LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

VOLUME III.

Teoria delle Trasformazioni delle Superficie applicabili sulle quadriche

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1909

PREFAZIONE

Il presente volume, che il lettore vorrà riguardare come un complemento alle mie *Lezioni di geometria differenziale* [2.ª edizione in due volumi. Pisa, Spoerri 1902-1903], è tutto dedicato allo studio delle superficie applicabili sulle superficie generali di 2.° grado (quadriche). Esso contiene un'esposizione più completa, e semplificata al tempo stesso, delle teorie fondamentali da me sviluppate in un lavoro che ebbe l'onore di essere accolto fra le Memorie dell'Accademia di Francia [1]).

La risoluzione completa del più importante problema dell'applicabilità che consiste nella determinazione di tutte le superficie di assegnato elemento lineare non è riuscita, come ben si sa, che in pochissimi casi particolari. Ma lo sviluppo dei metodi della geometria infinitesimale, dando un nuovo aspetto al problema, ha condotto ad attribuire un'importanza sempre maggiore ad una specie di procedimenti ricorrenti, o di parziale integrazione, mediante i quali, partendo da una superficie del dato elemento lineare, si riesce a costruirne infinite nuove, con un numero grande quanto si vuole di costanti arbitrarie.

Il primo esempio di siffatti procedimenti venne offerto dalla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, iniziata nella mia tesi di abilitazione del 1879 colla trasformazione complementare e generalizzata poi felicemente da Bäcklund nel 1883 colla trasformazione che porta il suo nome. Lo sviluppo ed il perfezionamento di questa teoria, a cui hanno principalmente contribuito Lie, Darboux e Guichard, si sono protratti per tutto un ventennio ed i risultati acquisiti costituiscono ora un importante capitolo, ormai ben noto, della geometria infinitesimale [2]).

---

[1]) T. XXXIV des Mémoires des Savants étrangers.

[2]) V. DARBOUX, *Leçons* ecc., t. III, livre VII, chap. XII, XIII e le mie *Lezioni* ecc., vol. II, cap. XXIV e XXV.

Guichard fu il primo che si occupò di ricercare metodi analoghi di trasformazione per le superficie applicabili sulle quadriche. Particolarmente notevoli per eleganza geometrica sono i risultati da lui conseguiti per le deformate delle quadriche di rotazione, risultati che già ho avuto occasione di esporre nel secondo volume di queste lezioni (Cap. XVII). Per quanto riguarda le quadriche generali, i metodi di trasformazione che Guichard ha fatto conoscere sin qui, in brevi comunicazioni all'Accademia di Parigi a cominciare dal 1897, si discostano notevolmente da quelli geometrici già noti per le superficie a curvatura costante. Essi si fondano principalmente sulle proprietà delle equazioni a derivate parziali del 2.° ordine *del tipo di Moutard*, che ammettono gruppi di soluzioni quadratiche, ed utilizzano considerazioni di geometria infinitesimale a più di tre dimensioni.

Fin dai miei primi studî su questo argomento (1899) io posi la ricerca sopra tutt'altra via che, senza uscire dal campo dell'ordinaria geometria infinitesimale, mirava a costruire una teoria generale delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche coi mezzi stessi che servono per le deformate della sfera. In particolare mi lasciai guidare dall'idea che l'elemento essenziale geometrico per le trasformazioni dovesse anche qui essere fornito da congruenze rettilinee W colle due falde applicabili sulla quadrica fondamentale.

Tale previsione venne pienamente confermata dalla ricerca; e ne è sorta la teoria delle trasformazioni per le deformate delle quadriche che espongo in questo libro.

Le relazioni fra le quadriche del sistema confocale a quella data e le singole trasformazioni, e principalmente la notevole legge di applicabilità delle due falde focali delle ricordate congruenze, che si risolve nell'affinità d'Ivory fra due quadriche omofocali, conferiscono, mi sembra, alla teoria un aspetto geometrico estremamente semplice.

Nè meno notevole è un secondo aspetto, che ho cercato di porre in evidenza in più luoghi del presente volume, dimostrando come la teoria stessa costituisca in sostanza un ulteriore sviluppo delle nuove idee apportate da Lie nella teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che vennero da lui riguardate quali trasformazioni infinitiformi degli elementi piani o faccette dello spazio.

E sembra probabile che la fecondità di questi concetti di S. Lie debba apportare nuovi frutti in ulteriori ricerche di geometria infinitesimale.

Avrei desiderato di poter completare l'esposizione della teoria contenuta nel presente volume coll'esame dei metodi, già sopra accennati, dovuti a Guichard; ma il ritardo nella pubblicazione della memoria premiata di Guichard non mi ha permesso di fare il confronto dei due metodi, che non mancherà certo di condurre a conseguenze interessanti.

Nonostante ho stimato opportuno di non ritardare la pubblicazione di questo volume, parendomi che le ricerche qui esposte costituiscano già una teoria in sè completa. Le trasformazioni per congruenze W, che ne costituiscono il fondamento, sono, come già si è detto, la naturale generalizzazione di quelle delle superficie a curvatura costante, alle quali si riducono se la quadrica fondamentale diventa una sfera. Esse posseggono, se non erro, tutti i caratteri di trasformazioni geometriche elementari, onde sembra probabile che in combinazioni più o meno complicate di queste elementari debbano risolversi tutte le altre trasformazioni che si potranno costruire per le deformate delle quadriche.

Pisa, giugno 1909.

CAPITOLO I.

Le trasformazioni per le deformate rigate delle quadriche

§ 1.

Preliminari.

Le ricerche che si espongono in questo libro hanno per iscopo di costruire per le superficie applicabili sulle superficie generali di secondo grado (quadriche) una *teoria delle trasformazioni* perfettamente analoga, nei metodi e nei risultati, a quella ben nota delle superficie a curvatura costante [1]. Queste ultime superficie possono anche considerarsi come le deformate per flessione della sfera reale od immaginaria, secondo che la curvatura è negativa o positiva; e, come per le deformate di questa speciale quadrica, così per le deformate di *ogni* quadrica Q noi riusciremo ad ottenere degli analoghi procedimenti geometrici di trasformazione che permettono, partendo da una deformata iniziale S della quadrica Q, di costruirne infinite nuove, dapprima precisamente una doppia infinità; poi, ripetendo le trasformazioni, da ciascuna di queste ancora infinite nuove, e così via di seguito illimitatamente.

L'elemento essenziale geometrico per le nostre trasformazioni viene nuovamente fornito da speciali *congruenze rettilinee* W, le cui due falde focali sono applicabili sulla medesima quadrica Q. Ogni deformata S di una qualunque quadrica Q dà luogo ad una doppia infinità di tali congruenze W, secondo il seguente teorema fondamentale:

TEOREMA A. — *Per qualunque superficie* S *applicabile sopra una quadrica* Q *esistono* ∞^2 *congruenze rettilinee* W *che, avendo* S *per prima falda focale, hanno le loro seconde falde focali* S_1 *applicabili sulla medesima quadrica.*

[1] *Lezioni*, vol. II, cap. XXIV e XXV.

Il passaggio dalla prima falda focale S di una di queste congruenze alla seconda S_1 darà appunto una delle nostre trasformazioni.

Ed è molto notevole che, quando la quadrica Q è reale e *generale*, esistono sempre ∞^2 tali trasformazioni reali, che conducono dunque da una deformata reale di Q a nuove deformate reali; laddove, se la quadrica Q diventa di rotazione, le trasformazioni reali possono sparire, o più propriamente ridursi alla sola trasformazione complementare. Si presenta così il fenomeno, singolare a prima vista, che rispetto a questa teoria delle trasformazioni si comportano più semplicemente le quadriche generali che non le speciali di rotazione, come ad esempio la sfera reale. Ma, pur restando nel campo reale, esistono molte classi di superficie reali applicabili su quadriche immaginarie, per le quali le nostre trasformazioni sono ancora reali. L'esempio più semplice, che è stato il punto di partenza di tutta l'attuale teoria generale, è quello della sfera immaginaria le cui deformate non sono altro che le superficie pseudosferiche; in tal caso le trasformazioni generali si riducono appunto alle trasformazioni di Bäcklund.

Ritornando al caso generale, diciamo che le operazioni di integrazione necessarie per dedurre dalla deformata iniziale S della quadrica Q le ∞^2 nuove deformate contigue S_1 consistono ancora nella integrazione di un'equazione differenziale del primo ordine *del tipo di Riccati*, precisamente come nel caso particolare delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

Un perfezionamento notevole del processo d'integrazione risulta poi ancora dal *teorema di permutabilità*, che, nell'applicazione successiva ed illimitata dei procedimenti di trasformazione, permette, appena eseguita l'integrazione della *prima* equazione di Riccati, di compiere l'integrazione delle seguenti con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Il teorema di permutabilità permette altresì di utilizzare, nel campo reale, le trasformazioni *immaginarie*, insegnando a comporle convenientemente in trasformazioni reali, precisamente come avviene per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie a curvatura costante.

Abbiamo così accennato ai principii fondamentali della nuova teoria. La descrizione dei notevoli fatti geometrici che ne accompagnano lo svolgimento risulterà nel corso di questo libro. E si vedrà in particolare come vengano ad introdursi quali elementi geometrici fondamentali, nello studio metrico-differenziale della deformazione delle quadriche, il sistema *omofocale* determinato dalla data quadrica Q e quella corrispondenza (affinità d'Ivory) fra i punti di due quadriche omofocali che viene segnata dai loro punti d'incontro colle trajettorie ortogonali del sistema, corrispondenza ben nota pel suo significato in questioni di geometria pura e di fisica matematica.

Fra le deformate delle quadriche tengono un posto notevole le deformate *rigate*, che rispetto alle nostre trasformazioni formano un *gruppo*, poichè le trasformazioni stesse, applicate a deformate rigate, danno sempre nuovamente superficie rigate. D'altronde, mentre le proprietà generali delle nostre trasformazioni si conservano per il gruppo delle deformate rigate, esse acquistano qui un significato più semplice ed intuitivo, che permette una più facile traduzione in analisi del problema. Conviene quindi cominciare lo svolgimento della teoria dal caso più semplice delle deformate rigate delle quadriche per elevarsi poi da queste al caso generale.

E poichè il nostro principale interesse si concentrerà sulle superficie *reali* applicabili sulle quadriche (reali od immaginarie), in questo primo capitolo, dedicato allo studio delle deformate rigate, noi supporremo che la quadrica fondamentale Q abbia generatrici reali, ed avremo così a distinguere i due casi del paraboloide iperbolico e dell'iperboloide ad una falda.

I calcoli che dovremo eseguire e le formole finali conservano naturalmente il loro valore analitico se alle variabili reali adoperate si sostituiscono variabili complesse. E così anche i risultati geometrici appaiono immediatamente estendibili al campo immaginario, senza che sia necessario ripetere gli enunciati corrispondenti. Aggiungiamo che in tutto il corso del libro verrà fatto dell'immaginario largo uso, però sempre così diretto che ad ogni momento della ricerca possa distinguersi quale è il significato dei risultati ottenuti nel campo *reale*, senza di che non sèmbra possa riguardarsi la trattazione come completa.

§ 2.

Il teorema di Chieffi.

Per non interrompere nel seguito il corso delle ricerche sarà utile che premettiamo la dimostrazione di un bel teorema, osservato nel caso generale dal Sig. O. Chieffi, e relativo a tutte le superficie applicabili sopra superficie rigate [1].

[1] Veggasi il § 1 della memoria del Dott. O. Chieffi: *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono.* Giornale di matematiche, vol. XLIII (12.° della 3.ª serie), 1905.

Sia S una qualunque superficie applicabile sopra una rigata R, alle cui generatrici corrisponderà sopra S un sistema di linee geodetiche che indicheremo con g. Prendiamo sopra S una linea asintotica qualunque a e conduciamo nei punti di a, le rette r tangenti alle geodetiche g che vi passano. Il luogo di queste rette r sarà una rigata R_1, circoscritta alla S lungo l'asintotica a, che sarà pure evidentemente asintotica di R_1.

Il teorema di Chieffi consiste nella proposizione seguente:

La superficie rigata R_1 *è applicabile sulla superficie* S *e nella applicazione di* S *sopra* R_1 *l'asintotica* a *rimane rigida* [1].

Di questo teorema, che il Chieffi dimostra analiticamente, daremo qui una semplice dimostrazione geometrica che ci permette di distinguere se l'applicabilità delle due rigate R, R_1 ha luogo per deformazione *continua* ed ha inoltre il vantaggio di applicarsi senz'altro alle deformate delle superficie rigate negli spazî di curvatura costante. Il teorema di Chieffi sussiste quindi nella metrica ellittica od iperbolica come nella euclidea.

La superficie S è, per ipotesi, applicabile sulla rigata R ed alla asintotica a di S corrisponderà sopra R una certa linea α. Il ben noto teorema di Beltrami sulla deformazione delle rigate (vol. I, § 121, p. 265) ci assicura che esiste una ed una sola deformazione *continua* della rigata R in un'altra rigata R' tale che la linea α di R divenga sopra R' un'asintotica a', e qui osserviamo esplicitamente che il teorema stesso vale per la deformazione delle rigate negli spazî a curvatura costante. A causa della applicabilità della S sopra R' le due curve a, a' si corrispondono punto per punto, per eguaglianza d'archi, ed hanno in punti corrispondenti la medesima prima curvatura, poichè questa eguaglia per l'una e per l'altra la curvatura geodetica; esse hanno inoltre, pel teorema d'Enneper, torsioni eguali in valore assoluto. Le due curve a, a' sono quindi congruenti, ovvero l'una è congruente colla simmetrica dell'altra.

Nel primo caso se sovrapponiamo con un movimento a' ad a, la rigata R' risulterà circoscritta ad S lungo l'asintotica comune a. E poichè le generatrici di R' incontrano la linea a (a') sotto il medesimo angolo come le geodetiche g di S, esse saranno le loro tangenti nei punti di a,

[1] Pel caso particolare delle deformate del catenoide questo teorema trovasi già osservato nel volume II di queste Lezioni (vedi § 377, pag. 399).

cioè la rigata R' coinciderà con R_1. Dunque: *In questo primo caso la rigata R_1 è applicabile per deformazione continua sopra* R; *nella applicabilità di* S *sopra* R_1 *l'asintotica* a *rimane invariabile.*

Se poi le curve a, a' sono simmetriche invece che congruenti, sostituiamo p. e. alla R' la superficie simmetrica, sulla quale la nuova linea a' sarà simmetrica della primitiva e quindi direttamente congruente con a. Ne segue, come sopra, che la R_1 è ancora applicabile sopra R; ma deformando in modo continuo la R_1 si ottiene soltanto una superficie simmetrica di R.

Il teorema di Chieffi è così dimostrato e possiamo di più giudicare *a priori* se la rigata R_1 circoscritta ad S lungo l'asintotica a è applicabile per deformazione continua sulla rigata R, ovvero sulla sua simmetrica. Si presenterà il primo caso quando il segno della torsione della asintotica a concorda con quello delle asintotiche curvilinee di R, il secondo se i segni delle due torsioni sono contrarii.

Osserviamo ora che il teorema di Chieffi, appena nota una deformata non rigata S di una rigata R, dà il modo di costruire in termini finiti due serie di rigate applicabili sulla R (sulla S), circoscrivendo le rigate R_1 lungo le singole asintotiche del primo ovvero del secondo sistema [1]. In ciascuna delle due serie le rigate sono applicabili per deformazione continua l'una sull'altra, mentre da una rigata della prima serie non si passa per deformazione continua ad una rigata dell'altra serie, sibbene alla sua simmetrica. È chiaro poi che le rigate di ciascuna serie hanno per inviluppo la superficie primitiva S, su cui sono applicabili, e le cui linee asintotiche di un sistema sono le caratteristiche.

Consideriamo da ultimo il caso particolare, più importante per noi, che la superficie S sia applicabile sopra una quadrica Q. Siccome questa è una superficie *doppiamente* rigata, potremo applicare la proposizione di Chieffi in quattro diverse maniere, due per ciascun sistema di generatrici di Q. Se in fine supponiamo che la S sia essa stessa una rigata R, avendosi qui un solo sistema di asintotiche curvilinee, potremo applicare in due soli modi il teorema di Chieffi. L'uno di essi conduce alla superficie R stessa, l'altro ad ∞^1 rigate R_1 applicabili sopra R.

---

[1] Si può anche dire che il problema di deformare la superficie S, lasciando rigida l'asintotica a, in una superficie rigata viene risoluto dalla proposizione di Chieffi senza alcuna integrazione.

§ 3.

Deduzione di alcune formole fondamentali.

A base delle nostre ricerche sulla deformazione delle quadriche porremo alcune formole generali relative ad una superficie qualunque S che, deformandosi, trascina seco invariabilmente legati una doppia infinità di segmenti rettilinei, tangenti nel primo estremo alla superficie S di partenza.

Sia la superficie S riferita ad un qualunque sistema curvilineo (u, v) ed intrinsecamente definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$(1)\qquad \begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 . \end{cases}$$

Per ogni punto $F \equiv (x, y, z)$ di S tiriamo, nel piano tangente, un segmento rettilineo FF_1 in direzione arbitraria, ma fissata col punto F. Le coordinate x_1, y_1, z_1 del secondo estremo F_1, giacente nel piano tangente in F alla S, saranno date da formole del tipo seguente

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = x + l\dfrac{\partial x}{\partial u} + m\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ y_1 = y + l\dfrac{\partial y}{\partial u} + m\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ z_1 = z + l\dfrac{\partial z}{\partial u} + m\dfrac{\partial z}{\partial v} , \end{cases}$$

dove con l, m si indicano funzioni determinate delle coordinate curvilinee u, v del punto F [1]. Supponiamo che la superficie S, flessibile ed inestendibile, si deformi comunque, seco trascinando i segmenti tan-

---

[1] Basta considerare che deve annullarsi il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

genti FF_1, e facciamo l'osservazione ben semplice ma fondamentale pel seguito che: *se nelle* (2) *si mantengono fisse le funzioni l, m di u, v, queste formole daranno sempre le coordinate del secondo estremo* F_1, *in qualunque configurazione di* S. Per convincersene basta osservare che, in questa ipotesi, la lunghezza d dei segmenti FF_1 e le loro inclinazioni sulle linee coordinate (u, v) non varieranno per qualunque deformazione. Ed invero abbiamo

$$d^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = El^2 + 2Flm + Gm^2 ;$$

inoltre indicando con ω_1, ω_2 le inclinazioni del segmento FF_1 sulle linee coordinate $v =$ costante, $u =$ costante, abbiamo

$$\cos\omega_1 = \sum \frac{x_1-x}{d}\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{d\sqrt{E}}\,(El+Fm)$$

$$\cos\omega_2 = \sum \frac{x_1-x}{d}\,\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{d\sqrt{G}}\,(Fl+Gm)\,.$$

Come si vede, d, ω_1 e ω_2 non variano al flettersi della superficie S.

Per ogni configurazione di S il luogo degli estremi F_1 sarà una superficie S_1, od eventualmente una linea. Importa calcolare di questa superficie S_1 gli elementi fondamentali, in particolare le derivate di x_1, y_1, z_1 rapporto ad u, v. Basta per ciò derivare le (2), applicando le formole fondamentali della teoria date al § 55 delle Lezioni (vol. I, pag. 116). Se poniamo

$$(3)\quad \begin{cases} L = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} m + 1\,, & M = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} m \\[2ex] P = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} m\,, & Q = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} m + 1\,, \end{cases}$$

avremo così le formole

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = L\dfrac{\partial x}{\partial u} + M\dfrac{\partial x}{\partial v} + (Dl + D'm)\,X \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D''m)\,X\,, \end{cases}$$

ove si tralascia, come nel seguito, di scrivere le analoghe per y_1, z_1.

Esaminiamo ora se può esistere una configurazione della S nella quale i segmenti FF_1 riescano tangenti nei secondi estremi F_1 alla superficie S_1 loro luogo, nel qual caso la congruenza delle rette FF_1 avrà precisamente le due superficie S, S_1 per falde focali. Perchè ciò accada è necessario che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} ;$$

viceversa se è nullo questo determinante e non sono nulli simultaneamente i minori della matrice delle due ultime linee, il luogo dei punti F_1 è un'effettiva superficie S_1 tangente ai segmenti FF_1. Se si annullassero poi tutti i minori della detta matrice, la superficie S_1 si ridurrebbe ad una linea ed i piani tangenti ad S_1 alla doppia infinità di piani tangenti a questa linea, sicchè anche in questo caso eccezionale la condizione geometrica imposta è da riguardarsi come soddisfatta, colla sola particolarità che la seconda falda focale della congruenza rettilinea FF_1 si riduce qui ad una linea [1].

Ora le formole (2), (4) dimostrano che il determinante scritto si risolve nel seguente prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] X & Y & Z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L & M & Dl+D'm \\ P & Q & D'l+D''m \end{vmatrix} ,$$

e di questi il primo, come eguale a $\sqrt{EG-F^2}$, è certamente differente da zero. Ne concludiamo adunque:

Affinchè in una configurazione di S, *individuata dalla seconda forma fondamentale*

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 ,$$

la superficie S_1, *luogo dei secondi estremi* F_1, *risulti la seconda falda*

---

[1] Trascuriamo come privo d'importanza il caso ulteriore in cui la S_1 si riduca ad un punto. La S sarebbe allora un cono col vertice in questo punto.

focale della congruenza rettilinea FF_1, *è necessario e sufficiente che si verifichi l'equazione*

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L & M & Dl+D'm \\ P & Q & D'l+D''m \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4.

Enunciato del teorema fondamentale.

Entriamo ora subito in argomento ed occupiamoci delle deformate rigate delle quadriche. Per fare intendere chiaramente lo scopo dei calcoli che eseguiremo, premettiamo in questo paragrafo l'enunciato delle proprietà fondamentali su cui risulterà fondata la teoria delle trasformazioni per le deformate rigate delle quadriche.

Supponiamo dapprima di considerare una coppia qualunque R, R' di superficie rigate applicabili e supponiamo di più che l'applicabilità di R sopra R' abbia luogo per deformazione continua, sicchè il sistema delle generatrici di R' sia destrorso o sinistrorso secondo che è destrorso o sinistrorso quello delle generatrici di R. Consideriamo due generatrici qualunque corrispondenti r, r' di R, R'. Se un punto M percorre la generatrice r, il punto corrispondente M' descrive, per tratti eguali, la generatrice r' e i piani tangenti in M e M' ad R, R' compiono rotazioni eguali e *del medesimo senso* attorno rispettivamente ad r e r', come segue p. e. dalla formola di Chasles (vol. I, § 118, pag. 259-260). Segue di qui che se muoviamo una delle due superficie, p. e. R', nello spazio in guisa da sovrapporre le due generatrici r, r' pei loro punti corrispondenti e inoltre i due piani tangenti in due punti iniziali, *tutti* i piani tangenti lungo r' di R' verranno a coincidere coi corrispondenti di R; le superficie R, R' si toccheranno lungo la generatrice comune r. Immaginiamo p. e. la superficie R fissa nello spazio e, per ciascuna generatrice r di R, consideriamo la superficie R' così collocata da toccare la R lungo r. La R' acquisterà così una semplice infinità di posizioni, e noi diremo precisamente che *essa rotola sulla rigata applicabile* R.

Ciò premesso, consideriamo una quadrica rigata Q ed una rigata R applicabile sopra Q, e supponiamo che alle generatrici di R corrispondano per deformazione continua p. e. le generatrici del primo sistema di Q. Facciamo rotolare, nel senso sopra spiegato, Q sopra R, ed immaginiamo che in questo rotolamento la quadrica Q trascini seco, invariabilmente

legata, una quadrica qualunque Q' confocale a Q. Mentre Q rotola sopra R, le generatrici del 1.° sistema della quadrica omofocale Q' genereranno una prima congruenza rettilinea Γ, e similmente quelle del 2.° una seconda congruenza $\overline{\Gamma}$. Se consideriamo una qualunque rigata R_1 della congruenza Γ o della $\overline{\Gamma}$, che da ciascuna posizione di Q' prenda una generatrice, potremo intendere stabilita una corrispondenza fra i punti di R e di R_1, ad ogni punto F di una generatrice r di R facendo corrispondere quel punto F_1 di R_1 ove il piano tangente in F alla R interseca la retta corrispondente r_1.

Il teorema fondamentale per la teoria delle trasformazioni delle deformate rigate delle quadriche sarà il seguente:

Teorema B. — *Se la quadrica* Q *rotola sopra la rigata applicabile* R, *le congruenze* $\Gamma, \overline{\Gamma}$, *generate dalle rette del 1.° o del 2.° sistema della quadrica confocale* Q', *sono decomponibili ciascuna, in un modo unico e determinato, in una semplice infinità di rigate* R_1, *alle quali appartengono le seguenti proprietà: a) ogni rigata* R_1 *forma insieme colla rigata* R *primitiva le due falde focali di una congruenza rettilinea* W, *costituita dalle congiungenti* FF_1 *i loro punti corrispondenti; b) le rigate* R_1 *sono applicabili sulla medesima quadrica* Q *e quindi sulla rigata* R, *l'applicabilità delle* R_1 *sulla* R *avendo inoltre luogo per deformazione continua.*

Diciamo subito che le proprietà enunciate sussistono ancora quando la quadrica omofocale Q' diventa degenere nella schiera e si riduce (come inviluppo) ad una delle coniche focali, i due sistemi di generatrici confondendosi in tal caso nelle tangenti della conica focale. Si ha allora una sola congruenza Γ generata dalle tangenti della conica focale, che la quadrica Q trascina seco nel rotolamento sopra R.

Nello sviluppo dei calcoli che conducono alla dimostrazione del teorema fondamentale B), tratteremo separatamente i due casi che la quadrica fondamentale Q sia un paraboloide iperbolico, ovvero un iperboloide ad una falda, cominciando dal primo ove le formole sono più semplici.

§ 5.

Prime formole relative al paraboloide iperbolico.

La quadrica Q sia un paraboloide iperbolico che indicheremo con P_0, di cui scriveremo l'equazione sotto la forma normale consueta

$$(6)\qquad \frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0,$$

ove le costanti positive p, q indicano i parametri delle due parabole principali.

Riferiamo il paraboloide P_0 alle sue generatrici rettilinee (u, v) (asintotiche) col porre

$$x_0 = \sqrt{p}\,(u+v)\ ,\quad y_0 = \sqrt{q}\,(u-v)\ ,\quad z_0 = 2uv. \tag{7}$$

Per l'elemento lineare ds_0 del paraboloide abbiamo di qui

$$ds_0^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

avendo E, F, G le espressioni seguenti

$$E = p+q+4v^2\ ,\quad F = p-q+4uv\ ,\quad G = p+q+4u^2. \tag{8}$$

Se poniamo

$$H = p\,(u-v)^2 + q\,(u+v)^2 + pq\,, \tag{9}$$

avremo

$$EG - F^2 = 4H. \tag{9*}$$

Calcolando i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale positiva a P_0, abbiamo subito

$$X_0 = \frac{\sqrt{q}\,(u+v)}{\sqrt{H}}\ ,\quad Y_0 = \frac{\sqrt{p}\,(v-u)}{\sqrt{H}}\ ,\quad Z_0 = -\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}},$$

onde pei coefficienti D_0, D'_0, D''_0 della seconda forma fondamentale si trae

$$D_0 = D''_0 = 0\ ,\quad D'_0 = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}. \tag{10}$$

La curvatura totale K di P_0 è quindi data da

$$K = \frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{EG - F^2} = -\frac{pq}{H^2}\,,$$

talchè ponendo con una notazione consueta

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\,, \tag{11}$$

avremo

$$\rho = \frac{H}{\sqrt{pq}}\,. \tag{11*}$$

Occorre in fine scrivere i valori effettivi dei simboli di Christoffel pel nostro ds_0 che si calcolano subito dalle (8), ovvero anche dalle solite formole fondamentali (I), vol. I, § 55 (pag. 116).

Si trova così:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 0\ ,\quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}\ ,\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}\,. \tag{12}$$

Prendiamo ora, nella schiera omofocale

$$\frac{x^2}{p-k} - \frac{y^2}{q+k} = 2z - k \tag{13}$$

determinata dal paraboloide P_0, un secondo paraboloide *iperbolico*, per la qual cosa converrà dare al parametro k un valore qualunque nell'intervallo $(-q, p)$

$$-q \leq k \leq p.$$

Indicheremo questo paraboloide omofocale con P_k ed osserveremo esplicitamente che, mentre intendiamo escluso dai calcoli seguenti il valore $k=0$, pel quale P_k verrebbe a coincidere con P_0, non escludiamo affatto i valori estremi $k=-q$, $k=p$. Per questi valori di k il paraboloide P_k si riduce rispettivamente al piano $y=0$, ovvero al piano $x=0$, ricoperto due volte, o meglio alle regioni di questi piani esterne alle rispettive *parabole focali*

$$y = 0\ ,\quad \frac{x^2}{p+q} = 2z+q$$

$$x = 0\ ,\quad \frac{y^2}{p+q} = -2z+p.$$

Il piano tangente a P_0 in un punto $F \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ sega il paraboloide confocale P_k in una conica C (o in una retta pei valori singolari $k=-q$, $k=p$) ed un punto qualunque $\overline{F} \equiv (\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ di questa conica avrà, secondo le formole (2), coordinate della forma

$$\left\{\begin{aligned} \overline{x}_0 &= \sqrt{p}\,(u+v+l+m) \\ \overline{y}_0 &= \sqrt{q}\,(u-v+l-m) \\ \overline{z}_0 &= 2\,(uv+vl+um). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

I coefficienti l, m saranno determinate funzioni di u, v e di un parametro λ, che individua il punto mobile $\overline{F}_0$ sulla conica C. Assumiamo per questo parametro λ quello di una generatrice variabile sul paraboloide P_k sia nel primo, sia nel secondo sistema. Se indichiamo, per abbreviare, con p', q' i parametri delle due parabole principali di P_k, ponendo dunque

$$p' = p - k \ , \quad q' = q + k \ , \tag{15}$$

saranno p', q' positivi, e per le equazioni delle generatrici di P_k avremo

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda\sqrt{p'}\left(z - \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda} \\ y &= \pm\lambda\sqrt{q'}\left(z - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

il segno superiore riferendosi al primo, l'inferiore al secondo sistema di generatrici.

Ponendo in queste ultime formole per x, y, z i valori (14) di $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$, otteniamo due equazioni lineari per determinare l, m.

Risolvendole ne deduciamo

$$l = \frac{U}{W} \ , \quad m = \frac{V}{W} \ , \tag{17}$$

dove U, V, W hanno i valori seguenti

$$\left\{\begin{aligned} U &= 2\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 u^2 - 2\left(\sqrt{pq} \mp \sqrt{p'q'}\right)\lambda u - \\ &\qquad - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right) \\ V &= 2\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 v^2 - 2\left(\sqrt{pq} \pm \sqrt{p'q'}\right)\lambda v - \\ &\qquad - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right) \\ W &= 2\lambda\left[\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda \pm \sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda\right]. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Si osservi che, in tutte queste nostre formole, il passaggio dai segni superiori agli inferiori equivale a scambiare u con v.

§ 6.

Rigate R applicabili su P_0 e congruenze Γ.

Sia R una deformata rigata qualunque del paraboloide fondamentale P_0 e supponiamo p. e. che le generatrici di R corrispondano per deformazione continua alle generatrici $v = \text{costante}$ di P_0. La superficie R sarà definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali (1) § 3, delle quali la prima coinciderà col ds_0^2 del paraboloide P_0, mentre nella seconda

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \ ,$$

le linee (v) essendo ancora asintotiche, sarà $D = 0$ e conseguentemente, a causa della equazione di Gauss

$$D D'' - D'^2 = D_0 D''_0 - D'^2_0 \ ,$$

si avrà

$$D'^2 = D'^2_0 \ ,$$

onde

$$D' = \pm\, D'_0 .$$

L'incertezza del segno si toglie per l'ipotesi fatta che le generatrici di R provengano per deformazione continua dalle (v) di P_0, e si ha definitivamente

$$D' = D'_0 = -2\,\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}} .$$

Per calcolare D'' ricorriamo alle formole di Codazzi (vol. I, § 56, pag. 119), osservando i valori attuali (12) dei simboli di Christoffel; ne deduciamo

$$\frac{\partial \log D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} \ ,$$

e quindi

$$D'' = \sqrt{EG - F^2}\,.\,\varphi(v) = 2\sqrt{H}\,.\,\varphi(v) \ ,$$

indicando con $\varphi(v)$ una funzione *arbitraria* della v. La forma di questa funzione dipende dalla speciale deformata R che si considera e la individua.

Abbiamo dunque per la rigata R

$$D = 0\ ,\quad D' = D'_0 = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\ ,\quad D'' = 2\sqrt{H}\,.\,\varphi(v), \tag{19}$$

e per ciò

$$\frac{D''}{D'} = -\rho\,\varphi(v)\,. \tag{20}$$

Ciò premesso, e secondo le indicazioni del § 4, facciamo rotolare il paraboloide P_0 sulla rigata applicabile R e consideriamo la congruenza Γ (o $\overline{\Gamma}$) generata dalle rette del 1.° sistema (del 2.° sistema) del paraboloide confocale P_k trascinato da P_0 nel rotolamento. Si tratta in primo luogo di scrivere le formole relative ad una qualunque rigata R_1 della congruenza Γ. Per ciò nelle formole (2) (pag. 6)

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}\ ,\ \text{ecc.}$$

facciamo percorrere al punto (x, y, z) la superficie R e sostituiamo per l, m i valori (17), (18). Se diamo a v, λ due valori costanti arbitrarii, lasciando variabile la sola u, il punto (x_1, y_1, z_1) percorrerà un raggio generico della congruenza Γ, precisamente quello in cui si trasporta la generatrice (λ) di P_k allorquando il paraboloide P_0 tocca la rigata R lungo la generatrice (v). Risulta di qui che se nelle formole (2) poniamo per λ una funzione *arbitraria* della sola v

$$\lambda = \lambda(v)\ ,$$

avremo appunto definita una rigata qualunque R_1 di Γ.

Ed ora, secondo l'enunciato del teorema B) § 4, dobbiamo cercare di determinare la funzione $\lambda(v)$ di v (e di una costante arbitraria) in guisa da decomporre la congruenza Γ nelle ∞^1 rigate R_1 soddisfacenti alle condizioni *a), b)* enunciate. Ora si presenta qui una prima circostanza ben favorevole al nostro scopo e cioè che: *la decomposizione richiesta della congruenza Γ in ∞^1 rigate R_1 è già pienamente determinata dalla sola condizione che ciascuna R_1 formi colla primitiva R le due falde focali della congruenza rettilinea FF_1 delle congiungenti i loro punti corrispondenti.* Le altre proprietà enunciate in *b)* ne derivano poi come conseguenze.

La condizione sopra enunciata si traduce, a causa della equazione (5) § 3, e delle (19), (20), nella equazione seguente

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L & M & m \\ P & Q & l - \rho\,\varphi(v)\,.\,m \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Siccome nei secondi membri delle formole (3), che definiscono L, M, P, Q, le derivazioni implicano anche la funzione incognita $\lambda(v)$, contenuta in l, m, sarà conveniente separarne le parti che si ottengono *riguardando λ come costante*, e noi porremo quindi, avendo riguardo ai valori attuali (12) dei simboli di Christoffel,

$$\left\{\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\,m + 1\ , & M_0 &= \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\,m \\ P_0 &= \frac{\partial l}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\,l\ , & Q_0 &= \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\,l + 1\ , \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dopo di che avremo

$$\left\{\begin{aligned} L &= L_0\ , & M &= M_0 \\ P &= P_0 + \frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dv}\ , & Q &= Q_0 + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dv}\,. \end{aligned}\right. \tag{22*}$$

Così l'equazione fondamentale (21) diventa

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0 & M_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l\ , & m\ , & 0 \\ L_0\ , & M_0\ , & m \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv}\ , & \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv}\ , & -\rho\,\varphi(v)\,.\,m \end{vmatrix} = 0\ , \tag{23}$$

ed implica la funzione incognita $\lambda(v)$ colla sua derivata prima, ed insieme apparentemente le due variabili u, v. Ma noi andremo ora a verificare che la variabile u sparisce in effetto dall'equazione stessa [1], talchè resta soltanto un'equazione differenziale ordinaria per $\lambda(v)$.

---

[1] Questa circostanza ben notevole è dovuta alla scelta del paraboloide confocale P_k come rigata trascinata da P_0 nel rotolamento. Sostituendo a P_k una qualunque altra rigata, la circostanza stessa non si presenterebbe più, come si può senza difficoltà dimostrare.

§ 7.

Equazione differenziale di Riccati per $\lambda(v)$.

L'equazione trovata (23) subisce una prima semplificazione pel fatto che il primo determinante

$$\Theta = \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0 & M_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

è identicamente nullo. Di questo possiamo renderci ragione *a priori* semplicemente osservando che se si fa $\varphi(v)=0$ e si prende λ costante il primo membro della (23) si riduce appunto a Θ. Ora ciò equivale a ridurre la rigata R al paraboloide stesso P_0 e la rigata R_1 ad una retta, cioè alla generatrice considerata (λ) di P_λ; ma, secondo un'osservazione fatta al § 4, l'equazione (5), cioè la (23), deve allora risultare soddisfatta. Giova però verificare anche col calcolo effettivo che si ha $\Theta=0$ poichè ne risultano delle identità utili nel seguito.

A causa delle equazioni (22), abbiamo

$$(24)\quad \begin{cases} l\,M_0 - m\,L_0 = l\dfrac{\partial m}{\partial u} - m\dfrac{\partial l}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\,lm - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\,m^2 - m \\[2ex] l\,Q_0 - m\,P_0 = l\dfrac{\partial m}{\partial v} - m\dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\,l^2 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\,lm + l, \end{cases}$$

e per ciò

$$\Theta = l\left(l\frac{\partial m}{\partial u} - m\frac{\partial l}{\partial u}\right) - m\left(l\frac{\partial m}{\partial v} - m\frac{\partial l}{\partial v}\right) - 2\,lm,$$

che scriviamo

$$\frac{\Theta}{l^2} = l\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{l}\right) - m\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{l}\right) - 2\,\frac{m}{l},$$

ovvero per le (17)

$$\frac{\Theta}{l^2} = \frac{U}{W}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\right) - \frac{V}{W}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\right) - 2\,\frac{V}{U}.$$

Secondo le (18), la U non contiene esplicitamente v e la V non contiene u, onde, indicando con U', V' le derivate esplicite di U, V rapporto

agli argomenti u, v rispettivamente, la precedente si scrive

$$\frac{\Theta}{l^2} = -\frac{V}{UW}(U' + V' + 2W).$$

Ma si verifica immediatamente, sui valori effettivi (18) di U, V, W, che sussiste l'identità

$$(25)\qquad U' + V' + 2W = 0,$$

e per ciò in effetto $\Theta=0$, c. d. d.

