is also investigated in page 506 of a chain standing up vertically, like a will o'the wisp, friar's lanthorn, or as in the reported rope trick of the Hindoo conjurer, where stability can be imparted by the gyroscopic domination of a flyweel in each link.

[**9**] The definition in (2) § 1,

$$(1) \qquad \mathrm{F}_n(\theta) = \left(-\frac{d}{d\theta}\right)^n \mathrm{F}(\theta) = \sum \frac{(-\theta)^k}{\Pi(k+n)\Pi k}$$

is generalised for fractional values of n by interpreting Πn to mean Gauss's Gamma Function $\Gamma(n+1)$, so that $\Pi n = n\Pi(n-1)$.

Then with $n = -\frac{1}{2}$, $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$,

$$(2) \qquad \Pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\Pi k$$

$$= \left(k-\frac{1}{2}\,.\,k-1-\frac{1}{2}\,.\,k-2-\frac{1}{2}\,.\,\ldots\,2-\frac{1}{2}\,.\,1-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)(k\,.\,k-1\,.\,k-2\ldots 3\,.\,2\,.\,1)$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Pi(2k)}{2^k},$$

$$(3) \qquad \mathrm{F}_{-\frac{1}{2}}(\theta) = \sum \frac{(-2\sqrt{\theta})^{2k}}{\sqrt{\pi}\Pi(2k)} = \frac{\cos 2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}.$$

Thus when n is half an odd integer, the Fourier function proves to be the differentiation or integral of $\cos(2\sqrt{\theta}+\varepsilon)$, the lead or phase angle ε being added as an arbitrary constant, so as to include both solutions of the D. E.

Then, introducing the factor $\sqrt{\pi}$, omitted in the *Phil. Mag.*, page 508, to normalise the statement in accordance with the general definition,

$$(4) \qquad \sqrt{\pi}\,\mathrm{F}_{-\frac{1}{2}}(\theta) = \cos 2\sqrt{\theta},$$

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}_{\frac{1}{2}}(\theta) = \frac{\sin 2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} = -\frac{d}{d\theta}\mathrm{F}_{-\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}_{-\frac{3}{2}}(\theta) = -\frac{\cos 2\sqrt{\theta}}{\theta} + \frac{\sin 2\sqrt{\theta}}{2\theta^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}_{-\frac{3}{2}}(\theta) = -\sqrt{\theta}\cos 2\sqrt{\theta} + \frac{1}{2}\sin 2\sqrt{\theta} = \theta^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}_{\frac{3}{2}}(\theta),$$

and so on.

A negative would θ require a change to the corresponding hyperbolic function.

TIDAL WAVES in an ESTUARY.

[**10**] The Fourier function comes in useful for the discussion of a long flat tidal wave in an estuary or channel, where the vertical cross section K and surface breadth b are treated as slowly variable with the wave length (*Phil. Mag.*, p. 511).

For a vertical elevation η of the surface, and a horizontal displacement ξ in the direction of the axis of the channel, treated as the same at all depth, so that $\zeta = K\xi$ is the flux through the cross-section K, the equation of continuity is

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\zeta}{dx} + b\eta = 0.$$

The dynamical equation, on the usual theory that the pressure head is practically the depth below the free surface, is

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\xi}{gdt^2} = -\frac{d\eta}{dx},$$

or supposing the liquid particle to swing horizontally like a pendulum of length l,

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^2\xi}{gdt^2} = -\frac{\xi}{l} = -\frac{d\eta}{dx}$$

so that the dynamical equation can be written

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\eta}{dx} + \frac{\zeta}{Kl} = 0;$$

and (A) (B) are the equations of motion, in a canonical form.

By the alternate elimination of ζ and η these are

$$\text{(C)} \qquad \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\eta}{dx}\right) + \frac{b\eta}{l} = 0, \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d\log K}{dx}\frac{d\eta}{dx} + \frac{b\eta}{Kl} = 0,$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{bdx}\right) + \frac{\zeta}{Kl} = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} - \frac{d\log b}{dx}\frac{d\zeta}{dx} + \frac{b\zeta}{Kl} = 0,$$

where K/b may be called the mean hydraulic depth.

On the assumption that K and b vary as x^q and x^m, simple powers of x, and $b/K = kx^{m-q}$,

$$\text{(3)} \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{q}{x}\frac{d\eta}{dx} + kx^{m-q}\frac{\eta}{l} = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} - \frac{m}{x}\frac{d\zeta}{dx} + kx^{m-q}\frac{\zeta}{l} = 0;$$

and then with the new variable

$$z = \frac{kx^{m-q+2}}{(m-q+2)^2 l}$$

these equations reduce to Fourier form (3), § 1, with

$$p = \frac{q-1}{m-q+2}, \qquad \eta = aF_p(z), \qquad \zeta = cF_{-p-1}(z). \tag{4}$$

And with

$$b = hx^m, \qquad z^{p+1} = \left[\frac{k}{(m-q+2)^2 l}\right]^{p+1} x^{m+1} \text{ in (3)}$$

$$\frac{d\zeta}{dx} + b\eta = -cF_{-p}(z)\frac{dz}{dx} + ahx^m F_p(z) \tag{5}$$

$$= \left(cz^p \frac{dz}{dx} + ahx^m\right) F_p(z) = \left[-\frac{ca}{p+1}\left[\frac{k}{(m-q+2)^2 l}\right]^{p+1} + ah\right] x^m F_p(z) = 0$$

thus determining the ratio of a to c.

For an estuary shallowing uniformly at one in n, $\frac{K}{b} = \frac{x}{n}$; and $q = m+1$,

$$x\frac{d^2\eta}{dx^2} + (m+1)\frac{d\eta}{dx} + \frac{n\eta}{l} = 0, \qquad x\frac{d^2\zeta}{dx^2} - m\frac{d\zeta}{dx} + \frac{n\zeta}{l} = 0, \tag{6}$$

$$\eta = aF_m\left(\frac{nx}{l}\right), \qquad \zeta = cF_{-m-1}\left(\frac{nx}{l}\right). \tag{7}$$

With an estuary parabolic in plan, $m = \frac{1}{2}$, and the solution is given in finite terms by the circular function, in § 9 (CHRYSTAL, *Proceedings Royal Society of Edinburgh*, 1905, *Seiches*; DASGAPTA, *Proc. Calcutta Math. Society*, 1919).

In a V shaped estuary of uniform depth h,

$$K = bh, \qquad q = m = 1, \qquad p = 0, \qquad z = \frac{x^2}{4lh},$$

$$\eta = aF(z), \qquad \zeta = cF_{-1}(z) = czF_1(z) \tag{8}$$

and for wave velocity

$$U = \sqrt{(gh)}, \qquad \text{period } T,$$

and wave length λ,

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}, \qquad h = \frac{U^2}{g}, \qquad lh = \frac{T^2U^2}{4\pi^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}, \qquad z = \left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)^2.$$

No vertical tide where $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2.4$; no tidal current where $\frac{2\pi x}{\lambda} = 3.8$.

For a depth of 12 fathom, 22 m, $\lambda = 360$ G miles (mille marin) length of the semi-diurnal tide.

Similar equations are employed by Professor A. G. Webster in the *Proc. National Academy of Science*, Washington, July 1919, for air waves of the musical note in a trumpet tube.

