AAG4063
UL FMT S RT a BL s T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 52001808//r62
035/1: : |a (RLIN)MIUG83-S20809
035/2: : |a (CaOTULAS)159944565
040: : |a CU |c CU |d NvU |d MiU
041: : |a engfregeritarus
050/1:0 : |a QA1 |b .I8
082/1: : |a 510.631
111:2 : |a International Congress of Mathematicians.
245:00: |a Proceedings.
260: : |a [v.p.]
300/1: : |a v. |b ill. |c 24-31 cm.
310: : |a Quadrennial
362/1:0 : |a 1897-
500/1: : |a Some volumes have title in translation: Actes, Atti, Comptes rendus (varies slightly), Trudy, Verhandlungen.
515/2: : |a No congresses held 1916, 1937-1949.
515/3: : |a Congresses held 1897-1912 called 1st-5th; those for 1920-1958 designated new series, 1st-8th.
546/4: : |a Contributions in English, French, German, Italian and Russian.

ATTI

DEL IV CONGRESSO INTERNAZIONALE

DEI

MATEMATICI

(Roma, 6-11 Aprile 1908)

PUBBLICATI

PER CURA DEL SEGRETARIO GENERALE

G. CASTELNUOVO

PROF. ALL'UNIVERSITÀ DI ROMA

VOL. II.

COMUNICAZIONI DELLE SEZIONI I e II.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

PARTE III

COMUNICAZIONI

SEZIONE I

ARITMETICA, ALGEBRA, ANALISI

P. GORDAN

GLEICHUNGEN 6^{ten} GRADES

Auf dem letzten Congress in Heidelberg habe ich ueber eine specielle Gleichung 6^{t} Grades vorgetragen, die mit der Gruppe von 360 Collineationen T zusammenhaengt, welche Herr VALENTINER entdeckt und Herr WIEMAN zuerst eingehend untersucht hat. Um diese Gleichung zu erhalten ging ich nach dem Vorgange des Herrn GERBALDI von 6 conjugirten Kegelschnitten aus

$$k_1\,,\,k_2\,,\,k_3\,,\,k_4\,,\,k_5\,,\,k_6\,,$$

welche durch die Formel

$$(k_\lambda k_\lambda k_\mu)^2 = 0 \quad \text{fuer } \lambda \gtrless \mu$$

mit einander zusammenhaengen.

Aus den k setzte ich die Form 6^{t} Grades

$$F = k_1^3 + k_2^3 + k_3^3 + k_4^3 + k_5^3 + k_6^3$$

zusammen und bezeichnete ihre Hessische Form vom 12^{t} Grade mit φ und eine weitere Covariante vom 30^{t} Grade mit ψ. Die Quotienten

$$v = \frac{\varphi}{f^2}\ ;\ w = \frac{\psi}{f^5}$$

sind absolute Covarianten, ich nannte sie Valentinerparameter.

Die Quotienten

$$\frac{x_2}{x_1}\,,\ \frac{x_3}{x_1}$$

sind durch Gleichungen vom 12^{t} und vom 30^{t} Grade als Funktionen von v und w gegeben, ich nenne sie die Valentinerfunktionen.

Die Quotienten

$$\frac{k^3}{F}$$

sind die Wurzeln einer speciellen Gleichung G von 6^{t} Grade, deren Coefficienten von v und w abhaengen.

Herr KLEIN hat nun diese Gleichung 6^t Grades zur Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$f = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \xi_4)(x - \xi_5)(x - \xi_6)$$

verwerthet ([1]).

Er bemerkte, dass es eine Curve 3^t Ordnung gäbe, deren Coefficienten von den ξ abhaengen und welche sich nicht aendert, wenn man die Valentinersubstitutionen T darauf anwendet und gleichzeitig in zugehoeriger Weise die ξ vertauscht. Die Valentinerparameter v, w eines Wendepunktes p dieser C_3 oder allgemeiner eines mit der Curve covariant verbundenen Punktes sind Funktionen der halbsymmetrischen Funktionen der ξ. Die Quotienten

$$\frac{k^3}{F}(p),$$

sind die Wurzeln einer Gleichung G.

Hieraus folgt, dass G die Normalform einer allgemeinen Gleichung 6^t Grades ist und dass f in G mittelst der Transformation

$$\frac{k_1^3}{F}(p) = \theta(\xi_1)$$

uebergeht.

Es handelte sich nun fuer mich darum die von Herrn KLEIN verlangten Operationen auszufuehren. Hier beschraenke ich mich auf die Beantwortung der beiden Fragen:

1. Die Aufstellung einer KLEIN'schen C_3.

2. Der Bestimmung eines Punktes p, welcher den Valentinersubstitutionen T unterliegt.

ad 1). Wir verwerthen die bereits frueher eingefuehrten Symbole g der 3^t Einheitswurzeln j und j^2, welche durch die Formeln definirt wurden

$$\begin{aligned}
1 &= g_1 g_2 g_k = g_3 g_4 g_k = g_5 g_6 g_k \\
j &= g_2 g_3 g_5 = g_2 g_4 g_6 = g_1 g_3 g_6 = g_1 g_4 g_5 \\
j^2 &= g_1 g_3 g_5 = g_1 g_4 g_6 = g_2 g_3 g_6 = g_2 g_4 g_5
\end{aligned}$$

Sie sind den Kegelschnitten k contragredient. Die Kegelschnitte

$$\begin{gathered}
g_1 k_1 + g_2 k_2 + g_3 k_3 + g_4 k_4 + g_5 k_5 + g_6 k_6 \\
\xi_1 g_1 k_1 + \xi_2 g_2 k_2 + \xi_3 g_3 k_3 + \xi_4 g_4 k_4 + \xi_5 g_5 k_5 + \xi_6 g_6 k_6 \\
\xi_1^2 g_1 k_1 + \xi_2^2 g_2 k_2 + \xi_3^2 g_3 k_3 + \xi_4^2 g_4 k_4 + \xi_5^2 g_5 k_5 + \xi_6^2 g_6 k_6
\end{gathered}$$

werden bei gleichzeitiger geeigneter Vertauschung der g bez. der ξ durch die Substitutionen T nicht geaendert. Dasselbe gilt fuer ihre Funktionaldeterminante Δ und

([1]) Siehe seine Mittheilung an Herrn CASTELNUOVO in den Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Bd. VIII, 1899, erstes Semester) ferner seinen Brief an Herrn HENSEL im 119^t Bande des Journals fuer reine und angewandte Mathematik bez. dem 61^t Bande der Mathematischen Annalen.

die aus ihnen gebildete HERMITE'sche Curve $s . \varDelta$ und s sind KLEIN'sche Curven C_3, ihre Coefficienten haben conjugirte Werthe.

ad 2). Die bilineare Form

$$\varDelta_s^2 \varDelta_x u_s$$

wird ebenfalls durch die T nicht geaendert; dasselbe gilt fuer alle Formen des Bueschels

$$P_\lambda = \varDelta_s^2 \varDelta_x u_s + \lambda u_x .$$

Das Verschwinden der Determinante von P_λ liefert eine kubische Gleichung, deren Coefficienten von den halbsymmetrischen Funktionen der ξ abhaengen.

Ich bezeichne die 3 Wurzeln mit ϱ, so dass die Determinante von

$$P_\varrho = \varDelta_s^2 \varDelta_x u_s + \varrho u_x = \Sigma a_{ik} x_i u_k$$

verschwindet. Der durch die Formeln

$$\begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + a_{31} p_3 &= 0 , \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + a_{32} p_3 &= 0 , \\ a_{13} p_1 + a_{23} p_2 + a_{33} p_3 &= 0 \end{aligned}$$

definirte Punkt p besitzt die von Herrn KLEIN verlangten Eigenschaften.

E. ZERMELO

UEBER DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Will man die Arithmetik begründen auf die Lehre von den natürlichen Zahlen als den *endlichen Anzahlen*, so handelt es sich vor allem um die Definition der *endlichen Menge*; denn die Anzahl ist ihrer Natur nach Eigenschaft einer Menge, und jede Aussage über endliche Anzahlen lässt sich immer ausdrücken als eine solche über endliche Mengen. Im folgenden soll nun versucht werden, aus einer möglichst einfachen Definition der endlichen Menge die wichtigste Eigenschaft der natürlichen Zahlen, nämlich das *Prinzip der vollständigen Induktion*, herzuleiten und gleichzeitig zu zeigen, dass die verschiedenen sonst gegebenen Definitionen der hier angenommenen aequivalent sind. Bei diesen Entwickelungen werden wir uns auf die von G. Cantor und R. Dedekind geschaffenen Grundbegriffe und Methoden der allgemeinen Mengenlehre zu stützen haben. Wir werden aber *nicht*, wie noch Dedekind in seiner grundlegenden Schrift: « Was sind und was sollen die Zahlen? » es tut, von der Annahme Gebrauch machen, dass es eine « unendliche Menge » gibt, d. h. eine solche, welche einem ihrer Teile (1) aequivalent ist.

Definition. — Eine Menge M heisst « endlich », wenn ein Teil P von M auf einen anderen Teil P′ in der Weise umkehrbar eindeutig abgebildet werden kann, das bei jeder beliebigen Zerlegung von M in zwei (komplementäre) Teile M_1, M_2 wenigstens einer der beiden Teile ein Element p von P enthält, dessen Bildelement p' dem anderen Teile angehört. Eine in dieser Weise auf sich abgebildete Menge M soll als eine « endliche Kette », jede Abbildung dieser Art als eine « Verschiebung » bezeichnet werden. Ein Element e von M, welches in P′ nicht vorkommt, heisst ein « Anfangselement », ein Element u, welches in P nicht erscheint, ein « Endelement » der endlichen Kette.

Satz I. — Jede endliche Kette enthält nur ein einziges Anfangselement e und ein einziges Endelement u. Jede Untermenge E von M, welche das Anfangselement e enthält und mit einem beliebigen Elemente p von P zugleich auch das ihm entsprechende Element p' von P′ enthält, ist mit M identisch; ebenso auch jede Unter-

(1) Der Ausdruck « Teil » soll hier überall nur in der Bedeutung einer *echten* Teilmenge, welche mindestens eine Element enthält, verstanden werden. Eine Menge M_1, deren sämtliche Elemente der Menge M angehören, bezeichne ich als eine « Untermenge von M ».

menge U von M, welche u und mit einem beliebigen Elemente p' von P′ zugleich das entsprechende Element p von P enthält. Innerhalb einer endlichen Kette kann also das Schlussverfahren der « vollständigen Induktion » nach beiden Seiten angewendet werden.

Beweis: Es sei e ein beliebiges Anfangselement und E_0 der gemeinsame Bestandteil aller Untermengen E von M, welche e und mit jedem p zugleich das entsprechende p' enthalten. Dann ist auch E_0 von derselben Beschaffenheit; denn e ist gemeinsames Element aller E, und wenn p allen E angehört, so gilt das gleiche auch von dem entsprechenden p'. Ferner ist jedes Element x von E_0, welches von e verschieden ist, ein Element p' von P′, und das entsprechende Element p von P ist gleichfalls Element von E_0. Denn in jedem anderen Falle würde die durch Unterdrückung von x aus E_0 entstehende Teilmenge E_x gleichfalls von der Beschaffenheit E sein, und E_0 wäre nicht der gemeinsame Bestandteil *aller* E. Da somit bei der betrachteten Verschiebung jedes Element von E_0 immer nur einem anderen Elemente von E_0 und niemals einem Elemente der Restmenge $M - E_0$ entsprechen kann, so muss nach der Definition der endlichen Kette diese Restmenge leer, d. h. $E_0 = M$ sein, und jede Menge E, welche E_0 umfasst, ist in der Tat mit M identisch. Da ferner ausser e jedes Element der Menge $E_0 = M$ Element von P′ ist, so gibt es ausser e kein Anfangselement. In analoger Weise beweist man die entsprechenden Sätze für die Untermengen von der Beschaffenheit U und für das Endelement u.

Satz II. — Jede endliche Menge M lässt sich als « doppelt-wohlgeordnete » Menge darstellen, d. h. in der Weise ordnen, dass jede Untermenge von M sowohl ein erstes als ein letztes Element enthält; und umgekehrt ist jede doppelt-wohlgeordnete Menge auch « endlich » im Sinne unserer Definition.

Beweis: Es sei M dargestellt als endliche Kette vermöge einer Verschiebung Φ. Dann gibt es Elemente q von M von der Beschaffenheit, dass mindestens eine Untermenge M_q von M, welche e und q enthält, bei einer gewissen Anordnung doppelt wohlgeordnet ist mit e als erstem und q als letztem Element, wobei jedem Element p das entsprechende Element p' unmittelbar folgt. Z. B. die aus dem Anfangselement e allein bestehende Teilmenge (e) besitzt diese Eigenschaft. Ist aber ein q von der betrachteten Eigenschaft verschieden von u und somit Element von P, so besitzt auch das vermöge Φ ihm entsprechende Element q' von P′ die verlangte Beschaffenheit; denn aus M_q erhält man eine neue doppelt-wohlgeordnete Menge $M_{q'}$, indem man das Element q' als letztes hinzufügt. Vermöge des vorhergenden Satzes I sind also alle Elemente von M, darunter auch das Endelement u, von der Beschaffenheit q. Die mit u endende doppelt-wohlgeordnete Menge M_u ist aber nach demselben Satze mit M identisch. Denn sie enthält e, und ist x irgend eines ihrer von u verschiedenen Elemente, so gibt es in M_u ein unmittelbar folgendes Element, welches nach der Definition der M_q mit dem x entsprechenden Elemente x' identisch sein muss, sodass auch x' der betrachteten Menge M_u angehört. Somit ist die ganze Menge M doppelt-wohlgeordnet.

Umgekehrt wird jede doppelt-wohlgeordnete Menge verwandelt in eine « endliche Kette », wenn man jedes Element x derselben auf das unmittelbar folgende x' abbildet. Hier umfasst nämlich P alle Elemente von M ausser dem letzten, P′ alle ausser dem ersten, da jedes Element ausser u ein unmittelbar folgendes, jedes Element ausser e ein unmittelbar vorangehendes besitzt. Bei einer beliebigen Zerlegung der Menge M in zwei Teile M_1, M_2 wird nun einer dieser Teile das letzte Element u der Gesamtmenge *nicht* enthalten, und das letzte Element u_1 dieses Teiles M_1 wird bei der Abbildung notwendig einem Elemente u'_1 von M_2 entsprechen. Die Abbildung genügt also allen Forderungen unserer Definition.

Satz III (Satz der vollständigen Induktion für endliche Cardinalzahlen). — Gilt eine Eigenschaft E für jede aus einem einzigen Element bestehende Menge, und gilt sie ausserdem jedesmal für eine Menge M, wo sie für eine durch Fortlassung eines einzigen Elementes m_1 aus M hervorgehende Menge M_1 gilt, so gilt sie allgemein für alle endlichen Mengen.

Beweis: Es sei M eine beliebige endliche Menge und dargestellt als eine endliche Kette mit dem Anfangselement e und dem Endelement u. Dann entspricht nach dem vorhergehenden Satze II jedem Element q von M eine doppelt-wohlgeordnete Menge M_q mit e als erstem und q als letztem Elemente von der dort betrachteten Beschaffenheit. Hier gilt für die Menge M_e, die sich auf das eine Element e reduziert, die vorausgesetzte Eigenschaft E, und ferner, wenn sie für M_q gilt, so gilt sie auch für $M_{q'}$, weil M_q durch Fortlassung des einen Elementes q' aus $M_{q'}$ hervorgeht. Somit gilt nach dem Satze I die betrachtete Eigenschaft für alle M_q und daher auch für M selbst, welches ja mit M_u identisch ist.

Satz IV. — Keine endliche Menge ist einem ihrer Teile äquivalent, und umgekehrt, jede Menge, welche keinem ihrer Teile äquivalent ist, lässt sich als endliche Kette darstellen.

Der Beweis für den ersten Teil des Satzes wird geführt durch vollständige Induktion vermöge des vorhergehenden Satzes und findet sich sowohl bei CANTOR als bei DEDEKIND, sodass eine Wiederholung hier überflüssig wäre. Die zweite Behauptung aber beweist man am einfachsten mit Hilfe meines Theorems von der *möglichen Wohlordnung beliebiger Mengen.* Wir denken uns die Menge M, welche keiner ihrer echten Teilmengen äquivalent ist, in beliebiger Weise wohlgeordnet und beweisen, dass sie dann auch *doppelt*-wohlgeordnet sein muss. Wäre nämlich M_1 eine Untermenge von M ohne letztes Element, so entspräche jedem Element x von M_1 innerhalb M_1 ein und nur ein unmittelbar folgendes Element x'. Dabei könnte aber das erste Element e_1 von M_1 unter den Elementen x' nicht vorkommen. Es wäre also M_1 umkehrbar eindeutig abgebildet auf eine echte Teilmenge M'_1, und auch die Gesamtmenge M müsste einem ihrer Teile äquivalent sein im Widerspruche mit der Voraussetzung. Somit kann eine Untermenge M_1 ohne letztes Element nicht existieren, sondern M ist in der Tat doppelt-wohlgeordnet und als endliche Kette darstellbar vermöge unseres Satzes II.

Die beiden von mir gegebenen *Beweise* des « Wohlordnungs-Satzes » (1), auf die sich die vorhergehende Deduktion gründet, benutzen allerdings ganz wesentlich das heute immer noch umstrittene « Auswahlprinzip ». Aber diese Voraussetzung scheint so wie so *unentbehrlich* für die Gültigkeit unseres Satzes IV, auch DEDEKIND bedient sich

(1) Mathematische Annalen, Bd. 59, p. 514; Bd. 65, p. 107.

ihrer, wenn schon in versteckterer Form, bei seinem sonst ganz anders geführten Beweise des vorliegenden Satzes. Ohne das Auswahlprinzip wäre wahrscheinlich unser Theorem überhaupt *unbeweisbar*, und es müsste dann ausser den endlichen und unendlichen Mengen noch eine *dritte* Gattung von Mengen als möglich zugelassen werden, über die wir gar nichts Positives aussagen könnten.

Bei der Herleitung unserer Sätze haben wir von der Existenz « aktual unendlicher » Mengen nirgends Gebrauch gemacht, und da sich alle Sätze über endliche Anzahlen mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion leicht beweisen lassen, so scheint es, als ob die Arithmetik der genannten Voraussetzung überhaupt nicht bedürfte. Dies ist auch für die « niedere Arithmetik », welche es nur mit rationalen Zahlen zu tun hat, durchaus zutreffend, es gilt aber nicht mehr für die höhere Analysis und die Funktionentheorie, in welchen Grenzbegriff und Irrationalzahl die führende Rolle spielen. In der Tat ist jede *Irrationalzahl* bestimmt durch einen « Schnitt » d. h. durch eine *unendliche* Menge rationaler Zahlen, und ebenso kann auch ein *Limes* immer nur durch eine *unendliche* Menge von Argument- und Funktionswerten definiert werden. Wer also wirklich Ernst machen wollte mit der Verwerfung des « Aktual-Unendlichen » in der Mathematik, der müsste folgerichtig bei der allgemeinen Mengenlehre und niederen Zahlentheorie stehen bleiben und auf die gesammte moderne Analysis Verzicht leisten.

J. HADAMARD

SUR CERTAINS CAS INTÉRESSANTS DU PROBLÈME BIHARMONIQUE

Le problème fondamental relative aux fonctions *biharmoniques* dans le plan, c'est à dire aux fonctions de deux variables X, Y qui vérifient l'équation

$$\Delta\Delta u = 0 ,$$

est celui qui consiste à déterminer une pareille fonction dans une aire S, connaissant les valeurs de u et celles de $\frac{du}{dn}$ sur le contour C de S.

Ce problème a été résolu d'une manière très élégante par M. ALMANSI (¹) dans un cas particulier étendu, celui où S est représentable d'une manière conforme sur le cercle de rayon 1 par l'intermédiaire de polynômes, la variable complexe Z qui décrit S étant liée à la variable complexe ζ qui décrit le cercle de rayon 1 par une relation de la forme

$$Z = \varpi(\zeta)$$

où ϖ est un polynôme entier.

Tel est, spécialement, le cas du *limaçon de PASCAL*, $\varpi(\zeta)$ étant alors quadratique

$$\left(\varpi(\zeta) = \left(\zeta + \frac{1}{2a}\right)^2\right) .$$

L'application de la méthode de M. ALMANSI m'a conduit à quelques résultats que je vais indiquer.

1. On peut d'abord remarquer que cette méthode peut être présentée sous la forme très simple suivante.

On doit se proposer, avec M. ALMANSI, de mettre la fonction cherchée u sous la forme

$$u = \mathrm{UX} + \mathrm{V} = 2\Re f_1(\zeta) \,.\, \Re\varpi(\zeta) + \Re f_2(\zeta) .$$

(¹) Rendiconti Circolo Matemat. Palermo, t. XIII, 1899. On doit à M. BOGGIO (Ist. Veneto, 1901-02, Atti Acc. Torino, etc.) plusieurs extensions de la méthode de M. ALMANSI.

U, V étant deux fonctions harmoniques et f_1, f_2 des fonctions analytiques, pendant que le symbole $\mathfrak{R}$ signifie « partie réelle de ».

Cette quantité u doit coincider, sur le cercle de rayon 1, avec une quantité donnée, à des termes du second ordre près, c'est à dire à des termes près de la forme $\Theta(|\zeta|^2 - 1)^2 = \Theta(\zeta\bar{\zeta} - 1)^2$ (en désignant par $\bar{\zeta}$ l'imaginaire conjuguée de ζ).

La quantité

$$2f_1(\zeta)\,\mathfrak{R}\varpi(\zeta) + f_2(\zeta) + (\zeta\bar{\zeta} - 1)^2\,\Theta - \mathrm{U}(\zeta, \bar{\zeta})$$

ou encore

$$f_1(\zeta)\,[\varpi(\zeta) + \bar{\varpi}(\bar{\zeta})] + f_2(\zeta) + (\zeta\bar{\zeta} - 1)^2\,\Theta - \mathrm{U}(\zeta; \bar{\zeta})$$

(U désignant les valeurs données exprimées en fonction de $\bar{\zeta}$ et de ζ) devra dès lors être purement imaginaire lorsque l'on prend pour $\bar{\zeta}$ l'imaginaire conjuguée de ζ. On est ramené à chercher les conditions pour qu'il en soit ainsi.

Je n'insiste pas sur le détail de ce calcul que l'on trouvera dans un Mémoire destiné à paraître prochainement dans le *Recueil des Savants étrangers*. J'ajouterai seulement que la méthode est susceptible d'être étendue, non seulement au cas où $\varpi(\zeta)$ est un polynôme d'ordre quelconque, mais à celui où $\varpi(\zeta)$ est une fonction entière.

2. Les résultats relatifs aux limaçon de Pascal conduisent à une conséquence remarquable, lorsqu'on y effectue certains passages à la limite.

Tout d'abord, en effet, les expressions trouvées demeurent valables lorsque le limaçon devient une *cardioïde* (la constante a devenant égal à $\frac{1}{2}$). En particulier, la *fonction de* Green $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ *d'ordre deux* relative à deux points A et B — laquelle représente la flexion produite en B par une force normale appliquée en A à une plaque élastique homogène et isotrope ayant la forme de l'aire donnée S — a une limite dans ces conditions.

Supposons maintenant qu'on fasse subir à la cardioïde ainsi obtenue une homothétie ayant pour pôle son point de rebroussement O, avec un rapport d'homothétie *infiniment grand.*

La limite de $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ existera encore (1).

Elle représentera la valeur de Γ pour le *plan sectionné* par une demi-droite Ox issue du point O et prolongée à l'infini *dans un seul sens.*

Considérons alors un contour fermé quelconque S dont on ne sait rien, si ce n'est qu'il comprend les points A et B à son intérieur, passe par le point O et ne rencontre en aucun autre point la demi-droite Ox.

Sous ces seules conditions, *la quantité* $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ *relative à ce contour sera toujours inférieure à une limite assignable à l'avance*, celle dont venons de parler.

3. Revenons maintenant à la valeur de $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ pour le limaçon de Pascal proprement dit ($a < \frac{1}{2}$).

M. Boggio, qui a, le premier, noté la signification physique de $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$, en a déduit l'hypothèse que $\Gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ était toujours positif.

(1) Voir son expression dans le Mémoire cité.

Malgré l'absence de démonstration rigoureuse, l'exactitude de cette proposition ne paraît pas douteuse pour les aires convexes. Mais il était l'intéressant d'examiner si elle est vraie pour le cas du limaçon de Pascal, qui est concave.

La réponse est affirmative. Il serait, il est vrai, assez compliqué d'étudier le signe de Γ_{B}^{A} pour des positions quelconques de A et B. Mais on constate aisément que, si l'un de ces deux points est très voisin du contour, la partie principale de Γ_{B}^{A} est positive (quel que soit l'autre point à l'intérieur).

Ceci n'aurait pas, *a priori*, la valeur d'une démonstration complète, mais suffit, au contraire, à fournir cette démonstration, si l'on tient compte de certains lemmes que j'ai établis dans le Mémoire précédemment cité et relatifs à la déformation du contour C. Ainsi Γ_{B}^{A} est toujours positif dans le cas du limaçon de Pascal.

Ce résultat doit d'autant plus être noté qu'il est une autre aire pour laquelle Γ_{B}^{A} peut devenir négatif.

Il s'agit, cette fois, d'une aire a deux contours (1): celle d'une couronne circulaire.

Le problème biharmonique dans l'aire ainsi définie a été traité, comme on sait, par MM. Almansi et Boggio. Les expressions auxquelles ils sont parvenus deviennent très simples lorsqu'on augmente indéfiniment le rayon extérieur et qu'on fait tendre vers zéro le rayon intérieur.

On constate que, dans ces conditions, la partie principale de Γ_{B}^{A} est proportionnelle au cosinus de l'angle sous lequel AB est vu du centre de la couronne.

Elle est donc négative si cet angle est obtus, contrairement à ce qu'exigerait notre proposition.

(1) M. Boggio m'a d'ailleurs fait remarquer qu'il n'avait pas eu en vue de telles aires en énonçant sa proposition.

É. BOREL

SUR LES PRINCIPES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Ces principes ont été beaucoup discutés en ces dernières années; je voudrais indiquer brièvement les conclusions personnelles auxquelles je suis arrivé à ce sujet, sans entrer dans la discussion de tous les arguments émis.

L'étude de ces arguments n'a fait que rendre plus nette l'opinion que j'émettais sous forme atténuée, il y a dix ans, dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions*: « nos connaissances précises sur les puissances diverses n'excèdent *guère* la remarque suivante: il y a des ensembles dénombrables et des ensembles non-dénombrables, cette dernière notion étant *surtout* négative ». J'écrirais aujourd'hui « n'excèdent *pas* la remarque suivante » et « cette notion étant *purement* négative ». Il ne me semble pas, en effet, que les efforts tentés dans ces dernières années aient résolu d'une manière satisfaisante ce que j'ai appelé l'« antinomie du transfini ». Je ne m'égarerai pas en discussions métaphysiques sur le sens du mot « indéfiniment »; que l'emploi de ce mot soulève des difficultés pour les philosophes, c'est un fait sans importance pour les mathématiciens: il leur suffit de savoir qu'ils s'entendent parfaitement entre eux, sans craindre aucune ambiguité. Lorsque l'un de nous dit qu'il considère la suite naturelle des nombres entiers, chacun comprend, et est assuré de comprendre *la même chose* que son voisin; c'est évidemment là le seul critérium possible de la validité d'un langage, celui auquel on est toujours forcé d'en revenir. Car les prétendus systèmes entièrement logiques reposent toujours sur le postulat de l'existence de la langue vulgaire; ce langage commun à des millions d'hommes, et avec lequel ils s'entendent à peu près entre eux, nous est donné comme un fait, qui impliquerait un grand nombre de cercles vicieux, s'il fallait le créer *ex nihilo*.

J'ai indiqué, il y a quelques années (¹), que l'antinomie du transfini se résoudrait si les mathématiciens arrivaient à avoir une idée commune du mot *transfiniment* aussi claire que celle qu'ils ont du mot indéfiniment. En posant ainsi la question, je ne prétendais pas la résoudre; je voulais surtout attirer l'attention sur le fait que notre conception de l'*indéfini* renferme quelque chose de plus que la pro-

(¹) Revue philosophique: *À propos de l'Infini Nouveau* (1899); *l'Antinomie du transfini* (1900).

position: *après chaque entier il y en a un autre*; car la proposition analogue: *au delà de chaque suite indéfinie de fonctions croissantes, il y en a une autre*, ne suffit pas à nous donner une idée nette du transfini.

Je serais aujourd'hui disposé, à la suite des efforts faits dans ces dernières années pour donner un sens clair au *transfini*, à résoudre la question par la négative, pour autant qu'il est possible d'affirmer un fait aussi purement négatif: je crois qu'il n'est pas possible d'arriver à une définition du transfini nous apparaissant comme aussi claire que celle de l'indéfini. Je pourrais me borner à constater les désaccords du grand nombre d'esprits éminents qui ont approfondi ces questions; mais je voudrais essayer de fournir un argument plus positif, qui n'est pas sans analogie avec les « paradoxes » connus, mais qui me parait cependant échapper aux principales objections qu'on leur a faites.

Il est bien connu que tout système de conventions énoncé en un nombre limité de mots, parmi lesquels peut figurer le mot *indéfiniment*, ne conduira jamais qu'à noter un ensemble dénombrable; il n'est donc pas possible que l'on arrive à une notation bien définie pour l'ensemble des nombres que M. Cantor appelle nombres de la seconde classe. Lorsque l'on raisonne sur ces nombres, ou sur un ensemble de même puissance, on ne peut donc faire que des raisonnements généraux et symboliques, dans lesquels l'ensemble considéré est représenté par un symbole unique. De tels raisonnements, en tant que raisonnements généraux, sont légitimes du moment qu'ils sont exempts de contradiction, mais ils sont en même temps vides de tout contenu précis. Pour pouvoir leur donner un contenu, il faudrait préciser la désignation des éléments de l'ensemble, et c'est précisément ce qui est impossible. La théorie des ensembles non-dénombrables se réduit donc forcément à une sorte d'algèbre logique dont les symboles ne recouvrent aucune réalité accessible, les divers mathématiciens ne pouvant être assurés qu'ils sont d'accord sur cette réalité, puisqu'ils n'en ont pas une représentation commune.

De tels raisonnements généraux et abstraits ne sont cependant pas toujours inutiles, car ils contribuent parfois à éclaircir les idées et peuvent, de plus, être souvent transposés dans un domaine plus concret; mais on ne doit pas se faire d'illusion sur le contenu réel de ces raisonnements généraux.

Il est nécessaire de dire un mot de la notion du *continu*, qui est le seul exemple d'ensemble non dénombrable qui soit bien connu, c'est à dire duquel les mathématiciens aient une notion claire et commune (ou croient avoir, ce qui est pratiquement la même chose). Je regarde cette notion comme acquise par l'intuition géométrique; on sait que la notion arithmétique complète du continu exige que l'on admette la légitimité d'une infinité dénombrable de choix successifs et arbitraires. Cette légitimité me paraît fort discutable, mais on doit cependant la distinguer essentiellement de la légitimité d'une infinité non-dénombrable de choix (successifs ou simultanés). Cette dernière notion me paraît, comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire, entièrement vide de sens. Lorsqu'il s'agit d'une infinité dénombrable de choix, on ne peut évidemment pas les effectuer tous, mais on peut du moins indiquer une marche telle que, cette marche étant fixée d'avance, on soit assuré que l'un quelconque des choix sera effectué au bout d'un temps fini; si donc deux systèmes donnés de choix sont distincts, on est certain que l'on s'en apercevra au bout d'un nombre fini d'opérations. Lorsque l'infinité des choix n'est pas dénombrable, il n'est pas possible de concevoir un moyen de la définir, c'est à dire de la distinguer d'une infinité analogue: il n'est donc pas possible de la regarder comme un être mathématique, pouvant être introduit dans les raisonnements.

Je devrais, pour terminer ce bref exposé, expliquer brièvement comme je concilie la notion du continu avec mon opinion sur notre défaut de notion des ensembles non-dénombrables. Le continu ne m'apparaît jamais comme donné dans son intégralité, au point de vue arithmétique; chacun de ses éléments peut être défini (ou du moins, il n'est aucun de ses éléments dont nous puissions actuellement affirmer qu'il ne peut pas être défini) (1); mais l'ensemble des éléments effectivement définis sera toujours dénombrable; c'est seulement sous une forme négative que nous sommes assurés de ne jamais l'épuiser ainsi (2).

(1) Voici pour donner une idée de mon point de vue, un problème qui me paraît être des plus importants dans la théorie arithmétique du continu: est-il ou non possible de définir un ensemble E tel que l'on ne puisse nommer aucun élément individuel de cet ensemble E, c'est à dire le distinguer sans ambiguité de tous les autres éléments de E. Voir Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Jordan, 1905).

(2) J'ajoute, en corrigeant les épreuves, que j'ai développé quelques-unes des idées émises ici dans une Note sur *Les «paradoxes» de la théorie des ensembles* (Annales de l'École Normale, octobre 1908).

F. RIESZ

STETIGKEITSBEGRIFF UND ABSTRAKTE MENGENLEHRE

Ich beginne damit, auseinanderzusetzen, in welchem Sinne ich hier heute über Stetigkeit spreche. Um einen Anhaltspunkt zu haben, knüpfe ich an jene Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie an, die an die Spitze ihrer Voraussetzungen die Stetigkeit, oder schaerfer gefasst, den Begriff der stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit stellen. Am bekanntesten sind jene von RIEMANN (1), LIE (2), und HILBERT (3). Bei RIEMANN ist der Begriff der stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit noch ein verschwommener; bei LIE ist er, wenigstens in dem Umfange, in dem er benützt wird, so weit definiert, indem er in der analytischen Formulierung des Problems implicite enthalten ist. Das wesentliche Moment aber, nämlich dass es sich bei jener Begriffsbildung in erster Reihe um eine Definition des Grenzelements, oder allgemeiner, um eine Definition der Verdichtungsstelle handelt, tritt erst bei HILBERT genügend scharf hervor; die Festlegung des Begriffs der Verdichtungsstelle wird dort dadurch geleistet, dass eine Möglichkeit der Abbildung der zu betrachtenden Gebilde auf gewisse Zahlenmannigfaltigkeiten postuliert wird, welche Abbildung auch gewisse angegebene Bedingungen erfüllt; für jene Zahlenmannigfaltigkeiten ist aber der Begriff der Verdichtungsstelle bereits festgelegt.

Ich will hier nun nicht näher diskutieren, wie jene Voraussetzungen, die durch Heranziehung der Zahlenmannigfaltigkeiten das geometrische Problem in ein arithmetisches verwandeln, mit unserer Raumanschauung, mit der Entstehung unserer geometrischen Grundideen, zusammenhängen. Dies würde zu weit führen. Ich verweise auf die sehr wertvollen, wenn auch nicht völlig ausgearbeiteten Entwickelungen des Herrn POINCARÉ (4); auch ich selbst hatte manches zu dieser Frage beigetragen (5). Wollten

(1) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Gesammelte Werke, 2. Auflage, S. 272).

(2) *Theorie der Transformationsgruppen* (3. Abschnitt).

(3) *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Mathematische Annalen 56. S. 381; wieder abgedruckt: *Grundlagen der Geometrie*, II. Auflage S. 121).

(4) *La valeur de la science.*

(5) *A térfogalon genezise* (Mathematikai és Physikai Lapok 1906, S. 97; 1907, S. 145); auch

wir auf diese Frage näher eingehen, so müsste in erster Linie der Begriff des physikalischen Kontinuums herangezogen werden, von dem uns dann ein nicht all zu sicherer Weg zu dem Begriffe des Raumes als mathematischen Kontinuums geleiten würde. Dieser Begriff des mathematischen Kontinuums ist es, der uns nun ausschliesslich beschäftigen soll.

Den Namen « mathematisches Kontinuum » soll zunächst schlechthin jede Menge führen, für welche der Begriff der Verdichtungsstelle irgendwie definiert ist. Wir fordern nur, dass diese Definition drei Postulaten genüge.

Als erstes Postulat stellen wir, dass jedes Element, das Verdichtungsstelle einer Teilmenge M ist, auch Verdichtungsstelle einer jeden, die Menge M enthaltenden Teilmenge sei. Das zweite Postulat ist, dass wenn eine Teilmenge in zwei weitere Teilmengen zerlegt wird, jede Verdichtungsstelle derselben zugleich Verdichtungsstelle wenigstens einer jener weiteren Teilmengen sei. Als drittes Postulat stellen wir endlich, dass eine Teilmenge, die aus einem einzigen Elemente besteht, keine Verdichtungsstelle besitze. Dadurch wird nämlich, nach Heranziehung des zweiten Postulates, gesichert, dass nur unendliche Teilmengen Verdichtungsstellen besitzen.

Bekanntlich genügen den gestellten Forderungen alle Mengen, für welche der Begriff der Verdichtungsstelle bisher irgendwie definiert wurde. Ich erinnere ausser den Punktmannigfaltigkeiten an die einfachen und mehrfachen Ordnungstypen, an die verschiedenen Räume von unendlich vielen Dimensionen, an die mannigfachen Funktionen-und Kurvenmannigfaltigkeiten. Ich hebe auch hervor, dass uns für die meisten derselben verschiedene Definitionen der Verdichtungsstelle geläufig sind, die auch nicht denselben Begriff zu decken brauchen. So leistet z. B. Herr Lindelöf [1], die Zerlegung einer abgeschlossenen Menge in eine perfekte und eine abzählbare Menge dadurch, dass er jene Verdichtungsstellen, in deren jeder Umgebung mehr als abzählbar viele Punkte der Menge liegen, zusammenfasst. Würde man nun nur diese Punkte als Verdichtungsstellen betrachten, so wäre damit eine von der gewöhnlichen verschiedene, aber unseren Forderungen noch genügende Verdichtung der Punktmengen definiert, für welche alle Ableitungsmengen perfekt wären. Für Funktionenmengen sind uns mannigfache wesentlich verschiedene Definitionen der Verdichtungsfunktion geläufig; und jede derselben findet in den entsprechenden Problemkreisen der Analysis auch Anwendung.

Die drei Forderungen, die wir hier an jede zulässige Definition der Verdichtungsstelle stellten, sind so weit gefasst, dass man auf ihnen allein nur sehr wenig weiter bauen kann. Ich musste schon an anderer Stelle, wo ich nach den allgemeinsten Eigenschaften der mathematischen Kontinua suchte, eine weitere Forderung einführen [2]. Diese Forderung, die jedenfalls auch durch alle hier zitierten verdichteten Mengen erfüllt ist, kommt im wesentlichen darauf hinaus, dass jede Verdich-

---

deutsch erschienen: *Die Genesis des Raumbegriffs* (Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, 1906, S. 309).

(1) Comptes Rendus 1903, S. 697, und Acta Mathematica 1905, S. 183.

(2) L. c. (Berichte aus Ungarn, 1906, S. 318).

tungsstelle einer Menge durch die Gesamtheit jener Teilmengen, in bezug auf welche sie Verdichtungsstelle ist, eindeutig bestimmt sei. Die Unabhängigkeit dieser Forderung von den ersten drei lässt sich leicht nachweisen. Will man die Theorie weiter ausbauen, so muss man weitere Forderungen aufstellen, und die mathematischen Kontinua auf Grund der Erfülltheit oder nicht Erfülltheit dieser Forderungen in Klassen einteilen. Man gelangt zu solchen Forderungen, indem man die Hauptsätze, die für einzelne der schon bekannten mathematischen Kontinua gelten, in ihre einfachsten Aussagen zergliedert. Als Vorbild dienen dabei die mannigfachen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Die Theorie des mathematischen Kontinuums kommt dann in wesentlichen darauf hinaus, dass man jene Forderungen in bezug auf ihre wechselseitige Abhängigkeit untersucht. Eingehender ist dies bisher nur für eine Klasse von Forderungen durch Herrn Fréchet geschehen (1).

Die Hauptforderung, die Herr Fréchet an alle von ihm betrachteten Klassen mathematischer Kontinua stellt, ist die, dass jede Verdichtungsstelle einer Teilmenge Grenzelement einer in jener Teilmenge enthaltenen abzählbaren Folge sei. Herr Fréchet kommt jedenfalls zu sehr schönen Resultaten; es genügt aber schon auf die verschiedenen Ordnungstypen hinzuweisen, bei denen das Schnittprinzip das natürlichste Verdichtungsprinzip ist, um zu sehen, dass die Fréchet-sche Voraussetzung eine sehr spezielle ist.

Es fehlt uns hier an Zeit, um auf diese Fragen näher einzugehen. Ich erwähne nur ein einfaches Beispiel, dass schon in die Natur unserer Probleme einzuleuchten vermag. Für eine Teilmenge eines mathematischen Kontinuums gelte der Bolzano-Weierstrass-sche Satz, d. h. jede transfinite Unterteilmenge desselben besitze wenigstens eine Verdichtungsstelle. Dann folgt schon nach Heranziehung unserer drei Fundamentalpostulate und des in neuester Zeit viel diskutierten Auswahlsprinzipes, dass auch jede abzählbare Folge von transfiniten Unterteilmengen, von denen jede in der vorhergehenden enthalten ist, wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzt. Umgekehrt folgt die erste Aussage aus der zweiten als spezieller Fall ohne Anwendung irgend eines Postulates oder Prinzipes. In der Theorie der Punktmengen nennt man die Mengen, die die angeführte Eigenschaft besitzen, im Endlichen gelegen. Nun lässt sich in jener Theorie der zweite Satz leicht derart verallgemeinern, dass an Stelle der abzählbaren Folge von Mengen ein beliebiges einfach geordnetes System von im Endlichen gelegenen Punktmengen tritt, von denen jede in den vorhergehenden enthalten ist; auf den Ordnungstypus des Systems kommt es dabei nur so weit an, dass das System keine letzte Menge enthalten darf. Dieser letztere Satz hängt nun nicht mehr auf so einfache Weise mit dem Bolzano-Weierstrass-schen zusammen, wie der erstere. Betrachtet man nämlich die zweite Zahlenklasse als mathematisches Kontinuum, u. zw. derart, dass man nur die Limeszahlen abzählbarer Folgen als Verdichtungsstellen definiert, so genügt diese Definition sicher den drei Fundamentalpostulaten; auch gilt für jede transfinite Teilmenge die Aussage des Bolzano-Weierstrass-schen Satzes, wie auch der erstgegebenen Verallgemeinerung des-

(1) Thèse, Paris, 1906; abgedruckt auch in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 22, 1906. Vgl. auch einige Noten desselben Verfassers in den Comptes Rendus, 1904-1905.

selben (1) ; dagegen bleibt die zweite Verallgemeinerung hier nicht mehr bestehen (2).

Wir brechen nun hier mit diesen Fragestellungen ab und wenden uns an eine neue Frage. Wir hatten vorhin alle Mengen, für welche der Begriff der Verdichtungsstelle definiert wurde, schlechthin « mathematisches Kontinuum » genannt. Man könnte nun aus dieser Nomenklatur die Behauptung herauslesen, dass sämtliche sogenannte « Stetigkeitseigenschaften » sich auf den Begriff der Verdichtungsstelle zurückführen lassen. Das diese Behauptung eine irrige wäre, lässt schon jene Uneinigkeit ahnen, die bei Untersuchungen einzelner konkreter Mengen auf ihre Stetigkeitseigenschaften noch heute in der Terminologie herrscht, und die auch oft zu Missverständnissen und zu Polemik geführt hat. Die hiedurch entstandene Verschwommenheit der Begriffe hat sich dann in eine Klassifikation der Stetigkeitseigenschaften nach Ordnungsstetigkeit, Zahlenstetigkeit etc. aufgelöst.

Erlauben Sie mir, dass ich die Sachlage an einem einfachen Beispiele erläutere. Es handle sich um sogenannte Zahlenstetigkeit. Man betrachte folgende beide Zahlenmengen als selbständige Mengen:

a) Die Menge aller reeller Zahlen mit Ausnahme einer einzigen z. B. mit Ausnahme von O.

b) Die Menge aller reeller Zahlen mit Ausnahme einer Strecke, z. B. mit Ausnahme der Zahlen zwischen 0 und 1, auch 0 und 1 mit ausgenommen.

Der Begriff der Verdichtungsstelle werde für beide Mengen auf die bei Zahlenmengen übliche Weise festgelegt. Dann sind beide Mengen in bezug auf ihre Verdichtung equivalent; sie sind von demselben Verdichtungstypus, d. h. sie lassen sich derart eindeutig umkehrbar aufeinander abbilden, dass den Verdichtungsstellen der Teilmengen die Verdichtungsstellen der Bildteilmengen entsprechen. Untersucht man dagegen die beiden Mengen in bezug auf ihre Zusammenhangsverhältnisse, und zwar auf Grund jener tieferliegenden Definition des Zusammenhanges, die auf dem Begriffe des « écart » beruht, so erscheint die erste Menge als zusammenhängend, die zweite Menge aber als zweiteilig. Wir erkennen somit, dass die Zusammenhangsverhältnisse, die man doch zu den Stetigkeitseigenschaften zählt, in unserem Falle durch den Begriff der Verdichtungsstelle allein sich nicht mehr beschreiben lassen.

Aehnliches Beispiel bietet auch die Abbildung einer vom Mittelpunkte befreiten

(1) Die Giltigkeit des Auswahlsprinzipes ist hier durch die Wohlordnung gesichert.

(2) Ich benütze hier die Gelegenheit, um auf zwei weitere einfache Verallgemeinerungen jener Sätze hinzuweisen, die nun nichts mehr mit dem Ordnungsbegriffe zu thun haben. Dieselben sind meines Wissens bisher nicht ausgesprochen. Sie lauten:

a) Hat ein System von Punktmengen, deren Vereinigungsmenge im Endlichen gelegen ist, die Eigenschaft, dass wenn irgend welche Menge des Systems in eine endliche Anzahl von Teilmengen zerspaltet wird, eine derselben mit jeder Menge des Systems wenigstens je eine Verdichtungsstelle gemeinsam hat, so besitzen auch sämtliche Mengen des Systems wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle.

b) Hat ein System von Punktmengen, deren Vereinigungsmenge im Endlichen gelegen ist, die Eigenschaft, dass jede endliche Anzahl jener Mengen wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzt, so besitzen auch sämtliche Mengen des Systems wenigstens eine gemeinsame Verdichtungsstelle.

Kreisfläche auf die Fläche eines ohne inneren Grenzkreis gedachten Kreisringes. Wir wollen auch auf die Abbildung eines offenen JORDAN-schen Gebietes auf ein ebenfalls offenes, einfach zusammenhängendes, aber nicht JORDAN-sches Gebiet hinweisen.

Unsere Beispiele zeigen, dass die Art der Verdichtung einer Mannigfaltigkeit noch nicht sämtliche Stetigkeitseigenschaften derselben festlegt. Ich behaupte nun, dass man einen neuen Begriff, jenen der Verkettung einführen kann, durch welchen sich sämtliche bisher behandelte Mannigfaltigkeiten, bei denen es auf Stetigkeitseigenschaften ankommt, in bezug auf dieselben beschreiben lassen. Ich verstehe darunter folgendes: Durch irgend ein Prinzip werde für jedes Paar von Teilmengen der Mannigfaltigkeit festgelegt, ob dieselben mit einander verkettet oder nicht verkettet sind. Dabei stellen wir zunächst wieder nur drei Fundamentalpostulate auf. Erstens verlangen wir, dass wenn zwei Mengen verkettet sind, auch jedes Paar von Mengen, die je eine jener Mengen enthalten, verkettet sei. Zweitens sei, wenn die Mengen M_1 und M_2 verkettet sind, und wenn man die Menge M_1 in zwei Teile spaltet, wenigstens eine dieser Teilmengen mit M_2 verkettet. Drittens sollen zwei Mengen, die nur aus je einem Elemente bestehen, niemals verkettet sein. Unsere Postulate sind unmittelbare Verallgemeinerungen jener Fundamentalforderungen, die wir an die Definition der Verdichtungsstelle gestellt haben.

Für Punktmannigfaltigkeiten lässt sich eine Verkettung z. B. auf Grund des « écart » oder des Distanzbegriffes definieren, indem man zwei Punktmengen dann und nur dann als verkettet betrachtet, wenn sie Paare von Punkten enthalten, die ohne zusammenzufallen, beliebig nahe liegen. Dasselbe Verkettungsprinzip lässt sich auf jede Mannigfaltigkeit anwenden, für welche ein Begriff des « écart » definiert ist. Es können aber auch mannigfache andere Prinzipe für die Verkettung der verschiedenen Mannigfaltigkeiten herangezogen werden.

Es stellen sich hier wieder analoge Fragestellungen axiomatischer Art, wie wir ihnen schon bei den Verdichtungstypen begegnet sind. Wir gehen auf dieselben nicht ein. Dagegen möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf jene Fragen lenken, die die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Begriffe « Verdichtung » und « Verkettung » von einander betreffen.

Durch jede Verkettung einer Mannigfaltigkeit ist zugleich eine zugehörige Verdichtung derselben festgelegt. Ein Element gelte dabei dann und nur dann als Verdichtungsstelle einer Menge, wenn das Element, als Menge betrachtet, mit derselben verkettet ist. Es leuchtet unmittelbar ein, dass die so definierte Verdichtung den gestellten Forderungen genügt.

Hier schalte ich noch eine vierte Forderung ein. Ich verlange nämlich noch von den zu betrachtenden Verkettungstypen, dass zwei Teilmengen, die beide mit demselben einzelnen Elemente verkettet sind, d. h. die eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzen, auch miteinander verkettet seien. Bei jenen Verkettungstypen, die in der Analysis eine Rolle spielen, ist diese Forderung stets erfüllt.

Wir wollen nun eine Verkettung und eine Verdichtung derselben Mannigfaltigkeit, und mit ihnen auch die entsprechenden Verkettungs-und Verdichtungstypen, (diese Ausdrücke brauchen nicht näher zu erläutert werden), die miteinander in der vorher detaillierten Beziehung stehen, verträglich nennen. Dann folgt aus der Definition, dass ein Verkettungstypus den verträglichen Verdichtungstypus eindeutig festlegt. Dagegen aber sehen wir schon aus unseren obigen Beispielen, dass mit demselben Verdichtungstypus im allgemeinen mehrere Verkettungstypen verträglich sind. Unter denselben ist nun einer dadurch ausgezeichnet, dass Mengen, die in ihm verkettet sind, sicher auch in allen übrigen vertraeglichen Typen verkettet sind. Zwei Mengen gelten in ihm dann und nur dann für verkettet, wenn entweder die eine eine Verdichtungsstelle der anderen enthält, oder aber, wenn beide Mengen eine gemeinsame Verdichtungsstelle besitzen. Man kann diesen Verkettungstypus als den mit dem bezüglichen Verdichtungstypus verträglichen « losesten » Verkettungstypus bezeichnen.

Und nun noch eine letzte Problemstellung. Das Beispiel irgend einer nicht abgeschlossenen Punktmenge, die unabhängig von dem Raume, in dem sie gelagert ist, als selbstständige Menge in ihrer auf Grund des Distanzbegriffes vorher definierten Verkettung betrachtet wird, zeigt, dass ein Verkettungstypus im allgemeinen kein losester Verkettungstypus ist. Wir wissen aber auch, dass sich jede solche, im Endlichen gelegene Punktmenge durch Adjunktion der fehlenden Verdichtungsstellen derart ergänzen lässt, dass die durch die neue Verdichtung bestimmte loseste Verkettung für die alte Menge die vorgeschriebene Verkettung bestimmt. Unser Problem lautet nun: Es sollen einfache Bedingungen dafür angegeben werden, dass ein Verkettungstypus sich als Teiltypus eines losesten Verkettungstypus auffassen lässe. Die Wichtigkeit unserer Problemstellung liegt darin, dass die Stetigkeitseigenschaften der losesten Verkettungstypen sich schon mittels des Begriffes der Verdichtungsstelle beschreiben lassen.

Auf die Beantwortung des Problems kann ich hier nicht in extenso eingehen. Ich beschränke mich auf einige allgemein gefasste Andeutungen. Es kommt uns zunächst darauf an, ideale Verdichtungsstellen zu definieren. Für konkrete Mannigfaltigkeiten kann man hiefür natürlich spezielle, einfache Vorschriften angeben, die sich der Natur jener Mannigfaltigkeiten anpassen. Eine allgemein anwendbare Definition idealer Verdichtungsstellen ist folgende: Man betrachte als ideale Verdichtungsstelle jedes System von Teilmengen, die folgenden Bedingungen genügt:

1. Jede Obermenge einer Menge des Systems gehört auch dem Systeme an.
2. Wird eine Menge des Systems in zwei Teilmengen zerlegt, so gehört wenigstens eine derselben dem System an.
3. Jedes Paar von Mengen des Systems ist miteinander verkettet.
4. Das System ist vollständig, d. h. es ist in keinem reicheren Systeme, das die Bedingungen 1-3. befriedigt, enthalten.
5. Es gibt kein Element, das Element oder Verdichtungsstelle sämtlicher Mengen des Systems wäre.

Die auf diese Art eigenführten idealen Verdichtungsstellen werden nun als gemeinsame Verdichtungsstelle sämtlicher Mengen des definierenden Systems betrachtet. Es muss dann aber auch für die Verdichtung jener idealen Elemente unter sich gesorgt werden. Damit dies möglich sei, muss man schon gewisse Voraussetzungen über die Natur des untersuchten Verkettungstypus machen. Man muss ebenfalls durch entsprechende Voraussetzungen dafür sorgen, dass jedes Paar verketteter Mengen, für welches es kein Element der ursprünglichen Mannigfaltigkeit gibt, das Verdichtungsstelle beider Mengen oder aber Element der einen Menge und Verdichtungsstelle der anderen wäre, dass jedes solche Paar verketteter Mengen einem Systeme der obigen Art angehöre. Dabei muss man auch fortwährend darauf achten, dass die Fundamentalpostulate nicht verletzt werden. Man wird endlich bei der Auswahl der Voraussetzungen auch noch die Forderung, mit der ich nun jetzt das Problem ergänze, vor Augen behalten, dass man von geschlossenen Klassen von Verkettungstypen, die durch einfache gemeinsame Eigenschaften ausgezeichnet sind, zu ähnlich geschlossenen Klassen von Verdichtungstypen gelange.

Geehrte Sektion! Ich schliesse meine Ausführungen. Es war nicht mein Zweck, etwas abgeschlossenes zu bieten; ich wollte nur Ihre Aufmerksamkeit auf die Probleme lenken, die sich im Grossen und Ganzen jedem aufdrängen, der, um die Stetigkeitseigenschaften konkreter Mannigfaltigkeiten auf ihre Abhängigkeit voneinander zu analysieren, sich des Mikroskopes der abstrakten Mengenlehre bedient. Ich bin auch nicht der erste, der die Gelegenheit eines internationalen Mathematiker-Kongresses benützt, um der abstrakten Mengenlehre, und zwar jenem Zweige derselben, von dem hier die Rede war, Propaganda zu machen. Vor acht Jahren hatte Herr Hadamard in Paris ein Problem, das diesem Zweige der abstrakten Mengenlehre angehört, gestellt; er hatte auch zugleich auf die Notwendigkeit einschlägiger Untersuchungen, die über die Theorie der Punktmengen hinausgehen, hingewiesen. Damals war dieser ganze Gedankenkreis den meisten Mathematikern fremd; es waren höchstens die Elemente der Lehre der Punktmannigfaltigkeiten in der Mathematik eingebürgert. In der kurzen Zeit, die seither verflossen ist, hat sich nun nicht nur diese Lehre weit entwickelt; es hat sich auch die Beschäftigung mit anderen konkreten Mannigfaltigkeiten Bahn gebrochen und die Analysis mit fruchtbaren Ideen und Resultaten bereichert. Dadurch ist nun einer Lehre der Verdichtungstypen und der Verkettungstypen ein Material zur Verfügung gestellt, das nicht verdient, unausgenützt zu bleiben.

P. KOEBE

UEBER EIN ALLGEMEINES UNIFORMISIERUNGSPRINZIP

Das Problem der Uniformisierung einer algebraischen oder einer beliebigen analytischen Kurve, d. i. das Problem der Bestimmung solcher Hülfsveränderlichen, durch deren Einführung als unabhängige Variable die Koordinaten der Punkte der betreffenden Kurve eindeutige analytische Funktionen werden, ist in organischer Weise mit der Theorie der automorphen Funktionen verknüpft und bezeichnet recht eigentlich den Kernpunkt dieser Theorie.

Nachdem insbesondere Schwarz in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe und Schottky in seiner Doktordissertation über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche klassische Beispiele gegeben hatten, Beispiele, welche übrigens bereits Riemann bekannt gewesen sind, wie aus seinem Nachlass hervorgeht, waren es Klein und Poincaré, welche zu Anfang der 80-er Jahre das grosse Gebäude der Theorie der automorphen Funktionen errichteten und die Idee der Uniformisierung beliebiger *algebraischer* Kurven in systematischer Weise zur Geltung brachten.

Unter den von Klein und Poincaré damals in Betracht gezogenen Uniformisierungstheoremen (*Fundamentaltheoremen*) will ich hier nur drei näher bezeichnen.

I. Die Riemannsche Fläche, welche die Verzweigung der gegeben zu denkenden algebraischen Funktion $y(x)$ geometrisch darstellt, denke man sich längs p die Fläche nicht zerstückenden *Rückkehrschnitten* aufgeschnitten; (mit p wird hierbei das Geschlecht der Riemannschen Fläche bezeichnet). Dann gibt es eine auf der zerschnittenen Fläche eindeutige analytische Funktion $t(x,y)$, durch deren Vermittelung diese Fläche umkehrbar eindeutig und konform auf einen die t-Ebene einfach bedeckenden $2p$-fach zusammenhängenden Bereich abgebildet wird, dessen Begrenzungslinien paarweise durch lineare (loxodromische) Substitutionen auf einander bezogen erscheinen. Die Grösse t ist bis auf eine lineare Substitution vollständig bestimmt. Die erwähnten Substitutionen, durch deren Vermittelung die Begrenzungslinien des t-Bereichs auf einander bezogen erscheinen, sind durch die Abbildungsbedingung bereits mitbestimmt (Klein, Math. Ann., Bd. 19 und 21).

I, a. Als ein wichtiger interessanter Spezialfall des Theorems I kann mittelbar der Satz angesehen werden, dass es möglich ist, einen beliebigen $(p+1)$-fach zusammenhängenden, die Ebene einfach bedeckenden Bereich mit $p+1$ Begrenzungslinien umkehrbar eindeutig und konform auf einen von $p+1$ *Vollkreisen* begrenzten Bereich abzubilden.

II. Die Riemannsche Fläche denke man sich (wie in der Theorie der Abelschen Integrale), längs p Rückkehrschnittpaaren aufgeschnitten, welche die Riemannsche Fläche in bekannter Weise in eine p-fach zusammenhängende Fläche mit p Begrenzungslinien verwandeln. Dann gibt es eine im Innern der aufgeschnittenen Fläche eindeutige Funktion $t(x, y)$ durch deren Vermittelung diese Fläche auf einen die t-Ebene einfach bedeckenden p-fach zusammenhängenden Bereich abgebildet wird, wobei jede einzelne Begrenzungslinie des letzteren das Bild eines Rückkehrschnittpaares darstellt und dementsprechend in vier Stücke zerfällt, deren je zwei gegenüberliegende durch eine parabolische Substitution auf einander bezogen erscheinen. Die beiden zu einer Begrenzlinie des t-Bereiches gehörenden parabolischen Substitutionen haben einen und denselben Fixpunkt, welcher ausserhalb des betrachteten Bereichs liegt ([1]).

III. Die Riemannsche Fläche denke man sich in kanonischer Weise in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, indem man die unter II genannten p Rückkehrschnittpaare derartig deformiert, dass die p Kreuzungspunkte nach einem Punkte der Riemannschen Fläche zusammenrücken. Dann gibt es eine innerhalb der zerschnittenen Fläche eindeutige analytische Funktion, durch deren Vermittelung diese Fläche umkehrbar eindeutig und konform auf ein *Grenzkreispolygon* abgebildet wird. Die Randsubstitutionen werden bei diesem Polygone von $2p$ hyperbolischen Substitutionen gebildet (Klein, Math. Ann., 20 und 21; Poincaré, Acta math., 1 und 4).

Die Herren Klein und Poincaré bedienten sich ursprünglich zum Beweise der Uniformisierungstheoreme einer von ihnen als *Kontinuitätsmethode* (*méthode de continuité*) bezeichneten Methode. Abgesehen von dem Falle des Theorems III ist jedoch eine wirkliche sorgfältigere Durchführung dieser Methode bisher nicht einmal versucht worden, ein Umstand, der übrigens die Bedeutung und Tiefe des dieser Methode zu Grunde liegenden Gedankens in keiner Weise beeinträchtigt ([2]). Für den Fall des Theorems III sind später noch andere Methoden angegeben und ausgearbeitet worden, so die *Methode des Linienelements*, welche, der Idee nach auf Schwarz zurückgehend, das Abbildungsproblem mit dem Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ in Verbindung bringt und von Picard und Poincaré durchgeführt wurde ([3]), die Methode der *Ueberlagerungsfläche*, welche, der Idee nach meines Wissens ebenfalls auf Schwarz zurückgehend, das Abbildungsproblem mit dem Problem der konformen Abbildung einer aus der gegebenen aufgeschnittenen Riemannschen Fläche durch einen Ueberlagerungsprozess entspringenden unendlich-vielblättrigen einfach zusammenhängenden Fläche auf das Innere des Einheitskreises in Verbindung bringt und zuerst von Herrn Poincaré in der Abhandlung: *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions analytiques* (Bull. de la soc. math. de France, t. 11, 1883) in Angriff genommen worden ist, schliesslich die *Iterationsmethode*, welche, am Vorbilde der Jacobischen Transformationsketten orien-

([1]) Theorem II ist meines Wissens bisher nicht ausdrücklich formuliert worden, obgleich es, wie mir scheint, besonders hervorgehoben zu werden verdient.

([2]) Mit der Kontinuitätsmethode hat sich in neuerer Zeit besonders Herr R. Fricke beschäftigt (Math. Annalen, Bd. 59). Siehe auch Fricke's Heidelberger Vortrag (1904).

([3]) Eine darauf sich beziehende Abhandlung des Herrn Schwarz ist bisher nicht veröffentlicht worden.

tiert und mit der Methode der Ueberlagerungsfläche verwandt, von Herrn SCHLESINGER im Falle $p = 0$ durchgeführt worden ist.

Die neuesten Entwickelungen über das Uniformisierungsproblem haben an die erwähnte Arbeit POINCARÉ's im Bulletin angeknüpft. Die grosse und spezifische Bedeutung der in dieser Abhandlung zum ersten Male angewandten Methode der Ueberlagerungsfläche beruht darauf, dass sie sich nicht nur auf das Problem der Uniformisierung beliebiger algebraischer, sondern überhaupt *beliebiger analytischer* Kurven bezieht. Wie bereits erwähnt wurde, ist für die Methode der Ueberlagerungsfläche die Zurückführung des Uniformisierungsproblems auf das Problem der konformen Abbildung des allgemeinsten einfach zusammenhängenden nach Art einer Riemannschen Fläche über der Ebene ausgebreiteten Bereichs (von welchem nur die inneren Punkte in Betracht gezogen werden), auf einen die Ebene *einfach* bedeckenden Bereich charakteristisch. Dieser Abbildungssatz wurde von POINCARÉ l. c. unter der wesentlichen Restriction bewiesen, dass der gegebene einfach zusammenhängende Bereich mindestens *drei* Punkte der Ebene *unbedeckt* lässt, ein Umstand, welcher für das Problem der Uniformisierung analytischer Funktionen die Einführung von *Ausnahmestellen* notwendig machte. Eine Klärung und Lösung der hier vorliegenden Schwierigkeit bezeichnete Herr HILBERT in seinem bekannten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris (1900) gehaltenen Vortrage « Mathematische Probleme » als « äusserst wünschenswert ».

Nach den Veröffentlichungen von OSGOOD, BRODÉN, JOHANSSON, welche an die genannte POINCARÉ-sche Arbeit anknüpfen, gelang im Jahre 1907 die vollständige Lösung des oben bezeichneten Abbildungsproblems. Es ergab sich, dass jede einfach zusammenhängende endlich- oder unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche oder überhaupt Fläche im Raum umkehrbar eindeutig und konform auf die einfach zu denkende Fläche entweder eines Kreises oder der ganzen Ebene excl. oder der ganzen Ebene incl. des unendlich fernen Punktes abgebildet werden kann.

Anfang November 1907 erschien die den Gegenstand betreffende Arbeit POINCARÉ's (1). Ich selbst habe in den Göttinger Nachrichten zwei Beweismethoden für den genannten Satz veröffentlicht (2).

Die erste von mir veröffentlichte Methode besteht darin, den gegebenen einfach zusammenhängenden Bereich B als Grenze $B = \lim_{n=\infty} B_n$ von lauter einfach zusammenhängenden Bereichen $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1}, \ldots$ aufzufassen und die letzteren Bereiche durch Vermittelung von Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ umkehrbar eindeutig und konform auf einblättrige Kreisflächen mit wachsendem Radius derart abzubilden, dass ein im Innern von B_1 fest gewählter Punkt 0 jedesmal in den Nullpunkt, den Mittelpunkt der Kreisflächen übergeht und dass im Punkte 0 der Differentialquotient $\dfrac{d\varphi_n(x)}{dx}$ für jeden Wert des Index n gleich *eins* ist. Jenachdem der Radius der Kreisflächen mit wachsendem Wert des Index n gegen einen endlichen Wert oder gegen den Wert ∞ konvergiert, leistet die Grenzfunktion $\varphi(x) = \lim \varphi_n(x)$

(1) H. POINCARÉ, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (Acta math., t. 31).

(2) *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* (Erste Mitteilung vom 12. Mai 1907, zweite Mitteilung vom 23. Nov. 1907).

eine konforme Abbildung der Fläche B auf das Innere einer Kreisfläche oder auf die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes. Der Fall, in welchem die konforme Abbildung der Fläche B auf die ganze Ebene incl. des unendlich fernen Punktes stattzufinden hat, tritt nur für geschlossene Riemannsche Flächen vom Geschlecht *null* ein und ist bekanntlich bereits von SCHWARZ (1870) erledigt worden.

Die zweite von mir veröffentlichte Methode stimmt mit der Methode des Herrn POINCARÉ im Grundgedanken überein. Die einfach zusammenhängende Fläche B wird in der Form $B = B_1 + B'$ dargestellt gedacht, wobei B_1 ein einfach zusammenhängendes ganz im Innern von B enthaltenes Stück von B, B' den übrigen zweifach zusammenhängenden Teil von B bezeichnet, welch letzterer sicher *eine* Begrenzungslinie von einfacher Natur aufweist. Es wird nun der Nachweis geführt, dass es möglich ist, den Bereich B' umkehrbar eindeutig und konform auf die schlicht zu denkende Fläche eines Kreisrings K abzubilden, dessen einer Begrenzungskreis sich auf einen Punkt reduzieren kann. Die Fläche $B = B_1 + B'$ ist nunmehr im Sinne der konformen Abbildung aequivalent der einfach zusammenhängenden *idealen* Fläche $\bar{B} = B_1 + K$, welch letztere nach den Methoden von SCHWARZ (« gürtelförmige Verschmelzung ») auf einen natürlichen einfach zusammenhängenden Bereich der gewünschten Beschaffenheit abgebildet werden kann.

Die Tragweite des soeben besprochenen allgemeinen Abbildungssatzes über einfach zusammenhängende Bereiche für das Uniformisierungsproblem wird durch die Bemerkung charakterisiert, dass mit Hülfe dieses Abbildungssatzes alle in Rahmen der Betrachtung *reeller* Substitutionsgruppen mit endlich oder unendlich vielen Gruppenerzeugenden möglichen Uniformisierungstheoreme sich erledigen oder, besser gesagt, alle Uniformisierungstheoreme, welche auf *Verschiebungsgruppen der absoluten (elliptischen, parabolischen* oder *hyperbolischen) Ebene* führen (1), eine Einschränkung, welche übrigens die zu uniformisierende analytische Kurve durchaus willkürlich lässt und von zentraler Bedeutung ist.

Mit Hülfe des genannten allgemeinen Abbildungssatzes gelingt es insbesondere auch das zu Anfang formulierte KLEIN-POINCARÉ-sche Theorem III zu beweisen (2). Unerledigt bleiben jedoch die andern oben formulierten Theoreme, welche auf imaginäre Substitutionsgruppen führen. Die Idee der Ueberlagerungsfläche kann offenbar auch bei diesen Theoremen zur Anwendung gebracht werden. Fasst man etwa das erste Theorem ins Auge, bei welchem man sich die gegebene Riemannsche Fläche vom Geschlecht p durch p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte aufgeschnitten denkt, so besitzt die analytische Funktion, welche die konforme Abbildung der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche auf den *unbekannten* Fundamentalbereich mit loxodromischen Randsubstitutionen vermittelt, die Eigenschaft, einen gewissen *unendlich vielfach zusammenhängenden* Bereich B, welcher der gegebenen Riemannschen Fläche übergelagert zu denken ist und aus dieser durch einen leicht übersehbaren Prozess entspringt, umkehrbar eindeutig und konform auf ein die Ebene des gesuchten Fundamentalbereichs nirgends mehrfach bedeckendes Gebiet abzubilden,

(1) S. die vier zu Anfang meiner ersten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven aufgestellten Theoreme.

(2) S. den Abschnitt « Der Fall der algebraischen Kurven » am Schlusse der ersten Mitteilung.

welch letzteres von der Gesamtheit aller derjenigen Bereiche gebildet wird, die aus dem Fundamentalbereich vermöge der Substitutionen der durch den Fundamentalbereich bestimmten Gruppe entspringen. Der Bereich B ist nichts anderes als die vollständige Riemannsche Fläche, welche die Verzweigung der unbekannten Uniformisierungstranszendenten $t(x, y)$ darstellt, und es ist wesentlich, dass diese Riemannsche Fläche als *bekannt* gelten darf.

Wir werden so darauf geführt, ein *allgemeines Abbildungsprinzip* aufzustellen, nämlich das folgende:

Ein allgemeines Abbildungsprinzip: Ist B irgend eine nach Art einer Riemannschen Fläche über der Ebene ausgebreitete Fläche, welche endlich- oder unendlich-vielblättrig, von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhange ist und welche sich im Sinne der Analysis situs wie ein einblättriger Bereich verhält, d. h. welche keinen sie nicht zerstückenden ganz im Innern verlaufenden Rückkehrschnitt zulässt, so ist es möglich, die Fläche B umkehrbar eindeutig und konform auf einen die Ebene nirgends mehrfach bedeckenden Bereich abzubilden. Die Abbildungsbeziehung erstreckt sich dabei, allgemein zu reden, nur auf die inneren Punkte.

Die Tragweite dieses allgemeinen Abbildungsprinzips für die Durchführung der Uniformisierung algebraischer und überhaupt analytischer Kurven ist die denkbar weiteste. Beachtet man nämlich, das die Riemannsche Fläche, welche die Verzweigung irgend einer für die Kurve (x, y) zu bestimmenden Uniformisierungstranszendenten $t(x, y)$ darstellt, alle in unserem allgemeinen Abbildungsprinzip für die Fläche B geforderten Eigenschaften haben muss, so erkennt man die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Uniformisierungsprinzips:

Ein allgemeines Uniformisierungsprinzip: Jede im Sinne der Analysis situs mögliche Uniformisierung einer beliebigen analytischen Funktion kann auch funktionentheoretisch verwirklicht werden.

Einen vollständigen Beweis dieses allgemeinen Uniformisierungsprinzips bezw. des genannten allgemeinen Abbildungsprinzips werde ich demnächst in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veröffentlichen.

Der Fall, in welchem die auf einen schlichten Bereich abzubildende Fläche B einen Zusammenhang von *endlicher* Ordnung $p+1$ hat, lässt sich durch folgende Bemerkungen erledigen. Analog wie bei der zweiten Methode zum Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für *einfach* zusammenhängende Bereiche, zerlegen wir den $(p+1)$-fach zusammenhängenden Bereich in Stücke, nämlich in ein $(p+1)$-fach zusammenhängendes Stück, welches $p+1$ Begrenzungslinien von einfacher Natur besitzt und in $p+1$ zweifach zusammenhängende Bereiche, von welch letzteren nur bekannt ist, dass jeder derselben wenigstens *eine* Begrenzungslinie von einfacher Natur besitzt. Jeder einzelne dieser zweifach zusammenhängenden Bereiche kann auf Grund meiner zweiten Mitteilung (l. c.) auf einer Kreisring abgebildet werden. Wir können daher von der gegebenen $(p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche dadurch zu einer anderen *idealen* $(p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche übergehen, dass wir an Stelle jedes der genannten $p+1$ zweifach zusammenhängenden Teilstücke der Fläche B die äquivalenten Ringgebiete substituiren. Die so erhaltene *ideale* Fläche erscheint jetzt unmittelbar als Teil einer *idealen geschlossenen* einfach zusammenhängenden Fläche, insofern als jeder der genannten Kreisringe zur vollen Kreisfläche ergänzt gedacht werden kann. Diese geschlossene Fläche lässt sich nun nach den SCHWARZ'schen Methoden auf die einfach zu denkende Fläche der Vollkugel abbilden, eine Abbildung, bei welcher die gegebene $(p+1)$-fach zusammenhängende Fläche in einen einblättrigen Bereich verwandelt wird. q. e. d.

Unter den schlichten Bereichen von endlicher Ordnung des Zusammenhanges sind vom Standpunkte der Theorie der konformen Abbildung diejenigen besonders ausgezeichnet, deren Begrenzung von Vollkreisen gebildet wird. Es gilt der Satz, dass jeder beliebige $(p+1)$-fach zusammenhängende schlichte Bereich umkehrbar eindeutig und konform auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich abgebildet werden kann und zwar, abgesehen von einer linearen Substitution, nur auf eine Weise (1). Wir können also sagen: Jeder endlich vielfach zusammenhängende schlichte Bereich lässt sich auf eine und nur eine Weise als Kreisbereich normieren. Obgleich es mir bisher nicht gelungen ist, das Analoge für den allgemeinsten unendlichvielfach zusammenhängenden schlichten Bereich darzutun, möchte ich doch der Vollständigkeit halber den analogen allgemeinen Satz wenigstens formulieren:

EIN ALLGEMEINES NORMIERUNGSPRINZIP: Jeder die Ebene nirgends mehrfach bedeckende endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängende Bereich lässt sich auf eine und, abgesehen von einer linearen Substitution, nur eine Weise konform und umkehrbar eindeutig auf einen Kreisbereich abbilden. Insbesondere können zwei Kreisbereiche auf einander bezw. ein Kreisbereich auf sich selbst nur durch lineare Substitutionen bezogen werden.

Anmerkung: Die Bezeichnung eines Bereichs als Kreisbereich ist hierbei im weitesten Sinne zu verstehen, insofern als für jeden einzelnen Begrenzungskreis eines derartigen Bereichs die Möglichkeit offen gelassen werden muss, dass derselbe sich auf einen Punkt reduziert.

Ist der auf einen Kreisbereich abzubildende unendlich-vielfach zusammenhängende gegebene Bereich in Bezug auf die Axe des Reellen zu sich selbst symmetrisch und so beschaffen, dass seine sämtlichen Begrenzungen die Axe des Reellen treffen, so gelingt die Abbildung auf einen Kreisbereich nach derselben Methode, welche ich für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche dieses Typus auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart mitgeteilt habe (2).

Die Bedeutung des allgemeinen Normierungsprinzips für das Uniformisierungsproblem beruht darauf, dass durch Zuhülfenahme dieses Prinzips unter gewissen Voraussetzungen der linear-automorphe Charakter der Uniformisierungstranszendenten erzielt werden kann.

(1) S. die Voranzeige des Verfassers: *Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. Imaginäre Substitutionsgruppen* (Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren). Gött. Nachr., Sitzung vom 22. Febr. 1908.

(2) S. die Arbeit des Verfassers: *Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1908).

P. BOUTROUX

L'INVERSION DES FONCTIONS ENTIÈRES

Soit $y(x)$ une fonction multiforme pourvue d'une infinité des branches. Les branches de $y(x)$ se permutent suivant un certain mécanisme autour d'un ensemble infini de points critiques x_j (dont plusieurs, ou une infinité, peuvent d'ailleurs être confondus). Supposons alors que nous voulions approfondir l'étude de $y(x)$, et, par exemple, trouver la manière *la plus naturelle* d'exprimer y et x en fonction uniforme d'une même variable t. Je crois que la voie à suivre est la suivante: 1° analyser le mécanisme des permutations suivant lequel s'échangent les branches de $y(x)$; 2° construire une fonction uniforme $x(t)$ dont l'inverse présente le même mécanisme de permutations et, plus précisément, les mêmes points critiques que $y(x)$. Alors y sera une fonction uniforme (d'ailleurs inconnue) de t.

Pour réaliser ce programme (conçu principalement en vue de l'étude des équations différentielles) j'ai commencé par ébaucher une classification des divers mécanismes de permutations que peuvent présenter les fonctions multiformes. Il est à noter que ce qui entre en considération dans cette classification, c'est l'*ordre* suivant lequel les diverses déterminations de $y(x)$ [en un point fixe] peuvent se succéder. C'est grâce à l'introduction de cette notion d'ordre que nous pouvons recueillir sur l'ensemble des déterminations y des enseignements que n'aurait pas donnés la seule *Mengenlehre*. Mais précisons le problème, en fixant, par exemple, notre attention sur un ensemble infini de points critiques algébriques x_j convergeant vers un même point limite X, lequel est un point singulier transcendant de y. Etudier l'ensemble des permutations opérées par les x_j, c'est en somme étudier la nature de la singularité X, et ainsi nous sommes amenés à tenter une classification des points singuliers transcendants X. C'est ce que j'ai cherché a faire, en étudiant tout d'abord, parmi les points X, ceux que j'ai appelés « *points de première espèce* », points caractérisés par le fait que l'ensemble total des déterminations y_j permutées par les x_j (et l'ensemble des x_j eux-mêmes) se laissent ranger (*dans l'ordre où on les obtient*) *suivant une série unilinéaire*. Un tel ensemble de déterminations y_j (*ensemble de première espèce*, dirons-nous) est facilement représentable sur une surface de Riemann (où y_j est uniforme), tandis que la représentation sur une telle surface d'un ensemble d'y_j d'espèce supérieure à la première sera probablement toujours artificielle. Mais, ne nous avançons pas tant, et contentons-nous de dire qu'*un ensemble de déterminations* $y_j(x)$ *de première espèce peut toujours être représenté en fonction uniforme d'un paramètre* t *dont* x *est fonction entière*, et qu'inversement *l'ensemble des déterminations de la fonction inverse d'une fonction entière ou méromorphe* $x(t)$ *se présente comme une suite d'ensembles de première espèce* (*suite finie, si la fonction est de genre fini*).

Ainsi, tant que nous nous bornerons aux mécanismes de première espèce, la seconde moitié du programme que j'ai tracé tout à l'heure reviendra à l'étude de l'inversion des fonctions entières et méromorphes. De cette étude je voudrais presenter quelques échantillons qui, mieux qu'un exposé abstrait, feront comprendre ma pensée.

§ 1.

Considérons la fonction entière de x

$$Z = \lambda e^{\frac{2+\lambda}{\lambda} ix} \cos x - i\,(2+\lambda) e^{\frac{2+\lambda}{\lambda} ix} \sin x\,.$$

Cette fonction est construite de façon que la fonction inverse $x(Z)$ admette comme points critiques (permutant deux déterminations) les points

$$Z = \lambda e^{\frac{2ki\pi}{\lambda}}\,, \quad x = k\pi \quad (k \text{ entier quelconque}).$$

Séparons dans $\frac{1}{\lambda}$ la partie réelle de la partie imaginaire en posant $\frac{1}{\lambda} = \alpha + \beta i$. Nous allons distinguer différents cas et énumérer, dans chacun d'eux, les principales propriétés de $Z(x)$.

1°) α *négatif*, $\beta \neq 0$. — Menons une coupure de Z_k à l'*infini* suivant le prolongement du rayon OZ_k, et considérons, lorsque Z décrit la coupure Z_k, les deux chemins décrits à partir de $x = k\pi$, par les deux déterminations x confondues en Z_k. L'ensemble de ces deux chemins forme une ligne L_k allant de l'infini à l'infini et *coupant l'axe réel au point* $x = k\pi$. Opérant de même pour tous les points Z_k, on constate que les lignes L_k ne se coupent pas entre elles et découpent (dans le plan x) une suite infinie de régions R_k (limitées, chacune, par deux lignes L_k d'indices consécutifs). Les régions R_k jouissent de cette propriété fondamentale que *dans chacune d'elles la fonction* $Z(x)$ *prend une et une seule fois toute valeur donnée.*

Il est facile de construire une surface de Riemann S, formée de feuillets superposés F_k, sur laquelle $x(Z)$ soit uniforme; il suffit de relier chaque feuillet au suivant par une ligne de croisement menée suivant une coupure x_k. Alors on peut dire que *la fonction entière* $Z(x)$ *réalise la représentation conforme de la surface* S *sur le plan, chaque feuillet étant représenté par une région* R_k.

L'ensemble des déterminations de $x(Z)$ est d'ailleurs un « ensemble de première espèce » parce que, si, partant d'une détermination $x_0(\overline{Z})$, on veut engendrer une suite infinie de déterminations nouvelles, *on ne peut procéder que d'une manière:* on doit opérer la suite des permutations $\ldots Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}\ldots$ (*j'entends* franchir successivement les coupures $\ldots Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}\ldots$) *en suivant l'ordre des indices croissants ou décroissants.*

Remarquons que les points $Z_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}, \ldots$ convergent vers 0. Dès lors, pour tourner successivement autour de cette suite de points, on a le choix entre plusieurs chemins. On peut faire tourner Z indéfiniment dans un sens convenable sur le contour d'un cercle *fixe* de centre $Z = 0$: alors x décrit un chemin infini sur lequel Z reste indéterminé. On peut aussi faire tourner Z sur un contour qui s'enroule en spirale autour des points $Z_k, Z_{k+1}, \ldots$ et converge vers l'origine: alors x décrit un chemin infini sur lequel Z tend vers 0.

Nous grouperons donc de la manière suivante l'ensemble des chemins qui s'éloignent indéfiniment sur le plan x: 1° chemins contigus sur lesquels Z tend vers le point $Z = 0$ (en s'enroulant une infinité de fois autour de ce point): l'ensemble de ces chemins forme une sorte de bande que j'appelle *langue finie* (*du second type*) *où* Z *tend vers* 0; 2° chemins sur lesquels Z augmente indéfiniment: leur ensemble forme une *langue infinie*; 3° chemins sur lesquels Z est indéterminée: l'ensemble de ces chemins forme deux « *languettes d'indétermination* » séparant la langue finie de la langue infinie.

Cela posé, il est loisible d'introduire dans l'expression de Z un ou plusieurs paramètres: en faisant varier ces paramètres d'une manière continue, on obtiendra une infinité de fonctions entières $Y(x)$ dont *les inverses auront un ensemble de points critiques convergeant vers* $Y = 0$ *et opérant suivant le même mécanisme que l'ensemble des points* Z_k; quand on passera de Z à Y, les régions R_k, les langues, les languettes se déformeront, mais conserveront leurs propriétés. Inversement *si l'on se donne un ensemble quelconque de points* $\ldots \eta_{k-1}, \eta_k, \eta_{k+1}, \ldots$ *convergeant vers* $Y = 0$, *il est possible en général* (1) *de construire une fonction entière* $Y(x)$ *dont l'inverse admette des points* η_k *comme points critiques opérant suivant le mécanisme décrit ci-dessus.*

de L_k. Nous aurons dès lors recours au procédé suivant: posons $Z'_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, et appelons « coupure Z'_k » le rayon $OZ'_k\infty$ prolongé de 0 à l'infini; lorsque Z décrit la coupure Z'_k, la détermination x qui prend en Z'_k la valeur $k\pi + \frac{\pi}{2}$ décrit une ligne L'_k allant de l'infini à l'infini et coupant l'axe réel. D'ailleurs les lignes L'_{k-1}, L'_{k+1} sont de part et d'autre de L'_k, en sorte que les L'_k, découpent dans le plan x une infinité de régions R'_k, dont chacune contient une et une seule valeur critique $x = k\pi$. Alors les régions R'_k jouissent de cette propriété fondamentale que dans chacune d'elles *la fonction* $Z(x)$ *prend deux fois au plus toute valeur donnée.*

Construisons une surface de Riemann S' formée de feuillets superposés F'_k reliés respectivement les uns aux autres par les coupures Z'_k, Z'_{k+1}, ...: *la fonction entière* $Z(x)$ *réalise la représentation conforme de la surface* S' *sur le plan.*

L'ensemble des déterminations de $x(Z)$ est un « ensemble de première espèce » parce que si, partant d'une détermination $x_0(\overline{Z})$ on veut engendrer une suite infinie de déterminations nouvelles, *on ne peut procéder que d'une manière*: on doit franchir la série des coupures Z'_k, Z'_{k+1}, c'est-à-dire opérer une infinité de permutations successives autour de $Z = 0$ *directement* (¹). D'ailleurs, sur chacune des déterminations obtenues (soit sur celle, x_j, qui est représentée sur le feuillet F'_j) se branchera une détermination x'_j permutable autour de Z'_j. Mais, si l'on abandonne la série des x_k pour passer de x_j à x'_j, on ne pourra obtenir une infinité de déterminations nouvelles qu'à la condition de revenir de x'_j à x_j pour reprendre la série des x_k. C'est pourquoi nous disons que les permutations Z'_j sont des *permutations-impasses.*

Cela posé, on voit facilement que, pour faire traverser à x la série des régions R'_k, il suffit de mouvoir Z (toujours dans le même sens) sur le contour d'un cercle *fixe* de centre $Z = 0$ ou sur une spirale convergeant vers $Z = 0$. L'ensemble de chemins qui s'éloignent indéfiniment dans le plan x se groupent alors comme il suit: 1° chemins contigus sur lesquels Z tend vers $Z = 0$ (sans s'enrouler une infinité de fois, — sur un rayon, si l'on veut): j'appellerai l'ensemble de ces chemins *langue finie* (*du premier type*); 2° chemins sur lesquels Z augmente indéfiniment (*langue infinie*); 3° entre les deux langues, chemins sur lesquels Z reste indéterminée (*languettes d'indétermination*).

Introduisant maintenant des paramètres dans l'expression de Z, on construira (comme dans les cas où $\alpha < 0$) une infinité de fonctions entières $Y(x)$ dont les inverses présentent le même mécanisme de permutations que la fonction $x(Z)$.

4°) α *positif*, $\beta = 0$. — Même mécanisme, les points Z_k convergeant vers tous les points d'une courbe fermée ou coïncidant avec un nombre fini de points.

5°) $\alpha = 0$. — Cas limite des cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$. En ce cas, on sera libre de choisir l'une ou l'autre des deux divisions du plan x en régions R_k ou en régions R'_k.

(¹) L'origine est donc, dans le cas présent, point transcendant *directement* critique. Au contraire, lorsque $\alpha < 0$, l'origine est seulement *point-limite de points critiques algébriques.*

§ 2.

Si j'ai insisté quelque peu sur le mécanisme des permutations qui échangent entre elles les diverses déterminations de x (Z), c'est que *nous retrouvons exactement le même mécanisme lorsque nous considérons l'inverse d'une fonction entière quelconque* $Y(x)$. Disons en quelque mots comment les choses se passent pour une telle fonction.

Envisageons *a priori* dans le plan x les chemins qui s'éloignent indéfiniment; sur ces chemins, Y peut tendre vers un limite finie ou infinie, ou rester indéterminée. Ainsi nous distinguerons dans le plan des x des langues finies, des langues infinies et des languettes d'indétermination. D'ailleurs il résulte d'un théorème de M. Denjoy que le nombre total des langues présentées par $Y(x)$ est un nombre fini si la fonction $Y(x)$ est du genre fini.

Cela posé, considérons trois langues contiguës, par exemple une langue L, dans laquelle Y tend vers $Y = 0$, flanquée de deux langues L_1 et L_2. On démontre que L_1 et L_2 sont nécessairement des langues ou Y tend vers $Y = \infty$. De plus, soit c (dans le plan Y) un cercle arbitrairement petit de centre $Y = 0$: il existe (dans le plan x), entre (¹) L et L_1 un chemin d s'éloignant indéfiniment (dans une languette d'indétermination) sur lequel $Y(x)$ repasse une infinité de fois par la série des valeurs Y situées sur le contour c. Prenons alors un point fixe $\overline{Y}$ sur le contour c, et appelons $\ldots \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}, \ldots$ la suite des points de d où l'on a $Y(x) = \overline{Y}$. Je démontre que, *pourvu que j dépasse un certain nombre fini, le mécanisme qui permute entre elles la suite des déterminations* $\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1} \ldots$ *de* $x(\overline{Y})$ *est nécessairément l'un des mécanisme que j'ai décrits au* § 1. Il est alors possible de délimiter dans le plan x une série unilinéaire de régions R_k (ou R'_k), contenant respectivement les points $\overline{x}_k, \overline{x}_{k+1} \ldots$ dans chacune desquelles $Y(x)$ ne prend qu'une (ou deux) fois toute valeur donnée. [Les régions R_h traversent L et sont à cheval sur les langues L_1 et L_2; les régions R'_k sont à cheval sur les langues L et L_1].

On éclaircira d'une manière analogue le cas où $Y(x)$ présente deux langues infinies contiguës séparées par une languette d'indétermination. [Ce cas est semblable à celui que nous avons rencontré au § 1 dans l'hypothèse où $\beta = 0$]. Et l'on parviendra ainsi au résultat suivant que j'énonce dans le cas des fonctions de genre fini:

Une fonction entière de genre fini présente un nombre fini de couples de langues donnant naissance à un certain nombre (fini) de familles de régions R_k *ou* R'_k. Chacune de ces régions a, par définition, deux lignes frontières seulement. Mais entre les régions de familles différentes il se trouvera des *régions raccords* (dont le nombre total est fini) qui auront plus de deux lignes frontières. L'inverse de la fonction entière admet plusieurs suites unilinéaires de déterminations, ces suites se branchant les unes sur les autres autour de certains points critiques (en nombre fini) qui jouent le rôle de raccords.

(¹) Les choses se passent exactement de même entre L et L_2.

M. PETROVITCH

UNE CLASSE REMARQUABLE DE SÉRIES ENTIÈRES

1. Nous appellerons *polynome* $\Omega(z)$ tout polynome en z à coefficients réels jouissant de cette propriété que le polynome composé de l'ensemble d'un nombre quelconque de ses premiers termes ait tous ses zéros réels. Si donc

$$f_p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p \tag{1}$$

est un polynome $\Omega(z)$, l'équation algébrique

$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \tag{2}$$

a toutes ses racines réelles quel que soit n inférieur ou égal à p.