Dopo ciò l'equazione (23) si riduce alla

$$\frac{d\lambda}{dv} = \rho\varphi(v)\,\frac{l\,M_0 - m\,L_0}{m\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} - l\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}},$$

che si può scrivere, per la prima delle (24),

$$\frac{d\lambda}{dv} = \varphi(v)\,\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\dfrac{l}{m} - \rho\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{l}{m}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} - \dfrac{\rho}{m}}{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{l}{m}\right)},$$

o ancora, poichè

$$\frac{l}{m} = \frac{U}{V},\quad \frac{1}{m} = \frac{W}{V},$$

$$(\alpha)\qquad \frac{d\lambda}{dv} = V\varphi(v)\,\frac{\rho(U' + W) - \dfrac{U}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + \dfrac{V}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}{U\dfrac{\partial V}{\partial\lambda} - V\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}}.$$

Ora si ha per la (11)

$$\rho = \frac{p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq}{\sqrt{pq}},$$

indi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{p(u-v) + q(u+v)}{\sqrt{pq}},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v} = \frac{q(u+v) - p(u-v)}{\sqrt{pq}},$$

dopo di che, se paragoniamo il numeratore ed il denominatore nel secondo membro della (α), troviamo la identità

$$(26)\qquad U\frac{\partial V}{\partial\lambda} - V\frac{\partial U}{\partial\lambda} = k\left[\rho(U' + W) - \frac{U}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{V}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right],$$

che scriveremo anche sotto la forma ad essa equivalente pel calcolo superiore

$$(26^*) \qquad m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda} = \frac{kp}{V}(lM_0 - mL_0).$$

A causa di questa identità, la (α) si riduce semplicemente alla seguente

$$(27) \qquad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{V\varphi(v)}{k},$$

dove si vede che la variabile u è affatto scomparsa dal secondo membro, come si era enunciato. Ed ora, sostituendo per V il suo valore effettivo (18_2), abbiamo l'equazione differenziale definitiva per la funzione incognita $\lambda(v)$:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\left\{\left[2(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'})v^2 - \frac{k}{2}(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'})\right]\lambda^2 - 2(\sqrt{pq} \pm \sqrt{p'q'})v\lambda + \frac{1}{2}(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'})\right\}.$$

Si osservi che il secondo membro è, rispetto alla funzione λ, un polinomio di 2.° grado; così la nostra equazione differenziale fondamentale (I) è del *tipo di Riccati.*

§ 8.

Le superficie trasformate R_1.

L'analisi sviluppata nel § precedente ci dimostra che, ove si prenda per $\lambda(v)$ una soluzione della equazione di Riccati (I), le formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

definiscono una rigata R_1 della congruenza Γ (o $\overline{\Gamma}$), che soddisfa alla condizione seguente: *Le congiungenti* FF_1 *le coppie di punti corrispondenti* $F \equiv F(x, y, z)$, $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, *delle rigate* R, R_1 *formano una congruenza le cui falde focali sono appunto le rigate* R, R_1.

Facendo variare la costante arbitraria nella soluzione $\lambda(v)$ della (I), ne resta così *univocamente* determinata la decomposizione della congruenza Γ ($\overline{\Gamma}$) nelle ∞^1 rigate R_1, conformemente a quanto si è detto al § 6.

Resta ora da dimostrarsi che queste ∞^1 rigate R_1 soddisfano alle altre condizioni enunciate nel teorema B) § 4.

Una di queste proprietà, e cioè la corrispondenza delle linee asintotiche sopra R, R_1, è di immediata dimostrazione. Basta infatti osservare che R, R_1 sono le due falde focali della congruenza FF_1, e quando il primo fuoco F descrive una generatrice (v) di R, l'altro fuoco F_1 descrive su R_1 una generatrice corrispondente. Dunque sopra R, R_1 si corrispondono già le asintotiche di un sistema, cioè le rette, e per ciò (1) anche quelle del secondo sistema (asintotiche curvilinee); in altre parole la congruenza FF_1 è una congruenza W.

Così, pel caso attuale del paraboloide iperbolico, la prima parte del teorema B) è completamente dimostrata e resta solo a dimostrarsi la proprietà ivi enunciata sotto *b*), che cioè ciascuna delle ∞^1 rigate R_1 in cui, mediante l'equazione differenziale (I), abbiamo decomposta la congruenza Γ, è applicabile sul paraboloide fondamentale. Differiamo questa dimostrazione, che richiede ulteriori sviluppi di calcolo, ai prossimi paragrafi (§§ 10 a 12).

Ammettendola qui provvisoriamente, chiameremo *trasformazione* B_k il passaggio dalla deformata R del paraboloide P_0 ad una nuova deformata R_1.

Queste trasformazioni B_k contengono *due* costanti arbitrarie: la costante k (posta in evidenza nel simbolo B_k per la trasformazione) che fissa il paraboloide confocale P_k e figura nei coefficienti della equazione fondamentale (I) di Riccati, poi la seconda costante che proviene dalla integrazione di questa equazione differenziale. È ora evidente che, per individuare *una* delle ∞^2 trasformate R_1 della deformata primitiva R del paraboloide, basta

1.° scegliere uno dei due sistemi di generatrici

2.° assegnare in grandezza ed orientazione un segmento focale iniziale FF_1.

Si hanno quindi propriamente *due* classi di trasformazioni ed ∞^2 trasformazioni in ciascuna classe.

Fissiamo ora la prima costante k. La trasformazione B_k fa nascere

---

(1) In generale, per qualunque congruenza rettilinea, sulle falde focali si corrispondono già i due sistemi coniugati intercettati dalle sviluppabili della congruenza. Basta quindi che si corrispondano altri due sistemi coniugati perchè *tutti* i sistemi coniugati (le linee asintotiche) si corrispondano. In particolare la corrispondenza sulle due falde delle asintotiche di un sistema assicura quella delle asintotiche dell'altro sistema.

allora, dalla deformata rigata R del paraboloide P_0, una semplice infinità di nuove deformate R_1. I punti F_1 di queste ∞^1 rigate R_1, corrispondenti ad un punto F di R, hanno per luogo nel piano tangente a R in F una conica C, precisamente la conica nella quale, quando il paraboloide P_0 si applica su R, si trasporta la conica sezione del piano tangente nel punto corrispondente F_0 di P_0 col paraboloide confocale P_k. Così ciascun piano tangente di R porta una conica C e queste ∞^2 coniche, invariabilmente fissate nei piani tangenti di R, si trasportano, quando R si applica sopra P_0, sul paraboloide confocale P_k.

Consideriamo ora *quattro* particolari superficie trasformate R_1; esse corrisponderanno a quattro soluzioni particolari

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

della equazione (I) di Riccati, il cui birapporto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ è quindi costante. Quale è l'interpretazione geometrica di questo fatto per la trasformazione B_k? Basta riflettere che dal parametro λ dipendouo razionalmente, per funzioni di 2.° grado (col medesimo denominatore), le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto mobile sulla conica C [1] per dedurne che il birapporto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ uguaglia quello dei quattro punti corrispondenti sulla conica C. Abbiamo dunque il teorema:

Quattro superficie R_1 *trasformate della primitiva* R *per mezzo di una trasformazione* B_k *incontrano le* ∞^2 *coniche* C, *tracciate nei piani tangenti di* R, *secondo gruppi di quattro punti di egual birapporto.*

A questo teorema possiamo dare anche la forma equivalente:

Le superficie trasformate R_1 *segano projettivamente le* ∞^2 *coniche* C.

Ritorniamo alla equazione (I) di Riccati per dedurne una semplice ma importante conseguenza. Se invece di assegnare $\varphi(v)$ e determinare $\lambda(v)$ per integrazione, assegniamo *ad arbitrio* $\lambda(v)$, ne avremo immediatamente, in termini finiti, un unico valore di $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \frac{k}{V}\frac{d\lambda}{dv},$$

[1] Precisamente secondo le formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.}$$

ove u, v abbiano valori fissi e λ si lasci variabile.

e ne risulterà individuata una deformata rigata R del paraboloide. Per interpretare questo geometricamente, si osservi che assegnare λ in funzione (continua e derivabile) di v significa fissare ad arbitrio una legge di corrispondenza fra le generatrici di uno stesso o di diverso sistema dei due paraboloidi confocali P_0, P_k. Ne risulta la proposizione seguente:

Si stabilisca ad arbitrio una corrispondenza fra una generatrice g mobile sopra il paraboloide P_0 *ed una generatrice* g_1 *(del 1.° o del 2.° sistema) sul paraboloide confocale* P_k. *Esiste allora una ed una sola deformazione del paraboloide* P_0 *in una rigata* R, *tale che le generatrici* g_1, *trascinate ciascuna invariabilmente dalla corrispondente g, hanno per luogo, dopo la deformazione, una rigata* R_1 *trasformata di* R *per mezzo di una* B_k.

Per esempio se si prende $\lambda =$ costante ne risulta $\varphi(v) = 0$ e la rigata R si riduce al paraboloide stesso P_0, mentre la rigata R_1 si restringe alla generatrice (λ) del paraboloide confocale P_k.

§ 9.

Le trasformazioni singolari B_{-q}, B_p, B_0.

Abbiamo già detto, al § 5, che le nostre deduzioni conservano il loro valore comunque sia scelta la costante k (dapprima con esclusione del valore $k = 0$) nell'intervallo $(-q, p)$, inclusi i valori estremi $k = -q, k = p$.

Esaminiamo più da vicino queste trasformazioni B_{-q}, B_p, che diciamo le trasformazioni *singolari*. Allora i due sistemi di generatrici del paraboloide P_k, dati dalle formole (16) § 5, vengono a coincidere nelle tangenti dell'una o dell'altra parabola focale:

$$y = 0\,,\quad \frac{x^2}{p+q} = \quad 2z + q\,,\ \text{per } k = -q$$

$$x = 0\,,\quad \frac{y^2}{p+q} = -2z + p\,,\ \text{per } k = p\,,$$

e le due classi di trasformazioni coincidono in una sola classe. La congruenza Γ è generata in questo caso dalle tangenti alla corrispondente parabola focale trasportata col paraboloide P_0 nel rotolamento. Tutte le formole trovate conservano per questi valori estremi $k = -q, k = p$ un senso ben determinato. Così p. e. per $k = -q$, l'equazione (I) di Riccati, essendo qui $p' = p+q$, $q' = 0$, diventa

$$(27)\ \frac{d\lambda}{dv} + \varphi(v) \cdot \left\{ \left[2\sqrt{\frac{p+q}{q}} \cdot v^2 + \frac{1}{2}\sqrt{q(p+q)} \right] \lambda^2 - 2\sqrt{\frac{p}{q}}\lambda v + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+q}{q}} \right\} = 0 .$$

Questa fissa il modo come si deve prendere da ciascuna parabola focale una tangente in guisa da costituire una rigata R_1 trasformata di R mediante la B_{-q}. La proprietà che il birapporto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ di quattro soluzioni particolari della equazione di Riccati è costante riceve qui l'interpretazione geometrica seguente:

Sopra quattro rigate trasformate R_1 *quattro generatrici corrispondenti sono tangenti ad una medesima posizione della parabola focale e formano un birapporto costante.*

Ma, oltre le trasformazioni singolari B_{-q}, B_p, vogliamo ancora considerarne una terza da indicarsi con B_0, corrispondente al valore $k=0$ fin qui sempre escluso.

Ora faremo vedere che anche in questo caso, ove le formole ottenute, in particolare la equazione (I), presentano singolarità, si conservano ancora le proprietà essenziali delle nostre trasformazioni. Nel caso che ora consideriamo il paraboloide P_k coincide con P_0 e le congruenze Γ, $\overline{\Gamma}$ sono generate dalle rette stesse del 1.° o del 2.° sistema di P_0 mentre questo paraboloide rotola sulla rigata applicabile R. Ora è evidente che la congruenza Γ generata dalle rette (v) di P_0 si decompone appunto nelle ∞^1 posizioni di P_0 che costituiscono altrettante rigate applicabili sul paraboloide P_0, anzi congruenti con questo.

Quanto alla seconda congruenza $\overline{\Gamma}$, generata dalle rette (u) di P_0, si osservi che per ogni posizione di P_0 esse sono tangenti nei punti della retta (v) di contatto fra P_0 e R alle geodetiche di R trasformate delle rette u; e per ciò la $\overline{\Gamma}$ non è altro che la congruenza (normale) formata dalle tangenti a queste geodetiche di R. Ed ora osserviamo quale significato assume l'equazione differenziale (I) di Riccati nel caso attuale. Siccome qui dobbiamo prendere le determinazioni inferiori dei segni e porre $k=0$, i suoi coefficienti

$$\frac{\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'}}{k} = \frac{\sqrt{q(p-k)} - \sqrt{p(q+k)}}{k}$$

$$\frac{\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'}}{k} = \frac{\sqrt{pq} - \sqrt{(p-k)(q+k)}}{k}$$

si presentano dapprima sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma un calcolo elementare dà subito

$$\lim_{k=0} \frac{\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'}}{k} = -\frac{p+q}{2\sqrt{pq}}$$

$$\lim_{k=0} \frac{\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'}}{k} = \frac{q-p}{2\sqrt{pq}},$$

onde l'equazione di Riccati si riduce, al limite per $k=0$, alla seguente

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{pq}} \left\{ (p-q)\lambda v - [(p+q)v^2 + pq]\lambda^2 - \frac{1}{4}(p+q) \right\}.$$

D'altra parte le formole (16) § 5, ove si scelgano i segni inferiori e si ponga $k=0$, paragonate colle (7) del paragrafo stesso, danno

$$u = \frac{1}{2\lambda},$$

onde l'ultima equazione diventa

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2\sqrt{pq}} \left\{ p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq \right\},$$

ossia, per la (9) § 5,

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2\sqrt{pq}} H,$$

che si può anche scrivere, per le (19) § 6,

$$2D' du + D'' dv = 0.$$

Questa è precisamente l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee sulla rigata R. In questo caso adunque l'equazione (I) di Riccati decompone la congruenza $\overline{\Gamma}$ nelle ∞^1 rigate R_1 che si ottengono associando i raggi di $\overline{\Gamma}$ (tangenti alle geodetiche di R trasformate delle rette (u)) lungo le asintotiche curvilinee di R. Ma queste rigate sono appunto applicabili sul paraboloide P_0, pel teorema di Chieffi § 2, onde anche in questo caso la congruenza $\overline{\Gamma}$ è decomponibile in ∞^1 rigate R_1 deformate del paraboloide P_0. Per tal modo noi abbiamo già dimostrato, per questa trasformazione singolare B_0, le proprietà di *applicabilità* [1] che ci restano ancora da stabilire nel caso generale. In fine si può osservare che la interpretazione geometrica del birapporto costante non dà altro qui che il teorema di P. Serret che le generatrici della rigata R sono divise omograficamente dalle asintotiche curvilinee.

§ 10.

Elemento lineare delle superficie R_1.

Ritorniamo alle trasformazioni generali B_k nell'intento di dimostrare la proprietà provvisoriamente ammessa della applicabilità delle superficie trasformate R_1 sul paraboloide P_0. Per ciò occorre anzi tutto calcolare, nelle attuali coordinate u, v, il quadrato ds_1^2 dell'elemento lineare delle R_1 per verificare poi che esso è trasformabile nel ds^2 del paraboloide fondamentale P_0.

Cominciamo dallo scrivere le formole (4) § 3 sotto la forma equivalente, a causa delle (22*) § 6,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= L_0\frac{\partial x}{\partial u} + M_0\frac{\partial x}{\partial v} + D' m X\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P_0\frac{\partial x}{\partial u} + Q_0\frac{\partial x}{\partial v} + D' l X + \left(\frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{d\lambda}{dv} + D'' m X.\end{aligned}\right.$$

Se poniamo

$$ds_1^2 = \sum dx_1^2 = E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

ne deduciamo:

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}E_1 &= EL_0^2 + 2FL_0 + GM_0^2 + D'^2 m^2\\ F_1 &= EL_0P_0 + F(L_0Q_0 + M_0P_0) + GM_0Q_0 + D'^2 lm +\\ &\quad + \left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + D'D'' m^2\\ G_1 &= EP_0^2 + 2FP_0Q_0 + GQ_0^2 + D'^2 l^2 +\\ &\quad + 2\left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + 2D'D'' lm +\\ &\quad + \left[E\left(\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial m}{\partial \lambda} + G\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + D''^2 m^2.\end{aligned}\right.$$

---

[1] Rispetto alle proprietà espresse nella prima parte del teorema B), questo è evidentemente un caso degenere.

Giova, per semplificare i calcoli, ricordare dal § 7 che se la rigata R si riduce al paraboloide stesso P_0, la rigata R_1 si restringe ad una sola generatrice (λ) di P_k. Indicando con x_0, y_0, z_0 ; $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ ciò che diventano allora rispettivamente x, y, z ; x_1, y_1, z_1, avremo

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} &= L_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 m X_0\\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} &= P_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 l X_0,\end{aligned}\right.$$

e ponendo

$$E_0 = \sum\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2,\quad F_0 = \sum\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v},\quad G_0 = \sum\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2,$$

si ha quindi

$$\left\{\begin{aligned}E_0 &= EL_0^2 + 2FL_0M_0 + GM_0^2 + D_0'^2 m^2\\ F_0 &= EL_0P_0 + F(L_0Q_0 + M_0P_0) + GM_0Q_0 + D_0'^2 lm\\ G_0 &= EP_0^2 + 2FP_0Q_0 + GQ_0^2 + D_0'^2 l^2.\end{aligned}\right.$$

E, poichè $D' = D'_0$, le formole (28) possono ora scriversi:

$$(28^*)\quad\left\{\begin{aligned}&E_1 = E_0,\ F_1 = F_0 + \left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + D'D'' m^2\\ &G_1 = G_0 + 2\left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + 2D'D'' lm +\\ &\quad + \left[E\left(\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial m}{\partial \lambda} + G\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + D''^2 m^2.\end{aligned}\right.$$

Ora, pel modo stesso come al § 5 abbiamo calcolato $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, abbiamo

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}\bar{x}_0 &= \lambda\sqrt{p}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{p}}{2\lambda}\\ \bar{y}_0 &= \pm\lambda\sqrt{q}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{\sqrt{q}}{2\lambda},\end{aligned}\right.$$

e derivando queste, per λ costante, ne deduciamo

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} &= \lambda\sqrt{p}\,\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u},\quad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} = \pm\lambda\sqrt{q}\,\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} &= \lambda\sqrt{p}\,\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v},\quad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} = \pm\lambda\sqrt{q}\,\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

e quindi

$$(32)\qquad E_0=[1+(p+q)\lambda^2]\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\right)^2,\ F_0=[1+(p+q)\lambda^2]\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial u},\ G_0=[1+(p+q)]\lambda^2]\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\right)^2.$$

Se formiamo poi effettivamente dalla (14_3) § 5 il valore di $\bar{z}_0$

$$\bar{z}_0=2\left(uv+\frac{u\mathrm{V}+v\mathrm{U}}{\mathrm{W}}\right),$$

risulta

$$(33)\quad \bar{z}_0=\frac{[\pm\sqrt{pq'}\,(u-v)-\sqrt{qp'}\,(u+v)]\,k\lambda^2-4\sqrt{pq}\,uv\lambda+\sqrt{qp'}\,(u+v)\pm\sqrt{pq'}\,(u-v)}{\mathrm{W}}$$

Come si vede, $\bar{z}_0$ è una funzione lineare sì di u che di v e derivando si ottiene dopo semplici riduzioni

$$(34)\qquad \frac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}=4\sqrt{pq}\,\lambda\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}^2},\quad \frac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}=4\sqrt{pq}\,\lambda\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}^2}.$$

Sostituendo nella (32), otteniamo pei valori definitivi di E_0, F_0, G_0:

$$(35)\qquad E_0=\frac{16\,pq[1+(p+q)\lambda^2]}{\mathrm{W}^4}\lambda^2\mathrm{V}^2,$$

$$F_0=\frac{16\,pq[1+(p+q)\lambda^2]}{\mathrm{W}^4}\lambda^2\mathrm{UV},\ G_0=\frac{16\,pq[1+(p+q)\lambda^2]}{\mathrm{W}^4}\lambda^2\mathrm{U}^2.$$

Per calcolare i termini restanti nelle espressioni (28*) di E_1, F_1, G_1 osserviamo che, formando le somme

$$\sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u},\ \sum\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u},\ \sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v},\ \sum\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}$$

dalle (29) e (31), si ricava

$$(36)\qquad\begin{cases} EL_0+FM_0=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial y_0}{du}+\dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right]\\[2ex] FL_0+GM_0=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial x_0}{\partial v}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial y_0}{\partial v}+\dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right]\end{cases}$$

$$(36^*)\qquad\begin{cases} EP_0+FQ_0=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial x_0}{\partial u}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial y_0}{\partial u}+\dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right]\\[2ex] FP_0+GQ_0=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial x_0}{\partial v}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial y_0}{\partial v}+\dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right]\end{cases}$$

Ora prendiamo le formole

$$\bar{x}_0=x_0+l\frac{\partial x_0}{\partial u}+m\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

e deriviamole rapporto a λ, che nei secondi membri entra solo in l, m, onde

$$(37)\qquad \frac{\partial\bar{x}_0}{\partial l}=\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u}+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

Dopo di ciò moltiplichiamo le equazioni di ciascuna coppia (36), 36*), la prima per $\frac{\partial l}{\partial\lambda}$, la seconda per $\frac{\partial m}{\partial\lambda}$ e sommiamo, ciò che dà per le (37):

$$(38)\begin{cases}(EL_0+FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}+(FL_0+GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\right]\\[2ex](EP_0+FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}+(FP_0+GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}=\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\lambda\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\pm\sqrt{q'}\lambda\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\right].\end{cases}$$

Al fattor comune ai secondi membri in queste formole diamo un'altra forma, osservando che dalle (30) segue

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}=\sqrt{p'}\left(\bar{z}_0-\dfrac{k}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda^2}+\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\\[2ex]\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}=\pm\sqrt{q'}\left(\bar{z}_0-\dfrac{k}{2}\right)\pm\dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda^2}\pm\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda},\end{cases}$$

onde deduciamo

$$(39)\ \sqrt{p'}\lambda\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\pm\sqrt{q'}\lambda\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}=[1+(p+q)\lambda^2]\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}+(p+q)\lambda\left(\bar{z}_0-\frac{k}{2}\right)+\frac{q-p+2k}{2\lambda}.$$

Ancora dalle (37), quadrando e sommando, abbiamo

$$(40)\qquad \sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2=E\left(\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2+2F\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial m}{\partial\lambda}+G\left(\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2.$$

Preparate tutte queste formole, sostituiamo i valori trovati nelle espressioni (28*) di E_1, F_1, G_1, osservando che per le (19) § 6

$$D'D''=-4\sqrt{pq}\,\varphi(v),\quad D''^2=4H.\varphi^2(v);$$

abbiamo così in fine:

$$(41)\quad \begin{cases} E_1 = E_0\,,\ F_1 = F_0 + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\dfrac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\dfrac{\partial \bar{x}_0}{d\lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial\lambda}\right] - 4\sqrt{pq}\,\dfrac{V^2}{W^2}\varphi(v)\,, \\[2ex] G_1 = G_0 + 2\dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\dfrac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial\lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial\lambda}\right] - \\[2ex] \qquad\qquad - 8\sqrt{pq}\,\dfrac{UV}{W^2}\varphi(v) + \left(\dfrac{d\lambda}{dv}\right)^2 \sum\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2 + 4H\varphi^2(v)\,\dfrac{V^2}{W^2}\,. \end{cases}$$

§ 11.

L'affinità d'Ivory e le formole d'applicabilità.

I calcoli eseguiti al paragrafo precedente ci hanno fornito gli elementi necessarii per esprimere il ds_1^2 delle superficie trasformate R_1, ed ora si tratta di dimostrare che questo ds_1^2 è trasformabile nel ds^2 del paraboloide P_0. Se qui applicassimo i criterii generali per l'equivalenza dei due ds^2 (vol. I, cap. VII), i calcoli assumerebbero subito una grande complicazione, a causa specialmente della presenza della funzione arbitraria $\varphi(v)$ nei valori di E_1, F_1, G_1. Noi perverremo a stabilire le formole effettive d'applicabilità, e ad avere insieme la loro interpretazione geometrica, colle considerazioni seguenti.

Siano F, F_1 due punti qualunque corrispondenti di R, R_1. Se distendiamo R sopra P_0, il segmento FF_1, trasportato nella deformazione, risulterà tangente nel suo primo estremo M_0 al paraboloide P_0 e terminerà nel secondo $\overline{M}_0$ al paraboloide confocale P_k. Così ogni punto F_1 di R_1 dà un punto $\overline{M}_0$ sopra P_k. D'altronde se R_1 è applicabile, come vogliamo dimostrare, sopra P_0 stesso, in questa applicabilità (1) ad ogni

(1) A parlare propriamente l'applicabilità di R_1 sopra P_0 sarà determinata solo a meno di un'applicabilità di P_0 sopra sè stesso. Ora basta osservare che in una tale applicabilità i due sistemi di generatrici debbono scambiarsi fra loro o restare singolarmente invariati per riconoscere che vi sono tre sole applicabilità del paraboloide sopra sè stesso (oltre l'identità) corrispondenti rispettivamente a cangiare (u, v) in $(v . u)$, $(-v, -u)$, $(-u, -v)$. Queste sono rispettivamente due simmetrie rispetto ai piani principali xz, yz, e la terza un ribaltamento attorno all'asse Oz (asse del paraboloide). Insieme coll'identità formano il gruppo completo richiesto [Vierergruppe].

punto F_1 di R_1 corrisponderà un punto M_1 di P_0 ed avremo subito le cercate formole d'applicabilità, se riusciamo a riconoscere la legge geometrica di corrispondenza fra i punti M_1 ed $\overline{M}_0$ delle due quadriche confocali P_0, P_k.

Ora fra i punti di due quadriche confocali vi ha una legge, per così dire naturale, di corrispondenza, quella segnata sulle due quadriche dalle traiettorie ortogonali della famiglia cui appartengono. Essa è semplicemente una projettività, e più precisamente una affinità che diciamo *affinità d'Ivory*, perchè considerata per primo da questo geometra in ricerche che dovremo utilizzare anche più avanti. Pel caso attuale dei paraboloidi confocali

$$P_0)\qquad \frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0$$

$$P_k)\qquad \frac{x^2}{p'} - \frac{y^2}{q'} = 2z - k\,,$$

le formole dell'affinità d'Ivory sono semplicemente

$$\frac{x}{\sqrt{p'}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}}\,,\ \frac{y}{\sqrt{q'}} = \frac{y_0}{\sqrt{p}}\,,\ z = z_0 + \frac{k}{2}\,.$$

Ora noi dimostreremo appunto questo semplice teorema che: *la legge d'applicabilità delle due rigate* R, R_1 *è data dalla affinità d'Ivory fra i due paraboloidi omofocali* P_0, P_k. Questa fortunata circostanza vale poi, come dimostreremo, in tutti gli altri casi delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche ed è quella che conferisce alla teoria un aspetto relativamente semplice.

Restando al nostro caso attuale, ed indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate di M_0, con $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ quelle di $\overline{M}_0$, valgono le formole (7) § 5 e le (16) del medesimo paragrafo

$$\bar{x}_0 = \lambda\sqrt{p'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda}$$

$$\bar{y}_0 = \pm\lambda\sqrt{q'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda}.$$

D'altronde se con ξ, η, ζ indichiamo le coordinate del punto M_1 di P_0 che corrisponde nell'affinità d'Ivory a M_0 abbiamo, come si è visto sopra,

$$\frac{\xi}{\sqrt{p}} = \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}}\,,\quad \frac{\eta}{\sqrt{q}} = \frac{\bar{y}_0}{\sqrt{q'}}\,,\quad \zeta = \bar{z}_0 - \frac{k}{2} \tag{41*}$$

e perciò

$$\frac{\xi}{\sqrt{p}} = \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{q}} = \pm\lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{1}{2\lambda}.$$

Siano ora u_1, v_1 i valori delle coordinate curvilinee u, v nel punto $M_1 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del paraboloide P_0; per le (7) § 5 abbiamo

$$u_1 + v_1 = \frac{\xi}{\sqrt{p}} = \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}}$$

$$u_1 - v_1 = \frac{\eta}{\sqrt{q}} = \frac{\bar{y}_0}{\sqrt{q'}}\,,$$

cioè

$$\left\{\begin{aligned} u_1 + v_1 &= \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2\lambda} \\ u_1 - v_1 &= \pm\lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{1}{2\lambda}\,. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

In queste sostituiremo per $\bar{z}_0$ il suo valore (33) § 10 in funzione di u, v e ci resterà da verificare che: *queste formole danno precisamente le cercate formole d'applicabilità delle rigate* R_1 *sul paraboloide* P_0.

Si dovrà dunque provare che il ds_1^2 di R_1, già calcolato in coordinate u, v al § 10

$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2\,,$$

si trasforma, nelle nuove coordinate u_1, v_1, nel $\overline{ds}_1^2$ di P_0

$$\overline{ds}_1^2 = \bar{E}_1\,du_1^2 + 2\bar{F}_1\,du_1\,dv_1 + \bar{G}_1\,dv_1^2\,,$$

dove $\bar{E}_1, \bar{F}_1, \bar{G}_1$ hanno, per le (8) § 5, i valori seguenti

$$\bar{E}_1 = p + q + 4v_1^2\,,\quad \bar{F}_1 = p - q + 4u_1 v_1\,,\quad \bar{G}_1 = p + q + 4u_1^2 \tag{43}$$

A questo punto diventa necessario separare la trattazione dei due casi dei segni superiori o inferiori nelle nostre formole, secondo che

dunque le rigate R_1 sono composte con raggi della congruenza Γ o della $\bar{\Gamma}$ (§ 4) generata dalle rette del primo o del secondo sistema di P_k. Ma una semplice osservazione ci dimostra che possiamo limitarci al primo caso, poichè il passaggio dall'uno all'altro caso equivale nelle (42) a scambiare u_1 con v_1 e d'altra parte si è già osservato, alla fine del § 5, che il medesimo passaggio equivale a scambiare u con v in tutte le formole: basterà dunque compiere le verifiche pel primo caso, quelle del secondo deducendosi da queste con un semplice cambiamento di notazioni.

Per altro si deve osservare che lo scambio di u con v nelle formole (7) del § 5 ha per effetto di cangiare il segno di y_0, cioè equivale ad una riflessione del paraboloide P_0 sul piano xz. In questo caso adunque le formole (42) d'applicabilità equivalgono all'affinità d'Ivory congiunta con una simmetria rispetto al piano xz.

Dopo queste considerazioni, sceglieremo d'ora innanzi in tutte le nostre formole i segni superiori; così le (42) danno

$$u_1 = \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right)\,,\quad v_1 = \frac{1}{2\lambda}. \tag{44}$$

Sostituendo per $\bar{z}_0$ il suo valore (33), abbiamo definitivamente per le cercate formole d'applicabilità

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + \sqrt{pq'}\,(u-v) - \sqrt{pq}\,(4uv+k)\lambda}{2\left[\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + \sqrt{pq}\right]} \\ v_1 &= \frac{1}{2\lambda}\,, \end{aligned}\right. \tag{45}$$

e non ci resterà più altro che da eseguire le opportune verifiche. Intanto si osservi che v_1 risulta per queste formole funzione della sola v, come doveva essere, poichè anche nell'applicabilità si debbono corrispondere le generatrici di R e R_1.

§ 12.

Verifica della applicabilità delle rigate R_1 sul paraboloide.

L'identità $ds_1^2 = \overline{ds}_1^2$ dei due elementi lineari che dobbiamo dimostrare equivale, poichè v_1 è funzione di v soltanto, alle tre equazioni seguenti:

$$
(46)\quad \begin{cases} E_1 = \overline{E}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2, \ F_1 = \overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv} \\ G_1 = \overline{E}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} + \left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2, \end{cases}
$$

dove con $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial v}$ si indicano le derivate *esplicite* di u_1 rispetto ad u e v.

Dalle formole (44) e dalle (34) § 10 (pag. 27) si ha

$$
(47)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2 \frac{V}{W^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v} = \lambda \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2 \frac{V}{W^2}, \end{cases}
$$

onde, essendo per la (43_1)

$$
\overline{E}_1 = p + q + \frac{1}{\lambda^2},
$$

deduciamo intanto, osservando le (32) § 10 (pag. 27)

$$
(48)\qquad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = E_0\,,\ \overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = F_0\,,\ \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = G_0\,.
$$

Confrontando queste colle (41), vediamo che la prima delle (46) è già verificata e le rimanenti si riducono alle relazioni seguenti che converrà verificare:

$$
(\alpha)\ \ldots\ \left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv} = \left[\sqrt{p}\,\lambda \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv} - 4\sqrt{pq}\frac{V^2}{W^2}\varphi(v)
$$

$$
(\beta)\ \ldots\ 2\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} + \left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{\partial v}\right)^2 =
$$

$$
= 2\left[\sqrt{p}\,\lambda \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} - 8\sqrt{pq}\frac{UV}{W^2}\varphi(v) + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \sum\left(\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + 4H\frac{V^2}{W^2}\varphi^2(v).
$$

Quanto alla (α) osserviamo che, avendosi

$$
\frac{d\lambda}{dv} = \frac{V\varphi(v)}{k}\,,\ \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\lambda \frac{V}{W^2}\,,\ \frac{\partial u_1}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2 \frac{V}{W^2},
$$

essa può scriversi

$$
\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\lambda^2 = \left[\sqrt{p}\,\lambda \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \lambda}\right].\lambda - k
$$

od anche, per la (39) § 10 (pag. 28),

$$
(49)\ \left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\lambda^2 = \left[1 + (p+q)\lambda^2\right].\lambda \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \lambda} + (p+q)\lambda^2\left(\overline{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{q-p}{2}.
$$

Ricorrendo alle (44), abbiamo

$$
\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \lambda} + \overline{z}_0 - \frac{k}{2}\,,\ \frac{\partial v_1}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\lambda^2},
$$

e d'altronde per le (43)

$$
\overline{E}_1 \lambda^2 = 1 + (p+q)\lambda^2\,,\ \overline{F}_1 = p - q + 2\left(\overline{z}_0 - \frac{k}{2}\right),
$$

ciò che riduce la (49) ad una identità. Così la nostra prima equazione (α) è verificata.

In forza di questa si ha altresì

$$
2\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} = 2\left[\sqrt{p}\,\lambda \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv}
$$

$$
- 8\sqrt{pq}\frac{UV}{W^2}\varphi(v),
$$

cosicchè la (β), che resta ancora a dimostrarsi, si riduce alla seguente

$$
\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2.\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 4H\frac{V^2}{W^2}\varphi^2(v),
$$

od anche, dividendo per $\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 = \frac{V^2\varphi^2(v)}{k^2}$ all'altra

$$
(50)\qquad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{4k^2H}{W^2}.
$$

Per verificarla nel modo più semplice si osservi che, pel modo stesso come furono calcolate al § 11 i valori di u_1, v_1, si ha

$$
\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right)^2,
$$

indi per le (41*)

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{p}{p'}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{q}{q'}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\right)^2$$

e però

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2-\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2=\left(\frac{p}{p'}-1\right)\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{q}{q'}-1\right)\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}\right)=$$

$$=\frac{k}{p'}\left(\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{k}{q'}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2.$$

Dopo ciò la (50) diventa

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{1}{q'}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{4kH}{W^2}. \tag{50*}$$

Ma dalle formole

$$\frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}}=u_1+\frac{1}{2\lambda}\,,\quad \frac{\bar{y}_0}{\sqrt{q'}}=u_1-\frac{1}{2\lambda}$$

segue

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{1}{q'}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2=-\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\,,$$

e la (50*) si riduce infine alla seguente

$$\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}=-\frac{2k\lambda^2}{W^2}H\,. \tag{51}$$

La derivazione effettiva rapporto a λ del valore (45) di u_1, porge

$$\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}=\frac{2\lambda^2[qp'(u+v)^2-pq'(u-v)^2-pq(4uv+k)]}{W^2}.$$

Ma siccome

$$p'=p-k\,,\quad q'=q+k\,,$$

si ha identicamente

$$qp'(u+v)^2-pq'(u-v)^2-pq(4uv+k)=-k[p(u-v)^2+q(u+v)^2+pq]=-kH,$$

ciò che dimostra appunto la (51).

Tutte le nostre verifiche sono ora compiute e possiamo enunciare la proposizione finale:

Le ∞^1 superficie rigate R_1, dedotte per trasformazione B_k dalla deformata rigata iniziale R del paraboloide P_0, sono esse stesse applicabili su questo paraboloide, e la legge d'applicabilità fra R e R_1 è data semplicemente dalla affinità d'Ivory fra i due paraboloidi omofocali P_0, P_k.

Un ultimo punto resta solo da completarsi perchè risulti stabilito in tutte le sue parti, per le deformate del paraboloide, il teorema B) enunciato al § 4, e cioè che l'applicabilità fra le due rigate R, R_1 ha luogo per deformazione continua.

Dobbiamo provare che i loro due sistemi di generatrici hanno lo stesso senso, sono cioè insieme destrorsi, ovvero sinistrorsi. Questo è una semplice conseguenza del fatto che R, R_1 sono le due falde focali di una congruenza W, poichè in qualsiasi congruenza W colle falde focali S, S_1 le asintotiche corrispondenti di S, S_1 hanno sempre torsioni di egual segno. Nel caso nostro particolare di falde focali rigate R, R_1 lo vediamo anche direttamente colle considerazioni seguenti. Siano r, r_1 due generatrici corrispondenti di R, R_1 ed F, F_1 due punti mobili corrispondenti su r, r_1. Essi descrivono manifestamente due punteggiate projettive e però le congiungenti FF_1 generano una quadrica che tocca R lungo r ed R_1 lungo r_1. Per ciò, quando F, F_1 descrivono r, r_1, i rispettivi piani tangenti di R, R_1, cioè quelli della quadrica considerata, ruotano nel medesimo senso c. d. d.

§ 13.

Relazione reciproca fra R e R_1.

Abbiamo così completamente stabilito, per le deformate rigate del paraboloide, il teorema B).

Ma ora ci si presenta un'altra questione bene importante. Ogni deformata rigata R del paraboloide dà luogo, come abbiamo visto, per trasformazione B_k, ad ∞^1 nuove deformate rigate R_1. Come dipende inversamente la deformata primitiva R da ciascuna di queste R_1? È ben naturale di pensare che la relazione sia perfettamente reciproca e cioè: *Se la R_1 proviene dalla R per una trasformazione B_k, inversamente la R proverrà dalla R_1 per la medesima trasformazione B_k.* Questo appunto ci proponiamo ora di dimostrare, per la qual cosa, a causa del modo stesso come furono trovate le nostre trasformazioni, dovremo provare che:

Se la rigata R_1 si applica sul paraboloide P_0 e ciascuna sua generatrice r_1 trasporta seco, in sistema invariabile, la corrispondente generatrice

r di R, queste rette r si disporranno, a deformazione compiuta, precisamente sul paraboloide confocale P_k.

La dimostrazione si può far dipendere, colle considerazioni seguenti, da proprietà elementari dell'affinità d'Ivory.

Siano g, γ due generatrici qualunque corrispondenti di R, R_1 ed F, F_1 due loro punti corrispondenti. Se si applica R su P_0 la retta g si sovrapporrà ad una retta g_1 di P_0 e la retta γ, trascinata da g, verrà ad occupare sul paraboloide confocale P_k una certa posizione che indicheremo con $\bar g_2$; ogni segmento FF_1 si disporrà in un segmento $M_1\bar M_2$, di eguale lunghezza, tangente a P_0 nel primo estremo M_1 e terminato nel secondo estremo $\bar M_2$ alla $\bar g_2$ su P_k. Ora siano $\bar g_1, g_2$ le rette di P_k, P_0 rispettivamente che corrispondono, nell'affinità d'Ivory, alle $g_1, \bar g_2$, e medesimamente siano $\bar M_1, M_2$ i punti di $\bar g_1, g_2$ corrispondenti a $M_1, \bar M_2$ nella detta affinità. *Se la proprietà enunciata sussiste*, siccome applicando R_1 su P_0 la γ vi assume precisamente la posizione g_2, la g, trascinata da γ, dovrà prendere la posizione $\bar g_1$ su P_k ed i segmenti F_1F dovranno adattarsi sui segmenti $M_2\bar M_1$. Dovrà dunque esistere un movimento invariabile che trasporti la coppia di rette $g_1, \bar g_2$ coi rispettivi punti $M_1, \bar M_2$ nella coppia $\bar g_1, g_2$ e nei rispettivi punti $\bar M_1, M_2$. Due di queste quattro rette $g_1, g_2, \bar g_1, \bar g_2$, p. e. g_1, g_2, sono in sostanza perfettamente arbitrarie e siamo così ridotti a verificare una proprietà elementare dell'affinità d'Ivory, dalla quale poi potremo inversamente trarre la proprietà enunciata delle trasformazioni B_k.