With our K and ζ for his σ and X, and s denoting the condensation; and with a time factor e^{pti}, and sound velocity a,

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\zeta}{dx} + Ks = 0, \qquad \text{(B)} \qquad \frac{ds}{dx} - \frac{p^2}{a^2}\frac{\zeta}{K} = 0,$$

two canonical equations as before; and leading to the D. E. 's

$$(9) \qquad \frac{d^2s}{dx^2} + \frac{d\log K}{dx}\frac{ds}{dx} + \frac{p^2}{a^2}s = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} - \frac{d\log K}{dx}\frac{d\zeta}{dx} + \frac{p^2}{a^2}\zeta = 0.$$

Then on the assumption that K varies as x^q,

$$(10) \quad s = aF_{\frac{1}{2}(q-1)}(z), \qquad \zeta = cF_{-\frac{1}{2}(q+1)}(z), \qquad z = \frac{p^2x^2}{4a^2} = \frac{\pi^2x^2}{\lambda^2}, \qquad \frac{2\pi x}{\lambda} = 2\sqrt{z},$$

and $s = 0$ at an opening, $\zeta = 0$ at a closed end.

WHIRLING and LATERAL VIBRATION of a SHAFT.

[**11**] Denoting the area and moment of inertia of the cross section of the bar by K and $I = Kk^2$, the differential equation for a slight displacement y from the straight axis Ox can be written (*Phil. Mag.*, page 522):

$$(1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = K\varrho\frac{y}{l}, \quad \text{or} \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(Kk^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{K}{el}y,$$

e denoting the elastic length and ϱ the density of the metal, l the length of equivalent pendulum synchronising with the vibration or revolutions.

This is derived from the dynamical equations

$$(2) \qquad Y = \frac{dB}{dx}, \qquad B = -EI\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{dY}{dx} = K\rho\frac{d^2y}{ydt^2} = -K\rho\frac{y}{l},$$

connecting shearing force Y and bending moment B.

The extension to the influence of rotary *i*nertia and shear strain has been made recently by S. P. Timosogensko in the *Phil. Mag.* May 1921.

Then when K and I vary as powers of x, x^m and x^q, the equation takes the shape

$$(3) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(x^q\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x^m y$$

and this can be solved in a variety of cases by the Fourier function.

Thus taking

$$y = F_n(x), \qquad x^n y = F_{-n}(x),$$

$$(4) \qquad \int\int x^n y\,dx^2 = F_{-n-2}(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = F_{n+2}(x) = x^{-n-2}F_{-n-2},$$

$$(5) \qquad x^{n+2}\frac{d^2y}{dx^2} = \int\int x^n y\,dx^2, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x^n y$$

Then (3) has a solution

$$y = F_n, \quad \text{if} \quad q = n + 2,$$

and the solution is algebraical if $q = n + 4$.

With a change of the independent variable to

$$\varphi = \log x, \qquad x = e^{\varphi},$$

Fourier's equation (1) becomes

$$(6) \qquad \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2} + I = 0, \qquad I = e^{\varphi},$$

and (3) becomes

$$(7) \qquad \frac{d^2F_n}{d\varphi^2} + n\frac{dF_n}{d\varphi} + e^{\varphi}F_n = 0;$$

and this again, with a new dependent variable

$$u = e^{\frac{1}{2}n\varphi}F_n,$$

becomes

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+1=0, \qquad 1=e^2+\frac{1}{4}n^2, \tag{8}$$

or with the former independent variable x,

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left(x-\frac{1}{4}n^2\right)u=0. \tag{9}$$

Then with $x=\frac{1}{4}k^2z^2$,

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(k^2z^2-n^2)u=0 \tag{10}$$

the usual form of the D. E. for the Bessel function

$$u=\mathrm{J}_n(kz), \qquad \text{or} \qquad \left(\frac{1}{2}kz\right)^{-n}\mathrm{F}_n\left(\frac{1}{4}k^2z^2\right). \tag{11}$$

But the simplicity is lost of the Law of Differentiation,

$$\mathrm{F}_n(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^n\mathrm{F}(x),$$

when a change is made to the Bessel function and its variable

$$kz=2\sqrt{x}, \qquad x=\frac{1}{4}k^2z^2.$$

[**12**] With the independent variable $\varphi=\log x$ in (6), § 11 the D. E. (3) § 1 becomes

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}-1\right)e^{(p-2)\varphi}\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}-\frac{dy}{d\varphi}\right)=e^{(n+2)\varphi}y, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d}{d\varphi}+p-2\right)\left(\frac{d}{d\varphi}+p-3\right)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}-1\right)y=e^{(n-p+4)\varphi}y \tag{2}$$

or more generally, with $\varphi=k\theta$, and writing D for $\frac{d}{d\theta}$,

$$(\mathrm{D}+pk-2k)(\mathrm{D}+pk-3k)\,\mathrm{D}\,(\mathrm{D}-k)y=e^{(n-p+4)k\theta}y. \tag{3}$$

Then with a change to the dependent variable $w = e^{p\theta}y$,

$$(4)\quad (D-h+pk-2k)(D-h+pk-3k)(D-h)(D-h-k)\omega = e^{(n-h+4)k\theta}w,$$

and this has a solution $w = F_q(e\theta)$ if it can be reduced to the form

$$(5)\qquad (D+g)(D+g-1)D(D-1)w = e^{3\theta}w;$$

a discussion is desirable of the general case.

[**13**] In the vibration of a bar or tongue of variable rectangular or elliptic section varying as x^p broad, and x^q deep, K varies as x^{p+q}, I varies as x^{p+3q}, and special cases are examined in the *Phil. Mag.*, page 523, where a solution is given by the Fourier function.

Thus if the bar tapers uniformly in depth, $q = 1$, and the solution is given by $F_{p+1}(x)$.

In Kirchhoff's case of a conical rod tapering to a point at 0, $p = q = 1$; and in the homogeneous form of (1), § 11, with semi vertical angle α,

$$(1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{4}\pi x^4\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\pi x^2 y}{el\tan^2\alpha}, \qquad y = bF_2\frac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{(el)}\tan\alpha}.$$

The critical length is given by the root of $\frac{dy}{dx} = 0$, or

$$F_3(z) = 0, \qquad x = \frac{1}{2}z\sqrt{(el)}\tan\alpha.$$

In a Table of the Bessel Function the roots are given of

$$(2)\qquad \begin{aligned} J_0(x) &= 0, & x &= 2.4048,\ 5.5201,\ 8.6537;\\ J_1(x) &= 0, & x &= 3.8317,\ 7.0156,\ 10.1734;\\ J_2(x) &= 0, & x &= 5.135,\ 8.417,\ 11.620;\\ J_3(x) &= 0, & x &= 6.379,\ 9.760,\ 13.017; \end{aligned}$$

and this with $z = \frac{1}{4}x^2$, makes the roots of

$$(3)\qquad \begin{aligned} F_0(z) &= 0, & z &= 1.445,\ 6.945,\ 18.72;\\ F_1(z) &= 0, & z &= 3.670,\ 12.30,\ 16.31;\\ F_2(z) &= 0, & z &= 6.59.\ 17.71,\ 33.77;\\ F_3(z) &= 0, & z &= 10.16,\ 23.81,\ 42.30. \end{aligned}$$