Cherchons les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. En désignant par

$$\varphi_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{3}$$

la transformée $\frac{1}{z}$ de l'équation $f_n(z) = 0$, les polynomes $\varphi_n(z)$ peuvent être définis par la relation de recurrence

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z\,\varphi_{n-1}(z) + a_n \\ \varphi_0(z) &= a_0 \end{aligned} \tag{4}$$

La courbe

$$y = \varphi_n(z) \tag{5}$$

n'est autre que la courbe

$$y = z\,\varphi_{n-1}(z) \tag{6}$$

après qu'on ait déplacé l'axe des z parallélement à lui-même de la longeur $-a_n$ vers les y négatifs ou positifs suivant que a_n est positif ou négatif. En construisant de proche en proche les courbes (5) en partant des courbes

$$y = \varphi_{n-1}(z) \tag{7}$$

on s'assure facilement que:

1° Si l'on met à part les courbes

$$y = \varphi_1(z) \quad \text{et} \quad y = \varphi_2(z)\,,$$

la dernière étant assujettie à l'unique condition

$$a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0}\,,$$

la courbe (7) coupant son axe des z en $n-1$ points réels, pour que la courbe (5) coupe aussi son axe des z en n points réels, il faut et il suffit que le déplacement a_n de cet axe soit inférieur ou égal au plus petit déplacement ξ_n qu'il faudrait lui imprimer dans le sens indiqué par le signe de $-a_n$ pour qu'il vienne toucher la courbe (6);

2° Si l'on a en valeur absolue $a_n < \xi_n$ la courbe (5) coupe son nouvel axe en n points réels distincts; si $a_n = \xi_n$ ces points sont encore réels mais il y en a des confondus;

3° Dans le cas où le déplacement $-a_{n-1}$ a eu sa plus grande valeur possible, le déplacement $-a_n$ relatif à la courbe suivante n'est possible, que dans un seul sens, positif ou négatif suivant que le point de contact de la courbe (7) avec son axe des z correspond à un minimum ou à un maximum de cette courbe;

4° Si l'axe des z relatif à la courbe (7) touche cette courbe en plusieurs points, dont les uns sont ses minima, les autres ses maxima, aucun déplacement $-a_n$ n'est plus possible.

Ceci étant, désignons par $\Delta_n(a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots a_n)$ le discriminant du polynome (3) et considérons l'équation algébrique en x

$$(8) \qquad \Delta_n(a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots a_{n-1}\,, x) = 0$$

dont les racines réelles x fournissent les grandeurs des déplacements $-a_n$ qu'il faut imprimer à l'axe des x de la courbe (7) pour qu'il vienne toucher la courbe (5).

Ainsi, les deux premières équations $\Delta_n = 0$, correspondant à $n = 3$ et $n = 4$, debarassées de la racine simple évidente $x = 0$ communes à toutes ces équations, seraient

$$27\,a_0^2 x + (4\,a_1^3 - 18\,a_0\,a_1\,a_2) = 0$$

$$256\,a_0^3 x^2 + (144\,a_0\,a_1^2 a_2 - 192\,a_0^2 a_1 a_3 - 128\,a_0^2 a_2^2 - 27\,a_1^4)\,x +$$
$$+ (144\,a_0^2 a_2 a_3^2 + 18\,a_1^3 a_2 a_3 + 16\,a_0\,a_2^4 - 6\,a_0\,a_1^2 a_3^2 - 80\,a_0\,a_1\,a_2^2 a_3 - 4\,a_1^2 a_2^3) = 0\,.$$

Si l'on désigne par λ_n la plus petite racine positive de l'équation (8) et par μ_n la plus petite (en valeur absolue) racine négative de la même équation, il est manifeste que le plus grand déplacement positif ξ_n est égal à λ_n et le plus grand déplacement négatif ξ_n égal à μ_n.

On arrive ainsi, d'une manière bien intuitive, au théorème suivant:

Pour que le polynome $f_p(z)$ soit un polynome $\Omega(z)$ il faut et il suffit

1° *qu'on ait*

$$a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0};$$

2° *que chaque coefficient $a_n (2 < n \leq p)$ soit compris entre les deux valeurs correspondantes λ_n* et μ_n.

Dans un cas limite les deux valeurs λ_n et μ_n peuvent avoir la valeur commune zéro: *dans ce cas la valeur $a_n = 0$ est la seule qui satisfasse aux conditions du problème.*

Remarquons que dans un polynome $\Omega(z)$ il ne peut y avoir deux coefficients a_i consécutifs nuls, ni un coefficient nul entre deux coefficients affectés d'un même signe; tous les coefficients sont, d'ailleurs, assujettis à la condition

$$(9) \qquad (n-1)\, a_{n-1}^2 - 2n a_n a_{n-2} > 0$$

à laquelle on arrive en exprimant que la derivée d'ordre $n-2$ de $f_n(z)$ a ces deux zéros réels.

2. Arretons nous maintenant au cas particulièrement interessant où tous les coéfficients a_i sont positifs. Le théorème précédent prend alors la forme suivante:

Pour que $f_p(z)$ soit un polynome $\Omega(z)$ il faut et il suffit que le coefficient a_n soit inférieur ou égal à la plus petite racine positive λ_n de l'équation algébrique (8) *et cela pour toute valeur $2 \leq n \leq p$.*

Laissons maintenant p croître indéfiniment, $f_p(z)$ étant toujours un polynome $\Omega(z)$: *$f_p(z)$ aura pour limite une série*

$$(10) \qquad \Omega(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

convergente dans tout le plan de la variable z, ayant ses zéros, en nombre illimité, tous réels et négatifs et jouissant, de plus, de cette propriété remarquable que l'équation algébrique, obtenue en égalant à zéro l'ensemble d'un nombre quelconque de ses premiers termes, a toutes ses racines réelles et négatives.

Il suffit, manifestement, pour le voir, de montrer que la série (10) converge pour toute valeur de z, ce qui est démontré directement, par exemple, par l'inégalité

$$(11) \qquad a_n < \frac{a_0}{n^n}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$$

qu'on obtient en remarquant qu'en désignant par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ les valeurs absolues des racines, toutes négatives, de l'équation algébrique (3) on a

$$\frac{a_n}{a_0} = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n, \quad \frac{a_1}{a_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n$$

et que l'on a par suite

$$\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \leq \frac{1}{n}\,\frac{a_1}{a_0}\,.$$

3. L'inégalité (11) montre en même temps que le genre de la fonction $\Omega(z)$ est inférieur à 2. Mais on arrive à un resultat plus précis en utilisant le théorème suivant de LAGUERRE relatif à une classe étendue de fonctions entières embrassant aussi les fonctions $\Omega(z)$ ici considérées. Soit

$$\Phi_n(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

un polynome entier du degré n dans lequel les coefficients A_i sont des fonctions de n ou bien n'en dependent pas. Supposons que, n croissant indéfiniment, $\Phi(z)$ ait pour limite une série $F(z)$ convergente pour toutes les valeurs de la variable; supposons en outre que l'équation $\Phi_n(z) = 0$ ait pour toute valeur de n ses racines réelles et de même signe; la fonction $F(z)$ sera alors égale au produit d'une fonction entière du genre zéro par une exponentielle de la forme e^{az+b} où a et b sont des constantes (1).

La démonstration du théorème, telle qu'elle a été donnée par LAGUERRE, suppose essentiellement remplies ces deux conditions:

1° n croissant indéfiniment $\Phi_n(z)$ a pour limite une fonction entière $\Phi(z)$;

2° les zéros de $\Phi_n(z)$ étant tous d'un même signe et rangés par ordre de grandeur, la somme des leurs inverses a une limite finie au plus égal à

$$-a = -\lim \frac{A_1}{A_0} \qquad \text{pour } n = \infty\,.$$

Ces conditions étant manifestement toujours remplies dans le cas des fonctions $\Omega(z)$, on arrive au théorème suivant:

Toute fonction $\Omega(z)$ est le produit d'une fonction entière du genre zéro par une exponentielle de la forme Ae^{az} où les constantes A et a ont pour valeurs

$$A = a_0 \quad , \quad a = \frac{a_1}{a_0}\,.$$

Il est également possible de préciser des inégalités auxquelles satisfont les coefficients a_i d'une série $\Omega(z)$ quelconque. La condition précédente

$$(n-1)\,a_{n-1}^2 - 2n a_n a_{n-2} > 0$$

conduit à la suite d'inégalités

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{n-1}{2n}\,\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{1}{2\,.\,2}\,\frac{a_1}{a_0}$$

(1) LAGUERRE, *Oeuvres,* t. I, pag. 174.

lesquelles, multipliées membre à membre, conduisent à

$$\frac{a_n}{a_1} < \frac{a_{n-1}}{2^{n-1} n a_0}$$

et par suite aussi à

(12) $$a_n < \frac{a_0}{n!\,2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n ,$$

de sorte qu'on peut énoncer la proposition suivante:

Le coefficient a_n de toute série $\Omega(z)$ satisfait à l'inégalité

(13) $$a_n < \frac{a_0 \beta^n e^{-\alpha n^2}}{n!}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \log 2 \;\; , \;\; \beta = \frac{a_1 \sqrt{2}}{a_0} \, .$$

L'inégalité connue

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!}$$

permet de donner à (13) aussi la forme suivante

(14) $$a_n < \frac{a_0 \gamma^n e^{-\alpha n^2}}{(n+1)^n}$$

avec

$$\gamma = \beta e = \frac{a_1 e \sqrt{2}}{a_0} \, .$$

L'inégalité (13) fait voir, par exemple, que pour toute valeur $z = re^{\varphi i}$ le module d'une série quelconque $\Omega(z)$ est inférieur à la valeur $a_0 \theta(\beta r)$ où $\theta(z)$ désigne la transcendante entière

(15) $$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\alpha n^2}}{n!} z^n \, .$$

L'inégalité (14) fait voir, d'une autre part, que les zéros de toute série $\Omega(z)$, tous supérieurs en valeur absolue à $\frac{a_0}{a_1}$, croissent avec n plus vite que $2^{\frac{n}{2}} n$.

On peut avoir d'autres particularités des séries $\Omega(z)$ en comparant celle-ci à d'autres séries déterminées plus faciles à étudier et ayant leurs coefficients supérieurs au second membre de l'inégalité (13). Telles seraient, entre autres, les séries entières de la forme

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^{an}} \quad , \quad \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(an+b)}$$

ou bien la transcendante de Bessel

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{(n!)^2} \text{ etc.}$$

4. Il est facile à former effectivement des séries $\Omega(z)$ en nombre illimité.

Laguerre a montré (¹) comment on peut former des suites illimités de nombres

$$\omega_0\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2\,,\ \ldots$$

jouissant de cette propriété remarquable que toutes les fois qu'une équation algébrique

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en sera de même de l'équation

$$A_0\,\omega_0 + A_1\,\omega_1\,x + \cdots + A_n\,\omega_n\,x^n = 0\ .$$

Tels sont, entre autres, les nombres ω_n fonctions suivantes de n:

1° Polynomes $P(n)$ quelconques n'ayant que des zéros réels et négatifs;

2° Fonctions entières $G(n)$ quelconques de n, de genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels et négatifs;

3° Fonctions de la forme $e^{-\alpha n^2}$, α étant un nombre réel et positif quelconque;

4° Produits d'un nombre quelconque de fonctions 1°, 2°, 3°;

5° Fonctions de la forme

$$\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_2(0)\,\lambda_2(1)\ldots\lambda_2(n)}$$

$\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ étant deux quelconques parmi les fonctions 1°, 2°, 3°.

Il s'en suit qu'en connaissant une série

$$\Omega(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

on peut en construire une infinité de la forme

$$\Omega(z) = a_0\,\omega_0 + a_1\,\omega_1\,z + a_2\,\omega_2\,z^2 + \cdots$$

$\omega_0\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2\ldots$ étant des fonctions de n citées précédemment.

Des exemples effectifs des séries $\Omega(z)$ sont fournis par certaines transcendantes entières étudiées par M. G. H. Hardy (²) qui est arrivé, p. ex., au résultat suivant:

(¹) *Oeuvres,* t. I, pag. 33-36; pag. 199-206 etc.

(²) *On the zeroes of a class of integral functions* (The Messenger of Mathematics, Nov. 1904, pp. 97-101).

Si $b(x)$ est une fonction de x positive et croissante pour toutes les valeurs de x et si

$$b\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 3b(x)$$

$$b(n) = b_n \qquad a_n = \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

la fonction entière

$$\sum_0^\infty a_n z^n$$

a toutes ses racines réelles et négatives; de plus, le même fait subsiste encore pour le polynome

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

pour toutes les valeurs de m.

Il en serait, par exemple, ainsi si

$$b_n = q^{-2n+1} \qquad a_n = q^{n^2}$$
$$q \leq \frac{1}{3}$$

ou bien si

$$a_n = \frac{1}{1^1 2^2 3^3 \dots n^n (n+1)^{n+1}};$$

dans ce dernier cas la condition

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^{x+\frac{3}{2}} \geq 3(x+1)^{x+1}$$

n'est pas satisfaite pour les petites valeurs de x, mais la démonstration est facile à completer.

5. On peut manifèstement, sans nuire à la généralité, écrire toute série dont il est question ici, sous la forme

(16) $$1 + z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

Parmi toutes les séries $\Omega(z)$ en nombre illimité écrites sous cette forme, l'une merite une attention toute speciale: *c'est la série* (16) *à coefficients numériques*

(17) $$\psi(z) = 1 + z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \cdots$$

où tous les coefficients b_k atteignent leurs plus grandes valeurs possibles.

Le coefficients λ_k de cette série est la plus petite racine positive de l'équation algébrique en x

(18) $$\Delta_k(1, 1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_{k-1}, x) = 0$$

ayant toujours des racines positives, comme l'on s'en assure par les considérations géométriques précédentes. Les équations, par exemples, fournissant λ_2, λ_3, λ_4 sont

$$\Delta_2 = 4x - 1 = 0$$

d'où

$$\lambda_2 = \frac{1}{4};$$

$$\Delta_3 = 27x^2 - \frac{x}{2} = 0$$

d'où

$$\lambda_3 = \frac{1}{54};$$

$$\Delta_4 = 256x^3 - \frac{23}{9}x^2 + \frac{x}{972} = 0$$

d'où

$$\lambda_4 = \frac{1}{2379,423} \quad \text{etc.}$$

Avec ces valeurs limites des b_k les polynomes correspondants $\Omega(z)$ s'écrivent

$$\Omega_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4}(z+2)^2$$

$$\Omega_3(z) = 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} = \frac{1}{54}(z+6)^2\left(z+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Omega_4(z) = 1 + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{54} + \frac{z^4}{2379,423} =$$

$$= \frac{1}{2379,423}(z+19,1172)^2(z+4,3225)(z+1,5064).$$

La série (17) représente, d'après ce qui précède, une transcendante entière du genre zéro avec le facteur exponentiel e^{-z}, ayant une infinité de zéros, tous réels, négatifs, supérieurs en valeur absolue à 1 et croissant avec n plus vite que l'expression $n(\sqrt{2})^n$. Son module pour $z = re^{\varphi i}$ est inférieur à $\theta(r\sqrt{2})$ où $\theta(z)$ désigne la transcendante entière (15). Cette série $\Omega(z)$ limite merite une étude plus approfondie et je me permets de la signaler à l'attention des analystes.

S. PINCHERLE

ALCUNE SPIGOLATURE NEL CAMPO DELLE FUNZIONI DETERMINANTI

Io mi permetto di trattenere per pochi istanti i miei cortesi uditori, richiamando la loro attenzione su alcuni punti di una teoria già antica, ma alla quale i progressi dell'analisi sono andati via via dando un interesse sempre nuovo: la teoria delle funzioni determinanti. Però, è lungi da me l'idea di stancarli ripetendo, sia pure per sommi capi, la storia e le applicazioni di questa teoria; il mio compito è più modesto e limitato: voglio solo presentare alcune spigolature raccolte in quel campo già largamente mietuto, e rimando ad altro scritto le dimostrazioni, e gli sviluppi maggiori di considerazioni e di esempî.

I.

È noto come, con funzione *determinante* della *generatrice* $\varphi(t)$, s'intenda la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t)\, e^{-tx}\, dt; \tag{1}$$

è noto come queste denominazioni ed il principio della teoria formale siano dovute al Laplace, come l'Abel l'abbia sviluppata nello stesso senso; come il Poincaré ne abbia mostrato la portata nella teoria moderna delle funzioni e l'applicazione allo studio delle equazioni differenziali lineari; poi, tacendo delle ricerche di altri, come il Borel dapprima, poi il Mittag-Leffler, che vi ha intrattenuti l'altro ieri su ciò nella sua magistrale conferenza, ne abbiano mostrato l'importanza per la rappresentazione di un ramo monogeneo di funzione analitica.

L'espressione (1) rappresenta in un semipiano, limitato da una retta parallela all'asse immaginario, una parte di funzione analitica, il cui campo di validità può però estendersi anche al di là di codesta regione $R(x) > a$. L'espressione (1) come hanno mostrato Dirichlet, Riemann e Kronecker, è invertibile mediante la formula

$$(2) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(s)\, e^{ts}\, ds\,.$$

Le (1) (2) dànno una *corrispondenza funzionale* notevole: essa fa corrispondere con stretta dipendenza una funzione di variabile reale $\varphi(t)$ e una funzione analitica $f(x)$; per la prima basta supporre poco più dell'integrabilità; per la seconda si ha almeno un semipiano di regolarità.

II.

Una prima spigolatura riguarda l'ascissa a di convergenza di (1). Essa dipende dal comportamento assintotico o ordine esponenziale di $\varphi(t)$ per $t = \infty$. Su questa dipendenza, un teorema di Landau ci insegna che, se è $a \geqq 0$, è

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log\left|\int_c^t \varphi(t)\, dt\right|}{t}\,,$$

indicando con $\overline{\lim}$ il massimo limite, nel senso di Cauchy, Hadamard e Pringsheim. Questo teorema è suscettibile di estendersi al caso di $a < 0$? La risposta è affermativa, purchè si prenda

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log\left|\int_t^\infty \varphi(t)\, dt\right|}{t}\,.$$

Il teorema di Landau è l'analogo di un altro, dato anteriormente dal Cahen per determinare l'ascissa a di convergenza di una serie di Dirichlet $\Sigma\, c_n\, e^{-\lambda_n x}$. Se è $a \geqq 0$, si è trovato che

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log|c_0 + c_1 + \cdots c_n|}{\lambda_n}\,.$$

Ora, per $a < 0$, si trova anche qui

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots|}{\lambda_n}\,.$$

III.

La definizione di funzione determinante si può estendere, conformemente al principio di Hankel. Una naturale estensione, comoda nelle applicazioni, sostituisce alla (1) la

$$(1') \qquad f(x) = x^m \int_c^\infty \mathrm{D}^{-m}\varphi(t)\, .\, e^{-tx}\, dt$$

o alla (2), la

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{D}^m \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{f(s)\, e^{ts}\, ds}{s^m} . \tag{2'}$$

Fra i vantaggi di questa estensione, vi è quello di considerare le funzioni determinanti a generatrice nulla, lo zero riguardandosi come derivata di una costante: se questa costante si muta in varî tratti dell'asse d'integrazione, la determinante, sotto opportune condizioni, si riduce ad una serie di DIRICHLET.

Questa considerazione getta luce su molte proprietà delle serie di DIRICHLET, in particolare sul problema, insufficientemente trattato dal CAHEN e che ha dato luogo a recenti osservazioni del LANDAU e dell'HADAMARD (1), delle condizioni per la sviluppabilità di una funzione in serie di tale specie.

Essa permette pure di porre nella vera luce un teorema che, dato dal DIRICHLET per le sue serie numeriche, è stato ampliato e precisato dal PHRAGMEN e dal LANDAU; teorema che mostra l'esistenza di un polo di 1° ordine in $x = k$ nella funzione

$$f(x) = \sum c_n\, e^{-\lambda_n x}$$

quando dalla funzione $\varphi(t)$ definita fra λ_n e λ_{n+1} da $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ si stacca, a rappresentare l'ordine esponenziale massimo, un termine e^{kt}.

Si può anzi mostrare come, ad un termine d'ordine esponenziale massimo $t^m e^{kt}$ per $\varphi(t)$, corrisponda per $f(x)$ un infinito d'ordine m per m non intero negativo, e una singolarità logaritmica per m intero negativo (2).

IV.

Uno dei fatti più interessanti nella teoria delle funzioni determinanti sta in ciò, che il comportamento all'infinito della funzione generatrice si riflette sulla posizione e sulla natura delle singolarità della funzione determinante. Di ciò porta un esempio il teorema ora ricordato; un altro è fornito dalla trasformazione di una serie di esponenziali in una funzione meromorfa, e altri si potrebbero aggiungere.

In particolare, un risultato notevole è dato dalla applicazione dell'operazione (1) ad una funzione determinante. Ricordiamo dapprima che se la funzione generatrice è analitica, e data in tutto un angolo, la determinante è regolare non più in un semipiano soltanto, ma in tutto un angolo superiore ai 180°. In base a ciò, si viene a trovare che la determinante di una funzione determinante (1) è, sotto condizioni assai larghe, una *funzione semplice*, cioè un ramo di funzione regolare in tutto il piano, al-

(1) V. Rend. del Circ. Mat. di Palermo. T. XXIV, p. 221; T. XXV, pp. 326, 395.

(2) Dopo questa lettura, è comparsa una Memoria di W. SCHNEE (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. XXVII, stamp. settembre 1908) in cui, a p. 5 dell'estratto, è enunciato e dimostrato quest'ultimo teorema.

l'infuori di un taglio (essenziale o no) fatto ad esempio lungo l'asse reale negativo, e la generatrice, moltiplicata per $2\pi i$, dà il salto della determinante nell'attraversamento di questo taglio. Questa osservazione è di grande vantaggio per lo studio delle dette funzioni semplici, e permette di ritrovare le condizioni date da LEAU, LA ROY, FABER, ecc., perchè una serie di TAYLOR rappresenti una funzione semplice.

V.

Alla rappresentazione di una funzione $f(x)$ nella forma (1), cioè al fatto che essa sia una funzione determinante, si collega la possibilità del suo sviluppo in serie di determinata forma; in particolare la sviluppabilità in serie di fattoriali, studiata recentemente dal NIELSEN e dipendente, come ho mostrato, dall'ordine (nel senso di HADAMARD) della funzione generatrice per $t = \infty$. Ma se allo sviluppo in fattoriali si sostituisce quello secondo funzioni più generali della forma

$$\frac{1}{(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\dots(x+\lambda_n)},$$

si ottengono tali sviluppi per classi più estese di funzioni determinanti, e mancando questi sviluppi come effettivi, essi possono però presentarsi come assintotici, generalizzando i noti sviluppi assintotici in serie di potenze, studiati dal POINCARÉ.

VI.

Consideriamo l'espressione (1) come indicazione di un'operazione funzionale sul soggetto φ; si ha così un'operazione

$$f = \mathrm{J}(\varphi),$$

che trasforma la moltiplicazione per t^α nella derivazione d'indice α:

$$\mathrm{D}^\alpha = \mathrm{J}t^\alpha\,\mathrm{J}^{-1}.$$

Ora le D^α formano un gruppo ad un parametro, nel senso di LIE. Quale ne è la trasformazione infinitesima X? È ovvio riconoscere che essa è la trasformata della moltiplicazione per il logaritmo:

$$\mathrm{X} = \mathrm{J}\log t\,.\,\mathrm{J}^{-1}.$$

Questa operazione X, per la quale ho proposto il nome di *logaritmo funzionale*, ha curiose e notevoli proprietà: per citarne una, alla

$$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$$

fa riscontro la

$$\mathrm{J}x^n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}\right) x^n \log x\,;$$

è da segnalarsi anche il suo uso, analogo a quello fatto dall'HADAMARD delle derivate d'indice qualunque, nello studio dei punti singolari sulla circonferenza di convergenza di una serie di potenze.

Si può poi considerare l'operazione X^α, trasformata di $\log^\alpha t$, poi l'operazione infinitesima di questo nuovo gruppo, e così via. In tal modo si genera una scala di operazioni, analoga alla scala delle funzioni tipiche degli ordini d'infinito proposta dal BOREL e parallela ad essa; ognuna di queste operazioni raggiunge l'effetto di fare corrispondere, al corrispondente ordine della funzione su cui si opera, la *posizione* delle singolarità della funzione generata; mentre i fattori di ordine inferiore influiscono solo sulla natura, ma non sulla posizione delle singolarità stesse.

W. H. YOUNG

ON SOME APPLICATIONS OF SEMI-CONTINUOUS FUNCTIONS

§ 1.

The semi-continuous functions introduced by BAIRE ([1]) have not perhaps received the amount of attention which their importance and usefulness might appear to have justified. With the exception of their originator, I cannot call to mind any one beside myself who has utilised them to any great extent.

The present paper falls into two parts: in the first part §§ 2-7 I call attention to a variety of results mostly already published which I have obtained by the use of these functions: in the second part §§ 9-11 I give some applications to *the theory of sequences of functions which do not at every point converge to a definite limit.* Upper and lower semi-continuous functions, and points of upper and lower semi-continuity are here precisely the concepts with which we are compelled to operate, and in terms of which we are able to formulate definite properties of *the upper and lower functions*, as I call them, obtained by taking at each point the highest and the lowest limits respectively.

§ 2.

One of the great advantages of semi-continuous functions is that they permit of a form of argument which does not distinguish between bounded and unbounded continuity of the kind in which two infinite values are discriminated, viz. $+\infty$ and $-\infty$. Throughout my investigations the expression « continuous », unless expressly stated to the contrary, is to be understood in this extended sense; the same applies to the term « limit ».

There is another form of unbounded continuity possible, that in which the two proper infinites are identified. In dealing with this point of view the use of semi-continuous functions is attended with serious difficulties.

([1]) *Sur les fonctions de variables réelles* (1899, Ann. di Mat., 3, III).

It would be interesting to classify the various types of properties of functions and sequences of functions when the functions are: 1) bounded; 2) unbounded with two proper infinites and 3) unbounded with a single proper infinite. I have myself obtained one or two isolated results of late bearing on this matter. The property of uniform continuity has been stated in a form suitable for all three classes: the theorem of WEIERSTRASS that any continuous bounded function can be expressed as the *uniform* limit of a sequence of polinomials has been extended to the case of an unbounded continuous function when the two proper infinites are discriminated. On the other hand it has been shewn that such an extension does not hold when the two infinities are identified, and an analogous theorem has been given stating that with this convention any continuous function may be expressed as the limit of a series of rational functions, *converging and diverging uniformly* throughout the interval considered (1). BAIRE's theorem that the limit of a sequence of continuous functions is at most pointwise discontinuous with respect to every perfect set is true in all three cases (2).

The properties of integrals are essentially different according as we confine ourselves to bounded functions, or not, even when we are dealing with integrands which are continuous in the extended sense, discriminating the two infinities. Some new results of my own in this connexion will be mentioned later on.

In dealing with arithmetic series, divergent series need special treatment, but, in the case of series of functions, divergence proper merely corresponds to a proper infinite value of the function, and there is no reason for excluding points of proper divergence from consideration, as has too frequently been done in the statement of theorems. The fact alone that a function may have the value $+\infty$ everywhere except at a set of the first category, and yet have a finite LEBESGUE integral, speaks for itself (3). In my later work on convergence I have obliterated the distinction between approach to an infinite and to a finite limit (4), and identified various theorems which hold equally for bounded and unbounded functions. These results and some new ones will be touched on later on.

§ 3.

The applications which I have made of semi-continuous functions fall into five classes:

1) Tests for continuity;
2) Theory of integration;

(1) *On the Uniform Approach of a Function to its Limit* (1908, Proc. L. M. S.).

(2) *A new Proof of a Theorem of BAIRE's* (1907, Mess. of Math.); *BAIRE's Theorem and the Proper Infinite* (1908, Mess. of Math.).

(3) *On the Construction of a Pointwise Discontinuous Function all of whose Continuities are Infinities and which has a finite Generalised Integral* (1908, Quart. Journ.).

(4) *On Uniform and Non-uniform Convergence and Divergence of a Series of Continuous Functions and the Distinction of Right and Left* (1907, Proc. L. M. S.).

3) Theory of content;
4) Discussion of the distinction of right and left;
5) Theory of uniform convergence and divergence of series.

§ 4.

The key-note in 1) is the theorem that *a monotone ascending (descending)* (1) *sequence of continuous functions has a lower (upper) semi-continuous function for limit* (2), a theorem the converse of which is also true, viz. that any such function can be so expressed.

From this theorem it follows that *it is a necessary and sufficient condition for the continuity of a function, that it should be possible to express it both as the limit of a monotone ascending and of a monotone descending sequence of continuous functions* (3).

The application of this principle is in many cases immediate.

As one example take the continued fraction

$$\frac{u_1}{v_1+}\,\frac{u_2}{v_2+}\cdots$$

where the u's and v's are essentially positive functions of any finite number of variables. This represents a continuous function; for the odd convergents form a monotone descending and the even convergents a monotone ascending sequence of continuous functions.

This suggests also that continued fractions, such as, for instance,

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \frac{x_1}{1+}\,\frac{x_2}{1+}\cdots$$

when the x's are positive, should play a prominent part in the theory of functions of a countably infinite number of variables. We have here a continuous function, since if we approach the point $(x_1', x_2', \ldots)$ along any continuous curve

$$x_1 = f_1(t)\,,\; x_2 = f_2(t)\,, \ldots$$

we always get as limit of $f(x_1, x_2, \ldots)$ the value $f(x_1', x_2', \ldots)$.

(1) A monotone ascending sequence of functions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ is to be understood to mean that

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$$

2) *Note on Monotone Sequences of Continuous Functions* (1908, Proc. Camb. Phil. Soc.).

(3) *On a Test for Continuity* (1908, Proc. R. S. of Edinburgh).

It may be noted that the functions

$$x_1 + x_2 + \dots$$

where the x, s are all positive, as well as

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots$$

are only lower semi-continuous, not continuous functions.

In the paper in the Proc. R. S. E. quoted, various other illustrations of the use of the test are given, and subsidiary tests both for continuity at a point and throughout an interval are deduced, no reference being made to the nature of the convergence.

§ 5.

A generalisation of the theorem which formed the keynote of my work in 1), underlies the new results in 2) the Theory of Integration. It appears, indeed, that *the limit of a monotone ascending (descending) sequence of lower (upper) semi-continuous functions is itself lower (upper) semi-continuous* (1) this is true, moreover, *not only for semi-continuity throughout an interval, but at an isolated point.*

Closely connected with this theorem is the Theorem of the Bounds which is naturally of use in considering upper and lower summations.

This states that *if we have before us a monotone ascending (descending) sequence of functions, the limit of the upper (lower) bounds is the upper (lower) bound of the limit, but that the same is not always true of the lower (upper) bounds; a sufficient condition for this also to be true is that the generating functions should be lower (upper) semi-continuous.*

In the Theory of Integration, indeed, as long as we confine our attention to ordinary Riemann-Darboux integrals, semi-continuous functions are forced on our notice. In my first paper on the subject (2) I had proved that *the upper (lower) integral of a function was the same as that of its associated upper (lower) limiting function*, which is, of course a semi-continuous function. These latter integrals, are special cases of generalised, or Lebesgue, integrals, and possess, as such, certain simple properties.

This theorem led me to formulate a new definition of integration, proper and improper (3), by which the consideration of the integration of discontinuous functions is reduced to that of continuous ones.

(1) *On Functions Defined by Monotone Sequences and their Upper and Lower Bounds* (1908, Mess. of Math.).

(2) *Upper and Lower Integration* (1904, Proc. L. M. S.).

(3) Loc. cit., Camb. Phil. Proc.

This definition is as follows:

Form the associated upper limiting function φ of the given function f.

Express it as the limit of a monotone descending sequence of continuous, in general unbounded, functions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ If φ_n is unbounded, express it as the limit of a monotone increasing sequence of bounded continuous function which approach their limit uniformly, $\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2} \ldots$

Then the upper integral of f, $\overline{\int} f(x)\,dx$ is defined as the limit of the integral of φ_n, $\underset{n=\infty}{Lt} \int \varphi_n(x)\,dx$, where this later integral is itself defined as the limit of the integral of $\varphi_{n,r}$, $\underset{r=\infty}{\mathrm{L}t} \int \varphi_{n,r}(x)\,dx$.

The lower integral of f, $\underline{\int} f(x)\,dx$, being similary defined, we have a Riemann integral, proper or improper, when, and only when, the upper and lower integrals have the same value for the interval, or region, of integration considered.

The advantages of this definition, which may be shewn to agree with that of De La Vallée-Poussin in the case of an improper integral, are not perhaps at once apparent, but it leads naturally to certain new results connecting multiple and repeated integrals, and to one or two theorems about the nature of a function defined by an integral, when the integrand is itself a function of a parameter ([1]). In particular I may mention the following inequalities connecting the multiple and repeated integrals:

I. *For functions with a finite upper bound,*

upper double $\geqq$ upper-upper;

II. *For functions with a finite lower bound,*

lower-lower $\geqq$ lower-double;

III. *For any functions whatever,*

upper-double $\geqq$ Lebesgue-upper $\geqq$ lower-upper.

and IV. *Upper-lower $\geqq$ Lebesgue-lower $\geqq$ lower-double.*

In case I. the sign of equality holds when the integrand is upper semi-continuous, and it holds in case II. when the integrand is lower semi-continuous. It is shewn by examples that the sign of equality may hold also in cases III. and IV., so that these inequalities are the most that can be stated.

One additional result of the kind indicated is that *when the integrand, though continuous, is unbounded even at one point only, its integral is, if the function has a finite upper bound an upper semi-continuous function of the parameter, and not necessarily continuous.*

([1]) *On the Inequalities Connecting the Double and Repeated Integrals of a Function of Two Variables* (1908, Proc. L. M. S.).

§ 6.

With regard to 3) the Theory of Content, the importance of semi-continuous functions is due not only to the fact that the content of a linear closed set is an upper semi-continuous function of the coordinate, but also to the theorem (1) that *the ordinate section of a closed plane set is an upper semi-continuous function of the abscissa.*

§ 7.

In the discussion of 4) the Distinction of Right and Left, a new form of semi-continuous functions, namely *right-handed and left-handed semi-continuous functions*, are fundamental. In the discussion of discontinuities it is the *left and right handed associated functions*, φ_L, φ_R, ψ_L, ψ_R which fall under this category. In the case of uniform and non-uniform convergence, it is the *left and right-handed peak and chasm functions* π_L, π_R, χ_L, χ_R. The reasoning which applies in the one case is found to apply verbatim in the other, the main result being that *there is no distinction of right and left except at most at a countable set of points* (2). Thus, for instance, the normal discontinuity is, from the point of view of frequency, not what is called an « ordinary » discontinuity, or discontinuity of the first kind, nor is it the most exaggerated form of discontinuity of the second kind, where the value at the point and the upper and lower limiting values on each side are all distinct; the normal discontinuity is one where the upper limits on the two sides are equal and so are the lower limits, while the value at the point lies between them.

I shewed in the paper quoted that the right and left handed associated functions were pointwise discontinuous, by shewing that they differed from the upper semicontinuous function φ at a countable set of points only. This result follows however more directly by the use of a more general theorem which I have now proved, viz. that *any right or left handed semi-continuous function belongs to* Baire*'s first class*, so that is it is pointwise discontinuous with respect to every perfect set.

I may add that I have recently succeeded in obtaining a result which extends and completes the main result of my Quarterly paper that « There is no distinction of right and left except possibly at a countable set of points ». The reasoning used is similar to that employed in the Quarterly paper, but it does not involve the use of semi-continuous functions. If we define the associated right-hand multi-valued function of x by attributing to it as values at the point P all the limits of $f(x)$ on the right of the point P, and similarly, interchanging left and right, we define the associated left-hand multi-valued function, then my new result is that these two multi-valued functions are equal at all but possibly a countable number of points.

(1) Loc. cit., *Upper and Lower Integrals* ...
(2) *On the Distinction of Right and Left at Points of Discontinuity* (1907, Quart. Journal).

§ 8.

The use of semi-continuous functions in 5) the Theory of Uniform and Non-uniform Convergence and Divergence does not cease with the discovery that there is no distinction of right and left in this respect except possibly at a countable set of points. The peak function $\pi(x)$, whose value at any point is that one of the right and left handed peak functions which is not less than the other, is an ordinary upper semi-continuous function, and, as such pointwise discontinuous.

Similarly the chasm function $\chi(x)$ is lower semi-continuous and therefore pointwise discontinuous. In the case of a series of continuous functions, these two functions enable us to characterise a point of uniform convergence or divergence in a very simple manner, *such a point is a point where the two functions are equal.* It is easily proved that *the limiting function, as well as both its associated functions lie between the peak and chasm functions*, so that the continuity in the extended sense of the limiting function is at once seen to result from the uniform convergence, so defined.

We shall see in Part II that this definition leads to extended results. The well-known fact that the points, if any, of non-uniform convergence, like the discontinuities of a pointwise discontinuous function, form a set of the first category, had suggested to me, as probably to others, that they could be characterised as the discontinuities of one or more such functions. It appears, in fact, that *they are the discontinuities of the peak and chasm functions.*

§ 9.

The series of functions considered above is always supposed to have a definite limit finite or infinite at every point. By a natural transition I pass on to consider series of functions which oscillate. It is clear that the functions which can be built up of the limits at the different points have a claim to be discussed. Little is known about them, and the results which I now proceed to give are doubtless only a few of those which may be discovered.

We define the upper function $\overline{f}(\mathrm{P})$ as having at the point P the highest possible limit of $f_1(\mathrm{P}), f_2(\mathrm{P}), \ldots$, and the lower function $\underline{f}$ as having the lowest possible such limit.

The definition of the peak and chasm function which I had previously given, did not depend on the coincidence of the upper and lower functions, although at the time that coincidence had been hypothecated. Denoting by $\mathrm{M}_{n,\mathrm{Q}}$ the upper bound of $f_n(x)$ in the interval (P, Q) on the right of P, and by M_Q the highest limit of $\mathrm{M}_{n,\mathrm{Q}}$ as n increases indefinitely, M_Q is found to describe a monotone descending sequence as Q moves up to P, and has therefore a definite limit, its lower bound, which is taken to be the value of the right-hand peak function at P, and denoted by $\pi_\mathrm{R}(\mathrm{P})$. A similar process on the left gives us the left hand peak function $\pi_\mathrm{L}(\mathrm{P})$.

and the value of the greater of the two being taken at each point we get the peak function, par excellence, π (P).

A similar definition, interchanging « greater » and « less », gives us the three chasm functions, χ_R, χ_L, and χ.

These functions, as already stated, fall under the category of semi-continuous functions, on one side at least, and are therefore, functions of BAIRE's first class, that is they are pointwise discontinuous with respect to every perfect set.

I then shew that, f denoting either the upper or the lower function, and φ and ψ its associated functions, these lie on each side between the corresponding peak and chasm functions, i. e.

$$\chi \leq \psi \leq \varphi \leq \pi .$$

By our previous result f also lies between the peak and chasm functions except at a countable set of points; when the original functions f_n are continuous, however, there are no exceptional points.

Turning now to the characteristic properties of the upper and lower functions, it is shewn that, *when the generating functions are lower semi-continuous, the upper function is the limit of a monotone descending sequence of lower semi-continuous functions whence we deduce that it is pointwise upper semi-continuous with respect to every perfect set. A similar result holds mutatis mutandis for the lower function.*

In the interesting special case when the functions are continuous, and in particular in the case of the derivates of a continuous function, we have the following theorem:

The upper function is upper semi-continuous with respect to every perfect set, and the lower function lower semi-continuous, except possibly at a set of the first category with respect to that set.

This generalisation of BAIRE's Theorem includes, of course, that theorem as a special case, when the upper and lower functions coincide. This form of proof illustrates vividly the convenience of the use of semi-continuous functions, since there is no need here to deal separately with finite and infinite values, as was the case to some extent even in my former proof of this theorem. BAIRE's own proof was entirely different, although it also involved the use of semi-continuous functions, which, indeed, he introduced in this connexion. In his mode of proof he treated originally only bounded functions, and deduced the result, some years later, for unbounded functions.

These remarks apply, of course only to the first half of BAIRE's complete result, viz. that a function which is the limit of a sequence of continuous functions is pointwise discontinuous with respect to every perfect set.

The explicit result in the case of derivates is as follovs:

Each upper derivate is upper semi-continuous, and each lower derivate lower semi-continuous with respect to every perfect set, except possibly at the point of a set of the first category with respect to that set.

The main result gives us at once some subsidiary results as to the distribution of the points at which the limiting functions have certain values, thus for example:

The point at which the upper function of a sequence of lower semi-continuous functions is $+\infty$, *or is* $> k$, *form an ordinary inner limiting set. And the points at which the same functions is* $\geq k$ *form an ordinary outer limiting set.*

And again

The points at which the difference of the upper and lower functions is $> k$ *form an ordinary inner limiting set. Or, as we may say the points at which the « measure of oscillation » is* $> k$ *form an ordinary inner limiting set.*

Assuming the second part of Baire's result, we see that any function which is pointwise discontinuous with respect to every perfect set, can be expressed as the limit both of a monotone ascending sequence of upper semi-continuous functions, and of a monotone descending sequence of lower semi-continuous functions. This gives us a criterion which may sometimes be convenient for ascertaining whether a given function has the property in question.

§ 10.

I next prove that *there is no distinction of right and left with regard to derivates, except possibly at a set of the first category.*

This result may be compared with that of Lebesgue (1) that a differential coefficient exists in the case of a large class of functions, and in particular functions with bounded derivates, except at a set of zero content. Combining the two results we see that the only exceptional points form a set of the first category and of content zero. My result is however true without any restriction on the nature of the function.

§ 11.

We now come to a generalisation of the concept of uniform convergence applicable to the theory of oscillating sequences. This suggests itself considering the $\pi = \chi$ definition of uniform convergence and divergence, which in conjunction with the equations

$$\chi \leq \psi \leq \varphi \leq \pi$$

and, in the case when the functions of the sequence are continuous,

$$\chi \leq f \leq \pi$$

led immediately to the convenient properties of a point of uniform convergence or divergence.

We have seen that these inequalities still hold for each of the functions, the upper or the lower, in the case of an oscillating sequence. In general, however, there will be no points at which the peak and chasm function are equal, since at

(1) *Intégration,* p. 123 seg.

such a point the upper and lower functions also would coincide. Distinguishing « upper » from « lower » we therefore define a « point of uniform upper oscillation » as a point at which the upper function = the peak function, and a « point of uniform lower oscillation » as one where the lower function = the chasm function. Where both oscillations are uniform we speak of uniform oscillation par excellence.

The above inequalities now shew that *at a point of uniform oscillation above the upper function is upper semi-continuous.*

A similar result holds, *mutatis mutandis* for the lower function.

These results correspond exactly to the continuity of the limiting function at a point of uniform convergence.

The term « uniform convergence or divergence » may however itself be applied in the case of oscillating sequences, provided at any point the upper and lower functions coincide. At such a point the $\pi = \chi$ definition applies at once, and the old $R_n(x)$ definition only requires inconsiderable modification. Such a point of uniform convergence or divergence is a special case of a point of uniform oscillation, at such a point both the upper and lower functions, and indeed all the other intermediate limiting functions are continuous.

The importance of points of uniform convergence and divergence depends partly on the fact that they always exist, that, indeed they may be said to be the rule and not the exception. The same is true of the points of uniform oscillation; indeed, as I prove, the distribution of these latter is precisely the same as in the more special case, viz. *the points of non-uniform oscillation (above, or below, or both), form, at most a set of the first category.*

I should like here to point out that the theorem that the points of non-uniform convergence of a series which converges everywhere form a set of the first category is only in general true when the defining functions are continuous. In the general case of series of pointwise discontinuous functions, even, the points of non-uniform convergence may fill up the whole interval, and that even when the limiting function is continuous. I call attention to this because a quite different impression might be conveyed to the reader of SCHOENFLIES's second part of his Bericht, if the reader did not, as I would beg him to do in the case of all my results, look at my own original papers before accepting any of that author's statements about them (1).

As I had formerly characterised the points of non-uniform convergence of a sequence of continuous functions as the discontinuities of the peak and chasm functions, so I am now able to characterise the points of non-uniform oscillation by referring to these discontinuities together with what I may, for shortness, call the semi-discontinuities of the upper and lower functions. We have in fact the following theorem:

At any point where the peak function is continuous and the upper function upper semi-continuous, the peak function is equal to the upper function, that is, there is uniform oscillation above.

(1) In the case discussed by HOBSON the generating functions are continuous.

The results already obtained shew therefore that the only points of non-uniform oscillation above are among the points at which the upper function is not upper semi-continuous and the peak function is discontinuous, so that they form a set of the first category.

Another way of characterising the points of non-uniform oscillation is by referring to the discontinuities of the semi-continuous functions which generate the upper function as limit:

The points of non-uniform oscillation above are the discontinuities of the upper semi continuous functions whose limit is the upper function.

§ 12.

The case when the upper and lower functions coincide except at a set of the first category deserves special mention. It follows indeed from the results already referred to that in this case also *the points of uniform convergence and divergence to a definite limit fill up the whole continuum except for a set of the first cathegory* a remarkable addition to the chain of results of which the first was that contained in OSGOOD's well-known paper (Am. J. XIX).

From this it follows further that, *in the case supposed, all the functions which can be obtained as limiting functions by choosing at each point one of the possible limits by some arbitrary law are all pointwise discontinuous functions.* This is another curious generalisation of BAIRE's Theorem.

The fact that the points at which the difference of the upper and lower functions is $> k$ form an inner limiting set has an important consequence viz. that these points are necessarily nowhere dense in the case last considered, when the succession of functions converges or diverges to a definite limit except at a set of the first category. For, forming as they do an inner limiting set, they are complementary to a set of the first category in every interval in which they are everywhere dense, and therefore form a set of the second category.

HARNACK's result with regard to the limit of the coefficients of a trigonometric series may accordingly be extended as follows:

If the points at which the series does not converge form a set of the first category, then the coefficients a_n and b_n diminish indefinitely as n is indefinitely increased.

In particular this is so when the points at which the series does not converge form a countable set, whether, or no, this set be everywhere dense. We are thus enabled to extend the reasoning based on theorems of RIEMANN's and SCHWARZ's, an account of which is given in HOBSON's *Functions of a Real Variable*, § 487, and to shew that *no two distinct trigonometric series can exist which converge to the same value for all points of the interval $(-\pi, +\pi)$ with the exception of a countable set of points* (1).

(1) This last conclusion is in accordance with a still more general result which has just been communicated to me verbally by Professor FELIX BERNSTEIN-viz. that it is sufficient if the excep-

One last result should be noticed. As each extension of BAIRE's Theorem is obtained the question arises whether there is a corresponding result of the OSGOOD type. I have omitted to mention the extension of BAIRE's Theorem in which the generating functions are only required to be continuous on one side. I may say that here also a corresponding result holds with regard to the points of non-uniform convergence. They still form a set of the first category. This follows from the results of Articles 12 and 14 of the L. M. S. paper quoted above.

The argument of Article 14 applies in fact if there is continuity everywhere on one side at least, while Article 12 is true always.

We thus get a second proof also of the extension of BAIRE's theorem in question, since the limiting function is of course continuous at every point of uniform convergence.

---

tional points form a set having no perfect component. This result, Professor BERNSTEIN tells me, was communicated to the Göttinger Mathematischer Gesellschaft early in this semester, and is reported in the Jahresbericht d. D. Math. V. The method of proof is necessarily of a totally different nature. It is interesting to note that the old result is capable of partial generalisation by the old method.

J. HADAMARD

SUR CERTAINES PARTICULARITÉS DU CALCUL DES VARIATIONS

J'ai eu précédemment (Voir Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 24 décembre 1906) à étudier une nouvelle méthode par laquelle on peut démontrer la possibilité d'un problème de Calcul des Variations.

Cette méthode permet d'arriver à la solution par une série d'approximations successives, dans des cas très étendus, par exemple, pour l'intégrale

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{J} = \int f(x\,, y\,, y')\,dx\,,$$

lorsque f, considéré comme fonction de y', se comporte (pour y' très grand) comme une puissance suffisamment grande de y'.

Dans d'autres problèmes, dont je vais parler maintenant, son application peut rencontrer certaines difficultés, intéressantes à mentionner par la façon dont elles sont liées à la nature de la question.

Au lieu de l'extremum *libre* de l'intégrale (1), considérons un problème *isopérimétrique*, à savoir, l'extremum de (1) lorsqu'on donne la valeur d'une intégrale analogue

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{J} = \int g(x\,, y\,, y')\,dx\,.$$

La variation $\delta\mathrm{I}$, savoir

$$\delta\mathrm{I} = \int \mathrm{Q}\delta y'\,dx\,,$$

(cf. la Note citée) pourra encore s'écrire

$$\delta(\mathrm{I} + l\mathrm{J}) = \int (\mathrm{Q} + l\mathrm{R})\,\delta y'\,dx = \int (\mathrm{Q} + l\mathrm{R} + h)\,dy'\,dx$$

h et l étant des nombres arbitraires (indépendants de x), R_1 la quantité analogue à Q formée avec g. Mais les valeurs de $\delta y'$ devront vérifier les deux équations

$$\int \delta y' \, dx = 0 \tag{3}$$

$$\int \mathrm{R} \delta y' \, dx = 0 \, . \tag{4}$$

Nous prendrons, ici

$$\delta y' = \mathrm{Q} + l\mathrm{R} + h$$

en déterminant l et h de manière à satisfaire aux conditions (3), (4).

Il est clair que le succès de la méthode serait compromis si le déterminant D des équations linéaires ainsi obtenues tendait vers zéro.

Il est aisé de voir à quoi correspond une telle circonstance.

Supposons qu'une position déterminée de la ligne variable annnule $\delta \mathrm{J}$.

On a alors ce que j'ai été conduit à appeler une *singularité* du champ. Plusieurs des règles fondamentales du Calcul des Variations sont en défaut dans ce cas.

Le cas où D tendrait vers zéro est celui où la ligne variable tendrait vers une telle singularité.

On arrive d'ailleurs aisément à exclure une telle possibilité dans beaucoup de cas où les intégrales données ont la forme (1), (2).

Mais il peut ne plus en être de même lorsque les intégrales sont prises sous forme *paramétrique*.

Prenons, par exemple, le problème isopérimétrique ordinaire, c'est à dire l'extremum de

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \tfrac{1}{2} (x dy - y dx) \tag{1'}$$

avec la condition

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \tag{2'}$$

(A, B ètant deux points donnés).

En appliquant une méthode analogue à la précédente on est conduit a étudier un nouveau déterminant D.

On pourrait croire que D ne peut tendre vers zéro que si la ligne d'intégration tend vers la droite AB, et que cela ne peut pas se produire si a n'est pas égal à la longueur de cette droite.

Il n'en est rien. On constate que D tendrait vers zéro, si grand que soit a, si la ligne d'intégration tendait a être appliquée sur AB, c'est à dire composée de segments de cette ligne parcourus les uns dans un sens et les autres en sens contraire.

La singularité dont il s'agit est donc ici plus difficile à exclure.

Mais, ici encore, cette difficulté est étroitement liée à la nature des choses.

Il existe, en effet, des problèmes analogues au précédent qui n'admettent point de solutions, autrement dit, pour lesquels l'extremum n'est pas atteint, et pour lesquels, dans les approximations successives correspondant à la méthode précédente, cette impossibilité se traduirait par le fait que le déterminant D tend vers zéro.

Tel est, en particulier, celui dont je me suis occupé dans mon précédent Mémoire: *Sur quelques questions de Calcul des Variations* (1).

Jusqu'ici, en un mot, si l'application de notre méthode peut soulever des difficultés, celles-ci sont comme cela doit arriver, la traduction de difficultés inhérentes à la nature des choses et à la question posée elle-même, dont les propriétés se reflètent avec fidélité dans nos calculs.

(1) Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., 1907. On arriverait sans nul doute à des résultats analogues dans les exemples de même nature signalés par M. Carathéodory.

L. SCHLESINGER

SUR QUELQUES PROBLÈMES PARAMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Messieurs, je voudrais appeler votre attention sur quelques problèmes que l'on rencontre lorsque, pour les équations différentielles lineaires, on étudie les relations qui ont lieu entre les substitutions fondamentales et les paramètres dont dépendent les coefficients.

Nous allons considérer un système différentiel canonique :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = y_1 a_{1k} + \cdots + y_n a_{nk} \ , \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

où les coefficients a_{ik} sont de la forme:

$$\text{(1)} \qquad a_{ik} = \frac{A_{ik}^{(1)}}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{ik}^{(\sigma)}}{x - a_\sigma} \ , \ (i, k = 1, 2, \ldots, n) \ .$$

Les points singuliers devront être distincts les uns des autres, les $A_{ik}^{(\nu)}$ sont des constantes que je nommerai les *résidus*. Soient

$$y_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

n systèmes de solutions (une matrice intégrale), tels qu'au point régulier $x = x_0$ l'on ait

$$y_{ii} = 1 \ , \ y_{ik} = 0 \ \text{pour} \ i \neq k \ .$$

Des points $a_1, \ldots, a_\sigma$ traçons les coupures $l_1, \ldots, l_\sigma$ vers l'infini; alors, lorsque la variable x franchit ces coupures, la matrice intégrale (y_{ik}) va subir des substitutions linéaires determinées

$$(A_{ik}^{(1)}), \ldots, (A_{ik}^{(\sigma)})$$

qui ne sont autre chose que les valeurs de la matrice (y_{ik}), prise le long des lacets, issus du point x_0 et entourant les points $a_1, \ldots, a_\sigma$.

Selon un théorème de M. Poincaré les $n^2\sigma$ quantités $A_{ik}^{(\nu)}$ peuvent donc être représentées par des séries de puissances toujours convergentes des $n^2\sigma$ résidus $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$:

$$(2) \qquad A_{ik}^{(\nu)} = \mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}(\mathrm{A}_{11}^{(1)}, \ldots, \mathrm{A}_{nn}^{(\sigma)}) \ , \ \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots, \sigma \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des fonctions en général multiformes des points singuliers $a_1, \ldots, a_\sigma$. C'est la nature de ces fonctions que nous nous proposons d'étudier.

Si l'on regarde comme fixes les points singuliers $a_1, \ldots, a_\sigma$ il est evident qu'à chaque système de valeurs finies des résidus $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$ il correspond un système de valeurs $A_{ik}^{(\nu)}$ des fonction entières transcendantes $\mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}$ pour lequel les déterminants

$$|A_{(ik)}^{(\nu)}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont différents de zéro. De plus j'ai démontré, en me servant de la *méthode de continuité*, que pour des valeurs finies des résidus $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$ ces fonctions entières acquièrent chaque système de valeurs $A_{ik}^{(\nu)}$ pour lequel les dits déterminants ne s'évanouissent pas. Ce résultat implique la possibilité de résoudre le problème dit de Riemann. Il s'ensuit que le déterminant fonctionnel des $n^2\sigma$ fonctions $\mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}$ est différent de zéro, pour chaque système de valeurs finies des $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$, et que la multiplicité singulière des inverses des fonctions $\mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}$ est donnée par l'équation

$$|A_{ik}^{(1)}| \cdot |A_{ik}^{(2)}| \ldots |A_{ik}^{(\sigma)}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut dire que les fonctions entières $\mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}$ offrent la plus grande analogie avec la fonction exponentielle à laquelle elles se réduisent d'ailleurs pour $n = 1, \sigma = 1$. Mais ce n'est pas de cela que je veux parler aujourd'hui; je me bornerai à faire remarquer encore en passant que si nous avions affaire à une seule fonction entière d'une seule variable (comme pour le cas $n = 1, \sigma = 1$ où l'on a $A_{11}^{(1)} = e^{2\pi i \mathrm{A}_{11}^{(1)}}$) le résultat mentionné serait une conséquence immédiate d'un célèbre théorème de M. Picard. Il serait donc très désirable de connaître une généralisation de ce théorème, se rapportant à un système de m fonctions entières de m variables indépendantes, qui nous dispenserait d'avoir recours à des méthodes particulières pour pouvoir démontrer que le problème de Riemann admet toujours une solution.

Nous allons considérer maintenant les $a_1, \ldots, a_\sigma$ comme des variables indépendantes. Alors il résulte de la méthode des approximations successives que le $\mathrm{E}_{ik}^{(\nu)}$, en tant que fonctions des $a_1, \ldots, a_\sigma$ sont holomorphes lorsque ces quantités ont des valeurs finies, différentes entre elles et différentes du point x_0, et lorsque d'ailleurs les $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$ ont des valeurs finies. Ici deux problèmes distincts se présentent.

1ment. On se donne les résidus $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$ (en général comme fonctions des $a_1, \ldots, a_\sigma$); alors les $A_{ik}^{(\nu)}$ seront des fonctions déterminées des $a_1, \ldots, a_\sigma$ qu'il s'agira d'étudier.

2ment. On se donne les $A_{ik}^{(\nu)}$ et l'on se propose d'étudier les $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$, définies par les équations (2) comme fonctions implicites des $a_1, \ldots, a_\sigma$.

Je n'ai traité ces deux problèmes *dualistiques* qu'en supposant *constantes* les quantités données, c'est-à-dire, en supposant pour le problème 1, que les $A_{ik}^{(\nu)}$, et pour le problème 2, que les $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ soient indépendantes des $a_1, \ldots, a_\sigma$.

On trouve alors que les fonctions qui se trouvent définies par les problèmes en question, sont holomorphes tant que les $a_1, \ldots, a_\sigma$ restent finies, différentes entre elles et différentes du point x_0. Les changements qui se produisent lorsqu'on fait décrire aux $a_1, \ldots, a_\sigma$ des chemins fermés, peuvent être déterminés en ayant recours à la méthode des coupures mobiles.

Le deuxième problème n'est au fond autre chose que celui que FUCHS avait traité dans ses Mémoires depuis 1888, savoir le problème des équations linéaires dont le groupe est indépendant d'un paramètre; nous le nommerons donc le problème de FUCHS.

Un exemple classique en est fourni par les équations auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques, considérées comme fonctions d'un point singulier, et plus généralement par l'équations hypergéometrique généralisée de M. POCHHAMMER.

A l'égard du problème de FUCHS nous allons procéder comme il suit. Il suffit de considérer le point a_λ seul comme variable et par conséquent les $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ comme des quantités indépendantes de a_λ. Alors les éléments de la matrice intégrale (y_{ik}) en tant que fonctions de a [1] vont satisfaire à un système différentiel linéaire

$$\text{(II)} \qquad \frac{dy_k}{da} = y_1 b_{1k} + \cdots + y_n b_{nk} . \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Les coefficients b_{ik} sont de la forme

$$b_{ik} = B_{ik} - \frac{A_{ik}^{(\lambda)}}{x - a},$$

où les B_{ik} ne dépendent pas de x et sont d'ailleurs des fonctions holomorphes de a, au voisinage de chaque valeur finie a_0, différente de x_0 et des autres points $a_\nu\ (\nu \neq \lambda)$.

Soit (α_{ik}) la matrice intégrale du système linéaire

$$\frac{d\alpha_k}{da} = \alpha_1 B_{1k} + \cdots + \alpha_n B_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

laquelle pour $a = a_0$ se réduit à la matrice unité. Formons le produit des matrices:

$$(y_{ik})\ (\alpha_{ik})^{-1} .$$

Les éléments de cette matrice vont satisfaire à des équations de même forme que les équations (I) et (II), mais où les quantités analogues aux B_{ik} auront disparu. Je conserverai pour ces nouvelles quantités les notations antérieures; mais il convient de remarquer que, d'après la transformation indiquée, les $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ ne seront plus des fonctions *holomorphes*, mais des fonctions *méromorphes* des résidus, de manière que le caractère des fonctions $E_{ik}^{(\nu)}$ aura changé. En revanche le point x_0 aura cessé d'être un point singulier.

[1] Je supprime désormais l'indice λ auprès de la lettre a.

Si maintenant on écrit les conditions d'intégrabilité pour les systèmes différentiels simultanés (I) et (II), on en tire immédiatement les équations:

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da} &= \sum_{p=1}^{n} \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{A_{ip}^{(\lambda)} A_{pk}^{(\nu)} - A_{ip}^{(\nu)} A_{pk}^{(\lambda)}}{a - a_\nu}, \\ \frac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{A_{ip}^{(\lambda)} A_{pk}^{(\nu)} - A_{ip}^{(\nu)} A_{pk}^{(\lambda)}}{a_\nu - a}, \quad (\nu \neq \lambda) \end{aligned} \right.$$

qui constituent les conditions nécéssaires et suffisantes pour que les éléments $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ des substitutions fondamentales soient indépendantes de a. De cette façon nous avons obtenu *un système différentiel du second degré* qui, d'après ce qui précède, se trouve satisfait par les fonctions $A_{ik}^{(\nu)}$ de la variable a tirées des équations

$$\text{(IV)} \qquad \mathcal{A}_{ik}^{(\nu)} = E_{ik}^{(\nu)} (A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}) .$$

Mais, comme le problème de Riemann admet toujours une solution, on peut attribuer aux $\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}$ des valeurs constantes arbitraires, assujetties à la seule condition que les déterminants $|\mathcal{A}_{ik}^{(\nu)}|$ soient différents de zéro. Donc les équations (IV) ne sont autre chose que les équations intégrales générales du système (III). Ce système se trouve donc intégré par les fonctions provenant du problème de Fuchs, c'est-à-dire par des fonctions paramètriques, provenant d'un système différentiel linéaire, d'une manière analogue à celle dont certaines équations linéaires s'intègrent à l'aide d'intégrales définies qui contiennent la variable de différentiation comme paramètre.

Le système différentiel (III) admet d'ailleurs des *équations intégrales algébriques*. On trouve en effet par addition:

$$A_{ik}^{(1)} + \cdots + A_{ik}^{(\sigma)} = \text{const.} ,$$

c'est ce qui fait n^2 équations intégrales; de plus, d'après des propriétés élémentaires des équations déterminantes, les racines des équations en S

$$\begin{vmatrix} A_{11}^{(\nu)} - s & . & . & . & . & A_{n1}^{(\nu)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n}^{(\nu)} & . & . & . & . & A_{nn}^{(\nu)} - s \end{vmatrix} = 0$$

sont aussi des constantes d'intégration, c'est ce qui fournit encore $n\sigma$ équations intégrales algébriques.

Pour le cas le plus simple

$$n = 2 , \sigma = 3$$

le système (III) se compose de $n^2\sigma = 12$ équations, et, comme il y aura

$$n\sigma + n^2 = 10$$

équations intégrales algébriques, ce système pourra être réduit a un système de deux équations du premier ordre. Celui-ci est équivalent alors à l'équation différentielle du second ordre à points singuliers fixes que M. R. FUCHS (le fils) a établi dans les Comptes Rendus de 1905 et dont MM. PAINLEVÉ et GAMBIER se sont occupés à plusieurs reprises.

Si pour $\sigma = n$ l'on égale les constantes d'intégration $A_{ik}^{(\nu)}$ aux éléments des substitutions fondamentales d'une équation de M. POCHHAMMER, ou plus particulièrement d'une équation auquelle satisfont les modules de périodicité d'une intégrale hyperelliptique, les solutions correspondantes $\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}$ du système (III) seront des fonctions rationnelles de la variable a. Si plus généralement pour n et σ quelconques, l'ont égale les $A_{ik}^{(\nu)}$ aux substitutions fondamentales d'un groupe qui satisfait aux conditions d'autoisomorphisme que j'ai établi au tome 124 du Journal de Crelle, les solutions correspondantes de notre système seront des fonctions uniformes de la variable a.

Enfin je voudrais signaler encore le cas particulier, où les deux problèmes que nous avons posés, se confondent, c'est-à-dire le cas où le système (III) admet comme solutions des *constantes*. Les conditions nécéssaires et suffisantes pour que ce cas se présente sont évidemment

$$(\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)})\,(\mathrm{A}_{ik}^{(\lambda)}) - (\mathrm{A}_{ik}^{(\lambda)})\,(\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)}) = 0\,.$$

Ce qui exprime que la matrice $(\mathrm{A}_{ik}^{(\lambda)})$ doit être échangeable avec toutes les autres matrices $(\mathrm{A}_{ik}^{(\nu)})$ pour $\nu \neq \lambda$.

J'ai exposé avec plus de détails quelques unes des recherches que je viens d'indiquer dans le dernier chapitre d'un petit Traité intitulé: *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, qui vient de quitter la presse et que j'ai l'honneur de présenter au Congrès. J'y ai tâché de rénover et de perfectionner la théorie générale des équations linéaires, en la traitant au sens des méthodes de RIEMANN.

GEORGES J. RÉMOUNDOS

SUR LES ZÉROS DES INTÉGRALES D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Notre méthode d'élimination, utilisée pour l'extension aux fonctions multiformes du théorème de M. Picard et de toutes ses généralisations, nous permet d'établir un théorème remarquable sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles.

Dans ma thèse (p. 36 et 37) j'ai démontré que l'extension du théorème de M. Picard, obtenue pour les fonctions ayant un nombre fini n de branches, est valable aussi sous une forme tout-à-fait identique pour les fonctions multiformes définies par une équation:

(1) $$A_0(z) + A_1(z)u + \cdots + A_{\nu-1}(z)u^{\nu-1} + u^{\nu} + z\varphi(z, u) = 0$$

les $A_i(z)$ désignant des fonctions entières d'ordre de grandeur $e^{M(r)}$ et $\varphi(z, u)$ [1] désignant une fonction quelconque de u et d'ordre de grandeur par rapport à z inférieur à $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α étant un certain nombre positif): *Le nombre des valeurs exceptionnelles de u (l'infini compris) est, au plus, égal a 2n* [2].

La seule hypothèse que nous faisons sur la fonction consiste en ce que cette fonction ne doit pas admettre des infinis par rapport à u. Pour fixer les idées nous pouvons nous attacher au cas où la fonction $\varphi(z, u)$ ne dépend pas de z. Le théorème, ci-dessus énoncé, concerne donc toutes les fonctions $u = f(z)$ définies par une équation de la forme:

(2) $$A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \cdots + A_{\nu-1}(z)u^{\nu-1} + u^{\nu} + zq(u) = 0$$

$q(u)$ désignant une fonction quelconque de u, *n'ayant pas d'infinis*. Il est remarquable que la fonction $q(u)$ peut n'être même pas analytique; si elle avait des infinis, ces valeurs étant exceptionnelles, seraient naturellement classées à l'ensemble, que nous avons appelé (E) dans notre thèse; nous avons exclu le cas de l'existence de ces valeurs, parce que leur nombre est, en général, indéterminé.

(1) Plus précisement, la quantité désigne le plus grands des ordres de grandeur des fonctions.

(2) Nous supposons, bien entendu, que $\varphi(z, u)$, soit, pour chaque valeur de u, une fonction entière par rapport à z.

2. Considérons maintenant une équation différentielle de la forme:

$$(3)\qquad A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \cdots + A_{n-1}(z)u^{n-1} + u^n + \\ + zQ[u, u', u'', \ldots u^{(m)}] = 0$$

et désignons par $e^{M(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur des fonctions entières $A(z)$ dont une, au moins, est transcendante. Nous supposons que $Q[u, u', u'', \ldots u^{(m)}]$ soit un polynome par rapport à $u, u', \ldots u^{(m)}$. Considérons une intégrale $u = \sigma(z)$ de l'équation différentielle (3) et éliminons la variable z entre les deux équations:

$$u = \sigma(z) \quad \text{et} \quad u' = \sigma'(z)$$

soit $u' = g_1(u)$ le résultat de cette élimination. Soit, aussi $u'' = g_2(u)$ le résultat de l'élimination de z entre les deux équations

$$u = \sigma(z) \quad \text{et} \quad u'' = \sigma''(z)\,.$$

En général, désignons par $u^{(m)} = g_m(u)$ la fonction obtenue par l'élimination de z entre les deux équations: $u = \sigma(z)$, $u^m = \sigma^{(m)}(z)$. Enfin, l'élimination des $u', u'', \ldots u^{(m)}$ entre l'équations différentielle (3) et les équations $u' = g_1(u)$, $u'' = g_2(u)$, $u''' = g_3(u)$.. ... $u^{(m)} = g_m(u)$ nous conduit à une équation différentielle de la forme:

$$(4)\qquad A_0(z) + A_1(z)u + \cdots + A_{n-1}(z)u^{n-1} + u^n + zF(u) = 0$$

qui sera bien satisfaite par l'intégrale $u = \sigma(z)$.

Nous remarquons que pour une valeur $u = u_0$ la fonction $F(u)$ ne saurait avoir aucune valeur infinie, si aucune des fonctions $g_1(u)$, $g_2(u) \ldots g_m(u)$ n'a de valeur infinie pour $u = u_0$; cela tient à ce que la fonction $Q(u, u', u'' \ldots)$ est, par hypothèse, un polynome entier par rapport à $u, u', u'', \ldots u^{(m)}$.

Si toutes les valeurs de $F(u_0)$ sont infinies, alors pour la valeur $u = u_0$ l'équation (4) n'admet aucune racine finie et différente de $z = 0$; il en sera donc de même de l'équation:

$$u_0 = \sigma(z)$$

si l'équation (4) est irréductible: nous entendons par là qu'elle n'est satisfaite que par une fonction *unique*: l'intégrale

$$u = \sigma(z)\,.$$

Avec cette hypothèse (U) l'intégrale $u = \sigma(z)$ ne prend la valeur u_0 pour aucune valeur finie de z sauf, peut-être, pour $z = 0$; convenons d'appeler valeur exceptionnelle parfaite une telle valeur $u = u_0$.

L'équation (4) étant bien de la forme (2) si nous excluons les valeurs exceptionnelles parfaites (qui rendent infinies toutes les branches de $F(u)$ pour toutes les autres valeurs de u, nous avons visiblement un théorème analogue à celui que nous avons démontré dans notre thèse sur l'équation (2).

Teorème. — *Pour toute intégrale $u = \sigma(z)$ de l'équation différentielle* (3) *satisfaisant à l'hypothèse* (U), *le nombre des valeurs de u exceptionnelles non par-*

faites est égal au plus à $2n-1$ *(l'infini non compris). Nous entendons par là que l'équation*

$$u=\sigma(z) \tag{5}$$

ne saurait admettre un nombre fini de racines (par rapport à z) pour plus que $2n-1$ *valeurs finies de* u. *Nous excluons le cas, où l'équation* (5) *admet la seule racine* $z=0$ (1).

D'une façon plus générale, la densité des racines de l'équation (5) *ne saurait être inférieure à celle qui convient à une fonction entière d'ordre de grandeur* $e^{M(r)}$ *pour plus que* $2n-1$ *valeurs finies de* u; *nous faisons toujours l'exclusion des valeurs de* u *que l'intégrale ne prend à distance finie que pour* $z=0$.

En effet, si la fonction $F(u)$ est uniforme, notre méthode d'élimination exposée dans ma thèse nous permet visiblement de démontrer qu'il est impossible d'avoir plus que $2n-1$ valeurs exceptionnelles finies et non parfaites de l'intégrale $u=\sigma(z)$. On se ramène toujours au théorème fondamental de M. Borel (Voir son Mémoire: *Sur les zéros des fonction entières*. Acta mathematica, t. XX, p. 387) et ma thèse de doctorat: *Sur les zéros d'une classe de fonctions trascendantes*, Paris, Gauthier-Vilars et Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, tome VIII). Si $F(u)$ est multiforme, nous avons encore le même résultat parce que, parmi les plusieurs équations, auxquelles peut donner naissance une valeur $u=u_0$ ne rendant pas infinie (2) la fonction $F(u)$, il n'y a qu'une qui peut être exceptionnelle au sens plusieurs fois expliqué. Pour nous en rendre bien compte, désignons par $V_1, V_2, V_3\ldots$ les diverses valeurs de $F(u_0)$; alors, nous aurons les équations:

$$\left\{\begin{array}{l} A_0(z)+A_1(z)u_0+\cdots+A_{n-1}(z)u_0^{n-1}+u_0^n+zV_1=0\\ A_0(z)+A_1(z)u_0+\cdots+A_{n-1}(z)u_0^{n-1}+u_0^n+zV_2=0\\ A_0(z)+A_1(z)u_0+\cdots+A_{n-1}(z)u_0^{n-1}+u_0^n+zV_3=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{6}$$

les premiers membres étant identiques; mais, d'après le théorème de M. Picard, il y a au plus une, parmi ces équations (6) qui peut être exceptionnelle; or, pour que la valeur u_0 soit exceptionnelle de la fonction $u=\sigma(z)$, il faut que toutes les équations soient exceptionnelles, ce qui est impossible.

Nous en concluons que une valeur $u=u_0$ ne saurait jamais être exceptionnelle si la fonction $F(u)$ a plusieurs valeurs pour $u=u_0$; cette fonction $F(u)$ étant supposée multiforme, nous concluons que les seules valeurs de u qui peuvent être exceptionnelles pour l'intégrale $u=\sigma(z)$ sont les points critiques de la fonction $F(u)$. En utilisant pour ces points critiques la méthode d'élimination nous obtenons la même limite supérieure $2n-1$.

(1) Nous excluons aussi, bien entendu, les valeurs de u qui n'appartiennent pas au domaine de l'existence de la fonction $F(u)$ et, par conséquent, de la fonction $z=\Sigma(u)$, inverse de l'intégrale $u=\sigma(z)$. Ces valeurs de u, lorsqu'elles existent, sont évidemment exceptionnelles.

(2) Pour toutes les branches.

3. Il importe de signaler le fait que le théorème de ce travail nous fournit une extension rémarquable aux intégrales d'équations différentielles de *tout ordre* du théorème établi dans ma thèse sur le fonctions algébroïdes (à un nombre fini de branches). Nous n'avons qu'un complément qui n'est pas grave.

Il est aussi remarquable que notre théorème concerne des intégrales, qui peuvent être des fonctions quelconques de z avec une infinité de branches et avec des singularités quelconques.

Il est utile d'appeler l'attention sur le fait que notre théorème se rapporte à des équations différentielles *transcendantes* par rapport à la variable indépendante z.

En se bornant aux équations différentielles du premier ordre, M. P. Painlevé a établi une certaine extension du théorème de M. Picard, où le nombre des valeurs exceptionnelles est aussi fini. Ces équations différentielles de M. Painlevé sont supposées algébriques en z, contrairement à celles du présent travail. De plus, notre théorème peut être considéré comme un complément de celui de M. Painlevé sur les équations du premier ordre au point de vue de l'ordre des équations différentielles et de ce qu'elles sont ici transcendantes par rapport à la variable indépendante z [1].

Nous avons supposé que dans l'équations différentielle (3) la fonction $Q[u, u', u'', \ldots u^{(m)}]$ soit un polynome par rapport à $u, u', u'', u^{(m)}$. Cette hypothèse n'est pas indispensable et n'a été faite que pour fixer les idées; en effet, le lecteur peut facilement se rendre compte que nos raisonnements n'en sont pas moins valables si la fonction $Q(u, u', u'' \ldots)$ est quelconque; un cas intéressant est, par exemple, celui où $Q(u, u', u'' \ldots)$ désigne une fonction entière des $u, u', u'' \ldots$ et trascendante par rapport à une ou à plusieurs de ces variables.

Nous remarquons aussi que si nous considérons les valeurs exceptionnelles au sens le plus général du mot, nous pouvons bien remplacer dans l'équation (3) la fonction Q par une fonction $R(z, u, u', u'' \ldots)$ dépendante aussi de z, qui soit, pour chaque système de valeurs de u, u', u'', entière par rapport à z d'ordre de grandeur inférieur a $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α étant un certain nombre positif quelquonque).

4. Le caractère essentiel du dernier terme $zQ(u, u', u'' \ldots)$ de l'équation différentielle tient à ce que il s'annulle pour $z = 0$ pour tout système de valeurs des u, u', u'', ne rendant pas infinie la fonction $Q(u, u', u'')$; il est bien entendu que ce n'est pas la valeur $z = 0$ qui est indispensable ici: il suffit d'avoir une, au moins, valeur quelconque de z pour laquelle le terme en question de l'équation differentielle (3) jouisse de la propriété ci-dessus indiquée. Ainsi nous pouvons considérer l'équation différentielle:

$$A_0(z) + A_1(z)\, u + \cdots + A_{n-1}(z)\, u^{n-1} + u^n + (z - \alpha)\, Q[u, u', \ldots u^{(m)}]$$

qui se ramène à la forme (3) par la transformation $z - a = \zeta$. Il faut seulement porter l'attention sur le fait que les valeurs exceptionnelles parfaites dépendent de la valeur $z = \alpha$ et sont les valeurs de u que l'intégrale $u = \sigma(z)$ ne prend à distance finie que pour $z = \alpha$.

[1] Elles peuvent aussi l'être par rapport à u.

Nous tenons enfin à donner des explications détaillées sur l'hypothèse que l'équation (4) ne doive être satisfaite que par une fonction *unique*, l'intégrale $u = \sigma(z)$. Si, en effet, il y avait plusieurs fonctions satisfaisant à l'équation (4), une valeur $u = u_0$ pourrait être exceptionnelle pour une de ces fonctions sans l'être pour leur ensemble; en d'autres termes, une valeur $u = u_0$ pourrait être exceptionnelle pour l'intégrale $u = \sigma(z)$ sans que l'équation (4) admette un nombre fini de racines où, en général, un ensemble de racines d'une densité exceptionnelle.

Lorsque l'équation (4) ne définit qu'une fonction unique, nous dirons que cette équation est irréductible. L'hypothèse, donc, en question, peut se resumer de la façon suivante:

L'intégrale $u = \sigma(z)$ ne satisfait pas à une équation différentielle de la forme: $Q(u, u', u'', \ldots, u^m) = F(u)$.

$F(u)$ *désignant une fonction telle que l'équation:*

$$A_0(z) + A_1(z)\,u + \cdots + A_{n-1}(z)\,u^{n-1} + u^n + zF(u) = 0$$

soit réductible.

C'est à ces intégrales satisfaisant à cette restriction que se rapporte visiblement le théorème établi dans ce travail.

5. Les résultats de ce travail fournissent une nouvelle preuve de la grande fécondité du théorème de M. Borel, auquel nous devons le théorème de ce travail ainsi que les résultats obtenus sur les zéros des fonctions multiformes (Voir ma thèse et deux autres Mémoires, que j'ai publiés dans le Journal de Mathématiques pures et appliqués: *Sur les fonction ayant un nombre fini de branches*, 1906, fasc. I; *Sur la croissance des fonctions multiformes*, 1907, fasc. III). Mon idée, autre fois exprimée, que le domaine des applications du théorème de M. Borel devait être très large et embrasser plusieurs branches de l'Analyse, se trouve bien justifiée: nous sommes ici en présence d'une intéressante application dans la théorie des équations différentielles.

En terminant, nous résumons les résultats de cette communication de la façon suivante:

La fonction $u = \sigma(z)$ désignant une intégrale de l'équation différentielle (3) *ou bien cette fonction jouit de l'extension du théorème classique de M. Picard exprimée par le théorème de cette communication, ou bien l'équation différentielle* (3) *a plusieurs (au moins deux) intégrales communes avec les équations différentielles:*

$$u' = g_1(u)\,,\ u'' = g_2(u)\,,\ \ldots\ u^{(m)} = g_m(u) \qquad [\text{Voir dans le N}^\text{o}\ 2].$$

G. PICK

UEBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG
DER HYPERGEOMETRISCHEN FUNKTION

Die Mitteilung bezieht sich nicht auf irgendwelche Integrationstheorie; sie ist vielmehr rein formaler Natur und will eine neue Bildungsweise der hypergeometrischen Differentialgleichungen bringen.

Zunächst: was soll hier unter diesem Namen verstanden sein? Gewöhnlich werden wohl unter hypergeometrischen Gleichungen im weiteren Sinne gewisse gewöhnliche lineare Differentialgleichungen von bekannten speziellen Eigenschaften begriffen. Diese Gleichungen (und die durch sie definierten Funktionen) enthalten Parameter, welche im Wesentlichen der Differentiationsvariablen völlig gleichberechtigt sind. Vor allem soll nun diesem Umstand Rechnung getragen werden, das heisst, die erwähnten Parameter sollen selbst als gleichberechtigte Differentiationsveränderliche auftreten. Statt der gewöhnlichen Differentialgleichungen also partielle (1). Das hiemit gestellte Problem wird nun lösbar, das heisst, die fraglichen Gleichungen können in expliziter Form und in zweckmässiger Schreibweise wirklich aufgestellt werden, wenn man besonders über zwei Vorbedingungen richtig verfügt: Die Wahl der Differentiationsvariablen und die passende Zerlegung in Systeme erster Ordnung.

Als Variable sollen die *Perioden erster Gattung* gewisser zugehöriger ABEL'scher Integrale verwendet werden. Die Zweckmässigkeit dieses Massregel scheint mit der *uniformisierenden Wirkung* der Einführung solcher Variablen zusammen zu hängen. Diese Wirkung ist im einfachsten Fall der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion bekannt; ich nenne die Namen KLEIN, PAPPERITZ, WIRTINGER. Für höhere Fälle ist sie wohl auch schon behauptet worden. Präzises hierüber kann heute kaum angegeben werden; vielleicht werden die in rationeller Form aufgestellten Differentialgleichungen Behelfe zur Entscheidung geben.

Um eine zweckmässige Zerlegung in Systeme von Gleichungen erster Ordnung zu erlangen, müssen zusammengehörige Systeme von Funktionen (beziehungsweise

(1) Eine Hindeutung auf ein solches Arrangement findet sich schon bei KLEIN: *Ueber die hypergeometrische Funktion* (Göttingen, 1904).

Formen), die durch simultane Gleichungen definiert sein sollen, gebildet werden. Hier erhält man das Richtige, wenn man von der Darstellung jener Funktionen als Parameterintegrale ausgeht. Es zeigt sich Zusammengehörigkeit in ganz analoger Weise wie bei den ABEL'schen Perioden erster Gattung; und was entscheidend ist, es stellen sich ganz entsprechend auch zugehörige *Grössen zweiter Gattung* ein.

Wesentlich ist endlich die völlige Ausnützung der Invarianteneigenschaften, welche den eintretenden Grössen zukommen. Es bedarf bei den höheren Fällen besonderer Vorkehrungen, um diese Invarianteneigenschaften zur Geltung bringen zu können. Ich übergehe diesen Punkt, da er für die gewöhnliche Hypergeometrische Funktion noch nicht in Betracht kommt. Für diesen einfachsten Fall sollen nun die dem vorangegangenen Raisonnement entsprechenden Formeln wirklich angegeben werden.

Ich gehe aus von der Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion in KLEIN'scher Normierung:

$$\Pi = \int \mathrm{P} dz = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \prod_{a,b} (a-b)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \int (z-a)^{\alpha-\frac{1}{2}} (z-b)^{\beta-\frac{1}{2}} (z-c)^{\gamma-\frac{1}{2}} (z-d)^{\delta-\frac{1}{2}} dz$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta=0)$$

das Integral auf geeignetem geschlossenen Weg (Doppelumlauf) genommen. Der vorangesetzte Normierungsfaktor hat bekanntlich den Effekt, dass die Grösse in eine Invariante der biquadratischen Grundform

$$f(x) = \mathrm{A}(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

verwandelt wird, vom Grade $-\frac{1}{2}$. Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$ wird aus Π

$$\Omega = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

eine elliptische Periode erster Gattung. Die zugehörige Periode zweiter Gattung kann man in der Form

$$\mathrm{H} = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{\mathrm{F}(z,t)}{2(z-t)^2}$$

ansetzen, wo $\mathrm{F}(z,t)$ die zweite Polare von $f(z)$ noch t bedeutet; von t ist H bekanntlich unabhängig. Ganz analog nun wie H zu Ω, steht eine Grösse K der Grösse Π gegenüber. Um K zu schreiben, bedarf es noch einer Hülfsform:

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \left(\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d}\right).$$

Sie ist zweiter Ordnung in x und eine (irrationale) Kovariante von $f(x)$. Wenn die erste Polare von $\varphi(z)$ nach t mit $\Phi(z, t)$ bezeichnet wird, so ist das in Aussicht genommene K durch die Formel

$$K = \int P dz \, . \, \frac{F(z, t) - (z, t)\,\Phi(z, t)}{2(z-t)^2}$$

gegeben. K ist von t unabhängig.

Nun seien $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ ein System von zusammengehörigen Elementarperioden erster und zweiter Gattung zu

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

Π und K können dann als Formen von ω_1, ω_2 angesehen werden, ersteres von 1^ter, letzteres von (-1)^ter Ordnung. Bildet man den bekannten Operator

$$\Delta = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}$$

so ist

$$\begin{cases} \Delta(\Pi) = -K \\ \Delta(K) = \left(\frac{g_2}{12} + \frac{(\varphi, \varphi)^2}{8}\right) . \, \Pi \end{cases}$$

das Differentialsystem der beiden Funktionen. Es bedeutet darin g_2 die bekannte Invariante von $f(x)$, $(\varphi, \varphi)^2$ die zweite Ueberschiebung von φ über sich selbst (Diskriminante).

Es ist hier leicht K zu eliminieren und dadurch eine Gleichung zweiter Ordnung für Π herzustellen. Wenn ϱ_1, ϱ_2 unbestimmte Grössen sind, so ist

$$D^2(\Pi) = \frac{\left(\varrho_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}\right)^2 \Pi}{(\varrho_1 \omega_2 - \varrho_2 \omega_1)^2}$$

von den ϱ ganz unabhängig (¹) weil Π ersten Grades ist. Hieraus ergiebt sich leicht mit Hülfe der LEGENDRE'schen Relation

$$-4\pi^2 . \, D^2(\Pi) = \Delta\Delta(\Pi) + \frac{g_2}{12} \Pi ;$$

das System ergiebt also

$$D^2(\Pi) = \frac{(\varphi, \varphi)^2}{32\pi^2} . \, \Pi ,$$

als schliessliche Gestalt der Differentialgleichung.

Von der Herleitung der sonst bekannten Formen der hypergeometrischen Differentialgleichung aus der neuen Gestalt soll nicht gesprochen werden. Hierüber ist das Nötige in einer eben gedruckten Mitteilung (²) enthalten.

(¹) Diese fast triviale, aber wenig bekannte Tatsache findet sich mitgeteilt in PICK: *Ueber die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung* (Wiener Berichte, 1887).

(²) *Zur hypergeometrischen Differentialgleichung* (Wiener Berichte, 1908).

N. SALTYKOW

SUR L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DE S. LIE ET LE PERFECTIONNEMENT DE LA MÉTHODE DE JACOBI DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS PARTIELLES

MM. Permettez-moi de vous présenter les résultats de mes recherches sur les équations partielles du 1er ordre.

Il s'agit en premier lieu de l'existence des intégrales complètes de S. LIE.

Dans les Mathematische Annalen (1), dans le Traité (2) publié par M. F. ENGEL, S. LIE, ainsi que d'autres auteurs encore, traitent les notions de S. LIE sur les équations partielles et leurs intégrales comme une généralisation de la théorie classique.

Or, depuis la création de la dite théorie, on pouvait déjà signaler les propriétés particulières des équations partielles admettant certaines multiplicités intégrales complètes de S. LIE (3). Mais c'est seulement vers la fin de sa vie bien distinguée, dans son dernier Mémoire (4), que S. LIE est revenue sur la question qui nous occupe, sans obtenir des résultats essentiels.

J'ai insisté sur la même question dans une Note en 1903 (5). Dernièrement M. F. ENGEL (6) a étudié les conditions d'existence des intégrales de S. LIE, en poursuivant les recherches de son illustre maître.

Cependant il est aisé d'obtenir explicitement la forme générale d'équations partielles du premier ordre admettant les intégrales complètes de S. LIE, en partant des considérations que j'ai sommairement indiqué dans ma Note citée plus haut.

(1) Bd. 9, S. 245.

(2) *Theorie der Transformationsgruppen* (Zweiter Abschnitt, Kapitel 4).

(3) S. LIE, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben* (Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften u. D. G. A. Universität. Göttingen, 1873, S. 473). — A. BAECKLUND, Mathematische Annalen, Bd. 17, S. 285. — Cfr. F. ENGEL, *Zur Erinnerung an S. LIE* (Berichte über d. V. d. K. S. Gesell. d. Wissenschaften zu Leipzig. Allgemeiner Theil, 1899, S. XXXI).

(4) S. LIE, *Ueber Berührungstransformationen u. Differentialgleichungen* (Leipziger Berichte Jahrg. 1898, SS. 113-180).

(5) *Sur les intégrales de S. LIE* (Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., Paris, 3 août 1903).

(6) *Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen* (Leipziger Berichte, 1905, S. 161).

Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots x_n, p_2, p_3, \dots p_n) = 0, \tag{1}$$

les variables

$$x_1, x_2, \dots x_n \quad , \quad p_1, p_2, \dots p_n \tag{2}$$

vérifiant la relation différentielle

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \cdots + p_n\, dx_n. \tag{3}$$

Nous disons *multiplicité intégrale complète de la classe* q *de l'équation* (1) l'ensemble de $n+1$ équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} z - \varphi(x_1, x_2, \dots x_{n-q}, C_1, C_2, \dots C_n) = 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_{n-q}, C_1, C_2, \dots C_n) = 0, \\ p_k - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sum\limits_{i=1}^{q} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i} = 0, \\ \qquad (i = 1, 2, \dots q \quad , \quad k = 1, 2, \dots n-q), \end{array}\right. \tag{4}$$

$C_1, C_2, \dots C_n$ désignent n constantes arbitraires, et ce dernier système jouissant de la double propriétée:

1°. *Les valeurs* z, x_{n-q+i}, p_k *tirées du système* (4) *identifient les équations* (1) *et* (3).

2°. *Le résultat d'élimination des constantes* $C_1, C_2, \dots C_n$ *du système* (3) *représente la seule équation donnée* (1).

Le lieu géométrique de la multiplicité (4) est dit aussi *intégrale complète de classe* q.

Il est aisé de voir que le système (4) est réductible à la forme suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 + H(x_1, x_2, \dots x_n, p_2, p_3, \dots p_n) = 0, \\ F_r(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_2, p_3, \dots p_n) = C_r, \\ \qquad (r = 1, 2, \dots n). \end{array}\right. \tag{5}$$

Comme les parenthèses de Weiler formées de premiers membres des équations (4), par rapport aux variables canoniques (2), s'annulent moyennant les équations (4), ces dernières représentent *un système complet.*

Il en résulte donc la première propriété du système (5):

1°. *Les équations* (5) *forment un système complet.*

Enfin, les deux systèmes (4) et (5) étant équivalents, le système (5) contient q rélations parmi les variables canoniques de la première classe.

Il s'ensuit la seconde propriété du système (5):

2°. *Les fonctions* $F_1, F_2 \dots F_n$ *sont dépendantes par rapport aux variables canoniques de la seconde classe, le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots F_n}{z, p_2, \dots p_n}\right)$$

s'annulant ainsi que tous ses mineurs depuis le 1er ordre jusqu'à l'ordre $q-1$ inclusivement.

Les deux propriétés indiquées du système (5) sont d'une grande importance pour la théorie étudiée. Elles offrent non seulement les conditions nécessaires, mais aussi suffisantes pour qu'un système d'équations de la forme (5) définit une intégrale complète de classe q de l'équation donnée (1).

Cela étant, les fonctions F_r sont donc des intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction F

$$[p_1 + H , F] = 0 . \tag{6}$$

Par conséquent, les intégrales complètes de Lagrange et de S. Lie sont définies par les n intégrales en involutions de cette dernière équation (6).

L'analogie va encore plus loin: l'équation (1) étant indépendante de z, on voit aisément que la définition des intégrales complètes de Lagrange et de S. Lie dépend de $n-1$ intégrales en involution

$$F_1 , F_2 , \dots F_{n-1} , \tag{7}$$

de l'équation

$$(p_1 + H , F) = 0$$

et d'une quadrature [1], les fonctions (7) ne dépendant que des variables (2).