Siano $M_1 \equiv (x_1 y_1 z_1)$, $M_2 \equiv (x_2 y_2 z_2)$ due punti qualunque del paraboloide P_0 e siano $\bar M_1 \equiv (\bar x_1 \bar y_1 \bar z_1)$, $\bar M_2 \equiv (\bar x_2 \bar y_2 \bar z_2)$ i loro corrispondenti, nell'affinità d'Ivory, sul paraboloide confocale P_k; avremo (§ 11)

$$\begin{cases} \bar x_1 = \sqrt{\dfrac{p-k}{p}}\cdot x_1\,, \quad \bar y_1 = \sqrt{\dfrac{q+k}{q}}\cdot y_1\,, \quad \bar z_1 = z_1 + \dfrac{k}{2} \\ \bar x_2 = \sqrt{\dfrac{p-k}{p}}\cdot x_2\,, \quad \bar y_2 = \sqrt{\dfrac{q+k}{q}}\cdot y_2\,, \quad \bar z_2 = z_2 + \dfrac{k}{2}\,, \end{cases}$$

Osserviamo successivamente le proprietà seguenti:

1.ª (Teorema d'Ivory) *I segmenti rettilinei* $M_1\bar M_2$, $M_2\bar M_1$ *hanno sempre eguale lunghezza*.

E invero avendosi

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}=2z_1\,, \quad \frac{x_2^2}{p}-\frac{y_2^2}{q}=2z_2\,,$$

segue che l'espressione

$$\sum (x_1-\bar x_2)^2 - \sum (x_2-\bar x_1)^2 = k\left\{\left(\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}\right)-\left(\frac{x_2^2}{p}-\frac{y_2^2}{q}\right)+2(z_2-z_1)\right\}$$

è identicamente nulla.

2.ª *L'affinità d'Ivory fa corrispondere le generatrici per tratti eguali.*

Si ha invero

$$(\bar x_1-\bar x_2)^2+(\bar y_1-\bar y_2)^2+(\bar z_1-\bar z_2)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+ \\ + k\left[\frac{(y_1-y_2)^2}{q}-\frac{(x_1-x_2)^2}{p}\right]$$

e quando M_1, M_2 sono sopra una stessa generatrice (quindi anche $\bar M_1, \bar M_2$) si ha identicamente

$$\frac{(x_1-x_2)^2}{p}=\frac{(y_1-y_2)^2}{q}\,,$$

onde appunto $\bar M_1 \bar M_2 = M_1 M_2$ [1].

In fine ci occorre ancora osservare questa 3.ª proprietà: *Se il piano tangente in* M_1, *al paraboloide* P_0 *passa per* $\bar M_2$, *inversamente il piano tangente a* P_0 *in* M_2 *passerà per* $\bar M_1$.

E infatti le due espressioni

$$\frac{x_1\bar x_2}{p}-\frac{y_1\bar y_2}{q}-(z_1+\bar z_2)\,, \quad \frac{x_2\bar x_1}{p}-\frac{y_2\bar y_1}{q}-(z_2+\bar z_1)$$

sono eguali fra loro ed all'altra

$$\sqrt{\frac{p-k}{p^3}}\cdot x_1x_2-\sqrt{\frac{q+k}{q^3}}\cdot y_1y_2-\left(z_1+z_2+\frac{k}{2}\right),$$

e si annullano quindi insieme. Ma l'annullarsi della prima esprime che il piano tangente in M_1 a P_0 passa per $\bar M_2$, e quello della seconda che il piano tangente in M_2 passa per $\bar M_1$.

---

[1] Questa proprietà dell'affinità d'Ivory, che dà luogo alla costruzione del paraboloide e iperboloide articolato (Henrici), risulta anche dalla forma dell'elemento lineare, giacchè i coefficienti estremi E, G [§ 5 formole (8)] contengono p, q nella sola combinazione $p+q$ e non variano se si passa dal paraboloide ad un paraboloide confocale.

Premesse queste proprietà, prendiamo ora due generatrici qualunque g_1, g_2 del paraboloide P_0, che possono appartenere allo stesso o a contrario sistema, e siano $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ le loro corrispondenti, nell'affinità d'Ivory, sul paraboloide confocale P_k. Stabiliamo una corrispondenza (projettiva) fra i punti di queste quattro rette, facendo corrispondere ad ogni punto M_1 di g_1 quel punto $\bar{M}_2$ su $\bar{g}_2$, ove $\bar{g}_2$ incontra il piano tangente a P_0 in M_1. Allora i punti $\bar{M}_1, M_2$ corrispondenti a $M_1, \bar{M}_2$ nell'affinità d'Ivory descriveranno in modo determinato le rette $\bar{g}_1, g_2$. Per quanto si è visto sopra, la corrispondenza così stabilita fra i punti delle quattro rette $g_1, g_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2$ godrà delle proprietà seguenti:

α) Ogni segmento $M_1 \bar{M}_2$ sarà eguale in lunghezza al corrispondente $\bar{M}_1 M_2$.

β) Gli stessi segmenti toccheranno rispettivamente P_0 in M_1 e M_2.

γ) Le punteggiate $g_1, \bar{g}_1$ descritte da $M_1, \bar{M}_1$ saranno eguali e medesimamente le $g_2, \bar{g}_2$.

Un'altra proprietà essenziale resta ancora da osservare e cioè che le due coppie di rette $(g_1, \bar{g}_2)$, $(\bar{g}_1, g_2)$ presentano il medesimo angolo e momenti eguali, ovvero eguali e di segno contrario, secondo che le generatrici g_1, g_2 sono prese da uno stesso sistema o da sistema opposto. Basta per accertarsene scrivere le equazioni di queste rette ed applicare le notissime formole di geometria analitica.

Tutte queste proprietà rendono ben evidente che la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$, coi suoi punti $M_1, \bar{M}_1$, sarà sovrapponibile alla coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ ed ai punti $\bar{M}_1, M_2$. e più precisamente con un movimento rigido nel primo caso (quando g_1, g_2 appartengono al medesimo sistema) ed invece con una simmetria nel secondo. Questo del resto si verificherà nel prossimo paragrafo col calcolo diretto.

Ed ora basta riprendere le considerazioni al principio di questo paragrafo per dedurne l'enunciata proprietà. Sia R una deformata rigata del paraboloide P_0, e sia R_1 una sua derivata per trasformazione B_k, e supponiamo dapprima che R_1 prenda le sue generatrici dalla prima congruenza Γ, o come diremo che la trasformazione B_k sia della prima classe. Indichino g, γ due generatrici qualunque corrispondenti di R, R_1 e sopra di esse siano F, F_1 due punti qualunque corrispondenti. Applichiamo R su P_0; la retta g si sovrapporrà, diciamo, a g_1 e la γ (trascinata da g) si disporrà sopra una certa generatrice di P_k, di sistema omologo a quello di g_1, che diremo $\bar{g}_2$. Consideriamo le due generatrici

$\bar{g}_1, g_2$ di P_k, P_0 corrispondenti a $g_1, \bar{g}_2$ nell'affinità d'Ivory. Un movimento rigido sovrappone, come si è detto, la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ ed i segmenti $M_1 \bar{M}_2$ alla coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ ed ai segmenti $\bar{M}_1 M_2$.

Ora se applichiamo R_1 sopra P_0, la generatrice γ occuperà (per la legge d'applicabilità) precisamente la posizione g_2 ed ogni piano (F, γ) tangente in F_1 a R_1 si sovrapporrà al piano $(\bar{M}_1, g_2)$ tangente in M_2 a P_0: per ciò tutti i segmenti $F_1 F$ si disporranno sui segmenti $M_2 \bar{M}_1$ e la retta g luogo dei punti F si collocherà adunque sulla generatrice $\bar{g}_1$ del paraboloide confocale P_k, c. d. d.

Il risultato è ancora il medesimo quando la trasformazione B_k appartenga alla seconda classe. Allora nell'applicabilità di R_1 sopra P_0, fissata dalle formole (42) § 12, la retta γ non si collocherà più sulla g_2 ma sulla sua simmetrica g'_2 rispetto al piano xz, come ivi abbiamo osservato. E poichè in questo caso è una simmetria che sovrappone la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ all'altra $(\bar{g}_1, g_2)$, sarà ancora un movimento rigido che sovrappone la prima coppia alla simmetrica dell'altra.

§ 14.

Espressione effettiva del movimento invariabile o simmetria.

Per non lasciare alcun dubbio circa le deduzioni del paragrafo precedente, andiamo ora a stabilire le effettive espressioni del movimento rigido e della simmetria ivi considerati.

Suppongasi dapprima che le rette g_1, g_2 appartengano ad un medesimo sistema di P_0, p. e. al primo, e siano le loro rispettive equazioni

$$g_1)\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \sqrt{p}\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_1} \\[2ex] y_1 = \lambda_1 \sqrt{q}\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_1} \end{cases} \qquad g_2)\begin{cases} x_2 = \lambda_2 \sqrt{p}\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_2} \\[2ex] y_2 = \lambda_2 \sqrt{q}\, z_2 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_2}. \end{cases}$$

Le generatrici $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ di P_k corrispondenti a g_1, g_2 nell'affinità d'Ivory, avranno per equazioni

$$\bar{g}_1)\begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda_1 \sqrt{p'}\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda_1} \\[2ex] \bar{y}_1 = \lambda_1 \sqrt{q'}\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda_1} \\[2ex] \bar{z}_1 = z_1 + \dfrac{k}{2} \end{cases} \qquad \bar{g}_2)\begin{cases} \bar{x}_2 = \lambda_2 \sqrt{p'}\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda_2} \\[2ex] \bar{y}_2 = \lambda_2 \sqrt{q'}\, z_2 - \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda_2} \\[2ex] \bar{z}_2 = z_2 + \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

ed ai punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) corrispònderanno i punti $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$.

Siano ora

$$\begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha \\ \eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta \\ \zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma \end{cases}$$

le formole che definiscono un movimento rigido, ove x, y, z e ξ, η, ζ indicano rispettivamente le coordinate di un punto qualunque dello spazio prima e dopo il movimento. Affinchè questo movimento sovrapponga, come vogliamo, la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ ed i punti $M_1, \overline{M}_2$ alla coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ ed ai punti $\overline{M}_1, M_2$ occorre e basta che le equazioni superiori siano soddisfatte ponendovi

$$x = x_1 \ , \ y = y_1 \ , \ z = z_1$$
$$\xi = \bar{x}_1 \ , \ \eta = \bar{y}_1 \ , \ \zeta = \bar{z}_1 ,$$

qualunque sia z_1, ed ancora per

$$x = \bar{x}_2 \ , \ y = \bar{y}_2 \ , \ z = \bar{z}_2$$
$$\xi = x_2 \ , \ \eta = y_2 \ , \ \zeta = z_2$$

con qualunque z_2. Queste condizioni danno altrettante equazioni lineari quante occorrono per determinare i 12 coefficienti incogniti α, β, γ e dalla semplice risoluzione si trovano i valori seguenti.

Ponendo

$$\Delta = (\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2 ,$$

i coefficienti α, β, γ risultano determinati dalle formole

$$\begin{cases} \Delta\alpha_1 = (\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{p'q'} - \sqrt{pq})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda_1\lambda_2 \\ \Delta\alpha_2 = k(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \Delta\alpha_3 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{q'}\lambda_1 - \sqrt{q}\lambda_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = k(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \Delta\beta_2 = (\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{q}p' + \sqrt{p}q')\lambda_1\lambda_2 \\ \Delta\beta_3 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p}\lambda_2 - \sqrt{p'}\lambda_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\gamma_1 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{q'}\lambda_2 - \sqrt{q}\lambda_1) \\ \Delta\gamma_2 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p}\lambda_1 - \sqrt{p'}\lambda_2) \\ \Delta\gamma_3 = (\sqrt{pq'} + \sqrt{qp'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha = k(\sqrt{q'}\lambda_2 - \sqrt{q}\lambda_1) + k^2\sqrt{q}\lambda_1\lambda_2^2 \\ \Delta\beta = k(\sqrt{p'}\lambda_2 - \sqrt{p}\lambda_1) - k^2\sqrt{p}\lambda_1\lambda_2^2 \\ \Delta\gamma = \frac{k}{2}\left\{(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'})\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2\right\}. \end{cases}$$

Ora è facile verificare sui valori precedenti di $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ che essi rendono la sostituzione

$$(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ortogonale e destrorsa (a determinante $+1$).

Le formole trovate definiscono adunque appunto un movimento rigido, come si era asserito.

Suppongasi ora in secondo luogo che le rette g_1, g_2 appartengano a sistema contrario e siano

$$g_1) \begin{cases} x = \lambda_1\sqrt{p}\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_1} \\ y = \lambda_1\sqrt{q}\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_1} \end{cases} \qquad g_2) \begin{cases} x_2 = \lambda_2\sqrt{p}\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_2} \\ y_2 = -\lambda_2\sqrt{q}\, z_2 + \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_2} \end{cases}$$

le loro equazioni. Procedendo precisamente come nel caso precedente, si trovano per i coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ valori che si deducono da quelli sopra scritti semplicemente mutandovi $\sqrt{q'}$ in $-\sqrt{q'}$ e *cangiando di segno* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Questo ha evidentemente per effetto di cangiare la sostituzione ortogonale α) da destrorsa in sinistrorsa (determinante $= -1$); per ciò il movimento rigido è sostituito da una simmetria.

§ 15.

Posizione relativa dei piani tangenti di R e R_1.

Riprendiamo a considerare due deformate rigate R, R_1 del paraboloide fondamentale P_0, trasformate l'una dell'altra per una trasformazione B_k e i loro piani tangenti π, π_1 in punti corrispondenti F, F_1, che contengono il segmento focale FF_1 e passano rispettivamente per due generatrici corrispondenti r, r_1. Immaginiamo nuovamente di applicare R sopra P_0 e che R trascini seco, in sistema invariabile, i segmenti FF_1 ed i piani π_1. I termini F_1 dei segmenti si disporranno sul paraboloide confocale P_k ed i piani π_1 sui piani $\overline{\pi}_1$ condotti pei segmenti stessi (dopo la deformazione) e per l'una o per l'altra generatrice del paraboloide P_k che passa pel secondo estremo.

Precisamente si tratterà della generatrice del 1.° sistema o del 2.° secondo che la trasformazione B_k apparterrà alla prima o alla seconda classe. Questi piani $\overline{\pi}_1$ sono tangenti al paraboloide P_k in un punto della detta generatrice e siccome passano anche pel primo estremo M del segmento essi sono tangenti al cono circoscritto da M al paraboloide P_k. Dopo ciò, se volgiamo le nostre considerazioni alle ∞^1 rigate R_1 trasformate di R, potremo completare le nostre considerazioni geometriche come segue. Immaginiamo le ∞^2 coniche C sezioni dei piani tangenti del paraboloide P_0 col paraboloide confocale P_k e *dualmente* gli ∞^2 coni Λ circoscritti dai punti di P_0 al paraboloide P_k. Ed ora deformiamo il paraboloide P_0 nella rigata R, supponendo che nella deformazione trascini seco, in sistema invariabile, le coniche C ed i coni Λ. La tripla infinità di punti e di piani tangenti delle ∞^1 superficie trasformate R_1 è data dai punti delle coniche C e dai piani tangenti dei coni Λ. Riprenderemo più tardi (§ 40) queste considerazioni che conservano il loro valore per *qualunque* deformazione della quadrica come per le deformate rigate. Qui noi vogliamo ancora trovare le formole effettive per la giacitura dei piani tangenti π_1 alle superficie trasformate R_1 e dedurne alcune conseguenze importanti per il seguito.

Indichiamo con

$$X_1\,,\ Y_1\,,\ Z_1$$

i coseni di direzione della normale alla superficie trasformata R_1 nell'estremo F_1 del segmento FF_1. Poichè essa è perpendicolare a questo

segmento, avremo

$$\sum X_1(x_1-x)=0$$

ed aggiungendo a questa condizione l'altra

$$\sum X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u}=0$$

potremo determinare X_1, Y_1, Z_1. Ci converrà scrivere X_1, Y_1, Z_1 sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial x}{\partial v}+CX \\ Y_1 &= A\frac{\partial y}{\partial u}+B\frac{\partial y}{\partial v}+CY \\ Z_1 &= A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v}+CZ \end{aligned}\right.$$

e determinare A, B, C. Siccome si ha (§ 10)

$$\left\{\begin{aligned} x_1-x &= l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} &= L_0\frac{\partial x}{\partial u}+M_0\frac{\partial x}{\partial v}+D'mX \end{aligned}\right.$$

le due condizioni scritte si traducono nelle altre

$$\left\{\begin{aligned} &(El+Fm)A+(Fl+Gm)B=0 \\ &(EL_0+FM_0)A+(FL_0+GM_0)B+CD'm=0\,, \end{aligned}\right.$$

onde risulta

$$A:B:C=D'm(Fl+Gm):-D'm(El+Fm):(EG-F^2)(lM_0-mL_0).$$

E siccome (pag. 11 e 15)

$$EG-F^2=4H\,,\quad D'=-\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}$$

potremo scrivere, indicando con R un fattore di proporzionalità,

$$(52)\quad A=-R(Fl+Gm)\,,\ B=R(El+Fm)\,,\ C=R\,.\,\frac{2H^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{pq}}(lM_0-mL_0)=$$
$$=R\,.\,\frac{2\sqrt{H}}{m}\,.\,\rho\,(lM_0-mL_0)$$

e quindi

(53) $$X_1 = R\left\{-(Fl+Gm)\frac{\partial x}{\partial u} + (El+Fm)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{2H^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{pq}}(lM_0 - mL_0)X\right\}$$

colle analoghe per Y_1, Z_1.

Per calcolare R^2 basta osservare che deve essere

$$\sum X_1^2 = 1$$

e perciò

(54) $$EA^2 + 2FAB + GB^2 + C^2 = 1.$$

Ora si ha dalle (52)

$$EA^2 + 2FAB + GB^2 = R^2(EG - F^2)(El^2 + 2Flm + Gm^2),$$

e poichè, indicando con δ la lunghezza del segmento focale FF_1, si ha

$$\delta^2 = \sum (x_1 - x)^2 = El^2 + 2Flm + Gm^2,$$

la precedente può scriversi

$$EA^2 + 2FAB + GB^2 = R^2 . 4H\delta^2$$

e dalla (54) segue quindi

(55) $$R^2 = \frac{1}{4H\left[\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2\right]}.$$

Come si vede, i valori (53) di X_1, Y_1, Z_1 non contengono più traccia dei coefficienti della seconda forma fondamentale di R, ciò che corrisponde al fatto geometrico della posizione relativa invariabile del piano tangente π_1 alla R_1.

Se indichiamo con Ω l'angolo dei due piani focali π, π_1, abbiamo

$$\cos\Omega = C = \frac{\frac{\rho}{m}(lM_0 - mL_0)}{\sqrt{\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2}}$$

e quindi

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2,$$

ossia

(56) $$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2.$$

Ricordiamo ora che la congruenza a falde focali R, R_1 è *una congruenza* W, ciò che secondo un teorema di Ribaucour (vol. II § 245 pag. 59) si caratterizza colla relazione

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \sqrt{\frac{1}{KK_1}},$$

dove K, K_1 sono le curvature delle due falde focali. Ora abbiamo

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \quad \text{con} \quad \rho = \frac{p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq}{\sqrt{pq}}$$

e similmente

$$K_1 = -\frac{1}{\rho_1^2} \quad \text{con} \quad \rho_1 = \frac{p(u_1 - v_1)^2 + q(u_1 + v_1) + pq}{\sqrt{pq}}$$

La relazione di Ribaucour ci fornisce adunque la seguente identità

(57) $$El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2 = \rho\rho_1,$$

la quale, a causa delle formole

$$l = \frac{U}{W}, \quad m = \frac{V}{W}$$

e della identità (26*) § 7 (pag. 19), può anche scriversi sotto la forma equivalente

(57*) $$EU^2 + 2FUV + GV^2 + \frac{1}{k^2}\left(V\frac{\partial U}{\partial\lambda} - U\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2 = W^2\rho\rho_1.$$

Naturalmente si può verificare anche direttamente questa identità e si ha così una nuova dimostrazione della corrispondenza delle asintotiche sulla superficie primitiva R e sulla trasformata R_1.

§ 16.

Formole relative all'iperboloide ad una falda.

Colle ricerche dei paragrafi precedenti abbiamo esaurita la trattazione delle parti fondamentali della teoria per le deformate rigate del paraboloide iperbolico ed ora ci volgiamo all'altra quadrica rigata: l'iperboloide ad una falda.

I procedimenti di cui faremo uso sono affatto analoghi a quelli già impiegati pel paraboloide e potremo quindi abbreviarne l'esposizione riferendoci al caso già trattato.

Scriviamo l'equazione dell'attuale quadrica fondamentale, che diremo Q_0, sotto la consueta forma normale

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{c^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1\,,$$

dove, per fissare le idee, supporremo

$$a^2 \geq b^2\,,$$

e riferiamola alle sue generatrici rettilinee $(u\,,v)$ colle formole

$$x_0=a\,\frac{1+uv}{u+v}\,,\quad y_0=b\,\frac{u-v}{u+v}\,,\quad z_0=c\,\frac{1-uv}{u+v}\,. \tag{58}$$

Per gli elementi fondamentali dell'iperboloide troviamo

$$ds_0^2=\mathrm{E}\,du^2+2\,\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2\,,$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}&=\frac{(a^2+c^2)\,v^4+2\,(c^2-a^2+2\,b^2)\,v^2+a^2+c^2}{(u+v)^4}\\ \mathrm{F}&=\frac{(a^2+c^2)\,u^2v^2+(c^2-a^2)\,(u^2+v^2)-4\,b^2uv+a^2+c^2}{(u+v)^4}\\ \mathrm{G}&=\frac{(a^2+c^2)\,u^4+2(c^2-a^2+2\,b^2)\,u^2+a^2+c^2}{(u+v)^4}\,,\end{aligned}\right. \tag{59}$$

indi

$$\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2=4\,\frac{a^2b^2\,(1-uv)^2+b^2c^2\,(1+uv)^2+a^2c^2\,(u-v)^2}{(u+v)^6}\,. \tag{59*}$$

I coefficienti $\mathrm{D}_0\,,\mathrm{D}'_0\,,\mathrm{D}''_0$ della seconda forma fondamentale hanno i valori seguenti

$$\mathrm{D}_0=\mathrm{D}''_0=0\,,\quad \mathrm{D}'_0=-\frac{4\,abc}{(u+v)^4\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,, \tag{60}$$

onde segue per la curvatura K

$$\mathrm{K}=-\frac{1}{\rho^2}\,,\quad \rho=\frac{a^2b^2\,(1-uv)^2+b^2c^2\,(1+uv)^2+a^2c^2\,(u-v)^2}{abc\,(u+v)^2}\,. \tag{61}$$

In fine si trova che i simboli di Christoffel hanno qui i valori seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=-\frac{2}{u+v}\,,\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0\\ &\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\,,\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\,.\end{aligned}\right. \tag{62}$$

Prendiamo ora un secondo iperboloide rigato Q_k confocale a Q_0, e sia

$$Q_k)\quad \frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}-\frac{z^2}{c^2-k}=1$$

la sua equazione, dove dunque k avrà un valore arbitrario nell'intervallo $(-b^2\,,c^2)$

$$-\,b^2\leq k\leq c^2\,.$$

Qui, come nel caso del paraboloide (§ 5), escludiamo bensì il valore $k=0$, ma non i valori estremi $k=-b^2\,,k=c^2$ corrispondenti rispettivamente all'iperbola ed all'ellisse focale. Indichiamo con $a'\,,b'\,,c'$ i semi-assi dell'iperboloide Q_k

$$a'=\sqrt{a^2+k}\,,\quad b'=\sqrt{b^2+k}\,,\quad c'=\sqrt{c^2-k} \tag{64}$$

e scriviamo le equazioni dei due sistemi di generatrici di Q_k sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} x&=\pm\,\frac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\,.\,z+a'\cos\theta\\ y&=\mp\,\frac{b'}{c'}\cos\theta\,.\,z+b'\operatorname{sen}\theta\,,\end{aligned}\right. \tag{64}$$

dove il doppio segno distingue i due sistemi, e θ indica il parametro variabile che fissa la generatrice nel suo sistema.

Come al § 5, consideriamo la conica C sezione del piano tangente a Q_0 nel punto $(x_0y_0z_0)$ colla quadrica confocale Q_k. Un punto qualunque $(\overline{x}_0\,,\overline{y}_0\,,\overline{z}_0)$ di questa conica avrà coordinate della forma

$$\overline{x}_0=x_0+l\,\frac{\partial x}{\partial u}+m\,\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ ecc.},$$

e dovremo calcolare i valori di $l\,,m$ in funzione di $u\,,v\,,\theta$.

Dalle (58) risulta

$$
(65)\quad \begin{cases}
\bar{x}_0 = a\,\dfrac{(u+v)(1+uv)+(v^2-1)l+(u^2-1)m}{(u+v)^2} \\[2ex]
\bar{y}_0 = b\,\dfrac{(u+v)(u-v)+2vl-2um}{(u+v)^2} \\[2ex]
\bar{z}_0 = c\,\dfrac{(u+v)(1-uv)-(v^2+1)l-(u^2+1)m}{(u+v)^2},
\end{cases}
$$

e ponendo nelle (64) per x, y, z questi valori $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ abbiamo due equazioni lineari per determinare l, m, che risolute danno le formole seguenti

$$
(66)\qquad l = (u+v)\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}}\ ,\quad m = (u+v)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}},
$$

le funzioni U, V, W essendo espresse per u, v, θ colle formole

$$
(67)\quad \begin{cases}
\mathrm{U} = \left(\pm\dfrac{ac}{a'c'}-\dfrac{b}{b'}\right)2u\cos\theta+\left(\pm\dfrac{bc}{b'c'}-\dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta+\left(\dfrac{ab}{a'b'}\mp\dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1) \\[2ex]
\mathrm{V} = \left(\mp\dfrac{ac}{a'c'}-\dfrac{b}{b'}\right)2v\cos\theta+\left(\pm\dfrac{bc}{b'c'}+\dfrac{a}{a'}\right)(v^2-1)\operatorname{sen}\theta+\left(\dfrac{ab}{a'b'}\pm\dfrac{c}{c'}\right)(v^2+1) \\[2ex]
\mathrm{W} = 2\left[\pm\dfrac{ac}{a'c'}(u-v)\cos\theta\mp\dfrac{bc}{b'c'}(1+uv)\operatorname{sen}\theta+\dfrac{ab}{a'b'}(1-uv)\right].
\end{cases}
$$

Si osservi che il passaggio dai segni superiori agli inferiori equivale a scambiare in queste formole u con v, cangiando il segno di θ.

§ 17.

Rigate applicabili su Q_0 — Equazione differenziale per $\theta(v)$.

Sia R una deformata rigata qualunque dell'iperboloide Q_0, e supponiamo p. e. che le generatrici di R corrispondano per *deformazione continua* alle generatrici (v). Delle due forme quadratiche fondamentali di R, la prima sarà data dal ds_0^2 di Q_0 e per la seconda avremo (cf. § 6)

$$
\mathrm{D}=0\ ,\quad \mathrm{D}'=\mathrm{D}'_0=-\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho},
$$

Ricorrendo poi alla seconda equazione di Codazzi, coll'osservare le (62), abbiamo

$$
\frac{\partial \log \mathrm{D}''}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\log\left[(u+v)^2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\right],
$$

da cui

$$
\mathrm{D}'' = (u+v)^2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,\varphi(v),
$$

la forma della funzione arbitraria $\varphi(v)$ fissando la deformata R. Abbiamo dunque le formole

$$
(68)\quad \mathrm{D}=0\ ,\quad \mathrm{D}'=\mathrm{D}'_0=-\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}\ ,\quad \mathrm{D}''=(u+v)^2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,\varphi(v)
$$

e quindi

$$
(68^*)\qquad \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}'} = -(u+v)^2\rho\,.\,\varphi(v).
$$

Sia (x, y, z) un punto mobile sopra R e nelle formole

$$
x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.},
$$

poniamo per θ una funzione arbitraria $\theta(v)$ di v; avremo così definita una rigata R_1 della congruenza Γ descritta dalle generatrici (del primo o del secondo sistema) dell'iperboloide Q_k trascinato dal confocale Q_0 nel rotolamento di questo sulla rigata applicabile (cf. § 6). Si tratta di scegliere la funzione $\theta(v)$ in guisa che la rigata R_1 venga a formare colla primitiva R le due falde focali della congruenza generata dalle congiungenti FF_1 i loro punti corrispondenti $\mathrm{F} \equiv (x, y, z)$, $\mathrm{F}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$.

Per questo occorre e basta soddisfare l'equazione (5) del § 3 (pag. 9), che per le (68), (68*) diventa qui

$$
(69)\qquad \begin{vmatrix}
l & m & 0 \\
\mathrm{L} & \mathrm{M} & m \\
\mathrm{P} & \mathrm{Q} & l-\rho(u+v)^2\varphi(v)\,.\,m
\end{vmatrix} = 0\,.
$$

Procedendo come al § 6, indichiamo con $\mathrm{L}_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0$ ciò che diventano L, M, P, Q nell'ipotesi di θ costante ed avremo, a causa delle

(3) § 3, e dei valori attuali (62) dei simboli di Christoffel,

$$(70)\quad \begin{cases} L_0=\dfrac{\partial l}{\partial u}-\dfrac{2}{u+v}l+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial v}m+1\ , & M_0=\dfrac{\partial m}{\partial u}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial v}m \\ P_0=\dfrac{\partial l}{\partial v}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial v}l & Q_0=\dfrac{\partial m}{\partial v}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial u}l-\dfrac{2}{u+v}m+1\ , \end{cases}$$

indi

$$(70^*)\quad \begin{cases} L=L_0 & M=M_0 \\ P=P_0+\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dv}\ , & Q=Q_0+\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dv}\ . \end{cases}$$

L'equazione (69) diventa dunque

$$(71)\quad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0 & M_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} l & ,\ m & 0 \\ L_0 & ,\ M_0 & m \\ \dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dv}\ , & \dfrac{\partial m}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dv}\ , & -\rho(u+v)^2\varphi(v)\ .\ m \end{vmatrix}=0\,.$$

Per la ragione stessa addotta al § 7, si vede a *priori* che il determinante

$$\Theta=\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0 & M_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

si annulla; ma conviene verificarlo anche col calcolo effettivo, mostrando adunque che si ha l'identità

$$(72)\qquad l\,(l M_0-m L_0)=m\,(l Q_0-m P_0)\,.$$

E infatti abbiamo per le (70)

$$\frac{\Theta}{l^2}=l\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{l}\right)+\frac{2}{u+v}\frac{m}{l}\right]-m\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{l}\right)-\frac{2}{u+v}\frac{m}{l}\right]-2\frac{m}{l}\,,$$

od anche per le (66)

$$\frac{\Theta}{l^2}=\frac{V}{UW}\Big[2U+2V-2W-(u+v)\,(U'+V')\Big]\,,$$

indicando al solito U' la derivata esplicita di U rapporto a u e simil-

mente V' la derivata esplicita di V rapporto a v. Ma dalle espressioni effettive (67) di U, V, W segue appunto l'identità

$$(73)\qquad (u+v)\,(U'+V')=2U+2V-2W\,;$$

dunque $\Theta=0$, c. d. d.

Dopo ciò l'equazione (71) resta

$$(74)\qquad \frac{d\theta}{dv}\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta}-l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)=(u+v)^2\rho\varphi(v)\,(l M_0-m L_0)\,,$$

e per ciò

$$\frac{d\theta}{dv}=(u+v)^2\varphi(v)\,\rho\,\frac{l\dfrac{\partial m}{\partial u}-m\dfrac{\partial l}{\partial u}+\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial u}+\dfrac{2}{u+v}\right)lm-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log\rho}{\partial v}m^2-m}{m\dfrac{\partial l}{\partial\theta}-l\dfrac{\partial m}{\partial\theta}}\,,$$

od anche

$$\frac{d\theta}{dv}=\varphi(v)\frac{\left[\dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2\,(u+v)\rho\right]\dfrac{l}{m}-\dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}-(u+v)^2\rho\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{l}{m}\right)-\dfrac{(u+v)^2\rho}{m}}{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{l}{m}\right)}\,.$$

Siccome

$$\frac{l}{m}=\frac{U}{V}\ ,\quad \frac{u+v}{m}=\frac{W}{V}\,,$$

ne deduciamo

$$\frac{d\theta}{dv}=V\varphi(v)\frac{\left[\dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2(u+v)\rho\right]U-(u+v)^2\rho\,U'-\dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}V-(u+v)\,\rho\,W}{V\dfrac{\partial U}{\partial\theta}-U\dfrac{\partial V}{\partial\theta}}\,.$$

Ma si ha per la (61)

$$abc\,\rho=\frac{a^2b^2(1-uv)^2+b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2}{(u+v)^2}$$

indi

$$\begin{cases} \dfrac{abc}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}=\dfrac{b^2c^2v\,(1+uv)+a^2c^2(u-v)-a^2b^2v\,(1-uv)}{(u+v)^2}-\dfrac{abc}{u+v}\rho \\ \dfrac{abc}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}=\dfrac{b^2c^2u\,(1+uv)-a^2c^2(u-v)-a^2b^2u\,(1-uv)}{(u+v)^2}-\dfrac{abc}{u+v}\rho \end{cases}$$

e la formola precedente per $\frac{d\theta}{dv}$, utilizzando l'identità (73), diventa

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\mathrm{V}\varphi(v)}{abc} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} - \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}},$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} \mathrm{N} = & [a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2]\frac{\mathrm{V}'-\mathrm{U}'}{2} + \\ & + [b^2c^2v(1+uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)]\mathrm{U} - \\ & - [b^2c^2u(1+uv) - a^2c^2(u-v) - a^2b^2u(1-uv)]\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Se si calcola questa espressione N mediante le formole effettive (67), e si paragona con quella di

$$\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} - \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta},$$

si trova facilmente l'identità

$$\mathrm{N} = \pm \frac{abc\,.\,a'b'c'}{k}\left(\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} - \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}\right).$$

Abbiamo dunque il semplice risultato

$$\frac{d\theta}{dv} = \pm \frac{a'b'c'}{k}\mathrm{V}\varphi(v); \tag{75}$$

e qui osserviamo che, dal paragone di questa colla (74), risulta l'identità

$$\frac{1}{\mathrm{V}}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0) = \pm \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\,.\,\rho}\left(m\frac{\partial l}{\partial \theta} - l\frac{\partial m}{\partial \theta}\right), \tag{76}$$

che dovremo utilizzare in seguito.

Tornando alla (75), sostituiamovi per V il suo valore (67_2) (pag. 49) ed avremo per l'equazione differenziale che determina la funzione incognita $\theta(v)$ la forma definitiva:

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\left[(-acb' \mp a'c'b)2v\cos\theta + (bca' \pm b'c'a)(v^2-1)\operatorname{sen}\theta + (a'b'c \pm abc')(v^2+1)\right]. \tag{II}$$

È questa l'equazione differenziale che determina, nel caso attuale delle deformate dell'iperboloide, la decomposizione della congruenza Γ nelle ∞^1 rigate R_1 richieste. Si osservi che se, in luogo di θ, si assume

per parametro $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, ovvero anche il parametro

$$\lambda = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

dal quale dipendono razionalmente le coordinate di un punto mobile sulla conica C, l'equazione fondamentale (II) assume nuovamente la forma di Riccati.

§ 18.

Le trasformazioni B_k per le deformate rigate dell'iperboloide.

Abbiamo così stabilito per le deformate rigate dell'iperboloide ad una falda i medesimi risultati fondamentali come già al § 7 per quelle del paraboloide iperbolico.

Diremo anche qui, come al § 8, che ciascuna rigata R_1 deriva dalla rigata R mediante una trasformazione B_k e dimostreremo nei prossimi paragrafi che sussistono ancora tutte le altre proprietà enunciate nel teorema B) (§ 4). Dopo ciò è chiaro come tutte le deduzioni del § 8, relative al paraboloide, valgano inalterate per l'iperboloide. Sarebbe inutile ripetere qui gli enunciati di quelle proposizioni; solo osserveremo esplicitamente l'esistenza delle trasformazioni singolari

$$\mathrm{B}_{-b^2}\ ,\ \mathrm{B}_{c^2}\,,$$

corrispondenti ai valori estremi

$$k = -b^2\ ,\ k = c^2$$

del parametro k. Allora la congruenza Γ diventa quella generata dalle tangenti dell'iperbola focale

$$y = 0\ ,\ \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2+c^2} = 1\ ,\ \text{per } k = -b^2,$$

ovvero della ellisse focale

$$z = 0\ ,\ \frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1\ ,\ \text{per } k = c^2,$$

quando queste coniche accompagnano l'iperboloide Q_0 nel suo rotolamento sulla rigata applicabile R.

Consideriamo ancor qui il caso escluso $k=0$, pel quale valgono le medesime deduzioni come al § 9. E in effetto, se nell'equazione fondamentale (II) adottiamo i segni inferiori ponendovi $k=0$, i coefficienti si presentano dapprima sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma, calcolandone i veri valori, troviamo che la (II) si riduce alla seguente

$$\frac{d\theta}{dv}=\frac{\varphi(v)}{2abc}\Big\{(b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2)\,2v\cos\theta+(b^2c^2+a^2b^2-a^2c^2)(v^2-1)\operatorname{sen}\theta+ \\ +(b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2)(v^2+1)\Big\}.$$

D'altra parte le equazioni (64) (coi segni inferiori) ove si faccia $k=0$, paragonate colle (58), danno

$$u=\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Sostituendo nella precedente, si trova facilmente

$$\frac{du}{dv}=\frac{\varphi(v)}{2abc}\Big\{b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\Big\},$$

che si può scrivere ancora

$$\frac{du}{dv}=-\frac{D''}{2D'}$$

e combina colla equazione differenziale delle asintotiche curvilinee di R. Dunque per ottenere qui la decomposizione della congruenza Γ nelle ∞^1 rigate R_1, conviene associare i raggi di Γ lungo le asintotiche curvilinee di R. Ed appunto il teorema di Chieffi assicura che queste rigate R_1 sono applicabili sull'iperboloide fondamentale. Esse debbono dunque considerarsi come le trasformate di R per la trasformazione B_0 (Cf. § 9).

§ 19.

Elemento lineare delle superficie trasformate R_1.

Ritornando alla generale trasformazione B_k, andiamo ora a dimostrare che ciascuna superficie derivata R_1 è alla sua volta applicabile sull'iperboloide Q_0. Cominciamo dal calcolare il ds_1^2 della R_1 in coordinate u, v,

imitando il procedimento del § 10. Limitiamoci per altro al caso in cui si prendono in tutte le nostre formole i segni superiori, chè le verifiche per l'altro caso non ne differiscono se non per mutamenti di notazione (cf. § 16 in fine).

