JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série ;

Par M. G. DARBOUX.

INTRODUCTION.

Dans son Mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann fait la remarque que la théorie de ces développements a été pour certaines branches de l'Analyse l'origine des plus importants progrès. Après avoir tracé l'historique détaillé de cette grande théorie, après avoir reconnu toute la valeur du Mémoire célèbre de Dirichlet, il fait remarquer cependant que la démonstration de Dirichlet ne s'applique pas à certaines fonctions exceptionnelles, et il cherche à résoudre, sans aucune limitation, le problème suivant : *Une fonction étant définie de la manière la plus générale, quelles sont les conditions qui assurent la*

légitimité de son développement en série trigonométrique ? ou, ce qui est la même chose, *quels sont les caractères distinctifs des séries trigonométriques considérées comme servant de développement à une fonction ?*

Le Mémoire de Riemann a rappelé l'attention sur une question qui paraissait épuisée, qui l'était même pour les fonctions ordinairement employées en Analyse. Plusieurs des élèves de l'illustre géomètre ont publié d'intéressants Mémoires sur cette théorie, en adoptant le point de vue de leur maître et en essayant de résoudre plusieurs difficultés relatives aux fonctions singulières et à la convergence des séries qui les développent.

Le point de départ de mon travail se trouve dans l'examen de questions toutes différentes relatives aux séries trigonométriques, questions qui ont été un peu négligées depuis la publication du Mémoire de Dirichlet. Avant lui, on avait essayé de démontrer la légitimité des développements trigonométriques, en se rendant compte de l'ordre de grandeur des termes de la série. Cette évaluation n'est pas suffisante, comme Dirichlet le fait remarquer ; car il fallait démontrer non-seulement que la série est convergente, mais encore en déterminer la somme, ce qui présentait des difficultés sérieuses, levées pour la première fois et d'une manière complète par l'illustre géomètre.

On connaît les résultats obtenus par Dirichlet. Toute fonction de la nature de celles employées habituellement en Analyse sera développable tant qu'elle restera finie ou même quand elle deviendra, pour une ou plusieurs valeurs de la variable, infinie d'un ordre inférieur à 1, son intégrale restant, par conséquent, finie.

Dans le travail qui va suivre, je donne d'abord des caractères précis pour reconnaître l'ordre de grandeur des termes d'une série trigonométrique, j'applique ensuite les résultats obtenus à l'étude d'une belle question que Laplace s'est proposée dans le *Calcul des probabilités* et pour la solution de laquelle il a donné une méthode célèbre : à savoir l'approximation des fonctions de très-grands nombres qu'on rencontre, soit dans le Calcul des probabilités, soit en Mécanique céleste.

Il est facile de comprendre comment cette question se relie à celle que j'ai indiquée plus haut. La plupart des fonctions de très-grands nombres entrent ou peuvent entrer comme coefficients des puissances élevées de x dans une série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières de la variable. Or il suffit de remplacer dans de telles séries x par $\mathrm{R}e^{i\omega}$ et de considérer ω comme la seule variable pour obtenir une série trigonométrique, et nos méthodes se prêtent alors à l'évaluation approchée des coefficients de la série.

Parmi les applications que j'ai développées, j'indiquerai les suivantes :

1° L'approximation des polynômes de Legendre. Je donne, en particulier, une formule qui permet d'obtenir une expression approchée, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$.

2° L'approximation indéfinie des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de

$$(1 - x^2)^{-\alpha}, \quad (1 + x^2)^{-\alpha}$$

et, en général, de

$$(x - a_1)^{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad (x - a_p)^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ étant quelconques.

3° L'approximation de l'intégrale

$$\int f(x)\varphi^n(x)\,dx.$$

J'étends le résultat de Laplace au cas où les fonctions f et φ sont imaginaires, ainsi que les limites de l'intégrale.

4° L'approximation du terme général de la série de Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\varphi^n(x).$$

5° L'approximation indéfinie des polynômes qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été étudiés par Jacobi et par M. Tchebychef.

Ce dernier résultat m'a permis de résoudre une question intéressante.

Les polynômes de la série hypergéométrique peuvent être employés dans les développements. On peut exprimer une fonction par une série composée de ces polynômes tout à fait semblables à ceux de Legendre, qu'ils comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Cette série est-elle convergente et représente-t-elle la fonction ?

L'étude de cette question m'a conduit à des résultats qui ne se présentent pas dans la théorie des séries trigonométriques. Pour plus de netteté, je les énoncerai ici en supposant que les polynômes qui entrent dans la série soient ceux de Legendre. En général, si la fonction ne devient pas infinie, alors même qu'elle serait discontinue, la série représente la fonction de la même manière que si elle était une série trigonométrique, c'est-à-dire que, si la fonction est discontinue pour $x = \alpha$, la série pour $x = \alpha$ aura pour somme

$$\tfrac{1}{2}[f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)].$$

Mais, si la fonction devient infinie pour l'une des limites extrêmes $+1$ ou -1, la série ne sera convergente que si l'ordre de l'infini est inférieur à $\frac{3}{4}$. Ainsi la fonction $(x-1)^{-\frac{4}{5}}$ ne serait pas développable en une série convergente de fonctions X_n, quoique les intégrales qui déterminent les coefficients de la série conservent un sens déterminé.

Après avoir examiné cette première question, j'étudie les mêmes séries en donnant à la variable des valeurs imaginaires, et je montre que les résultats connus pour les fonctions de Legendre se conservent pour les polynômes les plus généraux. Les courbes qui limitent la région de convergence sont des ellipses homofocales.

J'introduis des fonctions de seconde espèce, analogues à celles que l'on connaît pour les polynômes de Legendre, et je montre en terminant que la méthode employée dans ce Mémoire peut être appliquée à tous les développements ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm [*].

[*] Ce travail a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 7 février 1876.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons une fonction réelle ou imaginaire d'une variable réelle x développée en série trigonométrique

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

On sait que l'on a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Supposons que l'on se propose de développer la dérivée de la même manière; on aura

$$f'(x) = \Sigma(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

où les coefficients sont déterminés de même par les intégrales

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

et, en intégrant par partie,

$$a_n = \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] + nb_n, \quad b'_n = -na_n.$$

Ces dernières formules supposent toutefois que $f(x)$ ne soit pas discontinue et, par exemple, ne passe pas brusquement d'une valeur à une autre quand x varie de zéro à 2π; elles supposent, en outre, que $f(x)$ ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégration. Admettons de plus que $f(x)$ soit une fonction analytique de période 2π. Dans ces conditions, la dérivée sera développable en série

trigonométrique, les formules deviendront

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n,$$

et, comme a'_n, b'_n tendent vers zéro, il en sera de même de na_n, nb_n. En étendant ce raisonnement au cas où l'on considère plusieurs dérivées successives, on obtient la proposition suivante :

Si la fonction périodique $f(x)$ est telle que sa $h-1^{\text{ième}}$ dérivée et, par conséquent, les précédentes demeurent toujours continues et finies, les produits $n^h a_n$, $n^h b_n$ ont pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Examinons maintenant le cas où la fonction réelle ou imaginaire $f(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, mais de telle manière que, si $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, on puisse poser

$$(2) \qquad f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \psi(x),$$

$\psi(x)$ demeurant finie pour $x = a$ et A étant une constante. Cette supposition se réalise dans l'immense majorité des cas, toutes les fois que p est plus petit que 1. Supposons d'abord pour plus de netteté qu'il y ait un seul infini de $f(x)$ entre les limites 0, 2π, alors on aura

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos n(x-t)\,dt}{(t-a)^p} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t)\cos n(x-t)\,dt.$$

$\psi(x)$ demeurant finie, sa dérivée sera développable en série trigonométrique et, par conséquent, la seconde intégrale du second membre donne un terme dont le produit par n tend vers zéro. Évaluons la première. Si l'on y effectue la substitution

$$t = a + \frac{u}{n};$$

elle devient

$$\frac{An^{p-1}}{\pi}\cos n(x-a)\int_{-na}^{2n\pi-na} \frac{\cos u\,du}{u^p}$$
$$+ \frac{An^{p-1}}{\pi}\sin n(x-a)\int_{-na}^{2n\pi-na} \frac{\sin u\,du}{u^p}.$$

Les deux intégrales qui figurent dans cette expression tendent vers des limites finies et déterminées quand n augmente indéfiniment. Ces limites sont

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{u^p}.$$

On voit donc qu'ici la partie principale des coefficients a_n, b_n est de l'ordre de $\frac{1}{n^{1-p}}$, c'est-à-dire que son produit par n^{1-p} est une quantité finie, quoique en général indéterminée, à cause de la présence des facteurs $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$.

Il est du reste facile de déterminer les valeurs des intégrales (3). Elles se déduisent, en particulier, de celles que l'on trouve à la page 197 du *Calcul intégral* de M. Serret, et l'on a

$$(4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p} = [1 + (-1)^p]\,\Gamma(1-p) \sin \frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{n^p} = [1 - (-1)^p]\,\Gamma(1-p) \cos \frac{p\pi}{2}. \end{cases}$$

En général, la détermination que l'on doit prendre pour $(-1)^p$ et qui résulte de celle du radical $(x-a)^p$ est

$$(-1)^p = e^{-pi\pi}.$$

Dans ce cas, les formules (4) se simplifient, et l'on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p} = \frac{\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{u^p} = \frac{-i\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la valeur précise de ces intégrales nous sera inutile; le seul point qu'il nous importe de connaître, c'est qu'elles sont finies.

Supposons maintenant que la fonction, tout en étant développable en série trigonométrique, admette plusieurs infinis, nécessairement

d'ordre inférieur à l'unité. Nous pourrons poser

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a')^{p'}} + \ldots + \psi(x),$$

$\psi(x)$ demeurant toujours finie, et l'on appliquera la méthode précédente à chacun des termes du second membre. La partie principale des coefficients a_n, b_n s'obtiendra en remplaçant $f(x)$ par le terme correspondant à l'infini de l'ordre le plus élevé, et, s'il y en a plusieurs du même ordre, par la somme des termes correspondant à ces infinis de l'ordre le plus élevé.

On peut d'ailleurs étendre la méthode précédente de manière à obtenir une approximation indéfinie de a_n et de b_n.

En effet, il résulte des remarques déjà faites que, si la fonction et ses $p-1$ premières dérivées ne deviennent pas infinies, la $p^{\text{ième}}$ dérivée sera développable en série trigonométrique, les coefficients de $\sin nx$, $\cos nx$ étant $n^p a_n$, $n^p b_n$. Si maintenant cette dérivée d'ordre p devient infinie de l'ordre γ, le produit des coefficients précédents par $n^{1-\gamma}$ demeurera fini quand n croîtra. Ainsi:

Si la première dérivée de la fonction qui devient infinie est la dérivée $p^{\text{ième}}$ et si l'ordre de son plus grand infini est γ, les produits

$$n^{p+1-\gamma} a_n, \quad n^{p+1-\gamma} b_n$$

demeureront finis quand n croîtra indéfiniment.

D'après cela, si l'on peut trouver un groupe de termes ou une fonction $\varphi(x)$ se développant suivant la formule

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \Sigma(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

et tel que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de $f(x) - \varphi(x)$ soit la première qui devient infinie, et qu'elle le devienne de l'ordre γ, on aura

$$a_n - \alpha_n = \frac{h}{n^{p+1-\gamma}}, \quad b_n - \beta_n = \frac{h_1}{n^{p+1-\gamma}},$$

h, h_1 désignant des quantités finies; α_n, β_n représentent donc a_n, b_n avec une approximation marquée par l'exposant $p+1-\gamma$.

Toutes les remarques qui précèdent sont bien simples, et la méthode précédente paraît au premier abord peu susceptible d'applications étendues. Nous espérons cependant que la suite de ce travail montrera qu'elle valait la peine d'être étudiée et proposée.

Une remarque générale peut d'ailleurs nous faire prévoir le succès de la méthode. La plupart des fonctions de très-grands nombres qu'on a à évaluer figurent comme coefficients dans les séries ordonnées suivant les puissances de la variable; or les rapports qui existent entre ces séries et les séries trigonométriques sont bien connus. Dans le développement

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n,$$

il suffit de remplacer la variable z par $Re^{i\omega}$, R et ω étant le module et l'argument de z, pour obtenir une série trigonométrique d'une variable réelle ω, R étant considéré comme constant, c'est-à-dire le point z se déplaçant sur le cercle de rayon R. Ces rapports entre les deux classes de séries ont même été utilisés par M. O. Bonnet pour la démonstration du théorème de Cauchy: le beau *Mémoire sur la théorie générale des séries* couronné par l'Académie de Bruxelles contient, en effet, la démonstration de la proposition suivante:

Si une fonction $f(z)$ est finie et uniforme à l'intérieur d'un cercle et que, sur le cercle même, elle soit développable en une série trigonométrique ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'argument, elle sera développable à l'intérieur du cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable z.

Cette proposition permet l'étude d'une question qu'on laisse en général de côté quand on s'occupe du développement des fonctions suivant les puissances entières de la variable. La série qui développe $f(z)$ étant supposée convergente pour tous les points situés à une distance moindre que R de l'origine, que deviendra la série pour un point situé sur le cercle même de convergence? Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est développable en série trigonométrique, la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite; elle cessera de l'être dans le cas contraire.

Cette remarque générale est confirmée par l'étude des cas parti-

culiers; ainsi la fonction $\log(1+z)$ se réduit sur le cercle de convergence à

$$\frac{i\omega}{2} + \log 2i + \log\sin\frac{\omega}{2},$$

et cette fonction est développable en série trigonométrique. Donc la série qui développe $\log(1+z)$ demeurera convergente et représentera la fonction, même sur le cercle de rayon 1. Il en est de même pour $\operatorname{arctang} x$, $\arcsin x$. Au contraire, la série du binôme qui développe $(1+z)^m$ ne sera pas toujours convergente sur le cercle limite. Si la partie réelle de m est négative et supérieure à l'unité en valeur absolue, $(1+z)^m$ deviendra infinie d'un ordre supérieur à 1 pour $z=-1$ et par conséquent ne sera pas développable en série trigonométrique convergente. Ainsi la série du binôme ne demeurera convergente sur le cercle limite que si la partie réelle de m est supérieure à -1, ce qui est conforme aux résultats trouvés par Abel.

Imaginons d'après cela qu'étant donnée une série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{5}$$

ordonnée suivant les puissances de z, on veuille obtenir l'évaluation approchée du coefficient a_n pour n très-grand. Voici la méthode que l'on pourra suivre et qui réussit pour la plupart des fonctions que l'on a à considérer dans cette théorie.

Remarquons d'abord que, si R est le rayon du cercle de convergence, on aura

$$\lim a_n (R-h)^n = 0,$$

$R-h$ désignant un module quelconque inférieur à R. Quant à la limite de $a_n R^n$, elle dépend de la nature des séries et peut être nulle, finie, indéterminée, infinie.

Supposons d'abord que la convergence de la série cesse au delà du cercle de rayon R, parce que la fonction $f(z)$ admet sur le cercle de convergence un ou plusieurs points à *discontinuité polaire*, c'est-à-dire pour lesquels la fonction inverse $\frac{1}{f(z)}$ demeure finie et continue. Considérons d'abord le cas où il y a un seul point de ce genre. Soit α la valeur de z correspondant à ce pôle : on pourra poser, comme on sait,

$$f(z) = \frac{A_0}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1}{(\alpha - z)^{h-1}} + \cdots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z), \tag{6}$$

$\varphi(z)$ demeurant finie pour $z = \alpha$ et étant par conséquent développable en une série

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n,$$

convergente dans un cercle de rayon ρ plus grand que R. En développant chacun des termes $\frac{A_i}{(\alpha - z)^{h-i}}$ suivant les puissances de z et égalant les coefficients de z^n dans les deux membres de l'équation (6), on aura

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)$$
$$+ \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n.$$

Or la série qui développe $\varphi(z)$ étant convergente dans un cercle de rayon $\rho > R$, on a, en désignant par $\rho - k$ un nombre inférieur à ρ, mais supérieur à R,

$$\lim (\rho - k)^n b_n = 0,$$

et par conséquent

$$b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n},$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} a_n \alpha^n = {} & \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)\ldots(n+h-1) \\ & + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots \\ & + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + \varepsilon_n \left[\frac{\alpha}{(\rho - k)}\right]^n, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et ce développement se compose :

1° D'une suite de termes qui sont par rapport à n des ordres de

$$n^h, \quad n^{h-1}, \quad \ldots, \quad n, \quad n^0;$$

2° Du terme

$$\varepsilon_n \left(\frac{\alpha}{\rho - k}\right)^n,$$

qui est infiniment petit par rapport à toute puissance de $\frac{1}{n}$, puisque le module R de α est inférieur à $\rho - k$.

Si l'on demande seulement le premier terme de l'expression approchée de a_n, on aura

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)(1+\varepsilon),$$

ou plus simplement

$$a_n = \frac{A_0 n^{h-1}}{\alpha^{n+h}}(1+\varepsilon'),$$

ε, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il est clair que la méthode s'applique au cas où la fonction $f(z)$ possède plusieurs points à discontinuité polaire sur le cercle de convergence. On pourra alors poser

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-\alpha)^h} + \frac{A_1}{(z-\alpha)^{h-1}} + \ldots + \frac{B_0}{(z-\beta)^k} + \frac{B_1}{(z-\beta)^{k-1}} + \ldots + \varphi(z),$$

et l'on montrera comme précédemment que le développement de $\varphi(z)$ donne des termes d'ordre nul qu'on peut négliger, par rapport à ceux qui proviennent du développement des termes simples $\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}\cdots$ Si l'on veut avoir le premier terme seul de l'expression approchée de a_n, on pourra se borner à considérer celui des termes

$$\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}, \quad \frac{B_0}{(z-\beta)^k}, \quad \ldots,$$

pour lequel l'exposant du dénominateur est le plus grand, ou, s'il y en a plusieurs de même exposant, le groupe des termes correspondant à l'exposant le plus élevé.

Tout ce qui précède est, on le voit, un corollaire des beaux résultats que cette partie de l'Analyse doit à Cauchy. De même que, pour discuter la convergence d'une série, il faut reconnaître quels sont les points de discontinuité de la fonction qu'elle développe, de même ici la recherche de la partie principale des coefficients de la série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le cercle de convergence.