Or la distinction essentielle entre les intégrales complètes de Lagrange et de S. Lie consiste dans la condition concernant la dépendance des fonctions (7), par rapport aux variables canoniques de la seconde classe. Dans le cas de Lagrange, les intégrales (7) sont indépendantes par rapport à ces dernières variables, c'est-à-dire le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{F_1 , F_2 , \dots F_{n-1}}{p_2 , p_3 , \dots p_n}\right) \tag{8}$$

est distinct de zéro. Quant à S. Lie, au contraire, pour que les intégrales (7) définissent une intégrale complète de classe q, le déterminant fonctionnel (8) doit s'annuler identiquement, ainsi que tous ses mineurs depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $q-1$ inclusivement.

Supposons, par exemple, que le premier mineur d'ordre q distinct de zéro soit

$$D\left(\frac{F_1 , F_2 , \dots F_{n-q-1}}{p_2 , p_3 , \dots p_{n-q}}\right) .$$

Les intégrales (7) vérifient alors les conditions suivantes:

$$F_{n-q+i} = f_i(x_1 , x_2 , \dots x_n , F_1 , F_2 , \dots F_{n-q-1}) ,$$
$$(i = 0 , 1 , 2 , \dots q-1) .$$

[1] N. Saltykow, *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., Paris, 17 août 1903).

Ces préliminaires posés, on construit aisément la forme générale d'une équation (1) admettant l'intégrale complète de S. Lie de classe q.

Pour faire comprendre le calcul à effectuer, considérons le cas le plus simple d'une équation

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = 0, \tag{9}$$

admettant l'intégrale complète de S. Lie de la première classe.

Il s'agit donc d'étudier les conditions d'existence de deux fonctions F_1 et F_2 des variables

$$x_1, x_2, x_3, p_2, p_3$$

vérifiant les conditions suivantes:

$$(p_1 + H, F_1) = 0, \tag{10}$$

$$(p_1 + H, F_2) = 0 \quad , \quad (F_1, F_2) = 0, \tag{11}$$

$$F_2 = f(x_1, x_2, x_3, F_1).$$

En supposant

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \gtrless 0,$$

introduisons F_1 comme nouvelle variable indépendante, au lieu de p_2.

Le système (11) transformé devient alors

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + A\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + B\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où l'on a posé

$$A = \left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\right) - B\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right) \quad , \quad B = \frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_3}\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\right)}, \tag{13}$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution effectuée.

Les coefficients A, B étant des fonctions des variables x_1, x_2, x_3, F_1 et p_3, comme la fonction f est indépendante de la variable p_3, il résulte du système (12) les identités

$$\frac{\partial A}{\partial p_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial p_3} = 0.$$

Les fonctions A et B ont donc la forme suivante:

$$A = \psi(x_1, x_2, x_3, F_1),$$
$$B = \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1),$$

ψ et φ désignant deux fonctions arbitraires des variables x_1, x_2, x_3, F_1.

Le système (12) devient alors

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} + \varphi \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Comme ces dernières équations forment un système jacobien, les fonctions ψ et φ doivent satisfaire à la condition suivante:

$$(15) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Substituons les valeurs obtenues de A et de B dans les formules (13). Effectuant ensuite la transformation inverse des variables, en remplaçant F_1 par sa valeur en p_2, il vient les conditions que doivent satisfaire les fonctions H et F_1, pour que la fonction f existe,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p_3} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi(x_1, x_2, x_3, F_1), \\ &\frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce dernier système (16) appartenant à la forme de ceux étudiés par JACOBI [1], son intégration revient à celle des équations différentielles ordinaires

$$dp_3 = \frac{dp_2}{-\varphi} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0}.$$

Par conséquent, la forme générale des fonctions H et F_1 est la suivante:

$$H = \psi p_3 + D(x_1, x_2, x_3, p_2 + \varphi p_3),$$
$$F_1 = E(x_1, x_2, x_3, p_2 + \varphi p_3),$$

D et E désignant deux fonctions arbitraires. Quant à la fonction f, elle est définie par le système (14). Enfin, la fonction F_1 doit de plus satisfaire à l'équation (10).

[1] JACOBI, *Gesammelte Werke*, Band 4, S. 7. — SALTYKOW, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5ème série, p. 423.

Le calcul développé se prête à une généralisation immédiate au cas le plus général d'un système en involution

$$(17) \qquad \begin{cases} p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots m), \end{cases}$$

admettant une intégrale complète de S. Lie de classe q.

Il en résulte que les fonctions H_k ont la forme

$$H_k = \sum_{i=1}^{q} \psi_{ki} p_{n-q+i} + A_k(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_{n-m-q}),$$

les A_k étant des fonctions arbitraires des variables $x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_{n-m-q}$, où l'on a posé

$$u_r = p_{m+r} + \sum_{i=1}^{q} \varphi_{\nu i} p_{n-q+i},$$

toutes les valeurs $\psi_{ki}, \varphi_{\nu i}$ désignant des fonctions arbitraires des quantités variables

$$x_1, x_2, \ldots x_n, F_1, F_2, \ldots F_{n-m-q}.$$

Les fonctions ψ_{ki}, φ_{ri} satisfont de plus aux conditions d'involution du système

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \psi_{ki} \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+i}} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+r}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \varphi_{\nu i} \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+i}} = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots m \quad , \quad r = 1, 2, \ldots n - m - q). \end{cases}$$

Quant aux fonctions $F_1, F_2, \ldots F_{n-m-q}$, elles sont données sous la forme suivante:

$$(19) \qquad \begin{cases} F_r = B_r(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_{n-m-q}), \\ (r = 1, 2, \ldots n - m - q), \end{cases}$$

les B_r désignant des fonctions arbitraires définies de la manière à vérifier les conditions d'involution

$$(p_k + H_k, F_r) = 0,$$
$$(k = 1, 2, \ldots m \quad , \quad r = 1, 2, \ldots n - m - q).$$

Cela étant, l'intégrale complète de classe q du système (17) est définie par l'ensemble de $n - m - q$ équations (19), q intégrales en involution du système jacobien (18) et une quadrature.

Les considérations développées démontrent que la forme générale des équations partielles admettant les intégrales complètes de S. Lie contient des fonctions arbitraires. Mais il va sans dire que ce sont des équations d'un caractère tout particulier.

Il se pose donc immédiatement la question de la valeur que présentent les intégrales complètes de S. Lie dans la théorie des équations partielles. En partant de ce fait que l'intégrale complète de Lagrange s'obtient de celle de S. Lie, dans l'hypothèse particulière $q = 0$, certains auteurs voyaient dans les notions de S. Lie la généralisation de la théorie classique des équations partielles.

On sait bien que S. Lie a obtenu ces notions moyennant des considérations géométriques. Dans sa belle et éloquente conférence d'avant-hier (1), M. G. Darboux a fait un éloge des travaux géométriques de S. Lie. Dans la même conférence M. G. Darboux nous à dit qu'en appliquant l'analyse pour résoudre les problèmes de géométrie, il fallait toujours nous guider par l'esprit géométrique. Qu'il me soit permis d'ajouter, de ma part, qu'en appliquant la géométrie à l'étude des questions purement analytique, il faut bien prendre garde que les considérations géométriques s'accordent avec les théorèmes analytiques et que les conclusions basées sur la géométrie ne dépassent point les limites assignées rigoureusement par l'analyse.

En associant les éléments de surface en multiplicités de différentes classes, S. Lie se laissa entraîner par leur interprétation géométrique, en croyant généraliser la théorie classique des équations partielles. En effet, il est aisé d'associer les éléments de surfaces en toutes les multiplicités possibles. Or s'il on a *un système d'éléments de surface*, c'est-à-dire *un ensemble d'éléments de surface défini par les équations de la forme étudiée*, il résulte alors, de notre analyse, que c'est par exception seulement qu'il est possible d'associer les éléments du systéme donné en multiplicité complète d'une classe donnée.

Considérons, par exemple, l'espace de trois dimensions et toutes les multiplicités des éléments de surface associés sur une surface, ou le long d'une courbe, ou bien autour d'un point. Soit un système d'éléments de surface défini par l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{20}$$

Cette dernière équation possède une multiplicité complète, dont le lieu géométrique est une surface, dans le cas général d'existence des intégrales de Cauchy. Quant aux multiplicités complètes, dont le lieu géométrique est une courbe ou un point, pour les admettre, l'équation (20) doit être linéaire par rapport aux variables p et q, ou bien être indépendante de ces dernières.

Comme nous venons de le voir, la pluspart des équations partielles ne possèdent point des intégrales complètes de S. Lie. De plus, l'étude détaillée des multiplicités intégrales complètes démontre que ces dernières représentent les équations que l'on obtenait toutes les fois, quand l'ancienne *méthode des caractéristiques* était en défaut. Pour élucider ce fait, au point de vue historique, il est utile de rappeler qu'à la même époque, quand M. A. Mayer (2) a levé toutes les objections faites à la théorie des caractéristiques, S. Lie venait de publier ses idées sur les multiplicités intégrales, sans savoir les résultats obtenus par M. A. Mayer.

(1) *Les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale.*
(2) Mathematische Annalen, Bd. III, S. 435.

Par conséquent, toute la valeur des notions de S. LIE sur les multiplicités intégrales complètes revient à l'interprétation géométrique des résultats que l'on obtenait dans les cas d'exception de l'ancienne méthode des caractéristiques. On tomberait donc en défaut si l'on se contentait d'une intégrale complète de S. LIE, en intégrant une équation partielle. Car, en effet, S. LIE relie par des relations les variables qui sont essentiellement indépendantes par rapport aux équations partielles. S. LIE ne donne pas non plus le moyen pour passer, ensuite, aux intégrales complètes de LAGRANGE. Donc, dans la théorie de S. LIE, il ne s'agit pas des équations partielles, mais on leur substitue des équations d'un nouveau caractère. Par conséquent, limiter la théorie des équations partielles par les notions de S. LIE, cela signifirait de renoncer à l'étude d'une question la plus délicate de la théorie en question:

Rechercher un système complet de $n+1$ équations résolubles par rapport à z et aux variables canoniques de la seconde classe.

Il en résulte donc, qu'au point de vue de l'intégration des équations partielles, la théorie de S. LIE doit être complétée par des considérations permettant de passer d'une intégrale complète de S. LIE à celle de LAGRANGE, comme j'ai insisté d'ailleurs maintes fois dans plusieurs travaux antérieurement publiés [1].

La seconde question dont je veux encore brièvement parler, concerne le perfectionnement de la méthode de JACOBI-MAYER. Cette dernière démontre l'existence des intégrales du système différentiel des caractéristiques résolubles par rapport aux variables canoniques de la seconde classe. Or, au point de vue des applications, la méthode de JACOBI-MAYER ne donne pas toute la liberté désirable pour effectuer le calcul nécessaire. Le perfectionnement en question a en vue d'utiliser toute intégrale du système différentiel des caractéristiques en involution avec les intégrales précédemment calculées, indépendamment de ce que cette dernière soit résoluble ou non par rapport à une des variables canoniques de la seconde classe. De même cette méthode est-elle aussi applicable, dans les cas, quand il se présente des difficultés, au point de vue pratique, pour résoudre les intégrales obtenues par rapport aux variables canoniques de la seconde classe.

Par conséquent, la méthode de JACOBI-MAYER perfectionnée revient à calculer les fonctions

$$F_1\,,\,F_2\,,\,\dots\,F_{n-1}$$

satisfaisant à la seule condition de vérifier les équations suivantes:

$$\begin{gathered}(p_1+H\,,F_1)=0\,,\\ (p_1+H\,,F_2)=0\quad,\quad(F_1\,,F_2)=0\,,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (p_1+H\,,F_{n-1})=0\quad,\quad(F_1\,,F_{n-1})=0\,,\dots(F_{n-2}\,,F_{n-1})=0\,.\end{gathered}$$

[1] Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., Paris, 3 août, 10 août 1903.

Les éliminations algébriques complémentaires, dont il a été question plus haut (1), nous donnent ensuite l'*intégrale complète de* LAGRANGE, *la seule résolvant d'une manière satisfaisante le problème d'intégration des équations partielles.*

Pour terminer, je veux dire encore que les simplifications introduites dans la méthode de JACOBI ne troublent pas la symétrie du calcul de cet illustre geomètre. En effet, il est toujours possible de représenter chaque nouveau système différentiel des caractéristiques sous forme canonique.

Considérons, par exemple, le système complet de m équations obtenu après avoir effectué plusieurs opérations des intégrations successives,

$$\mathrm{F}_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Supposons ce dernier système réductible à la forme suivante:

$$\begin{gathered} p_i \quad + \mathrm{H}_i(x_1, x_2, \ldots x_k, x_{m+1}, \ldots x_n, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_n) = 0, \\ x_{k+j} + \mathrm{L}_j(x_1, x_2, \ldots x_k, x_{m+1}, \ldots x_n, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots k \quad , \quad j = 1, 2, \ldots m - k). \end{gathered}$$

La nouvelle intégration à effectuer revient à calculer une intégrale du système linéaire

$$\begin{gathered} (p_i + \mathrm{H}_i, \mathrm{F}) = 0 \quad , \quad (x_{k+j} + \mathrm{L}_j, \mathrm{F}) = 0, \\ (i = 1, 2, \ldots k \quad , \quad j = 1, 2, \ldots m - k). \end{gathered}$$

Or, ces dernières équations sont équivalentes au système canonique aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dx_{m+r} &= -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial p_{m+r}} dx_i + \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial \mathrm{L}_j}{\partial p_{m+r}} dp_{k+j}, \\ dp_{m+r} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial x_{m+r}} dx_i - \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial \mathrm{L}_j}{\partial x_{m+r}} dp_{k+j}, \\ r &= 1, 2, \ldots n - m. \end{aligned}$$

Prenons, par exemple, l'équation

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_3 p_3) x_3 p_2}{x_1 p_4} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0 \tag{21}$$

formant avec les équations

$$\frac{x_1 p_4}{p_2} = b_1 \quad , \quad x_1\left(1 - \frac{p_4}{x_3 p_2}\right) = b_2$$

(1) N. SALTYKOW, *Sur les rélations entre les intégrales complètes de S.* LIE *et de* LAGRANGE (Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., Paris, 10 août 1903).

un système de trois équations en involution, b_1 et b_2 désignant deux constantes arbitraires. Ce dernier système devient

$$p_1 - \frac{b_1 p_3}{(x_1 - b_2)^2} + \frac{(b_1 x_4 + b_2 x_2) p_4}{b_1 (x_1 - b_2)} = 0,$$

$$p_2 - \frac{x_1 p_4}{b_1} = 0,$$

$$x_3 - \frac{b_1}{x_1 - b_2} = 0.$$

Le système jacobien correspondant prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_4}{x_1 - b_2} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Par conséquent, on obtient le système canonique aux différentielles totales

$$dx_4 = \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} dx_1 - \frac{x_1}{b_1} dx_2,$$

$$dp_4 = - \frac{p_4}{x_1 - b_2} dx_1.$$

La première de ces équations donne l'intégrale

$$\frac{b_1 x_4 - x_1 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} = b_3$$

b_3 étant une constante arbitraire.

Donc l'équation (21) admet l'intégrale complète de la seconde classe

$$z = b_4,$$

$$x_3 = \frac{b_1}{x_1 - b_2},$$

$$x_4 = \frac{1}{b_1} x_1 x_2 + b_3 (x_1 - b_2),$$

b_4 désignant une nouvelle constante arbitraire. En appliquant les formules que j'ai donné (¹) on a l'intégrale complète de Lagrange

$$z = a_2 \left(\frac{b_1}{x_3} - x_1 \right) - \frac{a_3}{b_1} x_3 \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_1} \right) + a,$$

a_2, a_3, b_1, a désignant quatre constantes arbitraires.

(¹) Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., Paris, 10 août 1903.

T. LALESCO

SUR LES SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'ÉQUATION $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$

1. Dans la présente communication je me propose de montrer par un exemple de nature différente à ceux que l'on considère ordinairement, l'importance analytique de la notion de l'ordre des fonctions entières. Dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique du 2° ordre, la distinction essentielle que l'analyse établit entre les solutions analytiques d'un coté et toutes les autres de l'autre coté se trouve être tranchée par une réponse où la notion d'ordre joue le rôle principal.

Prenons une solution analytique au point $x = x_0$ et $y = y_0$ et soit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

la fonction analytique à laquelle se réduit cette solution pour $y = y_0$.

L'expression de la solution

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - y_0)^n}{n!} \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}}$$

et celle de sa dérivée par rapport à x, nous permettent d'écrire immédiatement

$$n^{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2} \sqrt{\mathrm{A}e}$$

où A désigne une quantité dont le module est plus grand que les inverses des rayons de convergence r_{x_0} et r'_{x_0} au point y_0 de $z(x_0, y)$ et $\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y)$. La fonction $f(x)$ est donc une fonction entière de x d'ordre au plus égal à deux. Par conséquent *les solutions analytiques de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

sont des fonctions entières par rapport à x d'ordre au plus égal à deux.

Deux cas sont à distinguer:

1) Si $r_{x_0} = \infty$ l'ordre est sûrement plus petit que deux.

2) Si r_{x_0} est fini, il y aura dans tous les cas une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$\left| \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \frac{d^{2n} f(x_0)}{dx^{2n}}} - \frac{1}{r_{x_0}} \right| < \varepsilon$$

ε étant un arbitrairement petit, ce qui nous montre que dans ce cas l'ordre est précisément égal à deux.

On a ainsi un moyen expéditif et susceptible d'être généralisé pour determiner l'ordre de certaines fonctions entières. Par exemple, les fonctions thêta du premier ordre et à caractéristiques quelconques vérifient, en introduisant le paramètre, une équation aux dérivées partielles de la forme (1); d'autre part r_{x_0} est fini et égal pour τ_0 à la partie imaginaire de τ_0. Donc l'ordre des fonctions thêta est égal a deux. A ce sujet on peut encore donner le résultat général suivant:

Considérons la solution analytique de (1) et périodique en x:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{n^2 y + nx} . \tag{2}$$

Si les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} t^n$$

représentent des fonctions entières d'ordre au plus égal à zéro et d'un sousordre tel que l'on ait, pour n suffisamment grand

$$e^{n^{1+\varepsilon}} \sqrt[n]{|A_{\pm n}|} < k$$

où ε désigne un arbitrairement petit, l'ordre de la solution (2) en x est plus petit que deux. Dans tous les autres cas, pour les valeurs de y rendant (2) convergente, cet ordre est égal à deux.

2. Une application intéressante du resultat précédent concerne l'intégrale de Fourier. On sait que la solution de l'équation (1) qui se réduit à $f(x)$ pour $y = 0$ est donnée par l'intégrale de Fourier:

$$z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} f(x + 2\beta \sqrt{y})\, d\beta .$$

La démonstration de Fourier n'est pas rigoureuse en raison même de sa généralité; celle de Weierstrass suppose essentiellement $f(x)$ fini sur toute la partie positive de l'axe réel. On peut établir très simplement le théorème de Fourier à l'aide du résultat précedent *pour toutes les solutions analytiques* de (1). On a en effet

$$u = f(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} f(x + 2\beta \sqrt{y})\, d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} [f(x) - f(x + 2\beta \sqrt{y})]\, d\beta$$
$$= 4 \sqrt{\frac{y}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} \beta f'(x + 2\beta\theta \sqrt{y})\, d\beta \quad (0 < \theta < 1) .$$

Comme l'ordre se conserve par dérivation, on aura pour x fini et β suffisamment grand

$$|f'(x + 2\beta\theta\sqrt{y})| < e^{4k\beta^2\theta^2 y}$$

et il suffit de prendre $y < \dfrac{1}{4\pi}$ pour voir que u est infiniment petit avec $\sqrt{y}$.

3. La réciproque du résultat du n. 1 est aussi vraie. A la question de physique mathématique posée par Lord RALEIGH et M. BOUSSINESQ, quand l'état initial de chaleur d'une barre homogène peut être considéré comme provenant d'un état antérieur, M. P. APPELL a repondu en trouvant une condition seulement *nécessaire*: l'état initial doit être une fonction entière de l'abscisse des points de la barre.

À l'aide du résultat précédent nous pouvons énoncer une condition *suffisante*: La fonction entière doit être d'ordre au plus égal à deux.

4. Les mêmes calculs appliqués à l'équation plus générale:

$$\frac{\partial^p z}{\partial x^p} = \frac{d^q z}{\partial y^q} \quad (p > q)$$

nous conduisent à un résultat analogue: l'ordre de $f(x)$ doit être égal à $\frac{p}{q}$. L'introduction toute naturelle d'un ordre *fractionnaire* dans une importante question d'analyse me semble présenter un certain intérêt.

V. VOLTERRA

SULL'APPLICAZIONE DEL METODO DELLE IMMAGINI ALLE EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO

1. In una Nota pubblicata nei Proceedings of the London Mathematical Society (1904) e nelle *lezioni* che ho svolte nel 1906 all' Università di Stoccolma, ho mostrato come il principio delle immagini potesse applicarsi alla equazione fondamentale a tre variabili di tipo iperbolico, cioè alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}=0\,, \tag{1}$$

ma tale applicazione venne limitata al caso di immagini rispetto a piani paralleli all'asse z. Ora è interessante osservare che per la equazione di tipo iperbolico si può stabilire un principio il quale ha un grado di generalità equivalente a quello delle immagini nel caso dell'equazione di tipo ellittico. Ciò si ottiene mediante una semplice osservazione geometrica che esporrò in questa Nota, rimandando ad una Memoria estesa che sto preparando lo svolgimento della teoria.

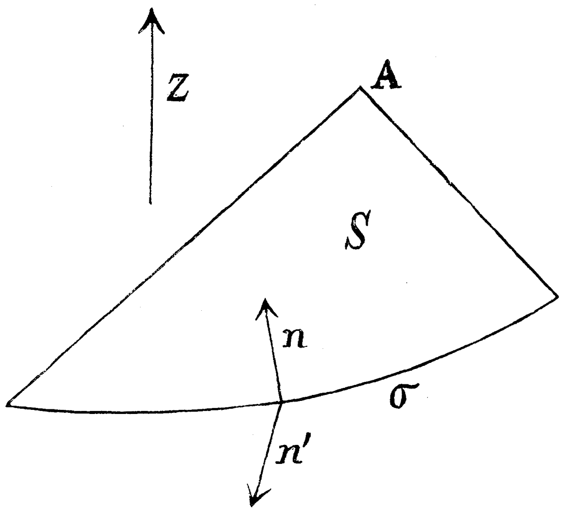

FIG. 1.

2. Già da varî anni in alcune Note pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ([1]), i cui risultati vennero sviluppati in una Memoria inserita negli Acta Mathematica ([2]), ho introdotto la nozione dei coni caratteristici relativi alle equazioni (1) e ad altre equazioni di tipo iperbolico. Per le (1) essi sono i coni di rivoluzione aventi l'asse parallelo all'asse z ed una apertura di 90°. Conduciamo per un punto A il cono caratteristico e sia σ una superficie la quale limiti una porzione di spazio S interna ad una falda del cono ed adiacente al vertice. Ho dato una formula mediante la quale si può esprimere il valore $w(x_1\,, y_1\,, z_1)$ al vertice A del cono (vedi fig. 1) mediante i valori di w e della derivata normale

([1]) Rend. Acc. Lincei, 1892.

([2]) Acta Mathematica, tomo XVIII, 1894.

interna $\frac{\partial w}{\partial n}$ nei punti $x\,y\,z$ della superficie σ. La formula è la seguente:

$$(2)\qquad w(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-r^2}}\left(\cos nz-\frac{z_1-z}{r}\cos nr\right)w\,d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-r^2}}\,\mathrm{W}\,d\sigma$$

in cui

$$r=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}\qquad \mathrm{W}=-\frac{\partial w}{\partial z}\cos nz+\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial w}{\partial y}\cos ny.$$

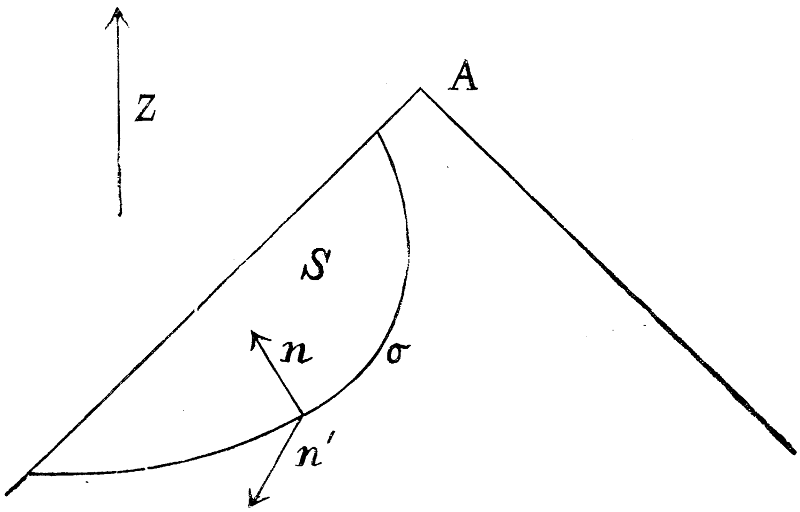

Fig. 2.

Se n' forma cogli assi angoli i cui coseni sono $-\cos nz$, $\cos nx$, $\cos ny$, si dice, secondo il sig. D'Adhémar che n' è la *conormale*; quindi $\mathrm{W}=\frac{\partial w}{\partial n'}$.

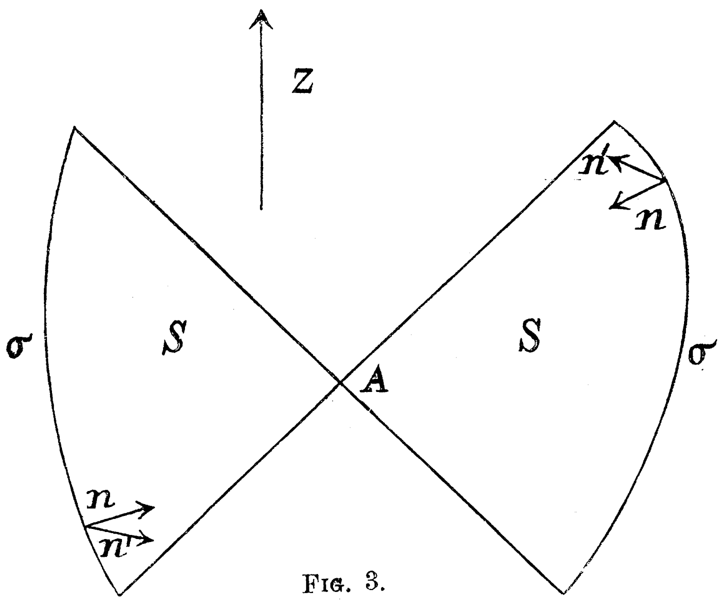

Fig. 3.

Se lo spazio S compreso fra la superficie σ ed il cono non è adiacente al vertice (vedi fig. 2), oppure se lo spazio S è esterno al cono (vedi fig. 3), allora nel primo membro della formula (2) deve sostituirsi 0 al valore $w(x_1\, y_1\, z_1)$. La formula che così si ottiene la denoteremo con (2').

3. Noti w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ su σ è noto $\frac{\partial w}{\partial n'}$ e reciprocamente noti w e $\frac{\partial w}{\partial n'}$ resta conosciuto $\frac{\partial w}{\partial n}$, quindi è cosa equivalente dare gli uni o gli altri valori. Ora non sempre è necessario conoscere w e $\frac{\partial w}{\partial n'}$ sopra σ perchè w sia determinato in A. Si possono infatti dimostrare i teoremi seguenti:

1°) *Sia nota w sopra σ. Per determinare w al vertice* A *del cono non è necessario conoscere $\frac{\partial w}{\partial n'}$ in quelle parti di σ la cui normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 90°, ammesso che nelle parti rimanenti di σ la derivata $\frac{\partial w}{\partial n'}$ sia conosciuta.*

2°) *Sia* M *un punto regolare di σ in cui la normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 135°, si potrà prendere un intorno μ di* M *appartenente a σ, tale che conoscendo w su μ, e w e $\frac{\partial w}{\partial n'}$ sulla parte rimanente di σ, w sia determinato in* A.

Tralasceremo di dare la dimostrazione di questi teoremi. Da essi si ricava facilmente che, se una parte connessa σ' di σ è costituita da un piano o da una iperboloide equilatera avente per asse z, ed in σ' la normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 135°, basta la conoscenza di w sopra σ' (purchè nella parte rimanente di σ si conoscano w e $\frac{\partial w}{\partial n'}$) affinchè w risulti determinato al vertice A.

Bisogna dunque cercare di eliminare $\frac{\partial w}{\partial n'}$ su σ' nella formula (2). Questo risultato si ottiene impiegando il metodo delle immagini.

4. Usando una denominazione analoga a quelle di *conormale*, chiameremo *codistanza* dei punti $(x_1\,, y_1\,, z_1)$; $(x\,, y\,, z)$ la quantità

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2}$$

supposta reale e presa positivamente. In altri termini la *conormale* e la *codistanza* corrispondono alla *normale* e alla *distanza* nella metrica individuata dal quadrato dell'elemento lineare

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 .$$

Preso un piano Δ conduciamo da un punto A la conormale al piano. Se questa lo incontra in un punto B prolunghiamola di BA' eguale ad AB, A' si dirà la *coimmagine* di A. Ora noi abbiamo facilmente che *le codistanze di* A *ed* A' *da uno stesso punto qualsiasi del piano sono eguali.* Questa sola proprietà non basterebbe ad ottenere la eliminazione desiderata. Ma ne abbiamo ancora un'altra cioè:

I *coni caratteristici relativi ai punti* A *ed* A' *si tagliano lungo il piano Δ*; ed infatti i punti di questa intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A'.

Le due proprietà combinate insieme conducono alla eliminazione desiderata in casi analoghi a quelli trattati nella citata Nota dei Proceedings di Londra impiegando un procedimento analogo a quello ivi usato nel caso di piani la cui normale interna formi con z un angolo compreso fra 45° e 135°.

5. Similmente supponiamo di avere una iperboloide equilatera

$$x^2+y^2-z^2=\pm a^2. \tag{3}$$

Preso un punto A di coordinate x_1, y_1, z_1 si dirà *coimmagine* di A il punto A′ di coordinate

$$x_1'=\frac{\pm a^2 x_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\qquad y_1'=\frac{\pm a^2 y_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\qquad z_1'=\frac{\pm a^2 z_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}.$$

È facile vedere come si può costruire il punto A′ quando sia noto A e questo sia esterno o interno al cono assintotico della iperboloide (3).

Per i punti A ed A′ valgono le due proprietà seguenti:

Le codistanze di A *ed* A′ *dai punti della iperboloide* (3) *stanno in un rapporto costante.*

I coni caratteristici di A *ed* A′ *si tagliano lungo l'iperboloide* (3).

Anche in questo caso i punti della intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A′.

Giovandosi di questi due teoremi e delle formule (2) e (2′) è possibile estendere le precedenti eliminazioni dal caso del piano a quello dell'iperboloide equilatera, il cui asse sia parallelo a z.

6. Nella Memoria citata dei Proceedings di Londra, ho applicato il metodo delle immagini successive nel caso di più piani paralleli a z. Si comprende come tale procedimento possa estendersi anche al caso in cui si abbiano piani non paralleli a z, o si abbiano più iperboloidi equilateri coll'asse parallelo a z, o piani ed iperboloidi.

Ho osservato nella citata Memoria quale semplificazione si abbia nel caso iperbolico per rapporto al caso ellittico allorchè si hanno infinite immagini, giacchè non è necessario tener conto nelle formule che di un numero finito di esse. Le stesse osservazioni sono estensibili ai casi generali che abbiamo preso in esame.

Non vi è il tempo in una breve Comunicazione di una sezione del Congresso di sviluppare tutte le conseguenze che possono trarsi dal principio che abbiamo stabilito sia per rapporto alla equazione di tipo iperbolico che abbiamo considerata, sia per rapporto ad altre equazioni dello stesso tipo più complesse; ci basti di aver posto il principio che spero di avere agio presto di sviluppare.

P. ZERVOS

SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE LES THÉORIES D'INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET D'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DE MONGE

Rémarquons qu'aux théories relatives aux systèmes en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre, on peut faire correspondre dans quelques cas particuliers, des théories relatives à l'intégration des systèmes de MONGE.

Par les systèmes de MONGE j'entends les systèmes de la forme

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \; ; \; y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n+1} \; ; \; y''_1, y''_2, \ldots, y''_{n+1} ; \ldots) = 0$$

où les y sont considérés comme des fonctions d'une variable indépendante et $i \leq n$.

On voit une telle correspondance dans un Mémoire de M. GOURSAT inséré dans le Bullettin de la Société Mathématique de France, 1905.

Considérons en effet avec M. GOURSAT un système de $(n-1)$ équations de MONGE

$$(1) \quad f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \; ; \; dy_1, dy_2, \ldots, dy_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans la théorie générale édifiée par M. GOURSAT à tout système de $n-1$ équations de MONGE

$$f_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \; ; \; \frac{dy_2}{dy_1}, \frac{dy_3}{dy_1}, \ldots, \frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right) = 0$$

correspond un système de $n-1$ équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre. On prend ce système là en éliminant un paramètre α entre les équations d'un autre système qu'on forme en exprimant que le plan (P) a n génératrices communes avec le cône (T) confondues à une. Si le système, qui est ainsi déduit et qui est appellé par M. GOURSAT le système *associé* du système donné, est en involution, alors les équations

$$V = 0 \, , \, \frac{dV}{da} = 0 \, , \, \frac{d^2V}{da^2} = 0 \, , \ldots , \frac{d^nV}{da^n} = 0$$

représentent une intégrale du système donné.

Admettons maintenant qu'on nous ait donné des $n-k$ fonctions de la forme (1): pour appliquer alors la méthode de M. GOURSAT, il suffit de pouvoir adjoindre à ces $n-k$ équations $k-1$ équations nouvelles de même forme de façon que le système associé du système ainsi complété soit en involution.

Étant par exemple donnée l'équation

$$f\left(y_1\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_{n+1}\;;\;\frac{dy_2}{dy_1}\,,\ldots,\,\frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right)=0\,,$$

si on donne alors aux équations adjointes la forme

$$\varphi_i\left(y_1\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_{n+1}\,,\,\frac{dy_2}{dy_1}\right)=\frac{dy_i}{dy_1}\qquad (i=3\,,4\,,\ldots,\,n)$$

on cherche à ce que l'élimination de α entre les équations du système intermédiaire donne un système associé en involution. Une des premières questions qui se présentent est la suivante: Dans quels cas l'élimination de α entre les n équations de forme

$$\sigma_k(y_1\,,\ldots,\,y_{n+1}\,,\,p_1\,,\ldots,\,p_n\,,\,\alpha)=0\quad,\quad (k=1\,,2\,,\ldots,\,n)$$

(où les σ représentent des fonctions linéaires par rapport aux p) donne un système en involution? On peut ici énoncer certains théorèmes, mais les laissant à part, je vais présenter une question analogue à celle de M. GOURSAT. Cette question est la suivante:

Soit une équation

$$f\left(y_1\,,\ldots,y_{n+1}\,,\,\frac{dy_2}{dy_1}\,,\ldots,\,\frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right)=0 \tag{2}$$

pour laquelle on peut trouver une fonction

$$V(y_1\,,\ldots,\,y_{n+1}\;;\;a_1\,,\ldots,\,a_n)\,,$$

telle que l'équation (2) soit une conséquence des équations suivantes

$$V=0\;,\;\sum\frac{\partial V}{\partial a_i}a_i'=0\;,\;\sum_{\lambda=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial y_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right)dy_\lambda=0\qquad (i=1\,,2\,,\ldots,\,n-1) \tag{3}$$

(voir deux Notes de moi qui sont présentées à l'Académie des Sciences de Paris le 10 Avril et le 23 Septembre 1905) ou encore des équations

$$V=0\;,\;\frac{\delta V}{\delta a}=0\;,\;\frac{\delta^2 V}{\delta a^2}=0\;,\;\sum_{\lambda=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial y_\lambda}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right)dy_\lambda=0\quad (i=2\,,3\,,\ldots,\,n-1). \tag{4}$$

Dans quels cas est-il possible de déterminer $n-2$ équations entre les α et leurs différentielles de façon que l'équation (2) résulte comme une conséquence de ces $n-2$ équations et des équations

$$V=0\,,\ \frac{\delta V}{\delta a}=0\,,\ \frac{\delta^2 V}{\delta a^2}=0\,,\dots,\ \frac{\delta^n V}{\delta a^n}=0\,? \tag{5}$$

On peut joindre ici une autre question relative à celle-ci. Supposons, en effet, que les relations cherchées existent et qu'elles soient de la forme $\sigma_i(a_1, a_2, \dots, a_n)=0$ où les σ ne renferment aucune différentielle des a. Alors on voit que si l'on considère comme variable indépendante la quantité a_1 on peut exprimer les $a_3, \dots, a_n$ et leurs différentielles successives par les quantités $a_1, a_2, a_2', \dots, a_2^{(n)}$.

Si on substitue ces valeurs dans les équations (5) et dans leurs conséquences, et si on en élimine les $a_1, a_2, a_2', \dots, a_2^{(n)}$, on aura des $(n-1)$ équations de Monge dont une par hypothèse sera l'équation donnée.

Si maintenant on prend pour σ des fonctions contenant des différentielles des a en suivant une marche analogue à la précedente, on trouve dans quelques cas particuliers des équations qui contiennent des différentielles premières par rapport à y et des différentielles aussi d'un ordre supérieur et pas des a et de ses derivées. Relativement à ceux-ci, posons le problème suivant:

Etant donné un système de deux équations de Monge

$$f\left(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\,,\ \frac{dy_2}{dy_1}, \dots, \frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right)=0 \tag{6}$$

$$\varphi\left[y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\,,\ \frac{dy_2}{dy_1}, \dots, \frac{dy_{n+1}}{dy_1}\,,\ \left(\frac{dy_2}{dy_1}\right)', \dots, \left(\frac{dy_{n+1}}{dy_1}\right)'\right]=0\,, \tag{7}$$

on cherche à exprimer $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ explicitement en fonction d'une variable auxiliaire t, d'un certain nombre des fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé. (Des problèmes rélatifs à ceux-ci et assez généraux sont résolus par M. Darboux dans le Journal de Mathém. pures et appliquées, 1887; par M. Hadamard dans les Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1901; par M. Goursat dans le Mémoire cité et par d'autres).

Si on suppose, comme plus haut, que j'ai fais entrer des quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$ de façon que l'équation (6) résulte des équations

$$V(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\ ;\ a_1, a_2, \dots, a_n)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial V}{\partial y_i}dy_i=0\ ,\ \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial y_\rho}\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}\right)dy_\rho=0\quad,\quad k=1,2,\dots,(n-1) \tag{8}$$

alors l'équation (7) prend la forme

$$\varphi_1\left(y_1, \dots, y_{n+1}\ ;\ a_1, a_2, \dots, \frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \dots, \frac{da_n}{dt}\right)=0\,. \tag{9}$$

Supposons maintenant qu'on peut trouver pour le système (8) et (9) une solution où les y sont des fonctions des a [1] et de ses dérivées successives telles qu'elles vérifient aussi les équations

$$V = 0 \;,\; \frac{\delta V}{\delta a} = 0 \;,\; \frac{\delta^2 V}{\delta a^2} = 0 \,, \ldots, \frac{\delta^n V}{\delta a_n} = 0 \,,$$

alors cette solution sera aussi une solution de l'équation (6) et de l'équation (7).

On peut utiliser par exemple les rémarques précedentes pour l'intégration du système

$$dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 = dy_4^2$$

$$\left(\frac{dy_1}{dy_4}\right)'^2 + \left(\frac{dy_2}{dy_4}\right)'^2 = \left[\frac{dy_1}{dy_4}\left(\frac{dy_2}{dy_4}\right)' - \left(\frac{dy_1}{dy_4}\right)'\frac{dy_2}{dy_4}\right]^2 .$$

[1] Nous supposons, bien entendu, que les a ne sont pas tous de fonctions arbitraires de t, mais qu'il existe entre les a une plusieurs relations de la forme $\sigma(a_1 , a_2 , \ldots) = 0$. C'est sur tout la détermination de ces relations qui facilite dans quelques cas la recherche des solutions des équations (8) et (9).

E. H. MOORE

ON A FORM OF GENERAL ANALYSIS WITH APPLICATION TO LINEAR DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

In this paper I wish to define a form of General Analysis apt to play a central rôle in the organic development of various analytic doctrines. Two applications:

a) to linear integral equations;

b) to linear differential equations;

are indicated. These applications illustrate two principles of generalization:

A) by abstraction;

B) by adjunction of suitably conditioned parameters.

Generalization by Abstraction.

Generalization by abstraction is determination of generic notion from specific cases. This determination is in general not a single-valued process; the specific cases suggest various generic notions which are in general not equivalent. In the event that the genus characterised by a generic notion contains specific cases in addition to those giving rise to the generic notion, the genus is a real, and not merely a formal, generalization of the specific cases initially considered. In the event that the genus contains no additional specific cases, the fact that it does not furnishes a proposition in the theory of the genus.

The specific cases may be theories. Accordingly the principle of generalization by abstraction becomes:

A*) The existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a general abstract theory which underlies the particular theories and unifies them with respect to those central features.

The formulation A* was the dominant note of my series of lectures: *On the Theory of Bilinear Functional Operations*, at the Colloquium of the American

Mathematical Society held in September 1906 in New Haven under the auspices of Yale University. The present investigation is a development of the point of view of the Colloquium Lectures, of which I had given a preliminary indication in a note: *On the theory of systems of integral equations of the second kind* (1), read December 29, 1905 before the Chicago section of the American Mathematical Society.

In the Colloquium Lectures I considered certain analogies due to HILBERT between the following four theories, viz., the theory of

I) The system of real numbers;

II_n) The system of n-partite real numbers;

III) The system of infinite sequences of real numbers with finite norms;

IV) The system of continuous functions of a variable on a finite closed interval of the real number system.

From the algebraic properties of II_n HILBERT secured by limiting processes the analogous transcendental properties of IV and III. E. SCHMIDT has secured the properties of IV under less exacting hypotheses and by more direct methods of analysis.

I expect shortly to publish the details of the present investigation, and in the next volume of the Bulletin of the American Mathematical Society an abstract supplementing the present abstract.

As to linear integral equations it suffices now to state that one obtains a general theory a underlying not merely the HILBERT but also the FREDHOLM analogies of the four theories I, II_n, III, IV, as developed for the case IV by E. SCHMIDT in the *Mathematische Annalen*, 63_4 and 64_2 (1907).

I shall be able to give a clear idea of the form of General Analysis to be defined below by giving some details of theory b which unifies fewer common features of theories I, II_n, III, IV than does theory a. Throughout I confine attention closely to what is needed for the elucidation of the theorem of the existence in a unique manner of the integral of a very general type of linear homogeneous differential equation: $\mathrm{D}\varrho = \mathrm{K}\varrho$, of the first order, with initial condition, in General Analysis.

General Features common to Theories I, II_n, III, IV.

Theory I is the special case $n = 1$ of theory II_n.

We denote by p the fundamental index or variable entering the theories II_n, III, IV, viz., (II_n) $p = 1, 2, \ldots, n$; (III) $p = 1, 2, \ldots, n, \ldots$; (IV) $a_0 \leqq p \leqq a_1$, where the interval in IV has the ends a_0, a_1, with $a_0 < a_1$. We designate by $\mathfrak{P}$ the class $\mathfrak{P} = [p]$ of values of the variable p. We discriminate between the cases by superscript notations, setting p^{III}, $\mathfrak{P}^{\mathrm{III}}$ etc.

(1) In abstract, Bulletin of the American Mathematical Society, ser. 2, vol. 12, pp. 280, 283-4, March, 1906.

The theories are analytic theories relating to the class $\mathfrak{A} = [a]$ of real numbers a. A real-valued single-valued function

$$\mu = \mu(p) = \mu_p$$

of the variable element p of or on the class $\mathfrak{P}$ is called a *function μ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$.*

Each theory II_n, III, IV is the theory of a certain class $\mathfrak{M} = [\mu]$ of functions μ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$. The class $\mathfrak{M}^{\mathrm{II}_n}$ is the class of all such functions, while for the classes $\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{M}^{\mathrm{IV}}$ respectively there is the additional condition that: (III) the norm $\mathrm{N}\mu$ of μ ($\mathrm{N}\mu = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p^2$) is finite; (IV) the function μ is continuous.

The general theory of the class $\mathfrak{M} = [\mu]$ of functions μ concerns properties of $\mathfrak{M}$ held in common by $\mathfrak{M}^{\mathrm{II}_n}$, $\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{M}^{\mathrm{IV}}$. I notice first the *dominance property* D, certain *closure properties*, and the *composition property* C.

Dominance property D. — The class M has the dominance property D, in case,

$$\mu_0 , \mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_n , \ldots .$$

being any infinite sequence $\}\mu_n\{$ of functions of $\mathfrak{M}$, where $\mu_0 = \mu_0(p) = \mu_{0p}$, etc., we have as an identity in $n = 0, 1, 2, \ldots$ and p of $\mathfrak{P}$

$$|\mu_{np}| \leqq |a_n \mu_p| ,$$

where $\mu = \mu_p$ is a function of $\mathfrak{M}$ and

$$a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$$

is a sequence $\}a_n\{$ of real numbers, the function μ and the sequence $\}a_n\{$ being suitably chosen and varying with the sequence $\}\mu_n\{$.

In the cases II_n, III, IV the class $\mathfrak{M}$ has the dominance property D.

The dominance property plays a rôle in investigations involving relative uniformity and double limits.

Closure properties. — Closure properties of a class of functions are to the effect that the class contains all functions related in certain ways to functions of the class.

A class $\mathfrak{M}$ of functions is (1) *absolute*, (2) *multiplicative as to constants*, (3) $\substack{\textit{additive} \\ \textit{subtractive}}$, (4) *linear*, (5) *positive-linear*, (6) *multiplicative*, in case respectively (1) $\mathrm{A}\mu$, (2) $a\mu$, (3) $\mu_1 \pm \mu_2$, (4) $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$, (5) $a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$, (6) $\mu_1 \mu_2$ are functions of $\mathfrak{M}$; here μ, μ_1, μ_2 are functions of $\mathfrak{M}$ and a, a_1, a_2 are real numbers, while in (5) $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, and further $\mathrm{A}\mu = |\mu|$.

In the cases II_n, III, IV the class $\mathfrak{M}$ is absolute, linear, and multiplicative.

The third closure property and the composition property of the class $\mathfrak{M}$ involve the notion *relative uniformity* now to be defined.

Relative Uniformity.

An analytic relation involving a parameter p may hold as p ranges over a certain class $\mathfrak{P}$. With suitable definitions, it may hold *uniformly* in p on $\mathfrak{P}$. We generalize this notion of uniform validity of a relation by the introduction of a function σ_p of p on $\mathfrak{P}$ as a *scale of uniformity*; the relation may hold *uniformly as to* σ_p *in* p *on* P; if so, we write briefly, « relation $(\sigma_p; p^{\mathfrak{P}})$ », or « relation $(\sigma_p; p)$ » in case the range $\mathfrak{P}$ of the parameter p is to be understood from the context.

Thus, that a sequence $\}\mu_n\{$ of functions $\mu_n = \mu_{np}$ of p on $\mathfrak{P}$ converges to a function θ_p uniformly as to σ_p in p on $\mathfrak{P}$, in notation,

$$\operatorname*{L}_{n=\infty} \mu_{np} = \theta_p \; (\sigma_p; p^{\mathfrak{P}}),$$

means that for every positive number e there exists a positive integer n_e such that for every integer $n \geqq n_e$ and p of $\mathfrak{P}$

$$|\mu_{np} - \theta_p| \leqq e|\sigma_p|.$$

In the usual or absolute uniformity the scale σ_p is the constant function $\sigma_p = 1$.

If on $\mathfrak{P}$ the scale σ_p is nowhere 0 and does not become infinitesimal, then absolute uniformity implies uniformity as to scale σ_p, while if on $\mathfrak{P}$ the scale σ_p does not become infinite uniformity as to scale σ_p implies absolute uniformity.

Especially in the literature of relative convergence and double limits relations actually involving relative uniformity already occur frequently, and investigations will certainly gain in clearness and brevity by the explicit introduction of the notion of relative uniformity with use of the notation $(\sigma_p; p^{\mathfrak{P}})$ or some equivalent notation.

Three theorems in illustration of relative uniformity are stated in the foot-note (1).

If a relation in a parameter p holds uniformly in p on $\mathfrak{P}$ with respect to a function $\sigma = \sigma_p$ belonging to a class $\mathfrak{S} = [\sigma]$ of functions on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$, the relation is said to hold uniformly with respect to the class $\mathfrak{S}$, in notation, « relation $(\mathfrak{S}|p^{\mathfrak{P}})$ ».

The self-closure property. — $\mathfrak{M} = [\mu]$, $\mathfrak{S} = [\sigma]$ being classes of functions $\mu = \mu_p$, $\sigma = \sigma_p$ of p on $\mathfrak{P}$, we denote by $\mathfrak{M}_\sigma$ the class of all limit functions of sequences of functions of $\mathfrak{M}$ convergent uniformly as to σ in p on P, and by $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ the aggregate of the classes $\mathfrak{M}_\sigma$ for σ ranging over $\mathfrak{S}$. The class $\mathfrak{M}_\sigma$ contains

(1) The first theorem:

$\operatorname*{L}_{n=\infty} c_n p_0^n = 0$, where $c_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ and p_0 are complex numbers, and the class $\mathfrak{M}$; we style $\mathfrak{M}_\sigma$ *the class* $\mathfrak{M}$ *extended as to the function* σ, and similarly $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ *the class* $\mathfrak{M}$ *extended as to the class* $\mathfrak{S}$.

The class $\mathfrak{M}$ is called *self-closed* in case $\mathfrak{M}$ contains $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$, which implies that $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$. Thus, a self-closed class is one which contains the limit-function of every sequence of functions of the class convergent uniformly as to a function of the class.

In the cases II_n, III, IV the class $\mathfrak{M}$ is self-closed. It is to be noticed that the class $\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}$ would not be self-closed were we to use absolute instead of relative uniformity in the definition of self-closure. For the sequence $\}\mu_n\{$ of functions $\mu_n = \mu_{np}$:

$$\mu_{np} = \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (p \leqq n) \quad , \quad \mu_{np} = 0 \quad (p > n),$$

$p_0 \neq 0$, implies that the series

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n p^n$$

converges uniformly as to the scale function

$$\frac{1}{1 - \left|\frac{p}{p_0}\right|}$$

in the parameter p a complex number on the range $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}: \quad |p| < |p_0|,$$

is well known, especially as a lemma for the usual theorems concerning the mode of convergence of a power series.

The second and third theorems may be new. The parameter p denotes a continuous function $p = p(t) = p_t$ and the range $\mathfrak{P}$ the class of all continuous functions of the real variable t on the interval $\mathfrak{T}: a \leqq t \leqq b$, $a < b$. The proposition:

If h_t is a function of the class $\mathfrak{P}$ such that

$$\int_a^b h_t^2 \, dt = 0,$$

then as an identity in t on $\mathfrak{T}$

$$h_t = 0_t$$

has the formal generalization:

of $\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}$ converges uniformly to the limit function $\theta = \theta_p$:

$$\theta_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

which however is not a function of $\mathfrak{M}^{\mathrm{III}}$.

Extension of Classes of Functions. Properties extensionally attainable.

A property P of a class of functions may be such that, if two classes, $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ have the property P, so does their greatest common subclass, if it exists, and, more

---

If h_t is a function of the class $\mathfrak{P}$ such that for every function p_t of $\mathfrak{P}$

$$\int_a^b h_t p_t \, dt = 0,$$

then as an identity in t on $\mathfrak{T}$

$$h_t = 0,$$

which is a corollary of the second theorem:

If $\{h_{nt}\}$ is a sequence of functions of $\mathfrak{P}$ such that

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \int_a^b h_{nt} p_t \, dt = 0 \qquad \left(\int_a^b |p_t| \, dt; p^{\mathfrak{P}}\right),$$

then

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \; h_{nt} = 0 \quad \text{uniformly in } t \text{ on } \mathfrak{T},$$

which in turn is a corollary of the third theorem:

If $\{h_{nt}\}$ is a sequence of functions of $\mathfrak{P}$ such that

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \int_a^c h_{nt} p_t \, dt \text{ converges } \left(\int_a^b |p_t| \, dt; p^{\mathfrak{P}}\right),$$

then

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \; h_{nt} \text{ converges uniformly in } t \text{ on } \mathfrak{T},$$

and

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \int_a^b h_{nt} p_t \, dt = \int_a^b \left(\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \; h_{nt}\right) p_t \, dt \qquad \left(\int_a^b |p_t| \, dt; p^{\mathfrak{P}}\right).$$

generally, if every class $\mathfrak{M}$ of a finite or infinite class $[\mathfrak{M}]$ of classes $\mathfrak{M}$ of functions has the property P, so does the greatest common subclass of the classes $\mathfrak{M}$. In case such a property P is moreover a property of the class of all functions of p on P it is *extensionally attainable*, in the sense that for every class $\mathfrak{M}$ of functions there is a least extensive class $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ containing $\mathfrak{M}$ and having the property P, viz., $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ is the (necessarily existing) greatest common subclass of the (necessarily existing) classes which contain $\mathfrak{M}$ and have the property P.

Thus, the closure properties:

$$\mathrm{A} = \textit{absolute}\,, \quad \mathrm{L} = \textit{linear}\,, \quad \text{S-C} = \textit{self-closed}\,,$$

are extensionally attainable.

Any combination of properties extensionally attainable is a composite property extensionally attainable.

We denote by $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ or $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ the composite property of the two properties P_1, P_2. The notation $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ is used in the sense $\mathfrak{M}_{(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)}$. If P_1 and P_2 are extensionally attainable, so is $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$; the classes $\mathfrak{M}_{(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)}$ and $(\mathfrak{M}_{\mathrm{P}_1})_{\mathrm{P}_2}$ are in general distinct.

For any class $\mathfrak{M}$ the notations $\mathfrak{M}_{*}$, $\mathfrak{M}_{\#}$ denote respectively the classes $(\mathfrak{M}_{\mathrm{L}})_{\mathfrak{M}}$, $(\mathfrak{M}_{\mathrm{AL}})_{\mathfrak{M}}$. In these notations we have the

Theorem. — If the class $\mathfrak{M}$ has the dominance property D, then the extended classes $\mathfrak{M}_{\mathrm{L\,S\text{-}C}}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C}}$ have the dominance property D and are given by the formulas:

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{L\,S\text{-}C}} = \mathfrak{M}_{*} = (\mathfrak{M}_{\mathrm{L}})_{\mathfrak{M}}\,,$$
$$\mathfrak{M}_{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C}} = \mathfrak{M}_{\#} = (\mathfrak{M}_{\mathrm{A\,L}})_{\mathfrak{M}}\,.$$

If $\mathfrak{M}$ has the property D and $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}}$ is absolute, then $\mathfrak{M}_{*}$ is absolute, linear, self-closed, and has the property D. If $\mathfrak{M}$ has the property D and is multiplicative, then $\mathfrak{M}_{*}$ is multiplicative.

Composition of Classes of Elements.
Multiplication and Composition of Classes of Functions.

We consider two classes $\mathfrak{P}' = [p']$, $\mathfrak{P}'' = [p'']$ of elements p', p'' and two classes $\mathfrak{M}'_{p'} = [\mu'_{p'}]$, $\mathfrak{M}''_{p''} = [\mu''_{p''}]$ of functions $\mu' = \mu'_{p'}$, $\mu'' = \mu''_{p''}$. The classes $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ may be identical, say $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}$; if so, p' and p'' range independently over $\mathfrak{P}$. If $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}$, the two classes $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ may be identical, say $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}$; if so, μ' and μ'' range independently over $\mathfrak{M}$.

We form from the two classes $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ of elements the *compound class*

$$\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}'' = [p'p''] = [(p', p'')]$$

of elements.

By multiplication of constituent functions we obtain from the classes $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ of functions on $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ respectively the *product class*

$$\mathfrak{M}'_{p'}\mathfrak{M}''_{p''} = [\mu'_{p'}\mu''_{p''}],$$

of functions on $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ to $\mathfrak{A}$, and we define as the *compound class* obtained from the classes $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ the class

$$(\mathfrak{M}'_{p'}\mathfrak{M}''_{p''})_* = \Big((\mathfrak{M}'_{p'}\mathfrak{M}''_{p''})_{\mathrm{L}}\Big)_{(\mathfrak{M}'_{p'}\mathfrak{M}''_{p''})}.$$

There are of course other types of composition or determination of classes of elements and of functions from given classes; thus, for instance, the elements of the constituent classes may, in the determination of the composite class, range over their respective classes in a non-independent manner.

The composition property C. — A class $\mathfrak{M}_p$ of functions is said to have the composition property C in case for every class $\mathfrak{M}'_{p'}$ with the dominance property D and such that $(\mathfrak{M}'_{p'})_*$ is absolute, the compound class $(\mathfrak{M}_p\mathfrak{M}'_{p'})_*$ is absolute.

In the cases II_n, III, IV the class $\mathfrak{M}$ has the composition property C.

Theorems. — The following theorems are each to the effect that the class of functions compounded of two constituent classes having certain properties has certain properties.

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ denote classes $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}'_{p'}$, $\mathfrak{M}''_{p''}$.

$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ or $\mathfrak{C}_t$, $\mathfrak{C}_{t'}$, $\mathfrak{C}_{t''}$ denote the classes of all continuous functions of the respective real variables t, t', t'' on certain respective closed intervals $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ of the real number system.

$\mathfrak{C}_{t't''}$ denotes the class of all continuous functions of the two independent variables t' on $\mathfrak{T}'$, t'' on $\mathfrak{T}''$.

U^{V} denotes « U has property V » or « U having property V ». The notation is used for brevity and clearness; in practice there is no ambiguity of meaning.

After PEANO $\supset$ denotes « implies ».

1. The classes $\mathfrak{C}_{t't''}$ and $(\mathfrak{C}_{t'}\mathfrak{C}_{t''})_*$ are identical.

2. In case $\mathfrak{M}^{\mathrm{ALS\text{-}CD}}$ (that is, in case the class $\mathfrak{M}$ is absolute, linear, self-closed, with the dominance property D), the classes $(\mathfrak{C}_t\mathfrak{M}_p)_*$ and $\mathfrak{R}_{tp}$ are identical, where $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp} = [\varrho]$ is the class of all functions $\varrho = \varrho_{tp}$ of the two independent variables t on $\mathfrak{T}$ and p on $\mathfrak{P}$, which satisfy the two conditions:

(*a*) $t^{\mathfrak{T}} . \supset . \varrho_{tp}^{\mathfrak{M}_p}$, that is, for every t of $\mathfrak{T}$ the function ϱ_{tp}, quâ function of p, is of the class $\mathfrak{M}_p$;

(*b*) the function $\varrho = \varrho_{tp}$ is uniformly continuous as a function of t on $\mathfrak{T}$ uniformly in the parameter p on $\mathfrak{P}$, that is, for every positive number e there exists a positive number d_e such that for every p

of $\mathfrak{P}$ and two numbers t_1, t_2 of $\mathfrak{T}$ with $|t_1 - t_2| \leqq d_e$ the relation $|\varrho_{t_1 p} - \varrho_{t_2 p}| \leqq e$ holds.

3. $\mathfrak{M}'^{\mathrm{D}} \,.\, \mathfrak{M}''^{\mathrm{D}} \quad .\supset.\ (\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'')_*^{\mathrm{L\,S\text{-}C\,D}}$.

4. $\mathfrak{M}'^{\mathrm{D\,C}} \,.\, \mathfrak{M}''^{\mathrm{A\,L\,D}} \quad .\supset.\ (\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'')_*^{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C\,D}}$.

5. $\mathfrak{M}'^{\mathrm{D\,C}} \,.\, \mathfrak{M}''^{\mathrm{D\,C}} \quad .\supset.\ (\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'')_*^{\mathrm{L\,S\text{-}C\,D\,C}}$.

6. $\mathfrak{M}'^{\mathrm{D\,C}} \,.\, \mathfrak{M}''^{\mathrm{A\,L\,D\,C}} \,.\supset.\ (\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'')_*^{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C\,D\,C}}$.

7. The classes $\mathfrak{M}^{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C\,D\,C}}$, that is, the classes $\mathfrak{M}$ absolute, linear, self-closed, with the dominance property D and the composition property C, form say a genus of classes. To this genus the class $\mathfrak{M}$ in the cases I, II$_n$, III, IV belongs.

This genus is closed under composition of classes, viz., $\mathfrak{M}'$ and $\mathfrak{M}''$ being classes of the genus, the compound class $(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'')_*$ belongs to the genus.

Resumé. — In the process of unifying the systems I, II$_n$, III, IV we have so far been considering the following

	Form of General System:
Class of Elements	$\mathfrak{P} = [p]$
Class of Functions	$\mathfrak{M} = [\mu$ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}]$
Properties	$\mathfrak{M}^{\mathrm{A\,L\,S\text{-}C\,D\,C}}$

or, more exactly, the relations of various such systems where the classes of functions in question are assumed or proved to have one or more of the five properties listed. It is particularly to be noticed that *the properties are properties of classes of functions*, and not, for instance, of individual elements, of classes of elements, or of individual functions, as apart from classes of functions.

In the case I the variable element p has but one value and the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ of functions $\mu = \mu^{\mathrm{I}}$ is the class $\mathfrak{A}$ of real numbers a. Now a real-valued single-valued function φ in the theory I of the real number system $\mathfrak{A}$ is a transformation φ of the variable element a of the class $\mathfrak{A}$ to an element $\varphi(a) = \varphi a = \varphi_a$ of $\mathfrak{A}$, or, briefly, a transformation φ on $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{A}$. For the general theory the analogous concept is that of *functional transformation.*

Functional Transformations F on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$.

In the usual notations $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$, etc., where possibly $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}''$, or $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'', \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''$, etc., F being a (single-valued) functional transformation on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$, for every function μ' of $\mathfrak{M}'$ the notation $\mathrm{F}\mu'$ denotes a definite function of $\mathfrak{M}''$. The class $\mathrm{F}\mathfrak{M}'$ of all functions $\mathrm{F}\mu'$ for μ' of $\mathfrak{M}'$ is a subclass of $\mathfrak{M}''$.

F, F_1, F_2 denoting functional transformations, the transformations G:

$$\mathrm{G}\mu' = a\mathrm{F}\mu'\ ,\ \mathrm{F}_1\mu' \pm \mathrm{F}_2\mu'\ ,\ a_1\mathrm{F}_1\mu' + a_2\mathrm{F}_2\mu'\ ,\ \mathrm{A}(\mathrm{F}\mu')\ ,\ \mathrm{F}_2(\mathrm{F}_1\mu')\ ,$$

are denoted by the respective notations:

$$G = aF \ , \ F_1 \pm F_2 \ , \ a_1F_1 + a_2F_2 \ , \ AF \ , \ F_2F_1 \, .$$

Here a , a_1 , a_2 denote as usual real numbers.

A class $[F]$ of transformations is (1) *absolute*, (2) *multiplicative as to constants*, (3) $\frac{\textit{additive}}{\textit{subtractive}}$, (4) *linear*, (5) *positive-linear*, in case respectively

$$(1)\ AF\, , \quad (2)\ aF\, , \quad (3)\ F_1 \pm F_2\, , \quad (4)\ a_1F_1 + a_2F_2\, , \quad (5)\ a_1F_1 + a_2F_2$$

belong to $[F]$; here F , F_1 , F_2 are transformations of $[F]$ and a , a_1 , a_2 are real numbers, while in (5) $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$.

Continuity. — The functional transformation F on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$ is called *continuous* in case

$$\underset{n=\infty}{L}\ \mu'_n = \mu' \ (\mathfrak{M}';p')$$

implies

$$\underset{n=\infty}{L}\ F\mu'_n = F\mu' \, (\mathfrak{M}'';p'').$$

The existence of a continuous functional transformation on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$ does not imply the self-closure of $\mathfrak{M}'$. The property of continuity relates only to those sequences $\}\mu'_n\{$ of functions μ'_n of $\mathfrak{M}'$ which converge uniformly as to $\mathfrak{M}'$ to a limit-function μ' belonging to $\mathfrak{M}'$, viz., the continuous transformation F transforms such a sequence with limit-function in $\mathfrak{M}'$ into a similar sequence with limit-function in $\mathfrak{M}''$.

A transformation F on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$ for which $F\mu'$ is independent of μ' on $\mathfrak{M}'$ is a continuous transformation. The identity transformation: $F\mu' = \mu'$, and the transformation $F = A$: $A\mu' = |\mu'|$, are continuous transformations on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}'$ and to $A\mathfrak{M} = [A\mu'] = [|\mu'|]$ respectively.

If F' is continuous on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$ and F'' is continuous on $\mathfrak{M}''$ to $\mathfrak{M}'''$ then $F''F'$ is continuous on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}'''$.

If the class $\mathfrak{M}''$ of functions is absolute and linear, then the class $[F]$ of continuous transformations on a fixed class $\mathfrak{M}'$ to the class $\mathfrak{M}''$ is absolute and linear.

Induced functional transformations. — A function $\varrho = \varrho_{tp}$ on $\mathfrak{T}\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$ is for every t a function $\varrho_t = \varrho_{tp}$ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$. A function $\alpha = \alpha_p$ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$ arising in this way, viz., for a certain t, $t = t_0$, $\alpha = \varrho_{t_0}$, from the function $\varrho = \varrho_{tp}$ is a *ruling function* of the function $\varrho = \varrho_{tp}$. The class $[\varrho_t = \varrho_{tp}]$ of ruling functions is *the ruling class* of the function $\varrho = \varrho_{tp}$, while the ruling class or any class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p = [\mu]$ of functions $\mu = \mu_p$ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$ which contains the ruling class *rules the function* $\varrho = \varrho_{tp}$.

Let the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ rule the function $\varrho = \varrho_{tp}$. Then a functional transformation F on $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ to $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'_{p'}$ *induces* a transformation $\overline{F}$ of the function ϱ on $\mathfrak{T}\mathfrak{P}$ into a definite function $\varrho' = \overline{F}\varrho$ on $\mathfrak{T}\mathfrak{P}'$, by the relation that the various ruling functions $\varrho'_t = \varrho'_{tp'}$ are the transforms by F of the corresponding ruling functions $\varrho_t = \varrho_{tp}$ of p, viz., for every $t^{\mathfrak{T}}$ $F\varrho_{tp} = \varrho'_{tp}$.

Similarly, a class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ is said to *rule a class* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp} = [\varrho]$ if every function $\varrho = \varrho_{tp}$ is ruled by the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$, and a transformation F on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ *induces* a definite transformation $\overline{F}$ on every class $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp}$ ruled by $\mathfrak{M}$ to a definite class $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'_{tp'} = [\varrho']$ viz., to the class of transforms $\varrho' = \overline{F}\varrho$ of the functions ϱ of $\mathfrak{R}$.

It frequently happens that a transformation F on $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ to itself induces a transformation $\overline{F}$ to itself on a $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp}$ ruled by $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$, while of course not every transformation on a class $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp}$ to itself arises thus by induction from a transformation to itself on a class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ ruling $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{tp}$.

We follow the usage in analysis in denoting the induced transformation $\overline{F}$ by the notation F of the inducing transformation, in case notational discrimination is not of importance.

List of properties of functional transformations. — The four types (H, M, W, K) of continuous functional transformations which are used in theory b are defined directly or indirectly by means of the properties of the following list.

A functional transformation F on the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p = [\mu]$ of functions $\mu = \mu_p$ on $\mathfrak{P}$ to $\mathfrak{A}$ to the class $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'_{p'} = [\mu']$ of functions $\mu' = \mu'_{p'}$ on $\mathfrak{P}'$ to $\mathfrak{A}$ is said to have the respective properties 1, 2 ... in case

1.	$a\mu_1 = \mu_2$	$.\supset.$	$aF\mu_1 = F\mu_2$.
2.	$a\mu_1 = \mu_2$	$.\supset.$	$Aa.F\mu_1 = F\mu_2$.
3.	$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$	$.\supset.$	$F\mu_1 + F\mu_2 = F\mu_3$.
4.	$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$	$.\supset.$	$F\mu_1 + F\mu_2 \geqq F\mu_3$.
5.	$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 = \mu_3$	$.\supset.$	$a_1F\mu_1 + a_2F\mu_2 = F\mu_3$.
6.	$A\mu_1 \leqq \mu_2$	$.\supset.$	$AF\mu_1 \leqq F\mu_2$.
7.	$A\mu_1 \leqq \mu_2$	$.\supset.$	$AF\mu_1 \leqq AF\mu_2$.
8_b.	μ	$.\supset.$	$AF\mu \leqq bA\mu$.
8.	There exists a non-negative real number b such that F has the property 8_b.		
9.	μ	$.\supset.$	$F\mu \geqq 0$.
10.	$\mu \geqq 0$	$.\supset.$	$F\mu \geqq 0$.

The functional equalities and inequalities are understood to hold identically in the variable argument p or p' as the case may be. In 8 and 8_b $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$.

The properties P = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 are such that, if $\mathfrak{M}'$ is additive and F_1, F_2 are transformations on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ with the property P, then $F_1 + F_2$ is on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ with the property P; that is, the class $[F^P]$ of all functional transformations F^P (F with the property P) on $\mathfrak{M}$ to a class $\mathfrak{M}'$ additive is additive.

The class $[F^P]$ (P = 1, 2, 3, 5, 7, 8) of transformations F^P to a class $\mathfrak{M}'$ multiplicative as to constants is multiplicative as to constants. The class $[F^P]$ (P = 4, 6, 9, 10) of transformations F^P to a class $\mathfrak{M}'$ multiplicative as to positive constants is multiplicative as to positive constants.

The class $[F^P]$ $(P = 1, 2, 3, 5, 8)$ of transformations F^P to a class $\mathfrak{M}'$ linear is linear. The class $[F^P]$ $(P = 4, 6, 9, 10)$ of transformations F^P to a class $\mathfrak{M}'$ positive-linear is positive-linear.

F^6 implies $F^{7\,10}$, and $F^{7\,10}$ implies F^6. F^9 implies F^{10}. $\mathfrak{M}$ being subtractive, F^{24} implies F^9 and so F^{247} implies F^{2469}.

Properties 1, 3, 5, 6 are distributive properties. A transformation F^1 is *multiplicative as to constants.* A transformation F^3 is *additive.* A transformation F^5 is *linear.* F^5 implies F^{13}. If M is linear F^{13} implies F^5. A transformation F^4 is said to have the *triangle property.*

In property 8_b b is understood to be a non-negative real number. The property 8_b is a *boundary* property. A transformation $F^8{}_b$ is said to be *bounded* (b) or to have the *bound* (b). A transformation F^8 is said to be *bounded of type* (b).

The properties P $(P = 1, \ldots, 10)$ are *invariant under induction*, that is, if F^P on $\mathfrak{M}_p$ to $\mathfrak{M}'_{p'}$ induces $\overline{F}$ on $\mathfrak{N}_{tp}$ to $\mathfrak{N}'_{tp'}$, then $\overline{F}^P$.

The properties P $(P = 1, \ldots, 10)$ are mutually consistent; the transformation F: $F\mu = 0$, has the composite property $[P]$.

Transformations M are the transformations F^{247}. A transformation M is a *modulus on the class* $\mathfrak{M}$ to the class $\mathfrak{M}'$ and $M\mu$ is the *modulus of the function* μ (with respect to the modulus M of the class). A modulus M on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ has properties 9 and 6, if $\mathfrak{M}$ is subtractive, and it is continuous if $\mathfrak{M}$ is absolute and linear.

The class $[M]$ of all moduli M on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ is positive-linear if $\mathfrak{M}$ is subtractive and $\mathfrak{M}'$ is positive-linear.

If $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}'$ are subtractive, from a modulus M' on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$ and a modulus M'' on $\mathfrak{M}'$ to $\mathfrak{M}''$ arises by composition a modulus $M = M''M'$ on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}''$.

The moduli M to the class $\mathfrak{A}$ are of principal importance. For every p of $\mathfrak{P}$ there is such a modulus $M = M_p$, viz., $M_p\mu = A\mu_p$. In the case II_n the sum of these n moduli M_p is Jordan's *écart.* The same name may in case IV be given to the modulus M: $M\mu = \int_{\mathfrak{P}} dp\, A\mu_p$. More generally, in cases II_n, III, IV we have the modulus $M = M_\varkappa$:

$$M_\varkappa\mu = \sum_{p=1}^{p=n} A\varkappa_p\, A\mu_p\,,\quad \sum_{p=1}^{p=\infty} A\varkappa_p\, A\mu_p\,,\quad \int_{\mathfrak{P}} dp\, A\varkappa_p\, A\mu_p\,,$$

where $\varkappa = \varkappa_p$ is any function of $\mathfrak{M}$. To notice further is the radial modulus M for which $M\mu$ is the positive square root of the norm $N\mu$ of μ,

$$N\mu = \sum_{p=1}^{p=n} \mu_p^2\,,\quad \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p^2\,,\quad \int_{\mathfrak{P}} dp\, \mu_p^2\,.$$

The transformation A: $A\mu = |\mu|$, is a modulus on $\mathfrak{M}$ to $A\mathfrak{M}$.

For every function μ' of a class $\mathfrak{M}'^{AL}$ and modulus $M_{\mathfrak{A}}$ of the class $\mathfrak{M}$ to the class $\mathfrak{A}$ there is a modulus M of $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$, viz., $M\mu = A\mu'\, M_{\mathfrak{A}}\mu$.

Every modulus M on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{A}$ induces on $\mathfrak{R} = (\mathfrak{C}\mathfrak{M})_*$ a transformation $\overline{\mathrm{M}}$ to $\mathfrak{C}$. Here and in the sequel with the notation $\mathfrak{R} = (\mathfrak{C}\mathfrak{M})_*$ are to be understood the hypotheses that the class $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$ is A L S-C D and that the class $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_t$ is the class of all continuous functions $\gamma = \gamma_t$ on $\mathfrak{T}$, a finite closed interval of the real number system.

Under suitable conditions on the system: — classes $\mathfrak{T}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ of elements; classes $\mathfrak{C}_t$, $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}'_{p'}$, $\mathfrak{R}_{tp} = (\mathfrak{C}_t \mathfrak{M}_p)_*$, $\mathfrak{R}'_{tpp'} = (\mathfrak{C}_t \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}'_{p'})_*$ of functions; moduli M_p on $\mathfrak{M}_p$ to $\mathfrak{A}$, $\mathrm{M}'_{p'}$ on $\mathfrak{M}'_{p'}$ to $\mathfrak{A}$, — we have the following relations:

1) For every ϱ there is a γ_ρ such that $\mathrm{A}\varrho \leqq \gamma_\rho$.
2) For every ϱ there is a μ_ρ such that $\mathrm{A}\varrho \leqq \mu_\rho$.
3) For every ϱ $\mathrm{M}_p\varrho$ is of the class $\mathfrak{C}_t$.
4) For every ϱ' $\mathrm{M}'_{p'}\varrho'$ is of the class $\mathfrak{R}_{tp}$.

Of these 2) and 3) hold under the fixed hypotheses. For use in the sequel we need to note merely that the four relations hold if each class $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ is of one of the four cases I, II_n, III, IV, the moduli M, M′ being the corresponding radial moduli.

Transformations H are the transformations F^{37}. The identical transformation is a transformation H on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}$. The formula: $\mathrm{U}_p\mu = \mu_p$ gives for every $p^{\mathfrak{P}}$ a transformation $\mathrm{H} = \mathrm{U}_p$ on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{A}$. For every function μ' of $\mathfrak{M}'^{\mathrm{L}}$ and transformation $\mathrm{H}_{\mathfrak{A}}$ of type H on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{A}$ there is a transformation H on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}'$, viz., $\mathrm{H}\mu = \mu' \mathrm{H}_{\mathfrak{A}} \mu$.

A transformation H on an absolute linear class $\mathfrak{M}$ is linear and continuous.

A transformation H on a class $\mathfrak{M}^{\mathrm{ALS\text{-}CD}}$ to itself induces on the compound class $\mathfrak{R} = (\mathfrak{C}\mathfrak{M})_*$ to itself a transformation $\overline{\mathrm{H}}$ of type H; similarly, the transformation I of integration (from fixed lower limit) on $\mathfrak{C}$ to $\mathfrak{C}$ is a transformation of type H inducing on $\mathfrak{R}$ to itself a transformation $\overline{\mathrm{I}}$ of type H. $\overline{\mathrm{H}}$ and $\overline{\mathrm{I}}$ are interchangeable transformations: $\overline{\mathrm{H}}\,\overline{\mathrm{I}} = \overline{\mathrm{I}}\,\overline{\mathrm{H}}$.

Transformations W are those transformations $\mathrm{H} = \mathrm{F}^{37}$ on $\mathfrak{R} = (\mathfrak{C}\mathfrak{M})_*$ to itself which have to the transformation $\overline{\mathrm{I}}$ induced on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$ by the integration I on $\mathfrak{C}$ to $\mathfrak{C}$ the following relation:

11. $\varrho \,.\supset.\, \mathrm{A\,W\,\overline{I}}\varrho \leqq \mathrm{A\,\overline{I}\,W}\varrho.$

The transformations $\overline{\mathrm{H}}$ induced by the transformations H on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{M}$ are transformations W. Every W is a continuous transformation. The identity on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$ is a transformation W.

Transformations K are those additive transformations on $\mathfrak{R} = (\mathfrak{C}\mathfrak{M})_*$ to itself which are bounded of the type $(b, \beta; \mathrm{M}; \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_m)$, that is, for every K there is a system

$$(b, \beta; \mathrm{M}; \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_m)$$

wherein b is a non-negative number of $\mathfrak{A}$, β is a nowhere negative function of $\mathfrak{M}$, M is a modulus on $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{A}$, m is any positive integer, and $\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_m$ are any m transformations W of which the first, W_1, is the identity transformation; and to this system the transformation K has the relation:

$$\mathbf{12.} \quad i \cdot \varrho \;.\supset.\; \mathrm{AW}_i \mathrm{K}\varrho \leqq b \sum_{j=1}^{j=m} \mathrm{AW}_j \varrho + \beta \sum_{j=1}^{j=m} \mathrm{M\,A\,W}_j \varrho .$$

Here the range of the index i is $1, 2, \ldots, m$.

A transformation K is linear and continuous.

For every system $(\mathrm{M}; \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_m)$ the class of all transformations K bounded of type $(b, \beta; \mathrm{M}; \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_m)$ is linear.

Examples. — In the following three examples $\mathfrak{M}$ is of the cases II_n, III, IV; M is the radial modulus and $m = 1$, so that the bounds are of type $(b, \beta; \mathrm{M}; \mathrm{W}_1)$ or say $(b, \beta; \mathrm{M})$.

$$(1) \quad \mathrm{K}\varrho = \bar{\varrho}_{tp} = \varkappa_{tp}\, \varrho_{tp} . \qquad\qquad (2) \quad \mathrm{K}\varrho = \bar{\varrho}_{tp} = \mathrm{J}_q\, \varkappa_{tpq}\, \varrho_{tq} .$$

In (1) $\varkappa_{tp}$ is a function of $\mathfrak{N}_{tp} = (\mathfrak{C}_t \mathfrak{M}_p)_*$; hence K is bounded of type (b), i. e., of type $(b, \beta = 0; \mathrm{M})$. In (2) $\varkappa_{tpq}$ is a function of $(\mathfrak{C}_t \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_q)_*$ and J_q denotes $(\mathrm{II}_n)\ \sum_{q=1}^{q=n}$, (III) $\sum_{q=1}^{q=\infty}$, (IV) $\int_{a_0}^{a_1} dq$. We have

$$(\mathrm{AK}\varrho)^2 \leqq \mathrm{J}_q\, \varkappa^2_{tpq} \,.\, \mathrm{J}_q\, \varrho^2_{tq} = (\mathrm{M}_q\, \varkappa_{tpq})^2 \,.\, (\mathrm{M}_q\, \varrho_{tq})^2 ;$$

by previous remarks, $\mathrm{M}_q \varkappa_{tpq}$ is of class $\mathfrak{N}_{tp}$ and there is a function $\beta = \beta_p$ of $\mathfrak{M}$ such that $\mathrm{M}_q\, \varkappa_{tpq} \leqq \beta$; hence $\mathrm{AK}\varrho \leqq \beta\, \mathrm{MA}\varrho$ and the transformation K is bounded of type (β, M), i. e., of type $(b = 0, \beta; \mathrm{M})$.

Hence the transformation:

$$(3) \quad \mathrm{K}\varrho = \bar{\varrho}_{tp} = \varkappa_{tp}\, \varrho_{tp} + \mathrm{J}_q\, \varkappa_{tpq}\, \varrho_{tq} ,$$

is bounded of type $(b, \beta; \mathrm{M})$.

The more general type $(m \geqq 1)$ of bound is to the end that the general theory b of a single differential equation $\mathrm{D}\varrho = \mathrm{K}\varrho$ may comprehend the case of a simultaneous system of equations indicated below as well as still more general types of simultaneous systems.

We have now reached the

General System b.

Classes of Variables:

$$\mathfrak{T} = [t \,|\, a_0 \leqq t \leqq a_1] \qquad \mathfrak{P} = [p] \qquad \mathfrak{T}\mathfrak{P} = [t\,p]$$

Classes of Functions:

$$\mathfrak{C} = [\gamma \text{ on } \mathfrak{T} \text{ to } \mathfrak{A}] \qquad \mathfrak{M} = [\mu \text{ on } \mathfrak{P} \text{ to } \mathfrak{A}] \qquad \mathfrak{N} = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{M})_*$$

Properties:

$$\mathfrak{C} = [\text{all continuous } \gamma_t] \quad \mathfrak{M}^{\text{ALS-CD}}$$

Functional Transformations:

$$\text{M on } \mathfrak{M} \text{ to } \mathfrak{A} \qquad \begin{array}{l} \text{W}_1, \ldots, \text{W}_m \text{ on } \mathfrak{R} \text{ to } \mathfrak{R} \\ \text{K on } \mathfrak{R} \text{ to } \mathfrak{R} \end{array}$$

Properties:

$$\text{M}^{2\,4\,7} \qquad \begin{array}{l} \text{W}_1{}^{3\,7\,11}, \ldots, \text{W}_m{}^{3\,7\,11} \\ \text{K}^{3\,12} \end{array}$$

Here m is an arbitrary positive integer, and for the purposes of the application W_1 is the identity transformation on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$. Further in the bounding (12) of K b is an arbitrary non-negative number and β is an arbitrary nowhere negative function of $\mathfrak{M}$.

This system b unifies the systems I, II_n, III, IV in connection with the system $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, which is indeed another example of the system of case IV. Thus the system b, which is indeed much more extensive than has been indicated, illustrates the principle A of generalization by abstraction.

The system b is also a generalization of the system b^{I}, with $m = 1$, that is, of this system b: $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{\text{I}}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\text{I}}$, so that $\mathfrak{T}\mathfrak{P} = \mathfrak{T}\mathfrak{P}^{\text{I}} = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\text{I}} = \mathfrak{C}$, and $\text{K} = \text{K}^{38}$ is an additive transformation on $\mathfrak{C}$ to $\mathfrak{C}$ bounded of type (b).

Of the type $b^{\text{I}} = (\mathfrak{T}, \mathfrak{C}, \text{K}^{38})$ is the system $b^{\text{I}}{}_{\varkappa} = (\mathfrak{T}, \mathfrak{C}, \text{K}_{\varkappa})$ where $\varkappa = \varkappa_t$ is a function of $\mathfrak{C}$ and $\text{K}_{\varkappa}$ is the multiplicative transformation

$$\text{K}_{\varkappa}: \quad \text{K}_{\varkappa}\varrho = \varkappa_t \varrho_t .$$

Thus the system b illustrates also the principle B of

Generalization by the Adjunction of suitably conditioned Parameters,

in this case $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}, \text{M}, \text{W}_1, \ldots, \text{W}_m, \text{K}$.

We notice further that the conditions imposed on $\mathfrak{P} = [p]$, $\mathfrak{M} = [\mu]$ etc. all involve the class $\mathfrak{M}$ of functions μ of the variable p on the range $\mathfrak{P}$, that is, all except the tacit conditions that there is an element p in the class $\mathfrak{P}$ and that there is a function μ in the class $\mathfrak{M}$. Accordingly we say that the system b illustrates the principle of generalization

B*) *by adjunction of suitably conditioned parameters in the sense of General Analysis.*

For, and this is the

Definition of General Analysis

in the form now in question, I call a system *a system of General Analysis*, and the corresponding theory *a theory of General Analysis*, in case they *involve one or* *more variables about whose character and range of variation information is given only by the mediation of conditions involving one or more classes of functions of those and perhaps other variables.*

The generality of the theory is due to the fact that the conditions bear so lightly upon, are separated logically so far from, the conditioned variables. The simplicity of the theory is due largely to its generality. Further, from example b, one may perhaps be led to hold that simplicity of theory depends largely also on the explicit use of the variables in connection with the notion of *relative uniformity.*

General Theory b.

The system b was devised to illustrate by its theory b the principle B* in connection with the theorem of the existence and uniqueness of the integral γ_t of the linear homogeneous ordinary differential equation of the first order:

$$\mathrm{D}_t \gamma_t = \varkappa_t \gamma_t ,$$

on the interval $\mathfrak{T}$ $a_0 \leqq t \leqq a_1$ of the real variable t, on which $\varkappa_t$ is a continuous function, with the initial condition:

$$\gamma_{t_0} = a ,$$

where t_0, a are any numbers of $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ respectively.

Peano in 1888 in vol. 22 of the *Mathematische Annalen* gave an elegant treatment of the corresponding theorem for a system of n equations:

$$\mathrm{D}_t \gamma_{it} = \sum_{j=1}^{j=n} \varkappa_{ijt} \varrho_{jt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

in the n-partite function $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ of $\mathfrak{C}$, with the initial conditions:

$$\gamma_{it_0} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Similarly, for the general system b, we formulate the problem of integration of the single equation:

$$\mathrm{D}\varrho = \mathrm{K}\varrho ,$$

with the initial condition:

$$\varrho_{t_0} = \alpha$$

where α is a function of $\mathfrak{M}$; and of the system of n equations:

$$\mathrm{D}\varrho_i = \sum_{j=1}^{j=n} \mathrm{K}_{ij} \varrho_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in the n-partite function $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ of $\mathfrak{R}$, with the initial conditions:

$$\varrho_{it_0} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

where α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are n functions of $\mathfrak{M}$ and the n^2 functional transformations K_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ are of the type K on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$ with the common bound $(b, \beta; M; W, \ldots, W_m)$, W_1 being the identical transformation on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$.

Now setting $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{P}^{II_n}$, etc., we find that the system of n equations in b becomes a single equation in $\bar{b}$, the transformation $\overline{K}$ having a bound $(\bar{b}, \bar{\beta}; M; \overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_{\bar{m}})$ of the same type as before but with $\bar{m} = nm$. Thus, as a consequence of the fact that the theory of the simple equation is made out for a general class $\mathfrak{P}$ and for a transformation K with a bound $(b, \beta; M; W_1, \ldots, W_m)$ in which m is any positive integer, we see that *the theory of the system of n equations follows from the theory of the single equation.*

For the single equation we have these three theorems:

I. The differential equation with initial condition is equivalent to the integral equation:

$$\varrho = \alpha + I K \varrho,$$

where I denotes the operation of integration on functions of C from t_0 to t, viz., for every continuous function γ $I\gamma = \int_{t_0}^{t} dt\, \gamma_t$, and hence I is a transformation on $\mathfrak{R}$ to $\mathfrak{R}$.

II. The integral equation has one and only one solution:

$$\varrho = \sum_{n=0}^{n=\infty} (I K)^n \alpha \qquad (\mathfrak{M}_p; t^{\mathfrak{T}}p^{\mathfrak{P}}).$$

III. A solution ϱ of the differential equation is determinable in the way indicated for $t = t_0$ from its value at any $t = t_1$ of the variable t on $\mathfrak{T}$.

Conclusion.

The present paper calls attention to *General Analysis* and its rôle in the *generalization* of existing theories whether by abstraction or by the adjunction of suitably conditioned parameters. Equally important is the rôle of General Analysis in the functional *characterization* or *specification* of theories equivalent to existing theories by conditions of the prescribed type. The two rôles of generalization and of specification merge in the rôle of comparative or *organic development* of analytic doctrines.

R. D'ADHÉMAR

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE Mr. VOLTERRA

M. Émile Picard, dans son Cours de 1907, a exposé les éléments de la théorie de M. Volterra [1], sous la forme d'*Approximations successives.*

Ceci m'a suggéré quelques remarques que je vais résumer.

Disons d'abord un mot du célèbre Problème d'Abel.

I.

Problème d'Abel.

f est l'inconnue, g est donnée, et l'on a $0 < n < 1$ pour que l'intégrale ait un sens.

Il faut avoir:

$$\int_0^y \frac{f(x)\,dx}{(y-x)^n} = g(y).$$

La solution est aujourd'hui classique; l'on effectue sur les deux membres l'opération:

$$\int_0^a \frac{dy}{(a-y)^{1-n}}$$

avec la remarque de Dirichlet:

$$\int_0^a dy \int_0^y \mathrm{F}dx \equiv \int_0^a dx \int_x^a \mathrm{F}dy$$

d'où, K étant une constante:

$$\mathrm{K}\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{g(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}} = \mathrm{G}(a)$$

$$\mathrm{K}\,f(a) = \frac{d\mathrm{G}}{da}.$$

[1] 4 Notes, Accademia di Torino, 1896; 2 Notes, Accademia dei Lincei, 1896.

Le problème est résolu. Mais je voudrais faire remarquer que l'on a à dériver une intégrale à *élément infini* et que, par suite, le résultat est immédiat par l'emploi de la notion de *partie finie* (¹). Nous représenterons la partie finie d'une intégrale infinie par

$$\left|\overline{}\right.$$

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{da} &= \left|\overline{\int_0^a g(y)\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{(a-y)^{1-n}}\,dy}\right. \\
&= \left|\overline{-\int_0^a g(y)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(a-y)^{1-n}}\,dy}\right. \\
&= \left|\overline{-\left|\frac{g(y)}{(a-y)^{1-n}}\right|_0^a+\int_0^a\frac{g'(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}}}\right. \\
&= \frac{g(0)}{a^{1-n}}+\int_0^a\frac{g'(y)\,dy}{(a-y)^{1-n}}\,.
\end{aligned}$$

La solution n'est regulière à l'origine, que si g est nul en ce point. (Voir M. Goursat, Acta Mathematica, t. 27, p. 129).

La même remarque, sur les *partie finie*, trouve son application dans les problèmes plus généraux, dont nous allons parler.

II.

Équations intégrales.

Il y a deux équations intégrales linéaires fondamentales: f est l'inconnue, F et g sont donnés:

(E₁) $$f(x)+\lambda\int_0^1 F(x,y)\,f(y)\,dy = g(x)$$ (M. Fredholm).

(E₂) $$f(x)+\lambda\int_0^x F(x,y)\,f(y)\,dy = g(x)$$ (M. Volterra).

La seconde se résout par des approximations successives:

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&f_0(x)+0 = g(x) \\
&f_1(x)+\lambda\int_0^x F(x,y)\,f_0(y)\,dy = g(x) \\
&f_2(x)+\lambda\int_0^x F(x,y)\,f_1(y)\,dy = g(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

(¹) Travaux de M. Hadamard et de l'auteur. Voir mon volume dans la collection « Scientia », et mes *Exercices et Leçons d'Analyse* (Gauthier-Villars).