Scriviamo in primo luogo le formole

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}=L_0\dfrac{\partial x}{\partial u}+M_0\dfrac{\partial x}{\partial v}+D'mX\\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v}=P_0\dfrac{\partial x}{\partial u}+Q_0\dfrac{\partial x}{\partial v}+D'lX+\left(\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{d\theta}{dv}+D''mX,\end{cases}$$

alle quali, derivando esplicitamente le

$$\bar{x}_0=x_0+l\frac{\partial x_0}{\partial u}+m\frac{\partial x_0}{\partial v}\ \text{ecc.},$$

rapporto ad u, v, associamo le altre

$$(77)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}=L_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u}+M_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v}+D'_0mX_0\\[2ex] \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}=P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u}+Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v}+D'_0lX_0.\end{cases}$$

Poniamo ancora

$$E_0=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\right)^2,\quad F_0=\sum\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v},\quad G_0=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}\right)^2$$

ed avremo (cf. § 10)

$$(78)\qquad\begin{cases}E_1=E_0,\ F_1=F_0+\left[(EL_0+FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(FL_0+GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\right]\dfrac{d\theta}{dv}+D'D''m^2\\[2ex] G_1=G_0+2\left[(EP_0+FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(FP_0+GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\right]\dfrac{d\theta}{dv}+2D'D''lm+\\[2ex] \qquad+\left[E\left(\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2+2F\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{\partial m}{\partial\theta}+G\left(\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2\left(\dfrac{d\theta}{dv}\right)^2\right]+D''^2m^2.\end{cases}$$

Dalle equazioni (64)

$$(79)\qquad \begin{cases} \bar{x}_0 = \dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\,\bar{z}_0 + a'\cos\theta \\[2ex] \bar{y} = -\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\,\bar{z}_0 + b'\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

derivando si trae

$$(80)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} = \dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\,,\quad \dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial u} = -\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial v} = \dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial v} = -\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Ora se calcoliamo effettivamente $\bar{z}_0$ dalla (65_3)

$$\bar{z}_0 = c\,\frac{(u+v)(1+uv)W-(v^2+1)U-(u^2+1)V}{(u+v)^2 W}\,,$$

troviamo

$$(81)\qquad \bar{z} = \frac{2c}{W}\left[\frac{b}{b'}(1+uv)\cos\theta + \frac{a}{a'}(u-v)\operatorname{sen}\theta - \frac{ab}{a'b'}(u+v)\right],$$

e derivando abbiamo facilmente

$$(82)\qquad \frac{\partial\bar{z}_0}{\partial u} = -\frac{4abc}{a'b'}\frac{V}{W^2}\,,\quad \frac{\partial\bar{z}_0}{\partial v} = -\frac{4abc}{a'b'}\frac{U}{W^2}\,.$$

Colle formole precedenti, calcolando E_0, F_0, G_0, risulta

$$(83)\qquad \begin{cases} E_0 = \dfrac{16a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\dfrac{V^2}{W^4} \\[2ex] F_0 = \dfrac{16a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\dfrac{UV}{W^4} \\[2ex] G_0 = \dfrac{16a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\dfrac{U^2}{W^4}\,, \end{cases}$$

e così sono noti i valori dei primi termini nelle espressioni (78) di E_1, F_1, G_1. Per calcolare i rimanenti, formiamo dalle (77) e (80) le somme

$$\sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\,,\quad \sum\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\,,\quad \sum\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}\,,\quad \sum\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}\,,$$

il che dà

$$\begin{cases} EL_0 + FM_0 = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right] \\[2ex] FL_0 + GM_0 = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} EP_0 + FQ_0 = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right] \\[2ex] FP^0 + GQ_0 = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right]. \end{cases}$$

Ora moltiplichiamo le due equazioni di ciascuna delle coppie precedenti rispettivamente per $\dfrac{\partial l}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial m}{\partial\theta}$ e sommiamo, tenendo conto che, a causa delle formole

$$\bar{x} = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v}\ \text{ecc.},$$

si ha

$$(84)\qquad \frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} = \frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x_0}{\partial v}\ \text{ecc.};$$

così otteniamo

$$(85)\qquad \begin{cases} (EL_0+FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta} + (FL_0+GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial\theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right] \\[2ex] (EP_0+FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta} + (FP_0+GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right]. \end{cases}$$

In fine, formando dalle (84) la somma $\sum\left(\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2$, abbiamo

$$(86)\qquad E\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial m}{\partial\theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2.$$

Le formole (83), (85), (86) danno tutti gli elementi necessarii per il calcolo dei valori (78) di E_1, F_1, G_1.

§ 20.

Formole d' applicabilità delle R_1 sull' iperboloide.

Dopo questi preparativi andiamo a verificare che ciascuna rigata R_1 è applicabile sull'iperboloide Q_0, e dimostriamo nello stesso tempo che la legge d'applicabilità fra R e R_1 è data ancor qui dall'affinità d'Ivory fra i due iperboloidi confocali Q_0, Q_k (¹).

Al punto $(\bar{x}_0\, \bar{y}_0\, \bar{z}_0)$ di Q_k corrisponde, per l'affinità d'Ivory, sopra Q_0 il punto (ξ, η, ζ) di coordinate

$$\xi = \frac{a}{a'}\bar{x}_0\ ,\quad \eta = \frac{b}{b'}\bar{y}_0\ ,\quad \zeta = \frac{c}{c'}\bar{z}_0 . \tag{87}$$

Se con u_1, v_1 indichiamo i valori delle coordinate curvilinee u, v nel punto (ξ, η, ζ), abbiamo per le (58)

$$\frac{\xi}{a} = \frac{1+u_1v_1}{u_1+v_1}\ ,\quad \frac{\eta}{b} = \frac{u_1-v_1}{u_1+v_1}\ ,\quad \frac{\zeta}{c} = \frac{1-u_1v_1}{u_1+v_1}\ , \tag{87*}$$

e quindi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1+\dfrac{\eta}{b}}{\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\zeta}{c}} = \dfrac{1+\dfrac{\bar{y}_0}{b'}}{\dfrac{\bar{x}_0}{a'}+\dfrac{\bar{z}_0}{c'}} \\[3ex] v_1 = \dfrac{1-\dfrac{\eta}{b}}{\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\zeta}{c}} = \dfrac{1-\dfrac{\bar{y}_0}{b'}}{\dfrac{\bar{x}_0}{a'}+\dfrac{\bar{z}_0}{c'}} \end{cases}$$

(¹) Si tenga presente che per due quadriche a centro confocali

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

$$\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{y_1^2}{B_1}+\frac{z_1^2}{C_1}=1$$

$(A_1-A=B_1-B=C_1-C)$ le formole d'affinità d'Ivory si scrivono

$$x_1 = \sqrt{\frac{A_1}{A}}\,.\,x\,,\ y_1 = \sqrt{\frac{B_1}{B}}\,y\,,\ z_1 = \sqrt{\frac{C_1}{C}}\,.\,z\ .$$

Sostituendo per $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ i valori (79), abbiamo

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\ \dfrac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\ \dfrac{\bar{z}_0}{c'}} \\[3ex] v_1 = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\ \dfrac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta+(1+\operatorname{sen}\theta)\ \dfrac{\bar{z}_0}{c'}}\, , \end{cases} \tag{88}$$

dove nella seconda, essendo $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$, v_1 risulta indipendente da $\bar{z}_0$, e precisamente

$$v_1 = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\ .$$

Sostituendo nella prima per z_0 il valore effettivo (81), abbiamo le formole definitive:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)-\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right](1+\operatorname{sen}\theta)+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v+\dfrac{b}{b'}(u+v)\right]\cos\theta}{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)+\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cos\theta+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v-\dfrac{b}{b'}(u+v)\right](1+\operatorname{sen}\theta)} \\[4ex] v_1 = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\ . \end{cases} \tag{89}$$

Noi dobbiamo ora verificare che queste sono in effetto le *formole d'applicabilità*, per la rigata R_1, sull' iperboloide Q_0, che cioè il ds_1^2 di R_1 in coordinate u, v

$$ds_1^2 = E_1\, du^2 + 2\, F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

dove E_1, F_1, G_1 sono dati dalle (78), si trasforma in coordinate u_1, v_1 nel $\overline{d}s_1^2$ di Q_0

$$\overline{d}s_1^2 = \overline{E}_1\, du_1^2 + 2\,\overline{F}_1\, du_1\, dv_1 + \overline{G}_1\, dv_1^2\, ,$$

ove dunque $\overline{E}_1, \overline{F}_1, \overline{G}_1$ hanno i valori che risultano dalle (59) cangiando in queste u, v in u_1, v_1. Ma pel nostro scopo basta osservare che, a causa delle (87*) si può scrivere altresì

$$(90)\qquad \overline{E}_1=\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_1}\right)^2,\ \overline{F}_1=\sum\frac{\partial\xi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v_1},\ \overline{G}_1=\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial v_1}\right)^2.$$

Ciò premesso, l'identità da dimostrarsi $ds_1^2=\overline{ds}_1^2$ si traduce nelle tre equazioni seguenti

$$(91)\begin{cases} E_1=\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2,\ F_1=\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial u_1}{\partial v}+\left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{d\theta}{dv}\\ G_1=\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2\left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}+\left[\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{F}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2,\end{cases}$$

che dobbiamo dunque verificare essere equivalenti alle (78).

Dalla prima delle (90) abbiamo

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2,$$

ovvero se esprimiamo ξ per u, v, ricordando che v_1 è funzione della sola v,

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2.$$

Questa per le (87) ci dà

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial u}\right)^2+\frac{b^2}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial u}\right)^2+\frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u}\right)^2,$$

ossia, perchè $a'^2=a^2+k$, $b'^2=b^2+k$, $c'^2=c^2-k$,

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial u}\right)^2+k\left[\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial u}\right)^2\right].$$

Ma dalle (80) segue

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial u}\right)^2=\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u}\right)^2$$

e resta quindi

$$(92)\qquad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial u}\right)^2=E_0,$$

onde effettivamente combinano nelle (78) e (91) i due valori di E_1.

Se consideriamo poi che u_1 è funzione lineare di $\overline{z}_0$ secondo la (88), abbiamo

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}=\frac{\partial u_1}{\partial\overline{z}_0}\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u},\ \frac{\partial u_1}{\partial v}=\frac{\partial u_1}{\partial\overline{z}_0}\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial v},$$

e però per le (82)

$$\frac{1}{V}\frac{\partial u_1}{\partial u}=\frac{1}{U}\frac{\partial u_1}{\partial v},$$

onde dalla (92) deduciamo le altre

$$\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=\frac{U}{V}E_0,\ \overline{E}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=\frac{U^2}{V^2}E_0.$$

A causa delle (83)

$$\frac{U}{V}E_0=F_0,\ \frac{U^2}{V^2}E_0=G_0,$$

e quindi abbiamo

$$(92^*)\qquad \overline{E}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=E_0,\ \overline{E}\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=F_0,\ \overline{E}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=G_0.$$

Queste ci dimostrano che anche la seconda e la terza delle (91) combinano, nei loro primi termini, colle corrispondenti (78) e tutto si riduce quindi a verificare le due identità seguenti

$$(93)\ \left(\overline{E}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}=\left[(EL_0+FM_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FL_0+GM_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{d\theta}{dv}+D'D''m^2$$

$$(94)\ 2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\theta}{dv}+\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2=$$

$$=2\left[(EP_0+FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FP_0+GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{d\theta}{dv}+2D'D''lm+$$

$$+\left[E\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2+2F\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial m}{\partial\theta}+G\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2+D''^2m^2.$$

§ 21.

Verifiche relative all'applicabilità.

Se sostituiamo nella (93) i valori (68) di D', D'' ed il valore (85$_1$) di

$$(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial \theta} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial \theta},$$

indi dividiamo tutta l'equazione per

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{a'b'c'}{k} V \varphi(v),$$

essa diventa

$$(a) \quad \left(\overline{E}_1 \frac{\partial u}{\partial \theta} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = \left(\frac{a'}{c'} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos\theta \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} - 4k \frac{abc}{a'b'c'} \frac{V}{W^2}.$$

Prendiamo ora la formula

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}$$

colle analoghe per η, ζ, moltiplichiamole ordinatamente per $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \eta}{\partial u_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}$ e sommiamo; così

$$\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$$

e per le (87)

$$\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{a^2}{a'^2}\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} + \frac{b^2}{b'^2}\frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \overline{y}_0}{\partial u} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u}.$$

Questa, a causa delle (80), si scrive

$$\left(\overline{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial v}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = \left(\frac{a^2}{a'c'} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b^2}{b'c'} \cos\theta \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u}$$

e riduce l'identità (*a*) da dimostrarsi alla seguente

$$\left[\left(\frac{a'}{c'} - \frac{a^2}{a'c'}\right)\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} - \left(\frac{b'}{c'} - \frac{b^2}{b'c'}\right)\cos\theta \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} + \left(1 - \frac{c^2}{c'^2}\right)\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u}\right]\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} = 4k \frac{abc}{a'b'c'} \frac{V}{W^2},$$

od anche, perchè $a'^2 = a^2 + k$, $b'^2 = b^2 + k$, $c'^2 = c^2 - k$, all'altra

$$(b) \qquad \left(\frac{1}{a'} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} - \frac{1}{b'} \cos\theta \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} - \frac{1}{c'}\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} = 4 \frac{abc}{a'b'c'} \frac{V}{W^2}.$$

Ma dalle (79) abbiamo

$$(95) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} = \dfrac{a'}{c'} \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta} + \dfrac{a'}{c'} \cos\theta\, \overline{z}_0 - a' \operatorname{sen}\theta \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} = -\dfrac{b'}{c'} \cos\theta \dfrac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta} + \dfrac{b'}{c'} \operatorname{sen}\theta\, \overline{z}_0 + b' \cos\theta, \end{cases}$$

e perciò

$$\frac{1}{a'} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b}{b'} \cos\theta \frac{\partial \overline{y}_0}{\partial \theta} - \frac{1}{c'}\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial \theta} = -1,$$

onde la (*b*) diventa

$$\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial u} = -\frac{4abc}{a'b'} \frac{V}{W^2}$$

e combina appunto colla (82$_1$). Così abbiamo dimostrata l'equazione (93), alla fine del § precedente, ed altro non resta che dimostrare anche la (94).

Intanto dalla (93) già stabilita, ricordando che si ha

$$\frac{l}{m} = \frac{U}{V} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial u}} = \frac{(EP_0 + FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}}{(EL_0 + FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + FL_0 + GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}},$$

segue l'altra

$$\left(\overline{E}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\theta}{dv} = \left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial \theta}\right]\frac{d\theta}{dv} + D'D''lm,$$

per cui la (94) si riduce alla seguente:

$$\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 =$$

$$= \left[E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial m}{\partial \theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 + D''m^2.$$

Ma si ha

$$D''^2 = (EG - F^2)(u+v)^4 \varphi^2(v) = 4\,\frac{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2}{(u+v)^2}\,\varphi^2(v)$$

$$m^2 = (u+v)^2\,\frac{V^2}{W^2}$$

e la precedente, divisa per

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2 V^2 \varphi^2(v)}{k^2},$$

si riduce, a causa della (86), all'altra

$$(c)\qquad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\,\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{4k^2}{a'^2b'^2c'^2W^2}\times$$
$$\times\,[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2].$$

Dalle formole

$$\frac{\partial\xi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial\theta} = \frac{\partial\xi}{\partial\theta}\ \text{ecc.},$$

quadrando e sommando, viene

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\,\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{b^2}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2,$$

e la (c) si trasforma nell'altra

$$\left(1-\frac{a^2}{a'^2}\right)\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \left(1-\frac{b^2}{b'^2}\right)\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \left(1-\frac{c^2}{c'^2}\right)\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{4k^2}{a'^2b'^2c'^2W^2}\times$$
$$\times\,[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2] = 0,$$

od ancora, riducendo e dividendo per k,

$$(96)\qquad \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{4k}{a'^2b'^2c'^2W^2}\times$$
$$\times\,[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2] = 0.$$

Dalle (95) deduciamo

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{\overline{z}_0^2}{c'^2} - \frac{2}{c'}\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta} + 1$$

e la (96) diventa

$$(96^*)\qquad \frac{W^2\overline{z}_0^2}{c'^2} - \frac{2}{c'}\,W^2\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta} + W^2 + \frac{4k}{a'^2b'^2c'^2}[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2] = 0.$$

Ora abbiamo dalla (81)

$$\frac{W\overline{z}_0}{c'} = 2\left[\frac{bc}{b'c'}(1+uv)\cos\theta + \frac{ac}{a'c'}(u-v)\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{abc}{a'b'c'}(u+v)\right]$$

e dalla (67_3)

$$W = 2\left[\frac{ac}{a'c'}(u-v)\cos\theta - \frac{bc}{b'c'}(1+uv)\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{ab}{a'b'}(1-uv)\right].$$

Quadrando e sommando queste due ultime, si trova

$$\frac{W^2\overline{z}_0^2}{c'^2} + W^2 = 4\left\{\frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 + \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2 + \frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2 + \right.$$
$$+2\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u-v)(1-uv) - \frac{ab^2c^2}{a'b'^2c'^2}(u+v)(1+uv)\right]\cos\theta -$$
$$\left.-2\left[\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(1-uv)(1+uv) + \frac{a^2bc^2}{a'^2b'c'^2}(u+v)(u-v)\right]\mathrm{sen}\,\theta\right\}.$$

Derivando la (81) rapporto a θ, otteniamo

$$\frac{W^2}{c'}\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta} = 4\left\{\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u-v)(1-uv) - \frac{ab^2c^2}{a'b'^2c'^2}(u+v)(1+uv)\right]\cos\theta - \right.$$
$$-\left[\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(1-uv)(1+uv) + \frac{a^2bc^2}{a'^2b'c'^2}(u+v)(u-v)\right]\mathrm{sen}\,\theta +$$
$$\left.+\frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 + \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2\right\}.$$

Sostituendo nella (96*), i termini contenenti $\cos\theta$, $\mathrm{sen}\,\theta$ spariscono e si ottiene l'equazione

$$4\left[\frac{a^2b'^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2 - \frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 - \frac{a\,c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2\right] +$$
$$+\frac{4k}{a'^2b'^2c'^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right] = 0,$$

od anche

$$(97)\quad a^2c^2b'^2(u-v)^2+b^2c^2a'^2(1+uv)^2-a^2b^2c'^2(1-uv)^2-a^2b^2c^2(u+v)^2=$$
$$=k\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right].$$

Basta qui sostituire per a'^2, b'^2, c'^2 i valori a^2+k, b^2+k, c^2-k per riconoscere che è una identità.

Così anche per le deformate rigate dell'iperboloide tutte le verifiche sono compiute e possiamo concludere: *Le* ∞^1 *rigate* R_1 *derivate per una trasformazione* B_k *da una deformata rigata* R *dell' iperboloide sono applicabili sull' iperboloide stesso.*

Ed infine la medesima osservazione fatta alla fine del § 12 dimostra che l'applicabilità di ciascuna rigata R_1 sulla primitiva R ha luogo per deformazione continua.

§ 22.

Relazione reciproca fra R e R_1.

Resta ancora che dimostriamo pel caso attuale dell'iperboloide le proposizioni corrispondenti a quelle stabilite ai §§ 13, 14 per il paraboloide. Basta per ciò procedere nel medesimo modo, utilizzando il teorema d'Ivory e le altre due proposizioni elementari del § 13, che sussistono anche qui, come subito si verifica.

Adottando le medesime notazioni, siano g_1, g_2 due generatrici qualunque dell'iperboloide Q_0 e $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ le loro corrispondenti, per l'affinità d'Ivory, sull' iperboloide confocale Q_k. Stabiliamo fra i loro punti $M_1, M_2, \overline{M}_1, \overline{M}_2$ una corrispondenza come al § 13.

Supponendo dapprima che le rette g_1, g_2 appartengano ad un medesimo sistema, per es. al primo, scriviamo le loro equazioni:

$$g_1)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{c}\operatorname{sen}\theta_1\, z_1 + a\cos\theta_1 \\ y_1 &= -\frac{b}{c}\cos\theta_1\, z_1 + b\operatorname{sen}\theta_1 \end{aligned}\right. \qquad g_2)\left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{a}{c}\operatorname{sen}\theta_2\, z_2 + a\cos\theta_2 \\ y_2 &= -\frac{b}{c}\cos\theta_2\, z_2 + b\operatorname{sen}\theta_2 . \end{aligned}\right.$$

Le loro trasformate $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ per l'affinità d'Ivory avranno le equazioni

$$\overline{g}_1)\left\{\begin{aligned} \overline{x}_1 &= a'\operatorname{sen}\theta_1\frac{z_1}{c}+a'\cos\theta_1 \\ \overline{y}_1 &= -b'\cos\theta_1\frac{z_1}{c}+b'\operatorname{sen}\theta_1 \\ \overline{z}_1 &= c'\frac{z_1}{c} \end{aligned}\right. \qquad \overline{g}_2)\left\{\begin{aligned} \overline{x}_2 &= a'\operatorname{sen}\theta_2\frac{z_2}{c}+a'\cos\theta_2 \\ \overline{y}_2 &= -b'\cos\theta_2\frac{z_2}{c}+b'\operatorname{sen}\theta_2 \\ \overline{z}_2 &= c'\frac{z_2}{c}, \end{aligned}\right.$$

Cerchiamo, come al § 14, i coefficienti per le formole di un movimento rigido che sovrapponga la coppia $(g_1, \overline{g}_2)$ ed i punti $M_1, \overline{M}_2$ alla coppia $(\overline{g}_1, g_2)$ ed ai punti corrispondenti $\overline{M}_1, M_2$.

Ponendo

$$\Delta=(acb'+a'c'b')\cos\theta_1\cos\theta_2+(ab'c'+a'bc)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-(abc'+a'b'c),$$

avremo pei coefficienti α, β, γ i valori seguenti

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= (abc'+a'b'c)\cos\theta_1\cos\theta_2+(abc+a'b'c')\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-(acb'+a'c'b) \\ \Delta\alpha_2 &= k(c\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-c'\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1) \\ \Delta\alpha_3 &= k(b\operatorname{sen}\theta_2-b'\operatorname{sen}\theta_1) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\beta_1 &= k(c\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1-c'\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ \Delta\beta_2 &= (abc+a'b'c')\cos\theta_1\cos\theta_2+(abc'+a'b'c)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-(ab'c'+a'bc) \\ \Delta\beta_3 &= k(a'\cos\theta_1-a\cos\theta_2) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\gamma_1 &= k(b\operatorname{sen}\theta_1-b'\operatorname{sen}\theta_2) \\ \Delta\gamma_2 &= k(a'\cos\theta_2-a\cos\theta_1) \\ \Delta\gamma_3 &= (ab'c'+a'bc)\cos\theta_1\cos\theta_2+(acb'+a'c'b)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-(abc+a'b'c') \end{aligned}\right.$$

$$\Delta\alpha=k(bc'\cos\theta_2-b'c\cos\theta_1)\ ,\ \Delta\beta=k(ac'\operatorname{sen}\theta_2-a'c\operatorname{sen}\theta_1)\ ,$$
$$\Delta\gamma=k(ab'\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-a'b\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1).$$

Anche qui si constata che la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

è ortogonale *destrorsa*, ciò che dimostra l'esistenza del movimento invariabile.

Se le generatrici g_1, g_2 appartenessero a diverso sistema, scrivendo le loro equazioni

$$g_1)\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta_1\, z_1 + a\cos\theta_1 \\ y_1 = -\dfrac{b}{c}\cos\theta_1\, z_1 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \end{cases} \qquad g_2)\begin{cases} x_2 = -\dfrac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\, z_2 + a\cos\theta_2 \\ y_2 = \dfrac{b}{c}\cos\theta_2\, z_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,, \end{cases}$$

si troverebbero pei coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei valori che risultano dai precedenti cangiando in questi c in $-c$ e cangiando i segni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. La sostituzione considerata resta ortogonale, ma cangia da destrorsa in sinistrorsa, ed il movimento invariabile è sostituito da una simmetria (cf. § 19).

Da tutto ciò si raccoglie: *Se la deformata* R_1 *dell'iperboloide proviene dalla* R *per una trasformazione* B_k, *inversamente la* R *deriva ancora dalla* R_1 *mediante una* B_k.

§ 23.

Posizione relativa dei piani tangenti di R e R_1.

Le considerazioni geometriche svolte nella prima parte del § 15 intorno alla giacitura reciproca dei piani tangenti π, π_1 in punti corrispondenti di due deformate R, R_1 del paraboloide, trasformate l'una dell'altra per una B_k, si possono ripetere esattamente per le deformate rigate dell'iperboloide, ed è inutile insistervi.

Qui vogliamo trovare le formole analoghe alle (53) § 15 (pag. 45), che danno i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale alla superficie trasformata R_1. Potremo porre anche qui

$$X_1 = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + CX \text{ ecc.},$$

e determinare A, B, C dalle due condizioni

$$\sum X_1(x_1 - x) = 0\,, \quad \sum X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0\,.$$

Procedendo come al § 15, troviamo ancora

$$A:B:C = D'm(Fl+Gm) : -D'm(El+Fm) : (EG-F^2)(lM_0 - mL_0)\,,$$

ovvero, poichè

$$EG - F^2 = \frac{4abc\rho}{(u+v)^4}\,, \quad D' = -\frac{2\sqrt{abc}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}}$$

$$m = (u+v)\frac{V}{W}\,,$$

$$A:B:C = -(Fl+Gm) : El+Fm : \frac{2\sqrt{abc}\,\rho^{\frac{3}{2}}}{(u+v)^2 \cdot m}(lM_0 - mL_0)\,.$$

Abbiamo quindi

$$(98)\quad X_1 = R\left\{-(Fl+Gm)\frac{\partial x}{\partial u} + (El+Fm)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{2\sqrt{abc}\,\rho^{\frac{3}{2}}}{(u+v)^2 m}(lM_0 - mL_0)X\right\},$$

dove il coefficiente R di proporzionalità è da determinarsi ancora dalla condizione

$$EA^2 + 2FAB + GB^2 + C^2 = 1\,.$$

Ne risulta una formola analoga alla (55) § 15, e cioè

$$(99)\qquad R^2 = \frac{(u+v)^4}{4abc \cdot \rho}\,\frac{1}{\delta^2 + \dfrac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2}\,,$$

essendo ancora qui

$$\delta = \sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}$$

la lunghezza del segmento focale FF_1.

Indicando con Ω l'angolo dei piani focali, ne deduciamo nuovamente, come al § 15, la formola (56) (pag. 46)

$$\frac{\delta^2}{\mathrm{sen}^2\Omega} = El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2\,,$$

indi, come condizione di corrispondenza delle asintotiche fra le due falde, la medesima (57)

$$El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(lM_0 - mL_0)^2 = \rho\rho_1\,.$$

Verificando questa direttamente si viene a stabilire nuovamente che le nostre congruenze, aventi per falde focali la superficie primitiva R e la trasformata R_1, sono congruenze W.

§ 24.

Caso particolare dell'iperboloide di rotazione.

Termineremo questo primo capitolo coll'esame di un caso molto particolare che ci confermerà in un esempio semplicissimo la teoria generale.

Prendiamo l'iperboloide rigato rotondo, dove dunque $a=b$, e consideriamo la trasformazione singolare B_{-a^2}, corrispondente al valore $k=-a^2=-b^2$. Qui l'iperboloide confocale Q_k si restringe all'asse, nel quale vengono a coincidere tutte le generatrici, o le tangenti dell'iperbola focale. Le ∞^1 superficie trasformate R_1 di una deformata rigata R qualunque coincidono ora in una sola superficie: quella generata dall'asse dell'iperboloide Q_0 nel rotolamento su R. Ma quando la superficie R diventa l'iperboloide stesso Q_0, i segmenti FF_1 tangenti in F a Q_0 vengono a terminare in F_1 sull'asse; essi sono per conseguenza tangenti alle iperbole meridiane. Se ne conclude che la superficie R_1 non è altro che la *complementare* di R, rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani (vol. I, § 138) [1]. La trasformazione B_{-a^2} acquista dunque nel caso attuale il significato seguente:

[1] La medesima cosa segue dalle formole generali, ove si osservi che qui $a=b$, $k=-a^2$, indi

$$a'=b'=0\ ,\ c'=\sqrt{a^2+c^2}\,.$$

Le formole (67) § 16 danno subito

$$\frac{U}{W}=\frac{1}{2}\,\frac{u^2+1}{1-uv}\,,\quad \frac{V}{W}=\frac{1}{2}\,\frac{v^2+1}{1-uv}\,,$$

indi le (66)

$$l=\frac{u+v}{2}\,\frac{u^2+1}{1-uv}\,,\quad m=\frac{u+v}{2}\,\frac{v^2+1}{1-uv}\,.$$

Dopo ciò le formole

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.}$$

vengono appunto a definire la complementare della superficie primitiva.

Se si fa rotolare l'iperboloide rigato rotondo sopra una qualunque rigata applicabile R, *l'asse dell'iperboloide descrive una seconda deformata* R_1 *dell'iperboloide, che è la complementare di* R.

Non sarà inutile dimostrare come questo risultato, insieme ad altri dovuti a Laguerre e Bioche, possono dedursi con considerazioni geometriche dirette dalle proprietà generali della trasformazione *complementare* per le deformate delle superficie di rotazione.

Prendiamo una rigata R applicabile sull'iperboloide Q_0 e sia g una sua generatrice. Consideriamo i segmenti rettilinei FF_1 che toccano nei punti F di g la R e negli altri estremi F_1 la superficie complementare. Applicando R su Q_0, questi segmenti, *senza cangiare la loro posizione relativa*, vanno a terminare all'asse dell'iperboloide. Dunque se F descrive una retta g di R, il secondo fuoco F_1 descrive un'altra retta g_1, che è la posizione acquistata dall'asse dell'iperboloide quando questo tocca la R lungo g. La complementare della R è quindi una seconda rigata R_1. Essa è applicabile, pel teorema di Weingarten, sopra una superficie di rotazione la quale, come risulta dalle formole generali, non è altro che l'iperboloide stesso [1]. Così abbiamo dimostrato direttamente il teorema superiore.

Ma proseguiamo le nostre considerazioni geometriche, e prendiamo sopra R, R_1 due generatrici corrispondenti g, g_1 e la loro minima distanza MM_1, di cui i punti M, M_1 siano i rispettivi piedi. Applicando R sopra Q_0, la g diventa una generatrice dell'iperboloide e g_1 l'asse; perciò M si colloca sul circolo di gola. Dunque la linea γ luogo del punto M è sopra R la trasformata del circolo di gola (linea di stringimento); e similmente la γ_1 luogo di M_1 sopra R_1. Ora la MM_1 è normale comune a R, R_1 e per ciò normale principale comune delle due linee geodetiche γ, γ_1. Queste sono dunque (vol. I, pag. 50) due curve di Bertrand coniugate. Le binormali di queste due curve hanno evidentemente le direzioni g_1 e g e formano fra loro un angolo costante, che è quello d'inclinazione delle generatrici dell'iperboloide sull'asse. Ed anche il segmento MM_1 di normale principale comune a γ, γ_1 è costante (eguale al raggio del cerchio di gola) ed indipendente dalla speciale deformazione considerata. Così abbiamo dimostrato geometricamente il teorema di Laguerre (vol. I,

[1] La medesima cosa si può anche provare geometricamente riducendo R all'asse dell'iperboloide ed allora R_1 coincide coll'iperboloide stesso. (V. per una dimostrazione diretta il § 91).

pag. 270): *In ogni deformazione dell'iperboloide in una superficie rigata il circolo di gola si trasforma in curve di Bertrand della medesima famiglia* [1]).

Ma insieme abbiamo anche dimostrata l'altra proposizione (Bioche): *Se per ogni punto* M_1 *della curva* γ_1 *di Bertrand si tira la parallela alla binormale nel punto* M *corrispondente della curva coniugata* γ, *la superficie* R_1 *luogo di queste parallele è applicabile sull'iperboloide rotondo.*

Di più risulta da quanto abbiamo detto che l'altra rigata R ottenuta scambiando nella costruzione precedente γ e γ_1 è complementare di R_1 (Cf. vol. II, nota I, pag. 576).

In tutto questo ci siamo limitati a considerare la sola trasformazione singolare B_{-a^2} delle deformate rigate dell'iperboloide rotondo.

Le trasformazioni generali B_k potranno pure evidentemente riguardarsi come trasformazioni delle curve di Bertrand, che sono le linee di stringimento delle deformate rigate di questo iperboloide.

Ed in effetto, quali trasformazioni di curve, esse furono già studiate prima in un caso particolare da Demartres [2]) poi nel caso generale da Razzaboni [3]).

Il caso di Demartres corrisponde all'altra trasformazione singolare B_{c^2} per la quale l'iperboloide omofocale Q_k si riduce al circolo focale. Le trasformazioni di Razzaboni corrispondono alle nostre generali B_k.

---

[1]) Cioè la relazione lineare che lega le due curvature è sempre la stessa.

[2]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1888, T. 106.

[3]) *Un teorema del sig. Demartres generalizzato.* Atti del Reale Istituto Veneto anno 1900-1901, t. LX parte 2.ª

CAPITOLO II.

Le trasformazioni B_k per le deformate generali delle quadriche rigate

§ 25.

Descrizione del metodo per la ricerca delle trasformazioni.

Dopo avere esposto nel precedente capitolo i principii fondamentali della teoria delle trasformazioni per le deformate rigate delle quadriche, passiamo ad occuparci in questo secondo delle deformate *generali* delle quadriche rigate.

Premettiamo alcune considerazioni che hanno per oggetto di spiegare il passaggio dal caso già trattato delle deformate rigate a quello delle deformate generali.

Un primo modo di eseguire questo passaggio si collega al teorema di Chieffi (§ 2) e può descriversi come segue.

Sia S una superficie qualunque applicabile sulla quadrica rigata fondamentale Q. Prendiamo le linee asintotiche a di un sistema di S e costruiamo, secondo il teorema di Chieffi, le ∞^1 rigate R deformate di Q e circoscritte alla S lungo le singole asintotiche a (§ 2). La S è allora l'inviluppo di queste ∞^1 rigate R, applicabili l'una sull'altra e sulla S stessa. Secondo i risultati del Cap. I, ogni trasformazione B_k cangia ciascuna rigata R in ∞^1 rigate trasformate R_1 applicabili sopra Q. Ora domandiamo: è possibile scegliere per ogni rigata R *una* rigata R_1 per modo che le ∞^1 superficie R_1 formino un sistema come le R ed abbiano quindi un inviluppo S_1 applicabile sopra Q? Le ricerche seguenti stabiliranno appunto questa possibilità e precisamente si vedrà che di una R iniziale si può scegliere ad arbitrio la corrispondente trasformata R_1, e la trasformazione ne risulta così individuata. Per tal modo le trasformazioni B_k per le deformate generali delle quadriche appaiono composte di ∞^1 trasformazioni elementari B_k delle loro rigate inviluppanti secondo il teorema di Chieffi.

Ma per la ricerca effettiva di queste generali trasformazioni B_k ci converrà applicare un metodo ben diverso che andiamo in primo luogo a descrivere.

Nel sistema omofocale, determinato dalla quadrica fondamentale rigata Q, prendiamo ad arbitrio un'altra quadrica rigata Q_k, e consideriamo le ∞^2 coniche C, sezioni dei piani tangenti di Q colla quadrica confocale Q_k.

Da ciascun punto F_1 di una di queste coniche C escono due generatrici di Q_k, fra le quali fissiamo per es. quella del primo sistema e chiamiamo π_1 il piano determinato da questa generatrice e dalla congiungente FF_1. Immaginiamo ora che la quadrica Q si deformi in una qualunque superficie applicabile S seco trascinando, invariabilmente legate alle flessioni di Q, le coniche C coi loro punti F_1 ed i piani π_1.

Per dimostrare l'esistenza delle trasformazioni generali B_k converrà dimostrare che è possibile (e ciò in ∞^1 modi) scegliere su ciascuna conica C *un* punto F_1 in guisa che la superficie S_1 luogo dei punti F_1 stia colla primitiva S nelle relazioni seguenti:

a) La superficie S_1 *abbia in ogni punto* F_1 *per piano tangente il piano* π_1 *corrispondente, ciò che ha in particolare per conseguenza che le due superficie* S, S_1 *siano le due falde focali della congruenza* FF_1 [1]).

b) La superficie S_1 *risulti applicabile su* S *(indi sulla quadrica* Q) *e la legge d'applicabilità di* S, S_1 *sia data dall'affinità d'Ivory fra le due quadriche confocali* Q, Q_k.

Le condizioni *a)* per sè sole, servono già ad individuare le nostre trasformazioni, ed allora le *b)* ne derivano come conseguenze. Ma anche inversamente le condizioni *b)* determinano già le trasformazioni e traggono seco le *a)*.

Ne deriva che in due modi possiamo arrivare alle trasformazioni, appoggiandoci sulle condizioni *a)* ovvero sulle *b)*.

Nel caso delle deformate rigate (Cap. I) abbiamo appunto adottato il primo modo, servendoci delle condizioni *a)* per dedurne poi le *b)* come conseguenze. Qui, per le deformate generali, troviamo preferibile il secondo metodo e cioè cerchiamo di trovare le superficie trasformate S_1,

[1]) Tale congruenza è inoltre una congruenza W, come si vedrà.

imponendo loro di soddisfare le *b)*, e verifichiamo poi che anche le *a)* risultano soddisfatte.

Le considerazioni esposte tracciano anche la via per l'analisi che dovremo applicare. Riferiamo la superficie S alle linee (u, v) trasformate delle rette della quadrica Q, e indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto F qualunque di S, con x_1, y_1, z_1 quelle di un punto F_1 sulla conica C, situata nel piano tangente a S in F. Avremo allora

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.}, \tag{1}$$

dove le funzioni l, m avranno i valori assegnati dalle formole (17), (18) § 5 (pag. 13) ovvero dalle (66), (67) § 16 (pag. 49), secondo che la quadrica Q sarà il paraboloide iperbolico ovvero l'iperboloide ad una falda. Queste funzioni l, m contengono, oltre le variabili u, v, il parametro λ nel primo caso, ovvero θ nel secondo. Noi dovremo considerare λ o θ come una funzione incognita di u, v

$$\lambda = \lambda(u, v) \ , \ \theta = \theta(u, v),$$

che si tratterà di determinare in guisa da soddisfare alle condizioni *b)*.

Avvertiamo ancora, prima di cominciare i calcoli, che, pel modo di trattazione da noi scelto, non vi è più alcuna ragione di conservare i doppii segni nei valori di U, V, W. Sceglieremo quindi sempre nelle formole citate i segni superiori.

§ 26.

Elemento lineare della S_1 nel caso del paraboloide.