J'examinerai maintenant le cas ou la fonction admet sur le cercle de convergence une discontinuité analogue à celle des radicaux algébriques. Supposons que, α étant la valeur de z à laquelle correspond cette discontinuité, on ait

$$(7)\qquad f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ désignant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$ et k un nombre *fractionnaire positif ou négatif*. En développant $\varphi(z)$ suivant les puissances de $z-\alpha$, on pourra écrire

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha) + (z-\alpha)\varphi'(\alpha) + \ldots + (z-\alpha)^{p-1}\frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1} + (z-\alpha)^p \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ étant de même nature que $\varphi(z)$, et par suite

$$f(z) = \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1}\ldots$$
$$+ \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1} + (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z),$$

égalité que l'on pourra écrire

$$(8)\qquad f(z) - U_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z),$$

en posant, pour abréger,

$$U_p = \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \ldots + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{p+k-1}.$$

Dans la formule (8), les deux membres sont deux expressions différentes d'une même fonction. Si l'on développe U_p suivant les puissances de z en une série

$$U_p = \Sigma a'_n z^n,$$

le développement de cette fonction sera

$$(9)\qquad f(z) - U_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)z^n.$$

De la première expression de la fonction $f(z) - U_p$, il résulte que ce développement sera convergent à l'intérieur du cercle de rayon R, comme celui de $f(z)$, et que d'ailleurs cette fonction ne pourra devenir infinie ou discontinue sur le cercle de convergence que pour $z=\alpha$. Si nous avons pris p quelconque, mais assez grand pour que $p+k$ soit positif, il ressort de la deuxième expression de $f(z) - U_p$ que cette fonction ne deviendra pas infinie pour $z=\alpha$, et par conséquent que son développement ne cessera pas d'être convergent sur le cercle-limite.

Posons

$$z = \mathrm{R}e^{i\omega},$$

la série (9)

$$(10)\qquad (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)\mathrm{R}^n e^{ni\omega}$$

deviendra une série trigonométrique, et il est aisé de trouver l'ordre de grandeur de ses coefficients. Désignons par e le plus grand entier contenu dans $p+k$, on aura

$$p + k = e + f,$$

f étant la partie fractionnaire. La première dérivée de

$$(z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z),$$

qui deviendra infinie, sera celle de l'ordre $e+1$, et elle deviendra infinie de l'ordre de

$$(z-\alpha)^{f-1}$$

pour $z=\alpha$, les coefficients de la série (10) seront par conséquent, d'après ce qui a été démontré, de l'ordre de

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{e+f+1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{p+k+1}.$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$(a_n - a'_n)\mathrm{R}^n = \frac{h}{n^{p+k+1}},$$

h étant une quantité finie, quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, $a'_n \mathrm{R}^n$ représente $a_n \mathrm{R}^n$ avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$. On voit donc que, toutes les fois qu'on prendra un terme de plus dans U_p, c'est-à-dire qu'on ajoutera une unité à p, on aura un nouveau terme de la formule d'approximation des coefficients de la série qui développe $f(z)$.

Il est très-facile de trouver l'expression développée de a'_n. Si nous nous reportons à l'expression de U_p, et que nous développions chaque terme suivant la formule du binôme, nous aurons

$$\begin{aligned}\alpha^n a'_n = {} & \varphi(\alpha)(-1)^k \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \\ & \varphi'(\alpha)(-1)^k \frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{1.2\ldots n} + \frac{\varphi''(\alpha)}{1.2}(-1)^k \frac{(k+2)\ldots(k-n+3)}{1.2\ldots n} \\ & + \ldots + (-1)^{p+k-1} \frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{1.2\ldots n} \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}.\end{aligned}$$

Le rapport de chacun des termes au précédent est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La partie principale de l'expression approchée des coefficients proviendra donc du terme en $\varphi(\alpha)$. Il est du reste facile de reconnaître l'ordre de chacun des termes. En effet, si l'on supprime le dernier en $\varphi_{p-1}(\alpha)$, c'est-à-dire si l'on change p en $p-1$, l'erreur commise sur $a_n\alpha^n$, en prenant $a'_n\alpha^n$ qui était de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$ deviendra de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k}}$. Donc le dernier terme en $\varphi_{p-1}(\alpha)$ est précisément de ce dernier ordre, et par conséquent le premier en $\varphi(\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n^{k+1}}$. C'est du reste ce qu'on établirait aussi en substituant aux factorielles leurs expressions approchées.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Si sur le cercle de convergence la fonction $f(z)$ devient discontinue

à la manière des radicaux algébriques, et que l'on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, la partie principale des coefficients de $f(z)$ s'obtiendra en substituant au développement de cette fonction celui de

$$\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k;$$

si l'on veut obtenir une approximation plus grande, on remplacera $f(z)$ par

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{1.2}\varphi''(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

l'erreur commise étant toujours de l'ordre du dernier terme ajouté dans l'expression approchée, multiplié par $\frac{1}{n}$.

Il est clair que si, sur le cercle de convergence, il y a plusieurs points de la nature précédente, il faudra les examiner séparément et réunir les termes provenant de chacun d'eux.

II.

Appliquons les propositions précédentes à la fonction X_n de Legendre, qui naît du développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \Sigma t^n \mathrm{X}_n,$$

et supposons d'abord la variable x réelle et comprise entre -1 et $+1$. Posons $x = \cos\varphi$, la fonction précédente devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$

pour $t = e^{i\varphi}$, $t = e^{-i\varphi}$; car on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-te^{-i\varphi})}}.$$

En appliquant les règles données, on voit que, pour avoir l'expression approchée de X_n, il suffira de substituer à la fonction proposée la somme des deux termes

$$\frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-e^{-2i\varphi})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-te^{-i\varphi})(1-e^{2i\varphi})}},$$

que l'on développe très-facilement suivant les puissances de t; on aura ainsi

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{e^{ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{-2i\varphi}}} + \frac{e^{-ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{2i\varphi}}}\right);$$

ou, en réduisant et remplaçant le facteur numérique par son expression approchée $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$,

$$(11) \qquad X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right],$$

l'erreur commise étant de l'ordre de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. C'est l'expression connue de Laplace.

La même méthode s'applique au cas où x est plus grand que 1 ou imaginaire. Posons, en effet,

$$x + \sqrt{x^2-1} = \xi,$$

et choisissons le signe du radical, de telle manière que le module de ξ soit plus grand que 1. Cela est possible dans le cas actuel. En effet, aux deux déterminations du radical correspondent pour ξ deux valeurs dont le produit est l'unité, et ces valeurs n'ont l'unité pour module que si x est compris entre -1 et $+1$. Dans tous les autres cas, l'une d'elles a un module supérieur à l'unité. Ce module est même susceptible d'une représentation géométrique élégante. C'est la somme

des deux demi-axes de l'ellipse ayant pour foyers les deux points $1, -1$ et passant par le point x.

La plus petite valeur de t qui annule $\sqrt{1-2tx+t^2}$ est $\frac{1}{\xi}$. L'expression $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ sera donc développable en série convergente, tant que le module de t sera inférieur ou égal à $\frac{1}{\xi}$ sur le cercle de convergence; elle deviendra infinie pour $t = \frac{1}{\xi}$ et comme le terme simple

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t\xi)(1-\xi^{-2})}}.$$

La partie principale de $\frac{X_n}{\xi^n}$ sera donc le coefficient de t^n dans le développement de ce terme suivant les puissances de t, et l'on aura

$$(12) \qquad X_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\left(1+\frac{p}{n}\right),$$

p demeurant une quantité finie lorsque, ξ restant fixe, n croît indéfiniment.

La même méthode s'applique aux polynômes très-importants qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été considérés par Jacobi dans un travail posthume, inséré au tome 56 du *Journal de Crelle*, et par M. Tchebychef, dans un Mémoire de 1869 (Académie de Saint-Pétersbourg). On sait que la série hypergéométrique est définie par l'équation

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p}\frac{\beta\ldots(\beta+p-1)}{\gamma\ldots(\gamma+p-1)}x^p + \ldots.$$

Elle se termine si l'un des éléments α, β qui y entrent symétriquement est un nombre entier négatif. Jacobi donne, pour les polynômes qu'on obtient ainsi, l'expression élégante

$$(13) \quad X_n = F(\alpha+n, -n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}.$$

Il en fait connaître une fonction génératrice qui a été aussi employée par M. Tchebychef. On a, en remplaçant, pour abréger, $1-2x$ par z,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\left(t-1+\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\gamma-1}\left(1+t-\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\alpha-\gamma}}{(2t)^{\alpha-1}\sqrt{1-2tz+t^2}}=\mathrm{H}\\ &\quad=\sum\frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}t^n\mathrm{X}_n.\end{aligned}\right.$$

Or supposons x comprise entre zéro et 1, et posons $x=\sin^2\varphi$. Le premier membre est développable en série convergente, tant que le module de t est inférieur à l'unité, et il devient infini de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour deux points du cercle de convergence correspondant aux valeurs $t=e^{2i\varphi}$, $t=e^{-2i\varphi}$. Appliquons la règle de l'article précédent. On aura les valeurs approchées des coefficients de la série en substituant à H la somme du terme

$$\mathrm{A}=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(e^{2i\varphi}-1)^{\gamma-1}(e^{2i\varphi}+1)^{\alpha-\gamma}}{(2e^{2i\varphi})^{\alpha-1}\sqrt{(1-te^{-2i\varphi})(1-e^{-4i\varphi})}},$$

correspondant au premier infini, et du terme A′ correspondant au second infini, que l'on déduit du précédent en y changeant i en $-i$. Le développement de ces deux termes suivant les puissances de t s'effectue sans difficulté par la formule du binôme, et l'on obtient l'expression approchée du coefficient de t^n,

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}\mathrm{X}_n&=\sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\\&\times\cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]+\frac{p}{n\sqrt{n}}\end{aligned}$$

et, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{X}_n&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}}n^{\frac{1}{2}-\gamma}\sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\\&\cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]+\frac{p_1}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},\end{aligned}\right.$$

expression qui comprend comme cas particulier celle qui a été donnée

pour les polynômes de Legendre. Les dérivées des polynômes généraux X_n étant encore des séries hypergéométriques, on s'assurera aisément que ces expressions approchées peuvent être différentiées jusqu'à un ordre quelconque, mais fixe quand n croîtra; nous avons utilisé cette propriété dans notre Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XIX), pour obtenir les expressions approchées des dérivées des polynômes de Legendre.

Si la variable x est imaginaire ou n'est pas comprise entre zéro et 1, nous poserons encore

$$z=1-2x,\quad z+\sqrt{z^2-1}=\xi=1-2x+\sqrt{4x^2-4x},$$

le signe du radical étant déterminé par la condition que le module de ξ soit supérieur à l'unité. Le développement de H sera convergent tant que le module de t ne dépassera pas $\frac{1}{\xi}$. Sur le cercle de convergence, H aura un seul infini correspondant à la valeur $t=\frac{1}{\xi}$; en substituant donc à H le terme unique

$$\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(1-\xi)^{\gamma-1}(1+\xi)^{\alpha-\gamma}}{2^{\alpha-1}\sqrt{(1-\xi^{-2})(1-t\xi)}},$$

et développant suivant les puissances de t, on sera conduit pour X_n à l'expression approchée

$$(16)\quad \mathrm{X}_n=\frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}}n^{\frac{1}{2}-\gamma}2^{\alpha-1}(1-\xi^{-1})^{\frac{1}{2}-\gamma}(1+\xi^{-1})^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\xi^n\left(1+\frac{p}{n}\right),$$

expression qui se réduit bien à celle que nous avons obtenue pour les polynômes de Legendre quand on y fait $\alpha=\gamma=1$. Elle est, on le voit, de la forme

$$(17)\quad \mathrm{X}_n=\varphi(\xi)n^{\frac{1}{2}-\gamma}\xi^n(1+\varepsilon),\quad \xi=1-2x+\sqrt{4x^2-4x},$$

$\varphi(\xi)$ désignant une fonction indépendante de n et ε une quantité de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

III.

Avant de continuer l'étude des polynômes précédents, nous allons montrer que la méthode que nous avons proposée s'applique à la plupart des exemples traités par Laplace et nous nous proposerons d'abord de trouver l'expression approchée, pour n très-grand, de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de l'expression $(1-x^2)^{-\alpha}$. Cette dérivée, divisée par $\Gamma(n+1)$, est le coefficient de t^n dans le développement de

$$[1-(x+t)^2]^{-\alpha},$$

suivant les puissances de t. Or ce développement sera évidemment convergent tant que le module de t sera inférieur au plus petit des modules des binômes $1-x$, $1+x$. Supposons d'abord que ces deux derniers modules ne soient pas égaux et que le plus petit soit celui de $1-x$. L'expression précédente pouvant s'écrire

$$(1-x-t)^{-\alpha}(1+x+t)^{-\alpha},$$

pour avoir l'expression approchée des coefficients des puissances de t dans son développement, il faudra, d'après la règle donnée, la remplacer par le terme simple

$$(1-x-t)^{-\alpha}2^{-\alpha},$$

qu'on obtient en remplaçant t par $1-x$ dans le second facteur. On obtient ainsi

$$\frac{1}{1\,.\,2\,..\,n}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}\,1\,.\,2\ldots n}\,2^{-\alpha}\left(1+\frac{p}{n}\right),$$

p ayant la signification déjà donnée, ou, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{(1-x)^{n+\alpha}}(1+\varepsilon).$$

Si l'on fait $\alpha=\frac{1}{2}$, on retrouve le résultat de Laplace, résultat auquel ce

grand géomètre parvient par une analyse assez longue, et moins rigoureuse que la précédente.

Il nous reste à traiter le cas où les modules de $1-x$, $1+x$ sont égaux, c'est-à-dire où x est de la forme zi, z étant réel. Alors il y aura deux infinis sur le cercle de convergence, et il faudra réunir au terme précédent celui qu'on obtient en changeant dans l'équation x en $-x$. On a ainsi

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+\alpha}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+\alpha}}\right].$$

On voit que, si l'on change x en ix, on aura, pour toutes les valeurs réelles de x,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x^2)^{-\alpha}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{i^n}{(1-ix)^{n+\alpha}}+\frac{(-i)^n}{(1+ix)^{n+\alpha}}\right].$$

La méthode s'applique sans modification au produit suivant :

$$(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_p)^{m_p},$$

et, sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que l'on sera conduit à la formule suivante :

$$(18)\quad \frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_p)^{m_p}=(a_1-a_2)^{m}\ldots(a_1-a_p)^{m_p}\frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1},$$

où a_1 désigne celle des quantités $a_1,\ldots,a_p$ la plus rapprochée de x. S'il existe plusieurs racines également rapprochées, on prendra celle qui correspond à l'exposant le plus petit. S'il y en a plusieurs également rapprochées de x avec le même exposant, il faudra faire la somme des termes que l'équation (18) donnerait pour chacune d'elles. Du reste, ces résultats pourraient se justifier, quoique d'une manière moins simple, par l'application de la règle de Leibnitz relative à la différentiation d'un produit, et ils sont pleinement confirmés par ce que l'on sait sur les dérivées des fractions rationnelles.

Nous allons maintenant examiner une question tout à fait nouvelle et chercher comment on peut déterminer l'expression approchée du terme général de la série de Lagrange.

Soit

$$(19)\qquad y = x + t\varphi(y)$$

une équation définissant y en fonction de x et de t. On aura

$$(20)\qquad f(y)\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}\varphi^n(x)f(x).$$

La série sera convergente tant que t sera inférieur au plus petit des modules pour lesquels la racine qu'on développe cesse d'être uniforme. Supposons, comme cela a lieu dans le plus grand nombre des cas, que la convergence cesse parce que la racine devient double. Supposons que, pour $t = h$, y devienne égal à β et racine double. On aura

$$(21)\qquad \beta = x + h\varphi(\beta), \quad 1 = h\varphi'(\beta).$$

Pour avoir l'expression approchée de y dans le voisinage de β, posons

$$(22)\qquad y = \beta + z, \quad t = h + u,$$

z et u étant infiniment petites. Substituons ces valeurs dans l'équation proposée, et développons en série, nous aurons, en nous bornant au premier terme,

$$z^2 = -\frac{2u\varphi(\beta)}{h\varphi''(\beta)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - t\varphi'(\beta)} = -\frac{1}{hz\varphi'(\beta)},$$

d'où, en substituant et remplaçant u par $t - h$ et h par sa valeur déduite des formules

$$f(y)\frac{dy}{dx} = \frac{f(\beta)\varphi'(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)[1 - t\varphi'(\beta)]}}.$$

Ainsi la fonction qu'on développe devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ sur le cercle de convergence. En la réduisant au terme précédent, que l'on développera suivant les puissances de t, on aura la partie principale

de chaque coefficient. On trouve ainsi

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\frac{f(\beta)\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}},$$

ou bien

$$(23)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon).$$

Si dans cette formule on change n en $n-p$, $f(x)$ en $f(x)\varphi^p(x)$, on a

$$(24)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1-p)}\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi^p(\beta)\varphi'^{n-p+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon').$$

Si, en particulier, on fait $p = 1$, on a le terme général de la série que développe non plus $f(y)\frac{dy}{dx}$, mais $f(y)$.

Ces formules, qui sont nouvelles, me paraissent intéressantes en ce qu'elles font dépendre l'expression approchée d'une fonction de x des valeurs d'une fonction d'une autre variable β.

Si, quand la variable t atteint le module h, il pouvait y avoir plusieurs valeurs de t pour lesquelles la racine qu'on développe devient égale à une autre, il faudrait faire entrer en considération plusieurs termes semblables à ceux que donne la formule (20).

C'est ce qui arrive notamment si, $\varphi(x)$ et x étant réels, β est imaginaire; car supposons que, lorsque t tend vers une valeur h, la racine qu'on développe tende vers la racine double β. Lorsque t tendra vers la valeur h' conjuguée de h, la racine y tendra vers la racine β' double et conjuguée de β. Il faudra donc ajouter au terme que donnent les formules (23), (24) le terme imaginaire conjugué, c'est-à-dire prendre le double de la partie réelle de ce terme.