Then with $z = \mathrm{M}$ (10.16) the least root of $\mathrm{F}_3 = 0$, the critical length is

$$x = \frac{1}{2}\mathrm{M}\sqrt{(el)}\tan\alpha$$

or at n revolutions per second, or angular velocity $\omega = 2\pi n$,

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{\sqrt{(ge)}}{\omega}\tan\alpha = \frac{\mathrm{MU}\tan\alpha}{4\pi x}$$

with $\mathrm{U} = \sqrt{(ge)}$ the velocity of longitudinal elastic waves, and in steel

$$\mathrm{U} = 500{,}000 \text{ cm/sec, or } 5 \text{ km/sec.}$$

Otherwise the critical number of revolutions is

$$(5) \qquad n = \frac{\mathrm{MU}\tan\alpha}{4\pi x} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{MU}}{\text{circumference of the base of the reciprocal cone}},$$

that is the circumferential velocity of the rim of the reciprocal base is $\frac{1}{2}\mathrm{NU}$ at the critical speed, where $\mathrm{N} = 10$ in round numbers.

The special case of $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$ when the bar or tongue is parabolic in plan, and tapering uniformly can then be solved in finite terms by the circular function in $\mathrm{F}_{\frac{1}{2}}$ in § 9, as before in the tidal wave motion of § 10.

[**14**] The D. E. of the vibration of a vertical elastic rod is required for the swaying of a tree, or cornstalk, or of a tall chimney disturbed by an earthquake (*Engineering*, p. 225, August 13, 1920, C. R. Weymouth) and it is shown in ihe *Phil. Mag.*, Nov. 1919, p. 525 that the D. E. for a cylindrical column is

$$(1) \qquad ek^2\frac{d^4u}{dx^4} + x\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{u}{\lambda} = 0$$

expressed in geometrical lengths with no dynamical units in sight; these are concealed in e, and λ the equivalent pendulum length.

This D. E. is intractable in the general case, but there is a certain resemblance with § 2 (7), (8), (9) when the differentiations are doubled in order.

Here $\lambda = \infty$ gives the critical height, when the oscillation is very sluggish, as discussed in § 13.

But with the middle gravity term absent, the D. E. of Lateral vibration is obtai-

ned, of the column laid flat on a smooth horizontal plane and in vibration, and then, with $m^4ek^2\lambda = 1$, we group the solution for convenience in the form

$$u = A(\operatorname{ch} mx - \cos mx) + B(\operatorname{ch} mx + \cos mx) + C(\operatorname{sh} mx - \sin mx) + D(\operatorname{sh} mx + \sin mx) \tag{2}$$

with the four arbitrary constants A, B, C, D.

[**15**] Other applications may be cited of the equation discussed by Pockels,

$$(\nabla^2 + m^2)\varphi = 0, \tag{1}$$

arising in the solution of the propagation of spherical waves given by

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c^2\nabla^2\varphi, \quad \text{and} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m^2c^2\varphi, \tag{2}$$

with a periodic time factor; or of the conduction of heat in lines radiating from a centre, where

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\nabla^2\varphi, \quad \text{and} \quad \frac{d\varphi}{dt} = -m^2k\varphi, \tag{3}$$

with an exponential time factor of decay, at compound discount.

Then if a solution is given in the form $\varphi = RS_n$, where S_n is a solid harmonic of order n, and R a function of r only

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2(n+1)r\frac{dR}{dr} + m^2r^2R = 0, \qquad R_n = F_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}m^2r^2\right); \tag{4}$$

where we can take

$$R_0 = \frac{\sin(mr+\varepsilon)}{mr}, \qquad R_1 = \frac{\sin(mr+\varepsilon)}{m^2r^2} - \frac{\cos(mr+\varepsilon)}{m^2r^2}, \ldots. \tag{5}$$

With the sign of m^2 changed, these circular functions must be replaced by the corresponding hyperbolic function.

Various applications are cited in the *Phil. Mag.*, p. 526 to problems in Hydrodynamics, Elasticity and Electromagnetism, discussed by Lamb, Love, Macdonald and Bromwich.

In a new system of conjugate function co-ordinates (u, v) where $x+iy=f(u+iv)$, (1) becomes

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{d^2\varphi}{dv^2}+m^2\mathrm{J}\varphi=0, \tag{6}$$

$$\mathrm{J}=\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dx}{dv}\right)^2=\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2=\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \text{ the Jacobian.} \tag{7}$$

Thus in the conjugate system of confocal co-ordinates,

$$x+iy=c\,\mathrm{ch}\,(u+iv) \tag{8}$$

$$\mathrm{J}=c^2(\mathrm{sh}^2u\cos^2v+\mathrm{ch}^2u\sin^2v)=c^2(\mathrm{ch}^2u-\cos^2v)=rr',$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{d^2\varphi}{dv^2}+m^2c^2(\mathrm{ch}^2u-\cos^2v)\varphi=0 \tag{9}$$

and then with $\varphi=\mathrm{UV}$, U a function of u only V of v, the equation divides into the two

$$\frac{1}{\mathrm{U}}\frac{d^2\mathrm{U}}{du^2}+m^2c^2\mathrm{ch}^2u+\lambda, \qquad \frac{1}{\mathrm{V}}\frac{d^2\mathrm{V}}{dv^2}-m^2c^2\cos v-\lambda=0; \tag{10}$$

here U and V are called functions of the elliptic and hyperbolic cylinder, and their properties are undergoing investigation.

In the degenerate case of confocal parabolas, where the origin is taken at one focus, and the other focus is driven off to infinity, take

$$x+iy=\frac{1}{2}a(u+iv)^2, \qquad x=\frac{1}{2}a(u^2-v^2), \qquad y=auv, \tag{11}$$

$$\mathrm{J}=a^2(u^2+v^2)=2ar, \qquad r=\frac{1}{2}a(u^2+v^2);$$

$$r+x=au^2, \qquad r-x=av^2, \tag{12}$$

the confocal parabolas for constant u and v;

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{d^2\varphi}{dv^2}+m^2a^2(u^2+v^2)=0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\mathrm{U}}\frac{d^2\mathrm{U}}{du^2}+m^2a^2u^2+h=0, \qquad \frac{1}{\mathrm{V}}\frac{d^2\mathrm{V}}{dv^2}+m^2a^2v^2-h=0 \tag{14}$$

D. E. of the equation of the function of the parabolic cylinder in (10) § 2, when the sign of m^2 is changed in (1).

NOTE. — For a semi-diurnal tide in § 10, the pendulum length l is too great to be expressed, except in a unit such as R the radius of the Earth, 3438 geographical (G) miles, milles marins.

With gravity at the equator discounted one part in 289 by the centrifugal force of diurnal rotation μ, $g = 289\,R\mu^2 = l(n\mu)^2$ for an oscillation making n double beats a day, $l = 289\,\frac{R}{n^2}$.

Then in a semi-diurnal tide with $n = 2$, $l = 72.25\,R$; but as the tide is about half an hour over the 12 hours, we must take l about 75 or 80 R.

With such a great length l, the radiation of gravity from the centre of the Earth must be taken into account; and the oscillation must be imitated by a truck on a line apparent by level, but curved downward to a curvature of m minutes per mile, a radius $a = R/m$ miles, and this truck if unresisted should make $17\sqrt{(1-m)}$ double oscillations a day, if disturbed from equilibrium.