Cominciamo anche qui dal caso del paraboloide iperbolico P_0, conservando tutte le notazioni del Cap. I. Sia S una qualunque superficie applicabile sopra P_0; essa avrà per prima forma fondamentale il ds_0^2 di P_0, e sarà quindi intrinsecamente determinata associandovi la seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Le condizioni (necessarie e sufficienti) cui debbono soddisfare D, D', D'', per definire una deformata S del paraboloide, sono date dalla equazione di Gauss

$$DD'' - D'^2 = - D_0'^2 = - \frac{4pq}{H} \tag{2}$$

e dalle equazioni di Codazzi [vol. I, pag. 119] che, a causa dei valori attuali dei simboli di Christoffel, dati dalle formole (12) Cap. I (pag. 12), si scrivono qui

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v} D + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u} D' \\ \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v} D' + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u} D''. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Immaginiamo di sostituire per λ, nei secondi membri delle (1), una determinata funzione di u, v

$$\lambda = \lambda(u, v).$$

Derivando rapporto ad u, v, avremo [§§ 3, e 6]

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = L_0 \frac{\partial x}{\partial u} + M_0 \frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 m X + \left(\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \left[Dl + (D' - D'_0)\, m\right] X$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = P_0 \frac{\partial x}{\partial u} + Q_0 \frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 l X + \left(\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \left[(D' - D'_0)\, l + D'' m\right] X,$$

dove L_0, M_0, P_0, Q_0 hanno i valori (22) Cap. I (pag. 16). Ora supponiamo come al § 8, di ridurre S al paraboloide P_0 e di dare a λ un valore costante qualunque. Indichiamo con x_0, y_0, z_0 ; X_0, Y_0, Z_0 ciò che diventano allora x, y, z ; X, Y, Z e siano $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ i valori che assumono x_1, y_1, z_1. La S_1 si riduce in questo caso alla generatrice (λ) del paraboloide confocale P_λ e si ha [cf. § 10 formole (29), (37) pag. 26, 28]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} &= L_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} + M_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 m X_0 \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} &= P_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 l X_0 \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial\lambda} &= \frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Dopo ciò, se attribuiamo ad E_0, F_0, G_0 i significati del § 10 (pag. 26), si vede che i coefficienti E_1, F_1, G_1 nel ds_1^2 della superficie S_1 in coordinate u, v

$$ds_1^2 = E_1\, du^2 + 2 F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2$$

si calcoleranno dalle formole seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} E_1 &= E_0 + 2\left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + (Dl + D'm)^2 - D_0'^2 m^2 \\ F_1 &= F_0 + \left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \\ &\quad + \left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + (Dl + D'm)(D'l + D''m) - D_0'^2 lm \\ G_1 &= G_0 + 2\left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + (D'l + D''m)^2 - D_0'^2 l^2. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Per quanto abbiamo detto al paragrafo precedente, dobbiamo ora esprimere che questo elemento lineare

$$E_1\, du^2 + 2 F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2$$

è trasformabile nell'altro

$$\bar{E}_1\, du_1^2 + 2 \bar{F}_1\, du_1\, dv_1 + \bar{G}_1\, dv_1^2,$$

avendo $\bar{E}_1, \bar{F}_1 \bar{G}_1$ i valori (43) § 11 [pag. 31], e le formole di trasformazione essendo le (45) del medesimo §. Ora osserviamo che la (45_2) $v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}$

dimostra che le derivate esplicite di v_1 rapporto ad u, v sono nulle. Risulta di qui che i valori (5) di E_1, F_1, G_1 debbono essere rispettivamente eguagliati ai seguenti:

$$
(5^*)\left\{\begin{aligned}
E_1 &= \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \\
&\qquad + \left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 \\
F_1 &= \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) + \\
&\qquad + \left[E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} \\
G_1 &= \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \\
&\qquad + \left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda} + \overline{G}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}\right.
$$

È dunque da queste tre condizioni che noi dobbiamo ora cercare di determinare la funzione incognita $\lambda(u, v)$.

§ 27.

Le equazioni differenziali fondamentali per la funzione $\lambda(u, v)$.

Il paragone delle formole (5), (5*) e quindi la deduzione delle equazioni differenziali per λ diventa facile ricordando le identità seguenti, che abbiamo dimostrato nel Cap. I:

formole (48) § 12 pag. 33. $\quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = E_0\ ,\ \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = F_0\ ,\ E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = G_0$

(46) ibid. e (47)
$$
\left\{\begin{aligned}
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} &= 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 V}{W^2}\left[\sqrt{p}\,\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda} - \sqrt{q}\,\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\lambda} - \frac{k}{\lambda^2}\right] \\
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} &= 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 U}{W^2}\left[\sqrt{p}\,\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda} - \sqrt{q}\,\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\lambda} - \frac{k}{\lambda^2}\right]
\end{aligned}\right.
$$

(34) e (38) § 10 pag. 27, 28
$$
\left\{\begin{aligned}
(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda} &= 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 V}{W^2}\left[\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial\lambda} - \sqrt{q}\,\frac{\partial y_0}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_0}{\partial\lambda}\right] \\
(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda} &= 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 U}{W^2}\left[\sqrt{p}\,\frac{\partial x_0}{\partial\lambda} - \sqrt{q}\,\frac{\partial y_0}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_0}{\partial\lambda}\right],
\end{aligned}\right.
$$

dalle quali deduciamo intanto le due identità

$$
\left\{\begin{aligned}
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} - \left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right] &= -4k\frac{\sqrt{pq}\,V}{W^2} \\
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} - \left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right] &= -4k\frac{\sqrt{pq}\,U}{W^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Ricordiamo in fine che si ha

formola (50) § 12 pag. 34 $\quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\right)^2 = \frac{4k^2 H}{W^2}$,

ed in fine pag. 15)

$$
D_0'^2 = \frac{4pq}{H}.
$$

Dopo ciò, paragonando le (5), (5*), si hanno immediatamente le *tre* equazioni quadratiche seguenti per le derivate $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$ della funzione incognita:

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 - \frac{2\sqrt{pq}\,V}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{pq}{k^2H^2}V^2 - \frac{(DU + D'V)^2}{4k^2H} = 0 \\
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\sqrt{pq}\,U}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{\sqrt{pq}}{kH}V\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{DD'U^2 + 2DD''UV + D'D''V^2}{4k^2H} = 0 \\
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\sqrt{pq}\,U}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \frac{pq}{k^2H^2}U^2 - \frac{(D'U + D''V)^2}{4k^2H} = 0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Si osservi che nella prima e nella terza i tre primi termini formano un quadrato perfetto, onde possono sostituirsi colle due equazioni lineari

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\\
\frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon'}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V}),
\end{aligned}
\right.
$$

dove ciascuna delle due quantità $\varepsilon, \varepsilon'$ è eguale all'unità, positiva o negativa. Ma resta ancora a soddisfare l'equazione media (6), la quale per le precedenti si riduce alla

$$
\varepsilon\varepsilon'(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V}) - (\mathrm{DD'U}^2 + 2\mathrm{DD''UV} + \mathrm{D'D''V}^2) = \frac{4pq}{\mathrm{H}}\mathrm{UV}.
$$

Ora $\mathrm{D}, \mathrm{D'}, \mathrm{D''}$ non sono legate fra loro da altra equazione finita che dalla equazione (2) di Gauss, onde vediamo che, per soddisfare anche la media delle (6), occorre e basta prendere $\varepsilon, \varepsilon'$ concordanti in segno, cioè

$$
\varepsilon = \varepsilon' = \pm 1.
$$

Le equazioni differenziali per la funzione incognita λ sono dunque, sotto forma definitiva, le seguenti

$$
(\mathrm{I})\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\\
\frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V}).
\end{aligned}
\right.
\qquad (\varepsilon = \pm 1)
$$

La scelta di $\varepsilon = +1$ o di $\varepsilon = -1$ equivale come vedremo, alla separazione delle nostre trasformazioni B_k in due classi, corrispondenti le prime al primo sistema di generatrici di B_k, le seconde al secondo.

Si osservi che i secondi membri delle (I) sono lineari omogenei in U, V e ancora lineari in $\mathrm{D}, \mathrm{D'}, \mathrm{D''}$; come funzioni di λ essi sono polinomii di 2.° grado, perchè tali sono U, V.

Ed in fine si osserverà ancora che il passaggio da $\varepsilon = +1$ ad $\varepsilon = -1$ equivale a cangiare nelle (I) contemporaneamente il segno di $\mathrm{D}, \mathrm{D'}, \mathrm{D''}$, cioè a sostituire alla S la superficie simmetrica.

§ 28.

Illimitata integrabilità del sistema (I).

Abbiamo trovato che la funzione incognita λ deve soddisfare alle equazioni simultanee (I), ossia alla equazione ai differenziali totali (del tipo di Riccati):

$$
d\lambda = \left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\right]du + \left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right]dv.
$$

Noi vogliamo ora dimostrare che questa equazione è *illimitatamente* integrabile, cioè che essa possiede una soluzione λ con una costante arbitraria. Formiamo per ciò l'espressione

$$
\Omega = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right];
$$

dovremo provare che essa è identicamente nulla, in virtù delle (I) stesse. Calcolando effettivamente Ω, abbiamo dapprima:

$$
\begin{aligned}
\Omega = \frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{H}}(\mathrm{V'}-\mathrm{U'}) + \sqrt{pq}\,\mathrm{V}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) - \sqrt{pq}\,\mathrm{U}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{H}}\right) &+ \\
+ \frac{\varepsilon}{2}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right) - \frac{\varepsilon}{2}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right) &+ \\
+ \frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right] &- \\
- \frac{\sqrt{pq}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right] &+ \\
+ \frac{\varepsilon\mathrm{U}}{2\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\frac{\partial\mathrm{D}}{\partial v} - \frac{\partial\mathrm{D'}}{\partial u}\right) - \frac{\varepsilon\mathrm{V}}{2\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\frac{\partial\mathrm{D''}}{\partial u} - \frac{\partial\mathrm{D'}}{\partial v}\right) + \frac{\varepsilon\mathrm{D'}}{2\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{V'}-\mathrm{U'}) &+ \\
+ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathrm{D}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda} + \mathrm{D'}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\right)\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right] &- \\
- \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathrm{D'}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda} + \mathrm{D'}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\right)\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\right]&.
\end{aligned}
$$

Ora si ha, per le equazioni (8) di Codazzi,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}&=\frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial v}D+\frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial u}D'\\ \frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}&=\frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial v}D'+\frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial u}D'',\end{aligned}\right.$$

e d'altra parte la formola (2) di Gauss dimostra che il determinante

$$\begin{vmatrix} D\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}+D'\dfrac{\partial V}{\partial \lambda} & D'\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}+D''\dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \\ DU+D'V & D'U+D''V \end{vmatrix}=(DD''-D'^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial \lambda}-U\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)$$

equivale a

$$\frac{4pq}{H}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda}-V\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right).$$

Colla sostituzione di questi valori la Ω diventa un'espressione lineare intera in D, D', D'', diciamo:

$$\Omega=\alpha D+\beta D'+\gamma D''+\delta.$$

Dopo alcune riduzioni evidenti, si trova

$$\alpha=\gamma=0$$

e si ha inoltre

$$2\varepsilon\sqrt{H}\,.\,\beta=\frac{H}{\sqrt{pq}}\delta=V'-U'+U\frac{\partial \log H}{\partial u}-V\frac{\partial \log H}{\partial v}+\frac{2\sqrt{pq}}{kH}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda}-V\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right).$$

Prendiamo ora l'identità (26) dimostrata al § 7 [pag. 18]

$$U\frac{\partial V}{\partial \lambda}-V\frac{\partial U}{\partial \lambda}=k\left[\rho(U'+W)-\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}U+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v}V\right]$$

e, ricordando che $\rho=\dfrac{H}{\sqrt{pq}}$, avremo

$$V'-U'+U\frac{\partial \log H}{\partial u}-V\frac{\partial \log H}{\partial v}+\frac{2\sqrt{pq}}{kH}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda}-V\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)=U'+V'+2W.$$

Per l'identità (25) § 7 (pag. 18), il secondo membro è nullo e per

ciò anche

$$\beta=\delta=0;$$

dunque $\Omega=0$, c. d. d.

Ne concludiamo: *Le equazioni differenziali fondamentali* (I) *formano un sistema completamente integrabile.*

§ 29.

Le trasformazioni B_k delle deformate del paraboloide.

Le equazioni (I) ammettono, come si è visto, una soluzione λ con una costante arbitraria, per la quale possiamo assumere il valore che si vuole attribuire a λ in un punto iniziale $F_0\equiv(u_0v_0)$ di S. Se per λ sostituiamo nelle formole (1) una tale soluzione delle equazioni fondamentali (I), avremo definita una superficie S_1, luogo del punto $(x_1y_1z_1)$, che verrà a soddisfare alle condizioni *b*) § 25 e sarà applicabile sul paraboloide, la legge d'applicabilità fra S, S_1 essendo inoltre data dall'affinità d'Ivory. Diremo che la superficie S_1 è derivata da S per una trasformazione B_k. Così ogni deformata S del paraboloide dà luogo per una trasformazione B_k (fissato il valore di *k*) ad ∞^1 superficie trasformate S_1.

Conforme a quanto si è detto al § 25, dobbiamo provare che anche le condizioni *a*) risulteranno soddisfatte. Cominciamo dal dimostrare la proprietà:

I segmenti rettilinei FF_1, *che toccano in* F *la* S, *sono altresì tangenti alla* S_1 *in* F_1, *onde* S, S_1 *sono le due falde focali della congruenza* FF_1.

Secondo l'equazione (5) del Cap. I (pag. 9), la proprietà enunciata equivale all'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0+\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} & M_0+\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} & Dl+D'm \\ P_0+\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} & Q_0+\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} & D'l+D''m \end{vmatrix},$$

ossia al verificarsi della identità

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&(Dl+D'm)\left[lQ_0-mP_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial \lambda}-m\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right]=\\ &=(D'l+D''m)\left[lM_0-mL_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial \lambda}-m\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right].\end{aligned}\right.$$

Ora, come si è visto al § 7, il determinante

$$\Theta = \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ L_0 & M_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

si annulla, cioè si ha

$$m(lQ_0 - mP_0) = l(lM_0 - mL_0). \tag{9}$$

D'altronde, siccome

$$l = \frac{U}{W}, \quad m = \frac{V}{W},$$

se si sostituiscono i valori (I) di $\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\lambda}{\partial v}$ nella (8), questa diventa

$$DU\left[lQ_0 - mP_0 + \frac{\sqrt{pq}}{kH}U\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda} - m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right] -$$
$$- D''V\left[lM_0 - mL_0 + \frac{\sqrt{pq}}{kH}V\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda} - m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right] = 0.$$

Ma si ha, a causa della (9),

$$\frac{1}{U}(lQ_0 - mP_0) = \frac{1}{V}(lM_0 - mL_0)$$

e l'equazione superiore può scriversi

$$(DU^2 - D''V^2)\left[\frac{1}{V}(lM_0 - mL_0) + \frac{\sqrt{pq}}{kH}\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda} - m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right] = 0.$$

Sotto questa forma risulta che essa è un'identità, annullandosi a causa della (26*) § 7 (pag. 19) il fattore fra parentesi [ ].

Concludiamo adunque che la superficie S primitiva e la sua trasformata S_1 sono le due falde focali della congruenza di rette che uniscono i loro punti corrispondenti.

Osserviamo ancora un'altra proprietà delle trasformazioni B_k che risulta dalla forma di Riccati dell'equazione ai differenziali totali in λ (cf. § 8). Ne deduciamo:

Quattro superficie trasformate della S *per mezzo di una* B_k *tagliano le* ∞^2 *coniche* C, *tracciate nei piani tangenti di* S, *in quattro punti di birapporto costante.*

§ 30.

Verifica delle condizioni *a)*.

Coll'analisi del paragrafo precedente abbiamo già dimostrato che le superficie trasformate S_1 soddisfano ad una prima parte delle condizioni *a)* enunciate al § 25, e cioè che i loro piani tangenti π_1 contengono i segmenti rettilinei FF_1. Per completare la verifica resta ancora a dimostrare che se S si applica sul paraboloide P_0 e il piano tangente π di S trascina seco, in sistema invariabile, il piano tangente π_1 alla S_1, quest'ultimo viene a passare inoltre, compiuta la deformazione, per l'una o per l'altra delle due generatrici del paraboloide confocale P_k uscenti da F_1; e precisamente per la prima o per la seconda secondo che la trasformazione B_k appartiene alla prima od alla seconda, classe (§ 27).

Conviene pel nostro scopo calcolare i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale alla S_1 in F_1, che porremo nuovamente (cf. § 15) sotto la forma

$$X_1 = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + CX,$$

cercando di determinare A, B, C. Poichè la direzione (X_1, Y_1, Z_1) è normale al raggio FF_1 (§ 29), avremo in primo luogo

$$\sum X_1(x_1 - x) = 0,$$

e basterà a questa condizione aggiungere per es. l'altra

$$\sum X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$$

per dedurne A, B, C, a meno di un fattore di proporzionalità. Ora si ha (§§ 25, 26)

$$x_1 - x = l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \left(L_0 + \frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(M_0 + \frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + (Dl + D'm)X;$$

onde le due condizioni sopra scritte si traducono nelle due equazioni lineari omogenee in A, B, C

$$(El+Fm)A+(Fl+Gm)B=0$$

$$\left[(EL_0+FM_0)+\left(E\frac{\partial l}{\partial\lambda}+F\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right]A+\left[(FL_0+GM_0)+\left(F\frac{\partial l}{\partial\lambda}+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right]B+$$
$$+(Dl+D'm)\,.\,C=0\,.$$

Di qui si traggono le proporzioni

$$(10)\left\{\begin{aligned}&A:B:C=(Dl+D'm)(Fl+Gm):-\\&-(Dl+D'm)(El+Fm):(EG-F^2)\left[lM_0-mL_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right].\end{aligned}\right.$$

Ma, a causa della (26*) § 7 (pag. 19), si ha

$$l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}=-\frac{kH}{V\sqrt{pq}}(lM_0-nL_0)\,,$$

e per ciò

$$lM_0-mL_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{kH}{V\sqrt{pq}}(lM_0-mL_0)\left(\frac{\sqrt{pq}}{kH}V-\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right).$$

La prima delle equazioni differenziali (I) per λ (pag. 81) dimostra che il secondo membro dell'ultima equazione equivale

$$-\frac{\varepsilon\sqrt{H}}{2V\sqrt{pq}}(DU+D'V)=-\frac{\varepsilon\sqrt{H}\,W}{2V\sqrt{pq}}(Dl+D'm)\,,$$

sicchè dalle proporzioni (10) sparisce nei secondi termini il fattor comune $Dl+D'm$; e, poichè inoltre $EG-F^2=4H$, resta

$$(10^*)\qquad A:B:C=-(Fl+Gm):(El+Fm):\frac{2\varepsilon H^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{pq}}(lM-mL_0)\,.$$

Aggiungendo alle proporzioni (10*) la condizione $\sum X_i^2=1$, ovvero (cf. § 26)

$$EA^2+2FAB+GB^2+C^2=1\,,$$

risulta che i valori di A, B, C non contengono esplicitamente D, D′, D″, e per ciò la giacitura relativa dei piani π,π_1 resta sempre la medesima

in qualunque flessione della S. Ciò posto se la trasformazione B_k appartiene alla *prima* classe, cioè $\varepsilon=+1$ (§ 27), le formole precedenti combinano appunto colle (52) § 15 (pag. 44), onde segue che, applicata la S sul paraboloide, il piano π_1 viene a passare per la *prima* generatrice del paraboloide P_k uscente da F_1.

Sia ora la trasformazione B_k della seconda classe, $\varepsilon=-1$. Per vedere qui la posizione relativa di π,π_1 riduciamo S al paraboloide stesso; allora

$$D=D''=0\quad,\quad D'=D'_0=-\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}$$

e le equazioni differenziali fondamentali (I) con $\varepsilon=-1$ diventano

$$(11)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u}=2\frac{\sqrt{pq}}{kH}V\ ,\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}=2\frac{\sqrt{pq}}{kH}U.$$

Troviamo immediatamente l'integrale generale di questo sistema (illimitatamente integrabile secondo il § 28) osservando che se nella funzione u_1 di u,v,λ data dalla (45_1) § 11 (pag. 32) introduciamo per λ una soluzione del sistema (11), la u_1 diventa una costante. Poichè invero denotiamo con $\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)$ le derivate totali di u_1 rapporto ad u,v; avremo

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{\partial u_1}{\partial u}+2\frac{\sqrt{pq}}{kH}V\,.\,\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial u_1}{\partial v}+2\frac{\sqrt{pq}}{kH}U\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\,.$$

Queste, a causa delle (47) § 12, possono anche scriversi

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)=2\frac{\sqrt{pq}}{kH}V\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\frac{2k\lambda^2H}{W^2}\right)$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)=2\frac{\sqrt{pq}}{kH}U\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\frac{2k\lambda^2H}{W^2}\right)$$

e sono nulle identicamente a causa della (51) § 12 (pag. 35). Abbiamo quindi il risultato analitico: *L'integrale generale del sistema differenziale* (11) è

$$u_1=\text{cost.}^{\text{te}}$$

Interpretandolo ora geometricamente, si ha appunto la verifica richiesta. E invero risulta che, riducendo S al paraboloide P_0, la superficie trasformata S_1 si riduce ad una generatrice $u_1 = \text{cost.}^{te}$ del secondo sistema di P_k [1]) e per questa generatrice viene quindi a passare il piano π_1.

Abbiamo così verificato in effetto che le superficie trasformate S_1 soddisfano a tutte le condizioni *a)* del § 15. Ma importa osservare che inversamente: *Le condizioni a) bastano da sole ad individuare le trasformazioni* B_k.

E infatti come dalle equazioni differenziali (I) seguono i valori sopra calcolati pei coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale alla S_1, così inversamente da queste espressioni di X_1, Y_1, Z_1 seguono le equazioni differenziali stesse.

§ 31.

Corrispondenza delle asintotiche sopra S e S_1.

Dalle considerazioni superiori possiamo trarre una prima dimostrazione del teorema: *Le trasformazioni* B_k *delle deformate del paraboloide conservano le linee asintotiche.* Diciamo cioè che sulle due falde focali S, S_1 della congruenza rettilinea FF_1 le linee asintotiche si corrispondono, cioè la congruenza stessa è una congruenza W.

Secondo il teorema di Ribaucour, ricordato al § 15, basterà dimostrare che fra gli elementi delle due falde focali ha luogo la relazione caratteristica

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \sqrt{\frac{1}{KK_1}},$$

indicando con δ la distanza focale, con Ω l'angolo dei due piani focali e con K, K_1 le curvature

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\ ,\quad K_1 = -\frac{1}{\rho_1^2}$$

delle due falde. Ora se la trasformazione B_k appartiene alla prima classe,

---

[1]) Colle notazioni del § 11, il punto di coordinate

$$\xi = \sqrt{p}(u_1 + v_1)\ ,\quad \eta = \sqrt{q}(u_1 - v_1)\ ,\quad \zeta = 2u_1 v_1$$

descrive la generatrice $u_1 = \text{cost.}^{te}$ di P_0 ed il punto $(\bar{x}_0\, \bar{y}_0\, \bar{z}_0)$ di P_k che gli corrisponde nella affinità d'Ivory descrive quindi la generatrice corrispondente.

i valori di A, B, C combinano, come si è visto sopra, con quelli dati al § 15 e la relazione di Ribaucour colla (57^*) (pag. 46):

$$EU^2 + 2FUV + GV^2 + \frac{1}{k^2}\left(V\frac{\partial U}{\partial\lambda} - U\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2 = W^2\rho\rho_1 .$$

Questa, come abbiamo avvertito al § 15, è un'identità in u, v, λ e il teorema è dimostrato. Se poi la B_k appartiene alla seconda classe, nelle formole per A, B, C cangia solo il segno di C e la relazione di Ribaucour si riduce alla medesima identità (57^*).

Un'altra conseguenza importante si può trarre dai risultati del § precedente, e cioè il teorema:

Se la deformata primitiva S *del paraboloide è una superficie rigata* R, *anche tutte le sue trasformate* S_1 *per trasformazioni* B_k *(di prima o di seconda classe) sono rigate e le trasformazioni* B_k *diventano quelle del Cap. I.*

Per dimostrarlo, supponiamo che la rigata R abbia le sue generatrici corrispondenti per deformazione continua per es. alle generatrici (v) del paraboloide; avremo allora (§ 6)

$$D = 0\ ,\quad D' = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}\ ,\quad D'' = 2\sqrt{H}\,.\,\varphi(v) .$$

1.° Se la B_k appartiene alla prima classe si ha $\varepsilon = +1$, e le equazioni differenziali fondamentali I (pag. 81) si riducono alle due

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0\ ,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{V\varphi(v)}{k} .$$

Così λ è una funzione di v soltanto, che risulta precisamente determinata dalla equazione di Riccati al § 7 per le trasformate rigate R_1 della R, ciò che dimostra il teorema.

2.° La B_k appartenga alla seconda classe: allora le (I), essendo $\varepsilon = -1$, diventano

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 2\frac{\sqrt{pq}}{kH}V\ ,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 2\frac{\sqrt{pq}}{kH}U + \frac{V\varphi(v)}{k}$$

ed il calcolo stesso eseguito alla fine del § precedente dimostra che u_1 *risulta funzione di* v *soltanto,* avendosi identicamente

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right) = 0 .$$

Per ciò sulla trasformata S_1 le geodetiche $u_1 = \text{cost.}^{\text{te}}$ corrispondono alle rette $v = \text{cost.}^{\text{te}}$ di R e, pel teorema della conservazione delle asintotiche, sono quindi esse stesse asintotiche, conseguentemente rette. Dunque la superficie trasformata è una rigata R_1, c. d. d.

§ 32.

Seconda dimostrazione della corrispondenza delle asintotiche.

Della proprietà delle trasformazioni B_k di conservare le linee asintotiche andiamo ora a dare un'altra dimostrazione, la quale ci condurrà altresì a stabilire altre importanti proprietà delle nostre trasformazioni.

Premettiamo la dimostrazione di semplici formole relative alle linee asintotiche di una superficie S qualunque. Sia a una qualunque asintotica di S ed s il suo arco. Colle notazioni consuete abbiamo lungo a

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0\,,$$

ovvero

$$(D\,du + D'dv)^2 = (D'^2 - DD'')\,dv^2\,,$$

od anche

$$(D\,du + D'\,dv)^2 = \frac{EG - F^2}{\rho^2}\,dv^2\,,$$

essendo $K = -\frac{1}{\rho^2}$ la curvatura della superficie. Possiamo dunque scrivere

$$D\,du + D'\,dv = \pm\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}\,dv\,,$$

da cui segue anche

$$D'\,du + D''\,dv = \mp\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}\,du\,,$$

i segni superiori avendo luogo per le asintotiche di un sistema, gli inferiori per quelle dell'altro. Abbiamo dunque: *Lungo una linea asintotica a di ogni superficie* S *sussistono le relazioni*

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} D\frac{du}{ds} + D'\frac{dv}{ds} &= \pm\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\frac{dv}{ds}\\ D'\frac{du}{ds} + D''\frac{dv}{ds} &= \mp\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\frac{du}{ds}\,,\end{aligned}\right.$$

i segni superiori avendo luogo per le asintotiche di un sistema, gli inferiori per quelle dell'altro.

Quale relazione ha il segno della torsione dell'asintotica coi segni nelle (12)? Facilmente si vede che i segni superiori corrispondono alle asintotiche a torsione positiva (sinistrorse), gli inferiori a quelle a torsione negativa (destrorse), ed anzi dalle formole (12) stesse si trae nuovamente il teorema d'Enneper (vol. I pag. 159), precisato nel segno [1].

---

[1]) Indichiamo qui rapidamente la dimostrazione. Se per la linea a si mantengono le consuete notazioni della teoria delle curve (Lezioni Cap. I) si ha

$$\frac{1}{T} = \sum \xi\frac{d\lambda}{ds} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Ma poichè la linea a è asintotica, abbiamo

$$\lambda = \pm X\ ,\quad \mu = \pm Y\ ,\quad \nu = \pm Z\,,$$

indi

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{T} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dX}{ds} & \frac{dY}{ds} & \frac{dZ}{ds} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Ora

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

e per le formole fondamentali delle Lezioni al § 55 (pag. 117) si ha

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}\,.\end{aligned}\right.$$

Sostituendo in (α), il secondo membro si scinde nel prodotto di due determinanti, di cui il primo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & X \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & Z \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2}\,,$$

Supponiamo ora che la nostra superficie S sia una deformata del paraboloide P_0, e applichiamo le formole (12) per formare, secondo le equazioni fondamentali (I), la derivata λ considerata, lungo la linea a, come funzione di s. Abbiamo

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{dv}{ds}=\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}+\frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V})\right]\frac{du}{ds}+$$

$$+\left[\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}+\frac{\varepsilon}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V})\right]\frac{dv}{ds}.$$

Le (12), essendo qui

$$\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}=\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

danno

$$\mathrm{D}\frac{du}{ds}+\mathrm{D'}\frac{dv}{ds}=\pm\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{dv}{ds}$$

$$\mathrm{D'}\frac{du}{ds}+\mathrm{D''}\frac{dv}{ds}=\mp\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{du}{ds},$$

e resta quindi

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\left\{\left(\mathrm{V}\frac{du}{ds}+\mathrm{U}\frac{dv}{ds}\right)\pm\varepsilon\left(\mathrm{U}\frac{dv}{ds}-\mathrm{V}\frac{du}{ds}\right)\right\}$$

o in fine

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{2\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}\frac{dv}{ds}, \tag{13}$$

o

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{2\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}\frac{du}{ds}, \tag{13*}$$

---

e resta quindi

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\left\{\left[(\mathrm{FD}-\mathrm{ED'})\frac{du}{ds}+(\mathrm{FD'}-\mathrm{ED''})\frac{dv}{ds}\right]\frac{du}{ds}-\right.$$

$$\left.-\left[(\mathrm{FD'}-\mathrm{GD})\frac{du}{ds}+(\mathrm{FD''}-\mathrm{GD'})\frac{dv}{ds}\right]\frac{dv}{ds}\right\}.$$

Osservando le (12) del testo si ha infine

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=\pm\frac{1}{\rho}\left\{\left(\mathrm{F}\frac{dv}{ds}+\mathrm{E}\frac{du}{ds}\right)\frac{du}{ds}+\left(\mathrm{F}\frac{du}{ds}+\mathrm{G}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}\right\}=\pm\frac{1}{\rho}.$$

secondo che il segno di ε concorda o meno col segno nella prima delle (12). In altre parole la (13) vale per le trasformazioni B_k di prima classe ed asintotiche sinistrorse e per quelle di seconda con asintotiche destrorse, la (13) nei casi opposti.

Ora, lungo la linea a, le quantità u, v, U, V, H sono funzioni note di s, e per ciò la (13) o (13*) dà per la funzione $\lambda(s)$ un'equazione differenziale del 1.° ordine *del tipo di Riccati*, che dipende soltanto dalle espressioni delle coordinate curvilinee u, v di un punto mobile sopra a in funzione dell'arco s.

Supponiamo ora che la superficie S si deformi, piegandosi attorno all'asintotica a mantenuta rigida [1]). Per quanto si è detto, l'equazione differenziale (13) (o (13*)) resterà sempre la stessa, e, se fissiamo di più il valore iniziale λ_0 di λ per un valore iniziale s_0 di s, anche la funzione $\lambda(s)$ resterà sempre la stessa. Ma il valore iniziale λ_0 fissato per λ fissa altresì, per ogni speciale configurazione di S, la superficie trasformata S_1 e, su questa, la linea a_1 che corrisponde ad a sarà data dalle formole

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.},$$

ove il punto (u, v) percorre la linea a. Siccome lungo a le quantità

$$x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \lambda,\ l,\ m$$

mantengono inalterato il loro valore, lo stesso accade di x_1, y_1, z_1; la linea a_1 rimane dunque fissa e rimangono pure invariabili in grandezza e posizione i segmenti FF_1 congiungenti i punti corrispondenti di a, a_1.

Di più, siccome il piano tangente a S_1 in un punto F_1 di a_1 contiene il segmento FF_1 e la tangente in F_1 alla a_1, anche questo piano resterà fisso. Dunque: *la linea trasformata a_1 resta fissa coll'asintotica a e la superficie S_1 conserva sempre, lungo a_1, le stesse normali.*

Ma fra le configurazioni di S, ad asintotica rigida a, vi ha pure (pel teorema di Chieffi) quella della rigata R ottenuta conducendo pei punti di a le tangenti alle geodetiche g di S trasformate delle rette di un si-

---

[1]) Si ricordi [Lezioni I pag. 248] che, rendendo rigida un'asintotica, la superficie può ancora deformarsi in infiniti modi. Precisamente queste deformazioni dipendono da una funzione arbitraria di una variabile.

stema del paraboloide. La trasformata S_1 è allora una rigata R_1, sulla quale la a_1 è un'asintotica; dunque questa linea a_1 è ancora asintotica su tutte le superficie S_1. Il teorema della conservazione delle asintotiche nelle trasformazioni B_k è così nuovamente dimostrato.

Di più, mediante l'equazione differenziale (13) o (13*), noi abbiamo come risolute le trasformazioni B_k delle deformate della quadrica in trasformazioni di singole curve: le loro linee asintotiche, precisamente come le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche possono risolversi in trasformazioni delle curve a torsione costante che ne sono le asintotiche.

§ 33.

Proprietà ulteriori delle trasformazioni B_k.

Proseguiamo le nostre considerazioni geometriche, sempre supponendo che la superficie S si fletta attorno alla asintotica rigida a. Per ciascuna configurazione di S consideriamo la trasformata S_1, fissata da un segmento iniziale FF_1, assegnato in grandezza e direzione nel piano osculatore in F di a.

Si è visto che la linea a_1, corrispondente sopra S_1 alla a, resta sempre la stessa e si conserva asintotica di S_1. Vogliamo ora dimostrare di più che *la superficie* S_1 *si deforma alla sua volta attorno alla asintotica rigida* a_1. Per ciò osserviamo che quando la S, in una qualunque delle sue configurazioni, si applica sul paraboloide P_0, la linea a occupa sempre su P_0 una medesima posizione α, ed i segmenti FF_1 uscenti dai punti F di a vanno sempre a collocarsi nelle medesime posizioni, tangenti nei primi estremi F a P_0 e terminate nei secondi F_1 al paraboloide confocale P_k, sul quale disegneranno una *linea fissa* α_1. Per la legge d'applicabilità, data dall'affinità d'Ivory, segue che se si applica S_1 sopra P_0, la linea a_1 andrà sempre ad occupare su P_0 la medesima posizione, quella che corrisponde, nell'affinità d'Ivory, alla σ_1 di P_k [1]). Abbiamo dunque il teorema:

Se si deforma la prima falda focale S *di una delle nostre congruenze* W *attorno alla linea asintotica rigida* a, *e contemporaneamente si tiene*

[1]) In altre parole le formole d'applicabilità (45) § 11 (pag. 32) faranno sempre corrispondere ad un medesimo punto della linea a_1 un medesimo punto del paraboloide P_0.

fisso un segmento focale iniziale uscente da un punto di a, *anche la seconda falda* S_1 *si deforma attorno alla corrispondente asintotica* a_1 *mantenuta rigida.*

Un corollario notevole di questo teorema si ha considerando quella particolare configurazione di S che è data dalla rigata R circoscritta alla S lungo l'asintotica a, secondo il teorema di Chieffi. Allora anche la trasformata S_1 sarà rigata e coinciderà colla rigata omologa R_1 circoscritta a S_1 lungo a_1. Si ha dunque il teorema:

Le due superficie rigate R, R_1 *circoscritte lungo due asintotiche corrispondenti* a, a_1 *alle due falde focali* S, S_1 *di una delle nostre congruenze sono alla loro volta le due falde focali di una tale congruenza.*

Si osservi che per ogni coppia di asintotiche corrispondenti a, a_1 si ottengono così propriamente *due* tali coppie di rigate (R, R_1) secondo che per formare la R si tirano, lungo a, le tangenti alle geodetiche di S' trasformate del primo o del secondo sistema di generatrici del paraboloide P_0.

I risultati precedenti ci conducono ad un'altra importante conseguenza, che per le deformate rigate venne già stabilita al § 18, e cioè al teorema:

La relazione fra le due deformate S, S_1 *del paraboloide è reciproca; la superficie* S *proviene cioè per la trasformazione* B_k *da* S_1 *come la* S_1 *da* S.

E infatti, considerando la coppia (R, R_1) di rigate circoscritte lungo due asintotiche corrispondenti, sappiamo già che R, R_1 si trovano in relazione invertibile.

Dunque, siccome nell'applicabilità di S_1 sopra R_1 l'asintotica a_1 rimane rigida, se si distende S_1 sul paraboloide, i segmenti FF_1 andranno a collocarsi cogli estremi F sul paraboloide confocale P_k. Pel modo stesso come abbiamo determinate le trasformazioni B_k dalle condizioni *b)* § 25, ne risulta appunto che S_1 è trasformata della S mediante la B_k.

§ 34.

Corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti sopra S, S_1.

Abbiamo visto che ad ogni sistema coniugato di S corrisponde un sistema coniugato di S_1. Ora fra i sistemi coniugati di S ve ne ha uno, perfettamente determinato, caratterizzato da ciò che il sistema corrispondente per l'applicabilità sul paraboloide è egualmente coniugato; lo diremo il *sistema coniugato permanente* di S. Esso è formato da due sistemi di linee reali od immaginarie, ma sempre distinti, salvo quando la S è una rigata R, chè allora esso si riduce al sistema delle generatrici di R (contato due volte) [1]).

In ogni caso vale il teorema:

Nelle nostre congruenze W, *colle due falde focali* S, S_1 *applicabili sul paraboloide, si corrispondono sopra* S, S_1 *i sistemi coniugati permanenti.*

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che le due seconde forme fondamentali del paraboloide P_0 e della superficie S sono rispettivamente, in coordinate u, v:

$$2\,D'_0\,du\,dv$$

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

e per ciò il loro sistema coniugato comune, la cui equazione differenziale si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme, sarà dato da

$$D\,du^2 - D''\,dv^2 = 0\,. \tag{14}$$

Per l'altra superficie S_1 la seconda forma fondamentale è proporzionale, pei risultati dei §§ precedenti, alla stessa

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2\,.$$

D'altronde, nella applicabilità di S_1 su P_0, le trasformate delle rette di P_0 sono le linee $u_1 = \text{cost.}^{\text{te}}$, $v_1 = \text{cost.}^{\text{te}}$, sicchè la seconda forma fondamentale di P_0 è proporzionale, in coordinate u_1, v_1, al prodotto $du_1\,dv_1$ e quindi, in coordinate u, v, essendo v_1 funzione di λ $\left(v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}\right)$, è proporzionale all'espressione

$$\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)dv\right]\cdot\left[\frac{\partial \lambda}{\partial u}du + \frac{\partial \lambda}{\partial v}dv\right],$$

che scriviamo

$$\Delta\,du^2 + 2\,\Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2\,,$$

[1]) E infatti se questo doppio sistema è di linee coincidenti, esso è formato di asintotiche tanto sul paraboloide che sulla superficie S; queste linee di S, essendo asintotiche e geodetiche, sono rette.

ponendo

$$\Delta = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,,\quad 2\,\Delta' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,,$$

$$\Delta'' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}\,.$$

L'equazione differenziale del sistema coniugato comune ad S_1 e P_0 (sistema coniugato permanente di S_1) è adunque

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \\ \Delta\,du + \Delta'\,dv & \Delta'\,du + \Delta''\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia

$$(D\,\Delta' - D'\,\Delta)\,du^2 + (D\,\Delta'' - D''\,\Delta)\,du\,dv + (D'\,\Delta'' - D''\,\Delta')\,dv^2 = 0\,.$$

Dobbiamo dimostrare che questa coincide colla (14), per il che occorre e basta verificare che si ha

$$D\,\Delta'' - D''\,\Delta = 0\,,$$

ossia

$$D\left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} - D''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0\,.$$

Ma, per le formole (47), (51) del § 12 (pag. 33, 35), si ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2\frac{V}{W^2}\,,\quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 U}{W^2}\,,\quad \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = -\frac{2\,k\lambda^2 H}{W^2}\,,$$

onde la identità da dimostrarsi diventa

$$D\left(2\sqrt{pq}\,U - k\,H\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} - D''\left(2\sqrt{pq}\,V - k\,H\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0\,.$$

Per le equazioni fondamentali (I) (pag. 81) la precedente si scrive

$$D\left[\sqrt{pq}\,U - \frac{\varepsilon\sqrt{H}}{2}(D'\,U + D''\,V)\right]\cdot\left[\sqrt{pq}\,U + \frac{\varepsilon\sqrt{H}}{2}(D'\,U + D''\,V)\right] -$$

$$- D''\left[\sqrt{pq}\,V - \frac{\varepsilon\sqrt{H}}{2}(D\,U + D'\,V)\right]\left[\sqrt{pq}\,V + \frac{\varepsilon\sqrt{H}}{2}(D\,U + D'\,V)\right] =$$

$$= D\left[pq\,U^2 - \frac{H}{4}(D'\,U + D''\,V)^2\right] - D''\left[pq\,V^2 - \frac{H}{4}(D\,U + D'\,V)^2\right] = 0\,.$$

Riducendo, questa diventa

$$(DU^2 - D''V^2) \cdot \left[pq + \frac{H}{4}(DD'' - D'^2)\right] = 0,$$

ed è una identità, essendo per l'equazione di Gauss § 26 (pag. 77)

$$DD'' - D'^2 = -\frac{4\,pq}{H}.$$

Il nostro teorema è così dimostrato.