Laplace a déjà traité par une méthode spéciale l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

que l'on rencontre dans la théorie des planètes.

IV.

Une des applications principales que Laplace traite dans cette théorie de l'approximation des fonctions de très-grands nombres consiste dans la solution de la question suivante : Trouver l'expression approchée de

$$\int u^s u'^{s'} u''^{s''}, \ldots f(x)\, dx$$

lorsque les exposants s, s', ... sont très-grands, u, u', u'', ..., $f(x)$ désignant des fonctions continues quelconques de x. Les exposants s, s', s'' peuvent être mis sous la forme $\alpha n + \beta$, où α et β sont finis et où n est un entier qui seul sera supposé très-grand. On voit que l'on aura à chercher la limite d'une expression de la forme

$$v_n = \int_a^b \varphi^n(x) f(x)\, dx, \tag{25}$$

n étant entier.

On peut trouver beaucoup de développements dont les coefficients contiennent les intégrales précédentes. Par exemple, si l'on considère une fonction $\varpi(x)$ développable suivant la formule de Maclaurin

$$\varpi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

on aura

$$\int_a^b \varpi[t\varphi(x)] f(x)\, dx = a_0 v_0 + a_1 v_1 t + \ldots + a_n v_n t^n + \ldots.$$

Nous choisirons une fonction particulière et nous étudierons le développement

$$\int_a^b \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} v_n t^n. \tag{26}$$

D'après la formule de Wallis, l'expression approchée du développement de $v_n t^n$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Supposons, pour traiter le cas le plus important, que la fonction

$\varphi(x)$ ait un ou plusieurs maxima et que sa plus grande valeur absolue ne corresponde pas à une des limites de l'intégrale. Supposons que cette valeur soit atteinte une seule fois pour $x = \alpha$. S'il n'en était ainsi, on décomposerait l'intégrale en plusieurs autres jouissant de cette propriété. La série

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} t^n \varphi^n(x)$$

sera convergente dans les limites de l'intégration tant que $t\varphi(\alpha)$ aura un module plus petit que l'unité. Multiplions par $f(x)\, dx$ et intégrons, nous retrouverons la formule (26), et nous voyons que le développement en série sera convergent toutes les fois que t sera inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$. Voyons comment l'intégrale devient infinie pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$.

A cet effet, considérons la différence entre cette intégrale et la suivante :

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\, dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)(x-\alpha)^2}{2\varphi(\alpha)}}},$$

En se rappelant que $\varphi(\alpha)$ est un maximum et que, par conséquent, $\varphi'(\alpha)$ est nul, on verra facilement que la différence des deux intégrales demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. En effet, la différence des éléments correspondants peut alors s'écrire

$$\frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha)}}} - \frac{f(\alpha)\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{-\frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}},$$

et en réduisant cette différence de deux fractions à un dénominateur commun on reconnaîtra sans peine qu'elle reste finie pour $x = \alpha$. Ainsi l'intégrale (26) devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\, dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}},$$

et, par conséquent, on aura la partie principale des coefficients de la série (26) en remplaçant l'intégrale du premier membre par le terme précédent. Comme d'ailleurs l'intégrale précédente est la somme de trois autres prises entre les limites suivantes :

$$\int_a^{\alpha-h}, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h}, \quad \int_{\alpha+h}^{b},$$

et que la première et la troisième de ces intégrales demeurent toujours finies, on pourra se borner, pour simplifier l'écriture, à la seconde, où h sera supposé fixe, mais aussi petit qu'on le voudra. Cette intégrale a pour valeur

$$\frac{f(\alpha)}{\mathrm{A}} \log \frac{\mathrm{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \mathrm{A}^2h^2}}{-\mathrm{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \mathrm{A}^2h^2}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}.$$

A sera une quantité réelle, puisque pour tout maximum en valeur absolue $\varphi(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha)$ sont de signes contraires. Si t tend vers $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, le dénominateur de la quantité placée sous le signe logarithmique devient nul. En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$2\frac{f(\alpha)}{\mathrm{A}} \log\left[\mathrm{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \mathrm{A}^2h^2}\right] - \frac{f(\alpha)}{\mathrm{A}} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

La première partie de cette expression demeure finie, et il nous suffira de considérer la seconde

$$\frac{-f(\alpha)}{\mathrm{A}} \log[1 - t\varphi(\alpha)] = -f(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

En la développant suivant les puissances de t, et prenant le coefficient de t^n, nous aurons l'expression approchée des coefficients de la formule (26)

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} v_n = f(\alpha)\frac{\varphi^n(\alpha)}{n}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon),$$

ou, en remplaçant la factorielle du premier membre par son expression approchée,

$$(27) \qquad v_n = \int_a^b f(x)\varphi^n(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}} f(\alpha)\varphi^n(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon').$$

C'est la formule de Laplace. Elle est établie en toute rigueur et ne suppose rien sur la nature de $f(x)$, qui peut être réelle ou imaginaire.

On peut encore obtenir le même résultat par la considération de l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{1 - t\varphi(x)} = v_0 + v_1 t + \ldots + v_n t^n + \ldots.$$

Remarquons d'abord que, si on la décompose en trois

$$\int_a^{\alpha-h}, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h}, \quad \int_{\alpha+h}^{b},$$

la première et la troisième demeurent finies pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et tout se borne à la considération de la seconde, où h est fixe, mais pris aussi petit qu'on le veut. Ainsi nous avons à rechercher une évaluation approchée de

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} \frac{f(x)\,dx}{1 - t\varphi(x)}.$$

Posons

$$1 - t\varphi(\alpha) = u^2, \quad x - \alpha = uz,$$

cette intégrale deviendra

$$\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{uf(\alpha + uz)\,dz}{1 - \varphi(\alpha + uz)\dfrac{1 - u^2}{\varphi(\alpha)}}.$$

En développant l'élément suivant les puissances de u et nous bornant aux deux premiers termes, nous trouvons

$$\frac{1}{u}\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{f(\alpha)\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2} + \int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{z\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\left(f' + \frac{f\varphi'''}{6\varphi}\,\frac{z^2}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\right) + u\int + \ldots,$$

et il serait facile de prouver, comme dans la méthode précédente, que la différence entre l'intégrale proposée et la somme des deux précédentes demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. La première devenant infinie d'un ordre supérieur, nous pouvons négliger l'autre, et le calcul de cette première intégrale nous donne

$$\frac{2f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}\,\text{arc tang}\,\frac{h}{u}\sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}},$$

ou, pour u suffisamment petit,

$$\frac{\pi f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} = \frac{\pi f(\alpha)}{\sqrt{1-t\varphi(\alpha)}}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}.$$

Le développement de ce terme suivant les puissances de t conduit au même résultat que la première méthode. Nous voyons d'ailleurs comment, en continuant le développement suivant les puissances de u, nous aurons autant de termes qu'on le voudra de l'expression approchée.

Il est à remarquer que la formule (27), établie pour n entier, s'applique au cas de n fractionnaire. En effet, soit n' la partie entière de n et posons $n = n' + k$, on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi^{n'}(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n'}}\,f(\alpha)\varphi^{n'}(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon).$$

En remplaçant $f(x)$ par $f(x)\varphi^k(x)$, et remarquant qu'il est indifférent de mettre n' ou n en dénominateur dans le second membre, nous retrouverons la formule (27), étendue au cas de n fractionnaire.

Laplace fait un grand nombre d'applications de cette formule. Nous

indiquerons seulement la suivante. Prenons

$$f(x) = x^{\alpha-1}, \quad \varphi(x) = xe^{-x}.$$

Le maximum de $\varphi(x)$ a lieu pour $x = 1$, et nous aurons

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha-1}e^{-nx}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n^{n+\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,e^{-n}\sqrt{2}$$

ou

$$\Gamma(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

C'est l'expression approchée de Stirling. La présence de l'arbitraire α que nous y laissons est très-commode pour les applications.

Nous avons fait usage plusieurs fois déjà de cette expression approchée pour réduire les factorielles; mais remarquons que nous aurions pu commencer par cette application et que nous ne nous appuyons que sur le résultat

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

déduit de la formule de Wallis. Nous aurions même pu ne pas l'admettre et le déduire de la comparaison entre les deux résultats fournis par les deux méthodes que nous avons données successivement, mais cela n'a pas d'importance.

Avec des modifications convenables, la méthode précédente s'étend aux intégrales prises entre des limites imaginaires ou pour lesquelles $\varphi(x)$ est imaginaire. Reprenons le développement

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-t\varphi(x)}} = \Sigma\,\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\varphi_n t^n,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont maintenant des fonctions imaginaires définies dans une certaine région du plan.

Si l'intégrale est prise entre deux points A et B, la série

$$\frac{1}{\sqrt{1-t\varphi(x)}} = \Sigma\,\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,t^n\varphi_n(x)$$

sera convergente tant que $t\varphi(x)$ aura un module plus petit que l'unité.

Si cette condition est réalisée dans toute l'étendue de la ligne d'intégration, on pourra multiplier par $f(x)\,dx$ et intégrer; la série (29) sera convergente. Il suffit donc, pour que la convergence de cette série soit assurée, que t soit inférieur à l'inverse du module maximum de $\varphi(x)$ sur la ligne d'intégration.

Imaginons maintenant que l'on considère toutes les lignes d'intégration pour lesquelles l'intégrale conserve la même valeur. Il est clair que la ligne la plus avantageuse sera celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, car cette ligne donnera la plus grande valeur de t pour laquelle on sera assuré que la série demeure convergente. Ainsi il faut chercher, parmi toutes les lignes possibles d'intégration, celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, c'est-à-dire celle pour laquelle le module sera un minimum maximorum.

L'étude des modules jouissant de propriétés analogues a été faite à propos de la série de Lagrange, et l'on sait que, s'il en existe, les valeurs de x qui les donnent satisfont à l'équation

$$\varphi'(x) = 0.$$

Supposons donc, en nous plaçant dans cette hypothèse, que la ligne d'intégration passe par le point α, pour lequel on a

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{mod. } \varphi(\alpha) \text{ minimum maximorum.}$$

Alors les raisonnements faits dans le cas des variables réelles subsistent entièrement. Si l'on suit une ligne d'intégration passant par le point α, l'intégrale demeure finie tant que le module de t est inférieur à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et elle ne devient infinie que si l'on a $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$; alors elle devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}}.$$

On est donc conduit à la même règle que dans le cas des variables réelles. La formule (27) s'applique encore aux intégrales imaginaires ainsi considérées, pourvu que les conditions supposées sur la ligne d'intégration puissent être remplies.

Appliquons ces considérations générales à l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,\frac{x^n(1-x)^n}{(x-y)^n}\,dx,$$

où y et $f(x)$ peuvent être imaginaires. On a ici

$$\varphi(x) = \frac{x(1-x)}{x-y}.$$

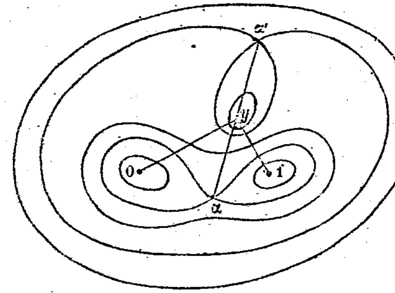
L'équation qui donne α est la suivante :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - y}$$

et l'on en déduit

$$\alpha = y \pm \sqrt{y^2 - y}.$$

Construisons les points correspondants aux deux racines de cette équation.



Si nous représentons sur le plan les points 0, 1, y qui correspondent aux valeurs 0, 1, y de la variable complexe, on prendra sur la bissectrice de l'angle $0y1$ deux longueurs égales $y\alpha$, $y\alpha'$, moyennes proportionnelles entre les deux rayons $0y$, $y1$. Les points α, α' ainsi obtenus représentent les deux racines de l'équation qui détermine α. Représentons, pour plus de netteté, les courbes d'égal module de la fonction

$$\frac{x(1-x)}{x-y}.$$

Ces courbes, pour de très-petites valeurs du module, sont de petits ovales décrits autour des points o, 1. Ces ovales grandissent avec le module et viennent se réunir au point α pour y former une courbe à point double; puis cette courbe continue à grandir jusqu'à ce qu'elle ait un point double en α', et ensuite elle se réduit à un ovale enveloppant le point y, entouré lui-même d'un autre ovale grandissant indéfiniment à mesure que la première se rapproche du point y. La figure montre que le module minimum maximorum, pour toutes les lignes d'intégration allant du point o au point 1, correspond au point α. Nous pouvons maintenant appliquer la formule (27).

On verra sans peine que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant pris de telle manière que le module soit plus grand que 1, on a

$$\alpha = \frac{1-\xi^{-1}}{2}, \quad \alpha - y = \frac{\xi}{4}(1-\xi^{-2}), \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{\xi}, \quad \varphi''(\alpha) = -\frac{8}{\xi(1-\xi^{-2})}.$$

On aura donc pour n très-grand

$$\int_0^1 f(x)\frac{x^n(1-x)^n dx}{(x-y)^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f\left(\frac{1-\xi^{-1}}{2}\right)\xi^{-n}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons, par exemple,

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y},$$

et nous trouverons

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}dx}{(x-y)^{n+1}} \\ &= 2^{2-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{n}}(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{3}{2}}(1+\xi^{-1})^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\xi^{-n-1}(1+\varepsilon).\end{aligned}\right.$$

Nous aurons à faire usage de cette formule.

V

Jusqu'ici nous n'avons recherché que les premiers termes des expressions approchées. Nous allons maintenant appliquer le théorème donné à la fin de l'article Ier, pour obtenir différentes formules d'approximation indéfinie. Rappelons en quelques mots l'énoncé de ce théorème. Si une fonction $f(z)$ est développable en une série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots,$$

convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon R et que la série cesse d'être convergente, parce que la fonction présente sur le cercle limite une ou plusieurs discontinuités, telle que pour l'une quelconque d'entre elles, ayant lieu au point α, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, on aura l'expression approchée de ses coefficients en substituant à la fonction $f(z)$ la somme

$$\Sigma(z-\alpha)^k\left[\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(z-\alpha) + \ldots + \varphi_p(\alpha)\frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\right],$$

étendue à tous les points de discontinuité, en développant chacun des termes de cette somme suivant les puissances de z et rangeant par ordre de grandeur tous les coefficients ainsi obtenus. L'ordre de l'erreur commise sera toujours celui du premier terme qu'on aurait à écrire si l'on voulait obtenir une approximation plus grande.

Appliquons d'abord ce théorème aux polynômes de Legendre, et pour cela considérons leur fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Supposons d'abord x réel et posons $x = \cos\varphi$. Sur le cercle de convergence la fonction deviendra infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour

$$t = e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad t = e^{-i\varphi}.$$

Nous aurons ici

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=(t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}(t-e^{-i\varphi})^{-\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la proposition générale que nous venons de rappeler, substituons à la fonction les deux groupes de termes

$$\begin{aligned}\frac{(t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2i\sin\varphi}}&\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2+\cdots\right.\\&\left.+(-1)^p\frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^p\right]\\&+\left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{-2i\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2+\cdots\right],\end{aligned}$$

imaginaires conjugués et correspondant aux deux infinis, si nous effectuons ensuite par la formule du binôme le développement de chacun des termes de la somme précédente, nous aurons

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}X_n&=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\\&\times\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]}{2\sin\varphi}\right.\\&\left.\qquad+\frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\varphi+\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\varphi)^2}\cdots\right\}.\end{aligned}\right.$$

La loi est évidente. L'erreur commise est toujours de l'ordre du premier terme négligé. Ainsi, si l'on prend les p premiers termes, l'erreur sera de l'ordre de $\frac{1}{n^p\sqrt{n}}$.

Si x n'est pas compris entre -1 et $+1$ ou s'il est imaginaire, la fonction génératrice n'aura, comme nous l'avons vu, qu'une seule discontinuité sur le cercle de convergence et l'on trouvera de même

$$\begin{aligned}X_n=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}&\left[\xi^n-\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\xi^{n-2}}{1-\xi^{-2}}\right.\\&\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\frac{\xi^{n-4}}{(1-\xi^{-2})^2}+\ldots\right],\end{aligned}$$

ξ ayant la signification déjà indiquée à l'article II.

Appliquons la même méthode à la dérivée déjà considérée

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha},$$

qui est le coefficient multiplié par $\Gamma(n+1)$ de t^n dans le développement de

$$[1-(x+t)^2]^{-\alpha},$$

suivant les puissances de α. Si les modules de $1-x$, $1+x$ ne sont pas égaux et que celui de $1-x$ soit le plus petit, nous avons vu que la fonction précédente n'a qu'un point de discontinuité sur le cercle de convergenc eet, en appliquant le théorème général, on trouvera sans peine

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha}=2^{-\alpha}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}}&\left[1+\frac{\alpha}{1}\frac{\alpha-1}{\alpha+n-1}\frac{1-x}{2}\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\ldots\right].\end{aligned}$$

Si les modules de $1-x$, $1+x$ étaient égaux, il faudrait réunir aux termes précédents ceux qui en proviennent, en y changeant x en $-x$.

VI.

Proposons-nous de même de rechercher une formule d'approximation indéfinie des polynômes de la série hypergéométrique. Comme nous l'avons déjà dit, on peut en donner l'expression remarquable

$$X_n=F(\alpha+n,-n,\gamma,x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1-\gamma}(1-x)^{n+\gamma-\alpha},$$

analogue à celle que l'on doit à Olinde Rodrigues pour les polynômes de Legendre et qui conduit aux mêmes conséquences.

Si l'on considère l'équation du second degré

$$(31)\qquad y=x+ty(1-y),$$

la formule de Lagrange nous donnera, comme on sait,

$$f(y)\frac{dy}{dx} = f(x) + \ldots + \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) x^n (1-x)^n,$$

et, si l'on prend

$$f(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha},$$

on aura

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+1-\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma},$$

ou

$$y^{1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} t^n X_n. \tag{32}$$

En remplaçant, dans le premier membre, y, $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs, on aura la fonction génératrice considérée à l'article II, où nous avons donné le principal terme de la formule approchée de X_n.