Thus if the line is level with the surface of the sea, $m = 1$, and the truck is everywhere in equilibrium and the time of oscillation is infinite. But if the line is straight, like a Channel tunnel, a is infinite and $m = 0$, and the truck makes 17 double oscillations a day, in unison with the grazing satellite, with $g = R(17\mu)^2$.

Because on a radius a, the truck displaced trough a small angle θ, and gravity through an angle Φ, will move so that

$$\frac{a d^2\theta}{g d\theta^2} = -\sin(\Phi - \theta) = -\sin\Phi + \sin\theta = -\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - 1\right)\sin\theta$$

$$= -\left(\frac{a}{R} - 1\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{g dt^2} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)\sin\theta = -\frac{1}{L}\sin\theta, \qquad \frac{1}{L} = \frac{1}{R} - \frac{1}{a}.$$

[For a line curved upward, a and m is taken negative].

L'HORLOGE ASTRONOMIQUE DE LA CATHÉDRALE DE STRASBOURG

Par M. ALFRED UNGERER(1)

(STRASBOURG)

L'Horloge astronomique actuelle est la troisième œuvre de ce genre qui orne la Cathédrale de Strasbourg. Une première horloge, construite en 1354 et appliquée contre le mur en face de l'horloge actuelle n'a fonctionné que peu de temps; on ne connaît que quelques détails très sommaires sur sa construction, et l'auteur en est inconnu. La cage du mécanisme était en bois, et montrait au bas un calendrier, à l'étage du milieu un astrolabe indiquant le mouvement apparent du soleil et des planètes, et à l'étage supérieur une statue de la Sainte Vierge portant l'Enfant Jésus, devant lequel, au coup des heures, venaient s'incliner les Rois Mages, pendant qu'un carillon jouait des mélodies de cantiques. La seule pièce qui existe encore de nos jours, est le coq automate, chantant et battant des ailes, qui est conservé au musée de l'Œuvre Notre-Dame.

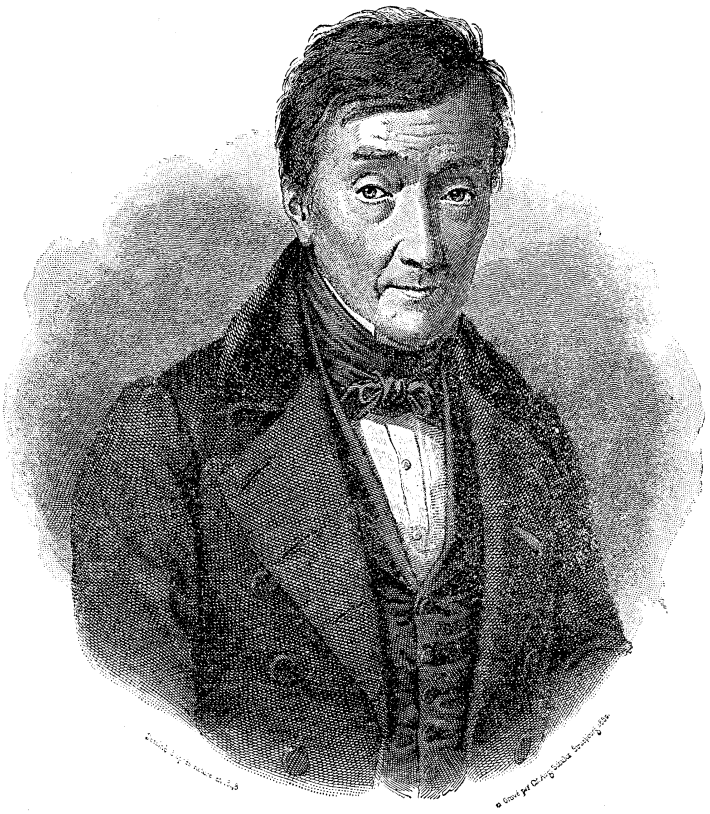
Au début du seizième siècle, on commença les études pour la construction d'une deuxième horloge destinée à remplacer la première; la construction n'en fut achevée qu'en 1574. Elle fut construite par les frères Habrecht de Schaffhouse, d'après les calculs du mathématicien Dasypodius de l'Université de Strasbourg. Elle était munie de statuettes allégoriques semblables à celles de l'horloge actuelle, et avait conservé le carillon et le coq de la première horloge. Ses parties astronomiques comprenaient un astrolabe, un cadran représentant les phases lunaires, et un calendrier civil monté au rez-de-chaussée en forme d'anneau dans lequel était placé un grand disque en bois portant les indications du calendrier ecclésiastique; ces dernières, ainsi que les indications astronomiques peintes sur les panneaux appliqués des deux côtés du calendrier, étaient calculées pour environ un siècle; cette période révolue, il fallait donc renouveler les calculs et les peintures.

---

(1) La Rédaction a cru intéressant de faire figurer ici un résumé de la conférence de M. Ungerer, faite pendant le Congrès, le 23 septembre 1920, au sujet de l'Horloge astronomique qui constitue l'un des plus beaux ornements de la Cathédrale de Strasbourg.

Après avoir subi à différentes reprises des réparations, cette deuxième horloge cessa de fonctionner vers 1786.

Jean-Baptiste Schwilgué, né à Strasbourg en 1776, avait été, dès sa jeunesse,



SCHWILGUÉ

Auteur de l'Horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg

A mon ancien élève Théodore Ungerer
Souvenir d'attachement.
Schwilgué

vivement impressionné par le chef-d'œuvre ornant la Cathédrale et conçut le projet de rendre la vie à l'horloge arrêtée et muette depuis de si longues années. Horloger très habile et doué de facilités extraordinaires en mathématiques, il approfondit ses connaissances en mathématiques, astronomie, physique et mécanique à l'aide de livres qu'il se procurait.

Après avoir présenté à la ville de Strasbourg, à partir de 1821, différents projets de remise en état de l'Horloge astronomique, Schwilgué obtint enfin en 1836 la

commande définitive de ce travail, à l'étude duquel il avait consacré de si nombreuses années. Les calculs, dessins et autres travaux prirent encore deux ans, et l'exécution du mécanisme demanda quatre années, de sorte que l'horloge put définitivement être mise en marche le 31 décembre 1842 à minuit.

Il peut être intéressant d'indiquer le prix qu'a coûté l'horloge actuelle. Selon les conditions du cahier des charges, Schwilgué s'était engagé à remettre en bon état les anciens mécanismes pour une somme d'environ 32.000 francs; mais au cours de son travail, il augmenta très sensiblement le programme qu'il s'était imposé, et ce n'est qu'après avoir achevé entièrement son œuvre, qu'il soumit au Conseil municipal la note des frais de revient qui se montait à 81.000 francs. Le Conseil lui alloua en plus une somme de 20.000 francs pour son travail personnel, de sorte que l'horloge revint à une somme totale de 101.000 francs.