§ 35.

Superficie deformate dell'iperboloide ad una falda.

Veniamo ora alle deformate generali dell'iperboloide ad una falda. Riprendendo le notazioni del § 16 e segg., supponiamo che sia S una deformata qualunque dell'iperboloide Q_0, intrinsecamente definita dal ds^2 di Q_0 e dalla sua seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

I coefficienti D, D', D'' dovranno unicamente soddisfare all'equazione di Gauss ed alle equazioni di Codazzi, che per le formole al § 16 diventano rispettivamente

$$DD'' - D'^2 = -\frac{4\,abc}{(u+v)^4\rho}, \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}D + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial u} + \frac{2}{u+v}\right)D' \\ &\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial v} + \frac{2}{u+v}\right)D' + \frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial u}D''. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Secondo il metodo generale descritto al § 25, consideriamo la superficie S_1 luogo del punto (x_1, y_1, z_1), le cui coordinate sono date dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.}, \tag{17}$$

dove l, m hanno i valori assegnati dalle (66), (67) § 16 (pag. 49) colla determinazione superiore dei segni, e θ è una funzione incognita di u, v da determinarsi.

Calcoliamo in primo luogo l'elemento lineare

$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$$

di S_1. Derivando le (17), abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= L_0\frac{\partial x}{\partial u} + M_0\frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 m X + \left[\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right]\frac{\partial\theta}{\partial u} + \left[Dl + (D' - D'_0)\,m\right]X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P_0\frac{\partial x}{\partial u} + Q_0\frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 l X + \left[\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right]\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left[(D' - D'_0)\,l + D''m\right]X, \end{aligned}\right.$$

dove L_0, M_0, P_0, Q_0 hanno i valori (70) § 17 (pag. 51).

Consideriamo in particolare la superficie S ridotta all'iperboloide Q_0 e la S_1 ridotta ad una generatrice (θ) dell'iperboloide confocale Q_h. Adoperando le medesime notazioni come al § 26, abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} &= L_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0\,m\,X_0 \\ \frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v} &= P_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0\,l\,X_0 \end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} = \frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x_0}{\partial v}.$$

Da queste formole deduciamo (cf. § 26):

$$\left\{\begin{aligned} E_1 &= E_0 + 2\left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + (Dl + D'm)^2 - D'^2_0 m^2 \\ F_1 &= F_0 + \left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u} + \\ &\quad + \left[(EL_0 + FM_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FL_0 + GM_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\cdot\frac{\partial\theta}{\partial v} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + (Dl + D'm)(D'l + D''m) - D'^2_0 lm \\ G_1 &= G_0 + 2\left[(EP_0 + FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FP_0 + GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{\partial\theta}{\partial v} + \\ &\quad + \sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + (D'l + D''m)^2 - D'^2_0 l^2, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

dove E_0, F_0, G_0 hanno il medesimo significato come al § 19:

$$E_0=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\right)^2,\quad F_0=\sum\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v},\quad G_0=\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}\right)^2$$

ed i valori effettivi (83) ibid. (pag. 57).

Ciò posto, noi dobbiamo determinare la funzione incognita $\theta=\theta(u,v)$ in guisa da soddisfare le condizioni *b)* al § 25, cioè da identificare i due elementi lineari

$$\begin{cases} E_1\,du^2+2\,F_1\,du\,dv+G_1\,dv^2\\ \overline{E}_1\,du_1^2+2\,\overline{F}\,du_1\,dv_1+\overline{G}_1\,dv_1^2, \end{cases}$$

le funzioni u_1, v_1 di u, v essendo date dalle formole d'applicabilità (89) § 20 (pag. 60) ed $\overline{E}_1, \overline{F}_1, \overline{G}_1$ avendo i valori (90) ibid.

Dovremo dunque confrontare le (18) colle altre

$$(18^*)\quad\begin{cases} E_1=\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\\ \qquad+\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\\ F_1=\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\\ \qquad+\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}\\ G_1=\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v}+\\ \qquad+\left[\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2; \end{cases}$$

il confronto ci fornirà le equazioni differenziali caratteristiche per θ (cf. § 27).

§ 36.

Le equazioni differenziali per la funzione $\theta(u,v)$.

Per paragonare i valori (18), (18*) di E_1, F_1, G_1 occorre in primo luogo ricordare alcune identità stabilite nel Capitolo I, e cioè le seguenti

$$(92^*)\ \S\ 20\ (\text{pag. } 62)\quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=E_0,\ \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=F_0,\ \overline{F}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=G_0$$

$$(c)\ \S\ 21\ (\text{pag. } 65)\quad(83)\ \S\ 19\ (\text{pag. } 57)\ \begin{cases}\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}=-\frac{4abc}{a'b'c'}\frac{V}{W^2}\left[a'\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+k\right]\\ \left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}=-\frac{4abc}{a'b'c'}\frac{U}{W^2}\left[a'\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+k\right]\end{cases}$$

$$(85)\ \S\ 19\ (\text{pag. } 58)\ \begin{cases}(EL_0+FM_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FL_0+GM_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}=-\frac{4\,abc}{a'b'c'}\frac{V}{W^2}\left[a'\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right]\\ (EP_0+FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FP_0+GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}=-\frac{4\,abc}{a'b'c'}\frac{U}{W^2}\left[a'\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right],\end{cases}$$

dal cui confronto si rilevano le altre

$$\begin{cases}\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}-\left[(EL_0+FM_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FL_0+GM_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]=-4k\frac{abc}{a'b'c'}\frac{V}{W^2}\\ \left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}-\left[(EP_0+FQ_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(FP_0+GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]=-4k\frac{abc}{a'b'c'}\frac{U}{W^2}.\end{cases}$$

In fine ricordiamo la formola

$$(c)\ \S\ 21\ (\text{pag. } 65)\quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2-\sum\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2=\frac{4k^2abc}{a'b'c'}\frac{(u+v)^2\rho}{W^2},$$

e le altre

$$l=(u+v)\frac{U}{W},\quad m=(u+v)\frac{V}{W},\quad D_0'^2=\frac{4\,abc}{(u+v)^4\rho}.$$

Dopo ciò, paragonando le (18) (18*), risultano le seguenti tre equazioni quadratiche in $\frac{\partial\theta}{\partial u}, \frac{\partial\theta}{\partial v}$

$$(\alpha)\quad\begin{cases}\frac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2-\frac{8\,kabc}{a'b'c'}V\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{4\,abc}{(u+v)^2\rho}V^2-\\ \qquad-(u+v)^2(DU+D'V)^2=0\\ \frac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{4\,kabc}{a'b'c'}\left(U\frac{\partial\theta}{\partial u}+V\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)-\\ \qquad-(u+v)^2(DD'U^2+2DD''UV+D'D''V^2)=0\\ \frac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2-\frac{8\,k\,abc}{a'b'c'}U\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{4\,abc}{(u+v)^2\rho}U^2-\\ \qquad-(u+v)^2(D'U+D''V)^2=0.\end{cases}$$

La prima e la terza, risolute rapporto a $\frac{\partial\theta}{\partial u}, \frac{\partial\theta}{\partial v}$, danno (cf. § 27)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} V + \varepsilon \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (DU + D'V) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} U + \varepsilon' \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (D'U + D''V) , \end{cases}$$

dove $\varepsilon, \varepsilon'$ in valore assoluto sono eguali a 1. A causa poi della equazione di Gauss

$$DD'' - D'^2 = -\frac{4\,abc}{(u+v)^2\rho} ,$$

si vede che per soddisfare anche la media delle (α) occorre e basta assumere $\varepsilon, \varepsilon'$ concordanti in segno. Le equazioni differenziali cercate per θ assumono dopo ciò la forma definitiva:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} V + \varepsilon \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (DU + D'V) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} U + \varepsilon \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} D'U + D''V). \end{cases} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

La scelta di $\varepsilon = +1$ ovvero $\varepsilon = -1$ corrisponde anche qui, come al § 27, alla separazione delle trasformazioni B_k in due classi.

Come si vede, le equazioni (II) hanno una struttura del tutto analoga alle corrispondenti (I) per le deformate del paraboloide e nel parametro $\lambda = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ esse equivalgono ancora ad un'equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati.

§ 37

Illimitata integrabilità del sistema (II).

Andiamo ora a dimostrare che le equazioni simultanee (II) per la funzione incognita θ costituiscono un sistema completamente integrabile. Dovremo dimostrare per ciò che l'espressione (cf. § 28)

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{V}{(u+v)^2\rho} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(DU + D'V)\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{U}{(u+v)^2\rho} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(D'U + D''V)\right]$$

si annulla identicamente, se si ha riguardo alle (II) stesse. Col calcolo effettivo troviamo dapprima

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{V' - U'}{(u+v)^2\rho} + \frac{V}{(u+v)^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{U}{(u+v)^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{2(U-V)}{(u+v)^3\rho} + \varepsilon\frac{D'}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(V' - U') + \\ & + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{abc}}(DU + D'V)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{abc}}(D'U + D''V)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) + \\ & + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}\left[U\left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u}\right) - V\left(\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v}\right)\right] + \\ & + \frac{1}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial V}{\partial\theta}\left[\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}U + \varepsilon\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(D'U + D''V)\right] - \\ & - \frac{1}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\left[\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2}V + \varepsilon\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(DU + D'V)\right] + \\ & + \varepsilon\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}(u+v)^2\rho^{\frac{3}{2}}}\left[U\left(D\frac{\partial U}{\partial\theta} + D'\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) - V\left(D'\frac{\partial U}{\partial\theta} + D''\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\right] + \\ & + \frac{a'b'c'}{4k\,abc\,\rho}(DD'' - D'^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta} - U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right). \end{aligned}$$

Ed ora, sostituendo per

$$DD'' - D'^2 , \quad \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} , \quad \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v}$$

i valori dati dalla equazione (15) di Gauss e dalle (16) di Codazzi, abbiamo per Ω un'espressione lineare in D, D', D''

$$\Omega = \alpha D + \beta D' + \gamma D'' + \delta .$$

Troviamo subito

$$\alpha = \gamma = 0$$

e per β, δ le formole

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\sqrt{abc}\sqrt{\rho}\,\beta = (u+v)^2\rho \,.\, \delta = V' - U' + \frac{\partial\log\rho}{\partial u}U - \frac{\partial\log\rho}{\partial v}V + \frac{2}{u+v}(U - V) + \\ + \frac{2\,a'b'c}{k(u+v)^2\rho}\left(U\frac{\partial V}{\partial\theta} - V\frac{\partial U}{\partial\theta}\right). \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione, moltiplicata per

$$abc\,\rho\,(u+v)^2 ,$$

diventa

$$(\mathrm{V}'-\mathrm{U}')\,[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2\,(1-uv)^2]+$$
$$+\,2\,\mathrm{U}\,[b^2c^2v(1+uv)\;+a^2c^2(u-v)\;-a^2b^2v(1-uv)]\;-$$
$$-\,2\,\mathrm{V}\,[b^2c^2u(1+uv)\;-a^2c^2(u-v)\;-a^2b^2u(1-uv)]\;+$$
$$+\,2\,\frac{abc\,a'b'c'}{k}\left(\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial\theta}-\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\theta}\right);$$

essa è identicamente nulla, come risulta dal calcolo eseguito al § 17 per determinare la quantità ivi indicata con N.

Se ne conclude che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono tutti nulli e per ciò anche Ω, onde:

Le equazioni (II) *formano un sistema completamente integrabile*. La sua soluzione generale θ contiene una costante arbitraria, che si fisserà dando il valore iniziale θ_0 di θ per un sistema iniziale $(u_0 v_0)$ di valori delle variabili.

§ 38.

Le trasformazioni B_k per le deformate dell'iperboloide.

Abbiamo così stabilite le proprietà fondamentali che assicurano l'esistenza delle trasformazioni B_k per le deformate generali dell'iperboloide ad una falda, ed ora possiamo dedurne tutte le proprietà già dimostrate per le deformate del paraboloide. Così tutti i teoremi dal § 29 al 34 sussistono ancora per le deformate dell'iperboloide. Sarebbe inutile ripeterne gli enunciati; solo converrà indicare i punti ove le dimostrazioni, a causa delle formole diverse, debbono essere modificate.

1.° Per dimostrare che la superficie S e la sua trasformata S_1 formano le due falde focali della congruenza FF_1, generata dalle rette che ne congiungono i punti corrispondenti, bisogna verificare che si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} l & , \; m & , \; 0 \\ \mathrm{L}_0+\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} & , \; \mathrm{M}_0+\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} & , \; \mathrm{D}l+\mathrm{D}'m \\ \mathrm{P}_0+\dfrac{\partial l}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} & , \; \mathrm{Q}_0+\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} & , \; \mathrm{D}'l+\mathrm{D}''m \end{vmatrix},$$

che cioè si ha identicamente

$$(\mathrm{D}l\;+\mathrm{D}'m)\left[(l\mathrm{Q}_0-m\mathrm{P}_0)+\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right]=$$
$$=(\mathrm{D}'l+\mathrm{D}''m)\left[(l\mathrm{M}_0-m\mathrm{L}_0)+\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}\right].$$

Ora si ha, per la (72) § 17 (pag. 51)

$$l\,(l\mathrm{M}_0-m\mathrm{L}_0)=m\,(l\,\mathrm{Q}_0-m\mathrm{P}_0)$$

e inoltre

$$l=(u+v)\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}}\;,\;\; m=(u+v)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}},$$

e la identità da dimostrarsi, osservando le equazioni fondamentali (II), diventa

$$\mathrm{DU}\,(l\mathrm{Q}_0-m\mathrm{P}_0)-\mathrm{D}''\mathrm{V}\,(l\mathrm{M}_0-m\mathrm{P}_0)+\frac{a'b'c'}{k\,(u+v)^2\rho}(\mathrm{DU}^2-\mathrm{D}''\mathrm{V}^2)\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)=0.$$

Questa, a causa della relazione

$$\frac{l\mathrm{Q}_0-m\mathrm{P}_0}{\mathrm{U}}=\frac{l\mathrm{M}_0-m\mathrm{L}_0}{\mathrm{V}},$$

può scriversi anche

$$(\mathrm{DU}^2-\mathrm{D}''\mathrm{V}^2)\left[\frac{1}{\mathrm{V}}(l\mathrm{M}_0-m\mathrm{L}_0)+\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\right]=0;$$

essa trovasi verificata a causa della identità (76) § 17 (pag. 53).

2.° Per calcolare i coseni di direzione $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$ della normale alla S_1 (cf. § 30) si ponga

$$\mathrm{X}_1=\mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial v}+\mathrm{CX}\;\;\text{ecc.}$$

Procedendo come al § 30, si trovano le proporzioni

$$\mathrm{A}:\mathrm{B}:\mathrm{C}=(\mathrm{D}l+\mathrm{D}'m)(\mathrm{F}l+\mathrm{G}m):-(\mathrm{D}l+\mathrm{D}'m)(\mathrm{E}l+\mathrm{F}m):$$
$$:(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\left[l\mathrm{M}_0-m\mathrm{L}_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right],$$

e servendosi della identità già sopra ricordata (76) § 17, e del valore di

$\frac{\partial\theta}{\partial u}$ dato dalla prima equazione fondamentale (II), si vede che i tre secondi termini della proporzione hanno il fattor comune $D l + D' m$ e resta

$$A : B : C = -(Fl + Gm) : (El + Fm) : \frac{2i\sqrt{abc}\,\rho^{\frac{3}{2}}}{(u+v)^2 m}(lM_0 - mL_0).$$

I valori di A, B, C non contengono quindi esplicitamente D, D', D'', onde segue (cf. § 30) che la giacitura relativa dei piani π, π_1 tangenti a S, S_1 (piani focali della congruenza) rimane la stessa per qualunque flessione di S. Dopo ciò basta continuare come al § 30 per riconoscere che le superficie trasformate S_1 soddisfano alle condizioni *b)* del § 25.

Segue di qui, come al § 31, che le trasformazioni B_k per le deformate dell'iperboloide conservano le linee asintotiche, ed ancora segue che, applicate a superficie rigate, danno sempre come trasformate altrettante rigate.

Anche la seconda dimostrazione per la conservazione delle asintotiche (§ 32) conserva il suo valore, appoggiandosi sulle formole (12), e da essa si traggono le medesime conseguenze come al § 33.

3.° Per quanto riguarda infine la corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti sopra S, S_1 (cf. § 34), questa si tradurrà da prima nella equazione

$$D\left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} - D''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0.$$

Ma se si prende il valore di u_1 dato dalla (89) § 20 (pag. 60) e si indica per brevità con ψ il denominatore

$$\psi = \frac{b}{b'}\left[\frac{a}{a'}(1-uv) + \frac{c}{c'}(1+uv)\right]\cos\theta + \frac{ac}{a'c'}\left[u - v - \frac{b}{b'}(u+v)\right](1+\operatorname{sen}\theta),$$

si trovano facilmente le formole

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{2abc}{a'b'c'}\,\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\psi^2}\,V\ ,\quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{2abc}{a'b'c'}\,\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\psi^2}\,U,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\theta} = \pm k\,\frac{abc(1+\operatorname{sen}\theta)}{a'^2b'^2c'^2\psi^2}(u+v)^2\rho,$$

ciò che riduce la identità da dimostrarsi alla seguente

$$D\left[2U - \frac{k}{a'b'c}(u+v)^2\rho\frac{\partial\theta}{\partial v}\right]\frac{\partial\theta}{\partial v} - D''\left[2V - \frac{k}{a'b'c'}(u+v)^2\rho\frac{\partial\theta}{\partial u}\right]\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0.$$

Ed ora, facendo uso delle equazioni fondamentali (II), questa si converte nell'altra

$$D\left[U^2 - \frac{(u+v)^4}{4abc}\rho(D'U + D''V)^2\right] - D''\left[V^2 - \frac{(u+v)^4}{4abc}\rho(DU + D'V)^2\right] =$$

$$= (DU^2 - D''V^2)\left[1 + \frac{(u+v)^4}{4abc}\rho(DD'' - D'^2)\right] = 0,$$

la quale trovasi identicamente verificata a causa della equazione di Gauss (15) § 35.

CAPITOLO III.

Le trasformazioni B_k per le deformate delle altre specie di quadriche

§ 39.

Considerazioni preliminari — Enunciato di un problema generale.

Nelle ricerche sulle deformate delle quadriche sviluppate fin qui si è trattato *esplicitamente* solo il caso delle quadriche reali rigate: il paraboloide iperbolico e l'iperboloide ad una falda.

Ma è ben chiaro che tutta la parte analitica della trattazione, e quindi anche il contenuto geometrico, conserva inalterato il suo valore per quadriche di qualunque specie, reali od immaginarie. Cominciamo qui ad enunciare, sotto altra forma, i risultati principali della nostra teoria, senza preoccuparci dapprima della distinzione fra reale ed immaginario. Sarà utile al nostro scopo di collocarci da un punto di vista più generale e riguardare le nostre trasformazioni come trasformazioni *infinitiformi* degli *elementi piani* o *faccette* dello spazio. Seguendo i concetti di Lie, riguarderemo come elemento piano l'insieme di un punto P e di un piano π incidenti, e poichè il più delle volte basterà considerare del piano π solo un intorno infinitesimo del punto P, diremo anche l'elemento una faccetta, di cui P sarà il centro e π il piano.

Le faccette f dello spazio formano una varietà a cinque dimensioni, dipendendo ogni faccetta da cinque coordinate indipendenti, per le quali, riferendoci ad assi ortogonali, prenderemo colle notazioni di Monge le quantità

$$x, y, z, p, q.$$

Qui x, y, z indicano le coordinate del centro della faccetta, mentre

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

danno i coseni di direzione della normale al suo piano.

Ora consideriamo una trasformazione *infinitiforme* delle faccette dello spazio, che ad ogni faccetta $f \equiv (x, y, z, p, q)$ faccia corrispondere ∞^1 faccette $f' \equiv (x', y', z', p', q')$.

Una tale trasformazione sarà analiticamente rappresentata da *quattro* relazioni fra le coordinate di f e f':

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, p, q \;;\; x', y', z', p', q') = 0 \\ F_2(x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q') = 0 \\ F_3(x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q') = 0 \\ F_4(x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q') = 0 . \end{cases}$$

Se facciamo percorrere ad $f \equiv (x, y, z, p, q)$ le ∞^2 faccette piane di una superficie $z = z(x, y)$, ove dunque

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

le corrispondenti faccette f' formeranno una tripla infinità ed *in generale sarà impossibile distribuire queste ∞^3 faccette f' in una semplice infinità di sistemi ∞^2 costituenti altrettante superficie* S'.

Perchè ciò abbia luogo occorre e basta che, ponendo nelle (1) per z, p, q le loro espressioni per x, y, convenienti alla superficie S, ed eliminando dalle (1) le variabili x, y, le due equazioni risultanti in x', y', z', p', q'

$$\begin{cases} \Phi_1(x', y', z', p', q') = 0 \\ \Phi_2(x', y', z', p', q') = 0 \end{cases}$$

conducano ad un sistema completamente integrabile (o in involuzione)

$$\begin{cases} \Phi_1\left(x', y', z', \dfrac{\partial z'}{\partial x'}, \dfrac{\partial z'}{\partial y'}\right) = 0 \\ \Phi_2\left(x', y', z', \dfrac{\partial z'}{\partial x'}, \dfrac{\partial z'}{\partial y'}\right) = 0 . \end{cases}$$

In tal caso si dirà anche, per abbreviare, che la trasformazione infinitiforme data dalle (1) trovasi in involuzione colla superficie S.

Ciò premesso, pensiamo la superficie S come flessibile ed inestendibile, ed immaginiamo che nelle deformazioni di S ciascuna sua faccetta piana trasporti seco, in sistema invariabile, le ∞^1 faccette corrispondenti f'. Ogni configurazione di S darà così una trasformazione (1) corrispondente delle faccette dello spazio, e possiamo proporci il problema generale seguente:

Trovare tutti i casi nei quali, deformando comunque la superficie S, *la trasformazione infinitiforme* (1) *corrispondente rimane sempre in involuzione colla superficie.*

§ 40.

Principii generali per le trasformazioni.

Noi ci limiteremo qui al solo enunciato della questione generale ed osserveremo che la nostra teoria delle trasformazioni per le deformate delle quadriche corrisponde appunto ad una notevole soluzione del problema ora enunciato, che si ottiene colla costruzione seguente:

Prendasi per superficie S *una qualunque quadrica* Q *(reale od immaginaria) e, scelta a piacere una seconda quadrica* Q' *confocale a* Q, *si faccia corrispondere ad ogni faccetta piana f di* Q *una semplice infinità di faccette f', coi centri distribuiti sulla conica sezione del piano π di f colla quadrica confocale* Q', *ed i cui piani π' inviluppino il cono circoscritto dal centro di f alla quadrica stessa* Q'.

Per ogni deformazione della quadrica Q in una superficie S le ∞^3 faccette f' corrispondenti si distribuiscono in effetto nelle faccette di ∞^1 superficie S', ed ha luogo di più la proprietà che ciascuna superficie *trasformata* S' è applicabile sulla quadrica fondamentale Q, mentre la legge di applicabilità fra S e S' è data dall'affinità d'Ivory fra le due quadriche confocali Q, Q'.

Collochiamoci ora dal punto di vista reale e domandiamoci quando avverrà che siano reali insieme la superficie S e le sue trasformate S'. E qui osserviamo subito che non è affatto necessaria per questo la *realità* della quadrica fondamentale Q. L'esempio più semplice e notevole delle superficie reali pseudosferiche, applicabili sulla sfera immaginaria, basta per dimostrarlo chiaramente. Le trasformazioni reali corrispondenti sono allora le trasformazioni di Bäcklund, primo esempio delle trasformazioni che nel presente libro vengono estese alle deformate di tutte le quadriche.

Ritornando alla questione sopra proposta, supponiamo però ora che la quadrica fondamentale Q sia *reale* e che sia S una sua deformata reale. Perchè risultino reali le superficie S' trasformate, è evidentemente necessario e sufficiente che siano reali le faccette f' trasformate, per la qual cosa:

1.° I piani tangenti della quadrica Q dovranno produrre sezioni (coniche) reali nella quadrica confocale Q'

2.° I coni circoscritti dai punti di Q alla quadrica Q' dovranno pur essere reali.

Per soddisfare insieme a queste due condizioni occorre e basta evidentemente assumere per quadrica Q' una quadrica reale rigata.

Dunque: *Per ottenere trasformazioni reali* B_k *delle deformate di una quadrica reale è necessario e sufficiente scegliere la quadrica confocale* Q_k *nella famiglia delle quadriche rigate.*

Si osservi che, se la quadrica fondamentale Q è *generale*, nel sistema confocale a Q esiste sempre una famiglia di quadriche rigate, e per ciò per quadriche generali si hanno sempre trasformazioni reali B_k. Per quadriche particolari (di rotazione) esamineremo caso per caso la questione negli sviluppi seguenti.

Ma vi ha un altro punto che importa qui di esaminare; esso riguarda la *specie dell'applicabilità* fra la superficie primitiva S e la sua trasformata S'. L'applicabilità di cui parliamo deve intendersi nel senso che i due ds^2 sono analiticamente equivalenti; ma tanto può darsi che la corrispondenza d'applicabilità fra S e S' abbia luogo fra le loro regioni *reali*, quanto invece che alla regione reale dell'una superficie ne corrisponda una immaginaria dell'altra. Nel primo caso diremo che le due superficie sono *realmente* applicabili (in senso stretto), nell'altro che l'applicabilità è soltanto *ideale* [1]).

Per distinguere quando ha luogo il primo e quando il secondo caso basta ricordare che la legge d'applicabilità è data qui dalla affinità d'Ivory fra Q e Q'. Ora se la prima quadrica Q è rigata, come la seconda Q', esse si corrispondono (nell'affinità d'Ivory) per regioni reali. Se invece la quadrica Q è a punti ellittici, la detta affinità fa corrispondere alla regione reale di Q' una regione immaginaria di Q. Per ciò adunque: *Nelle nostre congruenze* W *a falde focali* S, S' *applicabili sopra la quadrica* Q, *l'applicabilità di* S, S' *è reale se* Q *è a punti iperbolici, ideale quando* Q *è a punti ellittici.*

---

1) La distinzione fra le due specie di applicabilità, che qui diciamo reale o ideale, appare la prima volta nelle ricerche del geometra russo Peterson. Cf. specialmente la memoria: *Sur la déformation des surfaces du second ordre* (Traduit du russe par M. E. Davaux). Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 2.e Serie T. VII.

Se si ricorda la relazione che esiste fra le congruenze W e le deformazioni infinitesime delle superficie (vol. II § 242), ne risulta che la deformata S della quadrica Q è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale ciascun suo punto si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente alla S'. Possiamo quindi enunciare il teorema seguente: *Dai punti di una quadrica* Q *si circoscrivano i coni* Γ *ad una quadrica confocale* Q', *e siano* Γ' *i coni supplementari dei coni* Γ, *che immaginiamo invariabilmente legati alla quadrica* Q *nelle sue flessioni. Una qualunque deformata* S *della quadrica* Q *è suscettibile di* ∞^1 *deformazioni infinitesime nelle quali i punti di* S *si spostano secondo le generatrici dei coni* Γ'. È da questa singolare proprietà, che conservano le quadriche in tutte le loro flessioni, che dipende l'esistenza delle relative congruenze W e delle trasformazioni B_k di cui ci occupiamo.

Dopo queste considerazioni generali ci volgeremo ora alla ricerca effettiva delle trasformazioni reali B_k per le deformate delle varie specie di quadriche. Le formole generali svolte nei due capitoli precedenti ci daranno il materiale analitico a ciò necessario, ma dovremo adattarlo alla trattazione dei singoli casi per presentare ogni volta i risultati finali sotto la forma reale definitiva che abbiamo in vista.

§ 41.

Le trasformazioni B_k delle deformate del paraboloide ellittico.

Cominciamo le nuove ricerche sulle deformate delle quadriche reali prendendo a considerare il *paraboloide ellittico*, del quale scriveremo l'equazione sotto la forma normale

$$\frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}=2z_0\,;$$

qui le costanti $p\,,q$ si intendono positive e, per fissare le idee, si supporrà per es.

$$p\leqq q\,.$$

Le formole relative a questa quadrica si deducono da quelle del § 5 relative al paraboloide iperbolico, cangiandovi q in $-q$, indi $\sqrt{q}$ in $i\sqrt{q}$. In particolare le formole (7) § 5 (pag. 11) daranno tutta la regione reale del paraboloide ellittico, assumendovi le variabili $u\,,v$ *coniugate immagi-*

narie. Separando il reale dall'immaginario, poniamo

$$u=\frac{\alpha-i\beta}{2}\ ,\ \ v=\frac{\alpha+i\beta}{2}\,,$$

con $\alpha\,,\beta$ reali, e le citate formole diventeranno

$$x_0=\sqrt{p}\,.\,\alpha\ ,\ \ y_0=\sqrt{q}\,.\,\beta\ ,\ \ z_0=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\,;$$

pel ds_0^2 di P_0 avremo

$$ds_0^2=(\alpha^2+p)\,d\alpha^2+2\,\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(\beta^2+q)\,d\beta^2\,. \tag{2}$$

Conformemente alle considerazioni generali del paragrafo precedente, dobbiamo ora scegliere nel sistema confocale a P_0 una quadrica rigata, cioè un paraboloide iperbolico P_k, la cui equazione scriveremo

$$\frac{x^2}{k-p}-\frac{y^2}{q-k}+2z-k=0\,,$$

ed il parametro k potrà avere un valore qualunque nell'intervallo $(p\,,q)$

$$p\leqq k\leqq q\,.$$

Se poniamo

$$p'=k-p\ ,\ \ q'=q-k\,, \tag{2*}$$

saranno $p'\,,q'$ positivi e potremo dedurre le formole pel caso attuale da quelle al § 5, cangiando in queste rispettivamente

$$\sqrt{p}\ ,\ \ \sqrt{q}\ ,\ \ \ \sqrt{p'}\ ,\ \ \sqrt{q'}$$

per es. in

$$\sqrt{p}\ ,\ \ i\sqrt{q}\ ,\ \ -i\sqrt{p'}\ ,\ \ i\sqrt{q'}\,.$$

In particolare le formole per U, V, W date dalle (18) § 5 (pag. 13), colla determinazione superiore dei segni, si muteranno qui nelle seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
U&=2\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2u^2+2\left(\sqrt{p'q'}-i\sqrt{pq}\right)\lambda u-\frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\\
V&=2\left(\sqrt{pq'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2v^2-2\left(\sqrt{p'q'}+i\sqrt{pq}\right)\lambda v-\frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\\
W&=2\lambda\left[i\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda+i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda\right].
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Siccome u, v sono immaginarie coniugate, si vede che se al parametro λ si dà un valore *puramente immaginario*, la quantità W sarà reale ed U, V immaginarie coniugate. Adottando, per abbreviare, la notazione $\overline{A}$ per indicare la quantità coniugata di una quantità A complessa qualunque, avremo dunque

$$\overline{u}=v \ , \ \overline{v}=u \ , \ \overline{\lambda}=-\lambda \ , \ \overline{U}=V \ , \ \overline{V}=U \ , \ \overline{W}=W \ ,$$

indi anche

$$\overline{l}=\frac{\overline{U}}{\overline{W}}=m \ , \ \overline{m}=\frac{\overline{V}}{\overline{W}}=l \ .$$

Consideriamo ora una qualunque deformata *reale* S del paraboloide ellittico P_0. Le quantità x, y, z saranno reali e le loro derivate $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ ecc. coniugate immaginarie, come le variabili u, v. Le formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \ \text{ecc.}$$

dimostrano che x_1, y_1, z_1 saranno reali, e per ciò la superficie trasformata S_1 sarà pure reale. Per ottenere dunque delle trasformazioni reali B_k per le deformate del paraboloide ellittico basterà poter soddisfare alle equazioni differenziali fondamentali (I) § 27 (pag. 81) ove faremo $\varepsilon=+1$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\,V + \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(DU+D'V) \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\,U + \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(D'U+D''V), \end{cases}$$

assumendo per λ un valore puramente immaginario.

Ora, essendo la superficie S reale, tale dovrà essere anche la sua seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \ ,$$

e si avrà per ciò

$$\overline{D}=D'' \ , \ \overline{D'}=D' \ , \ \overline{D''}=D \ .$$

D'altra parte la quantità H data dalla (9) § 5 (pag. 11), ove si cangi q in $-q$,

$$\mathrm{H} = p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - pq = -[q\alpha^2 + p\beta^2 + pq]$$

è essenzialmente negativa e noi porremo

$$\mathrm{H} = -h^2 \ , \ \sqrt{\mathrm{H}} = ih \ .$$

Con ciò le (4) diventano

$$(4^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial (i\lambda)}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,V + \dfrac{1}{2kh}(DU+D'V) \\[2ex] \dfrac{\partial (i\lambda)}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,U + \dfrac{1}{2kh}(D'U+D''V) \ . \end{cases}$$

I loro secondi membri sono immaginarii coniugati *per* $i\lambda$ *reale*, come le variabili u, v. È dunque possibile soddisfarvi in effetto con un valore reale di $i\lambda$, che resta inoltre *inizialmente* arbitrario.

Così l'immaginario nelle formole precedenti è solo apparente, e basterebbe, per presentarle sotto forma reale, introdurvi le variabili reali α, β. Ne concludiamo adunque, conformemente alle osservazioni più generali del § precedente:

Ogni superficie reale S *applicabile sul paraboloide ellittico generale* $(p<q)$ *ammette, per ogni valore del parametro* k *nell'intervallo* (p, q), *trasformazioni* B_k *reali.*

Ed osserviamo che anche i valori estremi $k=p, k=q$ sono permessi e danno luogo alle trasformazioni singolari.

§ 42.

Applicabilità ideale delle trasformate S_1 sul paraboloide.

Secondo la teoria generale, le superficie reali trasformate S_1 saranno applicabili sul paraboloide stesso P_0, nel senso che il loro ds_1^2 risulterà trasformabile in quello di P_0. Ma, per quanto abbiamo detto in generale al § 40, questa applicabilità sarà soltanto ideale. Questo andiamo ora a confermare più da vicino nel caso concreto attuale, ricercando l'effettiva espressione reale del ds_1^2.

Intanto cominciamo dall'osservare che, allorquando la prima falda focale S della nostra congruenza W, generata dalle congiungenti FF_1 i punti corrispondenti di S, S_1, si distende su P_0, i segmenti FF_1 si dispongono coi loro estremi F_1 sul paraboloide iperbolico confocale P_k e ne ricoprono la regione reale. Ma l'affinità d'Ivory fra i due paraboloidi

$$P_0)\qquad \frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}=2z_0$$

$$P_k)\qquad -\frac{x^2}{k-p}+\frac{y^2}{q-k}=2z-k$$

fa corrispondere i loro punti secondo le formole (§ 11)

$$x_0=\sqrt{\frac{p}{p-k}}\,x\ ,\ y_0=\sqrt{\frac{q}{q-k}}\,y\ ,\ z_0=z-\frac{k}{2}\,,$$

ovvero

$$x_0=i\sqrt{\frac{p}{p'}}\,.\,x\ ,\ y_0=\sqrt{\frac{q}{q'}}\,.\,y\ ,\ z_0=z-\frac{k}{2}\,,$$

che cangiano la regione reale di P_k in una immaginaria di P_0.

Per avere poi sotto forma effettiva reale il ds_1^2 delle superficie trasformate S_1 si osservi che, dai calcoli eseguiti ai §§ 10 s. s., risulta

(5) $$ds_1^2=(p-q+4v_1^2)\,du_1^2+2\,(p-q+4u_1v_1)\,du_1\,dv_1+(p-q+4u_1^2)\,dv_1^2\,,$$

dove le variabili u_1, v_1 sono espresse per u, v colle formole (45) § 11 (pag. 82), nelle quali però dovremo cangiare (§ 41)

$$\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{q}\ ,\ \sqrt{p'}\ ,\ \sqrt{q'}$$

in

$$\sqrt{p}\ ,\ i\sqrt{q}\ ,\ -i\sqrt{p'}\ ,\ i\sqrt{q'}\ ;$$

esse diventano per ciò

(6) $$\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v)+i\sqrt{pq'}\,(u-v)-i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\lambda}{2\left[i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda-\sqrt{pq'}\,(u+v)\,\lambda+i\sqrt{pq}\right]} \\ v_1=\dfrac{1}{2\lambda}\,. \end{cases}$$

Poichè λ è un immaginario puro, ed u, v sono immaginarie coniugate, si vede che le variabili u_1, v_1 sono puramente immaginarie; poniamo adunque

$$u_1=i\,\frac{\beta_1+\alpha_1}{2}\ ,\ v_1=i\,\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$$

con α_1, β_1 reali. La (5) diventa nelle nuove variabili

(7) $$ds_1^2=(\alpha_1^2+q)\,d\alpha_1^2-2\,\alpha_1\beta_1\,d\alpha_1\,d\beta_1+(\beta_1^2-p)\,d\beta_1^2$$

e dà il ds_1^2 sotto forma reale. I due elementi lineari (2), (7) si trasformano l'uno nell'altro colle formole

$$\alpha_1=\beta\ ,\ \beta_1=i\alpha\,,$$

che implicano l'immaginario, onde le superficie reali d'elemento lineare (7) debbono dirsi applicabili idealmente sul paraboloide ellittico. Abbiamo dunque stabilito il risultato:

Ogni deformata reale del paraboloide ellittico appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 *congruenze rettilinee reali W, le cui seconde falde focali sono applicabili idealmente sul paraboloide stesso, ed hanno l'elemento lineare* (7).