Supposons que la variable x ne soit pas réelle et comprise entre zéro et 1, alors nous avons vu que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

le signe du radical étant pris de manière que le module de ξ soit plus grand que 1, la série (32) est convergente tant que t est inférieur à $\frac{1}{\xi}$, et, sur le cercle de convergence, le premier membre de cette équation admet une seule discontinuité et devient infini pour $t = \frac{1}{\xi}$. C'est, du reste, ce que l'on peut aussi conclure de la discussion de l'équation (31) du second degré qui donne y.

D'après cela, pour obtenir une approximation indéfinie des coefficients de la série (32) et par suite des polynômes X_n, la méthode générale nous indique qu'il faudra développer la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x},$$

suivant les puissances de $t - \frac{1}{\xi}$, ou, ce qui est la même chose, de

$1 - \xi t$ en une série qui sera de la forme

$$\frac{A_0}{\sqrt{1-\xi t}} + A_1 + A_2\sqrt{1-\xi t} + A_3(1-\xi t) + \ldots,$$

et garder seulement les termes irrationnels; car les autres ne donnent pas de coefficient pour t^n, n étant suffisamment grand, et d'ailleurs leur ensemble constituera l'analogue de la fonction que nous avons appelée $\psi(z)$ dans le théorème général.

Tout se réduit donc à développer $y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$ suivant les puissances de $\xi t - 1$. En gardant les p premiers termes irrationnels de ce développement et en les substituant à la fonction qu'on développe, on aura les p premiers termes de l'expression approchée des coefficients de la série (32).

Posons

$$\xi t - 1 = u^2,$$

et introduisons u à la place de t dans l'équation qui définit y. Elle prendra la forme remarquable

$$y - x' = u\sqrt{y(1-y)}, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$x' = \frac{1-\xi}{2},$$

et qui se prête encore à l'application de la formule de Lagrange. Si, de l'équation (33), on tire $\frac{\partial y}{\partial x'}$, y étant considéré comme fonction de x' et de u, on établira facilement l'identité

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\xi}{2u}\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\frac{\partial y}{\partial x'}, \tag{34}$$

et le premier membre de la formule (32) prendra la formule

$$\frac{\xi}{2u} y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x'}.$$

On voit que, y étant considéré comme défini par l'équation (33), on peut, en mettant à part $\frac{\xi}{2u}$, développer l'expression précédente suivant la formule de Lagrange, et l'on obtient ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{\xi}{2u}y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x'}\\&\quad=\frac{\xi}{2u}\sum_{p=0}\frac{u^p}{1.2\ldots p}\frac{d^p}{dx'^p}x'^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(1-x')^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ou, en remplaçant x' par sa valeur $x'=\frac{1-\xi}{2}$,

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}&y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}\\&\quad=2^{1-\alpha}(-1)^{\gamma-1}\xi\sum_{p=0}\frac{(1-\xi t)^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(p+1)}\frac{d^p}{d\xi^p}(\xi-1)^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right.$$

En égalant les coefficients de t^n dans ce développement et dans la formule (32), nous aurons le résultat cherché. On trouve ainsi, en remplaçant x par sa valeur en fonction de ξ,

$$x=-\frac{(1-\xi)^2}{4},$$

et p par $2k$,

$$(36)\quad\left\{\begin{aligned}&X_n\frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}(\xi-1)^{2\gamma-2}(\xi+1)^{2\alpha-2\gamma}\xi^{-n-\alpha}\\&\quad=\sum_{k=0}\frac{(1-2k)(3-2k)\ldots(2n-1-2k)}{\Gamma(2k+1)2.4\ldots2n}\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}(\xi-1)^{k+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{k+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}},\end{aligned}\right.$$

formule qui réalise l'approximation que nous avons en vue. En écrivant d'abord les premiers termes, elle prend la forme

$$\begin{aligned}&X_n\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+\frac{1}{2})}(1-\xi^{-1})^{2\gamma-2}(1+\xi^{-1})^{2\alpha-2\gamma}\xi^{-n+\alpha-2}\\&\quad=(\xi-1)^{\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2(2n-1)}\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}\\&\qquad+\frac{1}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4}{d\zeta^4}(\xi-1)^{\gamma+\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{3}{2}}-\ldots,\end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

On pourrait développer plus complétement cette formule en rem-

plaçant les dérivées qui y sont indiquées par leurs expressions, qu'il est facile d'obtenir. Nous nous contenterons de donner les deux premiers termes de la formule. On a ainsi

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma)}\xi^n(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{1}{2}}(1+\xi^{-1})^{\frac{1}{2}+\alpha-\gamma}X_n\\&\quad=1-\frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)}-\frac{1+\xi^{-1}}{1-\xi^{-1}}\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)}\\&\qquad-\frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\frac{1-\xi^{-1}}{1+\xi^{-1}}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que x n'est pas réel et compris entre zéro et 1; mais nous pouvons passer des résultats obtenus à ceux qui se rapportent à ce dernier cas. Alors la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$$

aura deux infinis sur le cercle de convergence correspondant aux valeurs

$$t=\xi,\quad t=\xi^{-1},$$

et il faudra réunir les termes relatifs à ces deux infinis. Si l'on pose

$$(38)\qquad x=\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$\xi=e^{-2i\varphi},\quad \xi^{-1}=e^{2i\varphi}.$$

Réunir les termes correspondant aux deux valeurs de t, ξ, ξ^{-1}, ce sera donc prendre le double de la partie réelle dans les formules (36) et (37). On trouve ainsi

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})X_n}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}\sin\varphi^{\gamma-\frac{1}{2}}\cos\varphi^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}\\&\quad=\left[1-\frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)}\right]\cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]\\&\qquad-\sin\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]\\&\qquad\times\left[\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)}\cot\varphi-\frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\operatorname{tang}\varphi\right]\end{aligned}\right.$$

pour l'approximation du second ordre de X_n, formule qui est bien d'accord, d'une part, avec la première approximation, d'autre part, avec le résultat obtenu à l'article précédent pour les polynômes de Legendre.

Il est aisé de reconnaître que la même méthode sera applicable toutes les fois que l'on recherchera une formule d'approximation indéfinie pour les coefficients de la série de Lagrange. Reprenons l'équation

$$y = x + t\varphi(y), \tag{40}$$

qui donne

$$F(y) = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F'(y)\varphi^n(y), \tag{41}$$

et supposons, comme nous l'avons déjà fait (art. III), que la convergence cesse, parce que, sur le cercle limite, la racine y qu'on développe devient double. En appelant alors β sa valeur, on a

$$\beta = x + h\,\varphi(\beta), \quad 1 = h\,\varphi'(\beta),$$

h désignant la valeur de t pour laquelle y devient racine double et égale à β. La méthode générale que nous avons suivie nous prescrit alors de développer la fonction $F(y)$ suivant les puissances de $t - h$ ou de $1 - t\,\varphi'(\beta)$ et de garder les seuls termes irrationnels. En développant ces termes irrationnels, on aura les différents termes de la formule d'approximation indéfinie des coefficients de la série (41). Or l'équation (40) peut s'écrire

$$y - \beta = \sqrt{1 - t\,\varphi'(\beta)}\,\varpi(y), \tag{42}$$

en posant

$$\varpi^2(y) = \frac{\varphi(y)(y-\beta)^2}{\varphi(y) - \varphi(\beta) - (y-\beta)\varphi'(\beta)},$$

et il est facile de voir que $\varpi(y)$ est une fonction demeurant finie pour $y = \beta$. Si, dans la formule (42), on pose

$$1 - t\,\varphi'(\beta) = u^2,$$

elle devient

$$y - \beta = u\,\varpi(y),$$

et, sous cette forme, on pourra appliquer la série de Lagrange à développer $F(y)$ suivant les puissances de u. On aura

$$F(y) = F(\beta) + \quad + \sum \frac{[1 - t\,\varphi'(\beta)]^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \varpi^n(y) F(y),$$

les dérivées $\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \varpi^n(y) F(y)$ étant prises pour $y = \beta$.

VII.

Les résultats relatifs à l'approximation indéfinie des polynômes X_n sont si essentiels dans notre analyse que nous croyons utile de les établir par une autre méthode, qui nous fera connaître du reste une propriété importante de l'erreur commise quand on remplace ces polynômes par leurs expressions approchées. Cette méthode a été déjà employée par M. Bonnet pour les polynômes de Legendre (voir *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVII, p. 265).

Rappelons d'abord quelques propriétés de ces polynômes. Ils satisfont à l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2X_n}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dX_n}{dx} + n(\alpha+n)X_n = 0. \tag{43}$$

On a aussi

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_m X_n \, dx = 0$$

et

$$J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n^2 \, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{2n+\alpha} \frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}. \tag{44}$$

Cette dernière propriété est fort importante. Si nous remplaçons les Γ par leurs expressions approchées, on trouve, pour n très-grand,

$$J_n = \Gamma^2(\gamma)\, n^{1-2\gamma} \tag{45}$$

On a aussi

$$(46) \qquad \frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{n(2n+\alpha-2)(\alpha+n-\gamma)}{(2n+\alpha)(\alpha+n-1)(\gamma+n-1)}.$$

Cette expression de J_n conduit à une conséquence importante. Elle ne permet pas de fixer pour chaque valeur de x l'ordre de X_n, mais elle donne l'ordre de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x) X_n dx,$$

où a et b sont compris entre zéro et 1, et où $\varphi(x)$ est une fonction quelconque que, pour plus de netteté, nous supposerons toujours finie. Comparons, en effet, cette intégrale à la suivante :

$$\int_a^b X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx,$$

qui est une fraction de J_n, θJ_n. Divisons l'intervalle (a, b) en deux séries d'intervalles, séparés ou juxtaposés, les uns pour lesquels X_n sera inférieur à $H n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H désignant un nombre positif quelconque, les autres pour lesquels X_n est supérieur en valeur absolue à $H n^{\frac{1}{2}-\gamma}$. On aura, pour l'intégrale prise dans les premiers intervalles,

$$\int \varphi(x) X_n dx < H n^{\frac{1}{2}-\gamma} \int \pm \varphi(x)\, dx < A n^{\frac{1}{2}-\gamma} H,$$

le signe $\pm$ étant pris de telle manière que l'élément de l'intégrale soit toujours positif et A désignant une limite supérieure, nécessairement finie, de cette intégrale.

Comparons maintenant l'intégrale $\int \varphi(x) X_n dx$, prise dans les intervalles où X_n est plus grand que $H n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, à la suivante :

$$\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = \theta_1 J_n,$$

prise dans les mêmes intervalles. On aura, d'après un théorème connu, une limite supérieure de la valeur de

$$\frac{\int \varphi(x) X_n dx}{\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx};$$

en prenant le rapport des éléments correspondants des deux intégrales pour une valeur x' de x, comprise dans les limites de l'intégration, on aura donc

$$\frac{\int \varphi(x) X_n dx}{\theta_1 J_n} < \frac{\varphi(x') X'_n}{X'^2_n x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}} < \frac{\varphi(x')}{X'_n x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}},$$

et, comme X'_n est plus grand que $H n^{\frac{1}{2}-\gamma}$ dans tout l'intervalle de l'intégration, on aura, en remplaçant X'_n par sa limite inférieure,

$$\int \varphi(x) X_n dx < \theta_1 J_n \frac{\varphi(x')}{x'^{\gamma-1}(1-x')^{\alpha-\gamma}} \frac{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{H}.$$

Si l'on remplace J_n par son expression approchée, on a

$$\int \varphi(x) X_n dx < \frac{B}{H} n^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

B étant un nombre fini. En réunissant les résultats relatifs aux deux sens d'intervalles, on a, en valeur absolue,

$$(47) \qquad \int_a^b \varphi(x) X_n dx < \left(AH + \frac{B}{H}\right) n^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

A et B étant des nombres finis et H quelconque. Cette formule montre que l'intégrale est *au plus* de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$. Ainsi, sans que l'on connaisse l'ordre de X_n, le résultat relatif à J_n permet de fixer une limite supérieure de l'ordre de toutes les intégrales où X_n entre en facteur, prises entre deux limites fixes, comprises entre zéro et 1. C'est un résultat intéressant, dont nous allons faire usage.

Remplaçons, dans l'équation différentielle à laquelle satisfait X_n, x par $\sin^2\varphi$. Cette équation deviendra

$$(48) \qquad \frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} + \frac{dX_n}{d\varphi}[(2\gamma-1)\cot\varphi - (2\alpha+1)\tang\varphi] + 4n(\alpha+n) X_n = 0.$$

Pour faire disparaître le second terme, effectuons la substitution

$$(49) \qquad X_n = u \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}},$$

nous aurons

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\left[(2n+\alpha)^2 - \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} - \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi}\right] = 0.$$

Si nous posons

$$\lambda = \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} + \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi},$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u(2n+\alpha)^2 = \lambda u.$$

Considérons λu *comme une fonction connue de* φ, et proposons-nous d'intégrer cette équation. L'équation sans second membre aurait pour intégrale

$$u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h],$$

A et h étant des constantes. En appliquant la méthode de Cauchy, nous aurons pour l'intégrale de l'équation avec second membre

$$(50)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + \frac{1}{2n+\alpha}\int_p^\varphi u'\lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')]\,d\varphi',$$

$u'\lambda'$ désignant ce que deviennent u et λ par le changement de φ en φ', et p étant quelconque. Tant que φ n'approche pas des valeurs zéro, $\frac{\pi}{2}$, λ' demeure fini, et le terme complémentaire, qui est de la forme (47), est au plus de l'ordre de $\frac{n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{2n+\alpha}$ ou $n^{-\frac{1}{2}-\gamma}$. On a donc

$$(51)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + p_1 n^{-\frac{1}{2}-\gamma},$$

p_1 demeurant toujours au-dessous d'une certaine limite, tant que φ ne s'approche ni de zéro ni de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tant que x est compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε, ε' étant positifs et fixes quand n croît, mais d'ailleurs aussi petits qu'on le veut.

Quant aux constantes A et h, il est inutile de les chercher par cette méthode. Nos premiers résultats nous les ont fait connaître. En effet,

deux expressions

$$\mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h],\quad \mathrm{A}'\cos[(2n+\alpha)\varphi + h']$$

ne peuvent représenter la même fonction avec la même approximation pour une infinité de valeurs de φ que si A, A′, h, h' sont respectivement égales ou du moins différentes de quantités de l'ordre de celles qu'on néglige. Ce que le résultat actuel ajoute d'essentiel porte sur la limite de l'erreur commise. Nous voyons maintenant que l'on a

$$\mathrm{X}_n = \frac{\Gamma(\gamma)\,n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \times \cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

où p est un nombre qui demeure au-dessous d'un nombre fixe, même quand x varie, pourvu qu'il reste compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε' étant fixes. Auparavant, nous savions seulement que ce nombre p demeure fini quand, x restant fixe, n croît indéfiniment, ce qui n'est pas équivalent au résultat actuellement établi.

Ainsi ces expressions approchées des polynômes X_n n'ont pas lieu dans le voisinage des valeurs 0, 1 de la variable x, et il est d'ailleurs facile de se rendre compte de ce résultat pour les fonctions de Legendre. Ces fonctions pour $x=1$ sont toujours égales à l'unité; or leur expression approchée, si elle était exacte pour $x=1$, les rendrait plus petites que toute quantité donnée, pour n croissant indéfiniment.

Si, dans l'intégrale

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \mathrm{X}_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx,$$

on remplace X_n par son expression approchée, elle devient

$$\frac{2\Gamma'(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma}\int u^2\,d\varphi = \frac{2\Gamma^2(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma}\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon' + \frac{p}{n}\right),$$

ε' étant de la forme $a\varepsilon$, où a est fini.

On a donc

$$\left(\int_0^\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1\right) X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx = J_n\left(a\varepsilon + \frac{p}{n}\right),$$

où a et p sont des quantités finies, d'où il suit que le rapport de chacune de ces intégrales

$$\int_0^\varepsilon \quad \int_{1-\varepsilon}^1$$

à J_n pourra être rendu aussi petit qu'on le voudra dès que ε sera pris suffisamment petit et n suffisamment grand. Nous aurons à faire usage de ce résultat, qui supplée à l'expression approchée qu'on ne peut obtenir des polynômes X_n dans le voisinage des valeurs

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Nous indiquerons maintenant comment on peut déterminer la forme de la deuxième approximation des polynômes X_n en partant de l'équation différentielle.

De la formule (51) on déduit, en y remplaçant φ par φ',

$$u' = A\cos[(2n+\alpha)\varphi' + h] + \frac{p'}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

p' étant toujours fini, quel que soit n, tant que φ' n'approche pas de zéro ou de $\frac{\pi}{2}$. Substituons cette valeur dans l'intégrale de la formule (50), nous aurons

$$\begin{aligned} u = {} & A\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] \\ & + \frac{A}{(2n+\alpha)}\int_k^{\varphi'} \lambda'\cos[(2n+\alpha)\varphi' + h]\sin[(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')]\,d\varphi' \\ & - \int_k^{\varphi'} \frac{\lambda' p' \sin(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')\,d\varphi'}{(2n+\alpha)n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned}$$

p' étant toujours fini; la seconde intégrale est de la forme $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$ où p_1 est, comme p', une quantité finie.

Quant à la première intégrale, on peut l'écrire

$$\frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \left\{\lambda'\sin[(2n+\alpha)\varphi + h] + \lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi - 2\varphi') + h]\right\}d\varphi',$$

ou

$$\frac{A\sin[(2n+\alpha)\varphi + h]}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \lambda'\,d\varphi' + \frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi \lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-2\varphi') + h]\,d\varphi'.$$

Une simple intégration par parties portant sur le sinus montre que la seconde intégrale est de l'ordre de $\frac{A}{n^2}$ ou, comme A est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, de celui de $n^{-\frac{3}{2}-\gamma}$. Cette seconde intégrale peut donc être réunie au terme déjà trouvé du même ordre $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$. On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \int_k^\varphi \lambda'\,d\varphi' = {} & \frac{(2\gamma - 2\alpha - 1)(2\gamma - 2\alpha + 1)}{4}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}k) \\ & + \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4}(\cot k - \cot\varphi). \end{aligned}$$

Les termes en $\operatorname{tang}k$ $\cot k$ peuvent être négligés; on les ferait disparaître en modifiant convenablement la valeur de h, et l'on a pour u la formule définitive

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & A\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + \frac{A}{8(2n+\alpha)}\sin[(2n+\alpha)\varphi + h] \\ & \times[(2\gamma - 2\alpha - 1)(2\gamma - 2\alpha + 1)\operatorname{tang}\varphi \\ & - (1-2\gamma)(3-2\gamma)\cot\varphi] + \frac{p_1 n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{n^2}, \end{aligned}\right.$$

dont la forme est bien semblable à celle de la formule (39); p_1 sera, comme p, une quantité assujettie à demeurer au-dessous d'une limite fixe tant que x demeurera comprise entre ε et $1-\varepsilon'$, et cela quel que soit n.