Si les fonctions F et g sont bornées, les approximations convergent, quel que soit λ, et la solution est unique.

La même méthode ne réussirait, pour la première équation, que pour des valeurs *assez petites* de λ. Comme d'ailleurs M. Fredholm a montré, dans un travail célèbre, que la solution est *méromorphe*, par rapport à λ, l'on obtient, par les approximations, une sorte de limite inférieure du module du pôle λ_0 le plus voisin de l'origine.

Nous voulons, ici, faire quelques applications nouvelles des approximations (A).

III.

Première généralisation.

La fonction F devient infinie mais est intégrable. L'on a l'équation :

$$f(y)+\lambda\int_0^y \frac{f(x)\,dx}{(y-x)^n}=g(y) \qquad (0<n<1).$$

Les approximations reviennent à poser

$$f(y)=f_0(y)+\lambda f_1(y)+\lambda^2 f_2(y)+\cdots$$

$$\begin{cases} f_0(y)=g(y) \\ f_1(y)=-\displaystyle\int_0^y \frac{f_0(x)\,dx}{(y-x)^n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(y)=-\displaystyle\int_0^y \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{(y-x)^n} \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

L'on posera

$$x=yt \quad , \quad b=\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^n}$$

et l'on trouvera, M étant une limite supérieure du module de g,

$$|f_1(y)|<\mathrm{M}\,by^{1-n}$$
$$|f_2(y)|<\mathrm{M}\,(by^{1-n})^2$$
$$|f_3(y)|<\mathrm{M}\,(by^{1-n})^3.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

La convergence est assurée si l'on a

$$|\lambda|\,by^{1-n}<1$$

donc, ici, seulement pour des valeurs assez petites de y. Si la solution est bornée, elle est unique, car soit $h(y)$ la différence de deux solutions; soit N une limite supérieure du module de h, par itération l'on prouve de suite que l'on a:

$$|h(y)| < N\,(\lambda\, b y^{1-n})^p$$

quel que soit p. D'où

$$h(y) \equiv 0\,.$$

Remarque. Cette équation intégrale provient immédiatement de l'équation suivante, toute voisine de celle d'Abel

$$\int_0^y f(x)\left[\frac{1}{(y-x)^n}+\frac{1}{(y-x)^{n'}}\right]dx = G(y) \qquad (0 < n' < n < 1)\,.$$

On fait la même opération d'intégration, puis l'on dérive en a.

IV.

Deuxième généralisation.

Soit l'équation

$$f(x) + \frac{\lambda}{x}\int_0^x f(y)\,F(x\,,y)\,dy = x^q\,g(x) = g_1(x) \qquad (q \geqq 0)\,.$$

Faisons les approximations (A) et cherchons si f_n a une limite, c'est-à-dire si la série $\Sigma(f_p - f_{p-1})$ converge.

Soit P′ une limite supérieure pour le module de F, et P″ l'analogue pour g. Nous avons immédiatement:

$$\left|f_1(x) - f_0(x)\right| < \frac{\lambda P'}{q+1}\,P'' x^q$$

$$\left|f_2(x) - f_1(x)\right| < \frac{(\lambda P')^2}{(q+1)^2}\,P'' x^q\,.$$

. . . .

Ici la valeur de x n'intervient pas; la convergence est assurée si l'on a:

$$\lambda P' < q + 1\,.$$

(Si λ est négatif, c'est son module qui intervient).

Si l'on n'impose à la solution que la seule condition d'être bornée, la question de l'unicité de solution se résout moins bien, au moins au premier abord.

Soit toujours h la différence de deux solutions, de module moindre que N, l'on a

$$h(x) = -\frac{\lambda}{x}\int_0^x h(y)\,F(x\,,y)\,dy$$

d'où

$$|h(x)| < \mathrm{N}\,(\lambda \mathrm{P}')^p$$

quel que soit p. L'unicité est assurée si l'on a

$$\lambda \mathrm{P}' < 1$$

Ici l'on ne profite plus de la présence du facteur x^q dans g.

Un exemple va cependant nous montrer que le raisonnement précédent ne donne pas des limites trop grossières.

Soit $\mathrm{F} = k$ constante, l'on remarque alors ([1]) que l'équation intégrale est une équation différentielle en $u = \int_0^x f(y)\,dy$

$$\frac{du}{dx} + \frac{k}{x} u - g_1 = 0$$

ce qui donne, α étant arbitraire :

$$u = x^{-k}\left(\alpha + \int_0^x g_1(y)\, y^k\, dy\right).$$

Soit $k > 0$, nous avons une solution u avec $u(0) = 0$; d'où une solution f, $f(0)$ étant fini : nous prenons pour cela la constante arbitraire α nulle.

Soit $k < 0$, $k = -k'$.

Si l'on a $k' > 1$, l'on peut prendre arbitrairement la valeur de α, d'où une infinité de solutions u et, par suite, de solutions f.

Mais si l'on a $k' < 1$, l'on doit faire $\alpha = 0$, pour que f soit fini. Donc une solution.

Posons $k = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ (nous allons voir pourquoi). Je démontre l'unicité de solution pour $|k| < 1$ c'est-à-dire pour :

$$\frac{\alpha}{\beta} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} < -2.$$

Et je puis calculer une solution pour $|k| < q + 1$ ou bien pour :

$$\frac{\alpha}{\beta} > -1 + \frac{1}{q+1} \quad , \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} < -1 - \frac{1}{q+1}.$$

Pour la question d'unicité, par l'équation différentielle, on retrouve le résultat même de M. Volterra :

$$\frac{\alpha}{\beta} > -1 \quad , \quad \frac{\alpha}{\beta} < -2.$$

Une des limites est identique.

Dans un nouveau champ, dont la position dépend de q, les approximations donnent *une* des solutions obtenues par l'équation différentielle.

([1]) Cours de M. Picard.

V.

Nature analytique de la solution.

La nature analytique de la solution est évidente, si g et f sont développables en séries de puissances positives et entières, dans l'intervalle de convergence des approximation.

Les beaux travaux de M. SERGE BERNSTEIN permettent d'aller bien plus loin ([1]).

Nous sommes dans le domaine réel et n'avons pas à en sortir. Or une singularité, telle que ai, toute voisine de l'origine, si a est petit, empêche nos développements tayloriens de converger, sur l'axe réel, dans tout intervalle supérieur ou égal à $0 - a$.

Par exemple la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est holomorphe sur tout l'axe réel, et ici l'on aurait $a = 1$.

Par des développements nouveaux, et par la notion de *norme*, M. BERNSTEIN résout la difficulté.

Reprenons les approximations en adoptant les notations de M. BERNSTEIN pour R et r, P′ et P″ étant maintenant des normes de F et de g, nous aurons, en désignant une *norme* par $\} \{$

$$\left\{ f_1(x) - f_0(x) \right\} \leq \lambda \frac{R+r}{2r} \left\{ g_1 \right\} \left\{ F \right\}$$

$$\left\{ f_2(x) - f_1(x) \right\} \leq \lambda \frac{R+r}{2r} \left\{ f_1 - f_0 \right\} \left\{ F \right\}$$

$$\left\{ f_3(x) - f_2(x) \right\} \leq \lambda \frac{R+r}{2r} \left\{ f_2 - f_1 \right\} \left\{ F \right\}.$$

La norme de $\lim f_n(x)$ est finie, en supposant $\lambda = 1$, si l'on a $\frac{R+r}{2r} P' < 1$.
Donc la solution est certainement analytique, dans ce cas.

VI.

Remarque.

Il reste à rappeler comment l'inversion de certaines intégrales amène à l'équation intégrale de M. VOLTERRA. Soit

$$\int_0^y G(x, y)\, f(x)\, dx = g(y).$$

([1]) *Thèse* (Mathem. Annalen, t. 59).

La dérivation conduit à une équation E_2, mais une difficulté s'introduit si $G(x, x)$ s'annule. Soit encore

$$\int_0^y \frac{H(x, y)}{(y-x)^n} f(x)\, dx = g(y) \quad (0 < n < 1).$$

En effectuant l'opération déjà étudiée

$$\int_0^a \frac{dy}{(a-y)^{1-n}}$$

sur les deux membres, puis dérivant, en a, l'on est conduit à E_2 encore. Mais il faut que $H(x, x)$ ne s'annule pas.

Ceci est presque immédiat pour le cas très général

$$H(x, y) = \sum_1^\infty h_p(x)\, g_p(y).$$

Il s'introduit, en dénominateur:

$$\Sigma\, h_p(a)\, g_p(a).$$

Si l'on a, un facteur, dans ceci, une puissance de a, l'on est ramené à notre seconde généralisation.

Mais je n'ai, ici, qu'à renvoyer aux travaux de M. Volterra (1).

Notons que l'équation intégrale que nous avons étudiée par approximations successives provenait de celle-ci

$$\int_0^y (\alpha x + \beta y)\, f(x)\, dx = g(y).$$

L'on a $G(y, y) \equiv (\alpha + \beta) y$, nul à l'origine, cas difficile et intéressant. Si $G(y, y)$ ne s'annule pas, M. Picard a donné une autre solution (2).

(1) Et à ceux de M. Holmgren, Société royale des sciences d'Upsal, 1900. Notons que M. Le Roux avait résolu une inversion dans sa thèse (1895). Signalons aussi les travaux de M. P. Burgatti, Acc. dei Lincei, 1903.

(2) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1904.

Remarque: Cette note était rédigée quand a été soutenue la thèse de M. Lalesco. Nous renvoyons à ce travail.

L. ORLANDO

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INTEGRALI

Il problema della risoluzione delle equazioni integrali non esaurisce la teoria di queste equazioni. Così, per esempio, un metodo di risoluzione approssimativa delle equazioni algebriche merita ben piccolo posto nella teoria delle equazioni algebriche.

A questa breve comunicazione farò seguire una diffusa Memoria, nella quale saranno ampiamente svolte le idee qui contenute; ma intanto mi preme fare qui conoscere il piccolo contributo che mi è riuscito apportare a questo ramo dell'analisi ([1]).

§ 1.

Proponiamoci di risolvere l'equazione integrale

$$(1) \qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda \int_0^1 [p_0(x)\, q_0(\xi) + \ldots + p_n(x)\, q_n(\xi)]\, \varphi(\xi)\, d\xi\,,$$

dove le funzioni $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sono date funzioni di x (per esempio a_0,

([1]) Le idee che ora espongo brevemente, e che saranno esposte in una lunga Memoria, sulla quale da molto tempo, con lunghi intervalli, ho lavorato, non sono tutte nuove. Nel mio corso libero di Fisica matematica, svolto nel 1906-1907 nella R. Università di Messina, io mostrai il metodo contenuto nei §§ 1, 2, 5 e 6. Il metodo del § 1 era ivi anche applicato a equazioni integrali che avessero il nucleo *sviluppabile in serie di potenze o in serie trigonometrica rispetto ad* x.

Comunicai, nei primi del 1907, il mio modo di vedere all'illustre Prof. Levi-Civita, il quale mi scrisse consigliandomi di trattare il problema in maniera più organica e più generale.

Faccio intanto notare che il metodo del § 5 era già stato da me applicato nei due lavori: *Sull'integrazione della* Δ_4 *in un parallelepipedo rettangolo* (Rend. del Circolo di Palermo, marzo 1906); *Sull'induzione magnetica* (Rend. dei Lincei, ottobre 1906). Il metodo del § 6 era stato da me applicato nei due altri lavori: *Sull'integrazione della* Δ_2 *in un campo chiuso e convesso* (Rend. del Circolo di Palermo, aprile 1906); *Nuove osservazioni sul problema dell'induzione magnetica* (Rend. dei Lincei, dicembre 1906).

In una brevissima Nota, che pubblicai a Verona (stabilimento tipografico G. Civelli) nelle vacanze 1907, annunziando anche allora una diffusa Memoria, fissai il metodo del § 1 e il risultato del § 4.

Gli eccellenti lavori: Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bull. de la Societé math. de France, 1907); e Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (Math. Annalen, 1907) non mi tolgono, per la umile parte che ho qui sviluppata, una priorità che principalmente l'importanza dei menzionati Autori mi rende preziosa.

$a_1 \cos ax$, $a_2 \cos 2ax$, ..., $a_n \cos nax$), e le $q_0(\xi)$, $q_1(x)$, ..., $q_n(\xi)$ sono date funzioni della variabile ξ.

Poniamo

$$(2) \qquad m_\nu = \int_0^1 q_\nu(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n).$$

L'equazione (1) lascia scrivere

$$(3) \qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda\, [m_0 p_0(x) + \cdots + m_n p_n(x)],$$

formula che, naturalmente, vale anche quando si ponga ξ al posto di x. Sostituendo in (2) e scrivendo

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}_{\nu\mu} &= \int_0^1 q_\nu(\xi)\, p_\mu(\xi)\, d\xi \\ \mathrm{T}_\nu &= \int_0^1 q_\nu(\xi)\, \mathrm{F}(\xi)\, d\xi \end{aligned}\right\} \qquad (\nu, \mu = 0, 1, 2, \dots, n),$$

noi otteniamo il sistema

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} (1 - \lambda \mathrm{A}_{00})\, m_0 - \lambda \mathrm{A}_{01}\, m_1 - \cdots - \lambda \mathrm{A}_{0n}\, m_n &= \mathrm{T}_0 \\ - \lambda \mathrm{A}_{10}\, m_0 + (1 - \lambda \mathrm{A}_{11})\, m_1 - \cdots - \lambda \mathrm{A}_{1n}\, m_n &= \mathrm{T}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \lambda \mathrm{A}_{n0}\, m_0 - \lambda \mathrm{A}_{n1}\, m_1 - \cdots + (1 - \lambda \mathrm{A}_{nn})\, m_n &= \mathrm{T}_n \end{aligned}\right.$$

Il determinante di questo sistema è un polinomio di grado non superiore ad $n+1$ in λ. I valori di λ che non annullano tale polinomio lasciano ricavare dal sistema (4) i valori delle costanti $m_0, m_1, \dots, m_n$, e determinare in modo unico, secondo (3), la soluzione φ dell'equazione integrale (1).

Quando, invece, si pongano al posto di λ le radici del determinante del sistema (4), allora, secondo i valori delle costanti $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n$, potranno presentarsi due casi: o la (1) resterà priva di soluzione, o avrà infinite soluzioni, in funzione continua di costanti arbitrarie.

I diversi valori di λ (non meno di 1 e non più di $n+1$) che annullano il determinante di (4) sono *valori singolari* relativamente all'equazione integrale (1).

§ 2.

Proponiamoci ora di risolvere l'equazione integrale

$$(1) \qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda \int_0^1 [p_0(x)\, q_0(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)]\, \varphi(\xi)\, d\xi$$
$$+ \lambda \int_0^1 [r_0(x)\, s_0(\xi) + \cdots + r_{n'}(x)\, s_{n'}(\xi)]\, \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}\, d\xi,$$

dove le $n'+1$ date funzioni $s_0(\xi), s_1(\xi), \dots, s_{n'}(\xi)$ siano tali da non consentire l'integrazione per parti.

Se poniamo

$$(2)\qquad \begin{cases} m_\nu = \int_0^1 q_\nu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi & (\nu = 0, 1, 2, \dots, n) \\ m'_\nu = \int_0^1 s_\nu(\xi)\,\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} & (\nu = 0, 1, 2, \dots, n'), \end{cases}$$

allora la (1) lascia scrivere

$$(3)\qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda\,[m_0\,p_0(x) + \cdots] + \lambda\,[m'_0\,r_0(x) + \cdots].$$

Da questa formula si deduce subito $\varphi(\xi)$, e si deduce anche $\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}$ mediante derivazione delle funzioni p ed r. E allora, sostituendo in (2), otteniamo $n+n'+2$ equazioni di primo grado fra le $n+n'+2$ incognite m ed m'. Dopo ciò la (3) risolve la (1).

§ 3.

Sia ora da risolvere l'equazione integrale non lineare

$$(1)\qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda \int_0^1 p(x)\,q(\xi)\,[\varphi(\xi)]^2\,d\xi,$$

dove le funzioni F, p, q sono date.

Se scriviamo

$$(2)\qquad m = \int_0^1 q(\xi)\,[\varphi(\xi)]^2\,d\xi,$$

la determinazione della costante m risolverà il problema, lasciando scrivere

$$(3)\qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda\,m\,p(x).$$

Sostituendo in (2) l'espressione di $\varphi(\xi)$ dedotta da (3), e ponendo

$$a_0 = \int_0^1 q\mathrm{F}^2\,d\xi\ ,\quad a_1 = \int_0^1 pq\mathrm{F}\,d\xi\ ,\quad a_2 = \int_0^1 qp^2\,d\xi\ ,$$

otteniamo subito

$$(4)\qquad \lambda a_2\,m^2 + (2\lambda a_1 - 1)\,m + a_0 = 0.$$

Per $\lambda = 0$, una delle due radici di quest'equazione di secondo grado tende ad a_0, e l'altra tende all'infinito dell'ordine di $\frac{1}{\lambda^2}$. In corrispondenza di ciò, una delle due soluzioni (3) di (1) tende a $\mathrm{F}(x)$, e l'altra all'infinito.

La (4) ha due radici diverse, ma esistono generalmente due valori di λ, che, annullandone il discriminante, rendono unico il valore m, ed unica la soluzione (3) della (1).

Esistono poi, *ma qui per dati particolari*, singolarità analoghe a quelle del caso lineare.

Osserviamo ancora che, per $F = 0$, si ottiene $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, e la φ, o è nulla, o diventa infinita per $\lambda = 0$, ben differentemente dal caso lineare.

§ 4.

Consideriamo ora l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 [p_0(x) q_0(\xi) + \cdots + p_n(x) q_n(\xi)] [\varphi(\xi)]^2 d\xi . \tag{1}$$

Se poniamo

$$m_\nu = \int_0^1 q(\xi) [\varphi(\xi)]^2 d\xi , \tag{2}$$

otteniamo

$$\varphi(x) = \lambda [m_0 p_0(x) + \cdots + m_n p_n(x)] . \tag{3}$$

Sostituendo in (2) l'espressione di $\varphi(\xi)$ ricavata da (3), otteniamo un sistema di $n+1$ equazioni quadratiche fra le $n+1$ incognite m. Queste equazioni si compendiano nell'espressione

$$m_\nu = \lambda^2 Q_\nu(m_0, m_1, \ldots, m_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) . \tag{4}$$

L'omogeneità della forma quadratica Q_ν lascia scrivere la (4) nel seguente modo:

$$m_\nu = Q_\nu(\lambda m_0, \lambda m_1, \ldots, \lambda m_n) . \tag{5}$$

Ora immaginiamoci un sistema di valori $m_0, m_1, \ldots, m_n$, al quale corrisponda una soluzione (3), unica. Questa soluzione sarà funzione di λ, perchè le m risultano funzioni (algebriche) di λ. Supponiamo che per $\lambda = 0$ le espressioni $\lambda m_0, \lambda m_1, \ldots, \lambda m_n$, funzioni algebriche di λ, restino finite: allora le $n+1$ formule (5) mostrano che anche le m restano finite; ma allora le λm non soltanto restano finite, ma per $\lambda = 0$ si annullano. Ma da ciò si deduce, per la (5), che anche le m si annullano per $\lambda = 0$; ed è anche subito chiaro dalla (4) che le m si annullano d'ordine superiore a quello di λ^2. Ma allora le λm si annulleranno d'ordine superiore a λ^3, e ciò avverrà, secondo (5), anche per le m; e allora, secondo (4), le m si annulleranno d'ordine superiore a λ^5, e così di seguito. Noi vediamo, da questo strano ragionamento, che le m_ν, funzioni algebriche di λ, si annullano, per $\lambda = 0$, di un ordine arbitrariamente alto: per non cadere nell'assurdo, dobbiamo supporre che le m sono identicamente nulle. Dunque l'unica soluzione di (1), che non diventi infinita per $\lambda = 0$, è $\varphi(x) = 0$, *ben differentemente dal caso lineare.*

Se al posto di φ^2 nella (1) figurasse $a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots + a_\mu\varphi^\mu$, la deduzione sarebbe, come è chiaro, identica.

§ 5.

Noi ora esporremo un altro metodo, il quale, pur non lasciandoci esaurientemente discutere l'equazione di Fredholm

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \lambda \int_0^1 k(x\,;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,, \tag{1}$$

in merito, per esempio, alla ricerca dei valori singolari di λ, ci lascia tuttavia approssimare quanto vogliamo la soluzione, per valori non singolari di λ.

Sia per ora

$$\varphi(x) = \mathrm{E}(x) + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{2}$$

un'equazione integrale lineare, dove $\mathrm{E}(x)$ rappresenta una data funzione; e $\theta(x\,;\xi)$ un'altra data funzione, vincolata dalla condizione

$$|\lambda| \int_0^1 |\theta(x\,;\xi)|\,d\xi < \alpha \tag{3}$$

dove α è un numero positivo fisso < 1. Il numero λ è nella (2) un numero fisso.

Adoperando un metodo di approssimazioni successive, noi poniamo, in prima approssimazione,

$$\varphi(x) + \varepsilon_1(x) = \mathrm{E}(x)\,.$$

Con ciò l'errore

$$\varepsilon_1(x) = -\lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

verifica, per la (3), la relazione

$$|\varepsilon_1(x)| < \alpha\,\Phi\,, \tag{4}$$

dove Φ rappresenta, se esiste, il limite superiore di $|\varphi|$ nel campo.

Posto, in seconda approssimazione

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \varepsilon_2(x) &= \mathrm{E}(x) + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,[\varphi(\xi) + \varepsilon_1(\xi)]\,d\xi \\ &= \mathrm{E}(x) + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\mathrm{E}(\xi)\,d\xi\,,\end{aligned}$$

l'errore

$$\varepsilon_2(x) = \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\varepsilon_1(\xi)\,d\xi$$

verifica, per la (3) e per la (4), la relazione

$$|\varepsilon_2(x)| < \alpha^2 \Phi .$$

Continuando, noi vediamo che l'errore

$$\varepsilon_\nu(x) = \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\varepsilon_{\nu-1}(\xi)\,d\xi ,$$

ottenuto col porre

$$\varphi(x) + \varepsilon_\nu(x) = \mathrm{E}(x) + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,[\varphi(\xi) + \varepsilon_{\nu-1}(\xi)]\,d\xi$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

verifica la relazione

$$|\varepsilon_\nu(x)| < \alpha^\nu \Phi ,$$

dunque tende a zero per ν infinito.

Si trova allora per $\varphi(x)$ lo sviluppo

$$\varphi(x) = \mathrm{E}(x) + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\mathrm{E}(\xi)\,d\xi + \lambda^2 \int_0^1 \theta(x\,;\xi) \int_0^1 \theta(\xi\,,\xi_1)\,\mathrm{E}(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots ; \tag{5}$$

il quale avrebbe anche potuto trovarsi ponendo φ uguale ad una serie di potenze di λ, e determinando, sulla (2), i coefficienti.

Stabilito dunque lo sviluppo (5), indichiamo generalmente con $\varphi_\nu(x)$ ciò che diventa $\varphi(x)$ quando nello sviluppo (5) si metta F_ν al posto di E. Noi vediamo subito che, assumendo

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{F}_0(x) + c_1\,\mathrm{F}_1(x) + \cdots + c_n\,\mathrm{F}_n(x) , \tag{6}$$

dove $c_1 , \ldots , c_n$ rappresentano grandezze costanti, ed $\mathrm{F}_0 , \mathrm{F}_1 , \ldots , \mathrm{F}_n$ rappresentano date funzioni, otteniamo

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1\,\varphi_1(x) + \cdots + c_n\,\varphi_n(x) . \tag{7}$$

Se le grandezze costanti $c_1 , \ldots , c_n$, che figurano in (6), non sono determinate, la deduzione di (7) da (6) è sempre legittima, e l'indeterminatezza di (7) non supera quella di (6), potendo peraltro, in molti casi, essere, come è chiaro, minore.

Dalle cose finora esposte si vede che, se per un dato valore di λ, la funzione φ non esiste, allora il nostro metodo è, per quel valore di λ, illusorio. Quando non è illusorio, esso conduce, tanto più rapidamente quanto più piccolo si può assumere nella (3) il numero positivo fisso α, all'effettiva risoluzione della (6).

La condizione (3) rappresenta per i dati del problema una grande restrizione. Noi vedremo nel seguente § 6 di liberarcene. Intanto possiamo osservare che ogni valore di λ per il quale valga la (3) non può essere singolare rispetto all'equazione integrale (2). Valendoci, *per brevità*, dei risultati del metodo di FREDHOLM, noi possiamo affermare che un valore λ, singolare per la (2), è anche singolare per la (2) resa omogenea $(E = 0)$. Bisogna dunque, se λ può essere singolare, che tale equazione omogenea abbia soluzione diversa da zero. È evidente, poi, che ogni soluzione di quest'equazione omogenea non può avere in $(0\,,1)$, sempre che valga la (3), punti d'infinito. Ma allora la (5), che per $E = 0$ riduce φ a zero, ci fa cadere nell'assurdo.

§ 6.

Ora noi vogliamo rimuovere, acquistando moltissima generalità, la restrizione § 5 (3), che vincola il nucleo dell'equazione di Fredholm. Scriviamo dunque ancora tale equazione:

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_0^1 k(x\,;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,, \tag{1}$$

e poniamo $k(x\,;\xi) = p_0(x)\,q_0(\xi) + \cdots + p_n(x)\,q_n(\xi) + \theta(x\,;\xi)$, dove per θ valga la § 5 (3). Sono poche le funzioni $k(x\,;\xi)$ che non si lasciano esprimere in tale modo.

Ponendo, come nel § 1,

$$m_\nu = \int_0^1 q_\nu(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (\nu = 0\,,1\,,\ldots,n)\,, \tag{2}$$

e poi scrivendo

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda\,[m_0 p_0(x) + \cdots + m_n p_n(x)] + \lambda \int_0^1 \theta(x\,;\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,,$$

noi ci riduciamo a un'equazione del tipo § 5 (2), dove la funzione

$$E(x) = F(x) + \lambda[m_0 p_0(x) + \cdots + m_n p_n(x)]$$

contiene, come nella § 5 (6), la costanti $m_0\,, m_1\,, \ldots, m_n$ non determinate. Per determinarle, basta esprimere φ come in § 5 (7), e poi sostituire $\varphi(\xi)$ in (2). Allora otteniamo un sistema come § 1 (4), colla sola differenza che ivi le A erano indipendenti da λ e qui ne sono dipendenti, perchè qui è in generale $A_{\nu\mu} = \int_0^1 q_\nu(\xi)\,\varphi_\mu(\xi)\,d\xi$, e φ_μ, sviluppato secondo § 5 (5), è una funzione di λ.

Il problema della ricerca dei valori singolari di λ è, in generale, trascendente; ma, *dato* λ, il problema dell'effettiva risoluzione di (1) si riduce abbastanza semplice.

TH. DE DONDER

SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX

La théorie des Invariants intégraux s'applique avec une rare élégance à un grand nombre de questions très diverses ; souvent celles-ci acquièrent ainsi une plus grande généralité. Dans le présent Mémoire, je me propose de le montrer encore sur quelques exemples d'analyse.

I.

Multiplicateur de Jacobi généralisé.

1. *Définition du multiplicateur de* Jacobi *d'un système d'équations différentielles ordinaires.* — Considérons les n équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{1}$$

ou la transformation infinitésimale

$$Af \equiv \sum_1^n {}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} X_k.$$

Toute solution M de l'équation aux dérivées partielles

$$AM = -M \sum_1^n {}_k \frac{\partial X_k}{\partial x_k} \tag{2}$$

est appelée un *multiplicateur de* Jacobi *du système* (1).

En introduisant une nouvelle variable ou un paramètre auxiliaire t, nous écrirons le système (1) sous la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt. \tag{1'}$$

Si nous supposons M indépendant du paramètre t, l'équation (2) est la condition nécessaire et suffisante pour que $I_n = \int M\, \delta x_1 \ldots \delta x_n$ soit un invariant intégral [1] de (1').

2. *Lemmes.* — *A*). Si l'on connait les $(n-1)$ invariants distincts $f_1, \ldots f_{n-1}$ de (1), on en déduira l'invariant intégral

$$I_{n-1} = \int \sum_1^n {}_i \frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n)}\, \delta x_1 \ldots \delta x_{i-1}\, \delta x_{i+1} \ldots \delta x_n$$

du système (1'). On a donc

$$\frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n)} <> M^i,$$

le signe $<>$ se lit *cogrédient à* et les M^i représentent les coefficients d'un invariant intégral $(n-1)$-uple.

B). On sait que

$$\frac{(-1)^i M^i}{M} <> \xi_i \quad (\text{E, n.}^\circ\ 35)$$

ou que

$$(-1)^i M^i <> M\xi_i,$$

les ξ_i forment une solution aux variations de (1').

Réciproquement, si on a

$$\frac{(-1)^i M^i}{\xi_i} \equiv \varrho$$

quel que soit i, ϱ représentant une fonction de $x_1, \ldots x_n$, cette fonction sera un multiplicateur de Jacobi de (1). Or ici on a:

$$X_i <> \xi_i$$

$$\frac{(-1)^i \dfrac{\partial(f_1 \ldots f_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n)}}{X_i} \equiv \varrho$$

quel que soit i. Donc

$$\frac{(-1)^i \dfrac{\partial(f_1 \ldots f_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n)}}{X_i} <> M.$$

C). On sait que

$$\frac{(-1)^{i+j} M^{ij}}{M} <> \xi_{ij}$$

ou que

$$(-1)^{i+j} M^{ij} <> M\xi_{ij},$$

[1] *Études sur les Invariants intégraux,* par Th. De Donder (Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 1901, t. XV; 1902, t. XVI. Ce travail sera désigné dans la suite par E).

M^{ij} représentant le coefficient de $\delta x_1 \dots \delta x_{i-1}\, \delta x_{i+1} \dots \delta x_{j-1}\, \delta x_{j+1} \dots \delta x_n$ $(i < j)$ dans un invariant intégral $(n-2)$-uple de (1'); les ξ_{ij} forment une solution aux variations 2-uple de (1').

Réciproquement, si on a

$$\frac{(-1)^{i+j} M^{ij}}{\xi_{ij}} \equiv \varrho$$

quel que soit i ou j la fonction ϱ sera un multiplicateur de Jacobi de (1). La généralisation est immédiate grâce à la théorie des Invariants intégraux. Ces lemmes seront utilisés plus loin.

3. *Définition du multiplicateur de Jacobi d'un système jacobien.* — Considérons un système *jacobien*

(3)
$$A_\rho f \equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l^\rho = 0 , \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1 \dots r \\ r < n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire un système tel qu'on ait

$$A_\rho A_{\rho'} f - A_{\rho'} A_\rho f \equiv 0 , \qquad (\varrho' = 1 \dots r)$$

quel que soit f.

Toute solution M des équations aux dérivées partielles

(4)
$$A_\rho M = - M \sum_1^n {}_l \frac{\partial X_l^\rho}{\partial x_l} , \qquad \left(\varrho = 1 \dots r\right)$$

est appelé un *multiplicateur de Jacobi du système jacobien* (3). Les r équations (4) admettent une solution commune [1] M. En effet:

(5)
$$A_1 f \equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l^1 = 0$$

possède, en commun avec les $r-1$ autres équations (3), $n-r$ invariants distincts $f_1, \dots f_{n-r}$. D'autre part, les X_l^ρ $(\varrho = 1 \dots r)$ forment r solutions aux variations de (5). Désignons par Δ le déterminant $\sum \pm X_{n-r+1}^1 \dots X_n^r$. Remarquons qu'un système jacobien se transforme en un système jacobien par un changement quelconque de variables. On en déduira immédiatement (E, n.° 20) que

$$\frac{\dfrac{\partial(f_1 \dots f_{n-r})}{\partial(x_1 \dots x_{n-r})}}{\Delta}$$

est un multiplicateur de (5); on verrait de même que c'est un multiplicateur de chacune des équations (3); donc M est une solution de (4). c. q. f. d.

[1] *Multiplicator eines Jacobischen Systems*, par A. Mayer (Mathematische Annalen, Bd. XII, 1877).

4. La théorie des Invariants intégraux permettrait d'étendre aisément les propriétés fondamentales du multiplicateur de (1) au multiplicateur de JACOBI d'un système jacobien.

5. *Définition d'après* LIE, *d'un multiplicateur d'un système complet.* — Considérons un système *complet*

$$(6) \qquad A_\rho f \equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l^\rho \,, \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1 \dots r \\ r < n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire un système tel qu'on ait

$$A_\rho A_{\rho'} f - A_{\rho'} A_\rho f \equiv \alpha_1^{\rho\rho'} A_1 f + \dots + \alpha_r^{\rho\rho'} A_r f.$$

En général, les r équations aux dérivées partielles

$$(7) \qquad A_\rho M = -M \sum_1^n {}_l \frac{\partial X_l^\rho}{\partial x_l} \,, \qquad (\varrho = 1 \dots r)$$

n'admettent plus une solution commune M.

S. LIE [1] a formé a priori une fonction qu'il a nommée *multiplicateur du système complet* (6): il considère les $n - r$ invariants distincts $f_1, \dots f_{n-r}$ du système complet (6) dont il déduit le déterminant $\frac{\partial(f_1 \dots f_{n-r})}{\partial(x_a \dots x_g)}$, où $a, \dots, g$ sont $(n - r)$ nombres distincts pris parmi $1 \dots n$; puis il forme le déterminant $\sum \pm X_k^1 \dots X_l^r$, où $k \dots l$ sont les r autres nombres pris parmi $1 \dots n$; il obtient ainsi son multiplicateur

$$M \equiv \frac{\dfrac{\partial(f_1 \dots f_{n-r})}{\partial(x_a \dots x_g)}}{\sum \pm X_k^1 \dots X_l^r}.$$

6. S. LIE justifie sa définition par les *propriétés fondamentales*:

A) La forme la plus générale de ce multiplicateur est $M\varphi(f_1, \dots f_{n-r})$, où φ est une fonction arbitraire de $f_1, \dots f_{n-r}$.

B) Si on prend n nouvelles variables $y_i = \psi_i(x_1 \dots x_n)$, on obtient le multiplicateur

$$\frac{M}{\dfrac{\partial(\psi_1 \dots \psi_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}}$$

du système (6) transformé.

[1] *Allgemeine Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung* (Zweite Abhandlung) (Math. Annalen, Bd. XI, 1876).

C) La valeur du multiplicateur M du n.° précédent est indépendante de la permutation $a \ldots g\, k \ldots l$ considérée. La propriété ainsi énoncée n'est pas tout-à-fait correcte.

Pour fixer les idées, supposons $r = 2$; en se reportant aux lemmes du n.° 2, on voit que

$$\frac{(-1)^{i+j}\, M^{ij}}{(X_i^1\, X_j^2)} = \frac{(-1)^{i'+j'}\, M^{i'j'}}{(X_{i'}^1\, X_{j'}^2)}$$

où

$$M^{ij} \equiv \frac{\partial(f_1, \ldots f_{n-2})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_{j-1}\, x_{j+1} \ldots x_n)}$$

avec $i < j$.

Remarquons en passant que Lie n'indique pas ce que devient ici le principe du dernier -multiplicateur.

7. *Définition du multiplicateur de Jacobi généralisé.* — Cherchons d'abord à quelles équations satisfait le multiplicateur M formé par S. Lie (n.° 6). Pour fixer encore les idées, considérons le cas où $r = 3$. On a alors

$$M \equiv \frac{(-1)^{i+j+k}\, M^{ijk}}{(X_i^1\, X_j^2\, X_k^3)} \qquad (i < j < k).$$

Posons encore

$$(-1)^{i+j+k}\, M^{ijk} \equiv (M^{ijk})$$
$$(X_i^1\, X_j^2\, X_k^3) \equiv \lambda_{ijk}.$$

On a (E, n.° 39):

$$A_\rho(M^{ijk}) = \sum_1^n {}_l \left[-\frac{\partial X_l^\rho}{\partial x_l}(M^{ijk}) + \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_l}(M^{ljk}) + \frac{\partial X_j^\rho}{\partial x_l}(M^{ilk}) + \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_l}(M^{ijl}) \right]$$

avec $M^{ljk} \equiv -M^{jlk}$, quand $l > j$, etc.

On trouve d'autre part

$$A_\rho\, \lambda_{ijk} = \sum_1^n {}_l \left[\frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_l}\lambda_{ljk} + \frac{\partial X_j^\rho}{\partial x_l}\lambda_{ilk} + \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_l}\lambda_{ijl} \right] + \lambda_{ijk} \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma}.$$

D'où $A_\rho \dfrac{(M^{ijk})}{\lambda_{ijk}}$; après quelques réductions on obtient l'équation cherchée:

$$A_\rho M = -M \left[\sum_1^n {}_l \frac{\partial X_l^\rho}{\partial x_l} + \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma} \right]. \tag{8}$$

Nous dirons que *toute solution* M *des équation* (8) *est un multiplicateur de Jacobi généralisé du système complet* (6).

Dans un autre travail [1], je me propose d'étudier à fond le système (8).

[1] Ce travail a paru depuis dans les Bulletin de l'Académie R. de Belgique. (Classe des Sciences, octobre 1908).

II.

Solutions aux variations.

8. *Théorème.* — Pour que

$$\left\{\begin{aligned} Xf &\equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l = 0 \\ \xi f &\equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} \xi_l = 0 \end{aligned}\right.$$

forment un système *jacobien*, il faut et il suffit que $\xi_1 \ldots \xi_n$ forment *une solution aux variations* de $Xf = 0$ (E, n.° 35).

La transformation ξf a été l'objet, en ces derniers temps, de plusieurs Notes à l'Académie des Sciences de Paris [1]; grâce à la théorie des Invariants intégraux on retrouvera aisément le résultat suivant: La solution aux variations la plus générale du système $\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$ dépend de n fonctions arbitraires. En effet, des n invariants distincts de ce système, on déduit les n solutions aux variations

$$\xi_i^{(k)} \equiv \frac{(-1)^i \dfrac{\partial(f_1 \ldots f_{k-1} f_{k+1} \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)}}{\dfrac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}} \qquad (k = 1 \ldots n).$$

Celles-ci satisfont à (E, n.° 16):

$$\frac{dx_i}{X_i} = dt = \frac{d\xi_i}{\sum_1^n l \dfrac{\partial X_i}{\partial x_l} \xi_l} \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Donc la solution la plus générale sera

$$\xi_i = \sum_1^n {}_l a_l \xi_i^{(l)},$$

où les a_l sont n fonctions arbitraires des invariants $f_1 \ldots f_n$.

[1] *Sur les fonctions adjointes de M. Buhl*, par Popovici (C. R. 4 novembre 1907). — *Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles*, par Buhl (C. R. 9 décembre 1907). — *Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes*, par Saltykow (C. R. 16 décembre 1907).

9. M. Schiff [1] s'est proposé la recherche de n fonctions $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ telles que, si ϱ_1 et ϱ_2 sont deux invariants de

$$Xf \equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l = 0,$$

$$\theta \equiv \frac{\sum_1^n {}_l \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_l} \lambda_l}{\sum_1^n {}_l \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_l} \lambda_l}$$

soit aussi un invariant de ce système.

En prenant pour λ_l une solution aux variations, ξ_l par exemple, puis $\varepsilon \xi_l$ où ε est une fonction quelconque; puis en tenant compte de ce que ϱ_1 et ϱ_2 sont des invariants, on trouve qu'il faut et qu'il suffit qu'on ait:

$$X\lambda_k = \sum_1^n {}_l \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \lambda_l + \gamma \lambda_k + \beta X_k$$

où γ et β sont deux fonctions arbitraires; autrement dit, il faut et il suffit que

$$\left\{ \begin{aligned} Xf &\equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} X_l \\ \lambda f &\equiv \sum_1^n {}_l \frac{\partial f}{\partial x_l} \lambda_l \end{aligned} \right.$$

forment un système *complet*.

En généralisant son problème, M. Schiff a cherché à quelles équations satisfont les λ'_{ik} pour que

$$\theta \equiv \frac{\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_k \lambda_{ik} \frac{\partial(\varrho_1\, \varrho_2)}{\partial(x_i\, x_k)}}{\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_k \lambda_{ik} \frac{\partial(\varrho_2\, \varrho_3)}{\partial(x_i\, x_k)}}, \quad \text{avec } \lambda_{ik} = -\lambda_{ki},$$

soit un invariant, sachant que $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sont des invariants. Comme précédemment on trouvera presque immédiatement, grâce à la théorie des solutions aux variations 2-uples, que

$$X\lambda_{ik} = \sum_1^n {}_l \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_l} \lambda_{lk} + \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \lambda_{il} \right] + \gamma\, \lambda_{ik} + \beta_i\, X_k - \beta_k\, X_i,$$

où β_i, γ sont $n+1$ fonctions arbitraires.

[1] *Invariants intégraux et coefficients intégraux* (en russe). Université de Moscou.

III.

Formes différentielles m-linéaires.

10. En étudiant les intéressants Mémoires de M. E. Pascal sur l'invariance relative aux formes différentielles m-linéaires, j'ai été amené à considérer des déterminants (¹) ayant plus de deux dimensions attachés à ces formes. Considérons, par exemple, la forme différentielle $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}\sum_{k} a_{ijk}\, d_1 x_i\ d_2 x_j\ d_3 x_k$, et un déterminant à trois dimensions formé avec des coefficients a_{ijk} et que nous écrirons:

$$(ii', jj', kk') \equiv \left| \begin{matrix} a_{ijk} & a_{ij'k} \\ a_{i'jk} & a_{i'j'k} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{ijk'} & a_{ij'k'} \\ a_{i'jk'} & a_{i'j'k'} \end{matrix} \right| .$$

Soit

$$\frac{\delta x_1}{X_1} = \cdots = \frac{\delta x_n}{X_n} = \delta t$$

une transformation infinitésimale engendrant une transformation ponctuelle quelconque. J'ai établi la formule:

$$\frac{\delta}{\delta t}(ii', jj', kk') = -\sum_{\rho=1}^{n} \left[\frac{\partial X_\rho}{\partial x_i}(\rho i', jj', kk') + \cdots + \frac{\partial X_\rho}{\partial x_{k'}}(ii', jj', k\rho) \right],$$

entre les crochets [ ] il y a six termes, dont deux seulement ont été transcrits. Cette formule permettra de calculer aisément la variation $\frac{\delta}{\delta t}$ du déterminant à m dimensions formé avec tous les coefficients d'une forme différentielle m- linéaire, ainsi que des mineurs de diverses classes qu'on peut prendre dans ce déterminant. Le cas où m est impair conduit à des résultats compliqués; cela provient de ce qu'un déterminant ayant un nombre impair de dimensions ne s'annule pas quand deux tranches d'indices *fixes* sont identiques. Le cas où m est pair conduit au contraire à des résultats simples et à des cogrédiences importantes. Or ces cogrédiences sont précisément celles que j'ai obtenues (²) et utilisées en généralisant certains résultats obtenus par M. Volterra dans ses recherches sur les fonctions d'hyperespaces.

(¹) *Sur les formes différentielles m-linéaires* (Rendiconti Accad. Lincei, Roma, vol. XVI, 1° sem., ser. 5ª, 1907).

(²) *Sur les fonctions de Volterra et les Invariants intégraux* (Bull. Ac. R. de Belgique. Cl. des Sciences, 1906).

La notation symbolique utilisée au n.° 6 de ce Mémoire est donc équivalente à celle des déterminants à m dimensions quand m est pair. Au contraire, si m est impair, cette notation conduit à des résultats identiquement nuls. Pour s'expliquer cette différence, il suffira de remarquer que cette notation symbolique revient à écrire n ! fois le même déterminant quand m est pair; au contraire, si m est impair, cela revient à écrire n ! déterminants égaux deux à deux, mais de signes contraires, d'où une somme algébrique identiquement nulle. Dans la question présente, l'écriture et le mode de calcul me paraissent encore plus simples en utilisant la notation symbolique exposée dans mon travail sur les fonctions de VOLTERRA.

E. PASCAL

SULLA NUOVA TEORIA DELLE FORME DIFFERENZIALI DI ORDINE E GRADO QUALUNQUE

Lo scopo di questa mia Comunicazione è di richiamare l'attenzione dei matematici sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque, che io sono andato formando in questi ultimi anni, come estensione dell'antica teoria delle forme pfaffiane e di quella delle forme differenziali quadratiche.

Tutti i più brillanti risultati nel campo di queste due particolari teorie al cui sviluppo sono legati i nomi dei maggiori analisti del secolo scorso, PFAFF, JACOBI, GRASSMANN, RIEMANN, CLEBSCH, LIE, LIPSCHITZ, FROBENIUS, CHRISTOFFEL, BELTRAMI, etc., non sono che i casi più semplici e più ovvii di risultati, rimasti finora inosservati, assai più generali, e di una natura molto più ampia; e la teoria generale di cui vi parlo, per quanto a prima vista possa apparire irta di difficoltà, per la complicazione delle formule cui sembra dar luogo, pure, con opportuni artifizii e congegni, è capace di perdere ogni eccessiva complicazione, e di acquistare quella simmetria e quella eleganza, che sono le doti in omaggio alle quali io mi permetto di domandare ospitalità anche per questa nuova teoria fra i capitoli dell'Analisi moderna.

***

Una forma differenziale di ordine qualunque r e di 1° grado è un'espressione formata come il differenziale di ordine r di una funzione f di più variabili dipendenti $x_1 \dots x_n$, sostituendo in ciascun termine al posto delle derivate di f, delle funzioni qualunque delle variabili.

La prima questione quindi che si presenta è quella di determinare la forma del differenziale r^{mo} di una funzione, e di studiarne la costruzione dei varii termini. Un breve esame fa subito vedere che un tale differenziale può rappresentarsi come una somma di prodotti di tutte le derivate parziali della funzione sino all'ordine r, per certe caratteristiche espressioni differenziali, somme di prodotti dei differenziali delle variabili, che rappresento col simbolo $\delta^{(r)}_{j_1,..j_m}$, essendo $j_1, \dots j_m$ gli indici delle variabili x che entrano a formare la δ. Lo studio delle proprietà di queste δ diventa dunque lo studio preliminare da fare nella teoria che ci occupa.

Di queste può farsi la costruzione definitiva determinando anche la formola generale per i coefficienti numerici che entrano nella loro espressione; ma anche indipendentemente da ciò possono dimostrarsi per queste δ alcune proprietà fondamentali e cioè:

1° che esse si trasformano linearmente colla trasformazione generale delle variabili;

2° che il loro differenziale si esprime per le δ medesime;

3° che operando su di una δ una trasformazione infinitesima si ha una combinazione lineare delle δ stesse;

4° che ogni δ può comporsi in un modo speciale mediante una combinazione quadratica di altre δ;

5° che la somma di tutte le δ ad una sola variabile, da quella di ordine 1 a quella di ordine r, non è altro che il quoziente del differenziale r^{mo} dell'esponenziale per l'esponenziale stesso; etc. etc.

***

Una forma differenziale di grado k è un'espressione omogenea k-lineare nelle δ di k determinati ordini fissi, $r_1, \ldots r_k$; la somma di tutti questi ordini è l'ordine della forma.

I coefficienti di questa, variando da termine a termine, possono rappresentarsi con dei simboli dipendenti da k *gruppi* di indici e formano un sistema di funzioni a k gruppi di indici, che può considerarsi una generalizzazione degli ordinari sistemi covarianti del *Calcolo differenziale assoluto*, cui si riduce quando ognuno dei k gruppi di indici risulti in particolare di *un* indice solo; lo chiameremo perciò un *sistema covariante in senso esteso. Una forma differenziale così generale di grado k, si trasforma, colla generale trasformazione delle variabili, precisamente come il prodotto di k forme differenziali di ordini superiori, ma di 1° grado, cioè lineari nelle δ*, e può quindi rappresentarsi come il prodotto simbolico di k forme lineari.

Nello studio delle forme differenziali di una determinata specie, si incontrano sempre certe espressioni formate mediante i coefficienti della forma stessa, che sono come il perno di tutta la teoria. Nel semplicissimo caso delle forme pfaffiane tali formazioni si riducono a quei noti binomii dati dalle differenze delle derivate dei coefficienti, scelte con certi convenienti scambii di indici, e nel caso delle forme differenziali quadratiche le formazioni di cui si parla sono quelle rappresentate dal simbolo di CHRISTOFFEL e di cui è ben nota l'importanza per ogni problema che a quelle forme si riferisca.

Ora queste due disparate formazioni hanno un'origine comune, derivano da una comune sorgente, la quale è assai più semplice di quanto non possa credersi sul principio, e si presenta dotata di proprietà generali fra le più eleganti.

La costruzione di una tale espressione fondamentale che risulta come il perno di tutta la teoria delle forme differenziali, si fa nel modo più semplice e generale introducendo una operazione che io chiamo *operazione del dedurre* e che è una operazione di *carattere covariante*.

Questa operazione consiste in ciò: dato un sistema di funzioni dipendenti da k gruppi di indici, la *dedotta* di una di queste funzioni in rapporto ad un determinato indice ω, si ottiene derivando la funzione stessa rispetto ad x_ω, e da questa derivata sottraendo le altre k funzioni i cui gruppi di indici sieno quelli della data ma separatamente e consecutivamente ampliati dell'indice ω.

Questa operazione si applica ad una somma o ad un prodotto colle stesse regole della derivazione.

Ripetendo q volte di seguito questa medesima operazione in rapporto a q diversi indici, si ha un'espressione dipendente da $k+1$ gruppi di indici, e che è appunto la *formazione fondamentale*, o, come impropriamente diremo, il *simbolo fondamentale* di tutta la teoria delle forme differenziali.

Questi simboli fondamentali formano un sistema di funzioni a $k+1$ gruppi di indici, che colla trasformazione delle variabili, si trasformano come si trasformano i coefficienti della forma; essi costituiscono cioè un *sistema covariante*, ed è a cagione di questa proprietà che le *dedotte* si possono anche chiamare *dedotte covarianti*.

Se di questo sistema, considerandolo come a $k+1$ gruppi di indici, formiamo a sua volta il sistema dedotto, otteniamo un sistema identicamente zero; così resta chiusa la serie dei sistemi dedotti da un dato.

Considerando il caso di $k=1$ cioè delle forme differenziali di ordine qualunque ma di 1° grado, la somma o la differenza di due dedotte che non differiscano fra loro se non per lo scambio dei due gruppi di indici, sono i cosidetti *simboli principali*, che sono da distinguersi in quelli di 1ª e di 2ª specie, secondochè nella loro costruzione entrano solo derivate dei coefficienti della forma, ovvero, oltre le derivate, anche cofficienti stessi non sottoposti a derivazioni.

I simboli di CHRISTOFFEL non sono altro che casi molto particolari di questi *simboli principali* da me introdotti, e mediante questi si esprimono anche i ben noti *simboli di* RIEMANN che hanno, come si sa, tanta importanza nella teoria delle forme differenziali quadratiche.

Su questi *simboli principali* possono dimostrarsi alcune proprietà fondamentali, e cioè p. es. che la derivata di un simbolo di 1ª o di 2ª specie è uguale sempre alla somma di due simboli rispettivamente di 2ª o di 1ª specie (proprietà che contiene, come caso particolare, una nota proprietà dei *simboli di* CHRISTOFFEL); che ogni simbolo di 1ª specie può sempre esprimersi con una combinazione lineare di derivate di simboli di 2ª specie; e finalmente che *le matrici formate, con una legge ben facile, con questi simboli principali, hanno caratteristica invariante per ogni trasformazione di variabili*, proprietà che contiene come particolare una singolare proprietà, finora non da altri osservata, dei *simboli di* CHRISTOFFEL, e cioè che la matrice formata con essi e con i coefficienti della forma differenziale quadratica in modo opportuno disposti, ha caratteristica invariante per ogni trasformazione di variabili.

Di qui si deduce intanto che per l'*equivalenza* di due forme differenziali generali è condizione necessaria la eguaglianza delle caratteristiche delle due matrici i cui elementi sieno i simboli principali costruiti coi cofficienti dell'una o dell'altra.

Ma la considerazione di queste matrici a caratteristica invariante non ha carattere di cosa accidentale; vedremo di qui a poco che essa si presenta in tutti i problemi sulle forme differenziali e ne investe tutta la teoria, dando a molti risultati un aspetto singolarmente semplice.

Si può studiare il cangiamento che subiscono le caratteristiche delle medesime matrici quando la forma fondamentale si moltiplichi per un fattore ovvero quando ad essa si aggiunga un differenziale esatto, e si ha così l'estensione di teoremi che Frobenius trovò già da molto tempo per le comuni forme pfaffiane; e si può poi anche studiare un'altra classe di matrici a caratteristica invariante e che è quella formata cogli elementi di un sistema covariante nel senso esteso, e in particolare con quelle formazioni che abbiamo chiamato le *dedotte* di un sistema covariante. Particolarizzando in altra direzione si ha così anche un curioso teorema sulle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante nel senso antico e ristretto del *Calcolo differenziale assoluto*.

***

Passando ora allo studio dei covarianti della forma differenziale si presentano, prima di tutte, quelle forme differenziali i cui coefficienti sono precisamente le *dedotte covarianti* del sistema dei coefficienti della forma data. È notevole la formola semplice cui soddisfano i differenziali di queste espressioni, e cioè: *il differenziale di una di esse, dipendente da $k+1$ gruppi di indici, si esprime per la somma di $k+1$ altre di esse medesime.*

Sono poi da considerarsi quegli invarianti e covarianti che sono simultanei per la forma differenziale data e per il primo membro di un'equazione alle derivate parziali omogenea di ordine e grado qualunque, e in particolare per la forma data e per il simbolo di una ordinaria trasformazione infinitesima.

Si ha così una classe di covarianti che intervengono nella formola che dà il *risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma differenziale, risultato che si dimostra, essere a sua volta un'altra forma differenziale dello stesso tipo di quella da cui si parte.*

Ciò posto, vien naturale di introdurre il concetto delle *trasformazioni infinitesime appartenenti ad una forma differenziale*, ovvero all'equazione ottenuta eguagliando a zero la forma stessa; le trasformazioni cioè che, applicate alla forma, dànno per risultato zero, ovvero riproducono la forma medesima moltiplicata per un fattore.

Questa ricerca è necessaria per la soluzione di uno dei principali problemi della teoria che ci occupa, l'estensione cioè del *problema di riduzione di* Pfaff; e il risultato che si trova è fra i più semplici e stabilisce un legame con altre ricerche già fatte dianzi; si trova cioè che *la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di siffatte trasformazioni infinitesime, aventi poi eguali a zero certi covarianti e invarianti simultanei di esse e della forma, è data semplicemente dall'annullarsi di una di quelle matrici a caratteristiche invarianti di cui si è parlato di sopra, cioè dall'avere una di quelle matrici una caratteristica minore della massima.*

E allo stesso risultato si giunge se ci si propone il *problema di riduzione.*

Come estensione di un problema celebre della ordinaria teoria delle equazioni pfaffiane, problema cui sono legati i nomi di Pfaff e di Jacobi, noi possiamo proporci la quistione dell'esistenza e della determinazione di trasformazioni finite delle variabili per le quali la forma differenziale data di ordine qualunque, si trasformi, a meno di un fattore, in una con una o più variabili di meno; si trova che *le condizioni per l'esistenza di siffatte trasformazioni finite coincidono con quelle per l'esistenza di trasformazioni infinitesime appartenenti alla forma data e quindi si riducono in ultima analisi, a ciò: che una di quelle matrici a caratteristica invariante abbia caratteristica minore della massima*; e di tante unità possiamo diminuire il numero delle variabili, nella forma data, di quante unità è composta la differenza fra la massima caratteristica che quella matrice potrebbe avere e quella che effettivamente essa ha. Così resta risoluto, nel modo più generale e nello stesso tempo più semplice, il problema di riduzione, che a prima vista sembrerebbe irto di difficoltà e di non poche complicazioni.

***

Un altro problema della teorica dei sistemi di forme differenziali, è quello della *completa integrabilità* delle equazioni ottenute eguagliando a zero quelle forme. Nel caso semplice delle forme di 1° ordine (forme pfaffiane) è ben noto che la condizione necessaria e sufficiente per tale completa integrabilità è che le equazioni ammettano le trasformazioni infinitesime del proprio sistema aggiunto. Ma per il caso generale il sistema aggiunto non è formato di equazioni solo di 1° ordine, ma anche di equazioni a derivate parziali di ordine superiore; per estendere il teorema in tutta la sua integrità bisognerà quindi considerare, oltre che delle operazioni di 1° ordine (trasformazioni infinitesimali), anche delle operazioni di ordine superiore.

E ciò infatti può farsi e, limitandomi per semplicità al solo caso del secondo ordine, io ho mostrato come può generalizzarsi il teorema surriferito, conservandosi inalterato di forma.

Che se poi ci basti limitarci ad una condizione solamente necessaria per la completa integrabilità e trascurare la seconda parte del teorema, allora ci basterà limitare le nostre considerazioni alle solite trasformazioni infinitesimali (operazioni di 1° ordine), e si può facilmente mostrare, come io già feci, che *ogni sistema completamente integrabile di equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque, ammetterà sempre tutte le trasformazioni infinitesime del proprio sistema aggiunto*; ma questa proprietà non rappresenta naturalmente una condizione sufficiente.

Gli studî sulla completa integrabilità conducono naturalmente a quelli sulla riducibilità delle forme a tipi speciali, e qui il campo si presenta molto vario ed esteso e parecchi semplici risultati ho ottenuti per il caso delle forme di 2° ordine. Intervengono ancora un'altra volta quelle matrici a caratteristica invariante che ci si sono presentate già all'inizio dei nostri studii, e si trova che, fissando in modo particolare le caratteristiche di tali matrici, cioè ponendo che queste abbiano caratteristica 1 o 2, ecc., si hanno sotto un aspetto perfettamente simmetrico, le condizioni perchè la forma differenziale sia riducibile ad alcuni speciali tipi, fra i quali è anche compreso quello che corrisponde alla completa integrabilità.

***

Ecco per sommi capi riassunto lo stato attuale della teoria delle forme differenziali di ordine superiore, alla cui formazione io mi lusingo d'aver in qualche modo cooperato.

Io non so se è per un sentimento simile a quello dell'amor paterno, ma a me pare di vedere che questo nuovo capitolo dell'Analisi sia destinato ad un avvenire. Beninteso però che questo avvenire potrebbe anche non essere tanto prossimo; ed in matematica, come sapete, non è lecito essere impazienti.

C. STÉPHANOS

SUR UNE EXTENSION DE LA THÉORIE DES COVARIANTS DES FORMES ALGÉBRIQUES

1. Dans plusieurs problèmes d'analyse on a à considérer les propriétés communes à une fonction donnée $f(x)$ et aux fonctions ayant pour expression générale

$$(1) \qquad y = (\gamma x + \delta)^m f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

où m désigne un nombre donné *quelconque*.

Il en est ainsi, par exemple, dans le cas où $f(x)$ est un polynôme entier de degré m. Il s'agit alors de l'examen des propriétés invariantives de la forme binaire $x_2^m f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$.

On peut dire que les fonctions définies par la formule (1) précédente sont *équivalentes* à la fonction $f(x)$, considérée comme étant *d'ordre* m.

2. Dans l'étude des propriétés communes aux fonctions équivalentes à une fonction $y = f(x)$ donnée, on a besoin de considérer des fonctions

$$\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$$

de x, y et des dérivées successives $y', y'', \ldots$ de y par rapport a x, ayant la propriété caractéristique que si l'on pose:

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \eta = (\gamma\xi + \delta)^m f\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right), \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

et que l'on désigne par $\eta', \eta'', \ldots$ les dérivées de η par rapport à ξ, on ait une identité de la forme:

$$(2) \qquad \sigma(\xi, \eta, \eta', \eta'', \ldots) = \Delta^p (\gamma\xi + \delta)^n \sigma(x, y, y', y'', \ldots),$$

quels que soient $x, y, y', y'', \ldots$, lorsqu'on remplace les $\xi, \eta, \eta', \eta'', \ldots$ par leurs valeurs en fonction de $x, y, y', y'', \ldots$

On peut appeler les fonctions $\sigma(x, y, y', y'', \ldots)$, ayant cette propriété, *covariants* de la fonction donnée $y = f(x)$, supposée d'ordre m.

Il est clair que si $\sigma(x, y, y', y''...)$ désigne un covariant de la fonction y d'ordre m et que $y=f(x)$ constitue une solution de l'équation différentielle $\sigma(x, y, y', y'', \dots)=0$, toutes les fonctions équivalentes à $y=f(x)$ satisferont aussi à la même équation différentielle.

Pour qu'une fonction $\sigma(x, y, y', y'', \dots)$ constitue un covariant de la fonction $y=f(x)$, supposée d'ordre m, tel que l'on ait l'identité (2), il faut et il suffit qu'elle ait les propriétés suivantes:

1°) qu'elle ne contienne pas x;

2°) qu'elle soit *isobare* et de *poids* p par rapport aux $y, y', y'', \dots$, supposés comme ayant des poids égaux à $0, 1, 2, \dots$;

3°) qu'elle soit homogène et de degré $g=\dfrac{2p+n}{m}$ par rapport aux $y, y', y'', \dots$;

4°) qu'elle satisfasse à l'équation différentielle $\delta\sigma=0$, où

$$\delta = my\frac{\partial}{\partial y'} + 2(m-1)\,y'\frac{\partial}{\partial y''} + \cdots + k(m-k+1)\,y^{(k-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} + \cdots$$

Le nombre $n=gm-2p$, peut être appelé *ordre* du covariant considéré.

3. Dans le cas où $m+1$ est un nombre entier positif, la derivée $y^{(m+1)}$ est un covariant de y, d'ordre $-m-2$. C'est seulement dans ce cas qu'une dérivée $y^{(k)}$ peut être un covariant de y.

Cette propriété équivaut à la proposition suivante:

L'équation

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \mathrm{F}(x) \tag{3}$$

peut être transformée en une équation de la même forme

$$\frac{d^{m+1}\eta}{d\xi^{m+1}} = \Phi(\xi)$$

par le moyen de la substitution:

$$x = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\,,\quad y = (\gamma\xi+\delta)^m\,\eta.$$

La nouvelle fonction $\Phi(\xi)$ a alors pour valeur

$$\Phi(\xi) = \Delta^{m+1}(\gamma\xi+\delta)^{-m-2}\,\mathrm{F}\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right).$$

On peut du reste démontrer, pour le cas où $m>0$, que réciproquement: pour qu'une substitution telle que

$$x = u(\xi)\;,\;\; y = v(\xi)\,\eta$$

transforme l'équation (3) en une autre de la même forme, on doit avoir

$$u(\xi) = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\,, \quad v(\xi) = (\gamma\xi + \delta)^m\,.$$

4. Comme exemple de covariant d'une fonction d'ordre m citons le premier membre de l'équation différentielle d'ordre $k+1$ obtenue par l'élimination des constantes $A, a_1, a_2, \ldots, a_k$ de l'équation:

$$y = A(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_k)^{m_k}\,.$$

(On a ici $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$).

Dans le cas le plus simple où $k = 1$ on a le covariant

$$myy'' - (m-1)\,y'^2\,.$$

Dans le cas où k est égal à 2 ou 3, on a des covariants plus compliqués que l'on peut calculer sans trop de difficulté. Pourtant pour $k > 3$ le calcul du covariant en question devient assez difficile, se ramenant au problème de l'élimination des k variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ entre $k+1$ équations de la forme:

$$\begin{aligned}
m_1 x_1 &+ m_2 x_2 + \cdots + m_k x_k = C_1\,,\\
m_1 x_1^2 &+ m_2 x_2^2 + \cdots + m_k x_k^2 = C_2\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_1 x_1^{k+1} &+ m_2 x_2^{k+1} + \cdots + m_k x_k^{k+1} = C_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Dans le cas où certains des nombres m_i sont égaux entre eux le résultat se simplifie. Aussi p. e. dans le cas où $m_1 = m_2 = \cdots = m_k$, le covariant en question est égal à $\left(y^{\frac{1}{m_1}}\right)^{(k+1)}$, sauf un facteur puissance de y.

5. La théorie des covariants d'une fonction $f(x)$ d'ordre m est en plusieurs points analogue à la théorie des covariants des formes binaires, dont plusieurs procédés peuvent ici être appliqués avec fruit.

Pour se rendre compte comment la théorie des covariants des formes binaires ne constitue qu'un cas particulier de la théorie qui nous occupe, il suffit de se rappeler que, d'après M. Hilbert, tout covariant $x_2^{\mu}\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ d'une forme binaire $x_2^m\,f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ de degré m, est tel que le polynôme $\varphi(x)$ peut être exprimé en fonction entière $\sigma(y, y', y'', \ldots)$ de y et de ses dérivées, la fonction $\sigma(y, y', y'', \ldots)$ étant non seulement homogène et isobare, mais aussi satisfaisant à l'équation différentielle $\delta\sigma = 0$.

6. De même que dans la théorie des formes binaires, on peut considérer ici des covariants simultanés de plusieurs fonctions $y_1, y_2, \ldots$ d'ordres respectifs $m_1, m_2, \ldots$ Les plus simples des covariants simultanés de deux fonctions correspondent aux *Ueberschiebungen* de la théorie des formes binaires.

Comme exemple de covariant simultané de plusieurs fonctions $y_1, y_2, \ldots y_k$, d'ordres respectifs $m_1, m_2, \ldots m_k$, citons la derivée $(m+1)^{\text{ème}}$ de la fonction $y = y_1^{n_1} \cdot y_2^{n_2} \ldots y_k^{n_k}$, dans le cas où la somme $m = \Sigma m_i n_i$ est un nombre entier $\geqq 0$.

7. De même que dans la théorie des formes binaires, on peut réprésenter une fonction d'ordre m et ses dérivées par des expressions symboliques telles que:

$$\begin{aligned} y &= a_x^m , \\ y' &= m\, a_1\, a_x^{m-1} , \\ y'' &= m(m-1)\, a_1^2\, a_x^{m-2} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

étant posé

$$a_x = a_1 x + a_2 .$$

On peut aussi considérer les polaires successives $a_x^{m-1} a_y$, $a_x^{m-2} a_y^2, \ldots$ d'une fonction $y = a_x^m$.

La notion de la polaire d'ordre k:

$$a_x^{m-k}\, a_y^k$$

peut même être étendue d'une manière tout naturelle au cas où k est un nombre quelconque.

De même que dans la théorie des formes binaires, la $k^{\text{ième}}$ *Ueberschiebung* de deux fonctions

$$y_1 = a_x^{m_1} \ , \ y_2 = b_x^{m_2}$$

peut être représentée par la formule

$$(y_1 , y_2)_k = (ab)^k\, a_x^{m_1-k}\, b_x^{m_2-k} ,$$

où

$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 b_x - b_1 a_x .$$

Le même procédé symbolique peut être appliqué à la représentation des covariants d'une fonction $y = a_x^m = a_x'^m = a_x''^m = \cdots$

Ainsi par exemple on aura

$$(y , y)_{2k} = (aa')^{2k}\, a_x^{m-2k}\, a_x'^{m-2k} .$$

Comme exemple de représentation symbolique d'un covariant d'une fonction de degré m, citons le covariant

$$(aa')^2 (aa'')^2 \ldots (aa^{(k)})^2 (a'a'')^2 \ldots (a^{(k-1)} a^{(k)})^2\, a_x^{m-2k}\, a_x'^{m-2k} \ldots a_x^{(k)m-2k} ,$$

dont l'évanouissement identique exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $y = a_x^m$ soit exprimable par une formule telle que:

$$y = A_1(x - a_1)^m + A_2(x - a_2)^m + \cdots + A_k(x - a_k)^m . \tag{4}$$

Ce covariant coincide avec le résultat de l'élimination des $2k$ constantes A_i et a_i entre l'équation (4) et les $2k$ équations qu'on en déduit par $2k$ dérivations successives.

8. Les expressions

$$\sigma(y\,,y'\,,y''\,,\dots)\,,$$

ayant non seulement la propriété d'homogénéité et d'isobarie, mais aussi celle de satisfaire à l'équation différentielle $\delta\sigma = 0$, conduisent, dans le cas où l'on suppose que m tend vers l'infini, à des expressions satisfaisant à l'équation différentielle

$$y\frac{\partial\sigma}{\partial y'} + 2y'\frac{\partial\sigma}{\partial y''} + \cdots + ky^{(k-1)}\frac{\partial\sigma}{\partial y^{(k)}} + \cdots = 0\,.$$

Les expressions $\sigma(y\,,y'\,,y''\,,\dots)$ obtenues de cette manière sont telles que si l'on pose

$$\eta = e^{\gamma\xi+\delta} f(\alpha\xi + \beta)\,,$$

et que l'on désigne par $\eta'\,,\eta''\,,\dots$ les dérivées de η par rapport à ξ on a l'identité

$$\sigma(\eta\,,\eta'\,,\eta''\,,\dots) = \alpha^{\rho}\left[e^{\gamma\xi+\delta}\right]^{g}\sigma(y\,,y'\,,y''\,,\dots)\,.$$

La fonction $f(x)$ dans ce cas, doit être considérée d'ordre infini et peut être représentée symboliquement par e^{ax}.

R. de MONTESSUS

SUR LES RELATIONS DE RÉCURRENCE À TROIS TERMES

L'Auteur expose les progrès récents de la théorie de la convergence des fractions continues algébriques. Il insiste sur ce fait que la théorie de la convergence est plus avancée que la pratique du développement.

Les recherches doivent plutôt se porter désormais sur la question du développement d'une fonction donnée en fraction continue.

G. PUCCIANO

CONTRIBUTO ALLA CRITICA DI ALCUNE QUESTIONI CHE SI RIATTACCANO ALL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI LAPLACE

§ 1.

Ho l'onore di richiamare l'attenzione degli scienziati sovra una mia ricerca per ridurre al minimo le condizioni d'integrabilità dell'equazione differenziale di Poisson a due variabili

$$\Delta_2 u = h(xy) \quad (^1).$$

Ottenni il seguente risultato generale, cui accennai in una Nota (²), della quale curai privatamente la stampa. Il principio, che dimostro, in forma sintetica, è:

« Le condizioni sufficienti per l'esistenza dell'integrale dell'equazione differenziale alle derivate parziali del 1° ordine

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = h(xy) \,,$$

sono anche sufficienti per l'esistenza dell'integrale dell'equazione differenziale di Poisson

$$\Delta_2 u = h(xy) \,,$$

purchè sia in un intorno σ del punto $(x \,, y)$

$$v(xy) - v(x_0 y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$
$$v(xy) - v(xy_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y} dy \,,$$

(¹) Poisson, *Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des spheroides* (Nouveau Bulletin de la Société philomatique de Paris, t. III, pp. 388-392, 1813).

(²) *Indagine sul Potenziale Logaritmico e Newtoniano* (Messina, 1906).

e purchè, nello stesso intorno, esistano, siano uguali ed atte all'integrazione definita le

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ » } (^1).$$

Si noti la generalità delle condizioni suddette, le quali non impongono la continuità alla $h(xy)$: basta osservare il caso semplice, in cui sia

$$h(xy) = h_1(x) + h_2(y) \, ,$$

con $h_1(x)$ ed $h_2(y)$ integrabili, e soddisfacenti alle relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} h_1(x)\,dx\right) = h_1(x) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_0}^{y} h_2(y)\,dy\right) = h_2(y)$$

per verificare l'asserto (²).

Accenno ora alla dimostrazione del principio suesposto.

Rappresentando con a, b le coordinate dei punti dell'intorno σ di (x, y), con s il contorno di σ, e ponendo

$$r = +\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \, ,$$

$$\theta = \operatorname{arctang} \frac{b-y}{a-x} \, ,$$

$$\varphi(ab) = -\frac{1}{2\pi} v(ab) \, ,$$

si ha

$$\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{d\sigma}{r} = \int_s \varphi_s \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds - 2\pi \, . \, \varphi(xy)$$

ossia

$$(1) \quad \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\cos\theta}{r} d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} d\sigma = \int_s \varphi_s \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds - 2\pi \, . \, \varphi(xy) \, .$$

(¹) Peano (*Mathesis*, 1890, pag. 153) ha ridotto al minimo le condizioni di esistenza e di uguaglianza delle $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

(²) Delle ricerche sulla questione che studio sono state fatte da C. Neumann, *Ueber die Integration*, ecc. $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ (Giornale di Borchardt, t. 59, 1861); da Hölder, *Dissertation*, Tübingen, 1882; da A. Harnak, *Die Grundl. d. Theorie d. logar. Potentiales* (pag. 24, Leipzig, 1887); e da Morera, *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio* (Rend. R. Ist. Lombardo, vol. 20, 1887).

Esistono e sono finite le

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,.$$

Ciò si ricava applicando opportunamente la trasformazione di Gauss di un integrale di area in un integrale di contorno. Si dimostra poi che è

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,,$$

e con opportune trasformazioni, derivando la (1) rispetto ad x e ad y, si ricavano non solo l'esistenza delle

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,d\sigma$$

ma anche le relazioni finali

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a}\log\frac{1}{r}\,d\sigma$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_s \varphi_s \frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds + \frac{\partial}{dy}\int_s \frac{\partial\varphi_s}{\partial s}\log\frac{1}{r}\,ds - 2\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_{\substack{a=x\\ b=y}}$$

$$\text{(3)}\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\log\frac{1}{r}\,d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial b}\log\frac{1}{r}\,d\sigma$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_s \varphi_s \frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds - \frac{\partial}{\partial y}\int_s \frac{\partial\varphi_s}{\partial s}\log\frac{1}{r}\,ds - 2\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_{\substack{a=x\\ b=y}}$$

Osservando che θ e $\log\frac{1}{r}$ sono associate, si dimostra che anche

$$\int_s \frac{\partial\varphi_s}{\partial s}\log\frac{1}{r}\,ds \quad\text{e}\quad \int_s \varphi_s \frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds = \int_s \varphi_s\frac{\partial\theta}{\partial s}\,ds$$

sono associate, e perciò infine sommando le (2) e (3) si ricava

$$\Delta_2 \left[-\frac{1}{2\pi} \int_\sigma h(ab) \log \frac{1}{r} \, d\sigma \right] = h(xy) .$$

Così resta stabilito il principio enunciato.

§ 2.

Nella formula che rappresenta il teorema di GREEN nel piano

$$[s]_{(xy)} u(xy) = \int_s \left[u_{is} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{is} \log \frac{1}{r} \right] ds$$

compaiono le sole due successioni di valori u_{is} e $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{is}$. Il sig. A. LIAPOUNOFF osservava nel Giornale di Liouville, 1898, che l'ordinario processo dimostrativo del teorema di GREEN nello spazio fosse basato sull'ipotesi dell'esistenza dei limiti

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{is}, \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{is}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{is} \text{ e } \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{is} .$$

Con un ingegnoso metodo egli dimostrò allora che « l'armonicità della u, l'esistenza di $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{is}$ e la convergenza di $\frac{\partial u}{\partial n}$ a $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{is}$ uniformemente su tutte le normali fossero condizioni sufficienti per la validità del teorema di GREEN nello spazio ». In una Memoria, che sarà pubblicata nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, mi sono occupato dell'analoga questione nel piano. Mi onoro di riferire uno dei risultati che ho ottenuto, il quale può essere interpetrato come un teorema reciproco di quello di GREEN.

Sia dato in un piano un campo c, il cui contorno s sia formato da una o più linee continue, chiuse e non aventi un numero infinito di ondulazioni o di spire. Sia s' il contorno d'un campo c' semplicemente connesso esterno a c e sia σ la linea chiusa, appartenente ad s, la quale separa la regione del piano, di cui è parte c da quella di cui è parte c': la linea σ abbia in ogni punto tangente unica. Sia data una funzione g_s uniforme ed atta all'integrazione definita su s: la g_s inoltre, in ogni punto di σ, sia finita ed uguale alla semisomma delle derivate prime a destra ed a sinistra del suo integrale indefinito, e $g_\sigma . \theta$ sia integrabile per parti su σ.

Se il potenziale logaritmico di strato semplice

$$\int_s g_s \log \frac{1}{r} \, ds$$

è uguale, in ogni punto della linea s', al potenziale di strato doppio

$$\int_s m_s \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$

in cui m_s è uniforme ed atta all'integrazione definita su s, ed anche finita e continua in ogni punto di σ, allora la

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_s \left[m_s \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - g_s \log \frac{1}{r}\right] ds\right\}$$

è l'espressione analitica d'una funzione u, armonica nell'interno del campo c, la quale ha su σ i valori limiti m_σ, mentre la sua derivata normale, percorrendo le normali, ha in ogni punto di σ valori limiti $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{i\sigma}$ finiti ed uguali a g_σ.

Difatti, poichè la u è nulla in ogni punto di s' ed è armonica in c', dev'essere nulla in c' e quindi anche in tutta la regione del piano limitata da σ e contenente c'.

Per una nota proprietà del potenziale logaritmico di strato doppio, posto

$$w(xy) = \int_s m_s \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds ,$$

è

$$(w)_{i\sigma} - (w)_{e\sigma} = 2\pi m_\sigma ;$$

quindi, per la continuità del potenziale di strato semplice attraverso la s, la $u(xy)$ ha su σ i valori m_σ: ossia è $(u)_{i\sigma} = m_\sigma$.

D'altra parte è

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{e\sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial n}\int_s g_s \log \frac{1}{r} ds\right)_{e\sigma} .$$

Il Dirichlet dimostra l'esistenza del secondo membro dell'uguaglianza precedente quando sia g_s continua; in una Memoria, che pubblicai nei Rendiconti del Circolo di Palermo (*Studio sui potenziali* ecc., t. XXIII, 1907), dimostro l'esistenza del secondo membro nelle ipotesi enunciate nel teorema, quindi in tali ipotesi esiste anche la $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{i\sigma}$. Il sig. Liapounoff ha dimostrato nel Giornale di Liouville, 1898, che quando esiste la $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{es}$ esiste anche la $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{is}$ ed è uguale alla prima, purchè m_s sia finita e continua (a tale teorema il sig. E. R. Neumann credette di dare il nome dello scopritore); quindi possiamo affermare che esiste la $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{i\sigma}$.

D'altra parte, per quanto io dimostro nella Memoria citata, è

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\int_s g_s \log\frac{1}{r}\,ds\right)_{e\sigma} - \left(\frac{\partial}{\partial n}\int_s g_s \log\frac{1}{r}\,ds\right)_{i\sigma} = 2\pi g_\sigma,$$

quindi è anche

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{i\sigma} = g_\sigma .$$

A. CAPELLI

SUI COEFFICIENTI DEGLI SVILUPPI IN SERIE DI POTENZE DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE DI PIÙ VARIABILI

1. Nel decorso anno, prendendo occasione da un caso particolare considerato dal sig. Rossi [1], mi proposi di determinare l'effettiva espressione del coefficiente numerico di un termine qualunque dello sviluppo in serie di potenze che esprime la radice dell'equazione algebrica generale del grado n in funzione dei suoi coefficienti. Il risultato da me ottenuto e da me già fatto conoscere [2] si può riassumere brevemente come segue.

Sia z la funzione delle variabili indipendenti $p_0, p_1, \dots, p_n$ definita dall'equazione:

$$a_0 + p_0 + (a_1 + p_1) z + (a_2 + p_2) z^2 + \cdots + (a_n + p_n) z^n = 0$$

e precisamente quel ramo di tale funzione che per $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = 0$ assume il valore ω radice, semplice e finita, dell'equazione:

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0 .$$

Si ha per z lo sviluppo in serie di potenze delle $p_0, p_1, \dots, p_n$ convergente per valori abbastanza piccoli dei moduli delle $p_0, p_1, \dots, p_n$:

$$\text{(I)} \qquad z = \omega + \sum_{\alpha > 0} \frac{\underline{|\alpha}}{\underline{|\alpha_0}\,\underline{|\alpha_1} \dots \underline{|\alpha_n}} A_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} p_0^{\alpha_0}\, p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$$

dove

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n .$$

Il coefficiente generale $A_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ che è una funzione razionale delle $a_0, a_1, \dots, a_n$, si può porre a sua volta sotto la forma seguente:

$$\text{(II)} \qquad A_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} = \sum_{\lambda < \alpha} \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda_0}\,\underline{|\lambda_1} \dots \underline{|\lambda_n}} B_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n} a_0^{\lambda_0}\, a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n}$$

[1] Cfr. Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLIV, 1906, p. 282. La formola relativa a questo caso particolare è contenuta in un'altra, alquanto più generale, data da Amanzio nel Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli (luglio 1877).

[2] Cfr. Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Dicembre 1907.

dove

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

ed il coefficiente $B_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ ha il valore:

$$\text{(III)} \qquad B_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n} = (-1)^{\alpha+\lambda} \frac{\omega^{\beta+\mu-(\alpha+\lambda-1)}}{[\theta'(\omega)]^{\alpha+\lambda}} \binom{\beta+\mu}{\alpha+\lambda-1} \frac{(\alpha-\lambda)^{\overline{\alpha+\lambda}}}{(\alpha+\lambda) \underline{|\alpha} \underline{|\lambda}} \quad (^1)$$

essendo:

$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n \,, \quad \mu = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + n\lambda_n \,.$$

2. Vista la grande semplicità, assai superiore a quanto avrei creduto di poter presumere, della formola finale da me conseguita, ho stimato opportuno richiamare su di essa, in occasione del presente Congresso, l'attenzione dei matematici; e principalmente per due ragioni. La prima ragione sta nel fatto che questi risultati, comechè appartenenti al campo della pura analisi algebrica, sono stati da me ottenuti per via trascendente avvalendomi di quel potente mezzo di ricerca dovuto a Cauchy, fondato sull'uso degli integrali di variabile complessa a cammino curvilineo, che già tanti servigi ha reso, come è ben noto, anche nel campo della risoluzione delle equazioni algebriche. Mi sembra infatti assai desiderabile, una volta accertata l'esistenza di una formola finale così semplice, che possa ad altri riuscire di stabilirla per via puramente algebrica, senza l'intervento di mezzi analitici estranei all'indole puramente algebrica della questione, che *a priori* sembrano non dover essere, per ciò stesso, strettamente necessarî alla sua risoluzione.

La seconda ragione sta nel desiderio di mostrare l'utilità della conoscenza esatta dei coefficienti numerici dello sviluppo, con un'applicazione che mi sembra non priva d'interesse. È noto (²) che se lo sviluppo in serie

$$m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots$$

i cui coefficienti $m_0, m_1, m_2, \ldots$ siano numeri razionali, rappresenta una funzione algebrica della variabile x, i numeri primi distinti che si presentano come fattori nei denominatori dei coefficienti stessi ridotti alla loro più semplice espressione, *sono in numero finito.* Ora io mostrerò come la formola generale da me sopra citata possa servire, non solamente a dimostrare queste proprietà per serie procedenti secondo le potenze di una o più variabili indipendenti, ma altresì a precisare meglio i numeri primi che possono entrare effettivamente nei detti denominatori.

(¹) S'intende per brevità: $x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)$.

(²) Questo teorema, al quale va congiunta una certa limitazione dell'esponente della potenza con cui si può presentare uno stesso numero primo in ogni dato termine dello sviluppo, è stato dato da Eisenstein, senza dimostrazione, nei *Monatsberichte* dell'Accademia delle Scienze di Berlino (luglio 1852). Per quanto riguarda le dimostrazioni che ne furono poi date da Heine ed Hermite, veggasi Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1878, Bd. I, pag. 16.

I.

1. Sia

$$z = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_\nu} M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_\nu^{\mu_\nu} \tag{1}$$

uno sviluppo convergente per valori abbastanza piccoli dei moduli delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, i cui coefficienti $M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}$ sono tutti numeri razionali, qualunque sia il sistema di esponenti, interi, positivi o nulli, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$. Noi supponiamo che la funzione z delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ definita da questo sviluppo sia algebrica. Esisterà quindi un'equazione di un certo grado n in z:

$$f_0 z^n + f_1 z^{n-1} + \cdots + f_{n-1} z + f_n = 0 \tag{2}$$

i cui coefficienti sono funzioni intere delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ di certi gradi finiti, la quale è soddisfatta dall'espressione (1) di z, identicamente rispetto alle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Sia

$$f_i = \sum a^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\nu^{\alpha_\nu} \tag{3}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

l'espressione di $f_i (i = 0, 1, \ldots, n)$, essendo la Σ estesa a tutti quei sistemi di valori interi, positivi o nulli, delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ che soddisfano la condizione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \overline{\gtrless} g,$$

detto g il grado complessivo massimo delle $f_0, f_1, \ldots f_n$ nelle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Sostituendo nella (2) in luogo di z la sua espressione (1) ed ordinando il risultato secondo i monomii distinti delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, i coefficienti dei singoli monomii dovranno riuscire tutti nulli. Pertanto, detti brevemente $c_1, c_2, \ldots, c_m$ i coefficienti:

$$a^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \overline{\gtrless} g, \, i = 0, 1, \ldots, n)$$

scritti in un ordine qualunque, si avrà un numero infinito di relazioni lineari omogenee:

$$\begin{aligned} q_{11} c_1 + q_{12} c_2 + \cdots + q_{1m} c_m &= 0 \\ q_{21} c_1 + q_{22} c_2 + \cdots + q_{2m} c_m &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

fra le $c_1, c_2, \ldots, c_m$ i cui coefficienti saranno dei numeri tutti razionali, essendo per supposto razionali le $M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}$.

Delle relazioni (4) non ce ne possono essere di indipendenti che un numero finito, al più eguale ad m, delle quali le rimanenti infinite saranno una semplice necessaria conseguenza. Quanto alle indipendenti, esse si soddisferanno assegnando a piacere i valori (che possono quindi scegliersi razionali) di un certo numero delle $c_1, c_2, \ldots, c_m$ e determinando quindi le rimanenti in funzione lineare a coefficienti razionali di quelle fissate a piacere. Di qui segue che ci è lecito di ritenere *che i coefficienti* $a^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}$, *che si presentano nell'equazione* (2), *siano tutti numeri razionali non tutti nulli.* Essi possono quindi anche ritenersi, come noi appunto faremo, tutti interi.

2. Se poniamo per maggior comodità:

$$\mathrm{M}_{0,0,\ldots,0} = \omega\,;\ a^{(i)}_{0,0,\ldots,0} = a_{n-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{5}$$

vediamo che la funzione z delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ definita dallo sviluppo (1) si riduce per $x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = 0$ al valore ω che è radice dell'equazione:

$$\theta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_n \tag{6}$$

i cui coefficienti sono, al pari di ω, dei numeri razionali. Essi sono anzi, per quanto si è già stabilito, dei numeri interi.

Se poniamo inoltre:

$$p_{n-i} = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu>0} a^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_\nu}\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{7}$$

si vede che la funzione z definita dalla (1) sarà una radice della equazione:

$$(a_n + p_n) z^n + (a_{n-1} + p_{n-1}) z^{n-1} + \cdots + (a_0 + p_0) = 0 \tag{8}$$

in cui i moduli delle $p_0, p_1, \ldots, p_n$ si potranno rendere piccoli a piacere, purchè si prendano sufficientemente piccoli i moduli delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

II.

1. Senza nuocere alla generalità dei risultati che abbiamo qui in mira, i quali riguardano esclusivamente lo studio dei coefficienti dello sviluppo (1), possiamo ritenere che sia

$$\mathrm{M}_{0,0,\ldots,0} = 0$$

cioè $\omega = 0$, poichè se $\mathrm{M}_{0,0,\ldots,0}$ avesse un valore ω diverso da zero, basterebbe cangiare z in $z - \omega$, il che lascia del tutto inalterati i coefficienti dello sviluppo (1) ad eccezione del primo.

Ritenuto inoltre che ω sia radice semplice della (6), si ha per la nostra funzione z in quanto è, come radice della (8), funzione monodroma delle $p_0, p_1, \dots, p_n$ nelle vicinanze di $p_0 = p_1 = \dots = p_n = 0$, lo sviluppo convergente per valori abbastanza piccoli dei moduli delle $x_1, x_2, \dots, x_\nu$:

$$z = \sum_{\alpha > 0} \frac{\underline{|\alpha}}{\underline{|\alpha_0}\,\underline{|\alpha_1}\dots\underline{|\alpha_n}} \mathrm{A}_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}\, p_0^{\alpha_0}\, p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \,. \tag{9}$$

Il valore di un coefficiente qualunque $\mathrm{A}_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ è dato, per quanto si è già visto, essendo nel nostro supposto $a_0 = 0$ ed $a_1 = \theta'(\omega) \neq 0$, da:

$$\mathrm{A}_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{a_1^\alpha} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} \frac{(-1)^\lambda}{a_1^\lambda} \cdot \mathrm{I}_\lambda \cdot \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda_0}\,\underline{|\lambda_1}\dots\underline{|\lambda_n}}\, a_1^{\lambda_1}\, a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \tag{10}$$

dove:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \,,$$

$$\mathrm{I}_\lambda = \frac{(\alpha - \lambda)^{\overline{\alpha+\lambda}}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\lambda}\,(\alpha + \lambda)} \tag{11}$$

e la sommatoria va estesa a tutti i valori interi, positivi o nulli, delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soddisfacenti alle condizioni:

$$\lambda < \alpha \,,\quad \beta + \mu + 1 = \alpha + \lambda$$

o meglio:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n < \alpha \\ &\lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + (n-1)\lambda_n = \alpha - \beta - 1 \,. \end{aligned} \tag{12}$$

2. Non è difficile di riconoscere che $\lambda \mathrm{I}_\lambda$ è un numero intero. Invero, posto per un momento $\alpha - \lambda = \lambda'$, cosicchè $\lambda' > 0$ ed $\alpha = \lambda + \lambda'$, si ha:

$$\mathrm{I}_\lambda = \frac{\lambda'^{\overline{2\lambda+\lambda'}}}{\underline{|\lambda+\lambda'}\,\underline{|\lambda}\,(2\lambda+\lambda')} \,.$$

Ora si può scrivere per $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda'^{\overline{2\lambda+\lambda'}} &= \lambda'^{\overline{\lambda+1}} . (\lambda' + \lambda + 1)^{\overline{\lambda'+\lambda-1}} \\ &= \lambda'^{\overline{\lambda+1}} . (\lambda' + \lambda + 1)^{\overline{\lambda-1}} . (\lambda' + 2\lambda)^{\overline{\lambda'}} = \\ &= \lambda'^{\overline{\lambda+1}} . (\lambda' + \lambda + 1)^{\overline{\lambda-1}} . (\lambda' + 2\lambda) . (\lambda' + 2\lambda + 1)^{\overline{\lambda'-1}} \end{aligned}$$

e

$$\underline{|\lambda+\lambda'}\,\underline{|\lambda}\,(2\lambda+\lambda') = \underline{|\lambda'-1} . \lambda'^{\overline{\lambda+1}}\, \underline{|\lambda}\,(2\lambda+\lambda') \,.$$

Quindi:

$$\lambda \,.\, \mathrm{I}_\lambda = \frac{(\lambda' + \lambda + 1)^{\overline{\lambda-1}}}{|\underline{\lambda - 1}} \cdot \frac{(\lambda' + 2\lambda + 1)^{\overline{\lambda'-1}}}{|\underline{\lambda' - 1}}$$

dove i due fattori del secondo membro sono manifestamente interi. L'asserto è così dimostrato, poichè per $\lambda = 0$ si riconosce subito che $\mathrm{I}_\lambda = \frac{\alpha^{\overline{\alpha}}}{\alpha\, |\underline{\alpha}}$ è un numero intero. Dalle stesse formole di cui ci siamo ora serviti, risulta poi facilmente che è intero anche il prodotto $\alpha \,.\, \mathrm{I}_\lambda$.