Dimostreremo reciprocamente, nel prossimo paragrafo, che: *Ogni superficie reale applicabile idealmente sul paraboloide ellittico (d'elemento lineare* (7)*) dà luogo similmente, come prima falda focale, ad* ∞^2 *congruenze reali W, le cui seconde falde sono applicabili realmente sul paraboloide stesso.*

Così le trasformazioni B_k, applicate alle deformate del paraboloide ellittico, conducono sempre da una superficie applicabile realmente (idealmente) sul paraboloide ad una seconda applicabile invece idealmente (realmente), onde conviene ripetere un numero pari di volte queste trasformazioni se si vuole che la superficie iniziale e la finale si corrispondano per l'applicabilità colle regioni reali.

Abbiamo supposto fin qui il paraboloide generale ($p \neq q$). Che cosa avviene nel caso particolare del paraboloide rotondo? Allora si annulla l'intervallo (p, q) e resta per k un unico valore possibile

$$k=p=q\ .$$

Le nostre trasformazioni *reali* B_k si riducono in questo caso ad una sola: *la trasformazione complementare.* Ciò è ben chiaro geometricamente, poichè il paraboloide confocale P_k si restringe qui all'asse (cf. § 23). Analiticamente si conferma esaminando le formole (3) che, per essere qui

$$p=q\ ,\ p'=q'=0\quad k=p\,,$$

dànno

$$U=-2ip\lambda u\ ,\ U=-2ip\lambda v\ ,\ W=2ip\lambda\,,$$

e per ciò

$$l=-u\ ,\ m=-v\,.$$

Così le formole che definiscono la superficie trasformata S_1 diventano

$$x_1 = x - u\frac{\partial x}{\partial u} - v\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.}$$

e coincidono con quelle che danno la complementare di S [1]).

§ 43.

Trasformazioni B_k delle superficie applicabili idealmente sul paraboloide.

A completare le ricerche del § precedente ci resta ancora da invertire i risultati ottenuti e provare che ogni superficie d'elemento lineare (7) ammette ∞^2 trasformazioni B_k in superficie applicabili realmente sul paraboloide ellittico.

Sia dunque S una superficie reale d'elemento lineare (7), o, ciò che è lo stesso, col ds^2 dato dalle formole del § 5, ove si cangi q in $-q$ e si assumano le variabili u, v puramente immaginarie, ciò che esprimiamo nelle nostre notazioni così

$$\bar{u} = -u\,, \quad \bar{v} = -v\,. \tag{8}$$

Applichiamo a questa superficie S una trasformazione B_k, colla costante k presa ancora fra i limiti p e q. Vogliamo che per la superficie trasformata S_1 data dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.},$$

si verifichino le condizioni seguenti:

1.° la superficie S_1, sia reale

2.° essa sia applicabile sulla regione reale del paraboloide.

La prima condizione esige, secondo le (8), che si abbia

$$\bar{l} = -l\,, \quad \bar{m} = -m\,; \tag{9}$$

la seconda poi si traduce nell'altra che le variabili u_1, v_1 definite dalle

[1]) Le linee inviluppate dai raggi della congruenza sono infatti le linee $\frac{u}{v} = \text{cost.}^{\text{te}}$, ovvero $\frac{\alpha}{\beta} = \text{cost.}^{\text{te}}$, cioè a dire le trasformate dei meridiani $\frac{x_0}{y_0} = \text{cost.}^{\text{te}}$ del paraboloide.

(6) siano coniugate, che si abbia cioè

$$\bar{\lambda} = \frac{i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda}{\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v) - i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\lambda}\,. \tag{10}$$

Poniamo

$$A = \sqrt{pq}\,(4uv+k)\,,\quad C = \sqrt{pq}\,,\quad B = \sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v) \tag{11}$$
$$\bar{B} = -\sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v)\,,$$

e la (10) prende la forma bilineare in $\lambda, \bar{\lambda}$

$$A\lambda\bar{\lambda} + B\lambda + \bar{B}\bar{\lambda} + C = 0\,, \tag{12}$$

dove è da notarsi che i coefficienti estremi A, C sono reali ed i medii B, $\bar{B}$ coniugati immaginarii, a causa delle (8). Notiamo ancora che il determinante

$$B\bar{B} - AC = -pq\,(4uv+k) - qp'\,(u+v)^2 - pq'\,(u-v)^2$$

è eguale identicamente a

$$B\bar{B} - AC = k[p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - pq] = kH\,. \tag{13}$$

Esso è dunque positivo, poichè k è positiva ed è pure positiva H [1]).

Dimostriamo in primo luogo che, verificata la relazione bilineare (12) fra $\lambda, \bar{\lambda}$, si troveranno pure soddisfatte le (9), ossia si avrà

$$\frac{\bar{U}}{\bar{W}} + \frac{U}{W} = 0\,,\quad \frac{\bar{V}}{\bar{W}} + \frac{V}{W} = 0. \tag{14}$$

Prendasi la prima delle (14) che, avendo riguardo ai valori di U, W dati dalle (3) ed osservando che

$$W = 2i\lambda\,(B\lambda + C)\,,$$

[1]) Ponendo come al § 42

$$u = i\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} \quad v = i\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}\,,$$

si ha

$$H = q\beta_1^2 - p\alpha_1^2 - pq\,,$$

quantità positiva perchè dà l'E G — F^2 dell'elemento lineare (7).

si scrive

$$(15)\qquad \frac{2(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\bar\lambda^2u^2-2(\sqrt{p'q}+i\sqrt{pq})\bar\lambda u-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\bar\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})}{\bar\lambda(\bar{B}\bar\lambda+C)}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\lambda^2u^2+2(\sqrt{p'q}-i\sqrt{pq})\lambda u-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})}{\lambda(B\lambda+C)}.$$

Ora dalla (12) si ha

$$(16)\qquad \bar\lambda=-\frac{B\lambda+C}{A\lambda+\bar{B}},$$

indi per la (13)

$$\bar{B}\bar\lambda+C=-\frac{kH\lambda}{A\lambda+\bar{B}},$$

da cui

$$(16^*)\qquad \bar\lambda(\bar{B}\bar\lambda+C)=\frac{kH\lambda(B\lambda+C)}{(A\lambda+\bar{B})^2}.$$

Dopo ciò, sostituendo anche nel numeratore del primo membro della (15) il valore (16) di $\bar\lambda$, la (15) stessa si riduce all'altra

$$2(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})u^2(B\lambda+C)^2+2(\sqrt{p'q}+i\sqrt{pq})u(A\lambda+\bar{B})(B\lambda+C)-$$
$$-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})(B\lambda+C)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})(A\lambda+\bar{B})^2=$$
$$=kH\left\{2(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\lambda^2u^2+2(\sqrt{p'q}-i\sqrt{pq})\lambda u-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\right\};$$

ora questa identità fra i due polinomii di 2° grado in λ si verifica facilmente, ricordando i valori (11) di A, B, C e i valori (2^*) di p', q'. In modo affatto simile si prova che anche la seconda delle (14) è una conseguenza della (12).

Dopo ciò non abbiamo più altro da dimostrare che è possibile soddisfare alle equazioni differenziali (4) per λ, in guisa che l'espressione bilineare

$$\Omega=A\lambda\bar\lambda+B\lambda+\bar{B}\bar\lambda+C$$

si annulli. Per ciò scriviamo, insieme alle (4), le equazioni per la coniugata $\bar\lambda$, avvertendo che H è positiva come si è visto, che inoltre,

u, v essendo puramente immaginarii e la superficie S reale per ipotesi, sono reali D, D', D''; così cangiando nelle (4) i in $-i$ si ha

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial u}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{kH}\bar{V}-\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D\bar{U}+D'\bar{V}) \\[2ex] \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial v}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{kH}\bar{U}-\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D'\bar{U}+D''\bar{V}). \end{cases}$$

La nostra asserzione si riduce a provare che il sistema differenziale formato dalle (4) e (17), *insieme all'equazione bilineare* $\Omega=0$, formano un sistema completo, che cioè, in forza delle equazioni stesse, si annullano le derivate di Ω. Prendiamo p. e.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}=\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\Omega}{\partial\bar\lambda}\frac{\partial\bar\lambda}{\partial u}+\frac{\partial A}{\partial u}\lambda\bar\lambda+\frac{\partial B}{\partial u}\lambda+\frac{\partial\bar{B}}{\partial u}\bar\lambda+\frac{\partial C}{\partial u},$$

che per le formole precedenti diventa

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u}=(A\bar\lambda+B)\left[\dfrac{i\sqrt{pq}}{kH}V+\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(DU+D'V)\right]+ \\[2ex] \quad+(A\lambda+\bar{B})\left[\dfrac{i\sqrt{pq}}{kH}\bar{V}-\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D\bar{U}+D'\bar{V})\right]+ \\[2ex] \quad+4\sqrt{pq}\,v\lambda\bar\lambda+(\sqrt{pq'}+i\sqrt{qp'})\lambda-(\sqrt{pq'}-i\sqrt{qp'})\bar\lambda. \end{cases}$$

Ed ora, per le (14), si ha

$$\frac{\bar{U}}{U}=\frac{\bar{V}}{V}=-\frac{\bar{W}}{W}=\frac{\bar\lambda(\bar{B}\bar\lambda+C)}{\lambda(B\lambda+C)},$$

od anche per la (16^*)

$$\frac{\bar{U}}{U}=\frac{\bar{V}}{V}=\frac{kH}{(A\lambda+\bar{B})^2}.$$

Ma si ha dalla (16)

$$(19)\qquad A\bar\lambda+B=\frac{\bar{B}B-AC}{A\lambda+\bar{B}}=\frac{kH}{A\lambda+\bar{B}}$$

onde

$$\frac{\overline{\mathrm{U}}}{\mathrm{U}}=\frac{\overline{\mathrm{V}}}{\mathrm{V}}=\frac{\mathrm{A}\overline{\lambda}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\lambda+\overline{\mathrm{B}}}\,.$$

In forza di questa si elidono i termini in D, D', D'' e resta

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}=2\,\frac{i\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}(\mathrm{A}\overline{\lambda}+\mathrm{B})\mathrm{V}+4\sqrt{pq}\,v\lambda\overline{\lambda}+\left(\sqrt{pq'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda-\left(\sqrt{pq'}-i\sqrt{qp'}\right)\overline{\lambda}.$$

Osservando la (16) e la (19), nonchè il valore (3_2) di V, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\lambda+\overline{\mathrm{B}})\,\frac{\partial\Omega}{\partial u}=2i\sqrt{pq}\Big[&2\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2v^2-2\left(\sqrt{p'q}+i\sqrt{pq}\right)\lambda v-\\ &-\frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\Big]\\ -4\sqrt{pq}\,v\lambda(\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C})+&\left(\sqrt{pq'}+i\sqrt{qp'}\right)\lambda(\mathrm{A}\lambda+\overline{\mathrm{B}})+\left(\sqrt{pq'}-i\sqrt{qp'}\right)(\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C})\,.\end{aligned}$$

Il polinomio di 2° grado in λ nel secondo membro è identicamente nullo, e per ciò $\frac{\partial\Omega}{\partial u}=0$. Similmente si prova che anche $\frac{\partial\Omega}{\partial v}=0$.

Dopo ciò arriviamo al termine delle nostre deduzioni osservando che, per quanto si è dimostrato, basta integrare le equazioni (4) in λ per modo che la condizione $\Omega=0$ sia soddisfatta *inizialmente*, per un particolare sistema di valori (u_0, v_0) di u, v, chè allora sarà soddisfatta per tutti i valori di u, v. Ma per valori fissi di u, v la $\Omega=0$ è, nel piano della variabile complessa λ, l'equazione di un circolo, e questo circolo è *reale*, poichè il determinante

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}-\mathrm{AC}=k\mathrm{H}$$

è positivo, come si è visto. Basta dunque scegliere per valore iniziale λ_0 di λ l'affissa di un punto reale di questo circolo. Ne segue che, per ogni valore di k nell'intervallo (p, q), avremo ∞^1 superficie *reali* S_1 trasformate di S ed applicabili sulla regione reale del paraboloide ellittico. Questo è appunto il teorema enunciato nel § 42.

Aggiungiamo che il procedimento ed i calcoli sviluppati nel presente paragrafo si potranno applicare in varii altri casi, la cui trattazione potremo abbreviare, riferendoci alle proprietà qui esposte in tutti i particolari.

§ 44.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide a due falde.

Passiamo ora alle quadriche *a centro* a punti ellittici, cominciando dall'iperboloide a due falde Q_0, di cui scriveremo l'equazione

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

e supporremo, per fissare le idee,

$$b^2\leq c^2.$$

Le formole relative a questo caso si dedurranno da quelle al § 16 per l'iperboloide ad una falda, cangiando in queste b in ib; così le formole (58) § 16 (pag. 47) diventano

$$x_0=a\,\frac{1+uv}{u+v}\,,\ y_0=ib\,\frac{u-v}{u+v}\,,\ z_0=c\,\frac{1-uv}{u+v}$$

e mostrano che, per avere la regione reale di questo iperboloide, conviene assumere le variabili

$$u=\frac{1+i\,\dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}}\,,\ v=\frac{1-i\,\dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}}$$

immaginarie coniugate.

Prendiamo ora l'iperboloide confocale Q_k *ad una falda* (cf. § 40) di equazione

$$\mathrm{Q}_k)\ \ \frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{k-b^2}-\frac{z^2}{c^2-k}=1\,,$$

ove il parametro k giacerà nell'intervallo (b^2, c^2)

$$b^2\leq k\leq c^2\,,$$

e introduciamo in fine le quantità reali positive (semi-assi di Q_k)

$$a'=\sqrt{a^2+k}\,,\ b'=\sqrt{k-b^2}\,,\ c'=\sqrt{c^2-k}\,.$$

Le formole (67) § 16 (pag. 49), ove si adottino i segni superiori e si cangi soltanto b in ib, diventano:

$$\begin{cases} U = \left(\dfrac{ac}{a'c'} - i\dfrac{b}{b'}\right) 2u\cos\theta + \left(i\dfrac{bc}{b'c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(i\dfrac{ab}{a'b'} - \dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1) \\ V = \left(-\dfrac{ac}{a'c'} - i\dfrac{b}{b'}\right) 2v\cos\theta + \left(i\dfrac{bc}{b'c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(v^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(i\dfrac{ab}{a'b'} + \dfrac{c}{c'}\right)(v^2+1) \\ W = 2\left[\dfrac{ac}{a'c'}(u-v)\cos\theta - i\dfrac{bc}{b'c'}(1+uv)\operatorname{sen}\theta + i\dfrac{ab}{a'b'}(1-uv)\right]. \end{cases}$$

Se si assume θ *reale*, e si ricorda che

$$\bar{u} = v \ , \quad \bar{v} = u \, ,$$

ne risulta

$$(\alpha) \qquad \bar{U} = -V \ , \quad \bar{V} = -U \ , \quad \bar{W} = -W \, ,$$

e perciò

$$(\alpha^*) \qquad \bar{l} = m \ , \quad \bar{m} = l \, .$$

Ciò posto, sia S una deformata qualunque *reale* del nostro iperboloide, onde avremo

$$(\beta) \qquad \bar{D} = D'' \ , \quad \bar{D}' = D' \ , \quad \bar{D}'' = D \, .$$

L'equazione (61) § 16 (pag. 47), che dà il valore di ρ, diventa qui

$$\rho = i\,\frac{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2b^2(1-uv)^2 - a^2c^2(u-v)^2}{abc(u+v)^2} \, ,$$

e si vede che il coefficiente di i nel secondo membro è reale positivo. Indicandolo con R^2, avremo

$$\rho = i\,R^2 \quad (R \text{ reale}) \, ,$$

e le equazioni differenziali fondamentali (II) § 36 (pag. 103), ove si faccia $\varepsilon = +1$ e si cangi b in ib diventano

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\,\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}\,V - i\,\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}\,(DU + D'V) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -i\,\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}\,U - i\,\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}\,(D'U + D''V). \end{cases}$$

A causa delle (α), (β), i loro secondi membri sono immaginarii co-

niugati per θ reale, ed è quindi possibile soddisfarvi con un valore reale di θ inizialmente arbitrario.

Dopo ciò le formole

$$x_1 = x + l\,\frac{\partial x}{\partial u} + m\,\frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{ecc.}$$

daranno per le (α^*) una superficie S_1 reale trasformata, onde concludiamo: *Ogni superficie reale* S *applicabile sulla regione reale dell'iperboloide generale a due falde possiede* ∞^2 *trasformate reali* S_1 *per trasformazioni* B_k.

Queste superficie trasformate S_1 avranno certo un elemento lineare trasformabile in quello dell'iperboloide a due falde; ma le considerazioni generali al § 40 dimostrano già *a priori* che la loro applicabilità sull'iperboloide Q_0 ha luogo soltanto sulla regione ideale.

Anche qui troviamo la forma reale effettiva del ds_1^2 di queste superficie S_1 ricorrendo alle formole d'applicabilità (89) § 20 (pag. 60), col solito cangiamento di b in ib, ciò che dà:

$$(21) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{ib}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv) - \dfrac{c}{c'}(1+uv)\right](1+\operatorname{sen}\theta) + \dfrac{ac}{a'c'}\left[u - v + i\dfrac{b}{b'}(u+v)\right]\cos\theta}{\dfrac{ib}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv) + \dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cos\theta + \dfrac{ac}{a'c'}\left[u - v - i\dfrac{b}{b'}(u+v)\right](1+\operatorname{sen}\theta)} \\ v_1 = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Siccome θ è reale, ed u, v immaginarie coniugate, vediamo che le nuove variabili u_1, v_1 sono reali e quindi:

L'elemento lineare delle superficie trasformate S_1 *si ottiene da quello al § 16 relativo all'iperboloide ad una falda, cangiandovi* b^2 *in* $-b^2$, *e lasciando le variabili* u, v *reali.*

Per altro è da osservarsi che queste variabili reali sono qui assoggettate a soddisfare la diseguaglianza

$$a^2c^2(u-v)^2 > a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 \, ,$$

che esprime, come facilmente si vede, la condizione necessaria e sufficiente affinchè il corrispondente ds_1^2 sia definito positivo.

Ed ora, con un'analisi del tutto simile a quella sviluppata nel § precedente per le deformate della regione ideale del paraboloide ellittico, si dimostrerebbe inversamente che ogni superficie S coll'elemento lineare sopra indicato (applicabile sulla regione ideale dell'iperboloide Q_0) ammette ∞^3 superficie trasformate S_1 applicabili sulla regione reale dell'iperboloide stesso a due falde.

A tal uopo converrebbe dimostrare che, nelle ipotesi ammesse, si può soddisfare alle equazioni differenziali (20) con un tale valore di θ che le variabili u_1, v_1 date dalle (21) riescano immaginarie coniugate, dopo di che le superficie trasformate S_1 risulterebbero reali. Ci dispensiamo dal riportare qui i calcoli relativi tanto più che avremo occasione più oltre (V. § 48) di sviluppare calcoli del tutto analoghi.

Resta in fine che vediamo quel che accade delle nostre trasformazioni B_k per le deformate dell'iperboloide a due falde quando questo diventa rotondo. Allora, essendo $b^2=c^2$, resta il solo valore possibile per k

$$k=b^2=c^2,$$

e, come nel caso del paraboloide ellittico (§ 42), tutte le trasformazioni reali B_k si riducono alla sola complementare.

§ 45.

Caso dell'ellissoide — Cambiamento di notazione.

Per trattare il caso dell'ellissoide basterà cangiare nelle formole del § 16 relative all'iperboloide ad una falda c in ic, ciò che dà dapprima

$$x_0=a\,\frac{1+uv}{u+v}\;,\; y_0=b\,\frac{u-v}{u+v}\;,\; z_0=ic\,\frac{1-uv}{u+v}\;,$$

onde risulta

$$u=\frac{1+\dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a}-i\dfrac{z_0}{c}}\;,\; v=\frac{1-\dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a}-i\dfrac{z_0}{c}}=\frac{\dfrac{x_0}{a}+i\dfrac{z_0}{c}}{1+\dfrac{y_0}{b}}\;,$$

e si vede che per la regione reale dell'ellissoide la variabile u è coniugata di $\frac{1}{v}$. Conviene quindi modificare le formole al § 16, cangiando la variabile v in $w=\frac{1}{v}$; le formole per l'ellissoide diventano

$$x_0=a\,\frac{u+w}{1+uw}\;,\; y_0=b\,\frac{uw-1}{1+uw}\;,\; z_0=ic\,\frac{w-u}{1+uw}$$

e si ottiene la regione reale dell'ellissoide assumendo u, w complesse coniugate:

$$\bar{u}=w\;,\;\bar{w}=u.$$

Nell'equazione dell'ellissoide Q_0

$$Q_0)\quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

supporremo, come di consueto,

$$a^2\geq b^2\geq c^2,$$

e per quadrica confocale Q_k assumeremo (§ 40) un iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}=1,$$

prendendo la costante k nell'intervallo $(-b^2, -c^2)$

$$-b^2\leq k\leq -c^2.$$

In fine porremo

$$a'=\sqrt{a^2+k}\;,\; b'=\sqrt{b^2+k}\;,\; c'=\sqrt{-(c^2+k)}$$

e saranno a', b', c' reali (positivi); con questo nelle formole al § 16 avremo soltanto da cangiare c in ic.

Ora prendiamo le formole

$$x_1=x+l\,\frac{\partial x}{\partial u}+m\,\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.},$$

che, nelle nuove variabili u, w, diventano

$$(22)\qquad x_1=x+l_0\,\frac{\partial x}{\partial u}+m_0\,\frac{\partial x}{\partial w}\,,$$

ove si ponga

$$l_0=l\;,\; m_0=-w^2 m.$$

Dopo ciò, ricorrendo alle (66), (67) § 16 (pag. 49) colla determinazione superiore dei segni, ed effettuandovi il detto cangiamento di c

in ic, abbiamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
l_0 &= \frac{1+uw}{2}\,\frac{\left(i\frac{ac}{a'c'}-\frac{b}{b'}\right)2u\cos\theta+\left(i\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta+\left(\frac{ab}{a'b'}-i\frac{c}{c'}\right)(u^2+1)}{i\frac{ac}{a'c'}(uw-1)\cos\theta-i\frac{bc}{b'c'}(u+w)\operatorname{sen}\theta+\frac{ab}{a'b'}(w-u)}\\
m_0 &= \frac{1+uw}{2}\,\frac{\left(i\frac{ac}{a'c'}+\frac{b}{b'}\right)2w\cos\theta+\left(i\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)(w^2-1)\operatorname{sen}\theta-\left(\frac{ab}{a'b'}+i\frac{c}{c'}\right)(w^2+1)}{i\frac{ac}{a'c'}(uw-1)\cos\theta-i\frac{bc}{b'c'}(u+w)\operatorname{sen}\theta+\frac{ab}{a'b'}(w-u)}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Siccome u, w sono coniugate immaginarie, si vede che, *per* θ *reale*, le quantità l_0, m_0 sono anche esse coniugate immaginarie, e le formole (22), applicate ad una deformata reale S dell'ellissoide, dimostrano che le superficie trasformate S_1 sono reali. Resta dunque soltanto da esaminare se è possibile, *con* θ *reale*, soddisfare le equazioni di trasformazione.

§ 46.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'ellissoide.

Le equazioni differenziali fondamentali (II) § 36 (pag. 108) diventano qui, pel cangiamento di c in ic, e prendendo $\varepsilon=+1$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot V+\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{iabc}\sqrt{\rho}}(DU+D'V)\\
\frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot U+\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{iabc}\sqrt{\rho}}(D'U+D''V).
\end{aligned}
\right.
$$

Siccome il valore di ρ (61) § 16 (pag. 47) diventa ora

$$\rho=i\,\frac{b^2c^2(w+u)^2+a^2c^2(1-uw)^2-a^2b^2(u-w)^2}{abc(1+uw)^2}\,,$$

si può scrivere evidentemente

$$\rho=i\,R^2 \qquad (R \text{ reale});$$

per ciò

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial u} &= -i\,\frac{a'b'c'}{k(1+uw)^2R^2}\cdot w^2V-i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(DU+D'V)\\
\frac{\partial\theta}{\partial v} &= -i\,\frac{a'b'c'}{k(1+uw)^2R^2}\cdot w^2U-i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(D'U+D''V).
\end{aligned}
\right.
$$

Cangiamo queste formole in coordinate u, w e sia, in queste coordinate,

$$\Delta\,du^2+2\,\Delta'\,du\,dw+\Delta''\,dw^2$$

la seconda forma fondamentale di S, onde

$$\Delta=D\;,\;\Delta'=-\frac{D'}{w^2}\;,\;\Delta''=\frac{D''}{w^4}\,.$$

Poichè inoltre

$$\frac{\partial\theta}{\partial w}=-\frac{1}{w^2}\frac{\partial\theta}{\partial v}\,,$$

le equazioni per θ si scrivono

$$
(23)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial u} &= -i\,\frac{a'b'c'}{k(1+uw)^2R^2}\cdot w^2V-i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta U-w^2\Delta'V)\\
\frac{\partial\theta}{\partial w} &= i\,\frac{a'b'c'}{k(1+uw)^2R^2}\cdot U-i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta'U-w^2\Delta''V).
\end{aligned}
\right.
$$

Dalle (67) § 16 deduciamo le espressioni effettive di U, w^2V (cangiando c in ic):

$$
\left\{
\begin{aligned}
U &= \left(i\frac{ac}{a'c'}-\frac{b}{b'}\right)2u\cos\theta+\left(i\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta+\left(\frac{ab}{a'b'}-i\frac{c}{c'}\right)(u^2+1)\\
w^2V &= \left(-i\frac{ac}{a'c'}-\frac{b}{b'}\right)2w\cos\theta-\left(i\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)(w^2-1)\operatorname{sen}\theta+\left(\frac{ab}{a'b'}+i\frac{c}{c'}\right)(w^2+1),
\end{aligned}
\right.
$$

e queste dimostrano che, per θ reale, le quantità U, w^2V sono immaginarie coniugate come u, w. Poichè inoltre la deformata S è reale, si ha

$$\bar{\Delta}=\Delta''\;,\;\bar{\Delta}'=\Delta'\;,\;\bar{\Delta}''=\Delta\;,$$

onde i secondi membri delle equazioni differenziali (23) sono immaginarii coniugati, e possiamo dunque soddisfarvi con un valore reale di θ inizialmente arbitrario.

Così anche per quest'ultimo caso di superficie applicabili sulla regione reale di quadriche reali abbiamo stabilito l'esistenza di ∞^2 trasformazioni reali B_k, conformemente alle osservazioni generali del § 40. E qui nuovamente, come negli altri casi di quadriche a punti ellittici, le superficie trasformate S_1 saranno applicabili non sulla regione reale dell'ellissoide ma bensì sulla regione ideale.

L'espressione effettiva reale del ds_1^2 di queste superficie trasformate si otterrà ricorrendo alle formole d'applicabilità (89) § 20 (pag. 60), che, pel cangiamento di c in ic e di v in $\frac{1}{w}$, diventano

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\frac{b}{b'}\left[\frac{a}{a'}(w-u)-\frac{ic}{c'}(w+u)\right](1+\operatorname{sen}\theta)+i\frac{ac}{a'c'}\left[uw-1+\frac{b}{b'}(1+uw)\right]\cos\theta}{\frac{b}{b'}\left[\frac{a}{a'}(w-u)+\frac{ic}{c'}(w+u)\right]\cos\theta\qquad+i\frac{ac}{a'c'}\left[uw-1-\frac{b}{b'}(1+uw)\right](1+\operatorname{sen}\theta)}\\
v_1 &= \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.
\end{aligned}
\right.
$$

Siccome

$$\bar{u}=w\ ,\ \bar{w}=u\ ,\ \bar{\theta}=\theta,$$

le nuove variabili u_1, v_1 sono reali e quindi: *L'elemento lineare delle superficie trasformate* S_1 *si ottiene dall'elemento lineare dell'iperboloide ad una falda (§ 16), cangiando in questo* c^2 *in* $-c^2$ *e lasciando le variabili* u, v *reali.*

Si noti però che queste variabili reali sono qui assoggettate alla diseguaglianza

$$a^2b^2(1-uw)^2 > b^2c^2(1+uw)^2+a^2c^2(u-v)^2$$

per assicurare che il ds^2 riesca definito positivo.

Ed ora si può dimostrare coi soliti procedimenti (cf. §§ 43, 44) la proposizione inversa, cioè che ogni superficie reale applicabile sulla regione ideale dell'ellissoide ammette ∞^2 trasformazioni reali B_k, tali che le seconde falde focali delle relative congruenze W riescono applicabili sulla regione reale dell'ellissoide stesso.

Le nostre ricerche, per quanto riguarda le superficie applicabili sulle regioni *reali* delle quadriche, sono così al termine e possiamo enunciare il risultato finale (cf. § 40):

Ogni superficie S *reale applicabile sulla regione reale di una quadrica generale* Q *appartiene ad* ∞^2 *congruenze rettilinee reali* W, *le cui seconde falde focali sono applicabili sulla regione reale di* Q *se questa quadrica è a punti iperbolici, invece sulla immaginaria se è a punti ellittici.*

Ritorniamo ancora al caso dell'ellissoide per esaminare ciò che avviene quando esso diventa di rotazione. Qui dobbiamo distinguere le

due forme

1.ª ellissoide schiacciato $(a^2=b^2>c^2)$

1.ª ellissoide allungato $(a^2>b^2=c^2)$.

Nel primo caso le trasformazioni B_k esistono ancora in una doppia infinità come per l'ellissoide generale, potendo k avere un qualunque valore nell'intervallo $(-a^2, -c^2)$ [1].

In particolare la trasformazione singolare B_{-a^2} è la complementare, onde *tutte* le trasformazioni B_k per le deformate S dell'ellissoide rotondo schiacciato portano a superficie trasformate S_1 applicabili sulla complementare dell'ellissoide.

Se prendiamo invece la seconda forma (ellissoide allungato), l'intervallo per k $(-b^2, -c^2)$ si annulla e tutte le trasformazioni reali B_k si riducono nuovamente alla complementare.

Riassumendo ancora i risultati relativi alla esistenza delle ∞^2 trasformazioni reali B_k per le quadriche rotonde, vediamo che esse persistono solo per queste due forme:

{ iperboloide ad una falda
{ ellissoide schiacciato,

mentre per le altre tre forme

{ paraboloide
{ iperboloide a due falde
{ ellissoide allungato

esse spariscono, o meglio si riducono ad un'unica trasformazione, la complementare.

La ragione di questo fatto sta in ciò (§ 40) che nei rispettivi sistemi confocali abbiamo *effettive* quadriche rigate (iperboloidi) solo per le prime due forme, mentre per le ultime tre queste degenerano nei piani per l'asse.

---

[1]) Naturalmente si esclude il caso della sfera, ove da capo tutte le trasformazioni *reali* B_k si riducono alla complementare.

§ 47.

Trasformazioni B_k delle superficie applicabili sulla regione ideale del paraboloide iperbolico.

Le ricerche del presente Capitolo sulle deformate delle quadriche a punti ellittici ci hanno condotto forzatamente a considerare, insieme alle superficie applicabili sulla loro regione reale, quelle *reali* applicabili sopra una loro regione immaginaria. Questo ci pone in avvertenza che persino per le superficie reali applicabili sulle quadriche a punti iperbolici il soggetto non è ancora esaurito. Nelle relative ricerche del Capitolo II si è trattato invero soltanto delle superficie applicabili sulla loro regione reale; ma esistono egualmente classi di superficie reali applicabili idealmente sopra di esse, e per queste classi di superficie si hanno ancora le trasformazioni reali B_k, come per le deformate della regione reale. Sono questi i nuovi casi che andiamo ora a trattare.

Cominciando dal paraboloide iperbolico, riferiamoci alle formole del § 5 e definiamo la regione immaginaria del paraboloide con un ds^2 reale, definito e positivo, assumendo le variabili u, v coniugate immaginarie.

Separando il reale dall'immaginario col porre

$$u = \frac{\alpha + i\beta}{2}\ ,\ v = \frac{\alpha - i\beta}{2} \quad (\alpha, \beta \text{ reali}),$$

avremo

$$x_0 = \sqrt{p}\,\alpha\ ,\ y_0 = i\sqrt{q}\,\beta\ ,\ z_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2},$$

indi

$$ds_0^2 = (\alpha^2+p)\,d\alpha^2 + 2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta + (\beta^2-q)\,d\beta^2, \tag{24}$$

e basterà assoggettare le variabili α, β (reali) alla diseguaglianza

$$p\beta^2 > q\alpha^2 + pq$$

per avere un ds_0^2 definito positivo.

La quantità

$$H = p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq = pq - p\beta^2 + q\alpha^2$$

risulterà *negativa* e noi porremo

$$H = -h^2\ ,\ \sqrt{H} = ih \quad (h \text{ reale}). \tag{24*}$$

Abbiasi ora una superficie S reale d'elemento lineare (24) (applicabile sulla regione ideale del paraboloide); la sua seconda forma fondamentale in coordinate u, v

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

essendo u, v coniugate, soddisferà alle condizioni

$$\overline{D} = D''\ ,\ \overline{D'} = D'\ ,\ \overline{D''} = D. \tag{25}$$

Prendiamo ora la costante k *positiva* e minore di p

$$0 < k \leq p$$

e passiamo, mediante la B_k, dalla S ad una superficie trasformata S_1 colle solite formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{ecc.}$$

Noi vogliamo ora 1.° che la superficie S_1 sia reale, 2.° che essa abbia l'elemento lineare (24). Per la prima cosa occorre che si abbia

$$\bar{l} = m\ ,\ \bar{m} = l,$$

ciò che si traduce nell'unica equazione

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}. \tag{26}$$

Per la seconda poi bisogna che le formole d'applicabilità (45) § 11 (pag. 32) assegnino valori immaginarii coniugati ad u_1, v_1, cioè che si abbia

$$\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{pq} + \left[\sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{qp'}(u+v)\right]\lambda}{\sqrt{pq'}(u-v) + \sqrt{qp'}(u+v) - \sqrt{pq}(4uv+k)\lambda},$$

ossia che sussista fra $\lambda, \bar{\lambda}$ la relazione bilineare

$$A\lambda\bar{\lambda} + B\lambda + \overline{B}\bar{\lambda} + C = 0, \tag{27}$$

ove

$$\left\{\begin{array}{l} A = \sqrt{pq}(4uv+k)\ ,\ B = \sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{qp'}(u+v)\ ,\ C = \sqrt{pq} \\ \overline{B} = -\sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{qp'}(u+v). \end{array}\right. \tag{28}$$

Siccome $\bar{u}=v$, $\bar{v}=u$, i coefficienti estremi A, C sono reali e i medii $B, \bar{B}$ coniugati immaginarii, inoltre il determinante

$$B\bar{B}-AC=qp'(u+v)^2-pq'(u-v)^2-pq(4uv+k),$$

essendo $p'=p-k$, $q'=q+k$, è identicamente uguale a

$$-k[p(u-v)^2+q(u+v)^2+pq],$$

cioè

$$B\bar{B}-AC=-kH. \tag{29}$$

Dunque $B\bar{B}-AC$ è positivo, perchè k è positiva, H negativa, come si è visto [1]. Dopo ciò basterà imitare l'analisi già sviluppata al § 43 per arrivare al risultato in vista.

In primo luogo si verificherà che la (26), ossia sviluppando secondo le formole (18) § 5 (pag. 13), l'equazione

$$\frac{2(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\bar{\lambda}^2v^2-2(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q'})\bar{\lambda}v-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\bar{\lambda}^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})}{\bar{\lambda}[\bar{B}\bar{\lambda}+C]}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\lambda^2v^2-2(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q'})\lambda v-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})}{\lambda(B\lambda+C)}$$

è una conseguenza della (27). Per ciò basta osservare che si ha

$$\bar{\lambda}(\bar{B}\bar{\lambda}+C)=-\frac{kH\lambda(B\lambda+C)}{(A\lambda+\bar{B})^2}$$

e procedere come al § 43.

Le equazioni differenziali fondamentali (I) § 27 (pag. 81) si scrivono qui per la (24*)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial u}&=-\frac{\sqrt{pq}}{kh^2}V-\frac{i}{2kh}(DU+D'V)\\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}&=-\frac{\sqrt{pq}}{kh^2}U-\frac{i}{2kh}(D'U+D''V),\end{aligned}\right.$$

[1] Appunto perchè risulti $B\bar{B}-AC>0$ abbiamo dovuto assumere $k>0$.

da cui, cangiando i in $-i$,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial u}&=-\frac{\sqrt{pq}}{kh^2}\bar{U}+\frac{i}{2kh}(D'\bar{U}+D\bar{V})\\ \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial v}&=-\frac{\sqrt{pq}}{kh^2}\bar{V}+\frac{i}{2kh}(D''\bar{U}+D'\bar{V}).\end{aligned}\right.$$

Queste equazioni differenziali, insieme alla equazione bilineare (27), formano un sistema completo, come risulta eseguendo un calcolo analogo a quello del § 43.

Basta dunque soddisfare *inizialmente* alla (27). Ora questa, per valori fissi di u, v, rappresenta nel piano complesso λ un circolo reale, e basta quindi prendere per valore iniziale λ_0 di λ l'affissa di un punto della sua periferia.

Da tutto questo risulta il teorema finale: *Ogni superficie reale* S *applicabile idealmente sul paraboloide iperbolico (d'elemento lineare* (24)) *ammette* ∞^2 *trasformazioni reali* B_k *in superficie* S_1 *della medesima specie.*

§ 48.

Trasformazioni B_k delle superficie reali applicabili sulla regione immaginaria dell'iperboloide rigato.

Passiamo ora alle ricerche analoghe per l'iperboloide ad una falda. Qui però abbiamo due classi distinte di superficie reali applicabili sopra regioni immaginarie dell'iperboloide. La prima classe si ottiene prendendo nelle formole del § 16 le variabili u, v coniugate immaginarie, cioè

$$a)\qquad \bar{u}=v\ ,\ \bar{v}=u\,,$$

la seconda assumendo v coniugata dell'inversa di u:

$$b)\qquad \bar{u}=\frac{1}{v}\ ,\ \bar{v}=\frac{1}{u}.$$

Ambedue le volte infatti basta assoggettare la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario in u a soddisfare una conveniente disuguaglianza per ottenere un ds^2 reale, definito e positivo. Per l'una e per l'altra classe esistono trasformazioni reali B_k; ma noi ci limiteremo alla prima $a)$, chè per la seconda $b)$ la trattazione procederebbe in modo analogo. E d'altra parte le ricerche ulteriori del Cap. V ci daranno una nuova trasformazione colla quale si passa dalla prima classe a) alla seconda b).

Consideriamo dunque una superficie reale S d'elemento lineare dell'iperboloide ad una falda (§ 16), ma colle variabili u, v immaginarie coniugate. Prendiamo poi la costante k *positiva* e minore di c^2

$$0 < k \leq c^2,$$

e conserviamo tutte le altre notazioni del § 16, adottando nei valori di U, V, W i segni superiori. Applicando la trasformazione B_k alla S, otterremo superficie *reali* S_1 trasformate, del medesimo elemento lineare, se potremo far sì che l, m risultino coniugate e le variabili u_1, v_1, date dalle formole d'applicabilità (89) § 20, risultino ancora coniugate.