En résumé, les termes de la première approximation sont de l'ordre de $\sqrt{J_n}$; ceux qui s'ajoutent dans la seconde approximation sont de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$; enfin l'erreur commise est de l'ordre $\frac{p_1\sqrt{J_n}}{n^2}$, p_1 étant fini tant que x n'approche ni de zéro ni de 1, quel que soit n.

Cette fonction inconnue p_1 de x et de n a encore une autre propriété : sa dérivée par rapport à x ou à φ est de la forme nq, q restant finie dans les mêmes conditions que p. Pour établir ce résultat, il suffit de se rappeler que, la dérivée de X_n étant une série hypergéométrique, on peut obtenir directement son expression approchée. Ainsi nous aurons deux formules d'approximation pour cette dérivée :

1° Celle qu'on obtiendrait en différentiant l'équation (52) ou (39) et qui contiendra la dérivée p'_1 de p_1;

2° Celle qu'on établirait directement par l'application des formules précédentes à cette dérivée.

La comparaison de ces expressions différentes nous donne le résultat cherché relatif à l'ordre de la dérivée p'_1, et nous montre qu'elle est de la forme nq, q étant au-dessous d'une certaine limite tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1. Je ne développe pas ce calcul, dont un peu d'attention fait reconnaître le résultat.

On pourrait, du reste, obtenir ces propriétés de l'erreur commise quand on substitue aux polynômes leurs expressions approchées en employant la méthode même qui nous a servi à obtenir ces expressions. Pour cela, nous allons reprendre l'étude du cas général et donner une limite de l'erreur commise quand on substitue aux fonctions considérées leurs expressions approchées.

Nous avons vu que, si une fonction $f(z)$ devient discontinue sur le cercle de convergence, dont nous désignerons encore le rayon par R, de telle manière que, pour le point α de discontinuité, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z), \tag{53}$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$, il faut, pour obtenir les expressions approchées des coefficients de la série que développe $f(z)$, substituer à la fonction $f(z)$ l'expression

$$\left\{\begin{aligned} U_p = {} & \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \ldots \\ & + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1}, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

que l'on développe suivant les puissances de z.

Si donc on pose

$$f(z) = \Sigma a_n z^n,$$
$$U_p = \Sigma \alpha_n z^n,$$

et que l'on désigne par $\varpi(z)$ la fonction

$$\varpi(z) = f(z) - U_p = \Sigma \varepsilon_n z^n, \tag{55}$$

on aura

$$a_n = \alpha_n + \varepsilon_n; \tag{56}$$

α_n sera l'expression approchée de a_n, ε_n l'erreur commise quand on substitue à a_n son expression approchée.

La fonction $\varpi(z)$, d'après son mode de formation, ne deviendra pas infinie pour $z=\alpha$, et il en sera de même de sa dérivée $e^{\text{ième}}$ si e désigne le plus grand nombre entier contenu dans $p+k$. Différentions e fois l'équation (55), nous aurons

$$\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e} = \Sigma n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n z^{n-e},$$

et, la fonction du premier membre ne devenant pas infinie sur le cercle de convergence, la série qui la développe demeurera convergente sur ce cercle. Si nous multiplions les deux membres par z^{e-n} et que nous intégrions le long du contour formé par le cercle de convergence, nous aurons

$$2\pi n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n = \int z^{e-n}\frac{d^e\varpi(z)}{dz^e}dz.$$

Si dans cette formule on remplace z par $Re^{\omega i}$, elle devient

$$2\pi n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n = R^{e-n+1}\int_0^{2\pi} e^{(e-n)\omega i}\frac{d^e\varpi(z)}{dz^e} ie^{\omega i}d\omega \tag{57}$$

et n'est pas autre chose que celle par laquelle on détermine les coefficients des séries trigonométriques.

La dérivée $\frac{d^e\varpi(z)}{dz^e}$ ne devient pas infinie sur le cercle de convergence. Désignons par μ' le module maximum sur le cercle de cette dérivée.

Il est clair que, si la fonction $f(z)$, qui peut contenir dans son expression des paramètres variables autres que z, et les coefficients $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, ..., $\varphi^{p-1}(\alpha)$ demeurent finis sur le cercle de convergence quand ces paramètres varient, on pourra trouver une limite supérieure μ de μ' correspondant à toutes les valeurs de ces paramètres.

D'après cela, si nous remplaçons dans l'intégrale du second membre de l'équation (7) $\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}$ par μ et $e^{(e-n)\omega i} ie^{\omega i}$ par 1, nous aurons une limite supérieure du module de cette intégrale qui sera

$$2\pi R^{e-n+1}\mu.$$

L'intégrale aura donc pour valeur

$$2\pi\mu\theta R^{e-n+1},$$

θ étant une quantité *réelle* ou *imaginaire*, dont le module sera inférieur à l'unité. La formule (57) deviendra donc

$$R^n \varepsilon_n = R^n(a_n - \alpha_n) = \frac{\theta R^{e+1}\mu}{n(n-1)\dots(n-e+1)},$$

ou, plus simplement,

$$R^n(a_n - \alpha_n) = \frac{a\mu}{n^e}, \tag{58}$$

a étant une quantité finie quand n augmente.

La limite précédente est loin d'être assez précise; mais, par un artifice particulier, on peut en déduire une évaluation plus exacte de l'erreur commise. Supposons, en effet, qu'on change p en $p+2$, ce qui revient à ajouter deux termes à U_p,

$$\frac{\varphi^p(\alpha)(z-\alpha)^{p+k}}{1\,2\dots p} + \frac{\varphi^{p+1}(\alpha)(z-\alpha)^{p+k+1}}{1\,2\dots p+1},$$

et deux termes α'_n, α''_n à α_n qui proviendront du développement suivant les puissances de z de la somme précédente. Nous connaissons les ordres de α'_n, α''_n, et nous savons, en mettant ces ordres en évidence, que l'on a

$$\alpha'_n R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}}, \quad \alpha''_n R^n = \frac{h'}{n^{p+k+2}}.$$

La formule (58) deviendra alors

$$R^n(a_n - \alpha_n - \alpha'_n - \alpha''_n) = \frac{a\mu}{n^{e+2}},$$

ce qu'on peut écrire

$$(a_n - \alpha_n)R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}} + \frac{h_1}{n^{p+k+2}} + \frac{a\mu}{n^{e+2}}. \tag{59}$$

Or, $e+2$ étant supérieur à $p+k+1$, le terme principal de cette formule sera le premier, car on peut l'écrire

$$(a_n - \alpha_n)R^n = \frac{1}{n^{p+k+1}}\left(h + \frac{h_1}{n} + \frac{a\mu}{n^{e+1-p-k}}\right).$$

L'erreur est donc sensiblement égale au premier terme négligé.

S'il y avait plusieurs discontinuités sur le cercle de convergence, on répéterait pour leur ensemble le raisonnement que nous venons de faire pour l'une d'elles, et l'on obtiendrait un résultat tout semblable.

Dans l'exemple que nous avons traité des polynômes de la série hypergéométrique, la fonction $\varpi(z)$ et sa dérivée d'ordre e peuvent être ramenées à des expressions composées de radicaux et ne contenant en dénominateur que $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Donc, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1, ces dénominateurs demeurent finis, et il en est d'ailleurs de même des coefficients de la formule d'approximation. La formule (59) nous montre donc que l'erreur commise lorsqu'on prend les k premiers termes de l'expression approchée est de la forme même à laquelle nous avons été conduits par l'équation différentielle, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de l'unité.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série ;

PAR M. G. DARBOUX.

DEUXIÈME PARTIE.

VIII.

Revenons aux polynômes de la série hypergéométrique et rappelons quelques-unes de leurs propriétés qui sont connues, ou dont on trouvera facilement la démonstration.

Voici d'abord différents développements de ces polynômes :

$$(1)\quad \begin{cases} X_n = 1 - \dfrac{n(\alpha+n)}{1.\gamma}x + \ldots + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+2n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = F(-n, \alpha+n, \gamma, x), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} X_n = (1-x)^n - \dfrac{n(n+\alpha-\gamma)}{1.\gamma}x(1-x)^{n-1} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = (1-x)^n F\left(-n, \gamma-\alpha-n, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

$$(3)\quad X_n = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(1+\alpha-\gamma)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)} F(-n, \alpha+n, \alpha-\gamma+1, 1-x).$$

On a, en particulier,

$$(4)\qquad X_n(1) = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma.(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

valeur qui n'est égale à 1 que si $\alpha - \gamma = \gamma - 1$ et, dans ce cas, la comparaison des développements précédents montre que le polynôme ne change pas de valeur absolue, si l'on change x en $1-x$. La valeur approchée pour n très-grand de $X_n(1)$ est

$$(5)\qquad X_n(1) = \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)} n^{\alpha-2\gamma+1},$$

valeur qui peut être nulle, très-grande ou très-petite. Ainsi l'on voit que, dans le voisinage de la valeur $x = 1$, l'ordre varie brusquement. Le polynôme qui était de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$ devient de celui de $n^{\alpha-2\gamma+1}$ Par exemple, si $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, il est fini pour toute valeur fixe de x comprise entre zéro et 1, et il devient infiniment grand pour $x = 1$.

Les développements, ou l'équation différentielle, montrent que tout est symétrique par rapport aux deux limites. On peut changer x en $1-x$, pourvu qu'on échange $\gamma - 1$ et $\alpha - \gamma$: l'équation différentielle demeure la même. Cette remarque nous servira souvent à abréger les discussions.

On a, entre trois polynômes consécutifs, la relation

$$(6)\ \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(X_{n+1} - X_n) + (2n+\alpha)xX_n + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(X_{n-1} - X_n) = 0,$$

qui est généralement du troisième degré en n ; mais ce degré s'abaisse dans certains cas.

D'abord, si $\alpha = 1$, elle devient

$$(n+\gamma)(X_{n+1} - X_n) + 2(2n+1)xX_n + (n+1-\gamma)(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

En second lieu, si l'on a $\alpha = 2\gamma - 1$, elle devient

$$\frac{n+\alpha}{2}(X_{n+1} - X_n) + (2n+\alpha)xX_n + \frac{n}{2}(X_{n-1} - X_n) = 0;$$

enfin, si $\alpha = 2\gamma$,

$$\frac{n+2\gamma}{2n+2\gamma+1}(X_{n-1} - X_n) + 2xX_n + \frac{n}{2n+2\gamma-1}(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

Dans tous les autres cas, elle reste du troisième degré.

D'ailleurs, de l'identité

$$\frac{d^p}{dx^p}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma\ x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\times\beta.(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)$$
$$\times\,\mathrm{F}(\alpha+p,\beta+p,\gamma+p,x)$$

on déduit

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^p\mathrm{X}_n}{dx^p} &= \frac{x^{1-\gamma-p}(1-x)^{\gamma-\alpha-p}(-1)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)}\\ &\quad\times\frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\,\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma},\end{aligned}\right.$$

relation bien connue pour les fonctions de Legendre.

Citons encore les identités suivantes :

$$(8)\qquad n\mathrm{X}_n - x\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} = n\mathrm{X}_{n-1} + \frac{n}{n+\alpha-1}\,x\frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx},$$

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}(\gamma+n)\mathrm{X}_{n+1} &= x(1-x)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\\ &\quad+\mathrm{X}_n[(n+\gamma)-x(2n+\alpha+1)],\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}(\gamma+n)\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} &= \frac{n+1}{n+\alpha}[n+\alpha-\gamma+1-(2n+\alpha+1)x]\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\\ &\quad-(n+1)(2n+\alpha+1)\mathrm{X}_n,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&(n+1)(n+\alpha-1)\int\mathrm{X}_n dx\\ &\quad+\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)(n+\alpha-1)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\mathrm{X}_{n+1}-\frac{n(n+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}\mathrm{X}_{n-1}\\ &\quad\quad+(2n+\alpha)[n(2\gamma-\alpha-1)+1-\alpha^2]\mathrm{X}_n = 0.\end{aligned}\right.$$

Une formule intéressante résulte du développement de $\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}$ suivant les fonctions X_n. Posons

$$\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} = \mathrm{A}_0\mathrm{X}_0 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{X}_{n-1}.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\mathrm{X}_p x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$ et que

nous intégrions entre o et 1, nous aurons

$$\mathrm{A}_p\mathrm{J}_p = \int_0^1\mathrm{X}_p\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx.$$

Substituons l'expression de $\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}$ déduite de la formule (7), nous aurons

$$\mathrm{J}_p\mathrm{A}_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)}\int\frac{\mathrm{X}_p}{x(1-x)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]dx.$$

Décomposons en fractions simples $\frac{\mathrm{X}_p}{x(1-x)}$, nous aurons

$$\frac{\mathrm{X}_p}{x(1-x)} = \frac{1}{x}+\frac{\alpha_p}{1-x}+\mathrm{U}_{p-2},\quad \alpha_p = \frac{(-1)^p\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+p)}\,\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+p+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

U_{p-2} désignant un polynôme de degré $p-2$ En intégrant par partie jusqu'à ce que la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ ait disparu sous le signe d'intégration, U_{p-2} disparaitra, et il restera

$$\mathrm{A}_p\mathrm{J}_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)}\int_0^1[x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}$$
$$+(-1)^{p-1}\alpha_p x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}]dx.$$

En remplaçant les intégrales eulériennes par leurs valeurs, on trouve l'expression de A_p, et l'on obtient la formule

$$\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} = -\frac{\mathrm{J}_n(2n+\alpha)}{\mathrm{J}_p}\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{\mathrm{X}_p}{\mathrm{J}_p}+(-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n)}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(p+1)}(2p+$$

En combinant cette formule avec celle qu'on obtient en y changeant n en $n+1$, on trouve

$$(13)\quad\frac{n+1}{\alpha+n}\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}+\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} = -\mathrm{J}_n\frac{(n+1)(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}{(n+\alpha)(n+\gamma)}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\mathrm{X}p}{\mathrm{J}_p}.$$

Les polynômes X_n formant, d'après l'équation aux différences à laquelle ils satisfont, une suite de Sturm, on peut leur appliquer la formule fondamentale de mon *Mémoire sur le théorème de Sturm* [*], et l'on obtient la relation

$$(14)\quad \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{J_n(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\,\frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z-x} = \frac{X_0 Z_0}{J_0} + \frac{X_1 Z_1}{J_1} + \ldots + \frac{X_n Z_n}{J_n},$$

Z_p désignant ce que devient X_p quand on y remplace x par z. Telle est la réunion des formules les plus essentielles de cette théorie. Elles ne nous seront pas toutes utiles; mais j'ai cru devoir les calculer et les réunir ici.

Je ferai remarquer que la démonstration de la formule (12) repose sur la considération d'intégrales qui n'ont un sens que si l'on a $\gamma > 0$, $\alpha - \gamma + 1 > 0$; mais le résultat, évidemment indépendant de ces hypothèses, subsiste dans tous les cas.

Parmi ces polynômes, un groupe spécial se rapproche plus particulièrement de ceux de Legendre : ce sont ceux pour lesquels on a

$$\alpha - \gamma = \gamma - 1.$$

Ils admettent d'abord une fonction génératrice spéciale, et l'on a, en posant $z = 1 - 2x$,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} (1 - 2hz + h^2)^{\frac{1}{2}-\gamma} &= \sum 4^n h^n \frac{(\gamma - \frac{1}{2})\ldots(\gamma + n - \frac{1}{2})}{(2\gamma + n - 1)\ldots(2\gamma + 2n - 2)} \\ &\quad \times x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}[x(1-x)]^{n+\gamma-1} \end{aligned} \right.$$

Beaucoup des méthodes applicables aux polynômes de Legendre subsistent pour ces polynômes et non pour les polynômes généraux. Par exemple, en posant $x = \sin^2\varphi$, on peut les développer suivant les cosinus des multiples de φ. La relation entre trois polynômes consécutifs est du premier degré par rapport à n, etc.

---

[*] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, p. 92.

IX.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter d'une manière complète la théorie d'une classe de développements en série, de ceux qui sont ordonnés suivant les polynômes X_n que nous venons d'étudier. Nous avons vu que, si l'on suppose

$$\gamma > 0, \quad \alpha - \gamma + 1 > 0,$$

on a

$$\int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = 0, \quad \int_0^1 X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = J_n.$$

La valeur de J_n a été donnée à l'article VII.

Ces points étant admis, étant donnée une fonction quelconque $f(x)$ continue ou discontinue, supposons qu'on se propose de la développer en une série de la forme suivante :

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots.$$

Si nous multiplions les deux membres par $X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx$, et que nous intégrions entre les limites 0 et 1, nous aurons

$$(16)\quad A_n J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n f(x)\,dx.$$

Tous les coefficients seront successivement déterminés par cette formule.

Un artifice particulier permet de simplifier, dans bien des cas, la recherche et le calcul de tous les coefficients A_n.