3. Noi possiamo ora, partendo dallo sviluppo (9), ritrovare lo sviluppo presupposto (1). Basterà a tale oggetto di sostituire in (9), in luogo delle A, le loro espressioni (10), in luogo delle p le loro espressioni (7) ed ordinare i risultati secondo i monomii delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Otterremo così uno sviluppo secondo i monomii delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ che dovrà coincidere completamente collo sviluppo (1). Paragonando i due sviluppi otterremo per $\mathrm{M}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu}$, coefficiente generale in (1), una espressione la quale sarà composta di un numero *finito* di termini, giacchè quei termini dello sviluppo (9) pei quali:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdots + \alpha_n > \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu$$

non potrebbero dare, ordinati secondo i monomii delle $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, il monomio

$$x_1^{\mu_1}\, x_2^{\mu_2} \ldots x_\nu^{\mu_\nu},$$

ma soltanto monomii di grado superiore, essendo i monomii di ciascuna delle p, come appare da (7), almeno di primo grado. Precisamente otterremo, essendo le $a^{(i)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ dei numeri interi, un'espressione della forma:

$$\mathrm{M}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} i_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\alpha_0}\, |\underline{\alpha_1} \ldots |\underline{\alpha_n}} \mathrm{A}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}$$

dove le i sono certi numeri interi e dove la sommatoria va estesa ai sistemi di valori delle $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soddisfacenti la condizione:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu \,.$$

D'altra parte si vede dalle (10), e da quanto si è osservato circa I_λ [1], che

$$\frac{|\underline{\alpha}}{|\underline{\alpha_0}\, |\underline{\alpha_1} \ldots |\underline{\alpha_n}} \mathrm{A}_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}$$

è della forma:

$$\frac{i'_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{a_1^{2\alpha - 1}},$$

essendo anche le i' dei numeri interi. Concludiamo pertanto che $M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}$ è della forma:

$$M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu} = \frac{j_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}}{a_1^{2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu)-1}},$$

essendo le j dei numeri interi.

Riassumendo, abbiamo così dimostrato:

1°) *che nei denominatori degl'infiniti coefficienti* $M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}$ *può presentarsi soltanto un numero finito di fattori primi distinti; e precisamente possono presentarsi soltanto quei numeri primi che sono divisori di* a_1.

2°) *che il denominatore di un coefficiente qualunque* $M_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\nu}$ *ridotto alla sua più semplice espressione è in ogni caso un divisore proprio di* $a_1^{2(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu)}$.

(1) Precisamente, dalle dette proprietà di I_λ segue, tenendo presente la relazione (12), che i singoli prodotti:

$$\frac{\underline{|\alpha}}{\underline{|\alpha_0}\ \underline{|\alpha_1}\ldots\underline{|\alpha_n}} \cdot \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda_0}\ \underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}}\, I_\lambda$$

sono tutti numeri interi.

O. NICOLETTI

SULLA RIDUZIONE A FORMA CANONICA
DI UN FASCIO DI FORME BILINEARI E QUADRATICHE

1. Il teorema di WEIERSTRASS dà le condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, tali che i determinanti dei due fasci non siano identicamente nulli; è perciò necessario e sufficiente che i determinanti dei due fasci abbiano gli stessi divisori elementari.

La dimostrazione data da WEIERSTRASS ha carattere trascendente ed a FROBENIUS si deve la prima dimostrazione *razionale* del teorema di WEIERSTRASS.

In una Memoria, pubblicata nel XIV volume degli Annali di Matematica (anno 1908) ho dato una nuova dimostrazione (razionale) del teorema stesso. Essa si fonda sulle considerazioni seguenti.

Si abbiano due forme bilineari in due serie di n variabili $u_1, \dots, u_n$; $v_1, \dots, v_n$:

$$(1) \qquad A(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} u_i v_k \ ; \ B(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, b_{ik} u_i v_k ,$$

la seconda delle quali abbia il determinante:

$$|b_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

diverso da zero. Sia R un campo assegnato di razionalità, che contiene i coefficienti a_{ik}, b_{ik} delle due forme, e detto:

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}| \quad , \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

il determinante del fascio $A - \omega B$, sia P un divisore di $D(\omega)$, primo nel campo R, e sia $g \geq 1$ il suo grado in ω. Al divisore P corrispondono $h \geq 1$ divisori elementari di $D(\omega)$:

$$P^{e_1}, P^{e_2}, \dots, P^{e_h}, \qquad (\text{con } e_1 \geq e_2 \geq \dots e_h \geq 1);$$

ed è possibile ottenere dai minori del determinante $D(\omega)$, *in modo razionale*, un sistema di hn polinomî in ω:

$$X_k^{(\rho)} = \sum_0^{e_\rho - 1} {}_v \sum_0^{g-1} {}_u \, x_k^{\rho, vg+u} \, \omega^u \mathrm{P}^v , \qquad (k = 1, 2, \ldots, n \,;\, \varrho = 1, 2, \ldots, h)$$

i quali soddisfano alle congruenze:

$$(2) \quad \sum_1^n {}_k \, (a_{ik} - \omega b_{ik}) X_k^{(\rho)} \equiv 0 \pmod{\mathrm{P}^{e_\rho}} , \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, h \,;\, i = 1, 2, \ldots, n)$$

e sono tali inoltre che la matrice di n righe e di $g \sum_1^h {}_\rho \, e_\rho$ colonne

$$|x_k^{\rho, t_\rho}| , \quad (k = 1, 2, \ldots, n \,;\, \varrho = 1, 2, \ldots, h \,;\, t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g - 1)$$

formata coi coefficienti dei polinomî stessi ha la caratteristica $g \sum_1^h {}_\rho \, e_\rho$, è cioè, come si dice, diversa da zero.

Un tale sistema di polinomî e la matrice dei loro coefficienti ho detto rispettivamente un sistema *canonico* ed una matrice *canonica* relativa al divisore P ed alle righe (corrispondenti al primo indice i) di $\mathrm{D}(\omega)$.

Siano ora $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_s$ i divisori primi diversi di $\mathrm{D}(\omega)$ nel campo R. Riunendo s matrici canoniche relative ad essi divisori, otteniamo una matrice quadrata

$$\mathrm{X} \equiv |x_k^r| , \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n)$$

di ordine n, il cui determinante è diverso da zero. Una tale matrice diciamo *canonica* per le righe di $\mathrm{D}(\omega)$. È possibile determinare razionalmente la più generale di queste matrici; essa contiene:

$$\mathrm{N} = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî, dove n_r $(r = 0, 1, \ldots, n \,;\, n_0 = n)$ indica il grado in ω del massimo comun divisore $\mathrm{D}_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ del determinante $\mathrm{D}(\omega)$.

In modo analogo si definisce una matrice canonica

$$\mathrm{Y} \equiv |y_i^s| , \quad (i, s = 1, 2, \ldots, n)$$

per le colonne, invece che per le righe, di $\mathrm{D}(\omega)$.

2. Siano

$$\mathrm{X} \equiv |x_k^r| \,,\; \mathrm{Y} \equiv |y_i^s| , \quad (i, k, r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

due matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $\mathrm{D}(\omega)$, e poniamo:

$$(3) \qquad \mathrm{B}_{rs} = \sum_1^n {}_{ik} \, b_{ik} \, y_i^s x_k^r , \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n);$$

le quantità B_{rs} così definite soddisfano ad un sistema di equazioni lineari omogenee (simmetriche nei primi e secondi indici), *le quali dipendono soltanto dai divisori elementari del determinante* $D(\omega)$ *nel campo* R.

Queste equazioni, che ometto di scrivere, indico brevemente col nome di *equazioni fondamentali.*

Sia inversamente B_{rs}, $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ una soluzione delle equazioni fondamentali, per la quale il determinante

$$|B_{rs}|, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

è diverso da zero, o, come diremo, sia B_{rs} una soluzione *propria* delle equazioni fondamentali. Indicando con X(Y) una matrice canonica arbitraria per le righe (per le colonne) di $D(\omega)$, si può, ed in un modo solo (colla risoluzione di equazioni lineari), associare ad essa una matrice canonica Y(X) per le colonne (per le righe) di $D(\omega)$, in guisa che valgano le relazioni (3).

Si ha di qui subito la più generale soluzione propria delle equazioni fondamentali; essa dipende ancora da N parametri arbitrarî.

Due matrici canoniche, per le quali valgano le (3), si diranno *associate* alla soluzione B_{rs}, che figura nelle (3) stesse; è chiaro da ciò che precede che ad una qualunque soluzione propria delle equazioni fondamentali sono associate ∞^N coppie di matrici canoniche.

Tra le soluzioni proprie delle equazioni fondamentali, una si distingue per la sua grande semplicità; la diremo la soluzione *principale*; due matrici canoniche associate alla soluzione principale le diremo semplicemente *associate.*

3. Sia B_{rs} una soluzione propria delle equazioni fondamentali e

$$X \equiv |x_k^r| \, , \; Y \equiv |y_i^s| , \quad (i, k, r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

due matrici canoniche associate ad essa; e si cambino le variabili u_i, v_k in altre η_r, ζ_s $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ colle formule:

$$u_i = \sum_1^n {}_r \, y_i^r \eta_r \;, \; v_k = \sum_1^n {}_r \, x_k^r \zeta_r \,;$$

il fascio $A - \omega B$ assume una forma, *la quale dipende soltanto dalla soluzione* B_{rs} *considerata e dai divisori elementari di* $D(\omega)$ *in* R. Questa forma diremo la forma *canonica* del fascio, *associata alla soluzione* B_{rs}. Il risultato è invertibile; due trasformazioni lineari, non degeneri, sulle u e sulle v, che riducano il fascio $A - \omega B$ alla forma precedente, sono date necessariamente da due matrici canoniche, associate alla soluzione B_{rs} considerata.

Si hanno così per il fascio $A - \omega B$ ∞^N forme canoniche; e fissata una qualunque di esse, si può determinare razionalmente la più generale trasformazione che riduce il fascio ad essa forma canonica; essa contiene ancora N parametri arbitrarî.

La forma canonica del fascio associata alla soluzione principale delle equazioni fondamentali si dirà semplicemente la forma *canonica* del fascio. Quando i divisori primi del determinante $D(\omega)$ del fascio hanno tutti il primo grado (come si ha, in particolare, quando R sia il campo totale di tutti i numeri reali e complessi) la forma canonica del fascio è quella data da WEIERSTRASS.

Il teorema di WEIERSTRASS è un corollario immediato di quanto precede. Infatti, se per due fasci $A - \omega B$, $A' - \omega B'$ di forme bilineari, i determinanti $D(\omega)$, $D'(\omega)$ hanno gli stessi divisori elementari, è cioè $D_r = D'_r$, $(r = 0, 1, \ldots, n)$, essi si decompongono in ugual modo nel campo R; i due fasci hanno quindi comuni le equazioni fondamentali, le loro soluzioni proprie e le ∞^N forme canoniche; i due fasci sono quindi equivalenti. Si ha inoltre, in modo razionale, la più generale trasformazione di un fascio nell'altro.

4. Supponiamo ora che le forme A, B siano simmetriche, sia cioè:

$$a_{ik} = a_{ki}, \; b_{ik} = b_{ki}; \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ lo è anche per le colonne ed inversamente. Le equazioni fondamentali ammettono infinite soluzioni simmetriche (per le quali è $B_{rs} = B_{sr}$, per $r, s = 1, 2, \ldots, n$), e tra queste è anche la soluzione principale. Consideriamo, per fissare le idee, questa soluzione. È possibile determinare una matrice canonica X di $D(\omega)$, associata di sè stessa rispetto alla soluzione principale. Una tale matrice diremo *normale; nota una particolare matrice normale*, si ha in modo razionale la più generale di esse matrici; essa dipende da

$$N_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$$

parametri arbitrarî, avendo i numeri n_r $(r = 1, \ldots, n)$ il significato già dichiarato al n. 1.

La determinazione di una matrice normale, associata alla soluzione principale delle equazioni fondamentali, dipende dal problema della riduzione a somma di quadrati (mod P) di una forma quadratica, i cui coefficienti sono definiti (mod P), dove P è un divisore primo di $D(\omega)$ in R; e questo problema porta a considerare delle congruenze quadratiche del tipo:

$$Z^2 \equiv A \pmod{P},$$

essendo A un polinomio primo con P.

La congruenza superiore non ha sempre soluzioni nel campo R; detto g il grado di P, ne ha 2^g nel campo più ampio che si ottiene aggiungendo ad R le g radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ dell'equazione $P = 0$ ed i g radicali quadrati:

$$\sqrt{A(\omega_i)}, \; (i = 1, 2, \ldots, g).$$

Ne segue facilmente che una matrice normale appartiene, *in generale*, al campo R_1, che si ha aggiungendo al campo R le radici dell'equazione $D(\omega) = 0$ e dei radicali quadrati, il cui numero uguaglia quello dei divisori elementari (ora tutti di primo grado) del determinante $D(\omega)$.

Sia ora:

$$X \equiv |x_k^r| \quad , (k , r = 1 , 2 , \ldots , n)$$

una matrice normale e si cambino le variabili u, v in altre η, ζ colle formule

$$u_i = \sum_1^n {}_r\, x_i^r \eta_r \ , \ v_i = \sum_1^n {}_r\, x_i^r \zeta_r \, , \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n) \, ;$$

il fascio $A - \omega B$ assume la forma canonica, associata alla soluzione principale.

Ne segue subito che condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di forme bilineari simmetriche (o, ciò che è lo stesso, due fasci di forme quadratiche), i cui determinanti non siano identicamente nulli, siano congruenti, è ancora l'uguaglianza dei divisori elementari dei due fasci e si ha insieme la più generale trasformazione che porta l'uno nell'altro fascio. Essa dipende ancora da

$$N_1 = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n$$

parametri arbitrarî ed è, in generale, irrazionale.

Aggiungiamo ancora un'osservazione. Il fascio dato sia *reale* (le a_{ik}, b_{ik} siano cioè numeri reali) e, per semplicità, assumiamo come campo fondamentale il campo reale. Esistono allora infinite forme canoniche *reali* del fascio $A - \omega B$, nelle quali il fascio stesso è portato da una trasformazione *reale*. Vale in questa riduzione a forma canonica reale una *legge di inerzia*, che comprende in sè, come caso particolarissimo, quella di SYLVESTER-JACOBI per le forme quadratiche reali. Si è condotti così ad introdurre degli invarianti numerici di un fascio reale di forme quadratiche, i quali assegnano quella che si può dire la *segnatura* del fascio. È notevole osservare che: *La segnatura di un fascio di forme quadratiche si determina razionalmente.* Inoltre l'uguaglianza dei divisori elementari e della segnatura di due fasci reali è condizione necessaria e sufficiente perchè essi siano congruenti per trasformazioni reali.

Si traggono anche di qui altre conseguenze notevoli, ad es. la condizione necessaria e *sufficiente* perchè un fascio reale di forme quadratiche contenga delle forme definite, o, più generalmente, di segnatura determinata.

5. Diciamo brevemente anche delle trasformazioni congruenti dei fasci di forme bilineari emisimmetriche. La condizione che il determinante del fascio non sia identicamente nullo, porta che il numero n sia pari.

Le equazioni fondamentali ammettono anche infinite soluzioni emisimmetriche; ad una qualunque di queste, è possibile associare, *in modo razionale*, (ciò che non è per i fasci di forme quadratiche) ∞^{N_2} matrici normali, cioè associate di sè stesse, essendo

$$N_2 = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_n \, .$$

Ne segue ancora che l'uguaglianza dei divisori elementari di due fasci di forme bilineari emisimmetriche è condizione necessaria e sufficiente perchè essi siano congruenti e si ha insieme, in modo razionale, la più generale trasformazione di un fascio nell'altro. Essa contiene ancora N_2 parametri arbitrarî.

6. Abbiamo supposto, per semplicità, che il determinante del fascio $A - \omega B$ non sia identicamente nullo. Quando questo accada, conviene considerare insieme colle congruenze (2) le equazioni lineari:

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} (a_{ik} - \omega b_{ik}) X_k = 0 , \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

e le loro soluzioni polinomiali. Valgono poi, con lievi modificazioni, delle conclusioni affatto analoghe alle precedenti.

G. FUBINI

SULLA DISCONTINUITÀ PROPRIA DEI GRUPPI DISCONTINUI (¹)

1. La teoria della discontinuità propria dei gruppi è sorta per opera di KLEIN e POINCARÉ. Nelle celebri Memorie di POINCARÉ sulle funzioni automorfe sono dimostrati i due teoremi fondamentali che ogni gruppo fuchsiano è propriamente discontinuo, e che ogni gruppo kleiniano, considerato come gruppo di movimenti in una metrica di CAYLEY-BÓLYAI a tre dimensioni, possiede poliedri fondamentali. È contenuto quindi nel lavoro di POINCARÉ un metodo generale per riconoscere quando un gruppo lineare privo di trasformazioni infinitesime è propriamente discontinuo. Consideriamo in un semispazio euclideo a tre dimensioni la rete di poliedri fondamentali, costruita al modo di POINCARÉ. È ben noto che, *se questi poliedri hanno qualche faccia sul piano limite, allora il nostro gruppo kleiniano è pr. dis. sulla variabile complessa x.*

È essenziale la questione di sapere se la condizione, data qui come *sufficiente* per la propria discontinuità di un gruppo kleiniano, sia anche *necessaria*. A questa domanda si può rispondere *affermativamente* per mezzo del seguente teorema:

Se un punto del piano limite è punto limite di infiniti poliedri della nostra rete, allora in ogni suo intorno esistono punti equivalenti a un qualsiasi punto interno al semispazio euclideo, o posto sul piano limite (²).

L'esame dei poliedri di POINCARÉ dà dunque un metodo generale per riconoscere se un dato gruppo kleiniano è o non è pr. dis.

La teoria dei gruppi kleiniani si può anche studiare da un altro punto di vista. Il teorema di POINCARÉ per i gruppi fuchsiani ci dice che un gruppo lineare p. d. t. i. su una variabile complessa x, *che trasformi in sè stesso un cerchio del piano π di questa variabile, è pr. dis. su tutto il piano π.* Dal teorema precedente si può trarre l'inaspettata conseguenza che il risultato di POINCARÉ non vale soltanto per i

(¹) Abbreviazioni: p. d. t. i. = privo di trasformazioni infinitesime; pr. dis. = propriamente discontinuo.

(²) Cfr. la mia *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe* (Pisa, Spoerri, 1908) p. 405. A questo teorema fanno eccezione soltanto i gruppi p. d. t. i., le cui trasformazioni lasciano *tutte* fissi gli stessi due punti. Questi gruppi sono tutti pr. dis. e si studiano facilmente in modo diretto.

gruppi che trasformano in sè stessa una regione circolare di π, ma addirittura per *i gruppi, che trasformano in sè stessa una qualsiasi regione* R *di* π, purchè in π esista almeno un punto non appartenente a R (Cfr. loc. cit. p. 408).

E se ne può dedurre questo ultimo risultato che, se un gruppo lineare p. d. t. i. sulla x non è pr. dis., allora *un punto qualsiasi di* π *e i punti a lui equivalenti formano un aggregato denso in tutto* π; cosicchè, con locuzione un po' grossolana, si può affermare che, *se un gruppo p. d. t. i. opera in modo pr. dis. anche su un solo punto di* π, *allora necessariamente esso è pr. dis. in tutto* π.

***

2. Sorge dai risultati precedenti un'altra questione: quella di classificare i nostri gruppi, esaminando le regioni di π, che essi trasformano in sè stesse. Prescindiamo qui dalle regioni infinite volte connesse; ed esaminiamo senz'altro *i più generali gruppi p. d. t. i. di trasformazioni conformi* (anche non lineari) *di una qualsiasi regione* R *in sè stessa*, quando R ha un ordine di connessione finito. Sul contorno di R non si può fare alcuna ipotesi restrittiva; già per i gruppi kleiniani è ben noto che tale contorno è una curva, che non ha neanche tangente in un punto generico. Ciononostante i teoremi generalissimi di Osgood e Koebe [1] dimostrano che una tal regione può ammettere infinite rappresentazioni conformi in sè stessa, soltanto se la regione è semplicemente, o doppiamente connessa. E in questi casi R si può rappresentare conformemente su un cerchio C o su un anello circolare A. Nonostante che nulla si possa affermare su quanto avviene del contorno di R in questa rappresentazione, pure si può dimostrare che alle rappresentazioni conformi della nostra regione in sè stessa corrisponderanno proprio le solite ∞^3, o le ∞^1 rappresentazioni di C o di A in sè stesso. A un gruppo G p. d. t. i. di trasformazioni conformi di R in sè stessa corrisponderà dunque un gruppo fuchsiano, o un gruppo *finito* di rotazioni di A in sè stesso [2]. E dalle note proprietà di questi gruppi possiamo trarre l'interessante risultato seguente:

Un gruppo G *p. d. t. i. di trasformazioni conformi di una regione* R *in sè stessa, la quale abbia un ordine di connessione finito, o è un gruppo finito discontinuo, o è simile a un gruppo fuchsiano, e quindi è pr. dis. ed è contenuto come sottogruppo in un gruppo continuo* Γ *di* Lie *a tre parametri di trasformazioni conformi di* R *in sè stessa.*

Così p. es., se G è kleiniano, G è contenuto come sottogruppo in un gruppo Γ di Lie, le cui trasformazioni non sono in generale lineari, e che lineari diventano per particolari valori dei parametri. E con una trasformazione *analitica* (definita da funzioni, che probabilmente esistono soltanto in R) tanto G che Γ si possono mutare in gruppi *lineari*, trasformanti un cerchio in sè stesso!

***

3. Come si vede, la teoria dei gruppi kleiniani è giunta oramai a una notevole perfezione; affatto arretrata è invece la teoria dei gruppi discontinui di trasformazioni

(1) Cfr. la Memoria di Koebe negli Jahresberichte d. d. m. V. (1907).

(2) Infatti ogni gruppo *infinito* di rotazioni di A in sè stesso non può essere p. d. t. i.

in due, o più variabili indipendenti. Per quanto riguarda la generalizzazione degli ultimi teoremi ora citati si può soltanto sperare che lo studio delle rappresentazioni regolari di Poincaré possa un giorno gettare qualche luce in proposito.

Ciononostante qualche risultato parziale si è già ottenuto. Si sono studiati i gruppi p. d. t. i. di movimenti in una metrica qualsiasi, si sono studiate le applicazioni ai sistemi di forme algebriche ed iperalgebriche. Per molte classi di gruppi si sono dati teoremi, che permettono di affermare *a priori* la propria discontinuità di un gruppo p. d. t. i. Per i gruppi p. d. t. i. di trasformazioni conformi di uno spazio euclideo a un qualsiasi numero di dimensioni in sè stesso si può dare un metodo, affatto simile a quello di Poincaré per i gruppi kleiniani, che serve a riconoscere se un tale gruppo è, o non è pr. dis. Cerchiamo di vedere se un metodo analogo si possa trovare per i gruppi di trasformazioni lineari (cfr. loc. cit. p. 170 e seg.). Riferiamoci a un gruppo G p. d. t. i. di proiettività reali, o complesse in uno spazio lineare S_n ad n dimensioni. Consideriamo tutte le forme F quadratiche, algebriche od Hermitiane, delle coordinate omogenee ξ di iperpiano in S_n. Sia V una varietà lineare, i cui punti sieno in corrispondenza biunivoca continua con le forme considerate, quando non si considerino come distinte forme proporzionali. Al gruppo G corrisponderà in V un gruppo proiettivo Γ, *che si può dimostrare pr. dis. in quella regione* V_1 *di* V, *che è immagine di forme definite.* Tra le varietà, contorno di V_1, vi è la varietà V_2, i cui punti sono immagine di forme F spezzate in due fattori lineari, e che ha $2n$ dimensioni. Ora una forma lineare nelle ξ individua un punto di S. Il nostro gruppo G sarà dunque pr. dis. in S allora e allora soltanto che Γ sarà pr. dis. su V_2. *Se dunque i campi fondamentali* K *che* Γ *ha in* V_1 *determinano una divisione di* V_2 *in regioni a* $2n$ *dimensioni, le regioni corrispondenti in* S *potranno considerarsi come campi fondamentali di* G; *e il gruppo* G *sarà dunque in* S *pr. dis.* E, se si riuscisse a dimostrare inversamente che per la propria discontinuità di G in S è *necessario* che i campi K abbiano su V_2 delle faccie a $2n$ dimensioni, allora sarebbe risoluto il problema di saper riconoscere, quando un gruppo lineare G è, o non è pr. dis. in S. Ma tale dimostrazione è stata data, come dicemmo in principio di questa comunicazione, soltanto per $n = 1$; e le difficoltà dell'estensione al caso di $n > 1$ sono assai gravi, e finora insormontate.

Il metodo precedente si può dunque, allo stato attuale della teoria, considerare soltanto come un metodo, che in qualche caso può servire a riconoscere la propria discontinuità di un gruppo lineare p. d. t. i.

L. M. DICKSON

ON THE LAST THEOREM OF FERMAT

FERMAT stated that $u^n + v^n + w^n = 0$ has no set of integral solutions u, v, w each not zero, when $n > 2$. No correct general proof has yet been given. The most important attack is that by KUMMER, whose proof applies to an extensive class of prime numbers n, depending upon the indivisibility of certain Bernouillian numbers by n (a laborious test). All writers on the subject have treated separately the case in which no one of the integers u, v, w is divisible by the prime n. For this case a very simple method was invented by SOPHIE GERMAIN and generalized by LEGENDRE to apply to every prime n for wich one of the numbers $mn + 1$, $m = 2, 4, 8, 10, 14, 16$ is a prime (the exceptional character of $n = 3$ for $m = 10$ and being overlooked).

On the present paper, I obtain LEGENDRE's results by a direct general analysis and extend them to the new cases $m = 20, 22, 26, 28, 32, 40, 56, 64$, there being one or more exceptional values of n for each m.

The impossibility of FERMAT's equation for integers u, v, w, not divisible by the odd prime n was proved by SOPHIE GERMAIN for $n < 100$, by LEGENDRE for $n < 200$; the limit was extended to 223 by MAILLET and to 257 by MIRIMANOFF. In the present paper, I establish the result for $n < 1700$. All but 1 of the 505 odd primes < 1700 are the excluded by the above 14 forms $m\,n + 1$. The complete paper, of which this is an abstract, will be published in the *Messenger of Mathematics*.

BEPPO LEVI

SULL'EQUAZIONE INDETERMINATA DEL 3° ORDINE

Le prime ricerche sull'analisi indeterminata di 3° grado rimontano al FERMAT il quale insegnò a dedurre, con procedimento razionale, da una soluzione razionale dell'equazione $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ (o dell'altra $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$) una soluzione razionale, in generale distinta dalla primitiva. Il metodo è riprodotto da EULERO nell'Algebra e dal LEGENDRE nella Théorie des nombres, e d'allora in poi è stato esteso a equazioni qualunque del 3° ordine, e spesso indipendentemente ritrovato da molti autori dal CAUCHY al POINCARÉ. Si tratta sempre di determinare le coordinate di un punto d'intersezione della curva rappresentata dall'equazione con un'altra curva di cui tutte le rimanenti intersezioni con essa sono note e cadono in punti razionali.

Già in quei primi autori però si rileva che il metodo indicato può cadere in difetto in quanto la soluzione ch'esso pone in evidenza può essere quella medesima da cui si è partiti o, più generalmente, quando il procedimento si applichi ripetutamente, ovvero si generalizzi a far uso di più soluzioni note, può coincidere con una delle soluzioni che direttamente o indirettamente l'hanno generata. E che così debba essere è nell'essenza della cosa, poichè notoriamente esistono equazioni cubiche con un numero limitato di soluzioni razionali.

In una serie di 4 Note sopra la teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie io ho trattato, insieme con altre questioni, di questo fatto notevole (¹); e poichè oltre ai fatti rinvenuti resta ancora argomento a interessanti ricerche, esporrò qui brevemente le mie conclusioni.

***

È utile, per la comodità dell'espressione, ricorrere al linguaggio geometrico: la equazione cubica rappresenta una curva del 3° ordine, le sue soluzioni punti della curva e si diranno *razionali* punti a coordinate razionali. Naturalmente si supporrà costantemente che l'equazione della cubica (la data equazione indeterminata) abbia i coefficienti razionali e che la cubica medesima abbia genere 1, altrimenti, per un

(¹) B. LEVI, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie* (4 Note negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol.ⁱ 41 e 43), noto teorema, si ridurrebbe con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali ad una retta, vale a dire, l'equazione indeterminata proposta sarebbe equivalente a un'equazione lineare.

S'immagineranno riferiti i punti della cubica ad un parametro ellittico, in modo che la somma dei valori del parametro in tre punti allineati sia nulla, a meno di periodi.

I punti della cubica che si ottengono con operazioni razionali da uno o più punti della cubica si diranno razionalmente dedotti da questi e saranno razionali se questi sono razionali. Tutti i punti razionalmente dedotti da uno o più punti dati si ottengono da questi colla ripetuta applicazione delle operazioni seguenti:

1) Determinazione dei tangenziali di punti dati.

2) Determinazione delle terze intersezioni della cubica con rette congiungenti punti dati.

3) Applicazione di queste stesse operazioni al sistema dei punti dati e dei punti da essi via via dedotti colle operazioni medesime.

Chiamiamo *configurazione finita di punti razionali* d'una cubica l'aggregato di tutti i punti razionalmente dedotti da uno o più punti razionali della cubica quando questo aggregato risulti di un numero finito di punti.

I parametri ellittici che, secondo quanto sopra si disse, corrispondono ai punti d'una configurazione finita di punti razionali sono sempre parti aliquote di periodi, e fissando convenientemente la corrispondenza fra i punti della cubica e il parametro corrente si può sempre supporre che il denominatore sia multiplo di 3. Cosicchè a ciascuno di questi punti corrisponderà un parametro della forma $\frac{\omega}{3t}$, ove ω è un periodo conveniente.

Il numero intero t non può mai possedere il fattore 2 a potenza superiore alla 3ª.

Consideriamo dapprima le configurazioni finite di punti razionali, razionalmente dedotti da un solo (conveniente) punto della configurazione medesima: se $\frac{\omega}{3t}$ è il parametro ellittico corrispondente a questo punto, il valore del parametro in ogni altro punto della configurazione è della forma $\frac{\omega'}{3t'}$ dove t' è un divisore di t. A seconda dei fattori primi di t si ha allora luogo a distinguere tre tipi principali di configurazioni:

1°) t è potenza di 2. Ho chiamato la configurazione *arborescente*. Se di un punto qualunque della configurazione si cerca il tangenziale, poi di questo il tangenziale e così via, si giunge infine a un flesso (sempre il medesimo, da qualunque punto si parta) al quale il procedimento si arresta. Se $t = 1$ $(= 2^0)$ il flesso è il solo punto della configurazione; se $t \geq 2$, il flesso è tangenziale (in generale) di un sol punto razionale; se $t \geq 4$, questo punto è tangenziale a sua volta di 2 punti razionali; se $t = 8$, ciascuno di questi è tangenziale a sua volta di 2 punti razionali. Ma questi punti non possono essere ulteriormente tangenziali di punti razionali; e t, come già si disse, non può essere una potenza di 2, maggiore di 8.

2°) t non possiede fattori 2. Ho chiamato la configurazione *poligonale semplice*. Se, partendo da un punto qualunque della configurazione si ripetono successive costruzioni di tangenziali, il procedimento finisce perchè si ritrova infine un punto di cui il punto di partenza è il tangenziale. La configurazione può contenere un flesso, il quale non è però mai tangenziale di altri punti di essa. Ho potuto dimostrare la esistenza di cubiche le quali posseggono le seguenti configurazioni poligonali semplici di punti razionali:

$t = 3$. Triangolo di tangenziali.

$t = 5$. Quadrangolo di tangenziali, più un flesso nel punto d'incontro delle due diagonali del quadrangolo.

$t = 7$. Esagono di tangenziali, più un flesso in cui concorrono le congiungenti i vertici opposti: i vertici di posto pari e quelli di posto dispari sono allineati sopra due rette.

$t = 9$. Ennagono di tangenziali: i vertici sono allineati a 3 a 3 sopra 9 rette diverse dai lati e per ogni vertice passano 3 di queste rette. La configurazione non contiene flessi.

È molto probabile che per $t > 9$ non esistano più configurazioni di punti razionali: il problema dell'esistenza d'una tal configurazione per $t = 11$ equivale a quello di sapere se l'equazione $y(y-x)(x-z) - xz(y-z) = 0$ abbia soluzioni razionali per cui le variabili hanno valori diversi da 0 e da ± 1.

3°) t è pari ma non semplice potenza di 2. Ho chiamata la configurazione *poligonale mista*: essa si compone di un *nucleo* identico alla configurazione poligonale semplice che corrisponde al massimo fattore dispari di t, ogni punto del quale è estremo di un ramo identico alla configurazione arborescente che corrisponde alla massima potenza di 2 che è fattore di t. Esistono tali configurazioni di punti razionali per $t = 3.2$, $t = 3.2^2$; non ho risolto il dubbio dell'esistenza o meno di questa configurazione per $t = 3.2^3$; certo non esiste per $t = 3.2^\nu$ con $\nu > 3$. Esiste pure la configurazione corrispondente a $t = 5.2$, ma non esiste quella che corrisponderebbe a $t = 5.2^2$ (quindi nemmeno a $t = 5.2^\nu$ con $\nu \geq 2$). Non esiste alcuna configurazione poligonale mista che abbia per nucleo la configurazione corrispondente a $t = 7$ ed è probabile che non ne esistano nemmeno per maggiori fattori dispari del t.

Resta ad analizzarsi la possibilità di configurazioni finite costituite da punti non tutti razionalmente dedotti da uno stesso punto razionale. Ciò può verificarsi solo in due modi:

a) I punti di una configurazione arborescente o di una configurazione poligonale mista che non sono estremi di un ramo, sono tangenziali di 4 anzichè di 2 punti razionali (l'estremo flesso è tangenziale di 3 punti razionali). Tutti i punti della configurazione sono allora razionalmente dedotti da due (convenienti) di essi. Ciascuno dei punti per cui viene così ad accrescersi la configurazione arborescente o poligonale mista considerata non è più tangenziale di altri punti razionali. Queste nuove configurazioni non si distinguono dalle precedenti per un diverso valore di t, ma pel fatto che, insieme con ogni punto razionale di parametro ellittico $\frac{\omega}{3t}$ ne esiste uno avente parametro ellittico $\frac{\omega}{3t} + \frac{\omega'}{2t}$, dove ω' è un periodo fisso non avente con ω rapporto reale.

Esistono tali configurazioni per $t = 2, 4, 8, 6$; ma non ne esistono per $t = 12$ o per $t = 10$ ed è da arguire che non ne esistano per valori maggiori di t.

b) Esistono sulla cubica più configurazioni finite di punti razionali razionalmente dedotte da punti diversi e senza punti comuni. Tali configurazioni corrispondono tutte allo stesso valore di t o a valori sottomultipli del massimo di essi e a valori di ω aventi rapporto reale (intero) (salva la possibilità del caso analogo ad *a*). Se una cubica presenta tali particolarità, si può trasformare con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali in un'altra che possiede una configurazione finita dei tipi precedentemente considerati e corrispondente al valore $t_1 = 3t$ di t, ed i cui punti corrispondono ai punti della configurazione finita considerata: e reciprocamente ogni cubica che possegga una configurazione finita di punti razionali corrispondente a un valore di t multiplo di 3, ha per trasformata razionale una cubica su cui esistono più configurazioni finite nelle condizioni descritte. La configurazione finita totale si deduce in ogni caso razionalmente da due (convenienti) suoi punti.

***

Queste considerazioni si collegano in modo notevole alla teoria della divisione del periodo delle funzioni ellittiche.

Se una cubica (di birapporto $k \neq -1\ (\frac{1}{2}, 2)$) ha un punto razionale, si può trasformare birazionalmente, con una sostituzione a coefficienti razionali in k, nella cubica

$$xz^2 - y(y-x)(y-kx) = 0.$$

È noto che sulla cubica può allora distendersi una coordinata ellittica u di modulo $\varkappa = \sqrt{k}$ per modo che $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{y}$ si esprimano per essa colle relazioni

$$\frac{x}{y} = \operatorname{sn}^2 u \quad , \quad \frac{z}{y} = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

I punti razionalmente dedotti dal punto $(x\,y\,z)$ costituiscono una configurazione finita sempre e solo quando u è una parte aliquota di un periodo; ma se il punto corrispondente sulla cubica primitiva era razionale, i rapporti $\frac{x}{y}, \frac{z}{y}$ saranno espressioni razionali in k. Un primo passo, e il più importante, nella determinazione delle possibili configurazioni finite di punti razionali sopra una cubica, è adunque rappresentato dal problema di determinare per quali valori del modulo $\varkappa$ e per quali valori del divisore t avvenga che le equazioni della divisione del periodo delle funzioni ellittiche per il numero t ammettano soluzioni tali che, per $u = \frac{\omega}{t}$ (ω periodo conveniente), $\operatorname{sn}^2 u$ e $\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$ siano razionali in $k = \varkappa^2$. Si può semplificare un poco la domanda. Si supponga in primo luogo che t sia dispari: si sa che allora $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ è funzione razionale di $\operatorname{sn}^2 u$; la domanda si riduce allora a chiedere che $\operatorname{sn} u$ sia razionale in k. Se poi t è pari, si ricordi che $\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$ è il prodotto di una espressione razionale in $\operatorname{sn}^2 u$ per $\operatorname{sn} 2u$ (1): è quindi necessario e sufficiente che siano razionali in k $\operatorname{sn}^2 u$ e $\operatorname{sn} 2u$ e cioè che corrispondentemente ai punti della configurazione che non sono estremi di un ramo arborescente di essa, il valore di u, che avrà la forma $\frac{n\omega}{t:2}$, sia tale che $\operatorname{sn} u$ sia razionale in k, mentre corrispondentemente agli estremi di tali rami basta che sia razionale in k $\operatorname{sn}^2 u$.

Al caso in cui si deve chiedere che $\operatorname{sn} u$ sia razionale in $k = \varkappa^2$ si può ancora dare una forma più consona alla ordinaria teoria delle funzioni ellittiche. Dalla considerazione delle formole di bisezione dell'argomento e dell'equazione della divisione del periodo si trae facilmente che $k \operatorname{sn}^4 u$ è funzione pari di $\varkappa$: basta quindi ammettere che $\operatorname{sn} u$ sia razionale in $\varkappa$ per concludere che $\operatorname{sn}^4 u$ è razionale in k, e quindi $\operatorname{sn} u$ è un'espressione razionale in k moltiplicata al più per una potenza (positiva o negativa) di $\varkappa$: anche questa possibilità si esclude se il divisore t è dispari; allora son domande equivalenti che $\operatorname{sn} u$ sia razionale in k ovvero in $\varkappa$.

Dalle cose dette risulta allora:

L'equazione della divisione del periodo per un numero intero t relativa al sn *ammette, per convenienti valori del modulo $\varkappa$, delle radici razionali in $k = \varkappa^2$ per tutti i valori di $t \leq 9$ escluso forse il valore* 8: *ed ammette inoltre radici il cui quadrato è razionale in k per $t = 8, 10, 12$. Se poi s'impone a k di essere razionale* $(\neq -1)$, *si ottiene che l'equazione medesima, per convenienti valori di k (costituenti una serie infinita di cui i miei procedimenti permettono di ottenere l'espressione generale), avrà radici razionali per $t = 2, 3, 4$; avrà radici il cui quadrato è razionale per $t = 6, 8$; ma non esistono valori razionali di k $(\neq -1)$ per cui la equazione della divisione del periodo abbia radici razionali per $t = 5, 7, 12$ e quindi nemmeno per valori di t multipli di questi.* In altra forma, se nell'equazione della divisione del periodo per questi numeri si considerano come variabili il birapporto k e il sn incognito, si rappresenta una curva che non possiede punti razionali.

Sarebbe interessante completare la delimitazione dei valori di t per cui l'equazione della divisione del periodo può ammettere radici razionali in k: le precedenti osservazioni portano a credere che questi valori di t siano in numero finito, e forse non siano altri che i valori da me esaminati.

(1) $\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{1 - k \operatorname{sen}^4 u}{2 \operatorname{sen}^2 u} \operatorname{sn} 2u.$

G. FRATTINI

LA NOZIONE D'INDICE E L'ANALISI INDETERMINATA DEI POLINOMI INTERI

La brevità del tempo mi costringe a tralasciare le dimostrazioni, che saranno pubblicate in luogo opportuno.

Sia D un polinomio, intero rispetto ad una lettera a, e a coefficienti qualunque, razionali o irrazionali, reali o complessi. Non sia quadrato di altro polinomio intero in a, e si supponga di conoscere una soluzione $x = \alpha$, $y = \beta$ dell'equazione

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = 1\,,$$

con α e β interi in a. Ammettendosi in tal modo che la precedente *equazione di* PELL sia possibile in polinomj interi, ne segue che il coefficiente D sarà di grado pari $2n$, condizione evidentemente necessaria, per quanto non sufficiente, della supposta possibilità. Vuolsi ora, in polinomj, interi rispetto ad a, risolvere l'equazione

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = \mathrm{N}\,,$$

con N polinomio intero e di grado ν.

La seguente regola risolve il problema:

1° *Si determini l'indice della soluzione* (α, β) *dell'equazione di* PELL (che cosa debba intendersi per un tal *indice*, e come si determini, sarà detto tra poco: per ora basta sapere che esso è un certo numero intero, positivo o nullo) (¹).

2° *Detto* η *il massimo intero contenuto nella metà del trovato indice, si eguagli* y *ad un polinomio a coefficienti indeterminati e di grado eguale al massimo intero* g *contenuto nel numero:*

$$\frac{n(\eta - 1) + \nu + \eta}{2}\,.$$

Si eguagli al tempo stesso la x *a un altro polinomio, il cui grado sarà deter-*

(¹) Vedasi anche il mio lavoro: *Applicazione di un concetto nuovo all'analisi indeterminata aritmetica e algebrica di 2° grado* (Periodico di matematica, vol. XXI, 1903).

minato dal grado della y, *a fin di trovare, col metodo dei coefficienti indeterminati, quelle soluzioni* (x', y') *nelle quali il grado della* y *non supera* g.

3° *La formola*

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^m (x' \pm y'\sqrt{D}) = P + Q\sqrt{D},$$

estesa a tutti i valori $0, 1, 2, \ldots$ *dell'esponente* m, *e a tutte le già trovate soluzioni particolari* $(x'\ y')$, *darà tutte le soluzioni* $x = P$, $y = Q$ *dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

in polinomj interi in a.

Questo teorema, con le necessarie dimostrazioni, è il soggetto di un mio lavoro preparato per la stampa alcuni anni addietro, ma finora inedito, per ragioni che non occorre qui dire. Esso trae argomento dalla regola per la determinazione dell'indice della soluzione (α, β) dell'equazione Pelliana, e più generalmente dell'indice di un binomio algebrico irrazionale. È questo il sol punto che nella presente breve comunicazione resti a chiarire, per la determinazione del numero η. Intanto si noti che l'enunciato teorema, *col fissare un limite superiore al grado della* y, e un altro conseguentemente al grado della x, porge al metodo dei coefficienti indeterminati il necessario elemento per la risoluzione dell'equazione. Perchè altrimenti, senza la conoscenza di alcun limite, eguagliate la y e la x a polinomj interi, per quanto elevati in grado, rimarrà pur sempre il dubbio se un tal grado sia elevato abbastanza, o non piuttosto inferiore a quello che la relativa incognita comporta nelle soluzioni di minimo grado, e più generalmente in quelle soluzioni dalle quali si derivano tutte le altre.

Importa avvertire che, se N è un quadrato perfetto, tra le soluzioni nelle quali il grado della y non supera g, va annoverata anche quella che corrisponde al caso: $y = 0$. Il suo grado nella y è indeterminato, e ben potrà, nella presente questione, ritenersi eguale all'infinito negativo.

Binomj irrazionali e loro distinzione in iperbolici ed ellittici. Indice di un binomio irrazionale.

Pongasi:

$$D = \omega^2 + r,$$

con ω di grado n, e con r di grado inferiore al grado di ω. Fatta astrazione dal segno di ω, è noto che la precedente eguaglianza è possibile in un sol modo. Si chiami *parte intera della radice* di D il polinomio ω, dopo averne fissato il segno una volta per sempre, e dicasi *resto della radice* il polinomio r.

Si chiami *binomio irrazionale* un'espressione della forma

$$E + F\sqrt{D},$$

dove E ed F indicano *funzioni razionali* di a.

Un tal binomio potrà essere iperbolico od ellittico. Si dirà *iperbolico*, se la parte intera del quoziente $E:F$ sarà eguale ad ω; altrimenti si dirà *ellittico*.

Un binomio iperbolico od ellittico non muta specie, se si moltiplica per un fattore razionale in a, perchè tale moltiplicazione non altera il rapporto $E:F$.

I binomj iperbolici formano un gruppo, vale a dire: il prodotto di due binomj iperbolici è un binomio iperbolico.

Si dirà i n d i c e *di un binomio iperbolico il massimo numero di fattori iperbolici in cui è decomponibile.* Ai binomj ellittici, che non fanno parte del gruppo degl'iperbolici, e sono quindi indecomponibili in fattori iperbolici, si attribuirà l'indice zero.

La moltiplicazione per un fattore razionale, come non modifica il carattere iperbolico ed ellittico di un binomio, così pure ne lascia immutato l'indice. Si può pertanto, nella ricerca dell'indice, al binomio $E+F\sqrt{D}$ sostituirne un altro $e+f\sqrt{D}$, in cui la parte razionale e il coefficiente della radice siano interi rispetto ad a.

Regola per la determinazione dell'indice.

In altre pubblicazioni, diedi già tale regola per il caso aritmetico. Ivi, considerando il binomio $e+f\sqrt{D}$, mostrai che, se le lettere e, f, D rappresentano *numeri* interi e positivi, la regola è duplice, a seconda che il resto della radice è maggiore o minore della parte intera della radice stessa. Se $r \geq \omega$, l'indice del binomio eguaglia il minimo valore che bisogna dare all'esponente k, affinchè risulti ellittico il prodotto

$$(e+f\sqrt{D})\ (\sqrt{D}-\omega)^k .$$

Se invece $r \leq \omega$, l'indice del binomio eguaglia il minimo valore che bisogna dare a k affinchè risulti ellittico il prodotto

$$(e+f\sqrt{D})\ (\omega+1-\sqrt{D})^k .$$

Il numero delle moltiplicazioni per il fattore $\sqrt{D}-\omega$, o per l'altro $\omega+1-\sqrt{D}$, occorrenti a portare il binomio $e+f\sqrt{D}$ dal campo iperbolico all'ellittico fa pertanto conoscere l'indice del binomio stesso.

Una regola consimile, sulla quale, per difficoltà incontrate, dovetti sorvolare nelle precedenti pubblicazioni, vige quando e ed f sono polinomj interi in a. Basterà far uso dei moltiplicatori

$$\sqrt{D}-\omega$$
$$a\omega+1-a\sqrt{D},$$

il primo per il caso in cui r è *completo*, cioè di grado inferiore di una sola unità al grado della radice; il secondo per il caso in cui detto resto sia *incompleto*.

Esempi. Il resto sia completo, e sia:

$$D = a^4 + 2a^2 + a + 1 = (a^2 + 1)^2 + a ;$$
$$\omega = a^2 + 1 ; \; r = a .$$

Se si pone:

$$e = 4a^9 + 8a^7 + 3a^6 + 2a^4 - 9a^3 + a^2 - 4a + 2$$
$$f = 4a^7 + 4a^5 + a^4 - 4a^3 + a^2 - 5a + 2 ,$$

il binomio $e + f\sqrt{D}$ sarà d'indice 3, perchè l'espressione

$$(e + f\sqrt{D}) \, (\sqrt{D} - \omega)^k ,$$

iperbolica per $k = 0 , 1 , 2$, non diviene ellittica che per $k = 3$, come si può vedere facendo il calcolo.

Se invece il resto è incompleto, se per esempio

$$D = (a^2 + 1)^2 - 2 ;$$
$$e = 2a^7 + 2a^5 - 4a^3 + a^2 - a + 1 \; ; \; f = 2a^5 - 2a + 1 ,$$

si trova che l'indice del binomio $e + f\sqrt{D}$ è 2, perchè l'espressione

$$(e + f\sqrt{D}) \, (a\omega + 1 - a\sqrt{D})^k ,$$

iperbolica per $k \leq 1$, diviene ellittica per $k = 2$.

Indice della soluzione (α , β) dell'equazione Pelliana.

Poichè i segni della x e della y in una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

non hanno importanza, si suppongano nelle α e nella β regolati in modo, che il binomio $\alpha + \omega\beta$ non soffra elisione fra i suoi due termini di massimo grado.

Indice della soluzione (α , β) si dirà quello del binomio:

$$\alpha + \beta\sqrt{D} .$$

Applicazione.

Sia da risolvere l'equazione

$$x^2 - \left(\omega^2 - \frac{1}{c^2}\right) y^2 = N ,$$

dove ω ed N sono polinomj interi in a, e dove c indica una costante, indipendente da a. Una soluzione dell'equazione

$$x^2 - \left(\omega^2 - \frac{1}{c^2}\right) y^2 = 1$$

è: $x = \omega c$, $y = c$. — Vediamone l'indice. Esso è l'indice del binomio

$$\omega c + c\sqrt{D},$$

o dell'altro

$$\omega + \sqrt{D},$$

potendosi far astrazione dal fattor razionale c. E poichè i prodotti

$$(\omega + \sqrt{D})\,(\sqrt{D} - \omega) = \frac{1}{c^2},$$

$$(\omega + \sqrt{D})\,(a\omega + 1 - a\sqrt{D}) = \omega + \frac{a}{c^2} + \sqrt{D},$$

sono entrambi ellittici, si conclude che, tanto se il resto è completo, quanto se è incompleto, l'indice dell'adoperata soluzione dell'equazione Pelliana è 1, e che quindi: $\eta = 0$. Ne segue: *tutte le soluzioni intere dell'equazione*

$$x^2 - \left(\omega^2 - \frac{1}{c^2}\right) y^2 = N,$$

dove ω *ed* N *sono polinomj interi in* a, *dei gradi rispettivi* n *e* ν, *e dove* c *è una costante, si derivano da quelle in cui il grado della* y *non supera il limite*

$$\frac{\nu - n}{2}.$$

Se $\nu < n$, ed N non è quadrato [1], l'equazione è impossibile. Se $\nu = n$ e l'equazione è possibile, essa ammette soluzioni con y indipendente da a. Lo stesso dicasi se $\nu = n + 1$. Se $\nu = n + 2$, l'equazione ha soluzioni con y indipendente da a o di primo grado in a. — Ecc.

[1] Si esclude in tal modo che il grado della y sia l'infinito negativo, rispondente all'ipotesi: $y = 0$.

C. SEVERINI

SULLE SUCCESSIONI INFINITE DI FUNZIONI ANALITICHE

Numerose ricerche sono state fatte in questi ultimi anni sull'argomento di cui andiamo ad occuparci secondo l'indirizzo di CAUCHY e RIEMANN [1], ed importanti risultati si sono per questa via ottenuti: notevoli sopratutto quelli relativi a successioni infinite di funzioni analitiche egualmente continue. Nessuno però, che io mi sappia, se n'è occupato dal punto di vista della teoria di WEIERSTRASS, cercando di far dipendere le proprietà di una successione infinita di funzioni analitiche da condizioni relative agli elementi che le determinano, o, ciò che è lo stesso, ai valori assunti da esse funzioni e dalle loro successive derivate in un punto del campo comune di esistenza. L'interesse di una tale ricerca appare subito manifesto quando si pensi che negli ordinari problemi dell'Analisi, come ad esempio in quello sì vasto dell'integrazione delle equazioni differenziali, una funzione analitica viene sempre definita mediante siffatti valori.

Nella presente Nota io espongo delle ricerche, le quali portano alla risoluzione del problema dianzi posto un notevole contributo: i risultati che ottengo sono gli analoghi di quelli relativi a successioni infinite di funzioni analitiche egualmente continue, di cui ho sopra espressamente rilevato l'importanza.

I.

1. Si associno ad un punto x_0 del piano della variabile complessa x le quantità:

$$(1) \qquad f_\mu^{(\nu)}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ \mu = 1, 2, \ldots, \infty \end{pmatrix}$$

[1] Cfr. STIELTYES, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. 8, 1894, p. J, 56. — OSGOOD: *Note on the functions defined by infinite series, whose terms are analytic functions of a complex variable* etc.; Annals of Mathematics, Second Series, vol. 3°, n. 1, October 1901. — ARZELÀ, *Sulle serie di funzioni analitiche*; Rendic. della R. Acc. delle Sc. di Bologna, 1903. — SEVERINI, *Sulle serie di funzioni analitiche*; Foggia, Stab. Tipo-Litog. de Nido Franc. Paolo, 1903; ID., Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, 2° sem., serie 5ª, fasc. 3° e 7°; ID., Atti del R. Ist. Ven., 1904 e 1905. — VITALI, *Sopra le serie di funzioni analitiche*; Rendic. del R. Ist. Lomb., 1903; ID., Annali di Matematica, 1904; ID., Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 3°, 1903. —

scelte in modo da avere:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)} \right| \leqq \frac{1}{r} \text{ [1]} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

ove r indica una costante positiva, non nulla; e s'indichi con K un'area qualsivoglia finita, connessa, contenente il punto x_0, entro la quale ciascuna delle serie

$$\text{(2)} \qquad P_\mu(x, x_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

possa essere continuata analiticamente, e dia luogo ad un ramo di funzione analitica, uniforme $f_\mu \mathrm{K}(x)$.

Le funzioni

$$\text{(3)} \qquad f_1 \mathrm{K}(x), f_2 \mathrm{K}(x), \ldots, f_\mu \mathrm{K}(x), \ldots$$

siano egualmente continue nell'area K: s'intende con ciò che sia possibile, assegnato un numero positivo ε, comunque piccolo, scegliere un numero positivo δ tale che, se x ed x' sono due punti di K, soddisfacenti alla condizione

$$|x - x'| \leqq \delta,$$

risulti:

$$|f_\mu \mathrm{K}(x) - f_\mu \mathrm{K}(x')| \leqq \varepsilon \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Ammettiamo inoltre che, per ogni ν fisso, la successione che si ottiene dalle (1) al variare di μ, tenda sempre ad un limite determinato e finito.

Da ciò segue anzitutto che la successione (3) è nell'area K limitata, esiste cioè una costante positiva, finita M, tale che si ha, qualunque sia x in K:

$$\text{(4)} \qquad |f_\mu \mathrm{K}(x)| \leqq \mathrm{M} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Se infatti d indica la massima distanza di x_0 dal contorno di K, e se m è il massimo numero intero, contenuto in $\frac{d}{\delta}$, si ha per ogni x di K:

$$|f_\mu \mathrm{K}(x) - f_\mu \mathrm{K}(x_0)| \leqq (m+1)\varepsilon \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

e così:

$$|f_\mu \mathrm{K}(x)| \leqq |f_\mu \mathrm{K}(x_0)| + (m+1)\varepsilon \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

che, per quanto abbiamo dianzi posto, dimostra il nostro asserto.

Porter: *On functions defined by infinite series of analitic functions of a complex variable*; Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 6°, n. 1, October 1904. — Montel, *Sur les suites infinies de fonctions*: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1907.

[1] Intendiamo il limite superiore di $\left| \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)} \right|$ per ν infinito. Cfr. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*; Paris, Gauthier-Villars, 1901.

La successione (3) ammetterà allora, come è noto [1], una o più funzioni limiti, alle quali convergeranno in egual grado successioni da essa estratte. Vogliamo far vedere che *queste funzioni limiti, le quali evidentemente risultano analitiche, regolari in* K, *coincidono, a causa dell'ipotesi fatta sulle* (1). A tal'uopo indichiamo con ϱ una quantità positiva, minore della minima distanza di x_0 dal contorno di K. Dalla (4) segue infatti:

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)\right| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

donde, per ogni $|x - x_0| \leqq \varrho' < \varrho$:

$$(5) \qquad \left|\sum_{\nu=\nu'}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu\right| \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu'} \frac{M\varrho}{\varrho - \varrho'} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Questa disuguaglianza basta già a dimostrare che la successione (3) non può ammettere più di una funzione limite, poichè scelto ν' in modo da avere:

$$(6) \qquad \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu'} \frac{M\varrho}{\varrho - \varrho'} \leqq \frac{\sigma}{3},$$

ove σ indica una quantità positiva, arbitrariamente piccola, si può trovare un valore μ_σ dell'indice μ, abbastanza grande, perchè si abbia:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'-1} \frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'-1} \frac{1}{\nu!} f_{\mu'}^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu\right| \leqq \frac{\sigma}{3} \qquad \left(\begin{matrix}\mu > \mu_\sigma, \mu' > \mu_\sigma \\ |x - x_0| \leqq \varrho' < \varrho\end{matrix}\right),$$

con che risulta:

$$|f_\mu K(x) - f_{\mu'} K(x)| \leqq \sigma \qquad \left(\begin{matrix}\mu > \mu_\sigma, \mu' > \mu_\sigma \\ |x - x_0| \leqq \varrho' < \varrho\end{matrix}\right),$$

disuguaglianza impossibile a verificarsi, comunque si prefissi σ, se potessero esistere per la successione (3), nel cerchio (x_0, ϱ') [2], più funzioni limiti. Le funzioni limiti della successione (3) coincidono dunque in tale cerchio, e perciò anche in tutta l'area K.

Si può aggiungere che lo sviluppo dell'unica funzione limite in serie di potenze di $x - x_0$ è dato da

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu,$$

se

$$(8) \qquad f^{(\nu)}(x_0) = \lim_{\mu=\infty} f_\mu^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

[1] Cfr. la seconda delle mie Note dianzi citate negli Atti del R. Istit. Ven.

[2] Con questa notazione indicheremo il cerchio di centro x_0 e raggio ϱ'.

Dalle (5) ed (8) segue intanto, per ogni $|x-x_0| \leqq \varrho'$ e per un r intero, positivo, che può del resto essere qualunque:

$$\left| \sum_{\nu=\nu'}^{\nu=\nu'+r} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu \right| \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu'} \frac{M\varrho}{\varrho-\varrho'},$$

che ci assicura della convergenza della (7) nel cerchio (x_0, ϱ'). Fissato poi, come sopra, il numero positivo σ, arbitrariamente piccolo, e scelto l'indice ν' in base alla (6), si avrà da un certo valore di μ in poi:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'-1} \frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'-1} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu \right| \leqq \frac{\sigma}{3},$$

e così:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f_\mu^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu \right| \leqq \sigma,$$

che è quanto occorre al nostro scopo.

II.

2. Più condizioni sono state indicate perchè una successione infinita di funzioni analitiche, regolari in una data area, sia costituita di funzioni egualmente continue; la più importante consiste nell'essere la successione limitata, nell'esistenza cioè di una costante positiva, finita, di cui sia sempre minore il modulo di ogni funzione di essa: la eguale continuità risulta allora provata per ogni area interna [1] all'area che si considera [2].

Vogliamo ora cercare di trasformare questa condizione nel modo richiesto dal problema posto in principio.

Per non moltiplicare le notazioni continueremo a considerare la successione (3), sulla quale però non faremo più l'ipotesi che esista determinato e finito, per ogni ν fisso, il limite della successione, che si ottiene dalle (1) al variare di μ.

3. Supponiamo che le (3) non assumano mai due dati valori. Possiamo, senza nuocere alla generalità di ciò che andiamo a dire, supporre che tali valori siano i valori 0 ed 1, perchè se fossero due numeri qualsivogliano a e b, si considererebbe la successione delle funzioni:

$$\frac{f_\mu K(x) - a}{b-a} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

che non assumono mai i valori 0 ed 1: tale successione è o no limitata, secondo

[1] Intendiamo che esista una quantità positiva, diversa da zero, di cui sia sempre maggiore la distanza fra due punti presi sopra i due contorni.

[2] Cfr. ad es. le mie Note sopra citate.

che è o no limitata la successione (3). Ammettiamo ancora che dai valori 0 ed 1 le (3) si mantengano sempre differenti in modulo per più di una costante positiva g, e finalmente che sia limitata la successione, che, per $\nu = 0$, si ottiene dalle (1), al variare di μ, intendendo con ciò, come sopra, che i moduli dei termini di questa successione ammettano un limite superiore finito.

Facciamo vedere che *sotto tali ipotesi la successione* (3) *è in un'area* K' *qualsivoglia, interna a* K, *limitata.*

A tal' uopo ricordiamo che *se*:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

è per $|x| < r$ *regolare,* $\neq 0$, $\neq 1$, *e se* θ *indica una quantità positiva, compresa fra* 0 *ed* 1, *risulta per ogni* $|x| \leqq \theta r$:

$$|F(x)| < \Omega(a_0),$$

ove $\Omega(a_0)$ *è una funzione del solo coefficiente* a_0, *e che ammette un limite superiore finito per tutti i valori di* a_0, *che soddisfano alle condizioni*:

$$|a_0| \leqq g_1 \ , \quad \left|\frac{1}{a_0}\right| \leqq g_2 \ , \quad \left|\frac{1}{a_0 - 1}\right| \leqq g_3 \, ,$$

g_1, g_2, g_3 essendo tre costanti positive, finite.

Precisamente si ha:

$$\Omega(a_0) = e^{\frac{2^{24}}{\sqrt{\varkappa}}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^4},$$

ove:

$$\varkappa = \text{Min.}\left(|\log a_0| \ , \ |\log(1 - a_0)| \ , \ \left|\log \frac{a_0 - 1}{a_0}\right|\right),$$

Ciò posto si osservi che, effettuando delle serie (2) la continuazione analitica, si può, mediante uno stesso numero, finito, di serie dedotte, ottenere il valore di ognuna delle (3) per tutti i punti dell'area K'; e quindi, nelle ipotesi poste, risulta senz'altro dal teorema dianzi ricordato, che la successione (3) è in K' limitata.

Si vede bene che per un dato K' basterebbe anche sapere, ferme restando le altre ipotesi, che le (3) si mantengono differenti in modulo dai valori 0 ed 1, per più di un numero fisso, positivo g, in un insieme finito di punti, tali che la minima distanza di uno qualunque di essi dagli altri sia minore della minima distanza che può intercedere fra un punto del contorno di K ed un punto del contorno di K'. Quest' ultima condizione è in particolare soddisfatta per tutte le funzioni (3) che corrispondono a valori dell' indice μ abbastanza grandi, se queste tendono in ogni punto interno a K ad un limite determinato e finito, perchè allora, per un noto teorema di

(¹) Cfr. SCHOTTKY, *Ueber den Picardsche Satz und die Borelsche Ungleichungen*; Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1904, S. 1244-1262. — LANDAU, *Ueber den Picardsche Satz*; Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, 1906, S. 252-318.

Osgood [1], in qualsivoglia area contenuta in K esiste sempre un'area parziale Δ, in cui la successione (3) converge in egual grado ad una funzione analitica, regolare e che perciò contiene necessariamente dei punti ove il limite della (3) è diverso da 0 e da 1: con tali punti è senz' altro evidente che si può formare un insieme della natura di quello dianzi considerato, purchè nella successione (3) non si tenga conto dei termini con indice inferiore ad un certo limite opportunamente scelto. Questi termini essendo d'altronde in numero finito si ha il risultato [2] che *se le funzioni* (3) *non assumono mai nell'area* K *due valori distinti qualsivogliano* a, b, *e la successione di tali funzioni ammette in ogni punto di* K *un limite determinato e finito, la successione medesima è, in ogni area* K', *interna a* K, *limitata; ed ivi converge pertanto in egual grado ad una funzione analitica regolare.*

Terminando questo paragrafo osserveremo che l' ipotesi della esistenza di due valori, dai quali le (3) si mantengono differenti in modulo per più di una costante positiva, finita g in tutta l'area K, o in un insieme finito di punti come sopra, può essere sostituita coll'altra, del resto equivalente, che ne esista uno di tali valori [3].

4. Vogliamo ora far vedere che, *ferma restando la condizione che le* (3) *non assumano mai i valori* 0 *ed* 1, *è anche sufficiente, per lo scopo voluto, porre che siano verificate le seguenti disuguaglianze*:

$$(9)\qquad |f_\mu^{(0)}(x_0)| \leqq g_1\,,\quad \left|\frac{1}{f_\mu^{(0)}(x_0)}\right| \leqq g_2\,,\quad \left|\frac{1}{f_\mu^{(0)}(x_0)-1}\right| \leqq g_3 \qquad (\mu=1\,,2\,,\ldots,\infty)$$

ove, come sopra, g_1, g_2, g_3 *sono tre costanti positive, finite.*

Fissata infatti la quantità θ, compresa fra 0 ed 1, e detta δ_{x_0} la minima distanza del punto x_0 dal contorno di K, per il teorema ricordato nel paragrafo precedente, risulta nel cerchio $(x_0\,, \theta\delta_{x_0})$:

$$|f_\mu \mathrm{K}(x)| \leqq \Omega(f_\mu^{(0)}(x_0)) \qquad (\mu=1\,,2\,,\ldots,\infty)$$

ed indicando con $\Omega(x_0)$ il limite superiore, finito, di $\Omega(f_\mu^{(0)}(x_0))$:

$$(10)\qquad |f_\mu \mathrm{K}(x)| \leqq \Omega(x_0) \qquad (\mu=1\,,2\,,\ldots,\infty).$$

Alla stessa conclusione si perviene considerando le funzioni:

$$\mathrm{G}_\mu \mathrm{K}(x) = \frac{1}{f_\mu \mathrm{K}(x)}\,,\quad \overline{\mathrm{G}}_\mu \mathrm{K}(x) = \frac{1}{1-f_\mu \mathrm{K}(x)} \qquad (\mu=1\,,2\,,\ldots,\infty),$$

le quali sono regolari nell'area K e non assumono mai in tale area i valori 0 ed 1.

(1) Loc. cit.
(2) Cfr. Vitali, 2ª Nota già citata.
(3) Cfr. Montel, loc. cit.

È facile infatti verificare che tanto per le $G_\mu K(x)$ quanto per le $\overline{G}_\mu K(x)$ sono soddisfatte condizioni analoghe alle (9).

Per le $G_\mu K(x)$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} |G_\mu K(x_0)| = \left|\dfrac{1}{f_\mu^{(0)}(x)}\right| \leqq g_2 \,,\ \left|\dfrac{1}{G_\mu K(x_0)}\right| = |f_\mu^{(0)}(x_0)| \leqq g_1 \\ \left|\dfrac{1}{G_\mu K(x_0) - 1}\right| = \left|\dfrac{f_\mu^{(0)}(x_0)}{1 - f_\mu^{(0)}(x_0)}\right| \leqq g_1 g_3; \end{array}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty);$$

per la $\overline{G}_\mu K(x)$ si ha parimenti:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{G}_\mu K(x_0)| = \left|\dfrac{1}{1 - f_\mu^{(0)}(x_0)}\right| \leqq g_3 \,, \\ \left|\dfrac{1}{\overline{G}_\mu K(x_0)}\right| = |1 - f_\mu^{(0)}(x_0)| \leqq 1 + |f_\mu^{(0)}(x_0)| \leqq 1 + g_1 \\ \left|\dfrac{1}{\overline{G}_\mu K(x_0) - 1}\right| = \left|\dfrac{1 - f_\mu^{(0)}(x_0)}{f_\mu^{(0)}(x_0)}\right| \leqq (g_1 + 1)\, g_2 \end{array}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Se ne deduce che, per ogni x interno al cerchio $(x_0\,, \theta\delta_{x_0})$, sono soddisfatte, insieme colla (10), le disuguaglianze:

$$\left|\frac{1}{f_\mu K(x)}\right| \leqq \Omega_1(x_0)\,, \quad \left|\frac{1}{1 - f_\mu K(x)}\right| \leqq \Omega_2(x_0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

$\Omega_1(x_0)\,, \Omega_2(x_0)$ essendo costanti positive, finite, indipendenti dall'indice μ.

Se dunque consideriamo un punto x_0' interno al cerchio $(x_0\,, \delta_{x_0})$ ed i valori delle $f_\mu K(x)$ in tale punto, ci ritroviamo nelle stesse condizioni poste per il punto x_0, e quindi, assegnata un'area K' interna a K, poichè, mediante la continuazione analitica delle serie (2), si può, con lo stesso numero finito di serie dedotte, ottenere il valore di ognuna delle (3) per tutti i punti di K', concludiamo senz'altro, che la successione (3) è quivi limitata.

5. La condizione che le funzioni (3) non assumano mai nell'area K i valori 0 ed 1 può essere tolta, e sostituita con altra meno restrittiva.

Osserviamo che gl'insiemi dei punti di K' nei quali una almeno delle (3) assume rispettivamente i valori 0 ed 1, sono entrambi numerabili, perchè composti ciascuno di un insieme numerabile d'insiemi finiti: infatti una delle (3) non può assumere, a causa delle (9), che supponiamo sempre verificate, uno dei valori 0 ed 1 in infiniti punti di K'. Numerabili saranno pertanto anche gl'insiemi $G_0\,, G_1$ dei punti interni a K, in cui una almeno delle funzioni (3) assume rispettivamente i valori 0 ed 1. Noi ammetteremo in più che tali insiemi siano *riducibili*, per il che occorre, come ben si sa, che siano numerabili anche gl'insiemi derivati $G_0'\,, G_1'$; ed inoltre che a nessuno di questi appartenga x_0. In tale ipotesi è facile vedere che la successione (3) è ancora limitata in ogni area K' interna a K. Assegnato infatti comunque K′, si consideri un campo K″ interno a K e che contenga internamente K′. Per considerare il caso più generale supponiamo che il contorno λ di K″ sia un contorno multiplo, e chiamiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ i contorni semplici, che lo compongono. Indichiamo in corrispondenza con $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$, delle linee finite, continue, interne a K, congiungenti il punto x_0 con un punto di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ rispettivamente; e tanto le linee $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ quanto le $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ siano scelte in modo che sopra di esse non cada nessun punto degli insiemi G_0, G_1, G'_0, G'_1: per note proprietà della teoria degl'insiemi è chiaro che esistono infiniti sistemi di linee così fatte. Sarà allora possibile in ogni punto di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$, assunto come centro, descrivere un cerchio interno a K entro il quale non cada nessun punto di G_0, G_1 ed il raggio massimo di tale cerchio, come funzione dei punti di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ avrà un minimo ϱ diverso da zero. D'altra parte, continuando analiticamente le serie (2), si può, mediante uno stesso numero finito di serie dedotte, ottenere il valore di ognuna delle (3) in tutto il campo che viene ricoperto da un cerchio di raggio ϱ mentre il suo centro percorre le linee $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$; nel quale campo, e perciò anche sul contorno di K″, la successione (3) deve essere (paragrafo precedente) limitata. E tale è allora anche nell'area K′, come subito si vede in base alla formola di Cauchy:

$$f_\mu k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k''} \frac{f_\mu k(t)}{t-x} dt \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

ove con k'' indichiamo il contorno di K″.

Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema:

Se gl'insiemi G_a, G_b dei punti interni a K, in cui qualcuna delle funzioni (3) *assume rispettivamente due valori distinti, qualsivogliano a e b, sono riducibili e nessuno dei due ha il punto x_0 come punto limite; se inoltre sono soddisfatte le condizioni:*

$$(9') \quad |f_\mu^{(0)}(x_0)| \leqq g_1 \; ; \quad \left| \frac{1}{f_\mu^{(0)}(x_0) - a} \right| \leqq g_2 \; ; \quad \left| \frac{1}{f_\mu^{(0)}(x_0) - b} \right| \leqq g_3 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

ove g_1, g_2, g_3, sono tre costanti positive, finite, la succesione (3) *è, in ogni area K′ interna a K, limitata.*

Osservazione 1ª. — È ovvio che ove si tratti soltanto di stabilire che la successione (3) è, in una determinata area K′, interna a K, limitata, non interessa vedere se gl'insiemi G_0, G_1 sono riducibili, ma solo assicurarci che esistono due sistemi di linee come $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$.

Osservazione 2ª. — Chi volesse, potrebbe in modo analogo generalizzare il teorema enunciato alla fine del paragrafo 3, sostituendo alla condizione che le (3) non assumano mai i valori a, b, l'altra che siano riducibili gl'insiemi G_a, G_b; e basterebbe anche supporre, ferma restando l'ipotesi che le (3) tendano in ogni punto interno a K ad un limite determinato e finito, che tale condizione fosse soddisfatta per una successione infinita di funzioni estratte dalla (3), onde concludere che questa in un'area K' interna a K converge (*in egual grado semplicemente*) ad una funzione analitica, regolare.

6. I risultati dei paragrafi precedenti sulla ricerca delle condizioni perchè la successione (3) sia limitata, possono essere generalizzati, considerando, invece di due valori fissi a, b, due valori a_μ, b_μ variabili con μ, purchè tali che i loro moduli restino compresi fra limiti finiti ed il modulo della differenza $a_\mu - b_\mu$ si mantenga sempre maggiore di una quantità finita, maggiore di zero. In tal caso dalla successione (3) si deduce infatti, analogamente a quanto si è detto nel paragrafo 3, la successione:

$$\frac{f_\mu \mathrm{K}(x) - a_\mu}{b_\mu - a_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

che è limitata o no secondo che tale è la (3), e che è composta di funzioni che non assumono mai i valori 0 ed 1.

7. Altri risultati importanti, i quali trovano principalmente la loro applicazione nello studio delle successioni infinite di funzioni armoniche, si possono avere, come ho indicato in una Memoria su questo argomento, recentemente presentata all'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania [1], scindendo in ciascuna delle tre la parte reale dalla parte immaginaria.

Fra detti risultati merita principalmente di essere ricordato, a complemento delle ricerche esposte negli ultimi cinque paragrafi, il seguente, che cioè *la successione* (3) *è in ogni area* K' *interna a* K *limitata, se tale è la successione che per* $\nu = 0$ *si ottiene dalle* (1) *al variare di* μ, *e l'insieme dei punti interni a* K *ove le parti reali (ovvero i coefficienti delle parti immaginarie) assumono un dato valore, che può anche variare con* μ, *purchè resti compreso fra limiti finiti, è riducibile, non contiene* x_0 *e non ha* x_0 *come punto limite.*

Rimandiamo per maggiori dettagli alla citata Memoria.

III.

8. Riprendendo ora la questione che in principio abbiamo posto, possiamo vedere, in base a quanto è stato sopra detto, e segnatamente in base ai risultati dei paragrafi 1 e 5, che se le quantità $f_\mu^{(\nu)}(x_0)$ ammettono, per ogni ν fisso, un limite determinato e finito, al variare di μ, e con a e b indichiamo ora in particolare due valori, distinti fra loro, e diversi da $\lim\limits_{\mu=\infty} f_\mu^{(0)}(x_0)$, per poter concludere che la successione (3), in ogni area K' interna a K converge in egual grado ad una funzione analitica, regolare, basta che, almeno a partire da un certo valore nell'indice μ in poi, siano riducibili e non ammettano il punto x_0 come punto limite gl'insiemi dei punti G_a, G_b in cui qualcuna delle (3) assume rispettivamente i valori a e b: in tal

[1] Adunanza del 15 marzo 1908.

caso le (9′) sono anch'esse verificate da un certo valore dell'indice μ in poi, e però la successione (3) è limitata in K′.

Le medesime condizioni sono al nostro scopo necessarie. Ciò è senz'altro evidente per la prima; quanto alla seconda si osservi che se $\overline{x}$ è un punto di K′, appartenente all'uno o all'altro dei due insiemi derivati G'_a, G'_b di G_a, G_b, corrispondenti a valori di μ pei quali si ha: $f^{(0)}_\mu(x_0) \neq a$, $f^{(0)}_\mu(x_0) \neq b$, ad esempio a G'_a, poichè in ogni intorno di $\overline{x}$ cadono infiniti punti, ove qualcuna delle (3) assume il valore a, e le (3) medesime sono allora egualmente continue, dovrà evidentemente risultare:

$$\lim_{\mu=\infty} f_\mu K(\overline{x}) = a.$$

Se ne ricava che i punti di G'_a, appartenenti a K′, sono in numero finito, perchè altrimenti dovrebbe aversi costantemente:

$$\lim_{\mu=\infty} f_\mu K(x) = a$$

il che non si verifica per $x = x_0$.

L'insieme G'_a sarà pertanto numerabile e perciò G_a riducibile. Il medesimo dicasi di G_b. Col medesimo ragionamento si prova che il punto x_0 non può appartenere nè a G'_a nè a G'_b.

Concludendo siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema:

Si associno ad un punto x_0 del piano della variabile complessa x le quantità:

$$(1) \qquad f^{(\nu)}_\mu(x_0) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ \mu = 1, 2, \ldots, \infty \end{pmatrix}$$

scelte in modo da avere:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}_\mu(x_0)\right|} \leqq \frac{1}{r} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

ove r indica una costante positiva, non nulla; e s'indichi con K un'area qualsivoglia, connessa, contenente il punto x_0, entro la quale ciascuna delle serie:

$$(2) \qquad P_\mu(x, x_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}_\mu(x_0)(x - x_0)^\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

possa essere continuata analiticamente, e dia luogo ad un ramo di funzione analitica, uniforme, $f_\mu K(x)$.

Affinchè in ogni area K', *interna a* K, *la successione*

$$f_\mu \mathrm{K}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{3}$$

converga in egual grado ad una funzione analitica regolare, è necessario e sufficiente:

a) *che per ogni* ν *fisso, le quantità* (1) *tendano, al crescere di* μ, *ad un limite determinato e finito;*

b) *che, almeno a partire da un certo valore dell'indice* μ *in poi, gl'insiemi* G_a, G_b *dei punti interni a* K, *ove qualcuna delle* (3) *assume rispettivamente due valori* a, b *distinti fra loro e diversi da* $\lim\limits_{\mu=\infty} f_\mu^{(0)}(x_0)$, *siano riducibili e non abbiano come punto limite il punto* x_0.

Osservazione. — Se in particolare il campo K è tale che nel suo contorno non cadano punti singolari per le (3), la condizione che gl' insiemi G_a, G_b siano riducibili deve, come è ovvio, sostituirsi coll'altra che abbiano insiemi derivati finiti.

9. Il teorema precedente può essere facilmente generalizzato, tenendo conto di quanto è stato detto nel paragrafo 6.

10. Le precedenti ricerche trovano in particolare applicazione nello studio delle serie e dei prodotti infiniti di funzioni analitiche, e dànno luogo a notevoli risultati. Per brevità omettiamo di enunciarli.

S. ZAREMBA

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET

§ 1.

Les considérations qui vont suivre s'appliquent aussi aisément à l'espace qu'au plan, de sorte que c'est seulement pour fixer les idées que nous nous bornerons au cas du plan.

Considérons dans le plan un système de coordonnées rectangulaires (x, y) ainsi qu'un domaine (D) ne s'étendant pas à l'infini et que je supposerai être quarrable.

Envisageons en outre d'une part une fonction continue σ définie sur la frontière (S) du domaine (D) et d'autre part l'ensemble (E) de toutes les fonctions f jouissant des propriétés suivantes:

1° Chacune des fonctions f est continue à l'intérieur du domaine (D) ainsi que sur la frontière (S) de ce domaine.

2° Les valeurs périphériques de chacune des fonctions f coïncident avec les valeurs de la fonction σ.

3° A *l'intérieur* du domaine (D) les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.

Il peut arriver que, pour aucune des fonctions f, l'intégrale

$$\text{(1)} \qquad A(f) = \int_{(D)}\int \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

ne prenne une valeur finie. C'est ce que M. HADAMARD a montré sur un exemple très simple [1]. Nous admettrons que la fonction σ vérifie les conditions voulues pour que la circonstance précédente ne se présente pas. Les valeurs de l'intégrale $A(f)$ admettront alors une borne inférieure I parfaitement déterminée. Cela posé, voici le Principe de DIRICHLET tel que le comprenait RIEMANN: il existera dans l'ensemble (E) une fonction u vérifiant l'équation:

$$\text{(2)} \qquad A(u) = I.$$

[1] HADAMARD, *Sur le Principe de Dirichlet* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1906, p. 135).

C'est, on le sait, de là que RIEMANN concluait la possibilité du Problème de DIRICHLET.

A la suite de la critique bien connue de WEIERSTRASS, l'essai qu'avait fait H. WEBER (1), sans la connaître, ne fut pas repris pendant longtemps et les recherches relatives à l'existence de la solution du Problème de DIRICHLET restèrent indépendantes du fait de l'existence du nombre I. Ce n'est qu'en 1897 que M. C. ARZELÀ (2), prévoyant le parti qu'il serait possible de tirer de cette circonstance, a publié une note intéressante sur ce sujet et c'est seulement plus tard qu'il a été donné à M. D. HILBERT (3) de vaincre toutes les difficultés de la questions dans un cas particulier.

Depuis on a obtenu dans cette voie des résultats d'une remarquable généralité (4). En reprenant à mon tour la question, je me propose d'indiquer une méthode nouvelle qui permettra de retrouver ces résultats d'une façon très simple, sans rien faire perdre d'essentiel à leur généralité.

§ 2.

Posons d'une façon générale

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{B}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \int_{(\mathrm{D})}\int \left\{ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \right\} dx\, dy$$

et considérons le Problème suivant:

Etant donné une fonction φ telle que l'intégrale $\mathrm{A}(\varphi)$ ait une valeur bien déterminée et finie, déterminer une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D), telle que l'intégrale $\mathrm{A}(v)$ soit finie et telle en outre que, pour toute fonction h, harmonique à l'intérieur du domaine (D), l'on ait:

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{B}(\varphi, h) = \mathrm{B}(v, h)$$

pourvu que l'intégrale $\mathrm{A}(h)$ ne soit pas dépourvue de signification.

J'appellerai ce Problème, *Problème de* DIRICHLET *transformé*, ou même simplement, *Problème transformé.*

Il est aisé de voir que la solution de ce Problème, quand elle existe, est déterminée à une constante additive près.

(1) Journal de Crelle, 1871.

(2) *Sul Principio di Dirichlet*, Rend. della R. Acc. di Bologna, 1897.

(3) *Ueber das Dirichletsche Princip* (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900). *Ueber das Dirichletsche Princip* (Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901).

(4) Voir en particulier, dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, les travaux suivants: BEPPO LEVI, *Sul principio di Dirichlet* (2° semestre 1906). — FUBINI, *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari* (1° semestre 1907). — LEBESGUE H., *Sur le Problème de Dirichlet* (2° semestre 1907).

En effet, si une fonction v_0 est une solution du Problème, la fonction:

$$v_0 + \text{Const}$$

en sera évidemment une autre. D'autre part, si chacune des fonctions v' et v'' est une solution du Problème considéré, on aura:

$$\begin{aligned} B(v', h) &= B(\varphi , h) , \\ B(v'', h) &= B(\varphi , h) , \end{aligned}$$

d'où:

$$B(v' - v'', h) = 0$$

pourvu que la fonction harmonique h ne rende pas l'intégrale $A(h)$ infinie.

Posons, comme il est permis:

$$h = v' - v'' ;$$

il viendra:

$$B(v' - v'' , v' - v'') = A(v' - v'') = 0$$

d'où:

$$v' - v'' = \text{Const.}$$

Le théorème est donc établi.

§ 3.

On verra tout à l'heure que le Problème transformé est toujours possible.

Admettons-le provisoirement et voyons quel parti on peut en tirer pour l'étude des questions qui se rattachent au Principe de Dirichlet.

On a tout d'abord le théorème suivant:

Lorsque parmi les fonctions, faisant partie de l'ensemble (E), défini au § 1, il existe une fonction harmonique u, cette fonction représente une solution du Problème transformé par rapport à chacune de celles des fonctions de l'ensemble considéré, pour lesquelles l'intégrale $A(f)$ a une valeur finie.

Ce théorème entraîne la conséquence suivante: la fonction u, quand elle existe, satisfait à l'équation (2).

En effet, la lettre h ayant la même signification que plus haut, nous aurons:

$$B(f , h) = B(u , h)$$

d'où:

$$B(f , u) = A(u) ,$$

en posant, comme on en a le droit,

$$h = u .$$

On aura donc:

$$A(f) = A(u) + A(f - u) .$$

Par conséquent, à moins que la fonction f ne se confonde avec la fonction u, on aura:

$$A(f) > A(u).$$

Cela prouve que la fonction u satisfera bien à l'équation (2).

Voici maintenant un second théorème qui complète le précédent.

Considérons, dans l'ensemble (E), une fonction f_0, telle que l'intégrale $A(f_0)$ soit finie et désignons par w une solution du Problème transformé pour le domaine (D) et par rapport à la fonction f_0. Lorsque le domaine (D) satisfait à une condition très générale que j'énoncerai tout à l'heure et que j'appellerai pour le moment la condition (C), la fonction w admet des valeurs périphériques parfaitement déterminées, lesquelles ne diffèrent de celles de la fonction f_0, et par conséquent aussi de celles de toute autre fonction de l'ensemble considéré, que par une constante.

Ce théorème permet évidemment de démontrer l'existence de la solution du Problème de DIRICHLET avec une très grande généralité et, en tenant compte du théorème énoncé en premier lieu, il permet aussi de justifier le Principe de DIRICHLET dans une très large mesure.

Je ne puis me dispenser de dire en quoi consiste la condition (C), qui constitue la restriction avec laquelle ma méthode permet de démontrer le second des théorèmes précédents, puisque, sans connaître cette condition, on ne pourrait pas juger du degré de généralité des résultats.

Pour énoncer cette condition, considérons un point quelconque O situé sur la frontière (S) du domaine (D) et, de ce point comme centre, décrivons un cercle (Σ) de rayon r. L'ensemble des points intérieurs à la fois au cercle (Σ) et au domaine (D), pourra constituer un domaine comprenant un nombre fini ou infini de régions distinctes (d). Désignons par (d') l'une de ces régions et considérons un point variable M assujetti à rester à l'intérieur de la région (d'). Soit Θ l'angle formé par le rayon OM avec un axe fixe. Imposons à l'angle Θ la condition de varier d'une façon continue avec la position du point M. Dans ce cas, la condition (C) pourra être énoncée de la façon suivante: Lorsque le rayon r du cercle (Σ) n'est pas supérieur à une certaine longueur δ, indépendante de la position du point O sur la frontière (S) du domaine (D) et du choix de la région (d') parmi les régions (d), les valeurs de l'angle Θ devront, de quelque façon que se déplace le point M à l'intérieur de la région (d'), ne pas sortir d'un intervalle (Θ_1, Θ_2) tel que l'on ait:

$$|\Theta_2 - \Theta_1| < 2\alpha$$

en désignant par α un nombre positif fini qui ne devra dépendre, comme la longueur δ, ni de la position du point O sur la frontière du domaine (D), ni du choix de la région (d') parmi les régions (d).

J'ajoute que la méthode qui me servira à résoudre le Problème transformé, donne le moyen de démontrer très simplement les deux théorèmes fondamentaux que j'ai énoncés dans ce paragraphe.

§ 4.

Pour le cercle, la solution du Problème transformé est immédiate. Désignons, comme précédemment, par φ la fonction donnée et par v la fonction demandée. Soit en outre r le rayon du cercle. Le plan étant rapporté à un système de coordonnées polaires (ϱ, Θ) ayant le centre O du cercle pour pôle, on aura:

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ X_k B(\varphi, X_k) + Y_k B(\varphi, Y_k) \}$$

en désignant par a_0 une constante arbitraire et en posant:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos k\Theta$$

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \sin k\Theta .$$

§ 5.

Considérons maintenant un domaine (D) pouvant être défini comme l'ensemble des points intérieurs à l'un au moins de deux autres domaines (D_1) et (D_2) ayant des points intérieurs communs.

Sachant résoudre le Problème transformé pour chacun des domaines (D_1) et $(D)_2$, en peut aisément le résoudre pour le domaine (D) au moyen d'un procédé alterné, analogue au procédé bien connu de M. Schwarz.

Toutefois, la démonstration de la convergence des suites infinies que l'on a à considérer ici, est tirée de considérations essentiellement différentes de celles dont on se sert dans la méthode de M. Schwarz.

§ 6.

Voici enfin de quelle façon le Problème transformé peut être résolu dans le cas général. Considérons, comme dans la méthode de balayage, une suite infinie de cercles

$$(C_1), (C_2), (C_3), \ldots$$

tous intérieurs au domaine (D) et tels que tout point de ce domaine soit intérieur à l'un au moins des cercles précédents. Désignons par (D_n) le domaine formé par l'ensemble des points dont chacun est intérieur à l'un au moins des n cercles:

$$(C_1), (C_2), (C_3), \ldots (C_n) .$$

Le domaine (D_n) pourra se composer de plusieurs régions distinctes, mais cela ne nous gênera en rien. La lettre φ continuant à représenter la fonction donnée, considérons une suite infinie, dont le premier terme φ_0 serait déterminé par l'equation

$$\varphi_0 = \varphi\,,$$

le terme de rang $n+1$, φ_n, se déduisant du terme φ_{n-1} de la façon suivante. À l'intérieur du domaine (D_n) la fonction φ_n est égale à une solution du Problème transformé pour ce domaine et par rapport à la fonction φ_{n-1}, dans le reste du domaine (D), on a:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}\,.$$

Il est évident que le procédé alterné permettra de poursuivre le calcul des termes de la suite

$$\varphi_0\,, \varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots$$

aussi loin que l'on voudra.

Cela posé, on prouve, en se servant convenablement des intégrales:

$$B(\varphi_p\,, \varphi_q)\,,$$

que l'équation:

$$\lim_{n=\infty} A(v - \varphi_n) = 0$$

définit, à une constante additive près, une fonction v, harmonique à l'intérieur du domaine (D). On s'assure ensuite que la fonction v n'est autre chose que la solution demandée du Problème transformé.

La démonstration de la légitimité de la méthode précédente repose uniquement sur les hypothèses suivantes:

1) Le domaine (D) ne s'étend pas à l'infini et est quarrable.

2) L'intégrale $A(\varphi)$ a une valeur finie parfaitement déterminée.

L. AUTONNE

SUR LES FONCTIONS MONOGÈNES D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE

I.

Une quantité hypercomplexe x, appartenant à un groupe (ε) d'ordre n, est, comme on sait, une expression

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} x_{\beta}, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Les x_β son des nombres « scalaires » (c'est-à-dire ordinaires, réels ou complexes), tandis que les ε_β sont des nombres « fondamentaux », c'est-à-dire des symboles choisis de façon que le produit de deux quantités, prises dans le groupe (ε), appartienne encore à (ε).

La théorie des nombres hypercomplexes est aujourd'hui bien connue, grâce aux recherches de Gauss, puis de MM. Poincaré, Dedekind, Study, ... et, plus récemment, de MM. Molien, Cartan, Frobenius, ...

Je suivrai la terminologie et les notations de M. Frobenius (Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin, avril 1903, *Théorie der hyperkomplexen Grössen*). J'emprunterai à M. Cartan (*Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complèxes*, Annales de Toulose, 1898) la notion, expliquée ci-dessous, de nombre « pseudo-nul ».

II.

Prenons n fonctions

$$y_\alpha = y_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

des n variables x_β. La quantité hypercomplexe

$$y = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha y_\alpha$$

sera, par définition, « fonction » de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_{\beta}{}' \varepsilon_\beta x_\beta .$$

J'écrirai, avec M. FROBENIUS,

$$y = f((x)),$$

réservant la notation $f(x)$ pour une fonction des x_β.