De même que les deux premières Horloges astronomiques de la Cathédrale de Strasbourg représentaient l'état des connaissances au quatorzième et au seizième siècles, ainsi l'horloge de Schwilgué représente au point de vue scientifique et technique, le plus haut degré de précision à son époque, tant et si bien qu'elle peut être considérée encore de nos jours comme le plus brillant chef-d'œuvre universel en horlogerie astronomique, qui n'a jamais été dépassé ni même égalé.

Mécanismes de l'Horloge. — La grande valeur du chef-d'œuvre de Schwilgué consiste surtout dans la reproduction mécanique des résultats de ses calculs, au moyen de mouvements qu'il a su créer et disposer d'une façon excessivement ingénieuse.

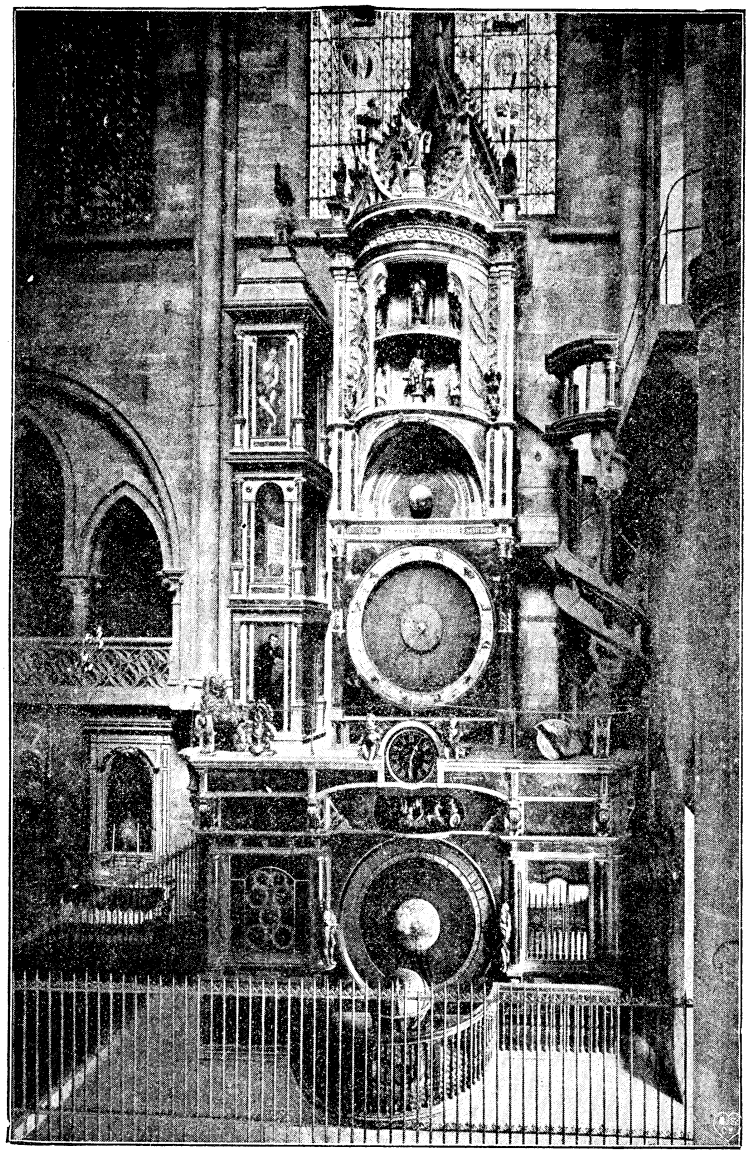
Trois espèces de temps sont reproduites sur l'horloge :

Le *temps moyen* est indiqué sur un cadran à hauteur de la galerie aux lions. Aux aiguilles dorées qui donnent le temps moyen astronomique du méridien de Strasbourg, on a ajouté en mars 1919, pour éviter les confusions dues aux changements d'heure, une paire d'aiguilles argentées marquant l'heure publique de la ville. C'est également d'après cette heure que fonctionnent maintenant la sonnerie et les mouvements des figurines.

Le *temps vrai* est indiqué sur un grand cadran divisé en 2×12 heures et situé au bas de l'horloge. Le fond de ce cadran représente le plan de l'équateur terrestre, le milieu en est occupé par l'hémisphère terrestre boréale dont le rayon vertical supérieur représente le méridien de Strasbourg, et dont l'axe correspond au centre du cadran. L'aiguille porte à sa pointe un petit disque solaire et fait en moyenne un tour en 24 heures. Son mouvement est pareil au mouvement apparent que décrit le soleil autour de la terre, mais projeté dans le plan de l'équateur. Le moment où l'aiguille à disque solaire est sur midi, correspond au passage du soleil dans le méridien de Strasbourg; on peut le contrôler à l'aide d'une ligne méridienne adaptée

près de l'une des portes d'entrée et permettant de constater le moment du passage du soleil.

Les irrégularités dans la marche de cette aiguille sont reproduites par les mécanismes des équations solaires, visibles dans une vitrine à droite du cadran.



Le *temps sidéral* est indiqué au moyen d'une simple aiguille à heures sur un petit cadran qui est monté sur la sphère céleste placée devant l'horloge. Le centre de ce cadran correspond à l'axe de rotation de la sphère céleste qui est inclinée d'environ 48° sur l'horizon, angle correspondant à la latitude de Strasbourg. Sur la sphère sont reproduites environ 5.000 étoiles des six premières grandeurs.

La sphère céleste est montée dans un système de cercles (les colures), dans lesquels elle décrit, en outre de la révolution diurne, un mouvement secondaire dont une révolution s'effectue dans l'espace de 25.868 ans, période qui correspond au mouvement de la *précession des équinoxes*.

Des difficultés bien plus grandes résidaient dans la reproduction du *mouvement apparent de la lune autour de la terre*, qui est représenté par une deuxième aiguille placée sur le cadran du temps vrai. Cette aiguille décrit trois espèces de mouvements entièrement distincts : *a*) un mouvement de révolution, qui correspond à celui que décrit la lune dans son orbite, mais projeté sur le plan de l'équateur terrestre ; *b*) un mouvement rotatoire autour d'elle-même, indiquant les phases lunaires; à cet effet, l'aiguille est munie à sa pointe d'une petite boule dont une moitié est noire et l'autre argentée, et qui décrit un tour dans un mois synodique; *c*) un mouvement d'allongement et de raccourcissement, qui a pour but de représenter mécaniquement les éclipses solaires et lunaires. Lorsqu'une éclipse de soleil a lieu, la petite boule qui représente la lune se place devant le disque solaire de l'aiguille du temps vrai, et lorsqu'il y a éclipse lunaire, la petite boule passe derrière un disque noir représentant l'ombre terrestre et fixé au prolongement diamétral de l'aiguille solaire. Le passage de l'aiguille lunaire devant l'aiguille solaire correspond au moment où la lune est en conjonction avec le soleil, et la rencontre de l'aiguille lunaire avec le prolongement diamétral de l'aiguille solaire correspond au moment de l'opposition.

L'orbite lunaire étant inclinée sur l'écliptique d'environ 5°, il ne peut jamais y avoir d'éclipse solaire ou lunaire quand la lune se trouve soit au nord, soit au sud de l'écliptique. Dans ces deux cas, l'aiguille lunaire est ou allongée ou raccourcie par le mécanisme, de sorte que la petite boule lunaire passe soit en dehors, soit en dedans des deux disques représentant le soleil et l'ombre de la terre. Une éclipse ne peut en réalité avoir lieu qu'aux nœuds ascendants ou descendants de la lune. A ce moment l'aiguille lunaire a sa longueur moyenne, de sorte que la boule lunaire pourra se placer soit devant le disque solaire, soit derrière l'ombre terrestre, au moment où les deux aiguilles se rencontreront.