Reprenons l'équation du second degré

$$y = x + ty(1-y)$$

et le développement

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x} &= \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} \\ &= \sum \frac{t^n\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)} X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}, \end{aligned} \right.$$

auquel elle donne naissance, et qui est convergent pour des valeurs suffisamment petites de t. Si nous multiplions par $f(x)\,dx$, et que nous intégrions entre les limites zéro et 1, nous aurons, en nous rappelant la formule (16),

$$\int_0^1 f(x)dx\, y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=\sum \mathrm{A}_n \frac{t^n\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n=\sum \mathrm{A}_n \frac{t^n\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}.$$

Le premier membre est une intégrale dans laquelle t est constant et y fonction de x. Prenons y comme variable indépendante, on aura

$$x=y-ty(1-y).$$

Les limites de y seront encore zéro et 1, et l'on aura

$$\int_0^1 f[y-ty(1-y)]y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\,dy=\sum\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}\mathrm{A}_n t^n.$$

Ainsi il suffira d'effectuer la quadrature du premier membre ou d'obtenir son développement en série pour connaître tous les coefficients A_n. Cette remarque permet de trouver beaucoup de développements en série.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$ se réduise à x^p, p étant quelconque. On aura à effectuer la quadrature

$$\int_0^1 y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}y^p[1-t(1-y)]^p dy,$$

ou plutôt à la développer suivant les puissances de t. Le coefficient de t^n sera

$$(-1)^n\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\int_0 y^{p+\gamma-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}dy$$
$$=(-1)^n\frac{p\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{\Gamma(p+\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n+p+1)},$$

et l'on aura par conséquent

$$(18)\quad\begin{cases} x^p=\mathrm{A}_0\mathrm{X}_0+\mathrm{A}_1\mathrm{X}_1+\ldots,\\ \mathrm{A}_n=(-1)^n\dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha)(2n+\alpha)\Gamma(p+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n+p+1)}.\end{cases}$$

La suite (18) se termine toutes les fois que p est entier, comme on devait s'y attendre. En l'appliquant à chacun des termes d'un polynôme, on pourra remplacer ce polynôme par une suite formée d'un nombre limité de fonctions X_n. Elle nous sera très-utile aussi quand on y fera p fractionnaire.

Après cette remarque sur la détermination des coefficients, revenons à la série qui sert de développement à une fonction quelconque $f(x)$,

$$(19)\qquad f(x)=\sum\frac{\mathrm{X}_n}{\mathrm{J}_n}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)\mathrm{Z}_n dz,$$

où Z_n désigne le polynôme X_n, dans lequel on a remplacé x par z. Nous devons nous demander si elle est convergente et si elle représente la fonction. A cet effet, nous allons étudier la somme des $n+1$ premiers termes de la série et en chercher la limite quand n croît. Cette somme est

$$(20)\qquad \mathrm{S}_n=\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)dz\left(\frac{\mathrm{X}_0\mathrm{Z}_0}{\mathrm{J}_0}+\frac{\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1}{\mathrm{J}_1}+\ldots+\frac{\mathrm{X}_n\mathrm{Z}_n}{\mathrm{J}_n}\right).$$

D'après une formule donnée à l'article précédent, elle peut être remplacée par l'intégrale plus simple

$$(21)\ \mathrm{S}_n=\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)\mathrm{J}_n}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)\frac{\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}-\mathrm{X}_n\mathrm{Z}_{n+1}}{z-x}dz,$$

dont il y a à déterminer la limite quand n croît indéfiniment. Nous pouvons, en commettant une erreur relative d'autant plus faible que n est plus grand, remplacer le coefficient numérique de l'intégrale par $\frac{1}{4\mathrm{J}_n}$. Nous décomposerons en outre l'intervalle de zéro à 1 en trois : l'un de zéro à ε, l'autre de ε à $1-\varepsilon$, le troisième de $1-\varepsilon$ à 1, ε étant aussi petit qu'on le voudra, mais fixe quand n augmentera indéfiniment. Ainsi, nous avons à chercher la limite de l'intégrale

$$(22) \qquad \frac{1}{4J_n}\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)\frac{Z_nX_{n+1}-X_nZ_{n+1}}{z-x}dz,$$

prise successivement dans les trois intervalles $(0,\varepsilon)(\varepsilon,1-\varepsilon)(1-\varepsilon,1)$. Nous commencerons par considérer le second et le plus grand de ces trois intervalles, et nous y remplacerons $X_n, Z_n, X_{n+1}, Z_{n+1}$ par leurs expressions approchées.

Posons

$$x=\sin^2\psi, \quad z=\sin^2\varphi,$$

φ et ψ étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $f(z)\,dz$ prendra la forme $f_1(\varphi)\,d\varphi$. On a

$$X_n=\sqrt{\frac{2J_n}{\pi}}\sin^{\frac{1}{2}-\gamma}\psi\cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\psi\cos\left[(2n+\alpha)\psi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right],$$

$$X_{n+1}=\sqrt{\frac{2J_n}{\pi}}\sin^{\frac{1}{2}-\gamma}\psi\cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\psi\cos\left[(2n+\alpha+2)\psi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right],$$

et des expressions analogues pour Z_n, Z_{n+1}. En les substituant, nous trouvons

$$\frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}f_1(\varphi)\,d\varphi\,\frac{\sin\left[(2n+\alpha+1)(\varphi+\psi)-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]}{\sin(\varphi+\psi)},$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}f_1(\varphi)\,d\varphi\,\frac{\sin[(2n+\alpha+1)(\varphi-\psi)]}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Ces intégrales sont bien connues : on les rencontre dans la théorie des séries trigonométriques. La première tend vers zéro, la seconde vers la limite

$$\tfrac{1}{2}f_1(\psi+0)+\tfrac{1}{2}f_1(\psi-0)=\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

lorsque $f(x)$ est finie, ou devient infinie si $f(x)$ est infinie.

Ainsi l'une des trois parties dont nous devons chercher la limite, *nous donne le même résultat que si la série était trigonométrique* [**].

[**] Au tome I (3e série, p. 194) de ce Journal, M. Laurent a déjà indiqué, pour le cas spécial des séries ordonnées suivant les polygones de Legendre, une méthode semblable à celle qui est développée ici.

Toutefois, cette partie de la démonstration est sujette à une objection grave qu'il importe de lever. Dans le calcul de l'intégrale que nous venons d'étudier, nous avons admis qu'on peut remplacer les polynômes par leurs expressions approchées. Cette substitution est-elle légitime? En l'effectuant, nous avons commis une erreur, et il est indispensable d'examiner si cette erreur n'augmente pas indéfiniment avec n. Désignons, pour abréger, par $X'_n\sqrt{J_n}$, $Z'_n\sqrt{J_n}$ les expressions approchées de $X_n\,Z_n$. Nous avons établi, en toute rigueur (art. VII), que l'on a

$$Z_n=\sqrt{J_n}\left(Z'_n+\frac{p}{n}\right), \quad X_n=\sqrt{J_n}\left(X'_n+\frac{p_1}{n}\right),$$

p, p_1 demeurant au-dessous d'une certaine limite, quel que soit n, si x et z demeurent compris entre ε et $1-\varepsilon$. Il suit de là que remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, c'est négliger, dans l'intégrale (22), un groupe de termes de la forme

$$\frac{1}{n}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{Pf(z)\,dz}{z-x},$$

P étant une fonction telle que p, p_1 demeurant au-dessous d'un nombre fixe quand n croît indéfiniment. D'ailleurs $\frac{P}{x-z}$ demeure finie pour $x=z$, puisque cette propriété appartient à la fois au terme

$$\frac{Z_{n+1}X_n-X_{n+1}Z_n}{z-x},$$

et à ceux que l'on a obtenus en remplaçant les polynômes par leurs expressions approchées.

Mais, si P a la propriété, comme p et p_1, de demeurer au-dessous d'une limite fixe, cette propriété ne peut s'étendre au quotient $\frac{P}{x-z}$, au moins dans le voisinage de la valeur $z=x$, et l'on ne peut pas affirmer que la partie suivante de l'intégrale

$$\frac{1}{n}\int_{x-h}^{x+h}Z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)\frac{P}{x-z}\,dz,$$

qui est d'ailleurs finie, tende vers zéro, et n'augmente pas indéfiniment quand n croît.

Pour résoudre la difficulté précédente, je ne vois d'autre moyen que l'emploi de la deuxième approximation des polynômes X_n, telle qu'elle a été donnée à la fin de la première Partie.

Nous avons remarqué que les formules qui réalisent cette approximation contiennent : 1° les termes de l'ordre de $\sqrt{J_n}$ qui se trouvent dans la première ; 2° des termes de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$; 3° enfin l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n^2}$. On a des formules telles que les suivantes :

$$Z_n = \sqrt{J_n}\left(Z'_n + \frac{Z''_n}{n} + \frac{p}{n^2}\right),$$
$$X_n = \sqrt{J_n}\left(X'_n + \frac{X''_n}{n} + \frac{p_1}{n^2}\right);$$

p p_1 demeurant toujours au-dessous d'un nombre fixe, et les dérivées p', p'_1 étant des formes nq, nq_1, où q, q_1 demeurent, comme p, p_1, inférieurs à un nombre fixe pour les valeurs de x et de z comprises entre ε et $1-\varepsilon$. Il suit de là que, si nous substituons dans l'intégrale (22) les expressions de X_n, Z_n, X_{n+1}, Z_{n+1}, déduites des formules précédentes, nous obtiendrons le résultat suivant :

1° Les termes résultant de la première approximation ont été calculés et nous donneront comme limite

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)];$$

2° Les seconds termes des expressions approchées, combinés entre eux ou avec les précédents, donneront des intégrales toutes pareilles à celles qui proviennent des termes du premier ordre, *mais divisées par n* ou par n^2 elles auront toutes zéro pour limite ;

3° Il restera enfin le groupe des termes contenant tous au moins une des fonctions inconnues, telles que p et p_1, et qu'on pourra écrire

$$\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{P(z)}{x-z}\,dz,$$

$P(z)$ étant une fonction des quantités, telles que p, p_1, $\sin 2n\varphi$, $\cos 2n\varphi$, et demeurant par conséquent au-dessous d'un nombre fixe dans toute l'étendue de l'intégration. On a, en outre, $P(x)=0$, pour la raison qui a déjà été donnée à propos de la première approximation.

D'après ce que nous savons sur les dérivées des fonctions p, p_1 et sur celle des sinus, on peut affirmer que l'on a

$$P'(z) = nQ(z),$$

$Q(z)$ demeurant au-dessous d'un nombre fixe, quel que soit n. D'après cela, si l'on remarque que l'on a

$$\frac{P(z)-P(x)}{z-x} = \frac{P(z)}{z-x} = P'[x+\theta(z-x)] = nQ[x+\theta(x-z)],$$

on voit que l'intégrale à examiner prendra la forme

$$\frac{1}{n}\int f(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Q[x+\theta(z-x)]\,dz,$$

et Q demeurant au-dessous d'une limite fixe, on voit que cette intégrale tendra vers zéro quand n croîtra indéfiniment, ce qui complète notre démonstration.

En résumé, la considération de la première partie de l'intégrale nous donne des *conclusions aussi étendues, s'appliquant à des fonctions aussi générales que celles considérées par Dirichlet dans son travail classique sur les séries trigonométriques*.

Examinons maintenant l'intégrale (22) prise entre les limites 0, ε ; $1-\varepsilon$, 1. A cause de la symétrie par rapport aux limites, signalée à l'article précédent, il suffira de trouver la limite de l'intégrale prise dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Dans cet intervalle, nous le savons, l'expression approchée de nos polynômes ne peut plus être employée, et un examen sérieux de cette partie de l'intégrale est d'autant plus nécessaire que quelques-uns de ces polynômes croissent indéfiniment avec n. Reprenons donc l'expression

$$\frac{1}{4J_n}\int_0^{\varepsilon} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{Z_nX_{n+1}-X_nZ_{n+1}}{z-x}f(z)\,dz,$$

et cherchons si cette intégrale peut être rendue infiniment petite avec ε, *quel que soit n*. On peut l'écrire

$$\frac{X_{n+1}}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_n dz - \frac{X_n}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_{n+1}dz.$$

Les deux intégrales précédentes ont la même forme. Elles sont multipliées toutes deux par des coefficients de l'ordre de $n^{\gamma-\frac{1}{2}}$. Si donc on pose, pour abréger,

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-x},$$

il suffira de prouver que l'intégrale

$$(23)\qquad n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n dz,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction finie, peut être rendue infiniment petite avec ε, même quand n croît au delà de toute limite.

A cet effet, imitant un procédé déjà employé à l'article VII, comparons-la à la suivante :

$$(24)\qquad \int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2 dz = \theta J_n = \theta\frac{\Gamma^2(\gamma)}{2}n^{1-2\gamma},$$

considérée au même article où nous avons prouvé que θ est infiniment petit avec ε quand n grandit sans limite.

Décomposons l'intervalle $(0, \varepsilon)$ en deux autres séries d'intervalles : les uns, pour lesquels Z_n sera inférieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H étant quelconque; les autres, pour lesquels il sera supérieur à la même quantité. Pour les premiers intervalles, l'intégrale (46) sera plus petite que le résultat obtenu en remplaçant Z_n par sa limite supérieure, ce qui donnera

$$H\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)dz = \theta' H,$$

θ' étant infiniment petite avec ε, puisque l'intégrale précédente indépendante de n s'étend dans un intervalle au plus égal à ε.

Prenons maintenant l'intégrale (20) dans les autres intervalles, ceux pour lesquels Z_n est supérieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, et comparons-la à l'intégrale (24) prise dans les mêmes intervalles, on aura

$$\frac{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n dz}{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2 dz} = \theta_1\frac{z'^{\gamma-1}(1-z')^{\alpha-\gamma}\varphi(z')Z'_n}{z'^{\gamma-1}(1-z')Z'^2_n} = \frac{\theta_1\varphi(z')}{Z'_n},$$

z' désignant une valeur de z prise dans l'un des intervalles de l'intégration, θ_1 une quantité au plus égale à l'unité. Si nous remplaçons Z'_n par sa limite inférieure $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, nous déduirons de l'équation précédente

$$\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n dz < \frac{\varphi(z')}{H}n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2 dz,$$

l'inégalité ayant lieu en valeur absolue. Or l'intégrale du second membre est plus petite que l'intégrale (24). On a donc ainsi une limite supérieure des deux parties dans lesquelles on a décomposé l'intégrale (20). En réunissant les deux résultats obtenus, on a l'inégalité

$$n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n dz < H\theta' + \theta\frac{\Gamma^2(\gamma)\varphi(z')}{H},$$

θ, θ' étant infiniment petits avec ε, quel que soit n. Si donc la fonction $\varphi(z')$ ou $\frac{f(z')}{z'-x}$ demeure finie dans le voisinage de la valeur $z'=0$, on voit que l'intégrale (20) est infiniment petite avec ε, quel que soit n, et, par conséquent, qu'on peut la négliger dans la recherche de la limite de la somme S_n des n premiers termes de la série. En nous rappelant que les mêmes conclusions s'appliquent à l'intégrale prise dans le voisinage de la valeur 1 de z, nous obtenons la proposition suivante :

Toutes les fois qu'une fonction est telle que les coefficients de la série sont des intégrales ayant un sens déterminé, si la fonction ne devient infinie ni pour $x = 0$ ni pour $x = 1$, la série représente la fonction avec les mêmes particularités que les séries trigonométriques.

Notre raisonnement ne s'applique pas, on le voit, au cas où la fonction deviendrait infinie pour une des limites. C'est qu'en effet, en examinant cette hypothèse, nous allons être conduits à cette conclusion inattendue que, dans ce cas, la série peut bien être divergente.

Pour le prouver, nous traiterons le cas où la fonction se ramène à une somme de termes de la forme ax^p, en nombre limité, p étant négatif, auxquels s'ajoute une fonction finie pour $x = 0$. Cette fonction finie, nous n'avons pas à nous en occuper : on lui appliquera les méthodes précédentes. Il suffira donc d'examiner chacun des termes tels que ax^p ou x^p, le coefficient ne jouant aucun rôle.

Or nous avons déjà trouvé les coefficients du développement de x^p, quand il est possible. Si l'on pose

$$x^p = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots,$$

A_n est donné par la formule (18), et il est de l'ordre de n^{-2p-1}. Comme X_n est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, on voit que les termes de la série précédente seront de l'ordre de $n^{-2p-\frac{1}{2}-\gamma}$. Il faut donc, pour qu'ils tendent vers zéro, que l'on ait

$$p > -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Pour que les intégrales, au moyen desquelles se calculent les coefficients A_n, aient un sens, il faut déjà que l'on ait $p + \gamma > 0$. Mais cette dernière condition n'entraîne la précédente que si l'on a $\gamma < \frac{1}{2}$.

On peut, du reste, prouver que, si l'inégalité (25) est vérifiée, la série que développe x^p est effectivement convergente et qu'elle a pour somme x^p.

Appliquons, en effet, à cette fonction particulière la méthode générale. Nous aurons à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4J_n}\int_0^1 \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{x - z} z^p z^{\gamma-1} (1-z)^{\alpha-\gamma} dz. \tag{26}$$

Posons

$$\frac{z^p}{x-z} = \frac{z^p}{x} + \frac{z^{p+1}}{(x-z)x};$$

nous aurons d'abord à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4J_n x}\int (Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) z^p z^{\gamma-1} (1-z)^{\alpha-\gamma} dz$$

ou

$$-\frac{X_{n+1}}{4J_n x}\int_0^1 Z_n z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} dz + \frac{X_n}{4xJ_n}\int_0^1 Z_{n+1} z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} dz.$$

Les deux intégrales précédentes sont du même ordre que deux termes de la série trouvée pour x^p : elles tendent donc vers zéro. Il nous reste à considérer

$$-\frac{1}{4J_n x}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+1}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) dz;$$

mais cette intégrale ne diffère que par la forme de l'intégrale (26); p y est changé en $p+1$, et elle est divisée par x. En répétant la même opération q fois jusqu'à ce que $p+q$ soit devenu positif, on aura

$$-\frac{1}{4J_n x^q}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+q}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}) dz;$$

l'intégrale correspondra à une fonction z^{p+q}, qui ne deviendra plus infinie et aura par conséquent pour limite

$$\frac{x^{p+q}}{x^q} = x^p.$$

Ainsi, tant que p satisfait à l'inégalité (25), la série qui sert de développement à x^p est convergente et a pour somme x^p.

On verra de même que $(1-x)^q$ est développable en série convergente tant que q satisfait à l'inégalité

$$q > -\frac{\alpha-\gamma+1}{2} - \frac{1}{4}. \tag{27}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Pour qu'une fonction soit développable en une série convergente de *fonctions* X_n, *il faut et il suffit* : 1° *que les intégrales qui déterminent les coefficients de la série aient un sens;* 2° *que si la fonction devient infinie pour* $x = 0$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}$; 3° *que si elle devient infinie pour* $x = 1$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\alpha - \gamma + 1}{2} + \frac{1}{4}$.