J'ai recherché (¹) ce qui dans la fonction

$$y = f((x))$$

pouvait, de près ou de loin, rappeler la monogénéité des fonctions d'une variable complexe. Le groupe étudié est le groupe simple, d'ordre $n = r^2$, et, par conséquent, à multiplication non commutative. A été introduit un certain entier, « indice de monogénéité », qui joue un rôle important et peut servir à la classification des fonctions $f((x))$.

Maintenant j'étudie un autre groupe à multiplication commutative, pour lequel le problème posé, se trouve dans ce qui suit, résolu complètement.

III.

Rappelons quelques formules et locutions de M. FROBENIUS.

La multiplication des nombres fondamentaux est donnée par les formules:

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n), \tag{0}$$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \text{constante scalaire.}$$

Soient, pour des quantités scalaires $\xi_\alpha, y_\beta, z_\gamma$, prises à volonté, $F(\xi, y, z)$ la forme trilinéaire

$$F(\xi, y, z) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha y_\beta z_\gamma a_{\alpha\beta\gamma},$$

$$r_{\beta\gamma}(\xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_\beta \partial z_\gamma} \; ; \; s_{\alpha\gamma}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \partial z_\gamma} \; ; \; t_{\alpha\beta}(z) = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi_\alpha \partial y_\beta} .$$

M. FROBENIUS introduit trois matrices n-aires, savoir

$$\text{la matrice} \left\{ \begin{array}{ll} \text{du groupe,} & S(x) = [s_{\alpha\gamma}(x)] \\ \text{parastrophe,} & R(\xi) = [r_{\beta\gamma}(\xi)] \\ \text{antistrophe,} & T(z) = [t_{\alpha\beta}(z)]. \end{array} \right.$$

(¹) *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité.* (Journal de Mathématiques, 1907). *Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1906). Voir aussi les Comptes Rendus, du 28 mai 1906.

On suppose que le déterminant de la parastrophe n'est pas identiquement nul, $|R(\xi)| \neq 0$.

Il existe « une unité principale »

$$e = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha e_\alpha$$

telle que

$$S(e) = T(e) = E = n\text{-aire unité}.$$

Le produit $x = yz$ des deux quantités hypercomplexes se calcule de la façon habituelle, mais en tenant compte des formules (0). Il vient:

$$x_\alpha = \sum_{\beta\gamma} y_\beta z_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

En général, la multiplication n'est pas commutative. Pour exprimer qu'elle est associative on écrit que, pour y et z arbitraires, $S(y)$ et $T(z)$ sont échangeables.

Enfin

$$S(yz) = S(y)S(z) \ ; \ T(xz) = T(z)T(x).$$

Si la multiplication est commutative, $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$; la matrice $R(\xi)$ est symétrique; $S(x) = T(x)$; $S(x)$ et $S(y)$ sont échangeables.

D'après M. Cartan, un nombre x pseudo-nul est celui pour lequel la matrice $S(x)$ a son déterminant caractéristique

$$|\varrho E - S(x)| = S(\varrho e - x| = \varrho^n.$$

IV.

Pour un groupe à multiplication commutative, la monogénéité peut être définie de la façon habituelle. Pour que la fonction

$$y = f((x)) = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha y_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$$

de la variable complexe

$$x = \sum_{\beta} \varepsilon_\beta x_\beta$$

soit monogène, il faut et suffit *par définition* que la différentielle

$$dy = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha dy_\alpha = \sum_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha dx_\beta,$$

où

$$y_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta},$$

soit, dans le groupe (ε), le produit de la différentielle

$$dx = \sum_\beta \varepsilon_\beta dx$$

par la quantité hypercomplexe

$$y' = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y'_\alpha (x_1, \ldots, x_n).$$

Autrement dit:

$$dy = y'dx = \sum_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha dx_\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} y'_\gamma dx_\beta$$

$$y_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} y'_\gamma = s_{\alpha\beta}(y').$$

Il vient ainsi entre les $2n$ fonctions inconnues y_α et y'_α des n variables x_β, un système de n^2 équations, aux dérivées partielles du premier ordre.

On est ramené à un problème de calcul intégral.

Ce problème est complètement posé, dès qu'on se donne la matrice $S(x)$.

V.

Introduisons maintenant le groupe (ε) sur lequel partent les présentes recherches. Prenons des matrices m-aires de la forme

$$X = aE + A,$$

où

$a =$ constante; $p \leq m$;
$E =$ matrice m-aire unité;
$A =$ « racine de zéro », matrice m-aire telle que $A^p = 0$.

Supposons-les échangeables entre elles et combinons-les par addition et multiplication. On obtient un système *fermé* Ω; autrement dit: si Ω contient X_1 et X_2, Ω contiendra aussi

$$X_1 + X_2 \text{ et } X_1X_2 = X_2X_1.$$

Admettons enfin que toutes les racines de zéro, m-aires, s'expriment linéairement à l'aide de n d'entre elles,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

linéairement indépendantes. On a alors pour toute matrice de Ω

$$X = x_0E + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n.$$

Les matrices m-aires X forment la représentation (« Darstellung ») d'un groupe (ε), d'ordre $n+1$, constitué par les nombres hypercomplexes

$$x = x_0\varepsilon_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

les $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ désignant les $n+1$ nombres fondamentaux.

C'est sur ce groupe que portent les présentes recherches.

La multiplication y est commutative. La matrice parastrophe n'as pas son déterminant identiquement nul.

Voici ce que l'on reconnait successivement :

1° ε_0 est l'unité principale, $S(\varepsilon_0) = E = (n+1)$-aire unité ;

2° les nombres x, où $x_0 = 0$, sont les nombres pseudo-nuls de M. Cartan ;

3° par un choix convenable des variables $x_1, \ldots, x_n$, la matrice $(n+1)$-aire $S(x)$ peut s'écrire

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & & & & & \\
x_1 & x_0 & & & & \\
x_2 & s_{21} & x_0 & & & \\
x_3 & s_{31} & s_{32} & x_0 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
x_n & s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \ldots & s_{n,n-1} \; x_0
\end{array}$$

$$s_{\alpha\beta} = \sum_\lambda a_{\alpha\beta\lambda} x_\lambda \quad a_{\alpha\beta\lambda} = a_{\alpha\lambda\beta} = C^{te}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, \alpha - 1 \; ; \; \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n \; ; \; \beta < \alpha).$$

$$|\varrho E - S(x)| = (\varrho - x_0)^{n-1}.$$

Bien entendu $S(x)S(y) = S(y)S(x)$.

VI.

Pour le groupe en question, j'ai construit toutes les fonctions monogènes

$$y = f((x)) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha(x_0 \, ; x_1, \ldots, x_n)$$

$$(\beta, \alpha = 0, 1, \ldots, n)$$

de la variable hypercomplexe x

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta \, .$$

y_α ne dépend que des variables $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha$ et se construit à l'aide de $y_0, y_1, \ldots, y_{\alpha-1}$, par la formule de récurrence suivante :

$$y_\alpha = P_\alpha +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left[P_0 x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha-1} \int_0^{x_\beta} dx_\beta \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha-1} a_{\alpha\beta\lambda} y_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_\beta, 0, 0, \ldots) \right]$$

$$P_\alpha = \text{fonction arbitraire de } x_0 \, ;$$

$$P'_\alpha = \frac{dP_\alpha}{dx_0}, \; P''_\alpha = \frac{d^2P_\alpha}{dx_0^2}, \ldots$$

De là successivement

$$y_0 = P_0$$

$$y_1 = P_1 + \frac{\partial}{\partial x^0}(P_0 x_1) = P_1 + x_1 P_0'$$

$$y_2 = P_2 + \frac{\partial}{\partial x_0}\left[P_0 x_2 + a_{211}\int_0^{x_1} y_1 dx_1\right]$$

$$= P_2 + x_2 P_0' + a_{211}\{x_1 P_0' + \tfrac{1}{2} x_1^2 P_0''\} \text{ etc. etc.}$$

y_α est, par rapport à $x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_\alpha$, un polynome, de degré $\alpha - l + 1$ en x_l.

On a aussi

$$y_\alpha = \sum_{g=1}^{g=M} Q_{\alpha g}(x_0) H_{\alpha g}(x_1, x_2, \ldots x_\alpha),$$

où les Q sont des fonctions de x_0 (construites avec les P et leurs dérivées), tandis que les H sont des polynomes, lesquels ne dépendent que du groupe (ε) et sont les mêmes pour toutes les fonctions monogènes

$$y = f((x)).$$

Notamment, pour la fonction inverse de y,

$$x_\alpha = \sum_g R_{\alpha g}(y_0) H_{\alpha g}(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha).$$

Si y est monogène, $dy = y'dx$, la derivée y' se confond avec la quantité hypercomplexe

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_0}.$$

A son tour, y' est monogène etc. Enfin

$$\frac{d^\rho y}{dx^\rho} = \frac{\partial^\rho y}{\partial x_0{}^\rho} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial^\rho y_\alpha}{\partial x_0{}^\rho}.$$

La fonction

$$z = \int y dx_0 = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \int y_\alpha dx_0$$

est monogène et admet y pour dérivée. z est la « fonction primitive » de y (1).

(1) Depuis la rédaction de cette note, j'ai construit, pour un groupe quelconque à multiplication commutative, la fonction monogène générale de la variable hypercomplexe. Ces résultats seront insérés au Bulletin de la Société Mathématique de France, année 1909. (Janvier 1909).

VII.

Le système Ω (Voir V, ci-dessus) n'a pas été choisi au hasard.

Adoptons la terminologie de M. J. König (*Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, Teubner, 1903).

Ω se présente, quand on construit les *domaines holoïdes*, constitués par des matrices m-aires. Les racines de zéro forment un *domaine hyperorthoïde* (König, page 148).

Cette matière est intéressante, mais exige des recherches plus approfondies, que je compte publier ultérieurement.

PARTE III

COMUNICAZIONI

SEZIONE II

GEOMETRIA

J. ANDRADE

LE THÉORÈME D'AMPÈRE-STOKES

ET LE POSTULATUM D'EUCLIDE

I.

Soit ABC un triangle rectiligne non-euclidien dont le périmètre est parcouru dans le sens AB, BC, CA ; soient β, γ, α les angles extérieurs correspondants.

Donnons à un solide les translations successives dont les axes soient les côtés consécutifs du triangle, orientés comme on vient de le dire ; soit $\overrightarrow{AU}$ une droite faisant avec $\overrightarrow{AB}$ (et dans le sens de la description des angles extérieurs) un angle égal à $\alpha + \beta + \gamma - 4^{dr}$; la droite du solide qui était primitivement en AU sera venue en AB après les trois translations successives considérées, en sorte que ces trois translations équivalent à une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du triangle mené par A et dont la grandeur est proportionnelle à l'aire du triangle ; cette rotation est contraire à la rotation qui correspond au parcours du sens du triangle ou bien elle est de même sens suivant que nous sommes dans l'espace de Lobatchewsky ou dans celui de Riemann.

II.

Si le triangle a ses dimensions infiniment petites en tous sens et si on change le sommet adopté pour point de départ, le déplacement infiniment petit du solide demeurera le même au troisième ordre près que celui que nous venons de considérer.

Soit maintenant dt une nouvelle quantité *infiniment petite*, nous considérons les translations infiniment petites d'un solide qui auraient pour axes : $\overrightarrow{AB}\,.\,dt$, $\overrightarrow{BC}\,.\,dt$, $\overrightarrow{CA}\,.\,dt$; elles nous donneront une rotation infiniment voisine de la précédente et dont l'étendue sera équivalente à la précédente multipliée par dt.

Grâce à cette précaution, nous pouvons envisager une courbe fermée L et une surface S *jetée en pont* sur la courbe L puis le déplacement infiniment petit d'un solide qui serait le déplacement résultant des translations élémentaires égales respectivement aux produits du nombre dt par les éléments vectoriels de la courbe L ; en décomposant alors la surface S en aires infiniment petites, l'ensemble des translations deux fois infiniment petites relatives aux éléments de la courbe L, équivaudra *évidemment* (d'après la statique générale des vecteurs) à l'ensemble des cycles des translations le long *des contours* fermés qui limitent les divers éléments d'aires: dès lors en faisant varier la surface S jetée en pont et en utilisant la remarque du paragraphe I nous aurons une nouvelle démonstration du théorème d'Archimède qui concerne l'équilibre des pressions uniformément réparties sur une surface fermée, propriété dont le théorème du travail virtuel m'a déjà fourni une démonstration générale.

Mais la nouvelle démonstration que nous venons d'esquisser est exclusivement non-euclidienne, elle rappelle d'ailleurs une démonstration connue du théorème d'Ampère-Stokes et elle suggère l'idée que le théorème d'Ampère-Stokes a une signification et une portée générales.

C'est ce que je vais montrer brièvement, avant de faire une application.

III.

Définissons d'abord le vecteur tourbillon d'une distribution continue d'un vecteur, fonction de son point d'application; et tout d'abord définissons la dérivée géométrique d'un vecteur par rapport à un déplacement infiniment petit de son point d'application.

Supposons que le point d'application M d'un vecteur V fonction de ce point vienne en M'; le vecteur V d'origine M s'est changé dans le vecteur V' d'origine M'.

Soit W la position qu'occuperait le vecteur V après une translation *d'axe* MM'; alors nous pourrons envisager *autour du sommet* M' le vecteur V' comme le vecteur *résultant* du vecteur W et d'un nouveau vecteur que nous désignerons par DV, la lettre D étant la caracteristique d'une *variation* géométrique définie dès lors d'une manière non-euclidienne, mais subordonnée au déplacement MM'.

Nous pourrons même aller plus loin et estimer le vecteur DV par rapport à un trièdre ayant d'abord son origine M et éprouvant la translation d'axe MM'.

Nous désignerons par ∂x, ∂y, ∂z trois déplacements rectangulaires d'origine M et les variations correspondantes des composants X, Y, Z du vecteur; considérons alors le vecteur ω défini par ses composantes ω_x, ω_y, ω_z dans le trièdre limite

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons démontrer que ce vecteur ω est un invariant.

Pour celà j'envisage d'abord un quadrilatère plan *infiniment petit* ayant deux axes de symétrie rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, puis le travail d'un vecteur V fonction de point, le long du contour de ce quadrilatère; nous voyons que le travail sera $\omega_\zeta \,.\, d\sigma$;

$O\zeta$ étant un axe perpendiculaire au plan du quadrilatère et $d\sigma$ étant l'aire de ce quadrilatère.

Ceci se généralise pour un contour triangulaire, on en déduit l'invariance de ω_ζ à l'égard d'une rotation autour de $O\zeta$.

L'invariance générale de ω résulte alors du théorème d'ARCHIMÈDE sur l'équilibre des pressions.

La généralisation du théorème d'AMPÈRE-STOKES relative à une calotte de surface et à sa courbe limite L est alors intuitive. *Le flux superficiel du Vecteur-tourbillon* ω *est égal au travail du Vecteur primitif le long du contour* L.

IV.

Considérons un triple réseau curviligne orthogonal, soit M un point du réseau; considérons d'abord le trièdre fondamental du réseau de sommet M, puis son déplacement lorsque le point M décrit un arc MM′ infiniment petit le long de la courbe MS_1 du réseau.

En comparant, à chaque instant, la position de ce trièdre à celle qui serait déduite de sa position originelle par une simple translation dont l'axe serait le déplacement ds_1 de son sommet, nous désignerons par $p_1 ds_1$, $q_1 ds_1$, $r_1 ds_1$ les composants vectorielles de la rotation infiniment petite qui placera sur le sommet M′ le trièdre du réseau. Nous définirons par là trois systèmes partiels de vitesses de rotations aux composantes partielles p_1, q_1, r_1 ; p_2, q_2, r_2 ; p_3, q_3, r_3.

V.

Considérons maintenant un vecteur unité V_1 tangent constamment à une courbe MS_1 du réseau et ayant son point de contact comme origine.

Le vecteur V_1 admettra un vecteur tourbillon ω_1 défini immédiatement par ses composants:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_{1x} &= -(q_2 + r_3), \\ \omega_{1y} &= \quad q_1, \\ \omega_{1z} &= \quad r_1. \end{aligned} \right.$$

VI.

Rapprochons ces résultats du problème suivant: Peut il exister *un réseau orthogonal de dallage*? (réseau orthogonal où les arcs correspondants sont égaux).

Nous appliquerons les équations (2) à un vecteur V_2 et à un vecteur V_3 respectivement tangents aux courbes MS_2 et MS_3, en faisant naturellement une permutation tournante à la fois sur les lettres p, q, r et sur les indices 1, 2 et 3.

Mais en même temps nous appliquerons le théorème d'AMPÈRE-STOKES; nous considérerons le travail de chacun des vecteurs V_1, V_2, V_3, effectué le long du contour d'un quadrilatère curviligne du réseau appartenant à l'une ou à l'autre des surfaces du système triple orthogonal.

Si le réseau est un réseau de dallage le travail considéré pour chacun des vecteurs envisagés *sera évidemment nul.*

En exprimant alors que chacun des vecteurs tourbillons fournis respectivement par les vecteurs V_1, V_2 ou V_3 est nul, nous trouvons ainsi:

$$\left\{\begin{array}{r} q_1 = 0 \\ r_1 = 0 \\ q_3 + r_3 = 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{r} r_2 = 0 \\ p_2 = 0 \\ r_3 + p_1 = 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{r} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ p_1 + q_2 = 0 \end{array}\right.$$

c'est à dire:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = 0 \\ q_1 = 0 \\ r_1 = 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} p_2 = 0 \\ q_2 = 0 \\ r_2 = 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ r_3 = 0 \end{array}\right. .$$

Donc s'il existe un réseau orthogonal de dallage le déplacement du trièdre fondamental du réseau, quand son sommet décrit une des courbes du réseau, se réduit à une translation le long de la courbe considérée.

VII.

En rapprochant le résultat précédent de la remarque du paragraphe I nous voyons que, d'une part, la translation du trièdre du réseau le long du contour d'un quadrilatère du réseau doit équivaloir à zéro, et que, d'autre part, elle doit être proportionnelle à l'aire du quadrilatère; le coëfficient de cette dernière proportionnalité devrait donc être zéro, ce qui exige que l'espace considéré soit euclidien.

En d'autres termes le théorème d'AMPÈRE-STOKES nous apprend que l'espace euclidien est le seul qui admette un réseau orthogonal de dallage.

En d'autres termes encore, nous démontrons par la géométrie cinématique des vecteurs que si l'élément ds d'un espace est réductible à la forme: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (traduction immédiate d'un réseau de dallage) l'espace est nécessairement euclidien.

Ce dernier fait est bien connu, mais sa liaison avec le théorème d'AMPÈRE-STOKES constitue précisément le fait nouveau intéressant que je voulais signaler.

V. VARIĆAK

ZUR NICHTEUKLIDISCHEN ANALYTISCHEN GEOMETRIE

Anknüpfend an die Hilbertsche Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie (1), beziehungsweise an seine eigentümliche Einführung der Zahlen in die hyperbolische Geometrie und an eine diesbezügliche Arbeit von LIEBMANN (2), will ich einige weitere Anwendungen der Endenrechnung geben.

Von allen zueinander parallelen Halbgeraden, die das Ende ξ gemeinsam haben, ist es am einfachsten zur Bestimmung dieses Endes die Normale zur x Achse zu nehmen. Der Fusspunkt $N(n, o)$ dieser Normale ist die Projektion von ξ in die x Achse. Es besteht sodann die Relation

$$\xi = \varepsilon e^n \tag{1}$$

wo man $\varepsilon = \pm 1$ zu nehmen hat, je nach dem das Ende ξ in der positiven oder in der negativen Halbebene liegt. Die Enden der Abszissenachse sind ∞ und 0, der Ordinatenachse $+1$ und -1. Die Gleichung der Geraden, welche durch ihre zwei Enden $\xi = \varepsilon_1 e^{n_1}$ und $\eta = \varepsilon_2 e^{n_2}$ bestimmt ist, lautet (3)

$$e^x + \varepsilon_1 e^{n_1} . \varepsilon_2 e^{n_2} . e^{-x} - (\varepsilon_1 e^{n_1} + \varepsilon_2 e^{n_2}) . \operatorname{th} y = 0 \tag{2}$$

oder

$$e^{2x} - (\xi + \eta) e^x \operatorname{th} y + \xi\eta = 0. \tag{3}$$

Man kann diese Gleichung auch als die Gleichung des Punktes (x, y) deuten. Vergleicht man sie mit der Formel (3) in der erwähnten Liebmannschen Abhandlung, so kann man die Relationen

$$w = e^x \quad , \quad v = e^x \operatorname{th} y$$

dazu benützen, um von den Ausdrücken für die Transformation der Punktkoordinaten u, v, w zu den Transformationen der Lobatschefskijschen Koordinaten x, y bei Be-

(1) HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, S. 107-120.

(2) LIEBMANN, *Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie* (Mathem. Ann., Bd. 59).

(3) VARIĆAK, *Beiträge zur nichteukl. Geometrie* (Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17).

wegungen in der hyperbolischen Ebene zu übergehen. Liebmannsche Formeln für die Schiebung längs der Achse $(0, \infty)$ gehen z. B. in die Formeln

$$e^{x'} = ae^{x} \quad , \quad e^{x'} \operatorname{th} y = ae^{x} \operatorname{th} y$$

über.

Daraus folgt

$$y' = y \quad , \quad x' - x = \log a .$$

Da die Ordinate invariant verbleibt, bewegen sich bei dieser Verschiebung die Punkte der Ebene auf den Abstandslinien zur x Achse. Für den Bogen der Abstandslinie $y = d$ hat man den Ausdruk $s = (x' - x) \operatorname{ch} d$ woraus ersichtlich wird, dass bei dieser Bewegung der Punkt (x, y) um die Strecke $s = \operatorname{ch} y \, . \log a$ verschoben wird.

1. Die Gleichung der Geraden. — Fällt man vom Koordinatenanfange aus auf die Gerade g das Lot p, welches mit der positiven x Achse den Winkel ω einschliesst, so erhält man die Normalgleichung der Geraden

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} - \mathrm{C} \operatorname{th} y = 0 ,$$

wo

$$\mathrm{A} = \operatorname{th} p - \cos \omega ,$$
$$\mathrm{B} = \operatorname{th} p + \cos \omega ,$$
$$\mathrm{C} = 2 \sin \omega$$

ist. Diese Form der Gleichung einer Geraden hat hauptsächlich Kagan (¹) seinen Untersuchungen über die analytische Geometrie auf den Flächen konstanter, negativer Krümmung zu Grunde gelegt. Von der Gleichung (4) kann man leicht zur Gleichung (2) übergehen. Nehmen wir an, dass beide Enden der Geraden g_1 in der positiven Halbebene liegen und ziehen wir vom Koordinatenanfange die beiden Parallelen zu g_1, so wird (Fig. 1)

$$\Pi(p_1) = \tfrac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) \quad , \quad \omega_1 = \tfrac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) ,$$

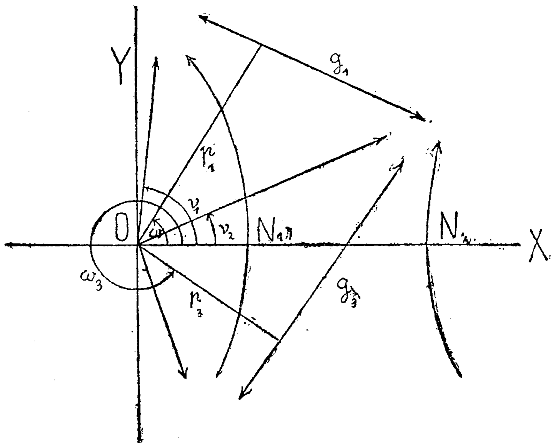

Fig. 1.

$$\mathrm{A}_1 = 2 \sin \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_2}{2} ,$$

$$\mathrm{B}_1 = 2 \cos \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2} ,$$

$$\mathrm{C}_1 = 2 \left(\sin \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2} + \cos \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_2}{2} \right) .$$

(¹) B. Kagan, *Elemente der analytischen Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung* (Kasan, 1896, Russisch).

Setzt man die so gewonnenen Werte in die Normalgleichung der Geraden g_1 ein, so erhält man

$$e^x + \operatorname{cotg}\frac{\nu_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\nu_2}{2}e^{-x} - \left(\operatorname{cotg}\frac{\nu_1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\nu_2}{2}\right)\operatorname{th} y = 0\,,$$

oder

$$e^x + e^{n_1}\,.\,e^{n_2}\,.\,e^{-x} - (e^{n_2} + e^{n_1})\operatorname{th} y = 0\,,\quad \text{da } \operatorname{cotg}\frac{\nu_i}{2} = e^{n_i}\,.$$

Für die Gerade g_3, deren erstes Ende negativ, das zweite aber positiv ist, hat man

$$\Pi(p_3) = \tfrac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \quad , \quad \omega_3 = 2\pi - \tfrac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)$$

zu nehmen.

Durch Spiegelung an der x Achse erhält man weitere zwei Geraden. Findet man auf analoge Art auch ihre Gleichungen, so kann man endlich alle vier Formeln in die Gleichung (2) zusammenfassen.

2. Die Entfernung eines Punktes von der Geraden [1]. — Auf die Gerade g_1 (Fig. 2) fälle man vom Punkte $M(x_0\,, y_0)$ das Lot $MR = d$, und auf die x Achse das Lot MN. Von N aus ziehe man die Parallelen zu g_1 und bestimme die Strecken PN und QN so, dass

$$PN = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x_0 - n_1)\right)\,,\quad QN = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(n_2 - x_0)\right)$$

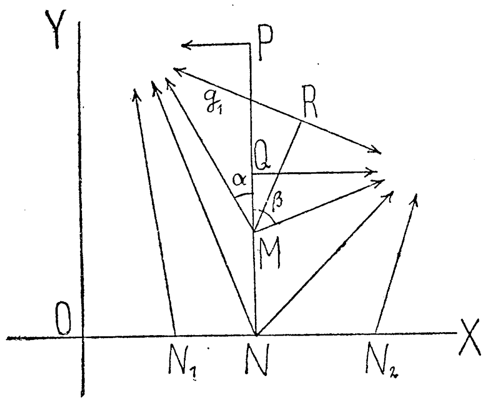

Fig. 2.

wird. Zieht man auch vom Punkte M die Parallelen zu g_1, so erhält man die Winkel

$$\alpha = \Pi\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x_0 - n_1)\right) - y_0\right]\,,\quad \beta = \Pi\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(n_2 - x_0)\right) - y_0\right].$$

Da aber $\alpha + \beta = 2\,\Pi(d)$, so wird

(5)
$$\Pi(d) = \tfrac{1}{2}\,\Pi\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x_0 - n_1)\right) - y_0\right] + \tfrac{1}{2}\,\Pi\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(n_2 - x_0)\right) - y_0\right].$$

[1] *Vergleiche Rad jugoslavenske akademije*, Bd. 173, Zagreb, 1908.

Nach der Relation zwischen dem Lote und dem zugehörigen Parallelwinkel kann man schreiben

$$\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(x_0-n_1)\right)=\log\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\,\Pi(x_0-n_1)\right)=\log\frac{e^{x_0}+e^{n_1}}{e^{x_0}-e^{n_1}}\,,$$

$$\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(n_2-x_0)\right)=\log\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\,\Pi(n_2-x_0)\right)=\log\frac{e^{n_2}+e^{x_0}}{e^{n_2}-e^{x_0}}\,.$$

Es ist also

$$\Pi(d)=\tfrac{1}{2}\,\Pi\left(\log\frac{e^{x_0}+e^{n_1}}{e^{x_0}-e^{n_1}}-y_0\right)+\tfrac{1}{2}\,\Pi\left(\log\frac{e^{n_2}+e^{x_0}}{e^{n_2}-e^{x_0}}-y_0\right),\tag{6}$$

und

$$\operatorname{cotg}\Pi(d)=\frac{(e^{x_0}+e^{n_1})\,(e^{n_2}-e^{x_0})\,e^{-y_0}-(e^{x_0}-e^{n_1})\,(e^{n_2}-e^{x_0})\,e^{y_0}}{(e^{n_2}+e^{x_0})\,(e^{x_0}-e^{n_1})+(e^{x_0}+e^{n_1})\,(e^{n_2}-e^{x_0})}\,,$$

oder endlich

$$\operatorname{sh} d=\frac{(e^{x_0}+e^{n_1}\,.\,e^{n_2}\,.\,e^{-x_0})\operatorname{ch} y_0-(e^{n_1}+e^{n_2})\operatorname{sh} y_0}{e^{n_2}-e^{n_1}}\,.\tag{7}$$

Wenn der Punkt M auf der entgegengesetzten Seite der Geraden g_1 als der Koordinatenanfang zu liegen kommt, so hat man (Fig. 3)

$$\mathrm{NP}=\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(x_0-n_1)\right)\,,\quad \mathrm{NQ}=\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(n_2-x_0)\right)\,,$$

$$\alpha=\Pi\left[y_0-\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(x_0-n_1)\right)\right],$$

$$\beta=\Pi\left[y_0-\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(n_2-x_0)\right)\right],$$

$$2\Pi(d)=\Pi\left[y_0-\log\frac{e^{x_0}+e^{n_1}}{e^{x_0}-e^{n_1}}\right]+\Pi\left[y_0-\log\frac{e^{n_2}+e^{x_0}}{e^{n_2}-e^{x_0}}\right],$$

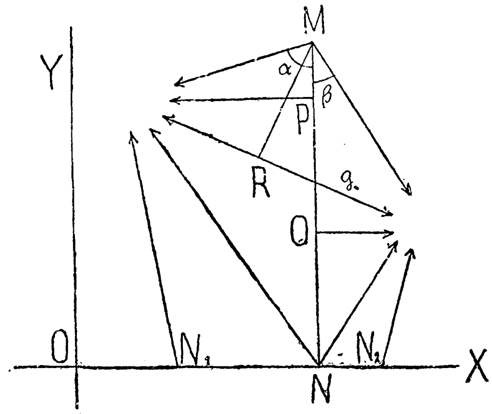

Fig. 3.

und

$$\pi-\Pi(d)=\tfrac{1}{2}\,\Pi\left[\log\frac{e^{x_0}+e^{n_1}}{e^{x_0}-e^{n_1}}-y_0\right]+\tfrac{1}{2}\,\Pi\left[\log\frac{e^{n_2}+e^{x_0}}{e^{n_2}-e^{x_0}}-y_0\right].\tag{8}$$

Man wird daher für sh d denselben, nur negativ genommenen Ausdruck, wie in (7) erhalten. Für die Entfernung des Punktes M von der Geraden g_1 erhält man also die Formel

$$(9)\qquad \frac{\varepsilon(e^{n_2}-e^{n_1})\,\mathrm{sh}\,d}{\mathrm{ch}\,y_0}=e^{x_0}+e^{n_1}\,.\,e^{n_2}\,e^{-x_0}-(e^{n_1}+e^{n_2})\,\mathrm{th}\,y_0\,,$$

in der man $\varepsilon=\pm 1$ zu nehmen hat, je nach dem der Punkt M auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Geraden g_1 liegt wie der Koordinatenanfang.

3. Die Abstandslinie. — Auf Grund dieser Formel erhält man für die Abstandslinie a_1 mit der Mittellinie g_1 die Gleichung

$$(10)\qquad \frac{\varepsilon(e^{n_2}-e^{n_1})\,\mathrm{sh}\,d}{\mathrm{ch}\,y}=e^{x}+e^{n_1}\,e^{n_2}\,e^{-x}-(e^{n_1}+e^{n_2})\,\mathrm{th}\,y.$$

Nimmt man die Gerade g_2 zur Mittellinie, so wird

$$(11)\qquad \frac{\varepsilon(e^{n_2}-e^{n_1})\,\mathrm{sh}\,d}{\mathrm{ch}\,y}=e^{x}+e^{n_1}\,e^{n_2}\,e^{-x}+(e^{n_1}+e^{2})\,\mathrm{th}\,y\,.$$

Wenn M ein Punkt der Abstandslinie a_3 ist, findet man aus Fig. 4

$$\alpha=\Pi\left[y+\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(x-n_1)\right)\right],\quad \beta=\Pi\left[\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(n_2-x)\right)-y\right].$$

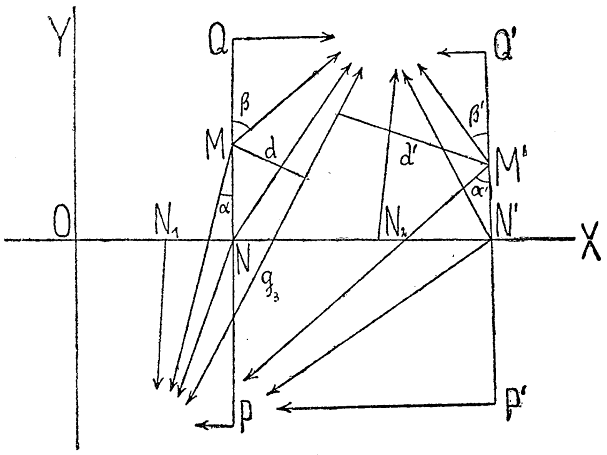

Fig. 4.

Da $2\Pi(d)=\pi-\beta+\alpha$ ist, so kann man setzen

$$\Pi(d)=\tfrac{1}{2}\Pi\left[y-\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(n_2-x)\right)\right]+\tfrac{1}{2}\Pi\left[y+\varDelta\left(\frac{\pi}{2}-\Pi(x-n_1)\right)\right]$$

oder

$$\Pi(d)=\tfrac{1}{2}\Pi\left(y-\log\frac{e^{n_2}+e^{x}}{e^{n_2}-e^{x}}\right)+\tfrac{1}{2}\Pi\left(y+\log\frac{e^{x}+e^{n_1}}{e^{x}-e^{n_1}}\right).$$

Es ist demnach

$$\mathrm{cotg}\,\Pi(d)=\frac{e^{y}(e^{n_2}-e^{x})\,(e^{x}+e^{n_1})-e^{-y}(e^{n_2}+e^{x})\,(e^{x}-e^{n_1})}{(e^{x}+e^{n_1})\,(e^{n_2}+e^{x})+(e^{n_2}-e^{x})\,(e^{x}-e^{n_1})}\,,$$

und so wird die Gleichung jenes Zweiges der Abstandslinie a_3, der sich auf derselben Seite der Geraden g_3 befindet wie der Koordinatenanfang

$$(12) \qquad -\frac{(e^{n_2}+e^{n_1})\operatorname{sh} d}{\operatorname{ch} y} = e^x - e^{n_1}\,.\,e^{n_2}\,.\,e^{-x} - (e^{n_2}-e^{n_1})\operatorname{th} y\,.$$

Nimmt man dagegen den Punkt M in der Lage M′, so erhält man

$$\alpha = \Pi\left[y + \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x-n_1)\right)\right], \quad \beta = \Pi\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x-n_2)\right) - y\right],$$

$$\Pi(d) = \tfrac{1}{2}\Pi\left[y - \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x-n_2)\right)\right] - \tfrac{1}{2}\Pi\left[y + \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(x-n_1)\right)\right],$$

und die linke Seite in der vorhergehenden Gleichung fällt positiv aus. Für a_4 erhält man ein analoges Resultat. Diese speciellen Fälle führen zur allgemeinen Gleichung der Abstandslinie:

$$(13) \qquad e^x + \varepsilon_1 e^{n_1}\,.\,\varepsilon_2 e^{n_2}\,.\,e^{-x} - (\varepsilon_1 e^{n_1} + \varepsilon_2 e^{n_2})\operatorname{th} y = \varepsilon(\varepsilon_1\varepsilon_2 e^{n_2} - e^{n_1})\frac{\operatorname{sh} d}{\operatorname{ch} y}\,.$$

4. Der Winkel zweier Geraden. — Die durch ihre Enden ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 bestimmten Geraden

$$e^x + \xi_1\eta_1 e^{-x} - (\xi_1+\eta_1)\operatorname{th} y = 0,$$
$$e^x + \xi_2\eta_2 e^{-x} - (\xi_2+\eta_2)\operatorname{th} y = 0$$

haben vier gemeinsame Parallelen t_i, nämlich die Verbindungsgeraden der Enden

$$(\xi_1, \eta_2)\ ,\ (\xi_1, \xi_2)\ ,\ (\xi_2, \eta_1)\ ,\ (\eta_1, \eta_2).$$

Ist (Fig. 5) d die Entfernung des Schnittpunktes M jener Geraden von t_1 und t_3, dann ist

$$\Pi(d) = \frac{\theta}{2}\ ,\ \Pi(d_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\,.$$

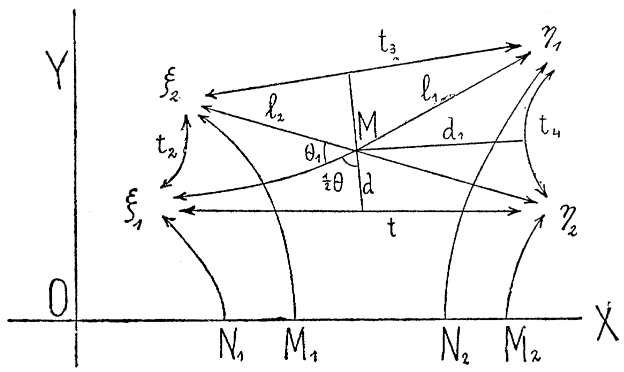

Fig. 5.

Nach der Formel (9) hat man

$$e^{x} + \xi_1 \eta_2 e^{-x} - (\xi_1 + \eta_2) \operatorname{th} y + (\eta_2 - \xi_1) \cdot \frac{\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch} y} = 0,$$

$$e^{x} + \xi_1 \xi_2 e^{-x} - (\xi_1 + \xi_2) \operatorname{th} y - (\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch} y} = 0,$$

$$e^{x} + \xi_2 \eta_1 e^{-x} - (\xi_2 + \eta_1) \operatorname{th} y - (\eta_1 - \xi_2) \cdot \frac{\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch} y} = 0,$$

$$e^{x} + \eta_1 \eta_2 e^{-x} - (\eta_1 + \eta_2) \operatorname{th} y - (\eta_2 - \eta_1) \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ch} y} = 0.$$

Eliminiert man hieraus die Koordinaten des Schnittpunktes, so erhält man folgende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 + \eta_2 & (\xi_1 - \eta_2) \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 + \xi_2 & \xi_2 - \xi_1 \\ 1 & \xi_2 \eta_1 & \xi_2 + \eta_1 & (\eta_1 - \xi_2) \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 & \eta_1 \eta_2 & \eta_1 + \eta_2 & \eta_2 - \eta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach einigen Umformungen folgt aus dieser Relation zwischen den Enden zweier Geraden und ihrem Schnittwinkel

(14) $$\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{-\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \eta_2} : \frac{\eta_1 - \xi_2}{\eta_1 - \eta_2}},$$

und

(15) $$\cos \theta = \frac{2(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) - (\xi_1 + \eta_1)(\xi_2 + \eta_2)}{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2)}.$$

5. Das gemeinsame Lot von zwei Geraden (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), die sich nicht schneiden. — Die Hilfsgeraden (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) schneiden sich unter dem Winkel δ. Bezeichnet man die Länge des gemeinsamen Lotes mit $2d$ so besteht die Relation $\Delta(\frac{1}{2}\delta) = d$. Zufolge der Formel (14) kann man schreiben

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \delta = -\frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2)}{(\xi_1 - \eta_2)(\xi_2 - \eta_1)} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 d}.$$

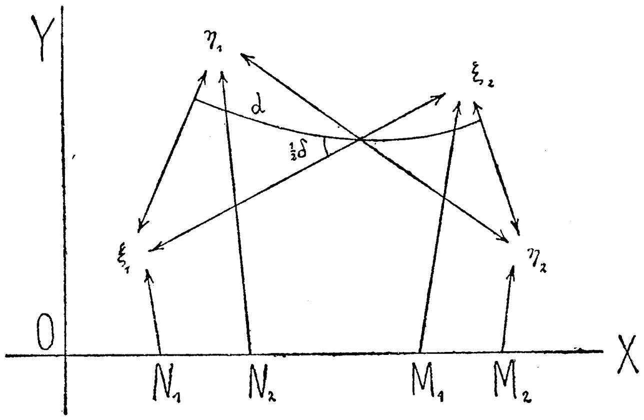

Fig. 6.

Es ist demnach

$$\operatorname{ch} 2d = \frac{2(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) - (\xi_1 + \eta_1)(\xi_2 + \eta_2)}{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2)} .$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel (15), so erhält man $2d = i\theta$ d. h. das *gemeinsame Lot zweier Geraden kann man als imaginären Winkel deuten.*

6. Der Grenzkreis. — Die Achse OS des Grenzkreises, der durch den Koordinatenanfang gehen soll, schliesse mit der x Achse den Winkel α ein. Um seine Gleichung zu finden, gehen wir von der Gleichung des Kreises

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch} y \operatorname{ch} y_0 \operatorname{ch}(x_0 - x) - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} y_0 \tag{16}$$

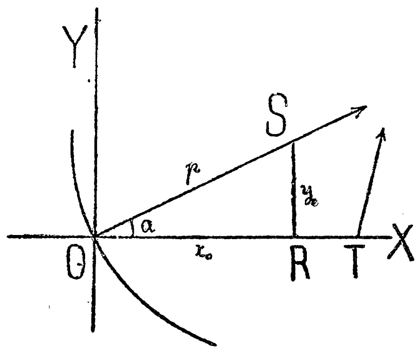

Fig. 7.

aus, und statt der Koordinaten x_0, y_0 des Mittelpunktes führen wir die Polarkoordinaten p, α mittels der Relationen

$$\operatorname{sh} y_0 = \operatorname{sh} p \sin\alpha \quad , \quad \operatorname{ch} y_0 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p \sin^2\alpha} \, ,$$
$$\operatorname{ch} x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{th}^2 p}} \quad , \quad \operatorname{sh} x_0 = \frac{\cos\alpha \operatorname{th} p}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{th}^2 p}}$$

ein. So wird

$$\operatorname{ch} p = \frac{\operatorname{ch} y \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p \sin^2\alpha}\,(\operatorname{ch} x - \operatorname{th} p \operatorname{sh} x \cos\alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{th}^2 p}} - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} p \sin\alpha .$$

Dividiert man durch $\operatorname{ch} p$ und geht man zur Grenze für $\lim p = \infty$ über, so erhält man den Grenzkreis

$$\operatorname{ch} x - \cos\alpha \operatorname{sh} x - \operatorname{th} y \sin\alpha - \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 0, \tag{17}$$

was sich leicht in

$$e^{2x} - 2e^x \operatorname{th} y \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} \cdot \operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} = 0 \tag{18}$$

transformieren lässt. Bezeichnet man $OT = \Delta(\alpha)$ mit a, so geht die vorige Gleichung in

$$(19) \qquad e^{2x} - 2e^a \,.\, e^x \operatorname{th} y - \frac{(1+e^{2a})\, e^x}{\operatorname{ch} y} + e^{2a} = 0.$$

über.

Man kann e^a das Ende des Grenzkreises G nennen.

Analog findet man für die GRENZKUGEL die Gleichung

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cos\omega \cos\vartheta - \operatorname{th} y \sin\omega \cos\vartheta - \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} y} \sin\vartheta - \frac{1}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} z} = 0 .$$

7. TRANSFORMATION DES GRENZKREISES (19). — Wenn wir diesen Grenzkreis der Transformation

$$(20) \qquad x = x_1 \quad , \quad \Pi(y) + \Pi(y_1) = \frac{\pi}{2} ,$$

unterwerfen, dann geht seine Gleichung in

$$(21) \qquad e^{2x} - \frac{2e^a e^x}{\operatorname{ch} y} - e^x(1 + e^{2a}) \operatorname{th} y + e^{2a} = 0$$

über. Jener Grenzkreis schneidet die x Achse im Koordinatenanfange und in dem Punkte $E(2a, 0)$ (Fig. 8). Bei der Transformation übergeht der Punkt O in den

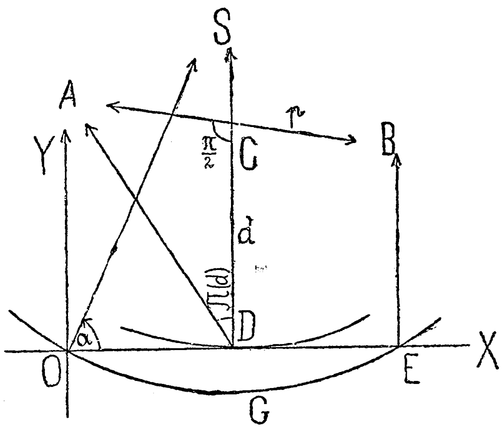

FIG. 8.

unendlich weiten Punkt A der positiven Ordinatenachse und E in den unendlich weiten Punkt der, in E auf die x Achse errichteten Normale. Die Punkte O und E werden in die Enden $\xi = +1$ und $\eta = e^{2a}$ transformiert. Diese Enden bestimmen die Gerade p welche mit der positiven Ordinatenachse und mit der Normale zur x Achse im Punkte E parallel ist. Das Ende S der Achse OS des Grenzkreises G wird in den Punkt $D(a, 0)$ transformiert.

Verbindet man D mit A und B so ersieht man gleich dass $CD \perp p$ und

$$\Pi(d) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

ist. Setzt man in die allgemeine Gleichung der Abstandslinie (13) die Werte

$$\varepsilon_1 e^{n_1} = +1 \quad , \quad \varepsilon_2 e^{n_2} = +e^{2a} \quad , \quad \varepsilon = +1 \quad , \quad \operatorname{sh} d = \frac{1}{\operatorname{sh} a} ,$$

ein, so erhält man

$$e^x + e^{2a} \,.\, e^{-x} - (1 + e^{2a}) \operatorname{th} y = \frac{e^{2a} - 1}{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} y} ;$$

da aber $\frac{e^{2a}-1}{\operatorname{sh} a} = 2e^a$, kann man diese Gleichung sofort auf die Form (21) bringen. Der positive Teil des Grenzkreises G wird also in die Abstandslinie (21) transformiert, welche die Gerade p zur Basis und d zum Parameter hat.

Jener Teil von G, der unter der x Achse liegt, geht durch die Transformation

$$x_1 = x \quad , \quad \Pi(y) + \Pi(y_1) = \tfrac{3}{2}\pi ,$$

in das Spiegelbild der Abstandslinie (21) in Bezug auf die x Achse über.

8. Die Gleichung der Ebene. — In den Punkten $N_1(n_1, 0)$, $N_2(n_2, 0)$ der x Achse lege man zwei, zu dieser Achse normale Ebenen ϱ_1, ϱ_2. Durch die Achse aber selbst lege man unter dem Winkel α zur xy Ebene die Ebene ϱ_3. Sie durchdringt die Ebenen ϱ_1 und ϱ_2 in den Geraden O_1, O_2. In dieser Ebene ϱ_3 giebt es vier Geraden g_i, die zu O_1 und O_2 parallel sind.

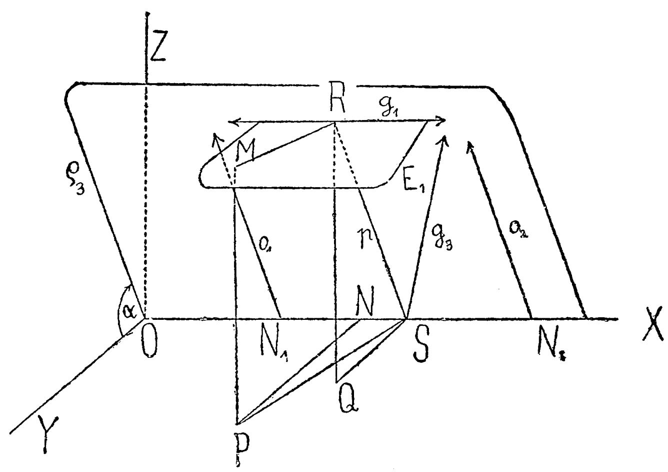

Fig. 9.

Legt man durch g_i eine zu ϱ_3 normale Ebene E_i, so wird sie parallel zu ϱ_1 und ϱ_2; sie wird mit ihnen nur die Enden der Geraden O_1, O_2 gemeinsam haben. Die Ebene E_i ist also vollkommen bestimmt durch den Winkel α und die Enden $\xi = \varepsilon_1 e^{n_1}$, $\eta = \varepsilon_2 e^{n_2}$.

Jetzt wollen wir zuerst *die Gleichung der Ebene* E_1 ableiten. Die Mitte der Strecke $N_1 N_2$ bezeichne man mit S und $SR = p$ sei das Lot aus S auf g_1. Nimmt man einen beliebigen Punkt $M(x, y, z)$ in der Ebene E_1 so erhält man

$$\operatorname{ch} PS = \operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) . \operatorname{ch} y , \tag{22}$$

und

$$\operatorname{ch} MS = \operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z . \tag{23}$$

Da aber

$$\operatorname{ch} SR = \operatorname{coth}\frac{n_2 - n_1}{2} , \tag{24}$$

aus dem Dreiecke MSR folgt

$$\operatorname{ch} MR = \operatorname{th}\frac{n_2 - n_1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z . \tag{25}$$

Um $\operatorname{ch} MR$ auf eine andere Art auszudrücken, stellen wir für die Koordinaten des Punktes $R(x_0, y_0, z_0)$ folgende Relationen auf:

$$x_0 = \frac{n_1+n_2}{2} , \quad \begin{array}{l} \operatorname{sh} z_0 = \operatorname{sh} p \sin\alpha , \\ \operatorname{th} y_0 = \operatorname{th} p \cos\alpha , \end{array} \quad \operatorname{ch} z_0 \operatorname{sh} y_0 = \operatorname{sh} p \cos\alpha . \tag{26}$$

Dem Ausdrucke für die Entfernung der Punkte R und M

$$\operatorname{ch} MR = \operatorname{ch}(x_0 - x) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} y_0 \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} y_0 \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z_0$$

kann man dann auch die Form

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} MR = \; & \operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z \operatorname{coth}\frac{n_2 - n_1}{2} \\ & - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} z \operatorname{sh} p \cos\alpha - \operatorname{sh} z \operatorname{sh} p \sin\alpha \end{aligned}$$

geben, oder

$$\operatorname{ch} MR = \operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z \operatorname{coth}\frac{n_2 - n_1}{2} - \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} z \cos\alpha + \operatorname{sh} z \sin\alpha}{\operatorname{sh}\frac{n_2 - n_1}{2}} . \tag{27}$$

Aus den Gleichungen (25) und (27) folgt nach einigen leichten Transformationen

$$\operatorname{ch}\left(\frac{n_1+n_2}{2} - x\right) - \left(\operatorname{th} y \cos\alpha + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} y} \sin\alpha\right) \operatorname{ch}\frac{n_2 - n_1}{2} = 0 , \tag{28}$$

woraus

$$e^x + e^{n_1+n_2} . e^{-x} - (e^{n_1} + e^{n_2}) \left(\operatorname{th} y \cos\alpha + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} y} \sin\alpha\right) = 0 \tag{29}$$

als die *Gleichung der Ebene* E_1 gewonnen wird.

Für E_2 erhält man

$$e^{x} + e^{n_1+n_2} \, . \, e^{-x} + (e^{n_1} + e^{n_2}) \left(\operatorname{th} y \cos \alpha + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} y} \sin \alpha \right) = 0 \, . \tag{30}$$

Die Ebene E_3 ist die Ebene SBC in Fig. 10. Es ist, wie leicht ersichtlich

$$\operatorname{ch} \mathrm{SM} = \operatorname{ch} \left(x - \frac{n_1 + n_2}{2} \right) \operatorname{ch} y \operatorname{ch} z \, . \tag{31}$$

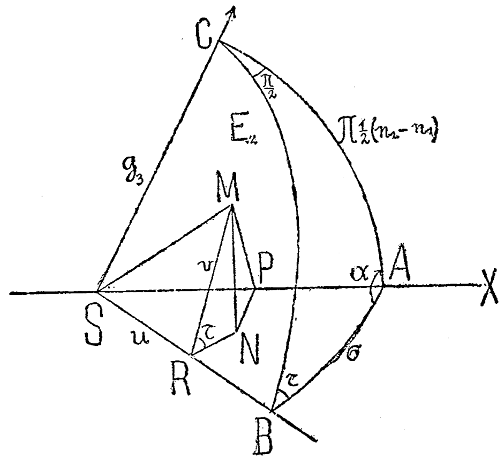

Fig. 10.

In dem sphärischen Dreiecke ABC kommen zum Vorschein die Winkel und die Seiten der, von den Ebenen E_3, ϱ_3 und xy gebildeten Ecke.

Nun ist

$$\operatorname{cotg} \sigma = \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \cos \alpha \, , \tag{32}$$

$$\sin \tau = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \sin^2 \alpha} \, . \tag{33}$$

Aus dem ebenen Dreiecke MNR folgt

$$\operatorname{ch} v = \frac{\operatorname{ch} \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \sqrt{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{th}^2 \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \cos^2 \alpha}} \, , \tag{34}$$

aus dem Vierecke SPNR mit zwei rechten Winkeln aber [1]

$$\operatorname{th} u = \cos \sigma \operatorname{th} \left(x - \frac{n_1 + n_2}{2} \right) + \frac{\sin \sigma \operatorname{th} y}{\operatorname{ch} \left(x - \frac{n_1 + n_2}{2} \right)} \, . \tag{35}$$

Ersetzt man hier $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ durch die Werte, die aus der Formel (32) hervorgehen, so wird

$$\operatorname{ch} u = \frac{\operatorname{ch} \left(x - \frac{n_1 + n_2}{2} \right) \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2} (n_2 - n_1) \cos^2 \alpha}}{\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{B}}} \tag{36}$$

[1] B. Kagan, loc. cit., S. 9.

wo man

$$A = \mathrm{ch}^2\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\cos^2\alpha,$$

$$B = 2\mathrm{th}\, y\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\cos\alpha + \mathrm{th}^2 y$$

zu nehmen hat.

Die Formeln (34) und (36) geben

$$(37)\qquad \mathrm{ch}\, SM = \frac{\mathrm{ch}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{ch}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\sqrt{\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{th}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha}}{\sqrt{A - B}}.$$

Durch Vergleichung der Formeln (31) und (37) erhält man

$$(38)\qquad \mathrm{ch}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sqrt{\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{th}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha} = \mathrm{ch}\, y\, \mathrm{ch}\, z\sqrt{A - B}.$$

Um diese Gleichung der Ebene E_3 zu vereinfachen, bringen wir sie auf die Form

$$\mathrm{ch}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1) - \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha\, \mathrm{th}^2 z$$
$$= \mathrm{ch}^2\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\cos^2\alpha\, \mathrm{ch}^2 y$$
$$- 2\, \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\cos\alpha - \mathrm{sh}^2 y,$$

oder

$$1 - \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\cos^2\alpha\, \mathrm{sh}^2 y + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha\, \mathrm{th}^2 z$$
$$= \mathrm{ch}^2\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\mathrm{ch}^2 y - 2\, \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)\cos\alpha - \mathrm{sh}^2 y.$$

Es ist weiter

$$- \mathrm{ch}^2 y\, \mathrm{sh}^2\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right) - \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\cos^2\alpha\, \mathrm{sh}^2 y + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha\, \mathrm{th}^2 z$$
$$= - 2\, \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right),$$

und

$$\mathrm{sh}^2\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right) + \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\cos^2\alpha\, \mathrm{th}^2 y - \mathrm{sh}^2 \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin^2\alpha\, \frac{\mathrm{th}^2 z}{\mathrm{ch}^2 y}$$
$$= 2\, \mathrm{th}\, y\, \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\, \mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$\mathrm{sh}\left(x - \frac{n_1 + n_2}{2}\right) - \mathrm{sh}\, \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1)\left(\cos\alpha\, \mathrm{th}\, y + \sin\alpha\, \frac{\mathrm{th}\, z}{\mathrm{ch}\, y}\right) = 0,$$

oder

$$e^{x} - e^{n_1+n_2}\, e^{-x} - (e^{n_2} - e^{n_1})\left(\cos\alpha\,\mathrm{th}\,y + \sin\alpha\,\frac{\mathrm{th}\,z}{\mathrm{ch}\,y}\right) = 0\,. \tag{39}$$

Für E_4 findet man

$$e^{x} - e^{n_1+n_2}\, e^{-x} - (e^{n_1} - e^{n_2})\left(\cos\alpha\,\mathrm{th}\,y + \sin\alpha\,\frac{\mathrm{th}\,z}{\mathrm{ch}\,y}\right) = 0\,. \tag{40}$$

Schliesslich kann man die Gleichungen (29), (30), (39) und (40) in die *allgemeine Gleichung der Ebene*

$$e^{x} + \varepsilon_1 e^{n_1} . \varepsilon_2 e^{n_2} . e^{-x} - (\varepsilon_1 e^{n_1} + \varepsilon_2 e^{n_2})\left(\cos\alpha\,\mathrm{th}\,y + \sin\alpha\,\frac{\mathrm{th}\,z}{\mathrm{ch}\,y}\right) = 0 \tag{41}$$

zusammenfassen.

H. G. ZEUTHEN

EXEMPLE D'UNE CORRESPONDANCE SANS WERTHIGKEIT

Vous connaissez, Messieurs, le principe de correspondance généralisé, qui a été trouvé par CAYLEY au moyen d'induction et démontré ensuite algébriquement par BRILL. La correspondance a lieu entre deux points variables M et N d'une courbe algébrique du genre p. A un point N correspondent α points M, et à un point M, β points N. Alors il existe sur la courbe

$$\alpha + \beta + 2\gamma p$$

points où deux points correspondants coïncident entre eux, γ étant un nombre entier, nul, positif, ou négatif, dépendant de la nature de la correspondance; on l'a appelé sa « Werthigkeit », valence. Quant à celle-ci les deux savants avaient fait toutefois, et énoncé formellement, une supposition qui limite essentiellement l'application du principe. Ils supposent que les points N correspondant à un point M soient déterminés par une courbe algébrique dépendant de M. Si tous ses points d'intersection avec la courbe donnée, exceptés ceux qui coïncident toujours avec M, sont des points N, γ sera le nombre des points exceptés. Si, au contraire, les points d'intersection différents de M se distribuent à des groupes différents N_r, ainsi que dans chaque point N_r coïncident k_r des points d'intersection, le nombre de ceux qui coïncident toujours avec M sera égal à

$$\sum k_r \gamma_r,$$

γ_r désignant la valence de la correspondance entre M et N_r. On comprend ainsi que la valence d'une correspondance (M, N_r) qu'on ne peut déterminer de cette manière qu'à côté d'autres correspondances, peut devenir négative; mais on voit en même temps que le théorème de CAYLEY-BRILL ne permet l'application du principe qu'aux cas où les points N correspondant à un point M, ou seuls, ou à côté de groupes de points dont la correspondance à M a une valence, soient déterminés par les intersections de la courbe donnée avec une courbe dépendant de M.

M. HURWITZ a montré plus tard que cette restriction est effective et ne dépend pas seulement d'une démonstration trop étroite. Il existe des correspondances sans valence, mais non pas sur les courbes générales qui sont déterminées seulement par leur genre p. Les correspondances sans valence n'appartiendront qu'à des courbes déterminées par certains modules singuliers.

C'est à la même limitation que conduit une démonstration du principe et une détermination de la valence dont je me suis servi. Il résulte de la formule

$$\alpha + \beta + 2\gamma p$$

que 2γ doit être le nombre de coïncidences qu'on perd par l'introduction d'un nouveau point double, grâce à laquelle p sera remplacé par $p - 1$. Si l'on en gagne, cela indique une valeur négative de γ. On voit que ce procédé permet de réaliser une véritable démonstration du principe, si, bien entendu, l'existence de la correspondance n'est pas liée à des valeurs particulières des modules, rendant impossible de réduire le genre à zéro par l'introduction de p nouveaux points doubles.

Que l'obstacle indiqué par cette réstriction peut se présenter là, où l'on ne l'attendrait pas — ou là où moi du moins ne l'avais pas attendu — voilà ce que je montrerai par l'exemple suivant d'une correspondance sans valence, emprunté à la théorie des surfaces gauches (1).

Soit donnée une surface gauche de l'ordre m. Tel sera aussi l'ordre de ses sections planes, qui seront toutes du même genre p, qu'on peut appeler le genre de la surface gauche. Un plan passant par une génératrice rencontre encore la surface en une courbe d'ordre $m - 1$. Un de ses points d'intersection avec la génératrice sera le point de contact de la surface avec le plan. Les autres $m - 2$ seront des points d'intersection de la génératrice avec la courbe double de la surface.

Essayons d'appliquer notre principe à déterminer le nombre des éléments développables de la surface. On en aura, si les deux génératrices passant par le même point de la courbe double coïncident entre elles; leur point d'intersection sera alors un « pinch-point » de la courbe double. Afin d'en trouver le nombre x nous aurons à considérer la correspondance des deux points M et N d'une section plane qui se trouvent sur les génératrices qui passent par un point P de la courbe double. A un point M correspondent $m - 2$ points P et par conséquent aussi $m - 2$ points N, et réciproquement. Si le principe est applicable à ce cas, il donnera

$$x = 2(m - 2) + 2\gamma p$$

où γ est la valence. Dans ce nombre x ne sont pas compris les points d'intersection du plan avec la courbe double; car les points M et N qui y coïncident entre eux appartiennent à deux branches différentes de la section.

Afin de trouver la valence il faut considérer le cas limite où la section a reçu un nouveau point double, différent des points d'intersection avec la courbe double ordinaire, ou bien celui où la surface a une génératrice double. (Du moins pour $p = 1$ il est possible de donner à la surface une définition assez large pour

(1) M. Max Bernhard a emprunté d'autres exemples à la même théorie (Ueber lineare Scharen von Kurven und Flächen, Stuttgart 1897).

comprendre ce cas limite). Considérons, dans un tel cas limite, la section faite par un plan passant par la génératrice double. Elle sera composée de celle-ci prise deux fois et d'une courbe de l'ordre $m - 2$. Deux des points d'intersection de cette courbe avec la génératrice seront les points de contact du plan avec les deux nappes de la surface qui s'y rencontrent, $m - 4$ des points d'intersection avec la courbe double. Or, de même que les autres génératrices, la génératrice double doit rencontrer la courbe double en $m - 2$ points. Dans les deux qui en restent les deux nappes passant par la génératrice doivent donc être les mêmes qui, par leur intersection, forment cette courbe. Les points seront donc des points de contact des deux nappes, singularité formée par la coïncidence de deux points-pinces. L'introduction de la génératrice double sera donc accompagnée d'une substitution de $p - 1$ à p et de $x - 4$ à x. Il faut donc que $\gamma = 2$ et on aura

$$x = 2(m - 2) + 4p.$$

Cette formule est démontrée par notre procédé, pour les surfaces, bien entendu, dont la définition est assez générale pour permettre — sans aucune décomposition de la surface — la réduction de son genre à zéro par l'introduction de p génératrices doubles.

Dans les cas où la courbe double est composée de plusieurs courbes, doubles ou multiples, on peut essayer d'appliquer le même procédé à trouver séparément les points-pinces de ces différentes courbes; mais il ne sera pas permis de transporter la valence trouvée dans le cas général à ces différents cas.

En effet, la perte totale de 2 fois 2 points-pinces, causée par l'introduction d'une nouvelle génératrice double, peut être distribuée différemment aux différentes parties de la courbe double, ainsi que pour une de celle-ci elle devienne $4, 2$ ou 0. Par conséquent la valence de la correspondance déterminant ses points pinces sera respectivement $2, 1$ ou 0, si, bien entendu, elle a une valence. Je vais communiquer ici un exemple où cette condition n'est pas remplie, mais où néanmoins notre introduction de genératrices doubles peut servir au dénombrement des points-pinces.

Considérons la surface gauche engendrée par les droites qui rencontrent une droite g, une conique k_2 et une courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce (du genre 1) c_4^1.

L'ordre m de cette surface est égal à celui de la section faite par un plan passant par g. Cette section est composée d'une droite 8ple (g) et de 8 droites simples. On a donc $m = 16$. La surface passe 8 fois par la droite g, 4 fois par la conique k_2 et 2 fois par la courbe c_4^1. Les 4 droites dans le plan de la conique k_2 qui rencontrent g et c_4^1, ainsi que les 16 sécantes doubles de c_4^1 qui rencontrent g et k_2, seront des génératrices doubles. La surface a encore une courbe double, dont on peut trouver l'ordre en énumérant ses points d'intersection avec un plan passant par g. Cette courbe a avec ce plan $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ points d'intersection hors de g. Le nombre de ceux qui se trouvent sur g peut être déterminé par le principe de correspondance simple. Il est $\frac{1}{2}(8 \cdot 3 + 8 \cdot 3) = 24$. L'ordre de cette courbe est donc 36.

Le nombre total des points doubles d'une section plane de la surface sera donc:

$$\frac{8 \cdot 7}{2} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 + 4 + 16 + 36 = 100 \; .$$

Le genre de la section sera donc:

$$p = \frac{15 \cdot 14}{2} - 100 = 5 \, .$$

S'il était permis de déterminer le nombre des points-pinces de la courbe c_4^1 par la méthode précédente, ce nombre devait avoir une des trois valeurs:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 4p &= 22 \\ 1 + 1 + 2p &= 12 \\ 1 + 1 \quad\;\; &= 2 \, . \end{aligned}$$

Or on voit que les points-pinces sont les points d'intersection de c_4^1 avec les plans tangents à k_2 qui passent par g. Leur nombre est donc égal à 8. On ne trouverait pas même ce résultat en attribuant une autre valeur entière à la valence.

Cependant la même introduction de nouvelles génératrices doubles qui servait dans le cas général à la détermination de la valence sert ici, non seulement à expliquer pourquoi le principe de Cayley et Brill n'est pas applicable, mais en même temps à trouver le véritable nombre des points-pinces.

Pour introduire de nouvelles génératrices doubles il suffit de donner à la conique k_2 un point double. Alors on en introduit 4 qui passent par ce point et rencontrent et g et c_4^1. En chacun des points d'intersection se perdent deux points-pinces. La dernière courbe en aura donc perdu 8. Le genre d'une section plane sera réduit à 1; mais en même temps, la section plane ainsi que toute la surface gauche se sera décomposée en deux (aussi du genre 1). Comme dans ce cas limite la courbe c_4^1 est simplement courbe d'intersection de deux surfaces différentes, elle n'a plus aucun point-pince. Le nombre 8 des points-pinces perdus est donc celui des points-pinces qui lui appartiennent en général.

La même considération montre que la courbe double de l'ordre 36 n'a aucun point-pince, et en énumérant, dans le cas limite, les points-pinces appartenant à g et à k_2, on trouve qu'en général la droite g en contient $8 + 8 = 16$, et la conique k_2 $2 \cdot 8 = 16$.

Il se montre immédiatement que l'expression générale, trouvée par le principe de Cayley et Brill n'est non plus applicable au nombre total des points-pinces de notre surface.

D. MONTESANO

SU I COMPLESSI BILINEARI DI CONICHE NELLO SPAZIO

La Geometria delle coniche nello spazio è tuttora ai suoi inizî.

Un maestro insigne, lo CHASLES, a proposito di tale Geometria scriveva: « J'ai pensé que ces recherches sur la théorie des coniques considérées dans l'espace, et celle des cônes du second ordre, devaient trouver place entre la théorie des coniques sur le plan et la théorie des surfaces du second ordre » (1).

Essendo assai scarse le ricerche fatte sino ad ora sull'argomento e tuttora mancando trattazioni di carattere generale, non si può fare alcun confronto fra i metodi d'investigazione sino ad ora usati, nè si può prevedere se altri metodi potranno essere più proficuamente adoperati.

Soltanto sembra che non possa riuscire feconda l'idea di riguardare le coniche dello spazio ordinario come enti di una varietà di 4° ordine ad 8 dimensioni dello spazio lineare a 9 dimensioni; o almeno tale considerazione non pare che possa dare origine a procedimenti di ricerca così semplici come furono quelli sui sistemi di circoli dello spazio ordinario pensati come rette di uno spazio lineare a 4 dimensioni.

Sin dal 1893 io iniziavo lo studio dei sistemi più semplici di coniche dello spazio ordinario (2), e con procedimenti diretti riuscivo a determinare i varî tipi di congruenze lineari di coniche, chiamando *lineare* un sistema doppiamente infinito di coniche tale che per un punto generico dello spazio passi una sola conica del sistema. Come seguito naturale di tali ricerche si presentò lo studio dei più semplici complessi di coniche dello spazio. Essi sono i *complessi bilineari*, i sistemi cioè triplamente infiniti di coniche soddisfacenti alla duplice condizione che in un piano generico vi sia una sola conica del sistema e che le coniche del sistema uscenti da un punto generico dello spazio siano nei piani di un fascio.

Un primo sistema di coniche soddisfacenti alle condizioni indicate fu da me

(1) CHASLES, *Comptes rendus*, vol. 61, pag. 389.

(2) Atti dell'Accademia di Scienze di Torino, vol. 27, 1892; Rendiconti dell'Istituto lombardo, Serie II, vol. 26, 1893; Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, 1895.

ottenuto nello studio della curva gobba di 5° ordine e di genere 1, ed è il sistema delle coniche che si appoggiano in 5 punti alla curva [1].

Un secondo complesso bilineare di coniche fu studiato qualche anno dopo dal sig. Humbert [2]. Esso è determinato da 5 punti dello spazio, e propriamente è costituito dalle coniche luoghi dei punti di contatto delle cubiche gobbe che passano per quei 5 punti, con i singoli piani dello spazio.

Le diversità così sostanziali di questi due tipi non facevano supporre che tutti i complessi bilineari di coniche ammettessero la medesima legge di generazione.

Invece questa genesi comune esiste in base al seguente teorema:

« Un complesso bilineare di coniche può generarsi mediante un'omografia fra le quadriche di un sistema lineare triplamente infinito ed i piani dello spazio; cioè le coniche che costituiscono il complesso, sono le linee di sezione delle quadriche del sistema con i corrispondenti piani dello spazio.

« I sistemi generatori del complesso sono in numero ∞^4; due qualunque di tali sistemi sono riferiti fra di loro in modo che oltre al complesso generano un sistema lineare triplamente infinito di coniche di un piano ».

Dato un complesso bilineare di coniche Γ, ad ogni punto dello spazio si coordina una retta, comune ai piani sostegni delle coniche del complesso uscenti da quel punto.

Le rette indicate costituiscono un complesso K di 6° grado, ligato al complesso Γ in modo che ogni proprietà dell'un sistema si traduce in una proprietà dell'altro.

Ad esempio, la congruenza costituita dalle rette che formano le coniche degeneri del complesso Γ, coincide con la congruenza dei raggi doppi del complesso K; la superficie inviluppo dei piani sostegni delle anzidette coniche degeneri coincide con la superficie singolare del complesso K; e così i punti eccezionali dell'un complesso coincidono con i punti singolari dell'altro.

Un complesso bilineare di coniche Γ nel caso più generale ammette 15 punti eccezionali, per ciascuno dei quali passa un sistema doppiamente infinito di coniche del complesso formanti una congruenza bilineare.

I 15 punti godono, fra le altre, la proprietà di essere base di un sistema lineare ∞^5 di superficie di 3° ordine; ogni conica del complesso è base di una rete di siffatto sistema.

Viceversa ogni rete formata da superficie di 3° ordine σ_3 aventi in comune una conica c_2 determina un complesso bilineare di coniche Γ, costituito dai fasci di coniche delle superficie σ_3, che comprendono la c_2. I punti base isolati della rete sono i punti eccezionali del complesso.

La superficie σ_5, inviluppo dei piani sostegni delle coniche degeneri di Γ, è di 5ª classe, con 15 piani tangenti doppi, sostegni delle coniche costituite da rette coincidenti, e 120 punti doppi, 15 dei quali sono i punti eccezionali di Γ.

Ed è notevole il fatto che la superficie σ_5 è dovuta nel modo indicato a 16 complessi Γ, i quali costituiscono una interessante configurazione, collegata a quella dei 120 punti doppi della σ_5.

(1) Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, 1888.
(2) Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier 64, 1894.

Se la rete generatrice del complesso Γ oltre alla conica c_2 presenta un'altra linea base, questa è incontrata da ogni conica del complesso in tanti punti quanto è il suo ordine; cioè il complesso acquista una linea direttrice che può essere una retta, una conica, una cubica gobba, una curva gobba di 4° ordine di 1ª o di 2ª specie, o una curva gobba di 5° ordine e di genere 1.

Se la conica base della rete si spezza in due rette, può accadere che della rete faccia parte un fascio di coni di 3° ordine. Allora il vertice di questi coni è un punto eccezionale di singolarità più elevata pel complesso, e propriamente le rette uscenti da tale vertice si distribuiscono in coppie in modo che due rette coniugate formano una conica del complesso.

Così può accadere che una superficie della rete si spezzi in un piano σ ed in una quadrica $\varphi_2 \equiv c_2$. Allora il complesso ammette anche la seguente genesi:

« Fra le quadriche di una rete e le rette di un piano σ è data una corrispondenza omografica. Un piano generico π dello spazio sega la quadrica della rete, omologa alla traccia del piano π su σ, secondo una conica la quale col variare del piano π descrive un complesso del tipo indicato ».

Invece nel caso che il complesso Γ presenti una linea direttrice di 4° ordine e di 1ª specie, esso ammette anche questa genesi:

« Fra le quadriche di un fascio ed i punti di una retta o è data una corrispondenza proiettiva. Un piano generico π dello spazio sega la quadrica del fascio omologa del punto in cui esso incontra la o, secondo una conica, la quale col variare del piano π descrive un complesso del tipo indicato ».

Nè farò cenno di altri risultati ottenuti sull'argomento che è svolto completamente in una Memoria di prossima pubblicazione.

F. SEVERI

DI ALCUNI RECENTI RISULTATI NELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

E SOPRA QUALCHE PROBLEMA AD ESSI COLLEGATO [1]

Uno tra i risultati più importanti ottenuti in questi ultimi tempi nella teoria delle superficie algebriche, si riferisce agl' integrali di differenziali totali.

Il Picard aveva introdotto fino dal 1884 la nozione d' integrale di differenziale totale appartenente ad una superficie algebrica

$$f(x\,y\,z) = 0,$$

considerando gl' integrali del tipo

$$\int A\,dx + B\,dy,$$

ove A, B sono funzioni razionali del punto (x, y, z) variabile su f, le quali soddisfanno, sulla superficie, alla condizione d' integrabilità.

Si domandava di riconnettere l'esistenza degl' integrali semplici di 1ª specie — dovunque finiti su f — e degl' integrali semplici di 2ª specie — aventi sole singolarità polari — a qualche proprietà geometrica della superficie; di stabilire insomma un legame del tipo di quello classico tra gl' integrali abeliani di 1ª e di 2ª specie ed il genere della curva cui essi appartengono.

La ricerca per una superficie presentavasi però profondamente diversa dall'analoga sopra una curva! Basti accennare al fatto che, mentre una curva piana priva di punti multipli, ha il massimo numero d' integrali abeliani di 1ª e di 2ª specie, compatibili col suo ordine, una superficie dello spazio, priva di singolarità, non possiede alcun integrale semplice (trascendente) di 1ª o di 2ª specie.

[1] Sugli argomenti qua toccati l'A. riferì verbalmente alla sezione II del Congresso, nella seduta del 9 aprile.

Tuttavia, se si vuole, il risultato ottenuto sulle superficie può presentarsi come analogo a quello noto per le curve: sopra una curva algebrica di genere p, la totalità degli ∞^n $(n \geqq p)$ gruppi di n punti, si distribuisce in ∞^p totalità, non aventi gruppi comuni, le quali sono altrettante serie lineari, nel senso di Brill e Noether. Orbene, sopra una superficie algebrica f, che possegga p integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti, il sistema continuo più ampio cui appartiene una curva i cui caratteri sieno legati da una certa disuguaglianza, che qui è inutile trascrivere, è costituito da ∞^p sistemi lineari completi, tra loro distinti [1].

Quanto agl'integrali semplici di 2ª specie, si prova che f ne possiede $2p$ indipendenti; e poichè Picard aveva da tempo dimostrato che « gl'integrali di 2ª specie son tanti quanti i loro periodi », così ne segue che anche il numero di tali periodi distinti è uguale a $2p$.

Quest'ultimo risultato si può enunciare dicendo che $2p$ è il numero dei cammini chiusi distinti, esistenti sulla riemanniana imagine reale di f.

L'intero p, che rimane evidentemente immutato nelle trasformazioni birazionali della superficie, è d'altro lato uguale alla *irregolarità* di questa, cioè alla differenza $p_g - p_a$ tra il genere geometrico ed il genere aritmetico.

Ricordo che il « genere geometrico » si può definire come il numero degl'integrali doppi indipendenti, dovunque finiti sulla superficie data f (Clebsch, Noether), oppure, geometricamente, se la f è d'ordine m, come il numero delle superficie indipendenti d'ordine $m - 4$ ad essa aggiunte [2].

Quanto al « genere aritmetico », considerato inizialmente da Cayley, Zeuthen e Noether, ricordo ch'esso è dato dal numero virtuale delle suddette superficie d'ordine $m - 4$; numero *virtuale*, in quanto si calcola come se valesse, anche per $l = m - 4$, la formola che esprime il numero delle condizioni cui deve soddisfare una superficie d'ordine l, per esser aggiunta ad f; mentre invece la formola stessa vale soltanto per l abbastanza grande.

Il teorema sul numero degl'integrali semplici di 1ª e di 2ª specie ed il legame colle proprietà geometriche della superficie, sono il risultato complessivo di ricerche dovute (in ordine cronologico) a me, ad Enriques e a Castelnuovo.

Gli strumenti trascendenti di tali ricerche son forniti dai risultati di Picard, nonchè dalla nozione, da me introdotta, delle funzioni razionali residue di un integrale di 2ª specie; lo strumento geometrico più importante è dato dal teorema fondamentale di Enriques, secondo cui « la serie lineare caratteristica di un sistema continuo completo (serie segata sopra una curva generica del sistema dalle curve che le sono infinitamente vicine), è completa ».

(1) Ometto, ora e nel seguito, particolareggiate citazioni, e rinvio alla Monografia di Castelnuovo-Enriques, che trovasi alla fine del II volume del trattato di Picard et Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1906). Per la parte più antica della teoria, veggasi la Monografia degli stessi Autori nei Mathematische Annalen (Bd. 48, 1896).

(2) Quando f possegga una linea doppia ordinaria — ipotesi che, com'è noto, non è restrittiva nella geometria delle trasformazioni birazionali — le aggiunte son definite dalla condizione di passare per la linea doppia.

***

Una questione importante s'affaccia a proposito della serie caratteristica d'un sistema continuo di curve algebriche, sopra la superficie f. Il sistema lineare completo individuato da una curva irriducibile C, tracciata sulla superficie, essendo generalmente contenuto in un sistema continuo più ampio, ha la serie caratteristica deficiente: si sa solo che la deficienza di questa serie non supera $p = p_g - p_a$, e che esistono sistemi lineari per cui il limite è raggiunto.

La determinazione precisa di questa deficienza, occorre nel computo del numero di costanti arbitrarie dalle quali dipende una funzione razionale, di cui si assegni la curva polare (di 1° ordine) C. Sotto forma geometrica ciò equivale a determinare la dimensione r del sistema lineare completo $|C|$, ossia la dimensione $r-1$ della relativa serie caratteristica.

A tal uopo bisogna conoscere la deficienza δ e l'indice di specialità j di questa serie, cioè il numero dei gruppi canonici indipendenti della curva C, che passano per un gruppo caratteristico. Conoscendosi δ ed j, l'ordinario teorema di Riemann-Roch, applicato alla C, porge:

$$r = n - \pi + j - \delta + 1,$$

ove n, π sono il *grado* e il *genere* di C.

Mediante la disuguaglianza

$$\delta \leq p_g - p_a,$$

Castelnuovo ha ricavato fin dal '97 il limite inferiore

$$r \geq n - \pi + p_a - i + 1,$$

pel numero delle costanti arbitrarie che compajono nella più generale funzione razionale avente la C per curva polare (di 1° ordine). In questa disuguaglianza, che si suol citare come *il teorema di* Riemann-Roch *sulle superficie*, i denota l'indice di specialità della C, cioè il numero delle superficie aggiunte d'ordine $m-4$, che passano per C.

L'espressione del 2° membro si chiama la « dimensione virtuale » del sistema $|C|$, il quale si considera come *regolare*, quando è non speciale ($i = 0$) e inoltre la sua dimensione effettiva uguaglia la virtuale.

In un sistema lineare privo di punti base — è questo per molte ragioni il caso più interessante — le cause perturbatrici rispetto alla regolarità del sistema son due:

1°) Il fatto che la deficienza δ della serie caratteristica, si discosti dal suo valore normale massimo $p_g - p_a$.

2°) Il fatto che la serie lineare segata sopra la curva C, dalle superficie di ordine $m-4$ aggiunte ad f, non risulti completa.

La prima causa perturbatrice cessa per le superficie regolari ($p_g = p_a$); in ogni caso si deve giungere a determinarla in modo preciso mediante gl' integrali semplici di 1ª specie, così da avere un significato netto per l'aumento ch'essa porta alla dimensione virtuale.

Preciso un po' di più la posizione del problema.

Mi limito perciò al caso in cui lungo C non è costante nessun integrale semplice di 1ª specie (il caso contrario non ha interesse). Allora i p integrali di 1ª specie della f, considerati come funzioni del punto scorrente su C, dànno ivi altrettanti integrali abeliani (riducibili) di 1ª specie, e quindi individuano su C una serie lineare ∞^{p-1}, tutta formata da gruppi canonici. Questa serie, su cui avrò da ritornare in seguito, non è completa — almeno se, come accadrà in generale, il genere π di C è $>$ di p: la chiamerò, per ragioni evidenti, la *serie canonica ridotta* della curva C.

La considerazione di tale serie sembra fondamentale per la ricerca delle cause che tendono ad allontanare δ dal suo valore massimo. Di ciò dànno indizio, oltre a qualche esempio, le equazioni, che ho altrove scritto, esprimenti le condizioni affinchè un integrale di 2ª specie riducasi ad una funzione razionale. Si tratta qui di un' interpretazione analoga a quella data dal Roch, per le condizioni riemanniane affinchè un integrale abeliano di 2ª specie riducasi ad una funzione razionale; ma la cosa, per le superficie, è assai più complessa.

Tuttavia, dal punto di vista geometrico, qualcosa si può affermare di più preciso sulla 1ª causa d' irregolarità.

Possiamo infatti dimostrare che *sopra una superficie f d'irregolarità p, la deficienza δ della serie caratteristica d'un sistema irriducibile* $|C|$, *i cui caratteri soddisfacciano alla disuguaglianza*

$$(1) \qquad n - \pi + p_a - i + 1 \geq 0\,,$$

è data precisamente da

$$\delta = p\,.$$

Noi supponiamo che C sia la curva generica d'un sistema lineare irriducibile, i cui punti base vengano assegnati colla loro molteplicità effettiva. Potremo anzi ammettere addirittura, dopo aver eventualmente operato un'opportuna trasformazione birazionale della f, che il sistema $|C|$ sia privo di punti base: allora C non avrà punti multipli.

Consideriamo il sistema continuo completo $\}C\{$ contenente $|C|$. In una Nota del Circolo matematico di Palermo (¹), esponendo una dimostrazione del teorema di Enriques — secondo cui è completa la serie caratteristica di $\}C\{$ — ho assegnato un modo, che qui giova richiamare, per costruire le curve infinitamente vicine alla C data.

(¹) Seduta del 9 aprile 1905.

Si consideri su f un sistema lineare $|E|$, irriducibile e privo di punti base, che contenga parzialmente $\}C\{$ e che seghi su C una serie lineare completa; si costruisca in corrispondenza ad ogni sistema lineare contenuto in $\}C\{$, il sistema residuo $|D| = |E - C|$, e s'indichi infine con $\}D\{$ l'insieme dei sistemi $|D|$ e con d il numero dei punti comuni a C e ad una D.

Allora le curve E dotate di d punti doppi e infinitamente vicine ad una curva spezzata $C + D (\equiv E)$, risultano spezzate in una parte infinitamente vicina a C ed in una infinitamente vicina a D: orbene, quelle tra le parti suddette, che sono infinitamente vicine a C, segano ivi la serie caratteristica completa. Ma la cosa analoga non può affermarsi per le parti infinitamente vicine a D, perchè non si sa a priori se il sistema $\}D\{$ sopra definito sia completo.

Però, se si tien conto dell' ipotesi (1), si conclude subito che $\}D\{$ è completo, giacchè $\}C\{$, e quindi $\}D\{$, risultano costituiti da ∞^p sistemi lineari distinti ([1]).

Se si osserva inoltre che le E dotate di d punti doppi e infinitamente vicine a $C + D$, passano pei punti del gruppo (C, D) — che son doppi per $C + D$ — si potrà affermare che le curve E passanti per questo gruppo, segano una serie completa. fuori dei punti fissi, non soltanto sulla C, ma anche sulla D.

Indicando con R, r, r_1 le dimensioni rispettive dei sistemi completi $|E|, |C|, |D|$, con ε il numero delle condizioni imposte alle E dai punti del gruppo (C, D), e infine con δ, δ_1 le deficienze rispettive delle serie caratteristiche di $|C|, |D|$, in virtù d'un noto procedimento di CASTELNUOVO ([2]), verrà:

$$\delta = \delta_1 = R - r - r_1 - \varepsilon ,$$

e poichè se $|E|$, come può supporsi, è regolare, e la serie completa $|EC|$ è non speciale, $|D|$ è pure regolare, risulterà

$$\delta = \delta_1 = p.$$

Ciò che apparisce come essenziale nel ragionamento precedente non è già l'ipotesi (1), ma sibbene l'ipotesi che il sistema completo $\}C\{$ sia costituito da ∞^p, e non da un minor numero di sistemi lineari distinti.

Che cosa potrà dirsi del valore di δ, se $\}C\{$ è costituito da ∞^i $(i < p)$ sistemi lineari?

Si consideri ancora il sistema regolare $|E|$ contenente parzialmente $\}C\{$ e segante sopra C una serie completa non speciale, in tal guisa che $|D| = |E - C|$ risulterà pure regolare. Il sistema $\}D\{$ formato dai resti dei sistemi $|C|$ rispetto ad $|E|$, questa volta non è completo; ma tuttavia si può calcolarne agevolmente l'infinità ϱ. Invero la dimensione di un sistema lineare *generico* scelto in $\}D\{$, non può da un lato

([1]) Ved. il n. 7 della mia Nota: *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, 7 maggio 1905).

([2]) Annali di Matematica (2), t. 25 (1897), n. 30.

esser superiore a quella r_1 del *particolar* sistema $|D|$, nè d'altra parte, pel teorema di Riemann-Roch, può esserne inferiore; onde dovrà essere

$$\varrho = r_1 + i .$$

La dimensione della serie caratteristica del sistema $\}D\{$, che è poi la dimensione della serie lineare staccata su D, fuori dai punti fissi, dalle E passanti pel gruppo (CD), risulterà pertanto uguale ad $r_1 - 1 + i$. Avremo perciò col solito procedimento di Castelnuovo:

$$\delta = i = R - r - r_1 - \varepsilon .$$

Questo risultato ci dice in definitiva che *entro un sistema continuo completo non si trovano mai, come a priori potrebbe supporsi, sistemi lineari particolari di dimensione superiore a quella del sistema lineare generico.*

La proprietà è assai strana e fa mancare un altro dei pochi legami di analogia esistenti tra le curve e le superficie!

***

Come si può costruire geometricamente la serie canonica ridotta? Questa domanda cui importa rispondere per ben definire la prima tra le cause sopra accennate d'irregolarità d'un sistema lineare, si riattacca ad un'altra questione sugl'integrali di 1ª specie. In un differenziale totale appartenente ad f, in qual modo bisogna scegliere le funzioni razionali A, B, coefficienti di dx e di dy, affinchè il differenziale risulti di 1ª specie?

Per gl'integrali abeliani d'una curva algebrica d'ordine m, la cosa analoga è ben nota. Un differenziale abeliano di 1ª specie si costruisce con operazioni razionali a partire dall'equazione della curva, giacchè la funzione integranda è determinata da un polinomio aggiunto d'ordine $m - 3$.

Per una superficie, la questione, dal lato strettamente analitico, può considerarsi risoluta. Il Picard l'ha infatti ricondotta alla determinazione di quattro polinomî, d'ordine dato, soddisfacenti a due equazioni differenziali, che traducono le condizioni d'integrabilità.

Ma non si riesce a scoprire facilmente il contenuto geometrico di tale costruzione: a caratterizzare cioè le operazioni analitiche, come condizioni di passaggio di certe superficie per linee e punti, legati alle singolarità della superficie f!

Io avevo intraveduto una risposta alla questione e ne avevo fatto anche cenno nella comunicazione verbale al Congresso, ma esaminando le cose più dettagliatamente, ho dovuto concludere che la ricerca non era ancor matura.

Tuttavia, a proposito di ciò e della serie canonica ridotta, stimo utile di esporre alcune osservazioni, che potrebbero guidare altri al risultato definitivo.

Fissiamo l'attenzione sopra un integrale abeliano

(2) $$\int A(yxz)\,dx \qquad \text{(A razionale in } x, y, z\text{)},$$

appartenente alla sezione della nostra f con un piano $y = \text{cost}$; e supponiamo che l'integrale stesso sia di 2ª (o di 1ª) specie per valori generici di y. Ciò non esclude che in corrispondenza di ciascuno dei piani $y = \text{cost}$, tangenti alla superficie, l'integrale sia di 3ª specie, chè anzi, in generale, esso viene a presentare una singolarità logaritmica nel relativo punto di contatto.

Si vede che *fra i periodi dell'integrale* (2) *ve ne sono r distinti che si riducono a funzioni razionali di* y, $r+1$ designando l'ordine di connessione lineare di f [1].

Dal punto di vista dell'*Analysis situs*, osserverò che questa notevole proposizione del PICARD si può ottenere nel modo seguente:

Da che i numeri di BETTI esprimenti gli ordini di connessione lineare e a tre dimensioni della superficie f, sono uguali tra loro [2], si potranno fissare sulla superficie r cicli *distinti* a tre dimensioni, seganti sopra una sezione piana generica del fascio $y = \text{cost}$, r cicli lineari *distinti*. La circostanza che un ciclo a tre dimensioni possa tagliare una sezione piana secondo due o più cicli lineari separati, non deve imbarazzare, perchè in questo caso si considererà il ciclo unico che risulta dalla loro somma.

Ciascuno dei cicli così costruiti ritorna in se stesso per ogni circolazione di y, e quindi i periodi corrispondenti dell'integrale (2) risultano funzioni uniformi di y. Queste funzioni non possono ammettere a priori che singolarità logaritmiche o polari, e d'altro lato, trattandosi di funzioni uniformi, si deve escludere l'esistenza di singolarità del primo tipo. Dovrà dunque trattarsi di funzioni razionali.

Si osserverà che *queste funzioni riduconsi a polinomii* allorquando la curva polare della funzione A non contiene altre sezioni $y = \text{cost.}$ all'infuori della curva all'infinito di f; mentre *esse riduconsi a costanti* quando tra le sezioni $y = \text{cost.}$ non c'è alcuna curva polare di A.