En comparant la position dans laquelle se trouvent les aiguilles du soleil et de la lune relativement à l'hémisphère terrestre boréale placée au milieu du cadran, au moment où ces aiguilles représentent mécaniquement une éclipse, on peut reconnaître les contrées de la terre où ces éclipses sont visibles.

Le mouvement de la lune, décrit dans son orbite, présente des irrégularités fort considérables. De plus, la ligne des nœuds change de direction et accomplit une révolution en dix-huit ans environ. Il résulte de ce fait que l'angle entre l'orbite lunaire et le plan de l'équateur varie entre 28° et 18°; c'est là la cause des difficultés extrêmes qu'on a eues à obtenir une reproduction exacte du mouvement apparent de la lune projeté sur le plan de l'équateur terrestre.

Schwilgué a imaginé une solution des plus ingénieuses de ce problème à l'aide des mécanismes des *équations solaires et lunaires* qui déterminent la marche irrégulière des deux aiguilles du système apparent et que l'on aperçoit dans la vitrine à droite du cadran du temps vrai.

Le mouvement apparent du soleil et de la lune autour de la terre est aussi très irrégulier par suite des influences de l'attraction réciproque auxquelles la terre et la lune sont soumises. Chacune de ces variations est reproduite dans ledit mécanisme par une courbe spéciale appliquée à une roue dentée dont la durée de rotation correspond exactement à la durée de la période qu'elle représente. Ces roues sont disposées horizontalement l'une au-dessus de l'autre, exerçant ainsi un mouvement intégrateur ascendant ou descendant sur un système de tringles qui transmettent le résultat de ces mouvements au mécanisme du temps apparent. Par un dispositif très ingénieux, celui-ci communique ces fluctuations aux aiguilles du soleil et de la lune, de manière à accélérer ou à ralentir leur mouvement de la quantité nécessaire pour le faire correspondre exactement au mouvement apparent du soleil et de la lune.

Les équations solaires comportent deux courbes qui représentent l'année tropique et l'année anomalistique. Les équations lunaires comprennent cinq courbes qui se rapportent aux périodes de l'anomalie, de l'évection, de la variation, de l'équation annuelle et de la réduction. Le troisième mécanisme renfermé dans la vitrine règle le mouvement de la ligne des nœuds.

Des mécanismes moins compliqués complètent l'ensemble de l'horloge : celui représentant le mouvement du *système planétaire* autour du soleil, occupant le milieu de l'horloge; celui du *globe lunaire* placé au-dessus, qui décrit un tour dans l'espace d'un mois synodique et indique les phases de la lune au fur et à mesure qu'il fait voir sa face noire ou sa face dorée; enfin le mouvement du *calendrier perpétuel* qui entoure en forme d'anneau le cadran du temps vrai. Cet anneau décrit un tour en une année et indique les dates, les lettres dominicales, les noms des saints, éventuellement le jour bissextile, ainsi que toutes les fêtes mobiles et immobiles. Quand l'année à venir est bissextile, l'arc portant les dates du 1er janvier au 28 février est automatiquement reculé d'un jour dans la nuit du 31 décembre précédent et laisse apparaître le 29 février. De même, le 31 décembre suivant, il est de nouveau avancé d'un cran, recouvrant ainsi le jour bissextile. Ce mécanisme élimine automatiquement le jour bissextile tous les 100 ans, mais il le reproduit tous les 400 ans, selon les règles du calendrier grégorien. Il place également automatiquement à leurs dates respectives, dans la nuit du 31 décembre, les fêtes mobiles dépendantes ou indépendantes de la fête de Pâques.

Le mécanisme dit *Comput ecclésiastique,* qui règle ces mouvements, mérite une mention spéciale, tant comme finesse de travail, que sous le rapport de la repro-

duction mécanique des lois du calendrier grégorien; il est renfermé dans la vitrine à gauche du cadran du temps vrai, faisant pendant à la vitrine contenant les mécanismes des équations solaires et lunaires.

Le comput ecclésiastique donne les indications suivantes :

le millésime;

le cycle solaire, c'est-à-dire la période de vingt-huit années après laquelle les mêmes jours de la semaine reviennent aux mêmes dates du mois;

le nombre d'or ou cycle lunaire qui comprend une période de dix-neuf ans, après laquelle les nouvelles lunes reviennent aux mêmes dates;

l'indiction romaine, une période de quinze années qui du temps des Romains était employée comme date chronologique dans les traités officiels et dans la perception des impôts, mais qui n'a pas d'importance astronomique;

la lettre dominicale, ou lettre qui dans le calendrier ecclésiastique sert à désigner les dimanches pendant la durée de l'année, d'après la lettre de l'alphabet sur laquelle tombe le premier dimanche de l'année;

enfin, les épactes, qui servent à la désignation des dates de la nouvelle lune dans le courant de l'année à venir. Le chiffre des épactes répond au nombre de jours écoulés depuis la dernière nouvelle lune de l'année jusqu'au 1er janvier. On obtient en général le chiffre pour l'année à venir en ajoutant 11 unités aux épactes de l'année écoulée et en retranchant 30, en cas de besoin. L'ordre régulier de cette période est toutefois interrompu dans les cas suivants : 1° Aux années séculaires non bissextiles, on n'ajoute que 10 unités au lieu de 11; 2° après la révolution de chaque cycle lunaire et lorsque le nombre d'or est $= 1$, les épactes doivent être augmentées d'une unité en plus; 3° dans l'espace de 2500 ans il faut encore ajouter huit jours en plus aux épactes, à répartir entre sept intervalles de 300 ans et un de 400 ans. En outre, une épacte exceptionnelle de 25 donnée en chiffres arabes au lieu des chiffres romains employés en général, est avancée d'un jour pour ne pas être placée au même jour que l'épacte XXIV, ce qui serait contraire aux règles du calendrier grégorien.

Toutes ces irrégularités sont prévues dans le mécanisme du comput ecclésiastique de Schwilgué, de telle sorte que toutes les indications sont reproduites automatiquement et d'une façon rigoureusement exacte à perpétuité.

Les indications de la lettre dominicale et des épactes servent à fixer la date du jour de Pâques. Le mécanisme du comput ecclésiastique reste immobile durant toute l'année, et entre seulement en fonctions le 31 décembre à minuit, pour mettre au point les indications du comput et pour placer à leur date les fêtes mobiles du calendrier civil.

Dans l'ensemble de son apparence extérieure, l'édifice renfermant les mécanismes ne diffère guère de celui de l'ancienne horloge de 1574. Aussi, bien des personnes croient-elles à tort que les mécanismes actuels sont encore les mêmes que ceux de l'horloge précédente.