Par exemple, dans le cas des polynômes de Legendre, toute fonction qui deviendrait infinie d'un ordre égal ou supérieur à $\frac{3}{4}$ pour $x = \pm 1$ ne serait pas développable en une série formée de ces polynômes.

Pour terminer ce sujet, il nous reste à dire quelques mots d'un cas qui n'a pas été traité, et à voir ce que devient la série pour les valeurs extrêmes $x = 0$, $x = 1$, par exemple, pour $x = 0$; on aura, dans ce cas, à chercher la limite de l'intégrale

$$(28) \qquad -\frac{1}{4J_n}\int_0 \frac{Z_{n+1} - Z_n}{z} f(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\, dz,$$

à laquelle, en vertu des formules (13) et (14), on peut donner la forme

$$-\frac{1}{4nJ_n}\int_0^1 \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right) f(x)\, x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\, dx.$$

On examinera la limite de l'une ou de l'autre de ces intégrales, limite qui n'est pas toujours égale à la fonction $f(0)$. J'ai déjà fait la discussion de cette question, pour le cas particulier des fonctions de Legendre, dans mon Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, 2e série, p. 1).

Comme il s'agit ici d'une valeur particulière, je me bornerai à examiner le cas où $f(x) - f(0)$ est de l'ordre de x et je poserai

$$f(x) = f(0) + x\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant finie pour $x = 0$. Alors l'intégrale (28) se ramènera à une somme de deux autres, l'une dans laquelle on remplacerait $f(x)$ par $f(0)$ et qui donnera comme limite $f(0)$, puisque, dans le développement d'une constante, la série se réduit à son premier terme $f(0)X_0$,

l'autre dans laquelle la fonction $f(z)$ sera remplacée par $z\varphi(z)$ et qui sera

$$(29) \qquad -\frac{1}{4J_n}\int_0^1 (Z_{n+1} - Z_n)\,\varphi(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\, dz,$$

et l'on appliquera à cette intégrale les méthodes que nous avons employées. On verra, comme précédemment, que l'on peut négliger la partie de l'intégrale dans laquelle z est voisine soit de 0, soit de 1 au moins pour γ supérieur à $\frac{1}{2}$, et l'on pourra ensuite, en prenant l'intégrale entre les limites ε, $1-\varepsilon$, remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, ce qui donnera une intégrale de la forme

$$\frac{2n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)}\int \sin^{\gamma-\frac{1}{2}}\varphi \cos^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}\varphi\, f_1(\varphi)\, d\varphi \sin\left[(2n+\alpha+1)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right];$$

or l'évaluation de l'ordre de cette intégrale est le point de départ de notre travail. On saura donc traiter cette question, sur laquelle nous n'insisterons pas pour les raisons déjà indiquées.

Nous terminerons cet article par une remarque essentielle. Il n'est pas nécessaire que la fonction $f(x)$ qu'on développe soit réelle; si elle est imaginaire, il suffira de considérer successivement la partie réelle et la partie imaginaire. Les raisonnements ne subiront aucune modification.

X.

Après avoir examiné les séries ordonnées suivant les polynômes X_n, quand la variable x demeure réelle et comprise entre -1 et $+1$, on peut se demander si elles sont convergentes dans une étendue plus grande et il est maintenant très-facile de résoudre cette question.

Cherchons d'abord les limites de la convergence d'une série de polynômes X_n

$$A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots;$$

il résulte de l'expression approchée de nos polynômes

$$X_n = \varphi(\xi)\, n^{\frac{1}{2}-\gamma}\, \xi^n (1 + \varepsilon_n),$$

donnée à l'article II, qu'on peut assimiler les séries de ce genre à celles qui sont ordonnées suivant les puissances entières de la variable ξ. Les courbes limitant la région de convergence seront celles pour lesquelles ξ aura un module constant, c'est-à-dire que ce seront des ellipses ayant pour foyers les deux points 0 et 1. Ainsi toutes les séries de fonctions X_n, quels que soient les nombres α et γ, si elles sont convergentes, le sont à l'intérieur d'une certaine ellipse qui peut, d'ailleurs, se réduire à la portion de ligne droite comprise entre les foyers.

Admettons que la convergence ait lieu à l'intérieur d'une de ces ellipses, je dis que, dans la région de convergence, la série représentera une fonction finie, continue, qu'elle pourra être différentiée, intégrée, etc.

Soit, en effet, a le module de ξ sur l'ellipse de convergence, à l'intérieur de toute ellipse correspondant au module $a - \rho$ plus petit que a; la série de fonctions X_n sera uniformément convergente, et, comme ses termes sont des fonctions continues, elle sera elle-même continue; elle pourra être différentiée, intégrée. On voit, d'après cela, que si l'on développe sur le segment $(0, 1)$, d'après les méthodes précédentes, une fonction discontinue, ou devenant infinie, ou telle qu'une de ses dérivées soit discontinue ou infinie sur le même segment, la convergence de la série ne pourra s'étendre au delà de ce segment.

Ces remarques nous permettent d'étendre, au moins pour une classe importante de fonctions, les résultats que nous avons trouvés. Supposons qu'il s'agisse de développer une fonction $f(x)$ suivant une série formée de ces polynômes que nous avons écartés, et pour lesquels l'une au moins des quantités γ, $\alpha - \gamma + 1$ est négative. Si la fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une certaine ellipse, le développement est possible; nous le démontrerons plus loin. Soit

$$f(x) = \Sigma A_n X_n$$

ce développement.

Pour en déterminer les coefficients, on remarquera que, si l'on

prend la dérivée d'ordre p, on a

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \Sigma A_n \frac{d^p X_n}{dx^p}.$$

Or les coefficients $\frac{d^p X_n}{dx^p}$ sont aussi des séries hypergéométriques qui ne diffèrent des polynômes X_n qu'en ce que γ et $\alpha - \gamma$ sont augmentés de p. En prenant les dérivées jusqu'à un ordre convenable, on aura donc des polynômes, pour lesquels γ et $\alpha - \gamma + 1$ seront positifs, et auxquels on pourra, par conséquent, appliquer les méthodes précédentes de détermination des coefficients.

XI.

Nous allons maintenant démontrer que, si une fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une ellipse donnée, elle est développable en une série de fonctions X_n convergentes à l'intérieur de cette ellipse. A cet effet, nous emploierons la méthode suivie par MM. Neumann et Heine dans le cas particulier des polynômes de Legendre, et nous développerons d'abord $\frac{1}{x-y}$ en une série de fonctions X_n.

Posons

$$\frac{1}{x-y} = \Sigma \frac{X_n Q_n}{J_n}. \tag{30}$$

Les coefficients Q_n sont des fonctions de y, qu'il s'agit d'étudier et de déterminer. Si nous supposons encore γ, $\alpha - \gamma + 1$ positifs, nous aurons

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\, dy}{x-y}. \tag{31}$$

Ces fonctions Q_n seront appelées *fonctions de seconde espèce*. Elles satisfont à une équation différentielle qu'on peut former de la manière suivante :

u désignant $\frac{1}{x-y}$, on peut établir une identité de la forme suivante :

$$x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[\gamma-(\alpha+1)x]\frac{\partial u}{\partial x}+n(n+\alpha)u$$
$$=y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f_1(y)\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{H}u.$$

Il suffit de prendre

$$f_1(y)=2-\gamma+(\alpha-3)y,\quad \mathrm{H}=(n+1)(n+\alpha-1).$$

En substituant à la place de u son développement en série, et en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction X_p, le premier membre prend la forme

$$\Sigma[n(n+\alpha)-p(p+\alpha)]\frac{X_p Q_p}{J_p},$$

et ne contient plus le terme en X_n. Il doit donc en être de même du second. En égalant le coefficient de X_n à zéro, on trouve

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned}&y(1-y)\frac{d^2Q_n}{dy^2}+[2-\gamma+(\alpha-3)y]\frac{dQ_n}{dy}\\&\qquad+(n+1)(n+\alpha-1)Q_n=0,\end{aligned}\right.$$

équation différentielle à laquelle satisfait Q_n, et que l'on peut vérifier en prenant pour Q_n l'intégrale (31).

Cette équation différentielle, obtenue par différents auteurs dans le cas des polynômes de Legendre, se confond alors $(\gamma=\alpha=1)$ avec celle qui caractérise les polynômes X_n. Dans les autres cas, elle en est, comme on voit, différente par les coefficients. Mais, si l'on pose

$$(33)\qquad Q_n=y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}U_n,$$

un calcul qui ne présente aucune difficulté montre que U_n satisfait à la même équation que les polynômes X_n. C'est là un résultat remarquable qui ramène la théorie des fonctions de première et de seconde espèce à la considération d'une seule équation différentielle; mais il est utile de remarquer que les fonctions Q_n, d'après leur expression

(31), sont continues et finies dans toute l'étendue du plan, sauf sur le segment (0, 1), propriété qui, d'après la formule (33), n'appartiendra que très-exceptionnellement à U_n.

Si les fonctions Q_n ne satisfont pas à la même équation différentielle que les polynômes X_n, elles s'en rapprochent à un autre point de vue : elles satisfont à la même équation aux différences, c'est-à-dire il y a entre trois fonctions Q_n consécutives la même relation qu'entre les trois fonctions X_n de même rang. C'est ce que l'on établira de la manière suivante. L'équation (30) peut s'écrire

$$X_0=1=\sum\frac{Q_n}{J_n}(xX_n-yX_n).$$

Exprimons, au moyen de l'équation (6), xX_n en fonction linéaire de X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, et substituons cette expression dans la formule précédente, nous aurons

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}X_0=\sum\frac{X_n}{J_n(2n+\alpha)}\Big[&\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n-Q_{n+1})\\&+\frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n-Q_{n-1})-y(2n+\alpha)Q_n\Big].\end{aligned}\right.$$

Tant que n est différent de zéro, le coefficient de X_n doit être nul. On a donc

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n-Q_{n+1})\\&\quad+\frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n-Q_{n-1})-y(2n+\alpha)Q_n=0.\end{aligned}\right.$$

C'est la même équation, sauf le changement de x en y, que pour les polynômes X_n; mais il convient de remarquer qu'elle ne s'applique pas pour $n=0$. En effet, le coefficient de X_0 dans le second membre de la formule (34) doit être égal, non plus à 0, mais à 1. On a donc

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned}Q_1&=Q_0\left[1-\frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right]-\frac{\alpha+1}{\gamma}J_0\\&=Q_0\left[1-\frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right]-\frac{\alpha+1}{\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation montre qu'il suffira de connaître l'une des fonctions pour en déduire toutes les autres.

On voit que Q_n s'exprimera en fonction linéaire de Q_0, le coefficient de Q_0 et le terme indépendant étant deux polynômes. De plus, le coefficient de Q_0 dans l'équation précédente étant le polynôme X_1, où l'on a remplacé x par y, le coefficient de Q_0 dans Q_n sera de même le polynôme $X_n(y)$. C'est, du reste, une forme de Q_n, qu'on peut mettre directement en évidence. La formule (32) peut s'écrire

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx + Y_n \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y},$$

Y_n désignant le polynôme X_n, où l'on a remplacé x par y. On a donc

$$Q_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx + Y_n Q_0.$$

En remarquant que $X_n - Y_n$ est divisible par $x - y$, et posant

$$(37)\qquad R_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x-y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx,$$

on voit que R_n est un polynôme en y d'ordre $n-1$, et l'on a

$$(38)\qquad Q_n(y) = Y_n Q_0(y) + R_n(y),$$

ce qui met en évidence l'expression de $Q_n(y)$ en fonction de $Q_0(y)$.

D'après cela, si l'on veut résoudre complétement l'équation aux différences à laquelle satisfont les polynômes X_n,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(u_n - u_{n+1}) \\ &\quad + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(u_n - u_{n-1}) - (2n+\alpha)x u_n = 0, \end{aligned}\right.$$

on a déjà deux solutions :

$$1^\circ\ X_n(x), \quad 2^\circ\ R_n(x),$$

et par conséquent la solution la plus générale sera

$$\varphi(x) X_n(x) + \psi(x) R_n(x).$$

En particulier, on aura $Q_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x), \quad \psi(x) = 1;$$

$U_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x) x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}, \quad \psi(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}.$$

XII.

Revenons à la formule qui donne $Q_n(y)$; remplaçons-y X_n par son expression comme dérivée $n^{\text{ième}}$, et intégrons n fois par partie : nous aurons

$$(40)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}}{(x-y)^{n+1}}\,dx.$$

Cette formule, donnée par Jacobi, est très-importante pour la théorie des fractions continues. Développons, en effet, l'intégrale suivant les puissances de $\frac{1}{y}$. Le développement commence au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$, et l'on a

$$(41)\quad Q_n = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha+1)} \frac{1}{y^{n+1}} F\left(\gamma+n, n+1, 2n+\alpha+1, \frac{1}{y}\right).$$

Si nous rapprochons ce résultat de la formule

$$(42)\qquad Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n},$$

on voit que le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$, suivant les puissances descendantes de y, commencera au terme en $\frac{1}{y^{2n+1}}$. On aura donc

$$Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{\varepsilon}{y^{2n+1}} + \cdots. \tag{43}$$

Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ sera la réduite d'ordre n du développement de Q_0 en fraction continue. Or, d'après la formule (41), Q_0 n'est autre chose, à un facteur constant près, que l'importante série

$$F\left(\gamma, 1, \alpha + 1, \frac{1}{y}\right),$$

qui comprend comme cas particulier le binôme, le logarithme, etc.

La forme si simple de la nouvelle expression des fonctions de seconde espèce nous indique un nombre illimité de fonctions génératrices pour les fonctions Q_n. Ainsi l'on aura

$$\int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y}\,\varpi\left[\frac{ux(1-x)}{x-y}\right] dx = \Sigma_n\, \varpi_n(0)\, \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{(1.2\ldots n)^2} Q_n(y) u^n. \tag{44}$$

En particulier,

$$\int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y-ux(1-x)} = \sum_n \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(n+1)} u^n Q_n(y). \tag{45}$$

Pour les fonctions de Legendre, on trouverait

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}} \log \frac{u-1+2y+\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}}{u-1+2y-\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}} = \Sigma u^n Q_n(y).$$

Enfin l'expression (40) de Q_n est très-propre à nous faire connaître une expression approchée de Q_n pour n très-grand. L'intégrale qui figure dans cette formule a déjà été considérée (art. IV) et, pour avoir l'expression de Q_n, il suffira d'appliquer l'équation (29) de cet article et de remplacer les factorielles par leurs expressions approchées. Posons

$$y = -\frac{(\eta+1)^2}{4\eta}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant choisi de manière que le module de η soit supérieur à l'unité; nous aurons

$$\frac{Q_n}{J_n} = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{3-\alpha} n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma)} (1-\eta^{-1})^{\gamma-\frac{3}{2}} (1+\eta^{-1})^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}} \eta^{-n-1}(1+\varepsilon_n), \tag{46}$$

ou plus simplement

$$\frac{Q_n}{J_n} = n^{\gamma-\frac{1}{2}} f(\eta)\,\eta^{-n-1}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2-4y}, \tag{47}$$

$f(\eta)$ étant une fonction, toujours la même, de η. Cette formule est toute pareille à celle de X_n, qu'on peut écrire, comme nous l'avons vu,

$$X_n = n^{\frac{1}{2}-\gamma} \varphi(\xi)\,\xi^n, \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2-4x}, \tag{48}$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction connue par ce qui précède (art. II). ξ et η ont respectivement pour modules la somme des deux demi-axes des ellipses de foyers 0, 1 passant par les points qui représentent les variables x, y.

Nous terminerons par une remarque sur l'étendue des résultats obtenus. Notre point de départ supposait γ, $\alpha - \gamma + 1$ positifs; mais nous pouvons maintenant nous affranchir de cette supposition. En effet, la formule (40) est valable, quels que soient α et γ, pour des valeurs suffisamment grandes de n, et l'équation aux différences déterminera les fonctions pour lesquelles l'intégrale qui y figure n'aura aucun sens. Dans tous les cas, les fonctions Q_n ainsi déterminées satisfont à l'équation différentielle du second ordre que nous avons donnée pour elles. Nous trouvons ainsi, dans les résultats obtenus pour une hypothèse particulière, un point de départ pour les appliquer à tous les polynômes qui naissent de la série hypergéométrique.

XIII.

Nous pouvons maintenant démontrer la convergence et déterminer la somme de la série qui sert de développement à $\frac{1}{x-y}$, en employant la formule principale de notre Mémoire *Sur le théorème de Sturm*.

Supposons que l'on désigne par $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ deux solutions distinctes ou confondues de la même équation aux différences

$$u_n X_{n+1} + (v_n + w_n x) X_n + t_n X_{n-1} = 0,$$

où u_n, v_n, w_n, t_n sont des fonctions de n. On peut toujours, en multipliant par une fonction de n, donner à cette équation la forme

$$u_n X_{n+1} + u_{n-1} X_{n-1} + (v_n + w_n x) X_n = 0.$$

On aura, en exprimant que les deux solutions satisfont à cette équation,

$$u_n \varphi_{n+1}(x) + u_{n-1} \varphi_{n-1}(x) + (v_n + w_n x) \varphi_n(x) = 0,$$
$$u_n \psi_{n+1}(y) + u_{n-1} \psi_{n-1}(y) + (v_n + w_n y) \psi_n(y) = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $\psi_n(y)$, la seconde par $-\varphi_n(x)$ et ajoutons-les; nous obtiendrons la formule

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} & u_n \frac{\varphi_{n+1}(x)\psi_n(y) - \psi_{n+1}(y)\varphi_n(x)}{x-y} \\ & - u_{n-1} \frac{\varphi_n(x)\psi_{n-1}(y) - \varphi_{n-1}(x)\psi_n(y)}{x-y} = - w_n \varphi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned}\right.$$

Le terme $-w_n \varphi_n(x) \psi_{n-1}(y)$ se présente comme la différence de deux expressions qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de n en $n-1$, et par suite la somme

$$\sum_{n=h}^{n=k} w_n \varphi_n(x) \psi_n(y)$$

se ramènera toujours à la différence de deux termes semblables.