Il ragionamento esposto, oltre alla sua semplicità, ha il vantaggio di potersi riferire anche al caso d'un integrale abeliano di 2ª specie fissato razionalmente sopra una curva irriducibile C, variabile in un fascio lineare. Si può quindi enunciare il teorema di PICARD sotto la forma invariantiva seguente:

Essendo dato sopra una superficie f un fascio lineare irriducibile $|C|$, *le cui curve si determinino coi valori del parametro* λ, *fra i periodi d'un integrale abeliano di* 2ª *(o di* 1ª*) specie fissato razionalmente sulla curva C variabile nel fascio, ve ne sono r distinti, che si riducono a funzioni razionali di* λ.

Sotto le ipotesi precedenti, sopra ogni C risulta staccata razionalmente, rispetto a λ, la funzione razionale integranda φ, la quale, al variare di λ, genera una funzione razionale Φ appartenente ad f. Ebbene, *la condizione affinchè gli r periodi di cui sopra si parla si riducano a costanti, è che la curva polare di* Φ *non contenga alcuna* C.

[1] PICARD et SIMART, t. II, p. 389. Veramente qui si parla di *polinomî*; ma l'integrale (2) considerato dagli Autori è *generico* ed è perciò sottinteso che la funzione A resti finita nel punto generico d'una sezione $y = \text{cost}$, per ogni valore *finito* di y.

[2] PICARD et SIMART, t. I, p. 44.

Diremo *cicli invarianti* gli r cicli distinti di una C che ritornano in sè per le circolazioni di λ. Accanto a questi cicli ve ne sono altri notevoli: son quelli che vengono a circondare — sopra un foglio della riemanniana relativa a C — un *nuovo* punto doppio che la C venga ad acquistare al variare di λ (si sottintende che il fascio non presenti particolari complicazioni).

Ogni ciclo di C è omologo ad una combinazione lineare dei cicli invarianti e dei cicli ultimamente considerati, che conviene chiamare *cicli nulli*, per ricordare che entro alla f essi riduconsi in definitiva a punti. — Un integrale semplice di 1ª specie appartenente ad f, stacca sopra ogni C un integrale abeliano di 1ª specie che ha periodi costanti (non tutti nulli) lungo i cicli invarianti e periodi nulli lungo i cicli nulli. E viceversa, da un integrale abeliano di questo tipo, fissato razionalmente sopra ogni C, si ricostruisce un integrale semplice della superficie.

In corrispondenza agl' integrali di 1ª specie appartenenti ad f, vengono pertanto ad ottenersi altrettante *curve indipendenti* $C + C'$, *che passano pei punti base e pei punti doppi staccati di curve del fascio*, $|C'|$ *denotando il sistema aggiunto a* C.

Tutta la difficoltà della questione posta sta nel trovare a quali ulteriori condizioni debba *eventualmente* soggettarsi una curva $C + C'$ che passi pei punti base e pei punti doppî staccati, affinchè l'integrale abeliano *di 1ª specie* ch'essa determina razionalmente sopra *ogni* curva C, abbia periodi nulli lungo i cicli nulli.

Una conseguenza utilissima si può già dedurre dalle considerazioni precedenti. Riferiamoci al caso in cui $|C|$ denoti il fascio di sezioni piane $y =$ cost. della nostra superficie f, e s'indichi con $Q(xyz) = 0$ una superficie d'ordine $m - 3$ aggiunta ad f. Allora si dimostra con Picard, che l'integrale $\int \frac{Q(xyz)}{f'_z} dx$ (y parametro) ha periodi nulli lungo i cicli invarianti. Ne deriva che l'integrale abeliano staccato sopra una sezione $y =$ cost. da un integrale semplice di 1ª specie della superficie, non può mai coincidere coll'integrale precedente, perchè altrimenti si avrebbe su f un integrale (non costante) con tutti i periodi nulli.

Sotto forma invariantiva si può dunque dire che *la serie canonica ridotta esistente sopra una curva* C *della superficie, non ha alcun gruppo comune colla serie staccata su* C *dal relativo sistema aggiunto* $|C'|$.

G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS

SOPRA LE EQUAZIONI ALGEBRICHE F(X, Y, Z) = 0 CHE SI LASCIANO RISOLVERE CON X, Y, Z FUNZIONI QUADRUPLAMENTE PERIODICHE DI DUE PARAMETRI

Da più di un anno noi da una parte ed i sigg. Enriques e Severi d'altra parte ci siamo occupati del problema che consiste nella ricerca di tutte le superficie algebriche

$$F(X, Y, Z) = 0$$

le cui coordinate X, Y, Z del punto generico si possono esprimere con funzioni quadruplamente periodiche di due parametri u, v:

$$(1) \qquad X = \Phi_1(u, v) \quad , \quad Y = \Phi_2(u, v) \quad , \quad Z = \Phi_3(u, v)$$

specialmente nel caso in cui ad un punto di F corrisponde un numero $\nu > 1$ di coppie incongrue (u, v).

Sia:

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \\ \omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4' \end{matrix} \right|$$

la tabella dei periodi primitivi delle funzioni (1) e si supponga costruita una superficie iperellittica di rango $\nu = 1$ relativa alla tabella stessa, cioè un sistema di tre funzioni meromorfe di u, v coi periodi (2):

$$x = \varphi_1(u, v) \quad , \quad y = \varphi_2(u, v) \quad , \quad z = \varphi_3(u, v)$$

tali che ad ogni punto della superficie (x, y, z) corrisponda, a meno di periodi, una sola coppia u, v.

Allora X , Y , Z sono funzioni razionali di x , y , z, e la superficie F, di rango $\nu > 1$, rappresenta i gruppi di punti di una involuzione di grado ν sopra la superficie (x , y , z).

Come si passa da un punto (u , v) di questa superficie ad un altro punto (u' , v') del gruppo determinato dal primo? Se la superficie F, immagine della involuzione, non è razionale od equivalente ad una rigata ellittica, u' e v' si esprimono linearmente con u , v, cioè si ha:

$$(3) \qquad \begin{aligned} u' &= au + bv + c \ , \\ v' &= a'v + b'v + c' \, . \end{aligned}$$

Noi abbiamo dimostrato questo fondamentale teorema sotto restrizione, e precisamente sotto l'ipotesi che l'involuzione non possegga curve fondamentali coniugate a punti uniti; ma i sigg. Enriques e Severi hanno dimostrato il teorema per altra via non facendo alcuna ipotesi restrittiva. D'altra parte noi siamo riusciti a classificare in modo completo tutti i gruppi Γ di operazioni (3) dando per ognuno di essi la corrispondente tabella (2), cioè la superficie iperellittica di rango $\nu = 1$ sostegno della involuzione generata da Γ.

E così il problema resta completamente risoluto, giacchè, per scrivere le (1), basta costruire tre funzioni Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 di u , v che ammettano i periodi (2) e che restino inalterate *soltanto* per le operazioni del gruppo Γ.

Noi abbiamo trovato 20 tipi di superficie F dei quali 10 sono superficie di genere geometrico 0 e gli altri 10 sono tutte superficie regolari di genere 1.

Scopo della presente comunicazione è di richiamare l'attenzione sopra un nostro risultato fondamentale, e cioè che si può, caso per caso, ridurre la tabella dei periodi (2) alla ben nota forma normale:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{n} , 0 , g , h \\ 0 , 1 , h , g' \end{vmatrix}$$

in modo che le trasformazioni di Γ siano, rispetto alla (4), trasformazioni *ordinarie d'Hermite*.

E così vengono eliminate le difficoltà che presenta l'esame delle trasformazioni *singolari* nel senso del sig Humbert; inoltre, giacchè le trasformazioni ordinarie cambiano le funzioni Θ relative alla corrispondente tabella normale in funzioni Θ della tabella stessa, la rappresentazione (1) della superficie F può farsi mediante le sole funzioni Θ, senza ricorrere alle funzioni *intermediarie* nel senso dei sigg. Poincaré ed Humbert.

Tralasciando le superficie F di genere geometrico 0 delle quali possediamo anche le equazioni sotto forma esplicita, consideriamo ad esempio il tipo generale delle superficie F regolari di genere 1 e di rango $\nu = 4$.

Per questo tipo il gruppo $\boldsymbol{\Gamma}$ può supporsi generato dall'operazione di 4° ordine:

$$u' = iu \quad , \quad v' = -iv ,$$

ed allora la tabella dei periodi può ridursi a questa:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 \,, & i \,, & \tau \,, & i\tau \\ 1 \,, & -i \,, & \tau' \,, & -i\tau' \end{vmatrix}$$

Per assicurarci della esistenza delle relative funzioni quadruplamente periodiche, occorre, nel caso della tabella generale (2), che sussista una relazione così fatta:

$$(6) \qquad \sum A_{ij} (\omega_i \, \omega'_j - \omega_j \, \omega'_i) = 0 \quad , \quad (A_{ij} = -A_{ji})$$

dove le A_{ij} sono numeri interi, ed inoltre che una certa forma quadratica T sia definita. Nel caso speciale della tabella (5), la prima condizione mostra che tra τ e τ' sussiste una relazione del tipo:

$$(7) \qquad \tau' = \frac{(p - iq)\tau + 2\alpha}{2\beta\tau - (p + iq)}$$

essendo α, β, p, q numeri interi che si possono supporre primi fra loro, e la seconda condizione si traduce in questa:

$$\varDelta = p^2 + q^2 + 4\alpha\beta > 0 .$$

Ma, data la (7), gl'interi A_{ij} non sono determinati; basta che essi soddisfino alle condizioni:

$$A_{14} - A_{23} = mp \quad , \quad A_{24} - A_{31} = mq \quad , \quad A_{12} = m\alpha \quad , \quad A_{34} = -m\beta$$

essendo m un numero intero, purchè, bene inteso, si conservi definita la forma quadratica T avanti menzionata.

Scegliendo le A_{ij} sotto le dette condizioni, si può, come è noto, trasformando linearmente i periodi ed i parametri u, v, ridurre la tabella (5) alla forma normale (4), ma l'intero n che vi figura cambia secondo la scelta delle A_{ij}, e l'operazione generatrice di $\boldsymbol{\Gamma}$, scritta coi nuovi parametri, è, in generale, una trasformazione singolare rispetto alla tabella normale.

Come bisogna completare la determinazione delle A_{ij} affinchè la trasformazione in discorso risulti ordinaria?

Se p e q sono entrambi pari bisogna prendere:

$$A_{14} = -A_{23} = \tfrac{1}{2}p \quad , \quad A_{24} = -A_{31} = \tfrac{1}{2}q \quad , \quad A_{12} = \alpha \quad , \quad A_{34} = -\beta ;$$

in ogni altro caso bisogna prendere invece:

$$A_{14} = -A_{23} = p \quad , \quad A_{24} = -A_{31} = q \quad , \quad A_{12} = 2\alpha \quad , \quad A_{34} = -2\beta.$$

Con questi valori delle A_{ij} la tabella (5) si riduce alla forma normale (4) con $n = \frac{\Delta}{4}$ se p e q sono entrambi pari, e con $n = \Delta$ negli altri casi. I moduli di periodicità g, g', h, che sono in sostanza funzioni razionali del parametro τ, sono legati da due *relazioni singolari*.

Per esempio, il caso $n = 1$ si presenta sotto le due ipotesi $\Delta = 1$, $\Delta = 4$ e si hanno in corrispondenza due tipi distinti di superficie: se è $\Delta = 1$ le relazioni singolari si possono ridurre a $g = g'$, $h = 0$ e l'operazione generatrice di Γ a $u' = v$, $v' = -u$; se è $\Delta = 4$ le relazioni singolari si possono ridurre a $g = g'$, $h^2 - gg' = 1$ e l'operazione generatrice di Γ a:

$$u' = gu - hv \quad , \quad v' = hu - gv.$$

Per $n = 2$ si hanno pure due tipi distinti di superficie secondo che si suppone $\Delta = 2$ o $\Delta = 8$. In generale, quando $n \equiv 1$ o $n \equiv 2$ (mod 4) si hanno ogni volta due tipi distinti di superficie F secondo che si fa $\Delta = n$ o $\Delta = 4n$; invece, se $n \equiv 3$ o $n \equiv 0$ (mod 4) si ha in corrispondenza un sol tipo, perchè allora, tenendo presente la forma di Δ, si vede che bisogna prendere necessariamente $\Delta = 4n$. Tutti questi tipi dipendono, oltre che dal numero intero n, da un parametro τ che può prendere tutti i valori, esclusi quelli per cui τ e τ' risultano numeri coniugati.

Supponiamo che la relazione (7) sia:

$$\tau = \frac{n}{\tau'} \tag{8}$$

che corrisponde a $\Delta = 4n$; allora, prendendo le A_{ij} come si è avanti detto, la (6) diviene:

$$n(\omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1) + (\omega_4 \omega'_3 - \omega_3 \omega'_4) = 0$$

e la tabella (5) si riduce subito alla forma normale (4). Le relazioni singolari fra g, g', h si riducono a:

$$g' = ng \quad , \quad n(h^2 - gg') = 1$$

e l'operazione generatrice di Γ si scrive:

$$u' = g'u - hv \quad , \quad v' = nhu - g'v.$$

E si può facilmente verificare che questa trasformazione, rispetto alla tabella (4), è una trasformazione ordinaria.

Nel presente caso la relazione singolare più generale fra i moduli di periodicità è

$$\mu n(h^2 - gg') + \lambda(g' - ng) - \mu = 0$$

con λ e μ interi, e questa ha per *invariante* (rispetto alle trasformazioni d' Hermite) la forma quadratica in λ , μ :

$$\mathrm{I} = 4n\,(\lambda^2 + \mu^2).$$

Ora, se n è, ad esempio, un multiplo di 3 ma non di 9, la forma I non può rappresentare un quadrato, e quindi non si hanno integrali ellittici.

Ciò prova che, anche quando il rango supera 2, si possono avere superficie che si trovano nel caso iperellittico puro, nel senso che la corrispondente tabella di periodi non ammette integrali ellittici. Queste superficie si presentano soltanto per i ranghi 3, 4, 6.

Quando è $\Delta = 4n$, può sempre la relazione (7) tra τ e τ' portarsi alla forma semplice (8)?

Osserviamo che l'aspetto della tabella (5) si conserva quando si cambia τ in $\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ e τ' in $\dfrac{\bar{a}\tau' + \bar{b}}{\bar{c}\tau' + \bar{d}}$ essendo a , b , c , d numeri interi nel corpo [1, i] tali che $|ad - bc| = 1$ ed $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ i loro coniugati. Queste trasformazioni non alterano Δ ma fanno variare gl' interi p , q , α , β, ed è probabile che, da questo punto di vista, due relazioni (7) con lo stesso Δ siano equivalenti. Noi non siamo però riusciti a dimostrare questa proposizione e nemmeno a dare un esempio in contrario: certo è che la proposizione si verifica per tutti i valori di Δ compresi tra 1 e 50. In ogni caso, il numero delle relazioni (7) distinte, in corrispondenza ad un assegnato valore di Δ, è finito.

Consideriamo in secondo luogo il tipo generale di superficie di rango 8 per cui il gruppo Γ può ridursi a quello generato dalle due operazioni:

$$(u' = iu\,,\, v' = -iv) \quad , \quad (u' = v\,,\, v' = -u)$$

e la tabella dei periodi a:

$$\left|\begin{matrix} 1\ , & i\ , & \tau\ , & i\tau \\ \tau\ , & -i\tau\ , & -1\ , & i \end{matrix}\right| \tag{9}$$

Il gruppo Γ lascia inalterati due soli punti della superficie iperellittica di rango 1 relativa a questa tabella. Affinchè la superficie ora detta esista occorre e basta che τ soddisfi ad una equazione quadratica del tipo:

$$(p - iq)\,\tau^2 + 2\alpha\tau - (p + iq) = 0$$

dove p, q, α sono numeri interi non tutti nulli che si possono supporre primi fra loro. Questa relazione non è altro che la (6); si ha quindi:

$$A_{23} - A_{14} = mp \quad , \quad A_{31} - A_{24} = mq \quad , \quad A_{12} - A_{34} = -m\alpha .$$

Ma, affinchè le trasformazioni di Γ risultino ordinarie rispetto alla tabella normale che si ha partendo dalla (6), bisogna prendere:

$$A_{23} = -A_{12} = p \quad , \quad A_{31} = -A_{24} = q \quad , \quad A_{12} = -A_{34} = -\alpha .$$

Allora il numero intero n che si presenta nella tabella normale risulta eguale alla somma di tre quadrati e precisamente a $p^2 + q^2 + \alpha^2$: ecco dunque un'intera famiglia di superficie per cui il detto intero non può scegliersi ad arbitrio. Questa circostanza si presenta per tutti i tipi di superficie di ranghi 8, 12, 24 e di genere geometrico 1.

Ferma restando la forma ridotta del gruppo Γ e della tabella, gl'interi p, q, α possono essere permutati e cambiati di segno arbitrariamente; così che, in corrispondenza ad un determinato numero n, si hanno tanti tipi di superficie quanti sono i modi di decomporre n nella somma di tre quadrati primi fra loro.

Ad esempio, per $n = 1$ si ha un solo tipo: noi prenderemo $\alpha = 1$, $p = q = 0$ e quindi $\tau = 0$. La tabella dei periodi si riduce subito alla forma normale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{vmatrix}$$

e il gruppo Γ resta inalterato. Fra i relativi valori di g, g', h si hanno le tre relazioni singolari indipendenti:

$$g' = g \quad , \quad h = 0 \quad , \quad h^2 - gg' = 1 .$$

Per $n = 2$ si ha pure un solo tipo: noi prenderemo $\alpha = 0$, $p = q = 1$ ed allora τ risulta una radice primitiva 8ª dell'unità. La tabella dei periodi si può ridurre alla seguente forma normale:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & g, & -g \\ 0, & 1, & -g, & 2g \end{vmatrix} \qquad \left(g = \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

e si hanno le tre relazioni singolari:

$$g' = 2g \quad , \quad g + h = 0 \quad , \quad 2(h^2 - gg') = 1$$

Per ottenere questi ultimi risullati noi abbiamo fatto sopra i periodi la trasformazione lineare:

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \omega_1 \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \omega_1 + \omega_2 \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_3 = \omega_3 \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_4 = -\omega_3 + \omega_4$$

e sopra i parametri u, v quest'altra:

$$u = 2\boldsymbol{\Omega}_1 \mathrm{U} + \boldsymbol{\Omega}_2 \mathrm{V} \quad , \quad v = 2\boldsymbol{\Omega}'_1 \mathrm{U} + \boldsymbol{\Omega}'_2 \mathrm{V}.$$

Tenendo presente che le $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}'$ hanno i valori (9), si verifica facilmente che le due operazioni generatrici di $\boldsymbol{\Gamma}$ si scrivono coi nuovi parametri U , V così:

$$\begin{array}{ll|ll} \mathrm{U}' = -\mathrm{U} - \mathrm{V} & & \mathrm{U}' = 2g\mathrm{U} + g\mathrm{V} \\ \mathrm{V}' = 2\mathrm{U} + \mathrm{V} & & \mathrm{V}' = -2g\mathrm{U} - 2g\mathrm{V}, \end{array}$$

e queste sono trasformazioni ordinarie rispetto alla tabella (10).

G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS

INTORNO ALLE SUPERFICIE REGOLARI DI GENERE UNO CHE AMMETTONO UNA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA MEDIANTE FUNZIONI IPERELLITICHE DI DUE ARGOMENTI

Facendo seguito alla nostra comunicazione letta ora dal prof. BAGNERA, ci proponiamo di esporre i metodi che servono alla effettiva costruzione delle superficie iperellittiche regolari di genere 1 e di dare i criteri che servono a caratterizzare queste superficie. Ci limiteremo qui a considerare il caso delle superficie di rango 3, per le quali il corrispondente gruppo Γ è ciclico di 3° ordine; però i metodi che esporremo sono suscettibili di essere generalizzati ed applicati agli altri tipi di superficie iperellittiche di genere 1.

1. Le superficie iperellittiche Φ di rango 1, sostegni d'involuzioni cicliche di 3° ordine regolari e di genere 1, ammettono una rappresentazione parametrica con funzioni iperellittiche di due parametri u, v, che si possono supporre, come noi abbiamo dimostrato altrove, dotate della seguente tabella di periodi fondamentali:

$$\begin{vmatrix} 1, & \varepsilon, & \tau, & \varepsilon^2\tau \\ 1, & \varepsilon^2, & \tau', & \varepsilon\tau' \end{vmatrix} \qquad \tau' = \frac{(p+\varepsilon^2 q)\tau + 3\alpha}{3\beta\tau - (p+\varepsilon q)},$$

dove p, q, α, β sono numeri interi primi fra loro tali che $p+q \equiv 0 \pmod{3}$ e $p^2+q^2-pq+9\alpha\beta > 0$, ed ε è una radice immaginaria cubica dell'unità.

L'involuzione di 3° ordine può intendersi generata dalle potenze della sostituzione:

$$u' = \varepsilon u \quad , \quad v' = \varepsilon^2 v.$$

Questa involuzione possiede 9 punti uniti, che sono i punti della superficie Φ corrispondenti alle seguenti coppie di valori dei parametri u e v:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-\varepsilon}{3}(a+b\tau) \\ v &= \frac{1-\varepsilon^2}{3}(a+b\tau') \end{aligned} \qquad (a, b = 0, 1, 2).$$

Le 9 trasformazioni della Φ in sè stessa:

$$u' = u + \frac{1-\varepsilon}{3}(a + b\tau) \qquad\qquad (a\,,b = 0\,,1\,,2)$$
$$v' = v + \frac{1-\varepsilon^2}{3}(a + b\tau')$$

le quali sono permutabili con la trasformazione generatrice dell'involuzione, permutano transitivamente i suddetti 9 punti; sicchè, per studiare quanto avviene in ciascuno di essi, basta studiare quanto avviene in uno, ad esempio nel punto $(0\,,0)$. Se si considerano in uno qualunque di questi punti le tangenti alla superficie, si vede subito che le terne di tangenti associate nella involuzione costituiscono una involuzione ciclica di 3° ordine le cui rette triple denotiamo con $t_1\,(du = 0)$ e $t_2\,(dv = 0)$. Sia ora $|\mathrm{K}|$ un sistema lineare irriducibile di curve appartenente alla data involuzione, privo di punti base e tale che non appartenga ad involuzioni più ampie della data, nè sia contenuto in un sistema lineare più ampio dello stesso grado ed appartenente all'involuzione stessa. In uno spazio S_r avente per dimensione la dimensione r del sistema $|\mathrm{K}|$ si costruisca una superficie F, immagine della nostra involuzione, le cui sezioni iperpiane siano le immagini delle curve di $|\mathrm{K}|$. Poichè la F è regolare, ha tutti i plurigeneri eguali ad 1 ed è priva di curve eccezionali (¹), la serie caratteristica segnata sulla curva generica di un sistema lineare privo di punti base dal sistema stesso coincide con la serie canonica (completa). In particolare, le sezioni iperpiane generiche di F hanno il genere r e l'ordine $2r-2$. Siano:

$$x_1 = f_1(u\,,v) \quad , \quad x_2 = f_2(u\,,v)\,,\,\ldots\,, \quad x_r = f_r(u\,,v)$$

le equazioni parametriche della superficie F: possiamo supporre che le f_i si annullino tutte per $u = v = 0$. Tenendo conto che la sostituzione $u' = \varepsilon u\,, v' = \varepsilon^2 u$ deve lasciare inalterate le funzioni $f_i(u\,,v)$, si deduce che, nell'intorno del punto $u = v = 0$, le funzioni $f_i(u\,,v)$ ammettono sviluppi in serie del tipo:

$$f_i(u\,,v) = a_i uv + b_i u^3 + c_i v^3 + \cdots$$

La superficie F, priva evidentemente di curve multiple, non può possedere punti di moltiplicità maggiore di 2, altrimenti conterrebbe sistemi lineari aventi la dimensione superiore al genere della curva generica, ciò che non può accordarsi col fatto che il genere di F è 1.

Si conchiude che non tutti i termini in uv delle sopradette serie possono annullarsi e quindi che la superficie F ha nell'origine un punto doppio biplanare, e, per la stessa ragione, F ha punti doppi biplanari nei rimanenti 8 punti corrispon-

(¹) Altrimenti la curva corrispondente sulla superficie Φ, la quale si può sempre supporre priva di curve eccezionali, farebbe parte della curva canonica di Φ, mentre tale curva ha l'ordine zero.

denti agli altri punti uniti della involuzione. D'altro canto, la F non può evidentemente possedere altri punti doppi. Se si risale alla superficie iperellittica Φ, sostegno della involuzione, si ha subito che le curve generiche, passanti per uno dei nove punti uniti, del dato sistema $|K|$ hanno ivi punti doppi e toccano semplicemente le rette t_1 e t_2.

Possiamo, in riassunto, asserire che:

La superficie F, *immagine dell'involuzione ciclica di* 3° *ordine e costruita partendo da un sistema lineare irriducibile appartenente all'involuzione, privo di punti base e non contenuto in sistemi più ampi, dello stesso grado, appartenenti alla stessa involuzione, possiede nove punti biplanari ordinari, e, se r è la dimensione dello spazio al quale essa appartiene, il suo ordine è* $2r-2$.

Le 9 sostituzioni

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{1-\varepsilon}{3}(a+b\tau) \\ v' &= v + \frac{1-\varepsilon^2}{3}(a+b\tau') \end{aligned} \qquad (a\,, b = 0\,, 1\,, 2)$$

dànno origine ad un gruppo abeliano di 9 trasformazioni birazionali della superficie F in sè. Anzi queste 9 trasformazioni sono *collineazioni.*

Denotiamo infatti con $|K'|$ il sistema delle sezioni iperpiane di F e con $|K'_1|$ il suo trasformato mediante una delle suddette trasformazioni.

Risalendo ai sistemi che ad essi corrispondono sopra la superficie iperellittica Φ, si trova subito che le curve K'_1 hanno, sopra F, lo stesso genere r e lo stesso ordine $2r-2$ delle sezioni iperpiane, donde esse non possono essere altro che sezioni iperpiane, sicchè i sistemi $|K'|$ e $|K'_1|$ coincidono.

Questo gruppo di grado 9, che indicheremo con G, di collineazioni cicliche di 3° ordine che trasformano la F in sè è contenuto in un gruppo H, di grado 18, di collineazioni che trasformano ancora F in sè; le 9 collineazioni di H non appartenenti a G sono involutorie e si ottengono componendo le collineazioni di G con la collineazione proveniente dalla sostituzione $u' = -u$, $v' = -v$.

Siano A e B due collineazioni del gruppo abeliano G, non appartenenti ad uno stesso gruppo ciclico; allora tutte le operazioni di G sono, come è noto, le operazioni $A^\lambda B^\mu$, ove λ e μ pigliano, indipendentemente, i valori 0, 1, 2. Poichè G permuta transitivamente i 9 punti singolari di F, fissiamo uno di tali punti e denotiamo col simbolo $(1+\lambda\,, 1+\mu)$ il suo trasformato mediante la collineazione $A^\lambda B^\mu$: in tal modo, ai 9 punti vengono a corrispondere i nove simboli del tipo $(\alpha\,, \beta)$, ove α e β prendono, indipendentemente, i valori 1, 2, 3.

Com'è stato già detto, è possibile sostituire ai due paramentri $u\,, v$ due loro combinazioni lineari U , V in guisa da ridurre la tabella dei periodi al tipo normale

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1\,, & 0\,, & g\,, & h \\ 0\,, & \frac{1}{n}\,, & h\,, & g' \end{vmatrix}$$

e che la trasformazione di 3° ordine generatrice dell'involuzione risulti una trasformazione *ordinaria*.

Questa trasformazione muta ogni Θ, d' un certo ordine mn, appartenente alla tabella (1) in una Θ dello stesso ordine, a meno di fattori esponenziali; in altri termini, la varietà iperellittica ∞^2 avente come elementi i vari sistemi lineari delle Θ d'ordine mn appartenenti alla tabella (1) subisce, in virtù della T, una trasformazione ciclica del 3° ordine, la quale, come subito si vede, gode di tutte le proprietà della T; in particolare si deduce, che vi sono 9, e 9 soli, sistemi lineari di Θ di un dato ordine mn appartenenti alla tabella (1) mutati in sè dalla trasformazione T. Le trasformazioni che, sulla superficie iperellittica Φ, corrispondono alle trasformazioni del gruppo G su F, permutano questi 9 sistemi tra loro; anzi se il prodotto mn non è multiplo di 3, tale gruppo di trasformazioni permuta i sistemi suddetti transitivamente.

A proposito del divisore n, che compare nella tabella (1), è poi bene notare, prima di andare avanti, che esistono superficie iperellittiche di divisore *arbitrario*, le quali ammettono una trasformazione ciclica di 3° ordine che cambia le Θ in Θ. Ad esempio, gode di tale proprietà la trasformazione:

$$\begin{aligned} u' &= gu - nhv \\ v' &= hu - (g+1)v \end{aligned}$$

sulla superficie iperellittica appartenente alla tabella

$$\begin{vmatrix} 1 \, , & 0 \, , & g \, , & h \\ 0 \, , & \frac{1}{n} \, , & h \, , & g' \end{vmatrix}$$

ove tra i periodi passino le relazioni singolari:

$$n(h^2 - gg') - g - 1 = 0 \quad , \quad g = ng' \text{ (}^1\text{)}.$$

Si considerino le Θ appartenenti alla tabella (1) le quali abbiano l'ordine minimo n, e si prenda uno qualunque dei sistemi lineari ∞^{n-1} di tali Θ, i quali sono mutati in sè dalla trasformazione generatrice dell'involuzione: uno qualunque di tali sistemi contiene poi certamente un certo numero di sistemi lineari (od, in particolare, di curve isolate) appartenenti all'involuzione.

Tenendo presente che due curve appartenenti all'involuzione devono segarsi, fuori dei punti uniti della involuzione, in un numero di punti che sia multiplo di 3, si ha

(1) Se la massima potenza di 2 contenuta in n ha l'esponente dispari, una tale superficie è certo priva di fasci ellittici, a meno che tra i periodi non intervenga una nuova relazione singolare, indipendente dalle due scritte.

subito che, denotando con σ il numero di punti uniti che sono punti base (semplici) [1] di uno dei sopradetti sistemi appartenenti all'involuzione, dev'essere

$$\sigma \equiv n \pmod{3}.$$

Analogamente, se si considerano due di tali sistemi e si denota con ϱ_1 il numero dei punti uniti dell'involuzione nei quali essi hanno contemporaneamente un punto base tale che la tangente ivi alle curve dell'un sistema sia diversa dalla tangente alle curve dell'altro, e con ϱ_2 il numero dei punti ove le curve dei due sistemi si toccano, si deve avere la relazione:

$$2\varrho_1 + \varrho_2 \equiv n \pmod{3}.$$

Prendiamo una Θ d'ordine n, appartenente alla stessa tabella e che non si annulli in nessuno dei punti uniti; moltiplichiamola per le sue due coniugate: otteniamo così una Θ d'ordine $3n$ autoconiugata e quindi, sulla superficie iperellittica Φ, una curva (composta) autoconiugata C non passante per alcuno dei punti uniti. Costruiamo, come immagine della involuzione, la superficie F le cui sezioni iperpiane corrispondono alle curve del sistema più ampio $|C|$ che appartenga all'involuzione e contenga totalmente C.

La F risulta d'ordine $6n$ ed immersa in uno spazio a $3n+1$ dimensioni; le sue sezioni hanno il genere $3n+1$. In corrispondenza ai sistemi delle Θ invarianti d'ordine n, la superficie possiede 9, od un numero multiplo di 9, sistemi lineari di curve di ordine $2n$ passanti per σ dei 9 punti biplanari che F possiede.

Il grado di un tal sistema è $2\dfrac{n-\sigma}{3}$ e la sua dimensione è $\dfrac{n-\sigma+3}{3}$. Il sistema delle sezioni iperpiane di F contiene evidentemente *tutto* il sistema continuo delle curve che corrispondono alle Θ d'ordine n moltiplicate per le coniugate, perchè tali curve, d'ordine $6n$, hanno il genere virtuale $3n+1$, e quindi appartengono a spazi di dimensione $3n$. In particolare, ognuna delle curve di ordine $2n$ sopradette, contata 3 volte, è una sezione iperpiana; insomma lungo una cotale curva la superficie F è osculata da un iperpiano.

Le precedenti osservazioni permettono inoltre di determinare facilmente il comportamento di queste curve nei 9 punti biplanari della F. Osserviamo che i piani tangenti alla F nei 9 punti singolari si distribuiscono in due gruppi, mutati ciascuno in sè (transitivamente) dalle trasformazioni del gruppo G. Denotiamo con α e con β questi due gruppi di piani [2] ed introduciamo la seguente notazione. Consideriamo i 9 punti come elementi di un quadro contenente 3 righe ciascuna di 3 elementi, convenendo di porre all'j^{esimo} posto della i^{esima} riga il punto $(i\,,j)$; sicchè

[1] Si badi però che in uno di tali punti le curve del sistema son tutte tangenti alla retta t_1 od alla t_2.

[2] Si hanno in un punto singolare di F tali due piani in corrispondenza alle due tangenti autoconiugate $t_1\,,t_2$ che si hanno nel corrispondente punto della superficie iperellitica Φ.

delle due trasformazioni A e B generatrici del gruppo G, la A permuta circolarmente le orizzontali e la B le verticali del quadro suddetto. Volendo denotare il comportamento di una curva o di un sistema di curve C nei 9 punti singolari, porremo in tale quadro degli 0 nel posto di quei punti per i quali le C non passano e porremo il simbolo $\alpha^r\beta^s$ nel posto di ogni punto dove le C passano, toccando con r rami il piano α e con s rami il piano β. Fatte queste convenzioni, si ha il risultato:

Se $n \equiv 1$, *mod.* 3, *la* F *contiene* 9 *sistemi lineari* $\infty^{\frac{n-1}{3}}$ C_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ *di curve d'ordine* $2n$ *trasformati l'uno nell'altro, transitivamente, dal gruppo* G *e lungo ogni curva dei quali essa è osculata da un iperpiano. Per determinare il comportamento di questi* 9 *sistemi basta quindi darne uno*:

$$C_{11} \equiv \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'esistenza di cotali sistemi di curve è poi, viceversa, sufficiente affinchè una superficie di ordine $6n$ (con $n \equiv 1$, mod 3) immersa in uno spazio a $3n + 1$ dimensioni, a sezioni di genere $3n + 1$ e dotata di 9 punti biplanari sia immagine di una involuzione ciclica di 3° ordine sopra una superficie iperellittica.

Sempre nelle ipotesi fatte, se $n > 1$, la superficie possiede inoltre altri due gruppi ciascuno costituito da 9 sistemi lineari $\infty^{\frac{n-4}{3}}$ di curve d'ordine $2n$, lungo le quali essa è osculata da iperpiani: le curve di questi sistemi passano per 7 dei punti singolari. Per precisare questi due gruppi, basta dare due dei sistemi lineari che li compongono:

$$C'_{11} \equiv \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}, \qquad C''_{11} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{vmatrix}.$$

Se $n \equiv 2$, *mod.* 3, *la* F *contiene due gruppi di* 9 *sistemi lineari* $\infty^{\frac{n-2}{3}}$ *di curve d'ordine* $2n$ *lungo le quali essa è osculata da iperpiani. I sistemi di uno stesso gruppo sono permutati transitivamente dalle collineazioni del gruppo* G. *Per individuare ciascuno di tali gruppi di sistemi, basta dare il simbolo di un loro sistema*:

$$C'_{11} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad C''_{11} \equiv \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{vmatrix}.$$

Viceversa, l'esistenza di uno di questi gruppi di sistemi lineari è sufficiente perchè la superficie F, fatta nel modo anzidetto, sia immagine di una involuzione ciclica di 3° ordine sopra una superficie iperellittica. Sempre nell'ipotesi $n \equiv 2$, mod. 3, se $n > 2$, la superficie contiene altri 9 sistemi lineari $\infty^{\frac{n-5}{3}}$ di curve d'ordine $2n$, permutati fra loro transitivamente dalle collineazioni di G e lungo le cui curve la F è osculata da iperpiani. Il simbolo di uno di questi sistemi è:

$$C_{11} \equiv \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}.$$

Finalmente:

Se $n \equiv 0$, mod. 3, la F *contiene* 3 *sistemi lineari* $\infty^{\frac{n-3}{3}}$, *permutati fra loro dalle collineazioni del gruppo* G, *di curve d'ordine* $2n$, *lungo le quali la* F *è osculata da iperpiani. Questi sistemi sono o del tipo*:

$$C_1 \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C_2 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}, \quad C_3 \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix},$$

o del tipo:

$$C_1 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix}, \quad C_2 \equiv \begin{vmatrix} \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}, \quad C_3 \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e la loro esistenza è, viceversa, sufficiente affinchè la superficie sia immagine di una involuzione ciclica di 3° ordine appartenente ad una superficie iperellittica. Oltre a questi sistemi la F può contenere altri sistemi di curve d'ordine $2n$ passanti per 0, 3, 6, 9 dei punti singolari.

Le predette proprietà bastano, come abbiamo detto, a caratterizzare le superficie regolari di genere 1 immagini d'involuzioni cicliche di 3° ordine sopra superficie iperellittiche; possono ad esempio servire per costruire i piani doppi cui tali superficie si possono sempre ridurre. La superficie F di 6° ordine, immersa in uno spazio a 4 dimensioni, che si ha per $n = 1$, era già stata determinata, con metodo analogo a quello che noi ora seguiamo, dai signori Enriques e Severi.

Terminiamo questi brevi cenni determinando il piano doppio cui equivale la superficie F di 12° ordine dello spazio a 7 dimensioni che si ha per $n = 2$.

Un tal piano doppio si può ottenere proiettando la F da 5 dei suoi punti singolari, ad esempio dai punti $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. La curva di diramazione si decompone in una retta r ed in una curva del 5° ordine C, le quali soddisfano a queste condizioni: la curva C possiede quattro punti doppi tali che due lati opposti del quadrangolo completo da essi determinato passano per uno dei punti P comuni ad r ed a C e degli altri quattro lati di tale quadrangolo ne passa uno per ognuno dei 4 rimanenti punti P. Per i 5 punti P passano 5 tangenti doppie della curva C, la quale inoltre tocca le 4 coniche, ciascuna delle quali passa per 3 dei punti doppi di C e per i due punti P che non stanno sul contorno del triangolo individuato da questi 3 punti, e la C tocca inoltre la conica che passa per tutti i 4 punti doppi suddetti e che è tangente alla retta r.

G. RADOS

ÜBER DIE WENDEBERÜHRUNGSEBENEN DER RAUMKURVEN

Bekanntlich ist das Verhalten der Raumkurven zu ihren Schmiegungsebenen ein anderes als dasjenige der ebenen Kurven ihren Tangenten gegenüber, da die Raumkurven abgesehen von den Wendeberührungsebenen (stationären Ebenen) alle anderen Schmiegungsebenen stets durchsetzen, während die ebenen Kurven im Berührungs Punkte gerade nur die Wendetangenten durchdringen, im Uebrigen aber die anderen Tangenten nicht schneiden. Bekannt sind auch die Kriterien, die einen Punkt einer ebenen Kurve als Wendepunkt kennzeichnen und die auch das Verfahren zur Ermittelung der Wendepunkte liefern. Wie lauten die analogen Kriterien für die Wendeberührungsebene? Diese Frage soll im Nachstehenden erledigt werden.

Es sei

$$x = f_1(t) \ , \ y = f_2(t) \ , \ z = f_3(t)$$

eine Parameter-Darstellung der Raumkurve, wobei vorausgesetzt werden möge, dass — abgesehen von etwaigen singulären Punkten — die Differentialquotienten der Koordinaten bis zu einer hinreichend hohen Ordnung darstellbar sind. Es mögen ferner die nachfolgenden Bezeichnungen angewendet werden:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = x^{(\alpha)} , \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = y^{(\alpha)} , \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = z^{(\alpha)}$$

$$\varDelta(t) \equiv \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv (123)$$

und allgemein

$$\begin{vmatrix} x^{(\alpha)} & y^{(\alpha)} & z^{(\alpha)} \\ x^{(\beta)} & y^{(\beta)} & z^{(\beta)} \\ x^{(\gamma)} & y^{(\gamma)} & z^{(\gamma)} \end{vmatrix} \equiv (\alpha\beta\gamma) \, .$$

Es können nun folgende Sätze bewiesen werden:

Die Schmiegungsebene der Raumkurve ist in einem ihrer Punkt (t) stets und nur dann zugleich Wendeberührungsebene, wenn für diesen Punkt die erste nicht verschwindende Derivierte von $\Delta(t)$ ungerader Ordnung ist.

Ist die erste an der Stelle t nicht verschwindende Derivierte von $\Delta(t)$ von gerader Ordnung, so ist das Verhalten der Raumkurve daselbst regulär, d. h. sie durchsetzt im Punkte (t) ihre Schmiegungsebene.

Wie die Wendeberührungsebenen vermittels dieser Sätze zu bestimmen sind, ergiebt sich von selbst.

Um Wiederholungen zu vermeiden, stelle ich einen mehrfach anzuwendenden Hilfssatz voran. Zunächst sei hier bemerkt, dass für Punkte mit bestimmter Schmiegungsebene die Grössen

$$A = y'z'' - y''z' \ , \ B = z'x'' - z''x' \ , \ C = x'y'' - x''y'$$

nicht zugleich verschwinden. Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich ausschliesslich auf solche Punkte. Es gült nun folgender Hilfssatz:

Für das Verschwinden der sämmtlichen Determinanten, die man aus den Spalten der Matrix

$$\left| \begin{matrix} x' \ x'' \ldots x^{(\alpha)} \ldots x^{(\beta)} \ldots x^{(\gamma)} \ldots x^{(p)} \\ y' \ y'' \ldots y^{(\alpha)} \ldots y^{(\beta)} \ldots y^{(\gamma)} \ldots y^{(p)} \\ z' \ z'' \ldots z^{(\alpha)} \ldots z^{(\beta)} \ldots z^{(\gamma)} \ldots z^{(p)} \end{matrix} \right|$$

bilden kann, ist notwendig und hinreichend, dass

$$(123) = 0\,, (124) = 0\,, \ldots, (12\,\alpha) = 0\,, \ldots, (12\,\beta) = 0\,, \ldots,$$
$$(12\,\gamma) = 0\,, \ldots, (12\,p) = 0$$

ist.

Aus den Gleichungen:

$$(12\,\alpha) = 0 \ , \ (12\,\beta) = 0 \ , \ (12\,\gamma) = 0$$

folgt nämlich

$$x^{(\alpha)}A + y^{(\alpha)}B + z^{(\alpha)}C = 0$$
$$x^{(\beta)}A + y^{(\beta)}B + z^{(\beta)}C = 0$$
$$x^{(\gamma)}A + y^{(\gamma)}B + z^{(\gamma)}C = 0$$

und da die Grössen A , B , C zufolge unserer Voraussetzung nicht zugleich Null sind, muss die Determinante dieses Systems von homogenen linearen Gleichungen verschwinden, d. h. es ist

$$(\alpha\beta\gamma) = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p).$$

Auf die Beweisführung der oben ausgesprochenen Hauptsätze übergehend, sei nun

$$\begin{vmatrix} \xi - f_1(t) & \eta - f_2(t) & \zeta - f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Schmiegungsebene des nichtsingulären Kurvenpunktes P. Die Punkte der Raumkurve:

$$x = f_1(t + h) \ , \ y = f_2(t + h) \ , \ z = f_3(t + h)$$

in der Umgebung von P liegen sämmtliche auf derselben Seite der Schmiegungsebene, und diese wird somit eine Wendeberührungsebene, wenn das Vorzeichen von

$$\Phi(h) = \begin{vmatrix} f_1(t+h) - f_1(t), & f_2(t+h) - f_2(t), & f_3(t+h) - f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix}$$

unabhängig von h stets dasselbe ist. Ist hingegen

$$sg \,.\, \Phi(h) = \text{const}\, sg \,.\, h\,,$$

so ist P ein regulärer Punkt der Kurve, in welchem diese die Schmiegungsebene schneidet.

Zur genauen Ermittelung des Vorzeichens von $\Phi(h)$ möge nun dieses nach Potenzen von h entwickelt werden. Diese Entwicklung kann vermittels der eingeführten Bezeichnungen folgendermassen hingesetzt werden:

$$\Phi(h) = (123)\frac{h^3}{3!} + (124)\frac{h^4}{4!} + \cdots + (12\,\overline{k+3})\frac{h^{k+3}}{(k+3)!} + \cdots$$

Bestehen nun die Relationen:

I $\qquad (123) = 0\,, (124) = 0\,, \ldots, (12\,\overline{k+2}) = 0\,, (12\,\overline{k+3}) \neq 0\,,$

so ist

$$\Phi(h) = \frac{h^{k+3}}{(k+3)!}\left[(12\,\overline{k+3}) + \varepsilon\right] \quad , \quad \lim_{h=0} \varepsilon = 0\,;$$

und somit für ein ungerades k

$$sg \,.\, \Phi(h) = sg \,.\, (12\,\overline{k+3})$$

für ein gerades k hingegen

$$sg \,.\, \Phi(h) = sg \,.\, (12\,\overline{k+3}) \,.\, sg \,.\, h \,.$$

Um den Beweis für die aufgestellten Sätze zu erbringen, ist nun nachzuweisen, dass die Reihe von Bedingungen

$$\text{II} \qquad \Delta(t) = 0 \;,\; \frac{d\Delta(t)}{dt} = 0 \;,\; \ldots \;,\; \frac{d^{k-1}\Delta(t)}{dt^{k-1}} = 0 \;,\; \frac{d^k\Delta(t)}{dt^k} \neq 0$$

mit der Reihe von Bedingungen I aequivalent ist.

Es möge zunächst nachgewiesen werden, das die Bedingungen I, die von II zur Folge haben. Die Derivierten von $\Delta(t)$ sind:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dt} &= (124) \\
\frac{d^2\Delta}{dt^2} &= (125) + (134) \\
\frac{d^3\Delta(t)}{dt^3} &= (126) + 2(135) + (234) \\
\frac{d^4\Delta(t)}{dt^4} &= (127) + 3(136) + 2(145) + 3(235) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Von der in diesen Ausdrücken sich offenbarenden Gesetzmässigkeit reicht für unsere Zwecke dasjenige hin, was die Formel

$$\frac{d^g\Delta(t)}{dt^g} = (12\,\overline{g+3}) + \sum_{(\alpha,\beta,\gamma \leqq g+2} (\alpha\beta\gamma) \qquad \text{(F)}$$

$$(g = 1 \,, 2 \,, 3 \,, \ldots)$$

zusammenfasst.

Sind nun die Bedingungen (I) erfüllt, so ist im Sinne des vorangeschickten Lemma

$$(\alpha\beta\gamma) = 0 \quad (\alpha \,, \beta \,, \gamma = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, k+2)$$

daher wegen (F)

$$\Delta(t) = 0 \;,\; \frac{d\Delta(t)}{dt} = 0 \;,\; \ldots \;,\; \frac{d^{k-1}\Delta(t)}{dt^{k-1}} = 0$$

und

$$\frac{d^k \Delta(t)}{dt^k} = (12\,\overline{k+3}) \neq 0\,,$$

womit unsere Behauptung erhärtet ist.

Es ist noch die Umkehrung dieser Behauptung nachzuweisen, d. h. zu beweisen, dass aus der Reihe II von Bedingungsgleichungen diejenige von (I) hervorgeht. Hiezu bedienen wir uns des vollständigen Inductions-Schlusses. Wir nehmen an, dass

II* $$\Delta(t) = 0\ ,\ \frac{d\Delta(t)}{dt} = 0\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{d^{k-2}\Delta(t)}{dt^{k-2}} = 0$$

die nachfolgende Reihe von Gleichungen involviere:

I* $$(123) = 0\ ,\ (124) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ (12\,\overline{k+1}) = 0\,;$$

es soll alsdann gezeigt werden, dass die Reihe von Bedingungen

II** $$\Delta(t) = 0\ ,\ \frac{d\Delta(t)}{dt} = 0\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{d^{k-1}\Delta(t)}{dt^{k-1}} = 0$$

die Gleichungen

I** $$(123) = 0\ ,\ (124) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ (12\,\overline{k+2}) = 0$$

zur Folge hat.

Wird der vorangeschickte Hülfssatz auf I* angewendet, so ergiebt sich

$$(\alpha\beta\gamma) = 0 \quad (\alpha\,,\beta\,,\gamma = 1\,,2\,,\ldots,k+1)$$

und aus der Formel (F)

$$\frac{d^{k-1}\Delta(t)}{dt^{k-1}} = (12\,\overline{k+2})\,;$$

sind also sämmtliche Bedingungen II* erfüllt, so ist wegen $\frac{d^{k-1}\Delta(t)}{dt^{k-1}} = 0$ auch $(12\,\overline{k+2}) = 0$, es bestehen demnach alle Gleichungen I**.

Es erübrigt noch den Nachweis dafür zu erbringen, dass auch die letzte Bedingung von II, nämlich

(1) $$\frac{d^k\Delta(t)}{dt^k} \neq 0$$

die letzte Bedingung von I d. i.

(2) $$(12\,\overline{k+3}) \neq 0$$

zur Folge hat.

Da die Gleichungen

$$(123) = 0 \;,\; (124) = 0 \;,\; \ldots \;,\; (12\,\overline{k+2}) = 0$$

bereits als richtige erkannt sind, folgt wieder aus dem Hülfssatze

$$(\alpha\beta\gamma) = 0 \quad (\alpha\,,\beta\,,\gamma = 1\,,2\,,3\,,\ldots,k+2)$$

und aus der Formel (F)

$$\varDelta^{(k)}(t) = (12\,\overline{k+3})$$

so dass (1) in der Tat (2) zur Folge hat.

Damit ist aber auch die Aequivalenz der Reihen von Bedingungen I und II dargetan und hiermit der Beweis für die in der Einleitung aufgestellten Sätze erbracht.

Es möge noch hervorgehoben werden, dass aus diesen Entwickelungen klar hervorgeht, dass die Wendeberührungsebene (stationäre Ebene) als Analogon zur Wendetangente der ebenen Kurven zu betrachten ist. Es kann nämlich, genau wie oben, gezeigt werden, dass die Bedingungen für das Vorkommen von Wendetangenten auf die Form II gebracht werden kann, worin dann $\varDelta(t)$ durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix}$$

zu ersetzen ist.

Im Uebrigen sind diese Sätze über Wendetangenten und Wendeberührungsebenen nur specielle Fälle von allgemeineren Sätzen die vermittels der oben angewendeten Mitteln in derselben Weise wie jene bewiesen werden.

Ist

$$x_1 = f_1(t) \;,\; x_2 = f_2(t) \;,\; \ldots \;,\; x_n = f_n(t)$$

die Parameterdarstellung einer Raumkurve im Raume von n Dimensionen, so soll die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - f_1(t) & \xi_2 - f_2(t) \ldots & \xi_n - f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots f_n'(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

als diejenige der Schmiegungsebene bezeichnet werden. Es können alsdann die folgenden Sätze bewiesen werden:

Die Schmiegungsebene wird im Allgemeinen von der Kurve durchsetzt oder nicht durchsetzt, je nachdem die Dimension des jeweiligen Raumes gerade oder ungerade ist.

Werden ferner im Falle einer geraden Dimension die von der Kurve durchsetzten, im Falle einer ungeraden Dimension die von der Kurve nicht durchsetzten Schmiegungsebenen wieder Wendeberührungsebenen genannt, so gilt auch der nachfolgende Satz:

Die Schmiegungsebene im Punkte (t) ist stets und nur dann stationär, wenn die erste für t nicht verschwindende Derivierte der Determinante

$$\Delta(t) = \left| \frac{d^j x_i}{dt^j} \right| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

von ungerader Ordnung ist.

L. BIANCHI

SULLE TRASFORMAZIONI DI DARBOUX
DELLE SUPERFICIE D'AREA MINIMA

I.

Si sa come Sophus Lie (1) per il primo, indi A. V. Bäcklund (2), riguardarono le trasformazioni delle superficie a curvatura costante quali trasformazioni *infinitiformi* della equazione a derivate parziali

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \text{cost}$$

in sè medesima.

Diciamo con Lie *elemento piano* l'insieme (π, P) di un piano π e di un punto P incidenti. Chiameremo anche un tale elemento una *faccetta piana*, pensando soltanto ad un intorno infinitesimo nel piano π del punto P, che sarà il centro della faccetta.

Le faccette piane dello spazio formano una moltiplicità ∞^5 e sono determinate, ciascuna, da cinque coordinate

$$x, y, z, p, q,$$

riferite ad assi cartesiani ortogonali. Di queste le tre prime x, y, z sono le coordinate del centro P della faccetta, mentre le altre due p, q fissano la giacitura del suo piano π, essendo

$$p, q, -1$$

proporzionali ai coseni di direzione della normale a π.

(1) S. Lie, *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung* (Archiv fur Mathematik og Naturvidenshab, Christiania, 1880).

(2) Bäcklund, *Om ytor med konstant negativ krökning* (Lunds Univ. Aerschrift, t. XIX, 1883).

Una superficie qualunque $z = z(x, y)$ dello spazio può riguardarsi come una doppia infinità di faccette piane, ove, colle notazioni di MONGE, sia

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Le trasformazioni infinitiformi delle faccette che dobbiamo considerare fanno corrispondere, ad ogni faccetta $f \equiv (x, y, z, p, q)$ dello spazio, una semplice infinità di faccette trasformate $f' \equiv (x', y', z', p', q')$ e si traducono in *quattro* relazioni indipendenti:

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, z, p, q\ ;\ x', y', z', p', q') = 0 \\ F_2(x, y, z, p, q\ ;\ x', y', z', p', q') = 0 \\ F_3(x, y, z, p, q\ ;\ x', y', z', p', q') = 0 \\ F_4(x, y, z, p, q\ ;\ x', y', z', p', q') = 0 \end{array} \right.$$

fra le coordinate di f e f'. Se facciamo percorrere alla f le ∞^2 faccette piane di una superficie $z = z(x, y)$ le (I) definiranno ∞^3 faccette piane f' e: *in generale sarà impossibile distribuire le ∞^3 faccette f' in una semplice infinità di superficie $z' = z'(x', y')$*. Eliminando infatti x, y fra le (I), ove si ponga

$$z = z(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

ne risulteranno due equazioni

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x', y', z', p', q') = 0 \\ \Phi_2(x', y', z', p', q') = 0 \end{array} \right.$$

fra $x', y', z', p' = \dfrac{\partial z'}{\partial x'}, q' = \dfrac{\partial z'}{\partial y'}$; e perchè si presenti la circostanza voluta, le (1) dovranno formare un sistema in involuzione, o illimitatamente integrabile.

Le trasformazioni (di BÄCKLUND) delle superficie a curvatura costante si ottengono assumendo per sistema (I) il seguente

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 - a^2 = 0 \\ p(x' - x) + q(y' - y) - (z' - z) = 0 \\ p'(x' - x) + q'(y' - y) - (z' - z) = 0 \\ 1 + pp' + qq' - c\sqrt{1 + p^2 + q^2} \times \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} = 0, \end{array} \right.$$

dove a, c indicano due costanti. Se alla faccetta (x, y, z, p, q) si fa descrivere una qualunque superficie a curvatura costante $K = \dfrac{a^2}{c^2 - 1}$, le (2) dànno appunto luogo ad un sistema in involuzione e le ∞^1 superficie integrali $z' = z'(x', y')$ hanno nuovamente la medesima curvatura costante.

Osservando che nel sistema (2) i centri ed i piani delle due faccette corrispondenti (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') hanno una posizione relativa invariabile, il DARBOUX, nel t. III delle sue *Leçons* ecc. (n. 812, p. 441), si è proposto in generale di trovare tutti i casi di sistemi (I) in involuzione tali che la congiungente i centri ed i piani di due faccette corrispondenti formino un sistema invariabile. A tale uopo egli ha sostituito alle due equazioni medie del sistema (2) le altre più generali

$$\begin{cases} p(x'-x)+q(y'-y)-(z'-z)-ab\sqrt{1+p^2+q^2}=0 \\ p'(x'-x)+q'(y'-y)-(z'-z)-ab'\sqrt{1+p'^2+q'^2}=0\,, \end{cases}$$

dove b, b' sono due nuove costanti. Il risultato a cui perviene il DARBOUX (escludendo il caso ovvio di trasformazioni parallele) è semplicemente questo: il sistema (1) sarà in tal caso in involuzione quando la superficie $z = z(x, y)$ abbia le due curvature, totale e media, legate da una relazione lineare i cui coefficienti dipendono unicamente dalle costanti a, b, b', c. In questa ricerca è lecito sostituire ad ogni coppia di superficie $z = z(x, y)$, $z' = z'(x', y')$ un'altra qualunque coppia di superficie che siano loro rispettivamente parallele. E poichè ad ogni superficie della detta classe è parallela una superficie a curvatura costante quando $c^2 \neq 1$ ed una superficie ad area minima se $c^2 = 1$, se ne conclude che il problema generale proposto, oltre che alle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, conduce ad un solo caso essenzialmente nuovo, e cioè a trasformazioni delle superficie ad area minima.

Nella presente Nota mi propongo di considerare più da vicino le proprietà di queste *trasformazioni di* DARBOUX [1] e principalmente di studiarle come trasformazioni di varie classi di superficie applicabili che si collegano in modo noto alle superficie d'area minima.

II.

Cominciando dal ricercare le formole effettive per le trasformazioni di DARBOUX, consideriamo una qualunque superficie minima S, che riferiremo alle sue linee di curvatura (u, v). Il suo ds^2 avrà la forma isoterma

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)\,, \tag{3}$$

dove la funzione $\theta = \theta(u, v)$ è una soluzione della equazione di LIOUVILLE

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}\,. \tag{4}$$

[1] Il DARBOUX (loc. cit., p. 443) osserva soltanto a questo proposito che le sue trasformazioni applicate a superficie minime reali dànno superficie minime necessariamente immaginarie.

Indicando con $\theta' = \theta'(u, v)$ una funzione incognita di u, v e con a una costante arbitraria, consideriamo il sistema simultaneo del 1° ordine

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2a} + \frac{a}{2} e^{-(\theta'+\theta)} \\ i \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2a} - \frac{a}{2} e^{-(\theta'+\theta)} . \end{aligned} \right.$$

Si verifica subito che, soddisfacendo θ alla (4), questo è un sistema illimitatamente integrabile per θ', e il suo integrale generale θ', che contiene una costante arbitraria oltre a, è nuovamente una soluzione della (4) (¹).

Prendendo per θ' una qualunque soluzione delle (5), ne risulterà definita una nuova superficie minima S′ che si avrà in termini finiti colle formole seguenti. Siano x, y, z le coordinate di un punto variabile su S, e con

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{matrix}$$

denotiamo rispettivamente i coseni di direzione della terna ortogonale formata: 1° dalla tangente alla linea v; 2° dalla tangente alla linea u; 3° dalla normale alla superficie. Allora le coordinate x', y', z' del punto corrispondente di S′ saranno date dalle formole

$$(6) \qquad x' = x + a(e^{\theta'} X_2 + i e^{\theta'} X_2) - a^2 X_3$$

colle analoghe per y', z'. Calcolando le derivate di x', y', z' rapporto ad u, v (²) e formando l'elemento lineare di S′ si trova

$$(7) \qquad ds'^2 = e^{2\theta'}(du^2 + dv^2).$$

(¹) Il sistema (5) tiene qui, per l'equazione (4) di Liouville, il luogo del ben noto sistema

$$\frac{\partial(\theta' + \theta)}{\partial \alpha} = a \operatorname{sen}(\theta' - \theta) \; , \quad \frac{\partial(\theta' - \theta)}{\partial \beta} = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(\theta' + \theta)$$

per l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta ,$$

da cui dipendono le superficie a curvatura costante.

(²) Per questi calcoli e per le verifiche seguenti nel testo basta servirsi delle formole del quadro

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\theta} X_1 \; , \; \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X_3 \; , \; \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1 \; , \; \frac{\partial X_3}{\partial u} = e^{-\theta} X_1 \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = e^{\theta} X_2 \; , \; \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2 \; , \; \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X_3 \; , \; \frac{\partial X_3}{\partial v} = - e^{-\theta} X_2 . \end{aligned} \right.$$

Pei coseni di direzione X'_3, Y'_3, Z'_3 della normale a S' si ha

$$X'_3 = a e^{-\theta'}(X_1 - i X_2) + X_3 \tag{8}$$

e si trova inoltre

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = e^{2\theta'} \frac{\partial X'_3}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = - e^{2\theta'} \frac{\partial X'_3}{\partial v} . \tag{8*}$$

Di qui segue appunto che la superficie S' è una nuova superficie minima di cui le linee u, v sono linee di curvatura e le formole conseguenti (¹)

$$S(x'-x)^2 = a^4 \quad , \quad SX_3(x'-x) = SX'_3(x'-x) = -a^2$$
$$SX_3X'_3 = 1$$

dimostrano che la congiungente dei punti corrispondenti di S, S' e i loro rispettivi piani tangenti formano un sistema invariabile, onde le due superficie minime S, S' sono trasformate di DARBOUX l'una dall'altra. Diremo che si passa dalla superficie S alla superficie S' con una trasformazione D_a di DARBOUX. La D_a, per un assegnato valore della costante a, fa nascere da una superficie minima S una semplice infinità di superficie minime derivate S'. Si osservi però che se la S è reale, le superficie trasformate S' sono immaginarie.

Le formole superiori pongono intanto in evidenza le proprietà seguenti:

Le trasformazioni di DARBOUX delle superficie minime conservano le linee di curvatura e le linee di lunghezza nulla.

Delle due superficie minime S, S' si considerino ora le due superficie minime $\overline{S}, \overline{S}'$ loro rispettive coniugate in applicabilità. Queste sono definite, a meno di una traslazione nello spazio, dalle formole

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = - \frac{\partial x}{\partial u} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial \overline{x}'}{\partial v} = - \frac{\partial x'}{\partial u} . \tag{9*}$$

Se supponiamo già scelte ad arbitrio in $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ le costanti additive che fissano la posizione di $\overline{S}$ nello spazio, si verifica facilmente che le formole

$$\overline{x}' = \overline{x} - i a e^{\theta'} X_1 + a e^{\theta'} X_2 + i a^2 X_3$$

definiscono a loro volta la superficie $\overline{S}'$ così collocata nello spazio che si passa dalla $\overline{S}$ alla $\overline{S}'$ nuovamente con una trasformazione di DARBOUX, come da S a S'. Questo risultato può enunciarsi così: *La trasformazione di DARBOUX delle superficie minime*

(¹) Il simbolo sommatorio S' si riferisce qui ai tre assi coordinati.

è permutabile colla trasformazione di BONNET, *che conduce da una superficie minima alla sua coniugata in applicabilità.*

Più in generale prendasi una qualunque superficie minima S_σ applicabile su S e definita dalle formole

$$x_\sigma = x \cos\sigma - \overline{x} \operatorname{sen}\sigma ,$$

dove σ è una costante arbitraria. Ponendo similmente

$$x'_\sigma = x' \cos\sigma - \overline{x}' \operatorname{sen}\sigma ,$$

ne risulta

$$x'_\sigma = x_\sigma + ae^{i\sigma}\left[e^{\theta'}(X_1 + iX_2) - aX_3\right].$$

E di qui segue che le due superficie minime S_σ, S'_σ sono ancora trasformate di DARBOUX l'una dell'altra.

III.

Dalle superficie d'area minima dipendono, come è ben noto, diverse classi complete di superficie applicabili, che passeremo ora successivamente in rivista per stabilire il significato delle trasformazioni di DARBOUX come trasformazioni di queste classi di superficie applicabili.

Cominciamo dalla classe più immediatamente legata alle superficie minime, quella delle loro *evolute* coll'elemento lineare

$$ds^2 = d\alpha^2 + \alpha\, d\beta^2 . \tag{10}$$

Indichino x_0, y_0, z_0 le coordinate del primo centro di curvatura di S, e similmente x'_0, y'_0, z'_0 quelle del primo centro di curvatura di S'; avremo

$$x_0 = x - e^{2\theta} X_3 \quad , \quad x'_0 = x' - e^{2\theta'} X'_3 \ \text{ecc.}$$

e per ciò

$$x'_0 - x_0 = ae^{\theta'}(X_1 + iX_2) - a^2 X_3 + e^{2\theta} X_3 - e^{2\theta'} X'_3 .$$

Il punto (x_0, y_0, z_0) descrive la prima falda S_0 dell'evoluta di S e così (x'_0, y'_0, z'_0) la prima falda S'_0 dell'evoluta di S'. I coseni di direzione della normale a S_0 sono X_1, Y_1, Z_1 e similmente quelli della normale a S'_0 sono X'_1, Y'_1, Z'_1. Dalle formole precedenti si trae subito che sussistono le seguenti

$$SX_1(x'_0 - x_0) = 0 \quad , \quad SX'_1(x'_0 - x_0) = 0 .$$

Queste esprimono che: *la congiungente* $P_0 P'_0$ *due punti corrispondenti di* $S_0 S'_0$

tocca in P_0 *la* S_0, *in* P'_0 *la* S'_0, *onde le due superficie* S_0, S'_0 *sono le due falde della congruenza rettilinea* $P_0 P'_0$ *generata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti.* Dico inoltre che: *questa è una congruenza* W, *cioè sulle due falde focali* S_0, S'_0 *si corrispondono le asintotiche.*

E infatti le asintotiche di S_0, S'_0 corrispondono rispettivamente alle linee di lunghezza nulla di S, S' e queste si corrispondono fra loro (n. II).

Ogni superficie S_0 d'elemento lineare (10) dà luogo, per una trasformazione D_α, ad ∞^1 superficie trasformate S'_0 applicabili sopra S_0.

IV.

Una seconda classe di superficie applicabili che si collega alle superficie minime è data, per un noto teorema di GUICHARD, dalle deformate del paraboloide di rotazione. Sia Σ una qualunque deformata di questo paraboloide, e si consideri il sistema ∞^2 di sfere coi centri distribuiti sopra Σ e di raggio eguale alla distanza del punto corrispondente del paraboloide dal fuoco. Il teorema di GUICHARD insegna che le due falde dell'inviluppo di quel sistema di sfere sono sempre due superficie d'area minima $S, \overline{S}$. Ciò dà luogo a trasformazioni delle superficie minime (1), che diciamo *trasformazioni di* GUICHARD. In quali relazioni stanno queste trasformazioni *reali* delle superficie minime colle trasformazioni immaginarie di DARBOUX?

Della deformata Σ del paraboloide si consideri la complementare Σ', che è applicabile sul paraboloide stesso (sulla regione ideale del paraboloide). Il sistema ∞^2 di sfere costruito per la Σ' come il primitivo per Σ, si compone ancora di sfere reali; ma le due falde dell'inviluppo sono due superficie minime immaginarie coniugate $S', \overline{S}'$. Ora si dimostra facilmente che si passa da S a S', e medesimamente da $\overline{S}$ a $\overline{S}'$, mediante una trasformazione di DARBOUX. Si vede adunque che: *Ogni trasformazione reale di* GUICHARD *di una superficie d'area minima si risolve in due trasformazioni immaginarie coniugate di* DARBOUX. Queste ultime vengono così a costituire le trasformazioni elementari delle superficie minime, precisamente come le trasformazioni di BÄCKLUND per le superficie a curvatura costante.

V.

Riprendiamo a considerare una qualunque superficie d'area minima S ed una sua trasformata di DARBOUX S', secondo le formole del n. II. Dalle superficie S si deducono ∞^2 superficie S_0 applicabili sul paraboloide di rotazione di parametro m nel modo seguente (n. c.). Indicando con

$$\lambda, \mu, w, \varphi$$

(1) Vedi la mia Nota nei Rendiconti dei Lincei, settembre 1899, o anche *Lezioni*, vol. II, § 350.

quattro funzioni incognite di u, v, consideriamo il sistema lineare:

$$
\text{(A)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = (me^\theta - e^{-\theta})\, w + me^{-\theta}\varphi - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu \,, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda \,, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = (me^\theta + e^{-\theta})\, w - me^{-\theta}\varphi - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^\theta\lambda \,, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = e^\theta\mu \,, \quad \dfrac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta}\lambda \,, \quad \dfrac{\partial w}{\partial v} = -e^{-\theta}\mu . \end{cases}
$$

Questo è un sistema illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = \text{cost.}$$

Prendiamo una quaderna $(\lambda, \mu, w, \varphi)$ di soluzioni per la quale la costante del secondo membro sia nulla, cioè

$$\text{(A')} \quad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = 0 ,$$

e le formole

$$\text{(11)} \quad x_0 = x - \frac{\varphi}{w} X_3 \,, \ \text{ecc.}$$

definiranno una superficie S_0 applicabile sul detto paraboloide.

Si costruisca ora per l'altra superficie minima S' il sistema (A) e pongasi per abbreviare

$$
\text{(12)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2a} + \dfrac{a}{2} e^{-(\theta'+\theta)} \\ B = \dfrac{e^{\theta'-\theta} - e^{-(\theta'-\theta)}}{2a} - \dfrac{a}{2} e^{-(\theta'+\theta)} . \end{cases}
$$

Le formole di sostituzione lineare

$$
\text{(13)} \quad \begin{cases} \lambda' = (me^\theta - e^{-\theta})\, w + me^{-\theta}\varphi + \left(\dfrac{e^{\theta'-\theta}}{a} - A\right)\lambda + iA\mu \\ \mu' = i(me^\theta + e^{-\theta})\, w - ime^{-\theta}\varphi - iB\lambda + \left(\dfrac{e^{\theta'-\theta}}{a} - B\right)\mu \\ w' = \dfrac{w}{a} + e^{-\theta'}\lambda - ie^{-\theta'}\mu \\ \varphi' = \dfrac{\varphi}{a} - aw + e^{\theta'}\lambda + ie^{\theta'}\mu \end{cases}
$$

dànno, come facilmente si verifica, il passaggio dalla quaderna $(\lambda, \mu, w, \varphi)$ di soluzioni del sistema (A), (A') ad una quaderna analoga $(\lambda', \mu', w', \varphi')$ per il medesimo sistema costruito per la S'; e perciò le formole

$$x_0' = x' - \frac{\varphi'}{w'} X_3' \text{ ecc.,} \tag{11*}$$

definiscono una nuova deformata S_0' del paraboloide di rotazione. Con un calcolo analogo a quello eseguito al n. III, si prova che: *Le due deformate* S_0, S_0' *del paraboloide sono le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i loro punti corrispondenti; inoltre sopra* S_0, S_0' *si corrispondono le asintotiche.*

Anche qui adunque, per le deformate del paraboloide di rotazione, le trasformazioni D_a di DARBOUX delle superficie minime si traducono in trasformazioni *per congruenze* W.

VI.

Altre due classi complete di superficie applicabili deduconsi dalle superficie minime e sono quelle coi rispettivi elementi lineari

$$ds^2 = du^2 + 2(u - v^2)\, dv^2 \tag{14}$$

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v + e^{2v})\, dv^2 . \tag{15}$$

Le prime si ottengono dalle superficie minime con semplici quadrature (WEINGARTEN), le altre integrando il sistema (A) n. V.

DARBOUX ha dimostrato (*Leçons*, t. IV, n. 1078, p. 332) che gli elementi lineari (14), (15) appartengono a due paraboloidi immaginarî con una generatrice tangente al circolo all'infinito. I due paraboloidi si distinguono per ciò che nel primo il punto di contatto della detta generatrice col circolo all'infinito coincide col punto ove il paraboloide tocca il piano improprio, mentre pel secondo ne è distinto.

Se si esaminano nuovamente le trasformazioni D_a di DARBOUX come trasformazioni delle deformate di questi due paraboloidi, si trova che ha ancora luogo la proprietà geometrica segnalata alla fine del numero precedente pel paraboloide di rotazione: *La superficie iniziale* S_0 *e la trasformata* S_0' *sono le due falde focali di una congruenza rettilinea* W.

In tutte le trasformazioni per congruenze W delle varie classi di superficie applicabili considerate si verifica sempre la seguente notevole circostanza geometrica: *la posizione relativa dei fuochi* F, F' *e dei piani focali* π, π' *dipende unicamente dall'elemento lineare.*

Ogni superficie S_0 del dato elemento lineare dà luogo per una trasformazione D_a ad ∞^1 superficie trasformate S_0', e ciascuna faccetta di S_0 è contornata sempre nel medesimo modo, indipendente dalle flessioni di S_0, dalle ∞^1 faccette delle trasformate S_0'. Per definire questa corrispondenza fra le faccette f, f' (n. I) basta quindi considerare la S_0 in una configurazione speciale. Se ci riferiamo in particolare alle tre classi di deformate del paraboloide di rotazione e dei due paraboloidi tangenti al circolo immaginario all'infinito del precedente numero, è ben naturale di prendere come configurazione iniziale quella del paraboloide stesso P. Si trova allora questo semplice risultato: *Quando la superficie* S_0 *si applica sul paraboloide* P *e ciascuna faccetta* f *di* S_0 *porta seco invariabilmente legate le* ∞^1 *faccette corrispondenti* f' *delle superficie trasformate* S'_0, *queste faccette* f' *si dispongono coi loro centri sulla conica sezione del piano* π *tangente a* P *con un paraboloide confocale* P_a *dipendente dalla costante* a, *e i piani delle* f' *inviluppano (dualmente) il cono circoscritto dal centro* F *della faccetta* f *al paraboloide confocale* P_a.

Le proprietà qui segnalate per le deformate di questi particolari paraboloidi sono tanto più notevoli perchè sussistono in generale per le deformate di tutte le quadriche, come risulta dalle mie ultime ricerche sulla teoria delle trasformazioni di queste superficie.

VII.

Ritornando alla rappresentazione analitica delle nostre trasformazioni mediante il sistema (I) n. I, siamo condotti a formulare il problema generale seguente: Si abbia una superficie S ed ∞^1 altre superficie S' poste, ciascuna, in corrispondenza di punto a punto con S, sicchè ogni faccetta piana f di S è contornata da ∞^1 faccette f' corrispondenti delle S'. Si deformi comunque la S, flessibile ed inestendibile, in guisa che ogni sua faccetta f trasporti seco, in sistema invariabile, le ∞^1 faccette corrispondenti f'. Si domanda di: *trovare tutti i casi pei quali, in tutte le deformazioni della* S, *le* ∞^3 *faccette corrispondenti* f' *si distribuiscono sempre in* ∞^1 *superficie* S'.

Lasciando da parte il caso troppo ovvio di trasformazioni parallele, si ottiene intanto una notevole soluzione del problema proposto prendendo per superficie S una qualunque quadrica Q. Nel sistema confocale individuato da Q si consideri un'altra quadrica qualunque Q' e ad ogni faccetta piana f di Q si facciano corrispondere ∞^1 faccette f' i cui centri siano distribuiti sulla conica sezione del piano π di f (piano tangente di Q) colla quadrica confocale Q', mentre i piani delle f' inviluppano il cono circoscritto dal centro di f alla quadrica stessa Q'.

Altre soluzioni del medesimo problema si hanno dalle trasformazioni delle evolute delle superficie d'area minima, delle superficie a curvatura costante, ecc.

La risoluzione generale del problema enunciato condurrà forse a nuove teorie di trasformazioni per altre classi di superficie applicabili.

M. PANNELLI

SOPRA UN CARATTERE DI UNA VARIETÀ ALGEBRICA A TRE DIMENSIONI

Suppongasi di avere una varietà algebrica V_r, ad r dimensioni, priva di singolarità, immersa in uno spazio S_d (d convenientemente alto), ed in essa sia dato un sistema lineare $|V_{r-1}|$ di varietà V_{r-1}, ad $r-1$ dimensioni. La considerazione del sistema $|V'_{r-1} - V_{r-1}|$, dove V'_{r-1} indica una varietà del sistema $|V'_{r-1}|$, aggiunto a $|V_{r-1}|$, dà luogo ad un primo gruppo di caratteri $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots.$ della varietà data, esprimenti rispettivamente il grado, il genere, il genere aritmetico, il genere aritmetico tridimensionale, ... dell'anzidetto sistema $|V'_{r-1} - V_{r-1}|$. Un secondo gruppo di caratteri $I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$ della varietà V_r, si ottiene considerando il numero de' punti doppi di un fascio, il genere della curva Jacobiana di una rete, il genere aritmetico della superficie Jacobiana di un sistema lineare triplamente infinito, ... di varietà V_{r-1} date in V_r. Questi ultimi caratteri, al pari dei primi, si comportano diversamente rispetto al genere aritmetico della varietà V_r, secondochè il numero r delle dimensioni di questa è pari o dispari.

In particolare per la varietà V_3, a tre dimensioni, i caratteri Ω furono studiati, per il caso in cui la V_3 sia priva di elementi eccezionali, dal NOETHER in una classica Memoria pubblicata nell' 8° volume dei *Mathematische Annalen* (1874), e per una V_3 generale, da me stesso in due Note inserite nei *Rendiconti* dell'Accademia dei Lincei (1906) (1).

Degli invarianti I, che nel caso attuale si riducono a due soli, I_0 ed I_1, il primo, I_0, fu già considerato dal SEGRE in una Nota stampata negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino (1896); il secondo I_1 costituisce l'oggetto della presente comunicazione.

1. Sia data nella varietà V_3 una rete di superficie S, dotata di una curva-base, semplice, di genere π, e di un numero P_0 di punti-base, anche essi semplici per ogni superficie S. Detto P_1 il genere della curva d'intersezione (variabile) di due

(1) In queste Note gli anzidetti caratteri venivano indicati con i simboli $\Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}, \Delta^{(1)}$. Le notazioni più opportune $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ sono del SEVERI.

superficie S, P_2 il genere aritmetico di una superficie S e g il genere della Jacobiana della rete, l'*espressione*

$$(1) \qquad I_1 = g + P_0 - 9P_1 - 36P_2 - (\pi - 1) - 28$$

non dipende dalla scelta della rete considerata, e perciò costituisce un invariante relativo della varietà.

Per dimostrare l'invariantività di I_1, io mi sono riferito ad una varietà a tre dimensioni, priva di singolarità, immersa in uno spazio S_7, nella quale la data può sempre supporsi trasformata birazionalmente. Quindi sono da distinguere due casi, secondochè quest'ultima varietà è la completa intersezione di quattro forme, oppur no. Per ora mi sono limitato al primo caso. La dimostrazione consiste in una verificazione, la quale però riesce abbastanza laboriosa nella parte che si riferisce al calcolo del genere g della Jacobiana; per modo che come essa non mi consente ora di entrare ne' suoi particolari, così non mi ha sin qui lasciato tempo di studiare il secondo caso, del quale mi occuperò in avvenire, essendo presumibile che l'invariantività di I_1 sussista in generale.

L'invariante I_0 di Segre e l'invariante anzidetto I_1 sono legati al genere aritmetico Π_a della varietà dalla relazione:

$$(2) \qquad 48\Pi_a - 54 = 2I_1 - I_0$$

analoga all'altra:

$$2\Pi_a - 4 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2$$

che ha luogo fra lo stesso genere Π_a e gl'invarianti Ω_0, Ω_1, Ω_2, recentemente dimostrata dal Severi [1], e già intuita dal Noether [2].

Da queste relazioni segue che gl'invarianti I di una varieta a *tre* dimensioni sono, come gl'invarianti Ω, legati linearmente al genere aritmetico della varietà.

Questa proprietà che non ha luogo sopra una superficie (varietà a *due* dimensioni) riappare su di una curva (varietà ad *una* dimensione) per la quale si ha infatti

$$\Omega_0 = I_0 = 2(p - 1).$$

Dalle stesse relazioni precedenti, eliminando Π_a, segue:

$$24(\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2) = 2I_1 - I_0 - 42$$

e questa relazione, poichè si ha [3]

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0,$$

[1] *Alcune proprietà fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1907).

[2] Loc. cit.

[3] Cfr. la prima delle due mie Note innanzi ricordate.

può scriversi anche così:

$$8(\Omega_1 - 3\Omega_0) = I_0 - 2I_1 + 26$$

oppure:

$$12(2\Omega_2 - \Omega_0) = 2I_1 - I_0 - 18$$

Ad essa corrisponde sopra una superficie di genere aritmetico p_a, la ben nota relazione

$$\Omega + I = 12p_a + 9$$

nella quale Ω rappresenta l'invariante di Castelnuovo-Enriques ed I quello di Zeuthen-Segre.

Mentre in questa relazione figura il genere aritmetico della superficie, in quella non entra il genere aritmetico della varietà.

2. L'introduzione dell'invariante I_1 permette di risolvere facilmente i problemi di Geometria enumerativa, che si riferiscono ad una rete di superficie immersa in una varietà a tre dimensioni.

Infatti, se si stabilisce una corrispondenza proiettiva fra le superficie della rete data e i punti di un piano, su questo piano si viene a determinare una curva Γ, i cui, punti corrispondono algebricamente e biunivocamente a quella della Iacobiana J della rete. Quindi queste due curve sono dello stesso genere. E poichè in virtù della relazione (1), il genere della Jacobiana J è:

$$g = I_1 - P_0 + 9P_1 + 36P_2 + (\pi - 1) + 28,$$

questo è anche il genere della curva Γ.

Inoltre, l'ordine della stessa curva Γ è eguale al numero delle superficie, dotate di un punto doppio, di un fascio contenuto nella rete data; epperò (1) è:

$$I_0 + 2P_1 + 2I + 2(\pi - 1).$$

Infine, la classe di Γ eguaglia il numero delle curve dotate di un punto doppio, contenute nel fascio segato sopra una superficie della rete data dalle altre superficie della rete medesima, e quindi (2) è:

$$P_0 + 4P_1 + I.$$

Così sono noti tre caratteri della curva Γ, e perciò si possono calcolare i rimanenti.

Facendo questo calcolo e tenendo conto della relazione (2), si ottiene:

(1) Segre, loc. cit., n. 9.
(2) Segre, loc. cit., n. 4.

I. « Una rete di superficie data in una varietà a tre dimensioni, contiene:

$$24(2\Pi_a + P_1 + 3P_2)$$

« fasci, ciascuno formato da superficie aventi fra loro un contatto stazionario, e

$$\tfrac{1}{2}[(I + P_0 + 4P_1)^2 - (144\Pi_a + I_0 + 3I + P_0 + 78P_1 + 216P_2 + 2\pi - 2)]$$

« fasci, ciascuno formato da superficie aventi fra loro un doppio contatto ».

II. « La stessa rete contiene:

$$3(16\Pi_a + I_0 + I - P_0 + 6P_1 + 24P_2 + 2\pi - 2)$$

« superficie dotate di un punto doppio biplanare, e

$$\tfrac{1}{2}(I_0 + 2I + 2P_1 + 2\pi - 2)^2$$
$$- 72\Pi_a + 5I_0 + 6I - 4P_0 + 30P_1 + 108P_2 + 10\pi - 10)$$

« superficie dotate di due punti doppi ».

F. DINGELDEY

INTORNO ALLA GENERAZIONE DELLE CONICHE SECONDO BRAIKENRIDGE E MACLAURIN

§ 1.

Preliminari.

Se i lati xy, yz, zx d'un triangolo variabile xyz ruotano intorno a punti fissi a, c, e, mentre due vertici (y, z) scorrono su due rette fisse B, D, il terzo vertice x descrive una conica, che passa per i punti a ed e e per tre altri punti g, h, k, che sono rispettivamente le intersezioni da ac e D, D e B, B e ce. W. Braikenridge e C. Maclaurin trovavano indipendente questa generazione delle coniche nel terzo decennio del diciottesimo secolo [1]. In fondo questo teorema è un'altra forma del teorema di Pascal, perchè le tre coppie di lati opposti dell'esagono $aghkex$ si segano nei tre punti c, z, y di una stessa retta. Impiegando un prodotto planimetrico di Grassmann, si può scrivere l'equazione della curva generata nel seguente modo [2]:

$$xa\mathrm{B}c\mathrm{D}ex = 0\,. \tag{1}$$

[1] Per la storia della questione di priorità si rimanda ai seguenti autori: M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, tomo 3°, 2ª ediz., Leipzig, 1901, p. 787-793; E. Kötter, *Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt*, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, tomo 5°, p. 15-17, Leipzig, 1899; F. Dingeldey nel suo rapporto *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme*, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, III, C. 1, p. 33-34 e 42.

[2] Cfr. H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Leipzig, 1844 oder 2. Aufl. Leipzig 1878, § 147 = Gesammelte math. und phys., Werke, Bd. I, 1. Teil, unter Mitwirkung von E. Study hrsgg. von F. Engel, Leipzig 1894, p. 248, poi: *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*, Berlin 1862, § 323 = Ges. Werke, Bd. I, 2. Teil in Gemeinschaft mit H. Grassmann dem Jüngeren hrsgg. von F. Engel, Leipzig 1896, p. 196 e seg., finalmente *Gründzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse*, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 31, p. 120 e seg. (1846) = Ges. Werke, Bd. II, 1. Teil, hrsgg. von E. Study, G. Scheffers und F. Engel, Leipzig 1904, p. 59 e seg.

Affinchè questa conica passi per cinque punti dati a, e, g, h, k, si scelgono come rette B e D le rette congiungenti qualcuno dei punti, per esempio h, con due altri, per esempio con k e g (¹); allora c è il punto secondo cui si segano le rette ag ed ek. La generalità della conica è mantenuta, se il punto a è situato sulla retta D ed e sulla B; i punti sopra chiamati g e k coincidono ora con a rispettivamente con e in modo tale che le rette ac e ec toccano la conica rispettivamente in a ed in e.

Se le rette B, D ed ae sono prese per lati $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ d'un triangolo fondamentale, i punti a, e ed il punto d'intersezione da B con D sono i vertici $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ e mediante un breve calcolo l'equazione (1) della conica prende l'aspetto:

$$c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 - c_3 x_1 x_2 = 0 , \tag{2}$$

dove c_1, c_2, c_3 indicano le coordinate trimetriche del punto c (fig. 1).

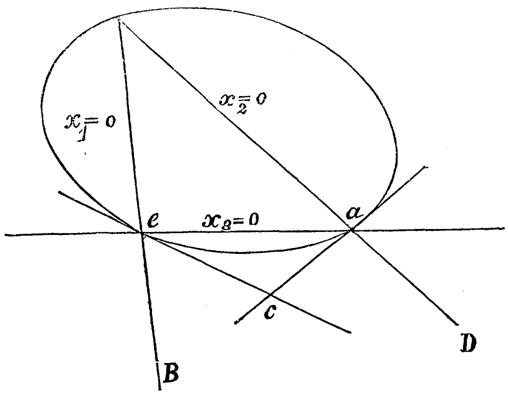

Fig. 1.

Pel principio di dualità alla generazione delle coniche da Braikenridge e Maclaurin appartiene quest'altra generazione: un lato X d'un trilatero variabile inviluppa una curva di seconda classe, se i vertici scorrono su tre rette fisse A, C, E, mentre i due altri lati ruotano intorno a punti fissi b, d (²). L'equazione di questa conica scritta come prodotto planimetrico di Grassmann diventa

$$\mathrm{XA}b\mathrm{C}d\mathrm{EX} = 0 . \tag{3}$$

Le rette A, E, bd, e anche le rette che congiungono il punto d col punto d'intersezione AC da A e C ed il punto b coll'intersezione EC sono cinque tangenti della

(¹) Questa cosa era già conosciuta da Maclaurin.

(²) Vedi I. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822, sec. ediz., Paris 1865-1866, Nr. 502 e seguenti numeri; H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, § 146, ed il lavoro in Crelle's Journal, tomo 31, p. 119 (1846) = Gesammelte Werke, tomo II, prima parte, p. 58.

curva. Se la retta A passa per d ed E per b, la retta C congiunge i punti di contatto situati su A ed E (fig. 2).

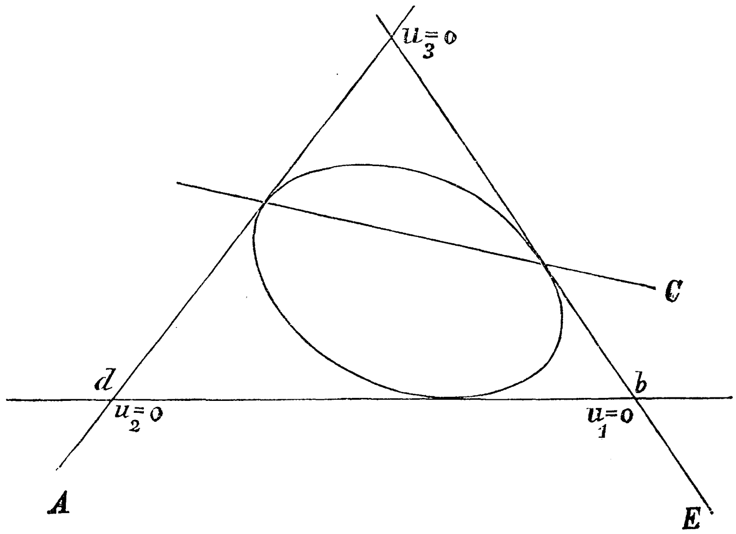

Fig. 2.

L'equazione tangenziale della conica (3) corrispondente all'equazione (2) sarà allora

$$C_1 u_2 u_3 + C_2 u_3 u_1 - C_3 u_1 u_2 = 0 \,, \tag{4}$$

se u_1, u_2, u_3 si interpretano come coordinate di rette ed i punti b, d ed AC sono i vertici $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ del trilatero fondamentale.

Mi propongo di mostrare per quali posizioni del punto c o della retta C la curva di secondo ordine (2) rispettivamente di seconda classe (4) è un cerchio, un iperbole equilatera od una parabola.

§ 2.

Generazione del cerchio, dell'iperbole equilatera, della parabola come luoghi di punti.

Cominciamo col ricordare il senso delle coordinate trimetriche x_1, x_2, x_3 di un punto qualunque [1]. Queste sono proporzionali alle distanze q_1, q_2, q_3 del punto dai tre lati del triangolo fondamentale ed inversamente proporzionali alle distanze e_1, e_2, e_3 del punto-unità dai lati, cioè si ha

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{q_1}{e_1} : \frac{q_2}{e_2} : \frac{q_3}{e_3} \,. \tag{5}$$

[1] Cfr. S. Gundelfinger, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte*, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895, p. 3.

Il punto-unità sia scelto ad arbitrio internamente al triangolo. Siano chiamate h_1, h_2, h_3 le lunghezze delle altezze appartenenti ai lati $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ siano gli angoli supplementari degli angoli opposti. Fra le distanze q_i e le altezze h_i $(i = 1, 2, 3)$ interviene la relazione

$$\frac{q_1}{h_1} + \frac{q_2}{h_2} + \frac{q_3}{h_3} = 1, \tag{6}$$

quindi, ponendo

$$p_1 = \frac{e_1}{h_1}, \quad p_2 = \frac{e_2}{h_2}, \quad p_3 = \frac{e_3}{h_3} \tag{7}$$

e tenendo presenti le (5), seguono l'equazioni

$$q_i = \frac{e_i x_i}{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Si vede che l'equazione

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0 \tag{9}$$

rappresenta la retta all'infinito del piano.

Rispondiamo adesso alle domande proposte di sopra. Alla prima che chiede dove dobbiamo prendere il punto c, affinchè l'equazione (2) rappresenti un *cerchio*, si è risposto or ora. In ogni caso il punto c è l'intersezione delle rette tangenti alla curva in a ed in e; ma poichè si ha soltanto un cerchio circoscritto, le rette per a ed e perpendicolari ai raggî del cerchio passanti per a ed e s' intersecano nel punto c.