Les moteurs les plus importants sont placés au premier étage, derrière le cadran du planétaire; ce sont ceux qui actionnent les diverses aiguilles, les figures des quatre âges qui viennent alternativement sonner les quarts, les mécanismes pour les sonneries des quarts et des heures, ainsi que les rouages du planétaire et des phases lunaires. Les appareils qui actionnent le calendrier, les aiguilles du temps apparent et la sphère céleste, se trouvent au rez-de-chaussée. Le mécanisme qui, après les douze coups de midi, fait défiler les apôtres devant le Christ, ainsi que celui qui produit les mouvements du coq qui chante trois fois pendant le défilé des apôtres, est placé au deuxième étage derrière les figures des quatre âges. Tout au haut de l'édifice se trouve le mécanisme qui produit le chant du coq.

Les rouages moteurs sont actionnés à l'aide de câbles par des poids qui sont accrochés dans la tourelle de gauche. Les mécanismes sont remontés une fois par semaine (1).

(1) A l'occasion de la conférence, M. Ungerer, successeur direct de Schwilgué, a présenté une série de projections concernant les mécanismes les plus importants de l'horloge, et rappela que ce fut le 2 octobre 1842, lors du 10e Congrès Scientifique de France, siégeant à Strasbourg, que Schwilgué mit, pour la première fois, son horloge en marche.

SUR L'ENSEIGNEMENT

EN RÉPUBLIQUE ARGENTINE

PAR M. DUBECQ

(BUENOS-AYRES)

(Communication présentée par M. G. KOENIGS.)

M. Dubecq, professeur à la Faculté des Sciences de Buenos-Ayres, membre du Congrès, a envoyé, pour y être communiqué, un cahier de son Cours rédigé par un de ses élèves. Ces leçons s'adressent aux élèves ingénieurs et correspondent à très peu près à nos Cours préparatoires à l'École Centrale. Les méthodes suivies sont, de tous points, analogues à nos méthodes françaises, mêlant dans leur exposé les questions d'Algèbre et de Géométrie analytique, comme le font beaucoup de nos Maîtres. Des exercices poussés jusqu'au bout, où le soin du dessin rivalise avec la minutieuse bonne tenue des calculs, accentuent la valeur pratique de ces Leçons qui font honneur à M. le professeur Dubecq et à l'Enseignement argentin.

TABLE DES MATIÈRES

HISTORIQUE DU CONGRÈS

Pages.

Bureau du Congrès VII
Délégations VIII
Liste des Membres du Congrès IX
Liste des Souscripteurs du Congrès XVI
Programme du Congrès, Dispositions générales et Règlements XIX
Séance d'ouverture du Congrès; Discours de M. E. PICARD XXV
Séance de clôture du Congrès; Discours de MM. E. PICARD et G. KOENIGS XXX
Procès-Verbaux des Séances : Conférences générales et Communications XL

CONFÉRENCES GÉNÉRALES

J. LARMOR. Questions in physical Indetermination 3
L.-E. DICKSON. Some Relations between the Theory of Numbers and other Branches of Mathematics 41
C. DE LA VALLÉE-POUSSIN. Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent 57
V. VOLTERRA. Sur l'enseignement de la Physique Mathématique et de quelques points d'Analyse 81
N.-E. NÖRLUND. Sur les équations aux différences finies 98

MÉMOIRES

PREMIÈRE SECTION

(Arithmétique, Algèbre, Analyse.)

W.-H. YOUNG. Le problème des aires et des volumes 123
P.-J. DANIELL. Stieltjes-Volterra Products 130
A. CHÂTELET. Loi de réciprocité abélienne 137
M. AMSLER. Le calcul symbolique sommatoire 148
R. FUETER. Einige Sätze aus der Theorie der komplexen Multiplikation der Elliptischen Functionen 156

S. Stoïlow. Sur la notion d'ordre d'un ensemble de mesure nulle..... 160
L.-G. du Pasquier. Sur les nombres complexes généraux..... 164
N. Wiener. Certain iterative Properties of bilinear Operations..... 176
J. Hadamard. Sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques..... 179
T. Takagi. Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques. 185
A. Denjoy. Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus en relation avec les fonctions admettant une dérivée seconde généralisée..... 189
P.-A. Typpa. Sur une résolution graphique de l'équation du troisième degré..... 199
G. Rémoundos. Sur le module et les zéros des fonctions analytiques..... 205
Th. Varopoulos. Sur le module maximum des fonctions algébroïdes..... 212
L.-E. Dickson. Homogeneous Polynomials with a Multiplication Theorem..... 215
D. Riabouchinski. Sur le calcul des valeurs absolues..... 231
C. Störmer. Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. 243
J. Deruyts. Sur la théorie algébrique des formes à séries de n variables..... 258
P. Zervos. Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles..... 259
Fr. Rádl. Sur la transformation des équations différentielles linéaires ordinaires.... 265
P. Boutroux. Sur une équation différentielle et une famille de fonctions entières.... 271
S. Lefschetz. Quelques remarques sur la multiplication complexe..... 300
R. Wavre. Un système d'équations à une infinité d'inconnues..... 308
N. Wiener. On the Theory of Sets of Points in terms of continuous Transformations. 312
K. Ogura. Sur la théorie de l'interpolation..... 316
G. Valiron. Sur la théorie des fonctions entières..... 323
P. Zervos. Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés..... 329
J. Rey-Pastor. Transformation conforme des aires infinies sur le plan ouvert..... 332
J.-L. Walsh. On the Location of the Roots of the Derivative of a Polynomial..... 339
S. Zaremba. Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier..... 343
N. Sakellariou. Sur les solutions discontinues du problème du Calcul des Variations dans l'espace à n dimensions..... 351
J. Drach. Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles..... 356

DEUXIÈME SECTION

(Géométrie.)

B. Bydzowsky. Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane..... 383
J.-S. Taylor. The analytic Geometry of complex Variables, with some Applications to Function Theory..... 388
E. Cartan. Sur le problème général de la déformation..... 397
L.-P. Eisenhart. Conjugate Systems of Curves R and their Transformations..... 407
C. Jordan. Sur la classification des constellations..... 410
B. Hostinsky. Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable..... 437
J. Sobotka. Sur la deuxième indicatrice d'une surface en un point ordinaire..... 441
F.-H. Murray. A Method of classifying all the Polygons having a given Set of Vertices.. 445
M. Clapier. Sur la transformation de Lie..... 453
N. Hatzidakis. Sur quelques formules de géométrie cinématique..... 459

TROISIÈME SECTION

(Mécanique, Physique Mathématique, Mathématiques appliquées.)

L. Maillard. Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébulaires..... 467
E. Schwoerer. Détermination de l'équation séculaire de la Terre dans la théorie d'Arrhénius..... 491
J. Hadamard. Sur le problème mixte pour les équations linéaires aux dérivées partielles..... 499
G. Boccardi. L'état actuel des recherches sur les déplacements du Pôle..... 504
M. da Costa Lobo. La courbe décrite par le Pôle à la surface de la Terre..... 515
Th. de Donder et H. Vanderlinden. Quelques covariances de la gravifique..... 521
M. Brillouin. Actions héréditaires discontinues et équations différentielles qui en résultent..... 526
M. Farid Boulad. Un nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André..... 534
G. Boccardi. Les approximations numériques et les sciences d'observation..... 540
A. Guldberg. Une application des polynômes d'Hermite à un problème de statistique. 552
B. Hostinsky. Sur un problème général de la mécanique vibratoire..... 561
D. Riabouchinski. Sur la résistance des fluides..... 568
J. Larmor. The Pressure of Waves of Sound..... 586
— The Rays of Diffraction that accompany telescopic Images..... 589
J.-A. Barrau. Sur la cinématique plane..... 590
E. Guillaume. Expression mono et polyparamétrique du temps dans la théorie de la Relativité..... 594
Ch. Willigens. Représentation géométrique du temps universel dans la théorie de la Relativité..... 603

QUATRIÈME SECTION

(Questions philosophiques, historiques, pédagogiques.)