Appliquons cette remarque générale à notre équation aux différences et aux deux fonctions $X_n(x) Q_n(y)$. On trouvera

$$\begin{aligned} \frac{X_n Q_n}{J_n} = {} & \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)} \frac{X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n}{J_n(x-y)} \\ & - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+1)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_{n+1}(x-y)}. \end{aligned}$$

L'équation aux différences admet comme solution Q_n à partir de $n=1$. Faisons la somme des équations qu'on obtient en donnant dans la formule précédente à n les valeurs $1.2\ldots n$; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = {} & \frac{1+\alpha-\gamma}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{(x-y) J_1} \\ & - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_{n+1}(x-y)}. \end{aligned}$$

Ajoutons aux deux membres $\frac{X_0 Q_0}{J_0}$ et remplaçons Q_1 par sa valeur tirée de la formule (36), nous aurons

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} \\ & = \frac{1}{x-y} - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule peut être considérée comme la généralisation de la propriété bien connue que possède le développement de $\frac{1}{x-y}$ suivant les puissances de x. Dans l'un et l'autre cas on peut ramener à la réunion de deux termes la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de la série. La marche que nous avons suivie montre que cette propriété subsistera pour tous les polynômes formant une suite de Sturm. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier article.

Pour prouver que la série est convergente et a pour somme $\frac{1}{x-y}$, il suffira d'établir que le terme

$$\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}$$

tend vers zéro lorsque n grandit indéfiniment. Or, si nous remplaçons les polynômes par leurs expressions approchées (46), (47), nous obtenons pour le reste la formule

$$\frac{f(\eta)\varphi(\xi)}{4(x-y)} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)(1+\varepsilon_n).$$

Il tendra donc vers zéro toutes les fois que le module de ξ sera inférieur à celui de η, et il croîtra indéfiniment dans le cas contraire. Ainsi nous obtenons la proposition suivante :

La série

$$\frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots$$

sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{x-y}$ *seulement si le point* x *est à l'intérieur de l'ellipse passant par le point* y *et ayant pour foyers les deux points* o, 1.

Si les deux points x, y étaient sur la même ellipse, la somme de la série serait indéterminée.

En étudiant de même la série

$$\sum \frac{Q_n(x) Q_n(y)}{J_n},$$

on verra qu'elle est toujours convergente et a pour somme

$$\frac{Q_0(x) - Q_0(y)}{x-y}.$$

XIV.

Considérons maintenant une fonction quelconque continue et uniforme dans l'anneau compris entre deux des ellipses homofocales si souvent considérées, et soit A le point représentant la variable t.

D'après la formule de Cauchy, on aura

$$2\pi i f(t) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} - \int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t},$$

les deux intégrales étant prises sur les contours C, C' des deux ellipses supposées, parcourus dans le sens direct. Cette formule nous permet de développer $f(t)$. En effet, appelons T_n ce que devient le polynôme X_n quand on y remplace x par t. Nous aurons sur le contour C

la série convergente

$$\frac{1}{z-t} = -\sum \frac{T_n Q_n(z)}{J_n},$$

et par conséquent

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} = -\sum \frac{T_n}{J_n} \int_C f(z) Q_n(z)\,dz.$$

Sur le contour C' on aura, au contraire,

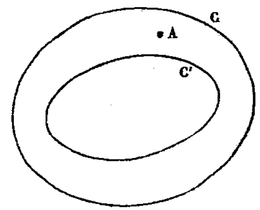
$$\frac{1}{z-t} = \sum \frac{Z_n Q_n(t)}{J_n},$$

la série étant également convergente ; et, par suite,

$$\int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t} = \sum \frac{Q_n(t)}{J_n} \int_C f(z) Z_n\,dz.$$

En réunissant ces deux résultats, nous obtenons la formule

$$(51) \quad f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum \frac{T_n}{J_n} \int_C f(z) Q_n(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{Q_n(t)}{J_n} \int_{C'} f(z) Z_n\,dz,$$



c'est-à-dire le développement de $f(t)$ en une série de fonctions de première et de seconde espèce. L'emploi de l'équation (50) nous donnerait au besoin une limite de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme de rang quelconque.

Si la fonction est continue à l'intérieur de l'ellipse (C) tout entière, les intégrales multiplicateurs des fonctions Q_n sont évidemment nulles, et il ne reste que les fonctions de première espèce. Au contraire, si la fonction est continue à l'extérieur de l'ellipse (C') jusqu'à l'infini, sans point singulier à l'infini, la série ne contient plus que des fonctions de seconde espèce. Nous obtenons, comme cas particulier, la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en une série de fonctions X_n, c'est qu'elle soit continue, uniforme et finie à l'intérieur d'une ellipse.

XV.

Nous terminerons notre travail en donnant diverses expressions de la fonction Q_n.

L'équation à laquelle satisfait X_n peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left[x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\frac{dy}{dx}\right] = -n(n+\alpha)yx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}.$$

Nous en connaissons deux solutions, X_n et la fonction que nous avons appelée U_n. On aura donc entre ces deux intégrales la relation

$$x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\left(U_n\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dU_n}{dx}\right) = C.$$

En intégrant et se rappelant que U_n et Q_n sont nuls pour $x=\infty$, on a

$$U_n = CX_n\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2},$$

et par conséquent

$$Q_n = CX_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2}.$$

Pour obtenir le coefficient C, il suffit de développer suivant les puissances décroissantes de x et de comparer le premier terme de ce développement à celui de la formule (41). On trouve ainsi

$$C = (2n+\alpha)J_n,$$

$$(52)\qquad Q_n(x) = (2n+\alpha)J_nX_nx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X^2}$$

Il m'a paru intéressant de vérifier que cette intégrale se ramène à une fonction linéaire de Q_0.

A cet effet, décomposons en fractions simples $\frac{1}{x(1-x)X_n^2}$. Si nous appelons u une racine quelconque du polynôme X_n, nous aurons

$$(53)\qquad \frac{1}{x(1-x)X_n^2} = \frac{1}{x} + \frac{h}{1-x} + \sum\frac{B_u}{x-u} + \sum\frac{A_u}{(x-u)^2}.$$

En calculant A_u, B_u, et tenant compte de l'équation différentielle pour éliminer de l'expression de B_u la dérivée seconde de X_n, on trouve

$$A_u = \frac{1}{u(1-u)U'^2_u},\quad B_u = A_u\left(\frac{\alpha-\gamma}{u-1} + \frac{\gamma-1}{u}\right).$$

On aura ainsi

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2} &= \frac{d}{dx}\sum\frac{A_u}{(u-x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}\\ &\quad+\frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[1+\sum\frac{(\gamma-1)A_u}{u}\right]\\ &\quad+\frac{1}{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[h-1+\sum\frac{(\alpha-\gamma)A_u}{1-u}\right.\\ &\qquad\left.+\sum\frac{(1-\gamma)A_u}{u}\right].\end{aligned}\right.$$

Le dernier terme disparaît, car son coefficient est celui de $\frac{1}{x}$ dans le développement du second membre de l'équation (53), suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, coefficient qui doit être nul, car le terme en $\frac{1}{x}$ n'existe pas dans le développement du premier membre de la même équation. En substituant l'expression de $\frac{1}{X_n^2}$ tirée de la formule (54) dans l'intégrale (52), et posant, pour abréger,

$$H_n = 1 + \sum\frac{(\gamma-1)A_u}{u},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= (2n+\alpha)J_n\sum\frac{A_uX_n}{x-u}\\ &\quad+(2n+\alpha)J_nH_nX_nx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty\frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en vertu de la même équation (52),

$$Q_0 = \alpha J_0 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx}{x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}.$$

En comparant cette équation à la précédente, on trouve qu'en posant

$$R_n(x) = (2n+\alpha) J_n \sum \frac{A_u X_n}{x-u}$$

on a

$$Q_n(x) = R_n(x) + \frac{(2n+\alpha) J_n H_n}{\alpha J_0} X_n Q_0.$$

C'est bien la forme générale que nous avons trouvée, et l'on voit que la constante

$$\frac{(2n+\alpha) J_n H_n}{\alpha J_0}$$

doit être égale à l'unité. Toutefois, les intégrales précédentes n'ont un sens que si l'on a $\alpha > 0$. La démonstration suppose donc remplie cette condition.

Les fonctions de seconde espèce peuvent recevoir d'autres expressions très-élégantes.

Par exemple, si l'on différentie n fois l'équation différentielle à laquelle satisfont X_n et U_n,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dy}{dx} + n(n+\alpha)y = 0,$$

on trouve

$$x(1-x)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + [n+\gamma-(\alpha+2n+1)x]\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0,$$

équation qui admet deux solutions :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0, \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La première dérive de X_n, la seconde de U_n. On a donc

$$(55) \qquad \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

et, par suite,

$$(56) \qquad U_n = C\left(\int_x^{\infty}\right)^{n+1}\frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}} = C\int_x^{\infty}\frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

On en déduit

$$Q_n = Cx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La constante C se détermine par la considération du premier terme du développement, et l'on trouve

$$(57) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

ce qu'on peut aussi écrire, d'après un théorème connu relatif aux intégrations répétées,

$$(58) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{(y-x)^n dy}{y^{n+\gamma}(1-y)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

équation toute pareille à celle de Jacobi et se prêtant à la méthode de Laplace pour l'approximation de Q_n.

Nous donnerons enfin une expression de Q_n, qui n'est que curieuse.

L'équation (32), à laquelle satisfait Q_n, est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dV}{dx}x^{1-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n}\right] = Cx^{-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n+1}.$$

Il résulte de cette remarque la nouvelle expression de Q_n

$$Q_n = C\frac{d^n}{dx^n}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}$$

comme dérivée $n^{\text{ième}}$. Le calcul de la constante C nous donne le résultat

$$(59) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{dx}{x^{\gamma+n}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

Enfin nous ajouterons cette remarque, que la formule de Jacobi peut aussi s'écrire

$$(60) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}}{y-x} dy.$$

On voit que nous avons huit expressions différentes des fonctions Q_n

XVI.

Il nous semble que la méthode employée dans cette partie de notre travail va au delà du problème que nous avons traité, et qu'elle pourra s'étendre à l'étude d'une classe étendue de développements, de tous ceux qui sont ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que ces fonctions soient des polynômes de degrés $0, 1, \ldots, X_0, X_1, \ldots$ jouissant de la propriété suivante :

Il existe une fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$(61) \qquad \int_b^a f(x) X_m X_n dx = 0$$

toutes les fois que m est différent de n.

On peut d'abord démontrer, et cette propriété est du reste connue, que ces polynômes forment une suite de Sturm.

Remarquons d'abord qu'il résulte de la formule précédente que l'on a

$$(62) \qquad \int_a^b f(x) P X_n dx = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré inférieur à n.

Ce point étant admis, supposons, pour préciser, qu'on ait multiplié chaque polynôme par un nombre tel que le coefficient de la plus haute puissance de x soit l'unité. Le premier X_0 sera égal à 1. De plus, le produit xX_n pourra évidemment s'exprimer de la manière

suivante :

$$x X_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1} + \ldots + C_n X_0.$$

Je dis que, dans cette formule, toutes les constantes sont nulles à partir de C_2. Multiplions, en effet, les deux membres par

$$f(x) X_{n-p} dx,$$

et intégrons entre les limites a et b, nous aurons, en tenant compte de l'équation (61),

$$\int_a^b f(x)\, x X_{n-p} X_n\, dx = C_p \int_a^b X_{n-p}^2 f(x)\, dx.$$

Nous désignerons par J_p l'intégrale

$$J_p = \int_a^b X_p^2 f(x)\, dx.$$

que nous supposerons toujours différente de zéro. L'équation précédente deviendra

$$(63) \qquad \int_a f(x)\, x X_{n-p} X_n dx = C_p J_{n-p}.$$

Or, si p est égal ou supérieur à 2, xX_{n-p} sera au plus du degré $n-1$, et, en vertu de la formule (62), le premier membre sera nul. On aura donc

$$C_p = 0.$$

Ainsi l'équation (62) est de la forme

$$(64) \qquad x X_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1},$$

qui montre bien que les polynômes forment une suite de Sturm. On aurait de même

$$(65) \qquad x X_{n-1} = X_n + D_0 X_{n-1} + D_1 X_{n-2}.$$

Cela posé, dans la formule (63), faisons $p = 1$; on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int_a^b f(x)\, x\, X_{n-1} X_n\, dx.$$

Substituons dans le second membre la valeur de $x X_{n-1}$ déduite de l'équation (65) ; on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int f(x) X_n^2\, dx = J_n,$$

et par conséquent

$$C_1 = \frac{J_n}{J_{n-1}}. \tag{66}$$

L'équation (64) prend donc la forme

$$x X_n = X_{n+1} + \alpha_n X_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} X_{n-1}. \tag{67}$$

Désignons maintenant par Y_n le résultat de la substitution de y à x dans les fonctions X_n et changeons x en y dans l'équation précédente. Elle deviendra

$$y Y_n = Y_{n+1} + \alpha_n Y_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} Y_{n-1}.$$

Multiplions cette équation par X_n, la précédente par $-Y_n$ et ajoutons les résultats obtenus ; nous aurons

$$\frac{X_n Y_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x-y)} - \frac{X_n Y_{n-1} - X_{n-1} Y_n}{J_{n-1}(x-y)}.$$

Si dans cette formule nous remplaçons successivement n par $0, 1, 2, \ldots$ et que nous fassions la somme des résultats obtenus, nous trouverons

$$\frac{X_0 Y_0}{J_0} + \frac{X_1 Y_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Y_n}{1} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x-y)}. \tag{68}$$

Supposons maintenant qu'on veuille développer une fonction $\varphi(x)$ en une série de polynômes X_n

$$\varphi(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots.$$

En multipliant les deux membres par $f(x) X_n\, dx$ et intégrant, on aura

$$A_n J_n = \int_a^b \varphi(x) f(x) X_n\, dx.$$

D'où il suit que l'on aura pour $\varphi(x)$ la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{X_n}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) Y_n\, dy,$$

dont il s'agit de démontrer la convergence et de déterminer la somme. Or, en désignant par S_n la somme des $n+1$ premiers termes, on aura

$$S_n = \int_a^b \varphi(y) f(y) \left(\frac{X_0 Y_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Y_n}{J_n}\right) dy$$

ou, d'après la formule (68),

$$S_n = \frac{1}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{x-y}\, dy.$$

Toute la difficulté sera ramenée à la recherche de la limite de cette intégrale.

Considérons, en particulier, la fonction $\frac{1}{x-y}$ et soit

$$\frac{1}{x-y} = \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Q_n}{J_n} + \ldots.$$

On aura

$$Q_n = \int_a^b \frac{f(x) X_n\, dx}{x-y}. \tag{69}$$

Nous appellerons les polynômes X_n fonctions de première espèce et les fonctions Q_n fonctions de seconde espèce.

Il est aisé de reconnaître que les fonctions de seconde espèce satisfont à la même équation aux différences que les polynômes X_n. On a, en effet,

$$\frac{y Q_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = \int_a^b \frac{f(x)\, dx}{x-y} \left(\frac{y X_n}{J_n} - \frac{X_{n+1}}{J_n} - \alpha_n X_n - \frac{X_{n-1}}{J_{n-1}}\right)$$

ou, en tenant compte de l'équation aux différences (67) pour les polynômes X_n,

$$\frac{y Q_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = -\int_a^b \frac{f(x)\,dx\,X_n}{J_n} = -\frac{1}{J_n}\int_a^b f(x)\,X_n X_0\,dx;$$

le second membre est nul tant que n est différent de zéro, et pour $n = 0$ il se réduit à -1. On a donc

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y Q_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_{n+1}} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = 0, \quad n > 0,\\ &\frac{y Q_0}{J_0} - \frac{Q}{J_0} - \alpha_0 Q_0 = -1. \end{aligned}\right.$$

Ces formules permettent de calculer de proche en proche toutes les fonctions de seconde espèce au moyen de la première.

En éliminant α_n entre les équations (71), (67), on aura

$$\frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n}{J_{n-1}(x-y)}$$

et par suite

$$\frac{X_1 Q_1}{J_1} + \frac{X_2 Q_2}{J_2} \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{J_n(x-y)}.$$

En substituant à X_1, Q_1 leurs valeurs, on aura la formule définitive

$$(72)\qquad \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \ldots + \frac{X_i Q_n}{J_n} = \frac{1}{x-y} - \frac{X_n Q_{n+1} - X_{n+1} Q_n}{J_n(x-y)}$$

et il ne restera plus qu'à chercher sous quelles conditions le dernier terme du second membre tend vers zéro pour avoir dans tous les cas les conditions de convergence de la série qui développe $\frac{1}{x-y}$.

Une fois cette recherche faite, le théorème de Cauchy permettra de développer toute fonction $F(z)$ en une série formée de fonctions de première et de seconde espèce.

C'est la méthode que nous avons suivie dans ce travail. Les rapports de la théorie précédente et de celle des fractions continues sont à peu près évidents.

D'abord, si l'on développe Q_n suivant les puissances de $\frac{1}{y}$, le dévelop-

pement commencera au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} -Q_n &= \int_a^b \frac{f(x)\,X_n\,dx}{y-x}\\ &= \int_a^b f(x)\,X_n\,dx\left[\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{y^n} + \frac{x^n}{y^n(y-x)}\right] \end{aligned}$$

ou, en se rappelant les propriétés des intégrales, $\int f(x)\,x^p X_n\,dx$,

$$(73)\qquad Q_n = \frac{1}{y^n}\int_a^b \frac{f(x)\,X_n\,x^n\,dx}{x-y},$$

formule qui met en évidence la propriété annoncée.

D'autre part, on peut écrire

$$Q_n = \int_a^b f(x)\,\frac{X_n - Y_n}{x-y}\,dx + Y_n\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}.$$

Le premier terme du second membre est un polynôme $R_n(y)$. Le second est le produit de Y_n par Q_0. On aura donc

$$Q_n = R_n + Y_n Q_0$$

ou

$$Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n}.$$

Le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$ suivant les puissances décroissantes de y commencera au terme $\frac{1}{y^{2n+1}}$. Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite du développement de

$$Q_0 = \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}$$

en fraction continue.

Cette remarque établit le lien entre notre théorie et celle que M. Heine a constituée pour l'intégrale précédente.