La curva (2) è un' *iperbole equilatera*, se i due punti ciclici del piano sono punti coniugati della curva. L'equazione di questa coppia di punti è (¹)

$$\begin{aligned} \omega(u_1, u_2, u_3) \equiv \omega_{11} u_1^2 + \omega_{22} u_2^2 + \omega_{33} u_3^2 + 2\omega_{23} u_2 u_3 \\ + 2\omega_{31} u_3 u_1 + 2\omega_{12} u_1 u_2 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

dove

$$\omega_{ii} = \frac{1}{e_i^2}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \omega_{23} = \frac{\cos\alpha_1}{e_2 e_3}, \quad \omega_{31} = \frac{\cos\alpha_2}{e_3 e_1}, \quad \omega_{12} = \frac{\cos\alpha_3}{e_1 e_2}. \tag{11}$$

La condizione sotto la quale la (10) rappresenta una coppia di punti coniugati d'una conica di questa equazione:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 = 0, \tag{12}$$

(¹) Cfr. S. Gundelfinger, loc. cit., p. 57.

ha la forma

$$(13) \qquad a_{11}\omega_{11} + a_{22}\omega_{22} + a_{33}\omega_{33} + 2a_{23}\omega_{23} + 2a_{31}\omega_{31} + 2a_{12}\omega_{12} = 0\,.$$

Nel caso presente, (2) essendo la conica (12), la condizione si riduce alla:

$$(14) \qquad c_1\omega_{23} + c_2\omega_{31} - c_3\omega_{12} = 0\,.$$

Si otterrebbe la medesima condizione anche domandando, che la conica (2) passi pel punto d'incontro delle altezze del triangolo (detto anche l'ortocentro), perchè ogni conica circoscritta ad un triangolo e passante per l'ortocentro è un'iperbole equilatera. Le coordinate dell'ortocentro sono

$$(15) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\omega_{23}} : \frac{1}{\omega_{31}} : \frac{1}{\omega_{12}}\,.$$

Quindi risulta, che il punto c deve essere situato sulla retta

$$(16) \qquad \omega_{23}x_1 + \omega_{31}x_2 - \omega_{12}x_3 = 0\,,$$

affinchè la conica (2) rappresenti un'iperbole equilatera.

Questa retta congiunge i piedi delle altezze del triangolo situati nelle rette $B(x_1 = 0)$ e $D(x_2 = 0)$. Supposto $\alpha_1 = 90^\circ$ od $\alpha_2 = 90^\circ$ ($\omega_{23} = 0$ od $\omega_{31} = 0$) la retta (16) è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo ora rettangolo; se $\alpha_3 = 90^\circ$ ($\omega_{12} = 0$), (16) rappresenta la quarta retta coniugata armonica dell'altezza relativa ad ae rispetto alla coppia B, D.

La curva (2) è una *parabola*, se essa ha per tangente la retta all'infinito del piano. Questa condizione è

$$c_1^2p_1^2 + c_2^2p_2^2 + c_3^2p_3^2 + 2c_2c_3p_2p_3 + 2c_3c_1p_3p_1 - 2c_1c_2p_1p_2 = 0$$

ovvero

$$(c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3)^2 - 4c_1c_2p_1p_2 = 0\,,$$

dove p_1, p_2, p_3 sono le coordinate della retta all'infinito. Dunque il punto c deve essere situato sulla curva

$$(17) \qquad (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 - 4p_1p_2x_1x_2 = 0\,,$$

che è un'iperbole avente per asintoti le rette B e D. L'equazione (17) fa conoscere che la curva tocca il lato ae del triangolo nel suo punto di mezzo.

§ 3.

Generazione del cerchio, dell'iperbole equilatera, della parabola come inviluppi di rette.

Tenendo presente la posizione dei punti b, d e delle rette A, E menzionata alla fine del § 1 cominciamo le nostre considerazioni dall'equazione tangenziale (4). Quando si chiede che questa curva sia un *cerchio* abbiamo quattro casi, il circolo iscritto ed i tre circoli ex-iscritti. In ogni caso la retta C congiunge i punti di contatto situati su A ed E.

La curva (4) è un'*iperbole equilatera*, se i due punti ciclici del piano sono punti coniugati della curva. L'equazione puntuale da (4) essendo

$$(18) \qquad C_1^2 x_1^2 + C_2^2 x_2^2 + C_3^2 x_3^2 + 2C_2 C_3 x_2 x_3 + 2C_3 C_1 x_3 x_1 - 2C_1 C_2 x_1 x_2 = 0\,,$$

essa rappresenta un'iperbole equilatera, se

$$C_1^2 \omega_{11} + C_2^2 \omega_{22} + C_3^2 \omega_{33} + 2C_2 C_3 \omega_{23} + 2C_3 C_1 \omega_{31} - 2C_1 C_2 \omega_{12} = 0\,,$$

cioè la retta C deve essere tangente alla cnrva di seconda classe

$$(19) \qquad \omega_{11} u_1^2 + \omega_{22} u_2^2 + \omega_{33} u_3^2 + 2\omega_{23} u_2 u_3 + 2\omega_{31} u_3 u_1 - 2\omega_{12} u_1 u_2 = 0$$

o più brevemente

$$(19\,a) \qquad \omega(u_1\,, u_2\,, u_3) - 4\omega_{12} u_1 u_2 = 0\,.$$

La forma di questa equazione fra conoscere, che i punti $u_1 = 0$ ed $u_2 = 0$, cioè i vertici b e d del triangolo fondamentale di questa generazione sono i fuochi reali della conica; dunque il suo centro è il punto di mezzo del lato bd. Secondochè il prodotto $\omega_{13} . \omega_{23}$ sia < 0 o > 0, la conica (19) sarà un'iperbole od un'ellisse, e nel caso ultimo l'ellisse può essere reale o immaginaria. Mediante la significazione degli ω_{ik} si conosce se l'equazione rappresenta un'iperbole, quando uno degli angoli b o d del triangolo fondamentale è ottusangolo; essa rappresenta un'ellisse reale, quando l'angolo fra le rette A ed E è ottusangolo, un'ellisse immaginaria, se tutti gli angoli del trilatero sono acuti in corrispondenza col fatto, che non esiste un'iperbole equilatera tangente ai lati d'un triangolo acutangolo.

L'equazione puntuale della conica (19) è

$$(20) \qquad \tau(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)^2 - 4\omega_{12}(\omega_{31} x_2 x_3 + \omega_{23} x_3 x_1 - \omega_{33} x_1 x_2) = 0\,,$$

dove τ è costante; dunque questa conica è simile e similmente situata alla conica

$$\omega_{31} x_2 x_3 + \omega_{23} x_3 x_1 - \omega_{33} x_1 x_2 = 0 \tag{21}$$

passante pei vertici del triangolo fondamentale ed avente il lato bd per asse focale.

La curva (4) è una *parabola*, se essa tocca la retta all'infinito. Questa condizione è

$$C_1 p_2 p_3 + C_2 p_3 p_1 - C_3 p_1 p_2 = 0 \tag{22}$$

ovvero

$$\frac{C_1}{p_1} + \frac{C_2}{p_2} - \frac{C_3}{p_3} = 0,$$

cioè la retta C deve passare pel punto Q:

$$\frac{u_1}{p_1} + \frac{u_2}{p_2} - \frac{u_3}{p_3} = 0, \tag{23}$$

che è il punto quarto coniugato armonico del baricentro rispetto alla coppia di punti di cui l'uno è l'intersezione da A ed E, l'altro il punto medio $\frac{u_1}{p_1} + \frac{u_2}{p_2} = 0$ del lato bd. Anche si conosce se il punto Q insieme coi vertici del trilatero fondamentale determina un parallelogrammo.

J. FINSTERBUSCH

ERWEITERUNG EINES SCHLIESSUNGSPROBLEMS VON J. STEINER UND IHRE BEZIEHUNG ZUR GAUSS' SCHEN THEORIE ZENTRIERTER LINSENSYSTEME

Das Steiner'sche Problem und Bemerkungen über seine Beweise.

Das Problem, um dessen Erweiterung es sich handeln soll, kann kurz als das der STEINER'schen Kugelreihen bezüglich das der Kreisreihen bezeichnet werden, je nachdem das Problem stereometrisch oder planimetrisch gefasst wird (1).

Es seien c_1, c_2, c_3 drei einander ausschliessende Kugeln. Dann umhüllt die Schar der sie gleichartig berührenden Kugeln k eine sogenannte Ringcyklide. Und wiederum gehören die genannten drei Kugeln c_1, c_2, c_3 einer andern Schar von Kugeln c an, die von der Cyklide ebenfalls umhüllt werden. Die Mittelpunkte der Kugeln c und k beschreiben zwei Kegelschnitte, entweder Ellipse und Hyperbel oder zwei Parabeln, deren Ebenen senkrecht auf einander stehen und die Symmetrieebenen der Cyklide bilden. Die Brennpunkte des einen Kegelschnitts sind die Endpunkte der Hauptachse des andern, und umgekehrt.

Werden die grössten Kreise der Kugeln c und k mit denselben Buchstaben bezeichnet, so berühren in den Symmetrieebenen der Cyklide die Kreise c sämmtlich zwei Kreise $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ der andern Schar k und ebenso die Kreise k sämtlich zwei Kreise $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ der ersten Schar. Beide Symmetrieebenen mögen um ihre Schnittlinie gedreht werden bis sie in *eine* Ebene zusammenfallen. Die Mittelpunkte der beiden Kreispaare $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ und $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ liegen in der Schnittlinie. Die Kreise $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ mögen einander ausschliessen, also $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ einander einschliessen.

Das STEINER'sche Problem kann nun kurz in folgenden Sätzen ausgesprochen werden:

Bildet man aus der einen Schar c bezüglich k eine Reihe von Kugeln oder Kreisen, die einander der Ordnung nach berühren, so findet das merkwürdige Gesetz statt:

(1) J. STEINER, *Geometrische Lehrsätze*, 11. Lehrs. (Crelle Journ. II oder Werke I, Seite 135-136); *Anhang zur Systemat. Entwickelung...* 1832, Sätze 80 und 83 (Werke I, Seite 455-457).

1) Wenn sich eine Reihe c oder k nach einem oder mehreren Umläufen schliesst, so schliesst sie immer, mit welchem Kreise man auch beginnen möge.

2) Schliesst die eine Reihe c nach einem oder mehreren Umläufen, so kehrt auch die zweite Reihe k nach einem oder mehreren Umläufen in sich zurück. Bedeutet u_1 die Zahl der Umläufe der ersten Reihe und n_1 die Zahl der sie bildenden Kugeln oder Kreise c, ferner u_2 und n_2 die entsprechenden Zahlen für die andere Reihe k, so besteht zwischen diesen Grössen das merkwürdige Gesetz:

$$\frac{u_1}{n_1}+\frac{u_2}{n_2}=\frac{1}{2}.$$

Der erste dieser Sätze wird durch eine inverse Transformation evident, welche die Cyklide in eine Rotationscyklide verwandelt. Von dem zweiten Satze, den STEINER ebenfalls ohne Beweis gibt und als « einen der merkwürdigsten geometrischen Sätze » bezeichnet, habe ich im Jahre 1893 einen Beweis gegeben, der die Beweise von GEISER 1869 (1) und W. FIEDLER 1882 (2) durch Einfachheit und Kürze übertrifft, aber leider nicht bekannt geworden ist (3). Im Jahre 1900, also sieben Jahre später veröffentlichte G. HOLZMUELLER einen Beweis (4), der im Prinzip mit dem meinigen übereinstimmt und nur in der Form abweicht, da er ihn für die Kugelreihen der Cyklide ausspricht, während ich a. a. O. die planimetrische Form der Kreisreihen wählte. Ungefähr zehn Jahre nach meiner Abhandlung erschien ein Beweis von PH. MAENNCHEN (5), der vollständig mit dem meinigen übereinstimmt. Obwohl Herr MAENNCHEN, wie er mir am 30. 3. 04 schreibt, von Herrn HOLZMUELLER auf meine Programmarbeit aufmerksam gemacht worden ist, und obwohl er in seinem Briefe an mich vom 1. 6. 04 bekennt, « dass unsere Beweise genau dieselben sind und er dies natürlich bei seiner nächsten Publikation gebührend hervorheben wolle », so ist dies doch bis heute nicht geschehen.

Nach diesen Bemerkungen gehe ich zu

Erweiterungen des Steiner'schen Problems.

Ich beschränke mich auf solche Kugel-bezüglich Kreisreihen in allgemeinerem Sinne als STEINER, deren aufeinander folgende Elemente sich berühren, und erwähne nur beiläufig, dass die beiden Beispiele, die ich gebe, auch auf Flächen bezüglich Curven zweiten Grades mit sich schneidenden auf einander folgenden Elementen der Reihen ausgedehnt werden können.

(1) C. F. GEISER, *Einleitung in die synthetische Geometrie* (1869, Seite 179-183).

(2) W. FIEDLER, *Cyklographie* (1882, Seite 233-237).

(3) J. FINSTERBUSCH, *Beiträge zur synthetischen Geometrie ebener Kreissysteme* (Programm der Realschule zu Werdau, 1893, N°. 579, Seite 119).

(4) G. HOLZMUELLER, *Elemente der Stereometrie* (1900, Band I, Seite 279).

(5) PH. MAENNCHEN, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung eines Steinerschen Satzes* (1903, Archiv der Math. u. Physik, III. Reihe, VII. Band, Seite 232).

I. Beispiel. — Es seien z Ringcykliden eines Büschels gegeben, welche also das System der Inversionskugeln gemeinsam haben und durch Inversion in z Rotationscykliden sich verwandeln lassen, deren erzeugende Meridiankreise einem Kreisbüschel mit Grenzpunkten angehören. Dann gelten folgende Sätze:

Bildet man aus Kugeln der entsprechenden Reihen c der z Cykliden eine Reihe (c) und analog aus Kugeln der entsprechenden Reihen k der z Cykliden eine Reihe (k) von der Ordnung nach sich berührenden Kugeln so, dass von jeder der z Cykliden gleichviel Kugeln genommen werden — die Aufeinanderfolge ist merkwürdigerweise ganz willkürlich und braucht also nicht periodisch zu sein — *so sind die beiden Reihen entweder kommensurabel oder nicht. Schliesst die eine nach u_1 Umläufen mit zn_1 Kugeln, die andere nach u_2 Umläufen mit zn_2 Kugeln, so besteht zwischen diesen Grössen die Relation*

$$\frac{u_1}{zn_1} + \frac{u_2}{zn_2} = \frac{1}{2}.$$

Hierbei kann natürlich auch jede Cyklide als vielfache auftreten.

Jetzt haben wir stillschweigend angenommen, dass die Kugeln aller Cykliden in ein und derselben Richtung, sagen wir vorwärts, sich einander angliedern; will man auch ein Rückwärtsangliedern der Kugeln einiger Cykliden zulassen, so gestaltet sich die Formel für $z = v + r$ Cykliden, von denen v ihre Kugeln *vorwärts* und r ihre Kugeln *rückwärts* angliedern, wie folgt:

$$\frac{u_1}{zn_1} + \frac{u_2}{zn_2} = \frac{1}{2}\,\frac{v - r}{v + r} = \frac{1}{2} - \frac{r}{z}.$$

Der Beweis ([1]) ist ganz analog dem in meinem Programm gegebenen. Nach einer inversen Transformation des Cyklidenbüschels in Rotationscykliden stellen wir die aequivalenten Kreisreihen auf und übertragen diese stereographisch auf die Kugel, deren Mittelpunkt und Radius mit dem des Inversions-oder Orthogonalkreises der Kreisreihe (c) übereinstimmt. Auch ohne erst eine Transformation in Rotationscykliden vorzunehmen, kann dasselbe erreicht werden, wenn die Kreisreihe (c) stereographisch auf die Kugel übertragen wird, deren Mittelpunkt der innere Aehnlichkeitspunkt eines diametralen Kreispaares der Reihe (c) ist und deren Radius mit dem negativen Inversionskreis dieses Kreispaares übereinstimmt.

Es ergeben sich auf der Kugel für jede der z Cykliden immer zwei gleiche Kreise $\overline{k}' = \overline{k}''$ bezüglich $\overline{c}' = \overline{c}''$, mithin je zwei Scharen von unter sich gleichen Kreisen c bezüglich k. Bedeuten nun c und k zugleich die Centriwinkel, unter denen die Durchmesser der Kreise c und k der Kugel erscheinen, so gelten für die Cykliden $1, 2, \ldots, z$ die Gleichungen

$$c_1 + k_1 = \pi\,,\; c_2 + k_2 = \pi\,,\; \ldots,\; c_z + k_z = \pi\,.$$

([1]) den ich am 2. 4. 02 Herrn Holzmueller brieflich mitgeteilt habe, Werden von r Cykliden die Kugeln, hier die aequivalenten Kreise, rückwärts angegliedert, also ihre Centriwinkel c und k negativ genommen, so ergibt sich für $z = v + r$ Cykliden

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_z) + (k_1 + k_2 + \cdots + k_z) = (v - r)\pi .$$

Nun ist ferner

$$n_1(c_1 + c_2 + \cdots + c_z) = u_1 \,.\, 2\pi$$

und

$$n_2(k_1 + k_2 + \cdots + k_z) = u_2 \,.\, 2\pi ,$$

also ergibt die Elimination der Klammern die Formel

$$\frac{u_1}{n_1} + \frac{u_2}{n_2} = \frac{1}{2}(v - r),$$

die durch Division durch $z = v + r$ obige Relation liefert.

Für $r = 0$ und $z = v = 1$ erhält man meinen 1893 a. a. O. gegebenen Beweis der STEINER'schen Formel.

Erwähnung verdient vielleicht noch der Fall $v = r$, für welchen also die Zahlen der vorwärts und rückwärts angliedernden Cykliden einander gleich sind. Man erhält, da vom negativen Vorzeichen des Quotienten der einen Reihe abgesehen werden kann, $u_1 = u_2$ und $(zn_1) = (zn_2)$. Beide sich schliessende Reihen stimmen also sowohl in der Zahl der Umläufe als auch in der Zahl der Kugeln überein.

II. Beispiel. — Eine Erweiterung des STEINER'schen Problems, die gleichsam die Brücke bildet zur Theorie zentrierter Linsensysteme.

Die optische Wirkung einer Linse bezüglich eines zentrierten Linsensystems ist bekanntlich nach GAUSS durch vier Punkte, die Brennpunkte und Hauptpunkte, oder durch die Brennpunkte und die Brennweite f bestimmt. Für den Abstand des Gegenstandspunktes L_1 von seinem Brennpunkt F_1 und den des Bildpunktes L_2 von seinem Brennpunkt F_2 gilt die Gleichung

$$L_1 F_1 \,.\, F_2 L_2 = f^2 .$$

Diese Formel spricht zugleich aus, dass die Systeme der L_1 und L_2 kreisverwandt sind, und gibt Veranlassung zu folgender einfacher Konstruktion, die sich bei MOEBIUS [1] findet: Werden auf der Centrale in F_1 und F_2 nach derselben Seite die Lote $F_1 F_1' = F_2 F_2' = f$ errichtet, so bestimmen je zwei durch F_1' und F_2' gehende Schenkel eines rechten Winkels auf der Centrale ein zusammengehöriges Paar von Gegenstandspunkt L_1 und Bildpunkt L_2. Der Scheitel T des rechten Winkels bewegt sich hierbei auf dem über $F_1' F_2'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise, den ich « Brennkreis » nennen will. Soweit die MOEBIUS'sche Konstruktion.

[1] MOEBIUS, *Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft,* 1855 (Werke, 1887, Band IV, Seite 568).

In gleicher Weise kann, wenn die eben besprochene Konstruktion als zur ersten Linse eines Systems gehörig betrachtet wird, in Bezug auf eine zweite Linse zu einem Gegenstandspunkt L_2 der Bildpunkt L_3 gefunden werden, und so fort. Da nun von den Systemen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ immer je zwei aufeinanderfolgende kreisverwandt sind, so ist dies auch mit dem ersten L_1 und letzen L_n der Fall, und es besteht also für diese beiden Systeme derselbe geometrische Zusammenhang. Diese letzte Konstruktion, von L_1 zu L_n genommen, ist in optischer Hinsicht bekanntlich von höchster Bedeutung, da sie gleichsam die Summe der einzelnen aufeinander folgenden Konstruktionen bildet und diese zu ersetzen vermag. Aber auch in rein geometrischer Beziehung ist diese letzte Konstruktion, von L_n zu L_1, also in entgegengesetztem Sinne genommen, von Wichtigkeit, da sie alle vorhergehenden Konstruktionen in ihrer Wirkung aufhebt und zum Ausgangspunkt L_1 zurückführt, also das Schlussglied einer sich schliessenden Reihe bildet.

Diesem Schliessungssatze können wir nun sofort eine bessere Form geben und ihn in Beziehung zum Steiner'schen Problem bringen, wenn wir über $L_1L_2, L_2L_3, \ldots, L_nL_1$ als Durchmessern die Kreise $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ konstruieren. Ein jeder Kreis c berührt dann seinen zugehörigen, oben von mir als Brennkreis bezeichneten Kreis k' im betreffenden Scheitel T des rechten Winkels und zugleich den zu k' in Bezug auf die Centrale als Symmetrieachse symmetrischen Kreis k''.

Wird diese Figur invers transformiert, wobei die Centrale in den gemeinsamen Inversionskreis der Kreispaare $k'k''$ übergeht, so folgt:

Sind $n - 1$ *in Bezug auf denselben Inversionskreis inverse Kreispaare* $k_1'k_1'', k_2'k_2'', \ldots, k_{n-1}'k_{n-1}''$ *gegeben, und bildet man Reihen von je* $n - 1$ *Kreisen* $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, *von denen jeder ein inverses Kreispaar* $k'k''$ *gleichartig berührt, und die ausserdem einander der Ordnung nach in* $L_2, L_3, \ldots, L_{n-1}$ *berühren*, wobei jeder Kreis c den gemeinsamen Inversionskreis der Kreispaare $k'k''$ in zwei Berührungspunkten L rechtwinkelig schneidet, *so umhüllen die* n^{ten} *Kreise* c_n, *die den Inversionskreis in je zwei Punkten* L_n *und* L_1 *rechtwinklig schneiden, also* c_{n-1} *und* c_1 *berühren, ebenfalls ein Kreispaar* $k_n'k_n''$. Zu seiner Konstruktion sind drei Kreisreihen (c) erforderlich.

Bilden die $n - 1$ Kreispaare $k_1'k_1'', k_2'k_2'', \ldots, k_{n-1}'k_{n-1}''$ einen Büschel, so gehört diesem auch das Kreispaar $k_n'k_n''$ an.

Fallen alle n Kreispaare $k'k''$ in eins zusammen, so erhält man das Steiner'sche Problem.

G. GALLUCCI

SU LA CONFIGURAZIONE ARMONICA

Mi propongo di dimostrare che i 24 punti ed i 24 piani della configurazione armonica si possono denotare mediante le 24 permutazioni di 4 elementi, in modo che dalle proprietà del gruppo si deducano immediatamente le proprietà della configurazione stessa.

1. Date due quaderne incidenti di rette di una quadrica, a_1, a_2, a_3, a_4; $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ (figura delle otto rette) risultano determinati 16 punti $A_{ij} = a_i a^{(j)}$, che si possono disporre in 4 linee ed in quattro colonne nel seguente modo:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

Sia richiesto di trovare una configurazione soddisfacente a queste due condizioni: *a*) ogni punto diverso da A_{ij} sia congiunto ad uno ed uno solo dei punti di ciascuna linea; *b*) non esista alcun triangolo della configurazione avente un vertice in uno dei punti A_{ij}. Se A è un punto della configurazione, diverso dai punti A_{ij}, esso dovrà essere congiunto con i 4 punti $A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}\, A_{4l}$ ove $ijkl$ per la condizione *a*) è una permutazione dei quattro numeri 1, 2, 3, 4. Tale punto si potrà dunque rappresentare con il simbolo A_{ijkl}.

Quanti punti della configurazione si dovranno trovare sulla congiungente AA_{1i}? Per fissare le idee consideriamo il punto A_{1234} e la congiungente $A_{1234}\, A_{11}$; sia A' un punto di questa e che appartiene alla Cfz. È facile dimostrare che, in conseguenza della condizione *b*) il punto A' non potrà avere che una delle due notazioni A_{1342}, A_{1423}. In tal modo otteniamo 3 punti le cui permutazioni corrispondenti 1234, 1342, 1423 sono pari ed hanno per primo elemento 1 (gli altri vengono permutati circolarmente). Analogamente si dimostra che, sulla retta $A_{1234}\, A_{22}$ si trovano i punti A_{1234}, A_{3241}, A_{4213}; sulla $A_{1234}\, A_{33}$ i punti A_{1234}, A_{2431}, A_{4132} ecc.

Indicheremo con a_{ij} la retta che contiene i 3 punti corrispondenti alle tre sostituzioni pari, che presentano l'indice j al posto i^{mo}; queste si ottengono applicando ad una di esse le tre sostituzioni del gruppo alterno su 4 elementi, che lasciano j al posto i^{mo}.

Così veniamo ad ottenere un gruppo (A) di 12 punti che si possono denotare con le 12 permutazioni pari di 4 elementi e 16 rette a_{ij} contenenti i 12 punti a 3 a 3.

2. Consideriamo i raggruppamenti di 4 rette $a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}\, a_{4l}$ in cui $ijkl$ è una permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4; se questa è pari, le 4 rette passano per un punto A_{ijkl}; se è dispari le 4 rette stanno su un piano, che si potrà indicare con α_{ijkl}. Viene perciò a determinarsi un'altra figura costituita da 12 piani α_{ijkl} ($ijkl$ permutazioni dispari) passanti a 3 a 3 per le 16 rette a_{ij}, le quali a 4 a 4 stanno nei primi. Per esempio, per la retta a_{11} passano i piani: $\alpha_{1243} \equiv a_{11}\, a_{22}\, a_{34}\, a_{43}$, $\alpha_{1324} \equiv a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}$, $\alpha_{1432} \equiv a_{11}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{42}$. In generale i piani passanti per a_{ij} corrispondono alle permutazioni dispari che lasciano j al posto i^{mo}.

3. Applicando ai 3 punti di una a_{ij}, p. es. ai punti A_{1234}, A_{1342}, A_{1423} le sostituzioni del gruppo anarmonico su 4 elementi, i 12 punti A_{ijkl} vengono a suddividersi in tre quaderne A_{1234}, A_{2143}, A_{4321}, A_{3412} ; A_{1342}, A_{3124}, A_{2431}, A_{4213} ; A_{1423}, A_{4132}, A_{3241}, A_{2314}. Si hanno allora tre tetraedri, che costituiscono un sistema desmico. Le faccie di questi tetraedri le indicheremo con α_{ijkl} ove $ijkl$ è una permutazione pari degli elementi 1, 2, 3, 4. Per esempio α_{1234} sarà la faccia del 1° tetraedro opposta al vertice A_{1234}, cioè il piano che contiene i tre punti A_{2143}, A_{4321}, A_{3421}.

Quello che si è detto per i punti A_{ijkl} con $ijkl$ permutazione pari, si può ripetere per i piani α_{ijkl} con $ijkl$ permutazione dispari. Siano α_{1243}, α_{1432}, α_{1324} i tre piani passanti per a_{11}; applicando ad essi le sostituzioni del gruppo anarmonico, i 12 piani sopraddetti si suddividono in tre quaderne: α_{1243}, α_{2134}, α_{3421}, α_{4321} ; α_{1432}, α_{4123}, α_{2341}, α_{3214} ; α_{1324}, α_{3142}, α_{4231}, α_{2413}, che dànno tre tetraedri formanti un altro sistema desmico coniugato al primo. I vertici di essi si indicheranno con A_{ijkl} ove $ijkl$ è permutazione dispari. Per es. A_{1243} è il vertice del primo tetraedro opposto alla faccia α_{1243} ossia il punto d'incontro dei tre piani α_{2134}, α_{3421}, α_{4312}.

I punti A_{ijkl} con $ijkl$ permutazione dispari formano una figura (A′) analoga alla figura (A); essi sono a 3 a 3 su 12 rette, che indicheremo con $a^{(ij)}$; la retta $a^{(ij)}$ contiene i tre punti che corrispondono alle tre permutazioni dispari, che lasciano j al posto i^{mo}.

Le 4 rette $a^{1i}\, a^{2j}\, a^{3k}\, a^{4l}$ stanno su un piano α_{ijkl} se $ijkl$ è permutazione pari e passano per un punto A_{ijkl} se $ijkl$ è permutazione dispari.

4. Le figure (A) (A′) sono due Cfz. $(12_4\, 16_3)$ coniugate, che insieme formano la configurazione armonica. Dunque i 24 punti ed i 24 piani della Cfz. armonica si possono denotare con le 24 permutazioni di 4 elementi in modo che le permutazioni pari dànno uno dei due sistemi desmici coniugati, e le permutazioni dispari l'altro.

Ad una delle 24 permutazioni applichiamo le sostituzioni del gruppo alterno; avremo l'uno e l'altro sistema desmico.

In generale, ad ogni sottogruppo del gruppo totale su 4 elementi corrisponde un raggruppamento notevole degli elementi della configurazione.

5. Le sostituzioni del sottogruppo transitivo del 4° ordine anarmonico dànno un tetraedro del 1° o del 2° sistema desmico secondo che la permutazione a cui si applica è pari o dispari.

Le sostituzioni dell'altro sottogruppo transitivo del 4° ordine dànno uno spigolo di uno dei tetraedri. Si ottengono 18 rette che a 4 a 4 contengono i 24 punti; su ognuna di esse vi sono due punti rappresentati da permutazioni pari e due altri rappresentati da permutazioni dispari e che dividono armonicamente i primi.

Il sottogruppo intransitivo del 4° ordine fornisce un raggruppamento dei 24 punti in tetraedri T aventi uno spigolo comune con un tetraedro del sistema (A), un'altro spigolo comune con un tetraedro del sistema (A′) e gli altri quattro spigoli che sono rette k, cioè congiungenti due soli punti fondamentali. La considerazione di questi tetraedri T semplifica lo studio della distribuzione delle rette k.

6. Le 16 rette a_{ij} e le altre $a^{(ij)}$ (rette h) si ottengono applicando alle permutazioni $ijkl$ le tre sostituzioni del sottogruppo intransitivo di terz'ordine.

Le rette k contenenti due soli punti fondamentali si ottengono dai sottogruppi intransitivi di 2° ordine. Esse si possono indicare col simbolo $a^{(rs)}_{ijkl}$; i due punti corrispondono alla permutazione $ijkl$ ed a quella che se ne deduce lasciando fermi i due indici r, s e scambiando gli altri due. Dunque per un punto A_{ijkl} passano le 6 rette k: $a^{(ij)}_{ijkl}$ $a^{(ik)}_{ijkl}$ $a^{(il)}_{ijkl}$ $a^{(jk)}_{ijkl}$ $a^{(jl)}_{ijkl}$ $a^{(kl)}_{ijki}$.

7. Un insieme notevole di proprietà si ricava dalla considerazione del sottogruppo dell'ottavo ordine. Applicando questo ad una delle 24 permutazioni si vengono a staccare otto punti, vertici di due tetraedri, uno del sistema (A) e l'altro del sistema (A′); i 16 punti rimanenti costituiscono una figura delle otto rette studiando la quale si ricava un'altra genesi della configurazione armonica insieme alla distribuzione delle rette k sopra quadriche.

M. BRÜCKNER

BEMERKUNGEN ZUR MORPHOLOGIE DER AUSSERGEWÖHNLICHEN POLYEDER ERLAUTERT DURCH DIE SECHSFLACHE

« Die Freude an der Gestalt » ist eine Vorbedingung für die Arbeit des Geometers (nach CLEBSCH).

Während die Lehre von den konvexen Polyedern, besonders solchen, die nur dreikantige Ecken besitzen, durch H. EBERHARD soweit gefördert wurde, dass sie eine Beantwortung der STEINER' schen Frage nach der Zahl dieser Gebilde, freilich in modifizierter Weise, zulässt, liegen über die aussergewöhnlichen Polyeder, nach MÖBIUS Bezeichnung, so gut wie keine Untersuchungen vor. Ich bitte deshalb die folgenden Bemerkungen nur als einen bescheidenen Beitrag zu einem Anfange auf diesem Gebiete entgegenzunehmen. Es handelt sich um die Auffindung *aller* Polyeder einer bestimmten Flächenzahl, z. B. für $f=6$. Am Eingang steht die MÖBIUS' sche Definition (*Ges. Werke*, Bd II, S. 476) wonach ein Polyeder ein dergestalt verbundenes System von Vielecken im Raume ist, dass jede Kante eines jeden Vielecks die Kante noch eines und *nur eines* der übrigen Vielecke ist. Hiermit ist verträglich, dass in einem aussergewöhnlichen Polyeder ein Vieleck zwei oder mehrere nicht benachbarte Kanten mit demselben andern Vielecke gemein hat. Es sind nun die Polyeder zunächst in die beiden Hauptklassen der zwei- und einseitigen zu bringen. Zwischen den Zahlen der Ecken, Kanten und Flächen bestehen dann bezw. die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad e-k+f=2-2p \quad \text{und} \quad e-k+f=2-\sigma,$$

worin p für zweiseitige Polyeder das Geschlecht, d. h. die Maximalzahl der einander nicht schneidenden, zusammen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte ist, und σ für einseitige Polyeder die entsprechende Bedeutung hat. (Vergl. DEHN, *Math. Encykl.*, III_1, S. 198 und 202). Da für jedes allgemeine Polyeder $2k=3e$, so sind in Verbindung mit den Gleichungen (1) k und e durch f bestimmt. Was nun zunächst die *zweiseitigen* aussergewöhnlichen Polyeder betrifft, d. h. solche, die auch aussergewöhnliche Vielecke im MÖBIUS' schen Sinne als Grenzflächen besitzen, so sind sie in *zwei* Unterklassen einzuordnen. Behandeln wir hier nur den Fall $p = o$, so gilt für die Flächen eines konvexen Vielflaches die von H. EBERHARD zum Ausgangspunkt gewählte Gleichung:

$$(2) \qquad 3 f_3 + 2 f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2 f_8 + \cdots$$

aus der die Möglichkeit der sog. *Fundamentalkonstruktionen* folgt (EBERHARD, *Zur Morph. der Polyeder*, S. 16) wonach *jedes* allgemeine konvexe Polyeder P_{n+1} durch drei-, vier-, oder fünfseitige Schnitte allein aus gewissen P_n erhalten werden kann. Erweitert man diese Konstruktionen in bestimmter Weise, so lässt sich zu jedem Lösungssystem f_i, das ein oder mehrere allomorphe konvexe Polyeder charakterisiert, eine bestimmte Anzahl aussergewöhnlicher Polyeder konstruieren. Diese bilden die oben als erste Unterklasse bezeichneten. Unter ihnen befinden sich auch Koiloeder (nach H. FEDOROWS Bezeichnung) d. h. nicht-konvexe Polyeder mit überstumpfen Flächenwinkeln. Es existiert nun aber eine zweite Gattung aussergewöhnlicher Polyeder, deren Flächensystem f_i sich nicht als konvexes Polyeder, sondern nur als Koiloeder konstruieren lässt [z. B. $f_6 = 2, f_3 = 4$], wonach also der von MÖBIUS ausgesprochene Satz, dass jedes seinem Ausdrucke nach gegebene Polyeder, wenn es sich als gewöhnliches darstellen lässt, immer auch als ein aussergewöhnliches konstruiert werden könne, (*Werke*, Bd. II., S. 479) *nicht umkehrbar* ist. Wenngleich die f_i für diese Gebilde der Gleichung (2) genügen, da sie sich ja für $p = 0$ auf die Kugelfläche projicieren lassen, so werden doch hier die Fundamentalkonstruktionen hinfällig. Es lassen sich z. B. die P_6 wohl durch gewisse Doppelschnitte aus dem P_4, aber nicht aus den P_5 durch einfache Schnitte an den Ecken erzeugen. Diese Tatsache, sowie die Notwendigkeit die *einseitigen* Polyeder doch auf andere Weise ableiten zu müssen, führte darauf, die Anwendung der Fundamentalkonstruktionen auf die obengenannten Polyeder der ersten Klasse zu beschränken, für die übrigen aber einen anderen Weg einzuschlagen, nämlich zur Auffindung der P_n das vollständige n-flach zu untersuchen. Da für $n = 5$ nur eine Figur möglich ist, aus der sich die 6 allgemeinen Fünfflache leicht ergeben, überdies einseitige Polyeder hier noch nicht auftreten, so findet das Verfahren erst für $n = 6$ Verwendung. Bezeichnet man, wie ich es an anderer Stelle getan, die auf einer Ebene des vollständigen n-flaches durch die $n - 1$ übrigen Ebenen erzeugte Linearfigur als die sog. *vollständige Figur* eines n-flaches, so kann das vollständige Sechsflach deren bereits 6 morphologisch verschiedene besitzen. Aus ihnen liest man die möglichen Grenzflächen für alle in dem vollständigen Sechsflache enthalteneu Polyeder ab. Es ergeben sich als verfügbare Flächen 3-, 4-, 5-, 6-, und 7- ecke, wobei natürlich die beiden letzten *nur* für aussergewöhnliche Polyeder, die zum grossen Teile einseitig sind, in Frage kommen. Da für letztere hier nur $o = 1$ sein kann, also für sie

$$(3) \qquad 3 f_3 + 2 f_4 + f_5 = 6 + f_7 + 2 f_8 + \cdots$$

ist, so sind die zulässigen Werte der f_i (z. B. $f_5 = 6$) leicht aufzufinden. Nach alledem ergaben sich für die von 6 Flächen begrenzten Polyeder, die hier sämtlich gezeichnet vorliegen, die folgenden Lösungen der Gleichungen (2) und (3), die als morphologisch verschieden gelten müssen, da es die begrenzenden Flächen sind.

I). — Zweiseitige allgemeine Polyeder ($e = 8$, $k = 12$).

A_1)	$2f_5, 2f_4, 2f_3$ . . .	139	allomorphe Typen.	1. Unterklasse
A_2)	$6f_4$.	37	„ „	
A_3)	$2f_6, 4f_3$	24	„ „	2. Unterklasse

II). — Zweiseitige singuläre Polyeder.

S_1)	$1f_5, 2f_4, 3f_3$. . . .	123	allomorphe Typen.	$6e_3, 1e_4, k = 11$	1. Unterklasse
S_2)	$4f_4, 2f_3$	74	„ „		
S_3)	$2f_4, 4f_3$	35	„ „	$4e_3, 2e_4, k = 10$	
S_4)	$1_5f, 5f_3$	11	„ „	$5e_3, 1e_5, k = 10$	
S_5)	$6f_3$.	5	„ „	$2e_3, 3e_4, k = 9$	
S_6)	$2f_5, 4f_3$	22	„ „	$6e_3, 1e_4, k = 11$	2. Unterkl.
S_7)	$2f_4, 4f_3$	15	„ „	$4e_3, 2e_4, k = 10$	

III). — Einseitige allgemeine Polyeder ($e = 10$, $k = 15$).

A_4)	$1f_7, 2f_6, 2f_4, 1f_3$ . .	19	allomorphe Typen.
A_5)	$2f_6, 2f_5, 2f_4$ . . .	22	„ „
A_6)	$6f_5$.	6	„ „

IV). — Einseitige singuläre Polyeder.

S_8)	$1f_7, 2f_6, 3f_3$. . . .	6	allomorphe Typen.	$8e_3, 1e_4, k = 14$
S_9)	$2f_6, 1f_5, 2f_4, 1f_3$ . .	19	„ „	
S_{10})	$2f_6, 4f_4$	7	„ „	
S_{11})	$4f_5, 2f_4$	20	„ „	
S_{12})	$2f_6, 1f_5, 3f_3$. . . .	3	„ „	$6e_3, 2e_4, k = 13$
S_{13})	$2f_5, 4f_4$	8	„ „	
S_{14})	$3f_5, 2f_4, 1f_3$. . . .	6	„ „	
S_{15})	$3f_5, 3f_3$	2	„ „	$4e_3, 3e_4, k = 12$.
S_{16})	$6f_4$.	3	„ „	

Sonach sind 600 nach Isomorphismus verschiedene Sechsflache gefunden, von denen 115 einseitig sind. Da die zweiseitigen, soweit möglich, durch Fundamentalkonstruktionen abgeleitet sind, und sämtliche mögliche Verfahren zur Auffindung der singulären angewandt wurden, so dürfte ihre Zahl ziemlich sicher stehen, was von der der einseitigen nicht behauptet werden soll. Diese kurzen Notizen mögen für heute genügen, da für später eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes beabsichtigt ist.

L. E. J. BROUWER

DIE THEORIE DER ENDLICHEN CONTINUIERLICHEN GRUPPEN, UNABHÄNGIG VON DEN AXIOMEN VON LIE

Die Frage nach einem Aufbaue der LIE'schen Gruppentheorie unabhängig von den LIE'schen Axiomen ist mehrere Male aufgeworfen worden, z. B. von HILBERT in seinem auf dem Pariser Congress gehaltenen Vortrage: « Mathematische Probleme » (¹) und von POINCARÉ in seinem zur dritten Verteilung des LOBATCHEFSKY-Preises ausgebrachten Gutachten über die Arbeiten von HILBERT (²), welche die Grundlagen der Geometrie betreffen. Letzterem war nämlich inzwischen (³) die Bestimmung der ebenen Bewegungsgruppen gelungen durch ein System von Axiomen, frei von den LIE'schen Voraussetzungen über die Existenz von gewissen Differentialquotienten der die Gruppe definierenden Funktionen, welche Differentialquotienten bei der LIE'schen Methode notwendig sind, um die im Mittelpunkte dieser Untersuchungen stehenden Infinitesimaltransformationen, welche durch continuierliche und differenzierbare Funktionen gemessen werden, herzuleiten.

Eine allgemeine Formulierung des seiner Beschränkungen entledigten LIE'schen Problems: « Alle endlichen continuierlichen Gruppen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zu bestimmen », wird indes von HILBERT nicht angegeben, und man sieht nicht gleich, wie sich seine für die Bewegungsgruppen der Ebene aufgestellten Axiome zu solchen, die für alle endlichen continuierlichen Gruppen gelten, verallgemeinern lassen. Ich habe nun diese Fragestellung festgelegt durch folgende Definitionen:

Unter einer *n-dimensionalen Mannigfaltigkeit* verstehe ich ein zusammenhängendes endliches Gebiet des n-dimensionalen Zahlenraumes, c. q. modifiziert durch Hinzufügung der Grenze, paarweise Identifizierung von in ihr zu bildenden, auf einander applizierbaren Gebietsmengen (⁴) in der Weise, dass die Innenseite der einen auf die Aussenseite der anderen appliziert und mit ihr identifiziert wird, weiter paarweise Identifizierung von den Grenzpunkten der genannten Gebiete und Iden-

(¹) Abgedruckt in den Göttinger Nachrichten, 1900.

(²) Kasan Bulletin. Série 2. XIV. No. 1. Section I.

(³) Mathematische Annalen 56.

(⁴) d. h. Teilmengen der Grenze, mit der Eigenschaft, dass, wenn ein Punkt P zu ihr gehört, auch der innerhalb einer gewissen im n-dimensionalen Raume un P beschriebenen Kugel liegende Teil der Grenze zu ihr gehört.

tifizierung von anderen auf einander applizierbaren abgeschlossenen Teilmengen der Grenze, und schliesslich wieder Fortlassung der Grenze ausser den paarweise zusammen mit Innen- und Aussenseite identifizierten zusammenhängenden Gebieten.

Unter einer *endlichen continuierlichen Gruppe*, insbesondere unter einer p-dimensionalen (¹) continuierlichen Gruppe einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, als *Transformationsmannigfaltigkeit* zu bezeichnen, verstehe ich eine Gruppe von stetigen bi-uniformen und paarweise inversen Transformationen der Punkte der Mannigfaltigkeit in sich derart, dass sich die verschiedenen Transformationen der Gruppe stetig und bi-uniform auf die Punkte einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit, der wir den Namen *Parametermannigfaltigkeit* beilegen wollen, abbilden lassen (²). Wir bemerken gleich, dass diese Parametermannigfaltigkeit auch selber einer p-dimensionalen continuierlichen Gruppe unterliegt (³).

Die Gesamtheit der Punkte, in welche ein bestimmter Punkt der T. M. (Transformationsmannigfaltigkeit) durch die Gruppe übergehen kann, hat die Eigenschaft, dass jeder Punkt des Systems alle anderen Punkte des Systems, aber nur diese, durch die Gruppe erreichen kann. Ich nenne diese Punktmenge einen *Transformationsbereich*, und bemerke über sie zunächst, dass sie jedenfalls zusammenhängend, und wenn man die Grenztransformationen hinzunimmt, abgeschlossen ist. Beide Eigenschaften bleiben bestehen, wenn man nur denjenigen Teil des T. B. (Transformationsbereiches) ins Auge fasst, der einer beliebigen Umgebung mit Grenze in der P. M. (Parametermannigfaltigkeit) entspricht. Ein solcher Teil eines T. B. ist also entweder eine zusammenhängende perfekte Menge, oder der ganze T. B. besteht aus einem isolierten Punkt.

Natürlich bildet die P. M. für die Gruppe nur einen einzelnen T. B.

Halten wir einen oder mehrere Punkte der T. M. fest, so bilden die jetzt noch möglichen Transformationen eine Untergruppe mit paarweise inversen Transformationen, die wir *reduzierte Gruppe* nennen wollen. Scheiden wir in der P. M. mit ihrer Grenze resp. in einem beliebigen zusammenhängenden Gebiete mit Grenze der P. M. die Punkte aus, die dieser Untergruppe entsprechen, so bilden sie eine abgeschlossene Menge. Zusammenhängend braucht sie nicht zu sein (⁴). Die verschiedenen

(¹) Ob p für jede Gruppe eine Invariante ist, steht aus, solange die « Nichtapplizierbarkeit » zweier Räume, deren Dimensionenzahl verschieden, unbewiesen ist.

(²) Diese Definition soll meinen, dass die Stellen der Punkte der T. M. ausserhalb der Grenze der P. M. gleichmässig stetige Funktionen des repräsentierenden Punktes der P. M. sein sollen. Hieraus ergibt sich aber keineswegs die Gleichmässigkeit dieser Stetigkeit, wenn in der P. M. der Grenze unbeschränkt genähert wird.

(³) Durch die Abbildung der Gruppe auf die P. M. ist zugleich eine Abbildung der Grenztransformationen der Gruppe auf die Grenze der P. M. bestimmt. Um diese in der T. M. zu deuten, kann man genötigt sein, auch in der T. M. die Grenze hinzuzunehmen. Die Grenztransformationen sind sicher uniform, nicht aber stetig und biuniform.

(⁴) Man betrachte z. B. die Gruppe der Euklidischen Bewegungen der elliptischen Ebene, der man als P. M. den im vierdimensionalen Raume liegenden quadratischen Raum $x^2 + y^2 = r^2$ zuordnen kann. Hält man hier in der T. M. einen Punkt der invarianten geraden Linie fest, so werden in der P. M. zwei parallele Ebenen ausgeschieden.

innerhalb der P. M. zusammenhängenden Bestandteile der reduzierten Gruppe sind aber jedenfalls bi-uniform und stetig auf einander abzubilden, und es gibt eine beschränktere Untergruppe, die jeden dieser Bestandteile in sich transformiert, und deren T. B. zusammenhängend sind.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der endlichen continuierlichen Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit. Erst die Bestimmung aller dieser Gruppen öffnet den Weg zur Lösung des analogen Problems in mehrdimensionalen Räumen. Es hat sich mir dabei bis jetzt herausgestellt, dass ausser nur Gruppen trivialer Art ekartierenden Restrictionen wenigstens in der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit noch keine endlichen continuierlichen Gruppen, die von den LIE'schen wesentlich verschieden sind, existieren (1). Für höhere Räume habe ich diese Untersuchungen noch nicht abschliessen können. Dazu wird nämlich erfordert eine zur Zeit noch nicht vorliegende Erweiterung von den Sätzen über Analysis Situs der Ebene, die SCHOENFLIES (2) in den letzten Jahren veröffentlicht hat, auf drei und mehr Dimensionen. Nur die Gruppen der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten lassen sich bestimmen mittelst der bisherigen SCHOENFLIES'schen Resultate, und ich glaube dass damit zum ersten Male eine Anwendung dieser Resultate gegeben wird.

Für die Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit zeige ich zunächst, dass sowohl für die ursprüngliche Gruppe (3), die wir Hauptgruppe nennen könnten, wie für die verschiedenen reduzierten Gruppen, die T. B. entweder Systeme von isolierten Punkten, oder Systeme von Segmenten ohne ihre Endpunkte sind. Sodann enthält jede reduzierte Gruppe, der in der P. M. noch zusammenhängende Mengen entsprechen, noch in Segmenten bewegliche Punkte, und kann weiter reduziert werden durch Festhaltung eines solchen Punktes. Sei P ein solcher Punkt, P_ν eine willkürliche Stelle von P in seinem T. B., μ_ν die entsprechende Menge in der P. M., so zeigen wir zunächst, dass, wenn P_ω Grenzpunkt von $P_1, P_2, \ldots$, und Q_ω ein Punkt von μ_ω, es in $\mu_1, \mu_2, \ldots$ der Reihe nach Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ gibt, die gegen Q_ω convergieren, und hieraus weiter, dass, wenn μ_ν aus verschiedenen zusammenhängenden Bestandteilen ${}_hZ_\nu$ besteht, diese sich für jedes Segment des T. B. von P zusammensetzen zu ebenso vielen zusammenhängenden Mengen ${}_hY$, deren je zwei von einander isoliert sind, während in jedem ${}_hY$ die ${}_hZ_\nu$ bi-uniformes und stetiges Bild der P_ν sind.

Lassen wir jetzt von den bisher festgehaltenen Punkten einen, den wir R nennen wollen, frei, so setzen sich in derselben Weise für jedes Segment des T. B. von R die ${}_hY$ zusammen zu zusammenhängenden ${}_hX$, in jeder von welchen die ${}_hY_\tau$ bi-uniformes und stetiges Bild der R_τ sind, und es kann gezeigt werden, dass das ganze

(1) Auch wenn man nur von Infinitesimaltransformationen generierte Gruppen in Betracht zieht, geht dies über die LIE'schen Voraussetzungen hinaus, nicht nur insoweit man diese Infinitesimaltransformationen nicht als durch differenzierbare Funktionen bestimmt voraussetzt, sondern auch hierin, dass man kein Coordinatensystem voraussetzt, in dem alle die Gruppe erzeugenden Infinitesimaltransformationen als solche zu lesen sind.

(2) Mathematische Annalen 59, 62; Bericht über die Mengenlehre II.

(3) Für diese kann freilich, wenn die T. M. ein geschlossenes Continuum ist, dieses auch als ein einziger T. B. auftreten.

jetzt erhaltene System der Z nicht nur bi-uniformes, sondern auch stetiges Bild der von den Stellen von P und R gebildeten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist.

So kann man fortfahren, und schliesslich zeigen, dass wenn Z eine nicht weiter ausdehnbare zusammenhängende Teilmenge der P. M., welche nach Festhaltung von einem nach dem andern n je zuvor stetig beweglichen Punkten übrig bleibt, die zusammenhängende Umgebung eines willkürlichen Punktes in der P. M. sich aus einem gewöhnlichen n-dimensionalen Raume von Mengen Z zusammensetzt.

Hieraus folgern wir gleich, dass die sich zu einer Menge μ zusammensetzenden Mengen Z isoliert sind. Sonst nämlich gäbe es in beliebiger Nähe eines Punktes der P. M. andere Punkte, die nur auf endlichem Wege zusammenhängend erreichbar wären. Diese zusammenhängende Erreichbarkeit einer zweiten Menge Z derselben Menge μ ist sogar nur dann möglich, wenn wir als T. B. ein geschlossenes Continuum haben, nämlich durch einen vollen Umlauf dieses Continuums. In jedem anderen Falle enthält jedes μ sicher nur ein einziges Z.

Jetzt beweisen wir, dass es immer möglich ist, die nach einander festgehaltenen Punkte derart zu wählen, dass nach Festhaltung einer endlichen Zahl von je zuvor noch stetig beweglichen Punkten keine zusammenhängende Teilmenge der P. M. mehr zur Verfügung steht, und dies gelingt, indem man die Punkte in der Weise einen nach dem andern festhält, dass sie, wenn man unbeschränkt fortfahren könnte, die T. M. überall dicht überdecken würden, und von diesem die Unmöglichkeit zeigt. Man kann somit durch Festhaltung einer endlichen Zahl von Punkten erreichen, dass die T. B. nur noch aus isolierten Punkten bestehen. Ist n die Zahl dieser Punkte, so ist die Gruppe n-dimensional; ob n eine Invariante, ist noch unsicher.

Sodann studieren wir die reduzierte Gruppe, welche durch Festhaltung noch eines Punktes wird festgesetzt. Dieser Gruppe entsprechen in der P. M. isolierte einfache Kurven, während die zusammenhängende, die Identität enthaltende Untergruppe jede dieser Kurven in sich, und in der T. M. jedes Segment eines T. B. in sich transformiert. Die Analyse dieser letzteren Gruppe lehrt alsbald, dass sie in jedem von ihr auf der T. M. bestimmten Segmente eine überall dichte Skala vom Ordnungstypus η zu definieren gestattet, in der sie die gewöhnliche Additionsgruppe ist. Wir können somit den Satz aussprechen:

Jede endlich continuierliche Gruppe der eindimensionalen Mannigfaltigkeit enthält eine reduzierte Gruppe, deren zusammenhängender, die Identität enthaltender, Bestandteil von einer Infinitesimaltransformation erzeugt wird.

Um systematisch die Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit zu bestimmen, stellen wir folgende Definition auf:

« Eine endliche continuierliche Gruppe der eindimensionalen Mannigfaltigkeit heisse p-gliedrig, wenn es möglich ist, durch Festhaltung von einem nach dem andern p je zuvor noch stetig beweglichen Punkten, zu erreichen, dass in der P. M. keine zusammenhängende Menge mehr zur Verfügung steht ».

Es zeigt sich, dass für jede Gruppe p eine Invariante ist.

Die Bestimmung der *eingliedrigen* Gruppen hat jetzt keine Schwierigkeit mehr, weil diese ihre eigenen letzten reduzierten Untergruppen sind, und wir solche letzte reduzierte Gruppen schon studiert haben. Indem wir die beiden zu unterscheidenden eindimensionalen Raumformen berücksichtigen, finden wir folgendes Resultat:

Durch eine eingliedrige Gruppe des offenen Continuums wird eine endliche oder abzählbare Menge von Segmenten bestimmt; jedes dieser Segmente wird von einer durch die Gruppe bestimmten überall dichten Skala von $-\infty$ bis $+\infty$ gemessen, und auf jeder dieser Skalen ist die Gruppe die Additionsgruppe der reellen Zahlen. Die nicht zu diesen Segmenten gehörigen Punkte bleiben bei der Gruppe invariant.

Eine eingliedrige Gruppe des geschlossenen Continuums ist entweder eine Rotationsgruppe, oder wird durch Ausscheidung eines festen Punktes zu einer solchen des offenen Continuums.

Wir gehen über zur Analyse der *zweigliedrigen* Gruppen, und fangen an, von ihren Infinitesimaltransformationen zwei solche zu bestrachten, für die ein Transformationssegment der einen eines der anderen teilweise überdeckt. Wir nennen die von diesen Infinitesimaltransformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen g und g_1, und zeigen zunächst, dass in dem genannten Segmente von g nur *ein* fester Punkt von g_1, den wir B nennen wollen, liegen kann. Sodann wählen wir die Skala, welche in dem Segmente g zur Additionsgruppe macht, als eine X-Coordinatenaxe mit B zu ihrem Anfangspunkte, und construieren die Kurve $y=f_h(x)$, wo zu jedem x die Schiebung des entsprechenden Punktes durch die Transformation h aus g_1 als y genommen wird. Für variierendes h liegen die verschiedenen Kurven $y=f_h(x)$ gänzlich ausserhalb von einander mit Ausnahme des einzigen gemeinschaftlichen Punktes B.

Aus den Eigenschaften der zweigliedrigen Gruppe leiten wir her, dass jede Kurve

$$y=f_h(x+c)-f_h(c)$$

zum Büschel $y=f_h(x)$ gehört.

Man kann jetzt weiter zeigen, dass die Kurven $y=f_h(x)$ entweder gerade Linien sind, oder ihre Differenzenquotienten alle zusammen mit x steigen, oder aber alle zusammen mit x abnehmen, und hieraus kann gefolgert werden, dass die Kurven in jedem ihrer Punkte sowohl einen oberen wie einen unteren Differentialquotienten besitzen.

Die oberen und die unteren Differentialquotienten könnten noch verschieden sein, aber indem man bemerkt, dass der Unterschied der Transformationen aa_1 und a_1a auch eine Transformation der Hauptgruppe sein muss, zeigt man, dass die Kurven $y=f_h(x)$ keinen Knick aufweisen können.

Nachdem dies erreicht, kann man zeigen, dass die Gruppe g_1 auf der Additionsskala der Gruppe g von Infinitesimaltransformationen erzeugt wird, und dass die diese Infinitesimaltransformationen messenden Funktionen von x stetig sind; so dass wir jede Schiebung $u\ (x)$ der Hauptgruppe schreiben können:

$$u(x)=u(x_1)\left\{\frac{\psi(x)+a}{\psi(x_1)+a}+\eta_u(x)\right\}$$

wo $\psi\ (x)$ eine stetige Funktion ist, und η_u mit u verschwindet.

Indem man von neuem die Gruppeneigenschaft heranzieht, findet man, dass jeder Differenzenquotient der Funktion $\psi(x)$ die Form $a\psi(x)+b$ haben muss, also ist die Menge der Differenzenquotienten gleichmässig stetig, und hieraus folgt [1] die Differenzierbarkeit der Funktion $\psi(x)$, in der wir somit die Differentialgleichung

$$\frac{d\psi}{dx}=a\psi+b$$

aufstellen können. aus der man schliesslich zu folgendem Resultat über die Gestalt der Gruppe in der Transformationsmannigfaltigkeit gelangt:

Durch eine zweigliedrige Gruppe des offenen oder geschlossenen Continuums wird eine endlich oder abzählbare Menge von Segmenten bestimmt; jedes dieser Segmente wird von einer durch die Gruppe bestimmten Skala gemessen von $-\infty$ nach $+\infty$, derart, dass auf jeder dieser Skalen die Gruppe entweder jene der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen, oder jene der Addition der reellen Zahlen ist. Die nicht zu diesen Segmenten gehörigen Punkte bleiben bei der Gruppe invariant [2].

Die *dreigliedrigen* Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit werden gefunden aus der Bemerkung, dass die eingliedrige Untergruppe, die übrig bleibt, wenn man zwei nicht zusammen fest bleibenden Punkte P und Q festhält, sich ergänzen lassen muss, sowohl zu einer zweigliedrigen Untergruppe für P fest und Q stetig beweglich, als zu einer zweigliedrigen Untergruppe für P stetig beweglich und Q fest. Dies gibt eine Beziehung zwischen den Skalen der beiden zweigliedrigen Untergruppen; setzt man noch beide Skalen in Beziehung zu der einer dritten zweigliedrigen Untergruppe, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Durch eine dreigliedrige Gruppe des offenen Continuums wird eine endlich oder abzählbare Menge von Segmenten bestimmt; in jedem dieser Segmente ist die Gruppe entweder eine periodisch-projektive Gruppe mit unendlich vielen Perioden; oder eine Gruppe von Addition und Multiplikation, oder eine Additionsgruppe. Die nicht zu diesen Segmenten gehörigen Punkte bleiben bei der Gruppe invariant.

Eine dreigliedrige Gruppe des geschlossenen Continuums wird entweder durch Ausscheidung eines invarianten Punktes zu einer solchen des offenen Continuums, oder ist eine rotatorisch- projektive Gruppe, oder aber eine einfache projektive Gruppe.

Die Umöglichkeit einer viergliedrigen Gruppe zeigt sich durch die Bemerkung, dass in der zweigliedrigen Untergruppe, die durch Festhaltung zweier nicht zusammen

(1) Verslag Akademie Amsterdam, XVII, S. 38.

(2) Wir sehen also, dass bei der axiomatischen Definition der Rechnungsoperationen auf dem Continuum nach Aufstellung der commutativen und assoziativen Eigenschaften der Addition und Multiplikation, nicht noch die volle distributive Eigenschaft zur Bestimmung der Operationen notwendig ist. Diese nämlich sagt aus: $\varphi_\alpha\{f_\beta\}=f_{\varphi_\alpha(\beta)}\{\varphi_\alpha\}$; während die Forderung $\varphi_\alpha\{f_\beta\}=$ $=f_\gamma\{\varphi_\delta\}$ genügt.

fest bleibenden Punkte P und Q entsteht, P und Q einerseits die gleiche Rolle, und andererseits eine verschiedene Rolle spielen müssten. Und wenn viergliedrige Gruppen unmöglich sind, können ebensowenig mehr-als viergliedrige auftreten.

Nach der Bestimmung der zweigliedrigen Gruppen hätte man für die höheren Gruppen auch wie folgt fortfahren können, wobei man auf die LIE'sche Theorie zurückgreift:

Zunächst kann man beweisen, dass in einer gewissen Umgebung der Identität jeder Zustand aus jedem anderen erreicht werden kann durch successive Ausführung einer endlichen Zahl von Transformationen τ, die jede ein solches System σ von Punkten festlassen, dass nach Festhaltung *eines* weiteren Punktes die Gruppe feststehen würde. Nun haben wir aber gesehen, dass die Transformationen τ von Infinitesimaltransformationen generiert sind, und dass zwei dieser Infinitesimaltransformationen, die nur in einem ihrer festgehaltenen Punkte verschieden sind, sich beide auf einer selben Skala als Infinitesimaltransformationen mit differenzierbaren bestimmenden Funktionen lesen lassen. Es gibt also auch eine Skala, in der alle Transformationen τ, also auch die Hauptgruppe selbst, sich lesen lassen als von differenzierbaren Infinitesimaltransformationen generiert. Dann ist aber nach LIE (1) die Gruppe ähnlich mit einer von seinen analytischen Gruppen.

Indes tritt auf diesem Wege die Struktur der höheren Gruppen nur in einer gewissen Umgebung, nicht in der ganzen Transformationsmannigfaltigkeit deutlich hervor.

Um die Gruppen der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in Angriff zu nehmen, haben wir zunächst die Transformationsbereiche der Hauptgruppe und der reduzierten Gruppen zu bestimmen, und auf Grund des JORDAN'schen Kurvensatzes und dessen SCHOENFLIES'scher Umkehrung gelingt es zu zeigen, dass sie sich zusammensetzen aus einer endlichen oder abzählbaren Menge entweder von zusammenhängenden Gebieten, oder von isolierten einfachen Kurvenbogen oder einfachen geschlossenen Kurven, oder aber von isolierten Punkten.

Sodann gelingt es, wenngleich nicht so einfach wie beim Analogon in der eindimensionalen Mannigfaltigkeit, folgenden Satz zu beweisen:

« Hat man nach einander $m+n$ Punkte festgehalten, waren vor ihrer Festhaltung m dieser Punkte in Gebieten, und n in einfachen Kurven beweglich, und bleibt dann schliesslich in der Parametermannigfaltigkeit eine Menge μ, bestehend aus den grössten zusammenhängenden Teilmengen Z_ν (ν variabel), so setzt sich in einer gewissen Umgebung der Identität die Parametermannigfaltigkeit zusammen aus gewissen grössten zusammenhängenden Teilmengen J_ν. Jedes J_ν ist ein gewöhnlicher $(2m+n)$-dimensionaler Raum im entsprechenden Z_ν. Weiter gehört zu jedem Z_ω, das Grenzmenge der Reihe $Z_1, Z_2, \dots$, ein J_ω, das Grenzmenge der Reihe $J_1, J_2, \dots$ ist ».

Auch lässt sich beweisen, obgleich wieder umständlicher als für die eindimensionale Mannigfaltigkeit, dass man stets durch Festhaltung einer endlichen Zahl von Punkten die Gruppe festsetzen kann, und kann man also übergehen zur Untersuchung der *letzen reduzierten Gruppe*, die durch Festhaltung noch eines Punktes nur

(1) Theorie der Transformationsgruppen III. S. 365-369.

noch isolierte Punkte in der Parametermannigfaltigkeit übrig lässt. Die zusammenhängenden Bestandteile der P. M. dieser Gruppe sind entweder einfache Kurven oder zweidimensionale Gebiete. In ersten Falle findet man leicht entweder die eingliedrige Translationsgruppe mit im allgemeinen offenen Kurven als Transformationsbereichen, die für alle zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten auftreten kann, und bei der die Distribution der festbleibenden Mengen noch sehr verschiedenartig sein kann, oder die eingliedrige Rotationsgruppe mit einander umschliessenden geschlossenen Kurven als Transformationsbereichen, die immer alle zusammen durchrotiert werden.

Im zweiten Falle ist die Existenz der Infinitesimaltransformationen nicht so leicht nachzuweisen. Man kann aber zunächst durch Heranziehung der Parametergruppe $T'_a = T_x^{-1}\, T_a\, T_x$ zeigen, dass jede Transformation sich halbieren lässt, und sodann durch ziemlich schwierige Betrachtungen, welche sich in ausgiebigster Weise auf die SCHOENFLIES'sche Theorie der Analysis Situs stützen, dass diese von einer Transformation und ihren unbeschränkt fortgesetzten Halbierungen erzeugte Gruppe eine Translations- oder Rotationsgruppe ist, wie wir oben discutierten. Dann aber ist es leicht, alle möglichen zweidimensionalen Gruppen aufzuzählen, und wir finden nur solche, die in einer gewissen Umgebung die Struktur der LIE'schen Gruppen aufweisen.

Bei der weiteren Analyse nennen wir eine Gruppe der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $(2n+m)$-*gliedrig*, wenn sie festgesetzt werden kann durch Festhaltung von einem nach dem andern $n+m$ Punkten, deren im Augenblicke ihrer Festhaltung n in Gebieten, m auf Kurven beweglich waren. Die Zahl $2n+m$ zeigt sich für jede Gruppe invariant.

Nachdem die ein-und zweigliedrigen Gruppen, und somit auch die zusammenhängenden Bestandteile der letzten reduzierten Gruppe einer willkürlichen Gruppe, gefunden sind, werden die höheren Gruppen ziemlich leicht durch geometrische Ueberlegungen und Zurückgreifen auf die Resultate für die eindimensionale Mannigfaltigkeit gefunden. Indes würde die Mitteilung der Einzelheiten jetzt zu weit führen. Nur bemerke ich, dass die Construction eines invarianten projektiven Kurvensystems, wie es für jede primitive Gruppe, mit Ausnahme der conformen Gruppe, existiert, eine vornehme Rolle spielt; und dass, so bald bis einschliesslich die viergliedrigen Gruppen gefunden sind, man für die höheren Gruppen auf die LIE'schen Resultate zurückgreifen kann. Diese Erleichterung tritt hier aus analogem Grunde auf, wie bei der eindimensionalen Mannigfaltigkeit für höhere als zweigliedrige Gruppen; aber um eine Einsicht in die Struktur der Gruppen über die ganze Mannigfaltigkeit, nicht nur in einer gewissen Umgebung, zu gewinnen, tut man auch hier besser, von dieser Erleichterung keinen Gebrauch zu machen.

G. TZITZEICA

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE SURFACES

1. On connaît le rôle que jouent dans la théorie des surfaces les équations de Gauss qui donnent les dérivées partielles secondes des coordonnées. Tout problème à caractère métrique relatif aux surfaces peut se réduire à l'étude de ces équations fondamentales.

C'est en étudiant une nouvelle classe de surfaces que j'ai été conduit à envisager une autre manière d'exprimer les dérivées secondes, qui a, il me semble, un certain intérêt, surtout dans la recherche des propriétés qui restent invariables à la suite d'une transformation linéaire qui ne change pas l'origine et le plan de l'infini.

Supposons une surface non développable rapportée à un réseau quelconque de lignes (u, v) tracées sur elle; x, y, z peuvent être regardées comme des intégrales d'un système de la forme:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} &= a\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} &= a'\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + b'\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + c'\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} &= a''\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b''\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + c''\theta \end{aligned}\right.$$

pour lequel les conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites.

Le système (1) définit en même temps que la surface donnée toute autre surface que l'on en déduit par une transformation affine qui ne change pas l'origine:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

de même que le système de Gauss définit une surface à un déplacement près.

Les lignes asymptotiques des surfaces qui correspondent au système (1) sont données par l'équation

$$c\,du^2 + 2\,c'\,du\,dv + c''\,dv^2 = 0$$

et si on prend ces lignes pour courbes coordonnées le système (1) se simplifie et devient:

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} &= a\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\,\frac{\partial\theta}{\partial v} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} &= a'\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b'\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + h\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} &= a''\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + b''\,\frac{\partial\theta}{\partial v} \end{aligned}\right.$$

qui est une sorte de forme normale pour le système (1). C'est surtout ce système (2) qui est commode dans les applications.

C'est ainsi que $b \equiv 0$ ou $a'' \equiv 0$ caractérisent les surfaces réglées, et que les équations $b = 0$, $a'' = 0$ définissent les lignes flecnodales.

2. J'appliquerai le système (2) à la recherche des surfaces S dont la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance de l'origine au plan tangent. La définition des surfaces S donne

$$(3) \qquad \frac{h}{\Delta} = \text{const.}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La relation (3) peut être remplacée par les suivantes

$$(4) \qquad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial u} \quad , \quad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial v}.$$

Or, en tenant compte du système (2), on a

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial u} = a + b' \quad , \quad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial v} = a' + b''$$

et les (4) donnent alors

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u} = a + b' \quad , \quad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} = a' + b''.$$

D'autre part les conditions d'intégrabilité du système (2) donnent

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u} = a \quad , \quad \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} = b'' ;$$

il en résulte

$$a' \equiv b' \equiv 0 . \tag{5}$$

Réciproquement, si les relations (5) sont vérifiées, il en est évidemment de (4) et par conséquent de (3), et alors la surface correspondante est une surface S. On a donc le résultat suivant:

Dans le système (2) *qui correspond à une surface* S *on a* $a' = b' = 0$ *et réciproquement, tout système de trois intégrales linéairement indépendantes d'un système* (2) *pour lequel* $a' = b' = 0$ *définit une surface* S.

Il résulte de là que les surfaces S se trouvent être parmi les plus simples surfaces définies à l'aide d'un système (2); d'ailleurs les surfaces les plus simples de la géométrie — les surfaces du second ordre à centre — font partie de cette classe de surfaces.

Il en résulte encore que ces surfaces se changent en d'autres de la même classe à la suite d'une transformation affine qui laisse invariable l'origine.

Quelle est la raison de cette propriété dont jouissent ces surfaces définies à l'aide d'une propriété essentiellement métrique? C'est là une question à laquelle je donnerai deux réponses, une générale, l'autre en quelque sorte locale.

a) Commençons par la première. Considérons une surface quelconque Σ et une transformation affine qui ne change pas l'origine; Σ devient Σ'. Soient M et M' les points correspondants, K et K' les courbures totales de Σ et Σ' en M et M', p et p' les distances de l'origine aux plans tangents en M et M'. On a alors

$$\frac{\mathrm{K}}{p^4} : \frac{\mathrm{K}'}{p'^4} = \text{const.}$$

C'est là l'origine générale de la propriété des surfaces S que nous avons déduite du système (2).

b) Passons maintenant à l'explication locale. Il est clair que, les surfaces S restant des surfaces S après une transformation affine, leur définition doit pouvoir être remplacée par une définition où il n'entre pas d'autres éléments métriques que le plan de l'infini. Cette nouvelle définition est différente selon que la surface S est réglée ou non.

Considérons d'abord une surface réglée. Sur chaque génératrice de la surface il y a deux points flecnodaux, c'est-à-dire deux points où l'on peut mener une tangente qui coupe la surface en quatre points. *La surface réglée est une surface* S *dans le cas et seulement dans le cas où les point flecnodaux de chaque génératrice sont jetés à l'infini.*

Les surfaces S réglées jouissent encore d'une propriété qui ne leur est pas caractéristique, mais qui est digne d'intérêt, à savoir: la développable asymptotique de la surface se réduit à un cône dont le sommet est l'origine, c'est-à-dire le point d'où nous avons mesuré la distance p aux plans tangents. Ce qu'il y a d'intéressant c'est que les surfaces réglées les plus générales dont la développable asymptotique est un cône jouissent elles aussi d'une propriété métrique analogue à celle des surfaces S, à savoir: le rapport $\frac{K}{p^4}$ reste invariable le long de chaque génératrice de la surface, mais change d'une génératrice à l'autre. J'appélerai ces dernières surfaces des surfaces réglées à centre, en nommant *centre* le sommet du cône auquel se réduit la développable asymptotique.

Passons maintenant au cas des surfaces S générales. Voici comment on arrive à la définition cherchée. Prenons une ligne asymptotique quelconque d'une surface et attachons-lui la surface réglée engendrée pas les tangentes menées en chaque point M de la ligne considérée à l'autre ligne asymptotique qui passe en M. On a de cette manière deux séries de surfaces réglées attachées aux deux séries de lignes asymptotiques. La surface considérée est une surface S dans le cas et seulement dans le cas où toutes ces surfaces réglées sont à centre commun. C'est là l'explication locale.

3. J'ajoute maintenant qu'à tout système (1) ou (2) on peut faire correspondre un système *adjoint* auquel satisfait la surface polaire réciproque par rapport à une sphère de rayon 1, ou par rapport à une quadrique ayant son centre à l'origine. Ce système adjoint dans le cas du système (2) a la même forme, ce qui est connu, d'après les propriétés duales des lignes asymptotiques, et si on a de plus $a' \equiv b' \equiv 0$, il en est de même pour le systéme *adjoint*. Ceci prouve que les surfaces S restent des surfaces S après une transformation par polaires réciproques.

J'ai étudié le système (2) qui correspond aux surfaces S dans un mémoire qui vient de paraître (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXV, fasc. II). Je me borne d'ajouter ici que l'on peut étudier de la même manière les surfaces telles que le rapport entre la courbure totale et la 4ème puissance de la distance de l'origine au plan tangent reste constant le long de chaque ligne asymptotique de l'un des systèmes, mais varie d'une ligne à l'autre. Le système (2) sera alors caractérisé par $a' \equiv 0$ ou $b' \equiv 0$.

4. Si l'on étudie les propriétés projectives, on prendra à la place du système (2) le système suivant:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} &= l\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + m\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + n\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} &= p\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + q\,\frac{\partial\theta}{\partial v} + r\theta \end{aligned} \right.$$

vérifié par les coordonnées homogènes d'un point de la surface rapportée à ses lignes asymptotiques. C'est ainsi par exemple que, dans le cas des surfaces réglées, on peut réduire le système (6) au système

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = p\,\frac{\partial\theta}{\partial u} + r\theta$$

où

$$p = -\,\mathrm{V}u^2 + \mathrm{V}_1 u + \mathrm{V}_2 \quad , \quad r = \mathrm{V}u + \mathrm{V}_3$$

V , V_1 , V_2 , et V_3 , étant des fonctions de v seulement. La ligne flecnodale est définie par $p = 0$ et on voit ainsi analytiquement que sur chaque génératrice $v = c^{te}$ on a deux points flecnodaux.

G. F. PFEIFFER

DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES EN SÉRIES ENTIÈRES DES VARIABLES INDÉPENDANTES

Quelques mots sur les courbes algébriques:

$$f(x\,,y) = \varphi_n(x\,,y) + \varphi_{n+1}(x\,,y) + \cdots = 0 \tag{1}$$

et puis nous passerons aux surfaces algébriques.

Chaque multiplicateur de la fonction homogène $\varphi_n(x\,,y)$ donne pour les dérivées:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \tag{2}$$

soit deux valeurs finies, soit l'une nulle et l'autre infinie. En utilisant les valeurs finies des dérivées (2) et en faisant dans l'équation (1) des substitutions quadratiques, nous obtiendrons des nouvelles équations, avec lesquelles nous agirons de même (voir HAMBURGER). Nous conclurons que, dans tout point de la courbe algébrique il ne peut exister que trois sortes de développements:

$$\begin{aligned} a)&\quad x = \mathrm{K}(y)\,,\\ b)&\quad y = \mathrm{K}(x)\,,\\ c)&\quad x = \mathrm{Q}(y)\,, y = \mathrm{Q}(x) \end{aligned}$$

où K est la série, ordonnée suivant les puissances entières positives, Q suivant les puissances positives fractionnaires.

Arrivons-en à la question suivante: dans quels points multiples de la surface algébrique:

$$\mathrm{F}(x\,,y\,,z) = \varphi_n(x\,,y\,,z) + \varphi_{n+1}(x\,,y\,,z) + \cdots = 0 \tag{3}$$

l'une des coordonnées peut être développée suivant les puissances entières et positives des deux autres.

Les dérivées partielles à l'origine des coordonnées satisfont au système d'équations, dont la compatibilité équivaut à la séparation d'un multiplicateur linéaire de la fonction homogène $\varphi_n(x, y, z)$. C'est la condition indispensable de l'existence des développements recherchés.

Arretons-nous aux points simples, Bi- et Uni-planaires des surfaces algébriques.

Dans le point simple M(0, 0, 0) de la surface algébrique:

$$\begin{aligned} & x + \{ax^2 + x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z)\} + \\ (4) \qquad & + \{bx^3 + x^2\psi_1(y, z) + x\psi_2(y, z) + \psi_3(y, z)\} + \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

il existe toujours le développement suivant:

$$(5) \qquad x = \omega_2(y, z) + \omega_3(y, z) + \omega_4(y, z) + \cdots$$

Les fonctions $\omega_i(y, z)$ peuvent être trouvées par la formule de Mr. Königsberger pour les différentielles totales des fonctions implicites et par la substitution immédiate, comme le fait Mr. Geck dans sa thèse; nous nous servirons de notre procédé commun à tout notre travail.

Entendant par $f(y, z)$ toute fonction de y, z et en adoptant les significations:

$$(6) \qquad f = f(\alpha, \gamma) \quad , \quad \mathrm{D}f = \beta \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \gamma) + \delta \frac{\partial}{\partial z}(\alpha, \gamma), \ldots$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des grandeurs arbitraires, satisfaisant à l'inégalité:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

nous faisons dans l'équation de la surface (4) et dans la série (5), qui nous appellerons système S, la substitution géneralisée de Mr. Weierstrass:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= x'y', \\ y &= (\alpha + \beta z')\, y', \qquad\qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \\ z &= (\gamma + \delta z')\, y'. \end{aligned}$$

Nous aurons:

$$(8) \qquad (x' + \varphi_2 y') + (\varphi_1 x'y' + \mathrm{D}\varphi_2 y'z' + \psi_3 y'^2) + \cdots = 0,$$

$$(9) \qquad x' = \omega_2 y' + (\mathrm{D}\omega_2 y'z' + \omega_3 y'^2) + \cdots$$

Les coefficients des membres du premier degré des égalités (8), (9) doivent être proportionnels, par conséquant:

$$(10) \qquad \omega_2 = -\varphi_2 \quad ; \quad \omega_2(y, z) = -\varphi_2(y, z).$$

Nous introduisons la nouvelle variable:

$$\xi = x' + \varphi_2 y' = x' - \omega_2 y'.$$

Les égalités (8), (9) s'écriront ainsi:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \xi = \{ \varphi_1 \xi y' + D\varphi_2 y'z' + (-\varphi_1 \varphi_2 + \psi_3) y'^2 \} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

$$(12) \qquad \xi = (-D\varphi_2 y'z' + \omega_3 y'^2) + (-D^2 \varphi_2 y'z'^2 + D\omega_3 y'^2 z' + \omega_4 y'^3) + \cdots$$

Nommons les équations (11), (12) système Σ. Les systèmes S et Σ ont la même forme. La relation du système Σ, analogue à la relation (10), donne la deuxième relation du système S:

$$(13) \qquad \omega_3(y, z) = \varphi_1(y, z)\, \varphi_2(y, z) - \psi_3(y, z).$$

La relation du système Σ, analogue à la relation (13), nous mène a la troisième relation du système S:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \omega_4(y, z) = -\varphi_1^2(y, z)\, \varphi_2(y, z) + \varphi_1(y, z)\, \psi_3(y, z) - \\ - a\varphi_2^2(y, z) + \varphi_2(y, z)\, \psi_2(y, z) - \vartheta_4(y, z). \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nous considérons le développement (5), comme établi.

Si dans un point Bi-planaire M de la surface algébrique:

$$(15) \qquad \begin{aligned} F(x, y, z) = xy + \{ az^3 + z^2 \varphi_1(x, y) + z\, \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) \} + \\ + \{ bz^4 + z^3 \psi_1(x, y) + z^2 \psi_2(x, y) + z\psi_3(x, y) + \psi_4(x, y) \} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \equiv \\ \equiv xy + f_3(x, y, z) + f_4(x, y, z) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

il existe des développements suivant les puissances entières, positives des variables indépendantes, voici comment ils sont:

$$(16) \qquad x = \tilde{\omega}_2(y, z) + \tilde{\omega}_3(y, z) + \tilde{\omega}_4(y, z) + \cdots = (A_1 y^2 + A_2 yz + A_3 z^2) + \cdots$$

$$(17) \qquad y = \tilde{\tilde{\omega}}_2(x, z) + \tilde{\tilde{\omega}}_3(x, z) + \tilde{\tilde{\omega}}_4(x, z) + \cdots = (R_1 x^2 + R_2 xz + R_3 z^2) + \cdots$$

Faisons dans l'équation de la surface (15) et dans la série (16), que nous appellerons système K, la substitution généralisée de Mr. Weierstrass:

$$(18) \qquad \begin{aligned} & \{ \alpha x' + f_3(0, \alpha, \gamma)\, y' \} + \\ & + x' \left\{ \frac{\partial f_3}{\partial x}(0, \alpha, \gamma)\, y' + \beta z' \right\} + \{ f_4(0, \alpha, \gamma)\, y'^2 + Df_3(0, \alpha, \gamma)\, y'z' \} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

$$(19) \qquad x' = \tilde{\omega}_2 y' + (D\tilde{\omega}_2 y' + \tilde{\omega}_3 y'^2) + \cdots$$

Supposons d'abord que $\alpha \neq 0$. Les coefficients des membres du premier degré doivent être proportionnels. Cela donne la première condition d'existence du développement (16):

$$a = 0 \tag{20}$$

et l'expression de la fonction $\omega_2(y, z)$.

Introduisant la nouvelle variable: $\xi = x' - \tilde{\omega}_2 y'$, nous obtiendrons le système Γ de la même forme que le système S. Les relations du système Γ, analogues à celles du système S, donnent les conditions d'existence du développement (16) et les expressions des fonctions: $\tilde{\omega}_2(y, z)$, $\tilde{\omega}_3(y, z), \ldots$

Les conditions d'existence des développements (16), (17), sont les mêmes.

Quand $\alpha = 0$, les résultats obtenue sont justes. Nous nous en convaincrons en appliquant la substitution $x = x'z'$, $y = y'z'$, $z = z'$, au système K:

$$\begin{aligned} x'y' &+ \{ a + \varphi_1(x', y') + \varphi_2(x', y') + \varphi_3(x', y') \} z' + \\ &+ \{ b + \psi_1(x', y') + \cdots\cdots + \psi_4(x', y') \} z'^2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$x' = (A_1 y'^2 + A_2 y' + A_3) z' + \cdots \tag{22}$$

$$y' = (R_1 x'^2 + R_2 x' + R_3) z' + \cdots \tag{23}$$

Les membres inférieurs de l'équation (21) doivent produire les multiplicateurs:

$$x' - A_3 z' \quad , \quad y' - R_3 z'. \tag{24}$$

En prenant les expressions (24) pour les nouvelles variables u, v et en introduisant les symboles:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \left(A_3 \frac{\partial f}{\partial x} + Q_3 \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \Delta^2 f(x, y) &= \frac{1}{1.2} \left(A_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 A_3 R_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + R_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

pouvant être changés de place avec les symboles des dérivées partielles d'après x, y, nous trouverons le système Ξ de la même forme que le système K:

$$\begin{aligned} uv &+ \Big\{ z'^3 (c + \Delta\psi_1 + \Delta^2 \varphi_2) + \\ &+ z'^2 \left[u \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \Delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \Delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + z' \varphi_2(u, v) \Big\} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$u = \{ A_2 v z' + (A_2 R_3 + B_4) z'^2 \} + \cdots \tag{27}$$

$$v = \{ R_2 u z' + (R_2 A_3 + S_4 z'^2) \} + \cdots \tag{28}$$

Les relations du système Ξ, analogues aux première et deuxième conditions d'existence des développements, suivant les puissances entières positives du système K, présentent les troisième et quatrième conditions du système K. Les relations du système Ξ, analogues aux troisième et quatrième conditions d'existence du système K, donnent les cinquième et sixième conditions du système K etc.

En résumé, nous arrivons à cette conclusion:

« Dans un point Bi-planaire il n'existe le développement de la fonction algébrique suivant les puissances entières positives des variables indépendantes que, si le point Bi-planaire se trouve sur une double ligne. Nous avons deux développements ».

En parlant d'un point Uni-planaire M de la surface algébrique:

$$(29) \qquad A) \quad \begin{aligned} & x^2 + \{ax^3 + x^2\varphi_1(y,z) + x\,\varphi_2(y,z) + \varphi_3(y,z)\} + \\ & + \{bx^4 + x^3\psi_1(y,z) + x^2\psi_2(y,z) + x\psi_3(y,z) + \psi_4(y,z)\} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

il se rencontre des expressions compliquées des coefficients de l'équation (29) aux degrés d'x. Les expressions se trouvent être de pareils coefficients des équations, surgissant de l'équation (29) après les substitutions. Citons quelques équations.

Dans l'équation A) nous faisons la substitution (voir ZEUTHEN):

$$(30) \qquad x + \tfrac{1}{2}\varphi_2(y,z) = \dot\xi$$

$$(31) \qquad \dot{A}) \quad \begin{aligned} & \dot\xi^2 + \{a\dot\xi^3 + \dot\xi^2\varphi_1 + \dot\xi\dot\varphi_2 + \dot\varphi_3\} + \\ & + \{b\dot\xi^4 + \dot\xi^3\psi_1 + \dot\xi^2\dot\psi_2 + \dot\xi\dot\psi_3 + \dot\psi_4\} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Dans l'équation $\dot{A}$) — la substitution:

$$(32) \qquad \dot\xi + \tfrac{1}{2}\dot\psi_3(y,z) = \bar\xi,$$

$$(33) \qquad \bar{A}) \quad \begin{aligned} & \bar\xi^2 + \{a\bar\xi^3 + \bar\xi^2\varphi_1 + \bar\xi\bar\varphi_2 + \bar\varphi_3\} + \\ & + \{b\bar\xi^4 + \bar\xi^3\psi_1 + \bar\xi^2\bar\psi_2 + \bar\xi\bar\psi_3 + \bar\psi_4\} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Dans l'équation $\bar{A}$) — la substitution:

$$(34) \qquad \bar\xi + \tfrac{1}{2}\bar\vartheta_4(y,z) = \ddot\xi,$$

$$(35) \qquad \ddot{A}) \quad \begin{aligned} & \ddot\xi^2 + \{a\ddot\xi^3 + \ddot\xi^2\varphi_1 + \ddot\xi\ddot\varphi_2 + \ddot\varphi_3\} + \\ & + \{b\ddot\xi^4 + \ddot\xi^3\psi_1 + \ddot\xi^2\ddot\psi_2 + \ddot\xi\ddot\psi_3 + \ddot\psi_4\} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

etc.

Si l'équation (29) peut être satisfaite par la série, ordonnée suivant les puissances entières, positives des variables indépendantes, en voici la forme:

$$(36) \qquad x = \tilde\varphi_2(y,z) + \tilde\varphi_3(y,z) + \tilde\varphi_4(y,z)\cdots$$

Faisons dans l'équation (29) et dans la série (36), que nous appellerons système T, la substitution généralisée de Mr. WEIERSTRASS:

$$(37)\quad \begin{aligned} & y'\varphi_3 + \{ x'^2 + x'y'\varphi_2 + y'z' D\varphi_3 + y'^2 \psi_4 \} + \\ & + \{ x'^2 y' \varphi_1 + x'y'z' D\varphi_2 + x'y'^2 \psi_3 + y'z'^2 D^2\varphi_3 + y'^2 z' D\psi_4 + y'^3 \vartheta_5 \} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 , \end{aligned}$$

$$(38)\quad x' = \tilde{\varphi}_2 y' + (D\tilde{\varphi}_2 y'z' + \tilde{\varphi}_3 y'^2) + (D^2\tilde{\varphi}_2 y'z'^2 + D\tilde{\varphi}_3 y'^2 z' + \tilde{\varphi}_4 y'^3) + \cdots$$

Nous voyons que la première condition d'existence du développement (36) est l'identité:

$$(39)\quad \varphi_3 \equiv 0 ,$$

la deuxième consiste en ce que l'expression: $\varphi_2^2 - 4\psi_4$ doit être un carré parfait:

$$(40)\quad -4\dot{\psi}_3 = \varphi_2^2 - 4\psi_4 = \lambda_2^2 .$$

Les relations (39), (40) donnent la possibilité de trouver la fonction $\tilde{\varphi}_2$:

$$(41)\quad \tilde{\varphi}_2 = -\frac{(\varphi_2 \mp \lambda_2)}{2} .$$

Supposons que:

$$(42)\quad \lambda_2 \neq 0 .$$

En introduisant les nouvelles variables:

$$(43)\quad \begin{aligned} x' + \frac{\varphi_2 + \lambda_2}{2} y' &= \xi \\ x' + \frac{\varphi_2 - \lambda_2}{2} y' &= \eta \end{aligned}$$

nous obtiendrons des égalités (37), (38) deux équations: l'une avec un point Biplanaire à l'origine et avec l'axe z pour droite double, l'autre avec un point simple à l'origine. Ces deux équations déterminent ξ, comme série, ordonnée suivant les puissances entières, positives de η, z'. En comparant ces développements, nous trouverons les conditions d'existence de la série (36), et aussi les fonctions $\tilde{\varphi}_i$.

Il serait intéressant de former le système F, relié au système T de la même manière, que les système Σ, Γ au système S et le système Ξ au système K. Il est possible d'y atteindre si, aux conditions (39), (40) nous faisons dans le système T la substitution généralisée de Mr. WEIERSTRASS dans la direction (α, γ), satisfaisant à la relation:

$$\lambda_2^2 = \varphi_2^2 - 4\psi_4 = 0 .$$

On agit de la même manière pour les cas, où $\lambda \equiv 0$, il faut seulement se servir des substitutions généralisées, plus compliquées, de Mr. Weierstrass:

$$\begin{aligned} x &= x'y'^2, & \qquad x &= x'y'^3, \\ y &= (\alpha + \beta z')\, y', & \qquad y &= (\alpha + \beta z')\, y', \\ z &= (\gamma + \delta z')\, y', & \qquad z &= (\gamma + \delta z')\, y' \end{aligned}$$

etc.

Après avoir examiné la constitution (voir Segre) des points Uni-planaires, admettant le développement de l'une des coordonnées suivant les puissances entières, positives des deux autres, nous trouvons qu'elle peut être représentée par les chèmes, que je me permets de vous soumettre.

Mr. Levi m'a indiqué, qu'il peut obtenir les chèmes par les surfaces approchées, mais je crois que cette méthode ne donnera tout ce que donne l'analyse.

INDICE DEL SECONDO VOLUME

PARTE TERZA.

COMUNICAZIONI.

Sezione I.

Aritmetica, Algebra, Analisi.

SEZIONE II.

Geometria.