A. Gérardin. Décomposition des nombres. Jeux scientifiques inédits..... 613
— Machines à congruences A. Gérardin. Théorie et pratique..... 617
H. Brocard. Vingt-deux propositions de Fermat..... 621
P. Delaporte. Sur la réforme du calendrier et le « Chronos »..... 622
L.-G. du Pasquier. Sur les nombres transfinis..... 623
M. d'Ocagne. Pratique courante de la méthode nomographique des points alignés, à propos de ses applications de guerre..... 631
G. Greenhill. The Fourier and Bessel Function contrasted..... 636
A. Ungerer. L'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg..... 656
M. Dubecq. Sur l'enseignement en République Argentine..... 664

TABLE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS

Pages.

M. Amsler. Le calcul symbolique sommatoire 148
J.-A. Barrau. Sur la cinématique plane 590
G. Boccardi. L'état actuel des recherches sur les déplacements du Pôle 504
— Les approximations numériques et les sciences d'observation 540
P. Boutroux. Sur une équation différentielle et une famille de fonctions entières 271
M. Brillouin. Actions héréditaires discontinues et équations différentielles qui en résultent 526
H. Brocard. Vingt-deux propositions de Fermat 621
B. Bydzowsky. Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane 383
E. Cartan. Sur le problème général de la déformation 397
A. Châtelet. Loi de réciprocité abélienne 137
M. Clapier. Sur la transformation de Lie 453
M. da Costa Lobo. La courbe décrite par le Pôle à la surface de la Terre 515
P.-J. Daniell. Stieltjes-Volterra Products 130
P. Delaporte. Sur la réforme du calendrier et le « Chronos » 622
A. Denjoy. Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus en relation avec les fonctions admettant une dérivée seconde généralisée 189
J. Deruyts. Sur la théorie algébrique des formes à séries de n variables 258
L.-E. Dickson. Some Relations between the Theory of Numbers and other Branches of Mathematics (*Conférence générale*) 41
— Homogeneous Polynomials with a Multiplication Theorem 215
Th. de Donder (et H. Vanderlinden). Quelques covariances de la gravifique 521
J. Drach. Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles 356
M. Dubecq. Sur l'enseignement en République Argentine 664
L.-P. Eisenhart. Conjugate Systems of Curves R and their Transformations 407
M. Farid Boulad. Un nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André 534
R. Fueter. Einige Sätze aus der Theorie der komplexen Multiplication der Elliptischen Funktionen 156
A. Gérardin. Décomposition des nombres. Jeux scientifiques inédits 613
— Machines à congruences A. Gérardin. Théorie et pratique 617
G. Greenhill. The Fourier and Bessel Function contrasted 636
E. Guillaume. Expression mono et polyparamétrique du temps dans la théorie de la Relativité 594

A. Guldberg. Une application des polynômes d'Hermite à un problème de statistique. 552
J. Hadamard. Sur la solution élémentaire des équations aux dérivées partielles, et sur les propriétés des géodésiques 179
— Sur le problème mixte pour les équations linéaires aux dérivées partielles 499
N. Hatzidakis. Sur quelques formules de géométrie cinématique 459
B. Hostinsky. Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable 437
— Sur un problème général de la mécanique vibratoire 561
C. Jordan. Sur la classification des constellations 410
J. Larmor. Questions in physical Indetermination (*Conférence générale*) 3
— The Pressure of Waves of Sound 586
— The Rays of Diffraction that accompany telescopic Images 589
S. Lefschetz. Quelques remarques sur la multiplication complexe 300
L. Maillard. Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébulaires 467
F.-H. Murray. A Method of classifying all the Polygons having a given Set of Vertices 445
N.-E. Nörlund. Sur les équations aux différences finies (*Conférence générale*) 98
M. d'Ocagne. Pratique courante de la méthode nomographique des points alignés, à propos de ses applications de guerre 631
K. Ogura. Sur la théorie de l'interpolation 316
L.-G. du Pasquier. Sur les nombres complexes généraux 164
— Sur les nombres transfinis 623
Fr. Rádl. Sur la transformation des équations différentielles linéaires ordinaires 265
G. Rémoundos. Sur le module et les zéros des fonctions analytiques 205
J. Rey-Pastor. Transformation conforme des aires infinies sur le plan ouvert 332
D. Riabouchinski. Sur le calcul des valeurs absolues 231
— Sur la résistance des fluides 568
N. Sakellariou. Sur les solutions discontinues du problème du Calcul des Variations dans l'espace à n dimensions 351
E. Schwoerer. Détermination de l'équation séculaire de la Terre dans la théorie d'Arrhénius 491
J. Sobotka. Sur la deuxième indicatrice d'une surface en un point ordinaire 441
S. Stoïlow. Sur la notion d'ordre d'un ensemble de mesure nulle 160
C. Störmer. Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. 243
T. Takagi. Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques. 185
J.-S. Taylor. The analytic Geometry of complex Variables, with some Applications to Function Theory 388
P.-A. Typpa. Sur une résolution graphique de l'équation du troisième degré 199
A. Ungerer. L'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg 656
C. de la Vallée-Poussin. Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent (*Conférence générale*) 57
G. Valiron. Sur la théorie des fonctions entières 323
H. Vanderlinden (et Th. de Donder). Quelques covariances de la gravifique 521
Th. Varopoulos. Sur le module maximum des fonctions algébroïdes 212
V. Volterra. Sur l'enseignement de la Physique Mathématique et de quelques points d'Analyse (*Conférence générale*) 81
J.-L. Walsh. On the Location of the Roots of the Derivative of a Polynomial 339
R. Wavre. Un système d'équations à une infinité d'inconnues 308
N. Wiener. Certain iterative Properties of bilinear Operations 176
— On the Theory of Sets of Points in terms of continuous Transformations. 312

Ch. Willigens. Représentation géométrique du temps universel dans la théorie de la Relativité 603
W.-H. Young. Le problème des aires et des volumes 123
S. Zaremba. Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier 343
P. Zervos. Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles 259
— Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés 329

ERRATA

Page xix, ligne 6, *au lieu de* « E. Charléty », *lire :* « S. Charléty ».

— xliii, — 24, *au lieu de* « Eisenhardt », *lire :* « Eisenhart ».

— xliv, — 4 et 11, Id. Id.

— 63, — 16, *au lieu de* (1908), *lire :* (1898).

— 66, — 15, *supprimer :* « à la suite de M. Vitali ».

— 145, note, ligne 2, *au lieu de* « idéanx », *lire :* « idéaux ».

— 408, ligne 15, *au lieu de* « *admets* », *lire :* « *admits* ».

— 555, — 20, dans la formule (3), *lire* « $A_n =$ » devant l'expression écrite.

Toulouse. — Imp. et Lib. Edouard Privat. — 3987