La prima condizione dà

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}, \tag{30}$$

e la seconda, se si pone

$$\lambda = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}, \tag{30*}$$

onde

$$\cos\theta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

si traduce nella equazione bilineare fra $\lambda, \bar\lambda$,

$$A\lambda\bar\lambda + B\lambda + \overline{B}\bar\lambda + C = 0, \tag{31}$$

i coefficienti $A, B, \overline{B}, C$ essendo dati dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} &A = \frac{ab}{a'b'}(1-uv) + \frac{bc}{b'c'}(1+uv), \quad C = -\frac{ab}{a'b'}(1-uv) + \frac{bc}{b'c'}(1+uv) \\ &B = -\frac{ac}{a'c'}\left[u - v + \frac{b}{b'}(u+v)\right], \quad \overline{B} = \frac{ac}{a'c'}\left[u - v - \frac{b}{b'}(u+v)\right], \end{aligned}\right. \tag{32}$$

che mostrano essere A, C reali e $B, \overline{B}$ immaginarii coniugati.

Anche qui il seguito del calcolo è affatto analogo a quello del § 43. In primo luogo si osservi che $EG - F^2$, essendo le variabili u, v coniu-

gate e il ds^2 definito (positivo), deve avere un valore reale *negativo* [1]), cioè per la (59*) § 16 (pag. 47) deve essere

$$a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 < 0.$$

Ora pel determinante $B\overline{B} - AC$ si trova subito

$$B\overline{B} - AC = -\frac{k}{a'^2b'^2c'^2}\left\{a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2\right\}$$

e quindi

$$B\overline{B} - AC > 0.$$

Dopo ciò dalla (31) segue già (cf. § 43) la (30), e resta solo da combinare la (31) colle equazioni differenziali per θ. Qui si osservi che la quantità

$$\rho = \frac{a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2}{abc\,(u+v)^2}$$

è reale negativa, e si ponga

$$\rho = -R^2, \quad \sqrt{\rho} = iR.$$

Le equazioni differenziali per θ (II) § 36, pag. 103, diventano

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}\cdot V - i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(DU + D'V) \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= -\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}\cdot U - i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(D'U + D''V) \end{aligned}\right.$$

e scrivendole invece nel parametro λ:

$$\left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}V_1 + i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(DU_1 + D'V_1) \\ 2\frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2}U_1 + i\,\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(D'U_1 + D''V_1). \end{aligned}\right. \tag{32}$$

---

[1]) Se infatti si introducono variabili reali ponendo

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta), \quad v = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta),$$

ed è

$$ds^2 = E'\,d\alpha^2 + 2F'\,d\alpha\,d\beta + G'\,d\beta^2$$

si ha

$$E'G' - F'^2 = (EG - F^2)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}\right)^2 = -\frac{1}{4}(EG - F^2).$$

dove si è posto

$$(33)\qquad U_1=(1+\lambda^2)\,U\,,\quad V_1=(1+\lambda^2)\,V\,,\quad W_1=(1+\lambda^2)\,W\,.$$

Scrivendo, insieme alle (32), le coniugate ed aggregandovi l'equazione bilineare (31), si vede, nel solito modo, che si ottiene un sistema completamente integrabile.

Anche per le attuali superficie applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide ad una falda vale quindi la stessa proposizione finale del § precedente.

Così adunque per tutte le nostre congruenze reali W a falde focali S, S_1 applicabili *realmente od idealmente* sopra una quadrica a punti iperbolici le due falde focali sono applicabili *per le loro regioni reali*. Precisamente l'opposto accade per le quadriche a punti ellittici, come sopra si è visto.

§ 49.

Trasformazioni B_k delle superficie applicabili sulla sfera immaginaria.

Esaurita la trattazione per le superficie reali applicabili sulle quadriche reali, ci dovremmo ora volgere a quella delle superficie reali applicabili su quadriche immaginarie. Esistono invero svariati tipi di ds^2 *reali definiti e positivi* appartenenti a quadriche immaginarie. Ma noi qui non intendiamo di svolgerne una teoria completa, sibbene di scegliere fra essi alcuni casi particolari più notevoli. E comincieremo da quella classe che ha fornito il punto di partenza di tutta la teoria, cioè dalle superficie applicabili sulla sfera immaginaria:

$$x^2+y^2+z^2+R^2=0\,.$$

Le reali fra queste non sono altro che le superficie pseudosferiche di raggio R, o a curvatura costante negativa. Ma in questo primo paragrafo prescinderemo dalla condizione di realità ed applicheremo le formole generali del § 16 ove, assumendo per semplicità $R=1$, dovremo fare

$$a=b=i\qquad c=1\,.$$

Così abbiamo (§ 16)

$$(34)\qquad E=G=0\,,\quad F=\frac{2}{(u+v)^2}\,,\quad \rho=1$$

$$(35)\qquad ds^2=\frac{4\,du\,dv}{(u+v)^2}\,;$$

le linee coordinate sono qui le linee di lunghezza nulla (generatrici della sfera).

Applicando la trasformazione B_k, sarà

$$a'=b'=i\sqrt{1-k}\,,\quad c'=\sqrt{1-k}\,,$$

e la quadrica omofocale Q_k diventa la sfera concentrica

$$x^2+y^2+z^2+1-k=0$$

di raggio $=i\sqrt{1-k}$. Ne segue già che nel caso attuale tutti i segmenti focali FF_1 hanno la lunghezza costante $\sqrt{k}$.

Calcolando mediante le (67) § 16, pag. 49, (segni superiori), le quantità U, V, W abbiamo

$$(36)\qquad \begin{cases} U=\dfrac{1-\sqrt{1-k}}{1-k}\,\dfrac{\lambda^2}{1+\operatorname{sen}\theta}\,,\quad V=\dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-k}\,\dfrac{\mu^2}{1+\operatorname{sen}\theta} \\[2mm] W=\dfrac{2}{1-k}\,\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\lambda\mu}\,, \end{cases}$$

avendo posto per brevità

$$(37)\qquad \lambda=\cos\theta+u\,(1+\operatorname{sen}\theta)\,,\quad \mu=\cos\theta-v\,(1+\operatorname{sen}\theta)\,.$$

Dalle (36) si ha

$$(38)\qquad \begin{cases} l=(u+v)\,\dfrac{U}{W}=\dfrac{1-\sqrt{1-k}}{2}\,(u+v)\,\dfrac{\lambda}{\mu} \\[2mm] m=(u+v)\,\dfrac{V}{W}=\dfrac{1+\sqrt{1-k}}{2}\,(u+v)\,\dfrac{\mu}{\lambda}, \end{cases}$$

indi

$$lm=\frac{k\,(u+v)^2}{4}\,,$$

e per ciò essendo

$$\delta^2=El^2+2\,Flm+Gm^2$$

il quadrato della distanza dei fuochi FF_1, si ha

$$\delta^2=k\,,\quad \delta=\sqrt{k}\,,$$

come già sopra avevamo osservato.

Se applichiamo poi la formola di Ribaucour (cf. § 15)

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2 \Omega} = \sqrt{\frac{1}{KK_1}},$$

essendo qui

$$K = -1, \quad K_1 = -1,$$

viene per l'angolo Ω dei piani focali

$$\operatorname{sen} \Omega = \sqrt{k}, \quad \cos \Omega = \sqrt{1-k},$$

come si otterrebbe anche dalle formole per A, B, C al § 38. Così adunque:

Nelle attuali congruenze W *colle falde focali applicabili sulla sfera immaginaria* $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ *è costante la distanza focale* δ, *ed è insieme costante l'angolo* $\Omega = arc \operatorname{sen} \delta$ *dei piani focali.*

§ 50.

Trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

Collochiamoci ora dal punto di vista reale e supponiamo di avere una superficie S *reale* applicabile sulla sfera immaginaria di raggio i, cioè una superficie pseudosferica (di raggio = 1). Volendo ottenere trasformazioni B_k reali, bisognerà che δ ed Ω siano reali, onde la costante k dovrà essere scelta reale, positiva e < 1, poniamo

$$k = \cos^2 \sigma$$

con σ angolo costante reale, e avremo

$$\delta = \cos \sigma \qquad \Omega = \frac{\pi}{2} - \sigma.$$

L'elemento lineare della S si avrà dalla (35) assumendo le variabili u, v coniugate immaginarie, e ponendo

$$u = \alpha + i\beta \qquad v = \alpha - i\beta,$$

assumerà la ben nota forma

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\alpha^2}$$

della pseudosfera, nella quale le $\beta =$ cost.^{te} sono geodetiche parallele e le $\alpha =$ cost.^{te} gli oricicli ortogonali (vol. I, § 158).

Affinchè la superficie trasformata S_1, data dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.},$$

sia reale occorre e basta che l, m siano coniugati. Ma si ha dalle (38)

$$(39) \qquad \begin{cases} l = \alpha(1 - \operatorname{sen} \sigma)\dfrac{\lambda}{\mu}, \quad m = \alpha(1 + \operatorname{sen} \sigma)\dfrac{\mu}{\lambda} \\ lm = \alpha^2 \cos^2 \sigma \end{cases}$$

onde, indicando con φ un angolo *reale*, potremo porre

$$(40) \qquad l = \alpha \cos \sigma \, e^{i\varphi}, \quad m = \alpha \cos \sigma \, e^{-i\varphi},$$

da cui

$$(41) \qquad e^{i\varphi} = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \frac{\lambda}{\mu}.$$

Alla funzione incognita $\theta(u, v)$ sostituiremo dunque qui la funzione (reale) $\varphi(u, v)$ e cercheremo le equazioni differenziali che la determinano.

Le formole (36) dànno

$$(42) \qquad U = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \frac{\lambda^2}{1 + \operatorname{sen} \theta}, \quad V = \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \frac{\mu^2}{1 + \operatorname{sen} \theta},$$

e le equazioni differenziali fondamentali (II) § 36 per θ ($\varepsilon = +1$)

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{(u+v)^2 \cos^2 \sigma} \cdot V + i\dfrac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{2\cos^2 \sigma}(DU + D'V) \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{(u+v)^2 \cos^2 \sigma} \cdot U + i\dfrac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{2\cos^2 \sigma}(D'U + D''V). \end{cases}$$

Ma, derivando la (41), abbiamo

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\lambda} + \dfrac{(u+v)(1 + \operatorname{sen} \theta)}{\lambda\mu}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} \\ i\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\mu} + \dfrac{(u+v)(1 + \operatorname{sen} \theta)}{\lambda\mu}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \end{cases}$$

e sostituendo in queste i valori (43), coll'osservare le identità

$$\begin{cases} \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \dfrac{1}{u+v}\left(1-\dfrac{\cos\sigma}{1+\operatorname{sen}\sigma}e^{-i\varphi}\right) \\ \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\mu} = \dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{\cos\sigma}{1-\operatorname{sen}\sigma}e^{i\varphi}-1\right), \end{cases}$$

otteniamo in fine le richieste equazioni per φ

$$(44)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{1}{u+v}\left(1-\dfrac{e^{-i\varphi}}{\cos\sigma}\right)+\dfrac{i\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(u+v)(e^{i\varphi}D+e^{-i\varphi}D') \\ i\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{e^{i\varphi}}{\cos\sigma}-1\right)+\dfrac{i\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(u+v)(e^{i\varphi}D'+e^{-i\varphi}D''). \end{cases}$$

Per riconoscere che si possono soddisfare con φ *reale* (inizialmente arbitrario) basta trasformarle in coordinate reali α, β con che l'immaginario sparirà dalle formole.

Indichiamo infatti con

$$\Delta\, d\alpha^2 + 2\,\Delta'\, d\alpha\, d\beta + \Delta''\, d\beta^2$$

la seconda forma fondamentale della superficie pseudosferica S in coordinate reali α, β; i coefficienti $\Delta, \Delta', \Delta''$ saranno reali, e poichè

$$\Delta\, d\alpha^2 + 2\,\Delta'\, d\alpha\, d\beta + \Delta''\, d\beta^2 = D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2,$$

avremo

$$\Delta = 2D' + D + D'',\quad \Delta' = i(D - D''),\quad \Delta'' = 2D' - D - D''.$$

Le (44), sommate e sottratte, danno le formole definitive sotto forma reale

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\alpha\cos\sigma} + \alpha\, tg\,\sigma\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \dfrac{\cos\sigma - \cos\varphi}{\alpha\cos\sigma} + \alpha\, tg\,\sigma\,(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi). \end{cases}$$

Esse formano, come è evidente, un sistema completamente integrabile [1]) e, presa per φ una sua qualunque soluzione, le formole

$$(46)\qquad x_1 = x + \alpha\cos\sigma\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)\text{ecc.},$$

dànno la superficie pseudosferica trasformata S_1, la quale colla primitiva S forma le due falde focali di una congruenza (pseudosferica).

Dalle (46) risulta altresì il significato geometrico dell'angolo φ, come inclinazione del raggio della congruenza pseudosferica sulle geodetiche parallele $\beta = \text{cost.}^{\text{te}}$ di S.

Le formole (45) non sono altro che le formole per la trasformazione di Bäcklund (cf. vol. II, § 373); e soltanto qui per linee coordinate, in luogo delle linee di curvatura di S, sono prese le geodetiche di un fascio parallelo e gli oricicli ortogonali.

§ 51.

Paragone colle proprietà generali delle trasformazioni B_k.

Le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche sono così nuovamente ottenute come caso particolare delle trasformazioni generali B_k. È istruttivo osservare il significato delle principali proprietà, segnalate per le trasformazioni B_k, nel caso attuale particolare; ritroviamo così proprietà ben note delle trasformazioni di Bäcklund.

1.° Sappiamo che sulle due falde focali S, S_1 di una qualunque delle nostre congruenze si corrispondono le linee asintotiche ed inoltre i sistemi coniugati permanenti (§§ 31-34). Ora per una superficie applicabile sulla sfera (reale od immaginaria) il sistema coniugato permanente è quello delle linee di curvatura che si conserva ortogonale (coniugato) sulla sfera.

---

[1]) Ciò del resto si verifica anche subito, avendo riguardo alle equazioni di Codazzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\alpha\Delta')}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial(\alpha\Delta)}{\partial\beta} = \Delta' \\ \dfrac{\partial(\alpha\Delta')}{\partial\beta} - \dfrac{\partial(\alpha\Delta'')}{\partial\alpha} = \Delta \end{cases}$$

e all'equazione di Gauss

$$\alpha^4(\Delta\Delta'' - \Delta'^2) = -1.$$

Ricadiamo così sulla ben nota proprietà:

Le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche conservano le linee asintotiche e le linee di curvatura.

L' ulteriore proprietà della trasformazione di Bäcklund di conservare la lunghezza degli archi delle asintotiche appartiene solo a questo caso particolare e non ha riscontro nelle trasformazioni generali B_k delle deformate delle quadriche.

2.° La legge d'applicabilità delle due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze generali W è data, come sappiamo, dall'affinità d'Ivory. Come si interpreta questa proprietà nel caso speciale pseudosferico? Qui dobbiamo osservare in primo luogo che le due falde focali S, S_1 non sono più applicabili in un solo modo (in un numero finito di modi) ma esistono ∞^3 applicabilità di S sopra S_1, poichè queste superficie hanno la medesima curvatura costante. L'affinità d'Ivory fra le due sfere concentriche

$$x^2+y^2+z^2+1=0$$
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+\operatorname{sen}^2\sigma=0$$

darà qui *una* fra queste ∞^3 applicabilità.

Le formole effettive di corrispondenza

$$x_1=x\operatorname{sen}\sigma\,,\quad y_1=y\operatorname{sen}\sigma\,,\quad z_1=z\operatorname{sen}\sigma$$

fanno corrispondere due punti di queste sfere sul medesimo raggio. Se la superficie pseudosferica S si applica sulla prima sfera, di centro O, il segmento focale $FF_1=\cos\sigma$ diventerà un segmento MM_1 tangente in M alla prima sfera e terminato in M_1 alla seconda.

Il punto M′ sulla prima sfera corrispondente nell' affinità d' Ivory a M_1 sarà nel piano OMM_1 e chiamando $\frac{\delta}{i}$ l'angolo (puramente immaginario) MOM′ avremo

$$\cos\sigma=i\operatorname{tang}\left(\frac{\delta}{i}\right)=\operatorname{tangh}\delta\,.$$

Ne risulta la proposizione seguente:

Se S, S_1 *sono le due falde focali (di curvatura costante* $=-1$) *di una congruenza pseudosferica col segmento focale* FF_1 *di lunghezza costante* $=\cos\sigma$, *si ottiene una delle leggi d'applicabilità fra* S *e* S_1 *nel modo seguente. Si prolunghi geodeticamente sulla superficie* S *il segmento* FF_1 *di una lunghezza geodetica costante* $FF_1'=\delta$ *tale che*

$$\operatorname{tangh}\delta=\cos\sigma\,. \tag{47}$$

Il punto F′ *a cui si arriva sarà il punto di* S *che nella detta applicabilità corrisponde a* F_1.

Questa è precisamente la costruzione data al § 382 delle Lezioni (vol. II pag. 410) e dedotta dallo studio delle reti di Tchebychef sulla pseudosfera. Qui essa appare come una semplice conseguenza dell'affinità d' Ivory, che spiega altresì la formola (47) [1].

Osserviamo poi che, dalle nostre formole generali d'applicabilità (39) § 36, possiamo dedurre quelle del caso attuale pseudosferico sotto forma reale. Basta infatti porre nelle dette formole

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\,,$$

e ponendo

$$u_1=\alpha_1+i\beta_1\,,\quad v_1=\alpha_1-i\beta_1$$

si trova subito per le formole cercate

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{\alpha\operatorname{sen}\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\\[2ex] \beta_1=\beta+\dfrac{\alpha\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\,.\end{cases} \tag{48}$$ [2]

---

[1]) In effetto questo caso particolare già noto è stato per l'A. il punto di partenza per risalire alla legge d'affinità d' Ivory nel caso generale.

[2]) Si osservi che, eliminando φ fra le (48), si ottiene

$$(\beta_1-\beta)^2+\left(\alpha_1-\frac{\alpha}{\operatorname{sen}\sigma}\right)^2=\alpha^2\cot^2\sigma\,.$$

Interpretando (α,β) come coordinate cartesiane ortogonali di un piano, si ha precisamente la rappresentazione conforme (stereografica) della superficie pseudosferica sul piano, che abbiamo studiato al Cap. XII delle Lezioni (vol. I § 174). Per α,β fisse l'equazione superiore rappresenta nelle coordinate variabili α_1,β_1 un circolo che non taglia (in punti reali) la retta $\alpha=0$, cioè sulla pseudosfera un cerchio a centro reale e precisamente col centro nel punto (α,β). Calcolando il suo raggio geodetico δ dalla formola a pag. 395 del vol. I

$$\frac{1}{\rho_g}=\coth\delta=\frac{b}{r}=\frac{\dfrac{\alpha}{\operatorname{sen}\sigma}}{\alpha\cot\sigma}=\frac{1}{\cos\sigma}\,,$$

si ritrova nuovamente la formola (47), di cui abbiamo così una seconda verifica.

Queste formole d'applicabilità diventano illusorie nel caso speciale $\sigma = 0$ della trasformazione complementare, poichè allora tutta la regione reale di S_1 verrebbe sopra S allontanata all' infinito. In tal caso si osservi che le (45) si riducono alle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{1 - \cos \varphi}{\alpha}$$

e integrate danno

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \frac{\alpha}{c - \beta} \quad (c \text{ cost.}^{\text{te}}).$$

I raggi della congruenza inviluppano allora un sistema di geodetiche parallele, in particolare per la soluzione $\varphi = 0$ $(c = \infty)$ le geodetiche stesse $\beta =$ cost.$^{\text{te}}$.

§ 52.

Trasformazioni B_k delle superficie applicabili sull'ellissoide immaginario.

Alla sfera immaginaria (§ 49) sostituiamo in generale l'ellissoide immaginario

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Esistono parecchi tipi di ds^2 reali, definiti e positivi riducibili al ds^2 di questa quadrica [1]). Ma noi ne considereremo uno solo, quello che si ottiene cangiando nelle formole del § 16 per l' iperboloide ad una falda a, b rispettivamente in ia, ib ed assumendo le variabili u, v complesse nuovamente coniugate; per $a=b=c$ si ottiene il ds^2 della pseudosfera. E per le superficie reali S con questo ds^2 cercheremo le trasformazioni reali B_k in superficie della medesima classe. Intanto si osservi che $EG - F^2$ deve qui risultare reale negativo (cf. § 48), e poichè dalla (59*) § 16 (pag. 47)

$$EG - F^2 = 4 \frac{a^2 b^2 (1 - uv)^2 - b^2 c^2 (1 + uv)^2 - a^2 c^2 (u - v)^2}{(u + v)^6}$$

[1]) Il Peterson nella memoria citata nella nota al § 40 ne enumera nove diversi [m. c. § II].

ne risulta

$$a^2 c^2 (u - v)^2 + b^2 c^2 (1 + uv)^2 > a^2 b^2 (1 - uv)^2. \tag{49}$$

Prendiamo ora la costante k reale positiva e minore di ciascuna delle tre

$$a^2, b^2, c^2,$$

e poniamo

$$a' = \sqrt{a^2 - k}, \; b' = \sqrt{b^2 - k}, \; c' = \sqrt{c^2 - k};$$

a', b', c' saranno reali (positive).

Sia S una superficie reale della classe considerata e cerchiamo se le trasformate S_1

$$x_1 = x + l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.},$$

mediante la B_k, possono essere nuovamente reali e della medesima classe.

In tutte le formole del § 16 relative all' iperboloide ad una falda dobbiamo cangiare

$$a, b, a', b'$$

rispettivamente in

$$ia, ib, ia', ib',$$

ciò che lascia invariati i rapporti $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$. Così le formole (67) § 16 (segni superiori) restano formalmente le stesse e la medesima cosa accade per le formole d'applicabilità (89) § 20.

Le condizioni imposte alla S_1 si traducono nelle due equazioni (cf. § 48)

$$\overline{l} = m, \quad \text{o} \quad \frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}$$

e

$$\overline{v}_1 = u_1.$$

Nel solito modo del § 43 si prova che la prima è una conseguenza della seconda, e questa, ponendo ancora

$$\lambda = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta},$$

prende la forma bilineare in $\lambda, \bar\lambda$

$$\mathrm{A}\lambda\bar\lambda+\mathrm{B}\lambda+\bar{\mathrm{B}}\bar\lambda+\mathrm{C}=0\,, \tag{50}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{b}{b'}\left[\frac{c}{c'}(1+uv)+\frac{a}{a'}(1-uv)\right], \quad \mathrm{C}=\frac{b}{b'}\left[\frac{c}{c'}(1+uv)-\frac{a}{a'}(1-uv)\right] \\ \mathrm{B} &= -\frac{ac}{a'c'}\left[u-v+\frac{b}{b'}(u+v)\right] \quad\quad , \; \bar{\mathrm{B}}=\frac{ac}{a'c'}\left[u-v-\frac{b}{b'}(u+v)\right]. \end{aligned}\right.$$

I coefficienti A, C sono reali e $\mathrm{B}, \bar{\mathrm{B}}$ complessi coniugati; il determinante

$$\mathrm{B}\bar{\mathrm{B}}-\mathrm{AC}=\frac{k}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2c^2(u-v)^2+b^2c^2(1+uv)^2-a^2b^2(1-uv)^2\right]$$

è positivo per la (49), essendo $k>0$.

Resta solo da combinare l'equazione in termini finiti (50) colle equazioni differenziali per $\lambda, \bar\lambda$. Ma se si osserva che qui

$$\rho=\frac{a^2c^2(u-v)^2+b^2c^2(1+uv)^2-a^2b^2(1-uv)^2}{abc(u+v)^2}$$

è reale positiva, e si pone

$$\rho=\mathrm{R}^2\,, \quad \sqrt{\rho}=\mathrm{R}\,,$$

le equazioni differenziali per λ prendono la stessa forma (32) come al § 48 e le verifiche per la completa integrabilità del sistema procedono nel medesimo modo.

Dunque: *Ogni superficie reale* S *della classe considerata, applicabile sull'ellissoide generale immaginario, ammette* ∞^2 *trasformazioni reali* B_k *che la cangiano in superficie* S_1 *della medesima classe.*

Si noti che le superficie S della classe attuale risultano applicabili sopra superficie di rotazione quando $a=b$.

Se nello stesso tempo $a=b<c$, per superficie tipica di rotazione si può prendere il *catenoide accorciato* (vol. II §§ 259 e 390) e le trasformazioni B_k delle sue deformate vengono a collegarsi colle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

In fine se $a=b=c$ ritorniamo alla sfera immaginaria, le superficie S sono le pseudosferiche e le trasformazioni B_k coincidono colle trasformazioni di Bäcklund (§§ 49, 50).

§ 53.

Trasformazioni B_k per le deformate del paraboloide: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2iz$.

Nei casi sopra considerati la quadrica Q fondamentale era bensì immaginaria, ma con equazione a coefficienti reali. Qui vogliamo ancora addurre un esempio in cui l'equazione stessa della quadrica Q è a coefficienti immaginarii e scegliamo il paraboloide

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2iz$$

con parametri ip, iq puramente immaginarii, avendo inoltre p, q il medesimo segno, per es. il positivo.

Indicando con α, β due variabili reali, le formole

$$x_0=\sqrt{p}\,\alpha \quad y_0=\sqrt{q}\,\beta \quad z_0=-i\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \tag{51}$$

definiscono una regione del nostro paraboloide il cui ds^2

$$ds^2=(p-\alpha^2)\,d\alpha^2-2\,\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(q-\beta^2)\,d\beta^2 \tag{52}$$

è reale definito e positivo purchè sia soddisfatta la diseguaglianza

$$pq-p\beta^2-q\alpha^2>0\,. \tag{53}$$

Consideriamo le superficie *reali* S con questo ds^2 e cerchiamo le loro trasformazioni reali B_k in superficie S_1 della medesima classe.

Basterà applicare le formole generali relative al paraboloide iperbolico (§ 5) colle considerazioni seguenti. Precisando i sensi delle radici quadrate $\sqrt{i}, \sqrt{-i}$ col porre

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,, \quad \sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \tag{54}$$

facciamo il cangiamento di variabili

$$u+v=\sqrt{-i}\,.\,\alpha\ ,\quad u-v=\sqrt{i}\,\beta\,; \tag{55}$$

le (51) diventano

$$x_0=\sqrt{ip}\,(u+v)\ ,\quad y_0=\sqrt{-iq}\,(u-v)\ ,\quad z_0=2uv$$

e coincidono colle formole (7) § 5 (pag. 11) ove $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ siano cangiate in $\sqrt{ip}$, $\sqrt{-iq}$. Notiamo poi che, a causa delle (54), le variabili u, v sono assoggettate a soddisfare le equazioni

$$\bar{u}=iv \qquad \bar{v}=iu\,; \tag{56}$$

viceversa se queste hanno luogo, le variabili α, β definite dalle (55) sono reali.

Ciò premesso, prendiamo la costante k puramente immaginaria (positiva)

$$k=ik'\,,$$

con k' positiva e minore delle due quantità p, q, sicchè ponendo

$$p'=p-k'\ ,\quad p'=q-k'\,, \tag{57}$$

saranno p', q' positivi.

Abbiasi una superficie S reale d'elemento lineare (52) e cerchiamo di trasformarla mediante la $B_{\sigma k'}$ in un'altra superficie S_1, data dalle solite formole

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}\ \text{ecc.},$$

che sia reale e della medesima classe.

Nelle formole del § 5 dovremo cangiare

$$\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{q}\ ,\ \sqrt{p'}\ ,\ \sqrt{q'}\,,k$$

rispettivamente in

$$\sqrt{ip}\ ,\ \sqrt{-iq}\ ,\ \sqrt{ip'}\ ,\ \sqrt{-iq'}\ ,\ ik'\,,$$

onde le (18) del detto paragrafo (pag. 18), coi segni superiori, diventano

$$\left\{\begin{aligned}
U&=2(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\lambda^2u^2-2(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q'})\lambda u-\frac{ik'}{2}(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\lambda^2+\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\\
V&=2(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\lambda^2v^2-2(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q'})\lambda v-\frac{ik'}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\lambda^2+\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\\
W&=2\lambda\left[\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}(u+v)\lambda+\sqrt{pq'}(u-v)\lambda\right].
\end{aligned}\right. \tag{58}$$

Le formole d'applicabilità (45) § 11 (pag. 32) si scrivono

$$\left\{\begin{aligned}
u_1&=\frac{\sqrt{qp'}\,(u+v)+\sqrt{pq'}\,(u-v)-\sqrt{pq}\,(4uv+ik')\lambda}{2\left[\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda-\sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda+\sqrt{pq}\right]}\\
v_1&=\frac{1}{2\lambda}.
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

Le formole (56) dimostrano che la superficie trasformata S_1 sarà reale solo quando sia

$$\bar{l}=im\ ,\quad \bar{m}=il\,,$$

ossia quando si abbia

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}}=i\,\frac{V}{W}. \tag{60}$$

La condizione poi che la S_1 abbia il medesimo elemento lineare della S si traduce in questo che le nuove variabili u_1, v_1, definite dalle (59), soddisfino alle (56), cioè sia

$$\bar{v}_1=iu_1\,. \tag{61}$$

Ed ora basta applicare il procedimento più volte usato, a cominciare dal § 43.

La (61) dà

$$\bar{\lambda}=\frac{\left[\sqrt{pq'}\,(u-v)-\sqrt{qp'}\,(u+v)\right]\lambda+\sqrt{pq}}{i\left[\sqrt{qp'}\,(u+v)+\sqrt{pq'}\,(u-v)\right]+\sqrt{pq}\,(k'-4iuv)\,\lambda}\,,$$

cioè la relazione bilineare fra $\lambda, \overline{\lambda}$

$$\mathrm{A}\lambda\overline{\lambda} + \mathrm{B}\lambda + \overline{\mathrm{B}}\overline{\lambda} + \mathrm{C} = 0, \tag{62}$$

ove si ponga:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A} = \sqrt{pq}\,(k' - 4iuv) &&, \quad \mathrm{C} = -\sqrt{pq} \\ &\mathrm{B} = \sqrt{qp'}\,(u+v) - \sqrt{pq'}\,(u-v) &&, \quad \overline{\mathrm{B}} = i\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v). \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Le (56) dimostrano che i coefficienti A, C sono reali e B, $\overline{\mathrm{B}}$ complessi coniugati; inoltre pel determinante $\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} - \mathrm{AC}$, a causa delle (57), si ha

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} - \mathrm{AC} = ik'[p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - ipq] = k'[pq - p\beta^2 - q\alpha^2],$$

e però

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} - \mathrm{AC} > 0.$$

Le equazioni differenziali fondamentali (I) § 27 $(\epsilon = +1)$ diventano qui

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= -i\frac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\mathrm{V} - \frac{i}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU} + \mathrm{D'V}) \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= -i\frac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\mathrm{U} - \frac{i}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U} + \mathrm{D''V}), \end{aligned}\right. \tag{64}$$

con

$$\mathrm{H} = pq + ip(u-v)^2 - iq(u+v)^2 = pq - p\beta^2 - q\alpha^2$$

reale e positivo.

Per scrivere le equazioni coniugate delle (64) occorre osservare che, essendo la superficie S reale, sarà pure reale la sua seconda forma fondamentale

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D'}\,du\,dv + \mathrm{D''}\,dv^2,$$

ciò che, per le (56), equivale alle relazioni

$$\overline{\mathrm{D}} = -\mathrm{D''}, \quad \overline{\mathrm{D'}} = -\mathrm{D'}, \quad \overline{\mathrm{D''}} = -\mathrm{D}.$$

Dopo ciò, cangiando nelle (64) i in $-i$, otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\lambda}}{\partial u} &= -\frac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\overline{\mathrm{U}} + \frac{1}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D''}\overline{\mathrm{U}} + \mathrm{D}\overline{\mathrm{V}}) \\ \frac{\partial\overline{\lambda}}{\partial v} &= -\frac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\overline{\mathrm{V}} + \frac{1}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D''}\overline{\mathrm{U}} + \mathrm{D'}\overline{\mathrm{V}}). \end{aligned}\right. \tag{64*}$$

Si verifica facilmente, nel solito modo (§ 43), che le equazioni differenziali (64), (64*) insieme alla equazione in termini finiti (62), formano un sistema completamente integrabile, tenendo conto delle identità

$$\frac{\overline{\mathrm{U}}}{\mathrm{U}} = \frac{\overline{\mathrm{V}}}{\mathrm{V}} = i\frac{\overline{\mathrm{W}}}{\mathrm{W}} = i\frac{\mathrm{A}\overline{\lambda} + \mathrm{B}}{\mathrm{A}\lambda + \overline{\mathrm{B}}},$$

che seguono dalle formole precedenti.

Abbiamo dunque il risultato finale:

Ogni superficie reale S *applicabile sul paraboloide immaginario* $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz$ *(d'elemento lineare* (52)) *appartiene come prima falda focale ad* ∞^2 *congruenze rettilinee reali* W, *le cui seconde falde focali sono superficie* S_1 *della medesima classe.*

È notevole che le attuali trasformazioni si conservano qui anche nel caso del paraboloide *rotondo* $p = q$, mentre esse spariscono pel paraboloide rotondo reale (§ 42).

La classe di superficie applicabili S corrispondente è precisamente quella delle evolute delle superficie W di Weingarten coi raggi principali di curvatura r_1, r_2 legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{2p}\,\mathrm{sen}[2p(r_1 + r_2)]\ ^{1)}.$$

1) Per dimostrare l'asserzione nel testo si osservi che per $p = q$ si ha

$$ds^2 = p(d\alpha^2 + d\beta^2) - (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta)^2,$$

e siccome $\alpha^2 + \beta^2 < p$, si faccia il cangiamento di variabili

$$\alpha = \sqrt{p}\cos\omega\cos\varphi, \quad \beta = \sqrt{p}\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

con che

$$ds^2 = p^2[\mathrm{sen}^4\omega\,d\omega^2 + \cos^2\omega\,d\varphi^2].$$

Questa è precisamente la forma dell'elemento lineare per le evolute delle superficie di Weingarten (cf. vol. I, pag. 292).

Si sa che Weingarten ha determinato in termini finiti questa classe completa di superficie applicabili fino dal 1861 (Lezioni vol. I § 135) e Darboux ne ha dato poi un'elegante costruzione geometrica per mezzo delle superficie di traslazione a curve generatrici di torsioni costanti eguali e di segno contrario (vol. II § 245).

Dalle nostre ricerche risulta ora l'esistenza di classi di congruenze W colle due falde focali appartenenti a questa classe di superficie applicabili.

Capitolo IV.

Il teorema di permutabilità e le sue applicazioni

§ 54.

Considerazioni preliminari sul teorema di permutabilità.

Gli studi sulle deformate delle quadriche che abbiamo esposto fin qui ci hanno condotto a costruire per ogni classe di superficie applicabili sopra una quadrica fondamentale Q, di qualunque specie, una teoria perfettamente analoga, nelle sue parti fondamentali, a quella delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, che ne è d'altronde, come si è visto, un caso particolarissimo. Ma se ci facciamo a considerare il vantaggio così ottenuto per la ricerca effettiva delle superficie della classe, ossia per l'integrazione della corrispondente equazione a derivate parziali del 2.° ordine della applicabilità, vediamo che, al punto attuale, manca ancora quel perfezionamento dei metodi di trasformazione, che per il caso delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche ci venne fornito dal teorema di permutabilità (vol. II §§ 383 a 386).

Data una superficie iniziale S applicabile sulla quadrica fondamentale Q, se vogliamo determinare effettivamente le sue ∞^1 trasformate contigue S_1 per una trasformazione B_k, abbiamo da integrare un'equazione (a differenziali totali) del tipo di Riccati, di cui, nota una soluzione particolare, si trova la generale con quadrature. Così, conosciuta *una* trasformata contigua S_1, si avranno tutte le altre con quadrature. Ora se di una qualunque di queste S_1 cerchiamo alla sua volta le trasformate contigue, fra queste troviamo la primitiva S, e le altre si hanno quindi con quadrature; e così via, applicando indefinitamente il metodo di trasformazione. Così adunque, al punto attuale della nostra teoria, ogni nuova applicazione del processo di trasformazione richiede sempre nuove quadrature.

Il perfezionamento che vi arrecheranno le ricerche del presente Capitolo dipendono, dal punto di vista analitico, dalla proposizione seguente:

Supposto di avere integrata la prima equazione di Riccati per la trasformazione B_k, *per un valore arbitrario della costante* k, *tutte le successive equazioni di Riccati sono insieme integrate in termini finiti, e l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione non richiede più altro che calcoli algebrici e di derivazione.*

Geometricamente poi i risultati enunciati si appoggiano sopra un teorema perfettamente analogo a quello di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, che possiamo enunciare sotto la medesima forma:

TEOREMA DI PERMUTABILITÀ. — *Se di una superficie* S, *applicabile sopra la quadrica fondamentale* Q, *si considerano due superficie trasformate contigue* S_1, S_2 *per mezzo di due trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *a costanti* k_1, k_2 *differenti, esiste una quarta deformata* S' *della medesima quadrica, che si trova rispettivamente legata a* S_1, S_2 *da trasformazioni* B_{k_2}, B_{k_1} *colle costanti invertite. Note le tre deformate* S, S_1, S_2, *la quarta* S' *è perfettamente determinata e costruibile in termini finiti* [1]).

Per dimostrare questo teorema e stabilire le formole relative, noi cominceremo dallo studiare le proprietà relative al caso particolare delle deformate rigate delle quadriche, e da questo poi risaliremo al caso generale.

Qui osserviamo ancora che, in ordine all'enunciato del teorema stesso, si arriva dalla S alla S' sia eseguendo prima una B_{k_1} che da S conduce ad S_1, poi una B_{k_2}, che trasforma S_1 in S', ovvero, passando prima con una B_{k_2} da S a S_2, indi da S_2 a S' con una B_{k_1}. Esso stabilisce quindi che per la composizione di due successive trasformazioni B_k vale una sorta di permutabilità, onde il nome dato al teorema.

§ 55.

Nuove proprietà dell'affinità d'Ivory.

Cominceremo la nostra trattazione dal caso delle deformate rigate del paraboloide iperbolico e prima, seguendo un procedimento che più

---

[1]) V. più avanti, al § 66, la costruzione effettiva.

volte ci ha servito nelle ricerche precedenti, studieremo il caso nel quale la superficie iniziale S si riduce al paraboloide P_0 e le due trasformate contigue S_1, S_2 si restringono rispettivamente a due generatrici g_1, g_2 dei paraboloidi confocali P_{k_1}, P_{k_2}; dimostreremo che in questo caso la quarta superficie S' del teorema di permutabilità è data dal paraboloide stesso, trasportato in conveniente posizione nello spazio. Le proprietà da dimostrarsi si riducono allora a semplici proprietà della corrispondenza d'Ivory fra i paraboloidi confocali, delle quali dobbiamo in primo luogo occuparci.

Siano g, g_1, g_2 tre rispettive generatrici dei tre paraboloidi confocali P_0, P_{k_1}, P_{k_2}, e supponiamole qui senz'altro tutte tre appartenenti al primo sistema (v).

Se, colle notazioni del § 5, poniamo

$$\begin{cases} p_1 = p - k_1, \; q_1 = q + k_1 \\ p_2 = p - k_2, \; q_2 = q + k_2 \end{cases}$$

ed indichiamo rispettivamente con $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ i valori del parametro λ appartenenti a g, g_1, g_2, le equazioni di queste tre rette si scriveranno

$$g)\begin{cases} x = \lambda\sqrt{p}\,z + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} \\[2ex] y = \lambda\sqrt{q}\,z - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda} \end{cases} \qquad g_1)\begin{cases} x_1 = \lambda_1\sqrt{p_1}\,\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1} \\[2ex] y_1 = \lambda_1\sqrt{q_1}\,\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1} \\[2ex] z_1 = \zeta_1 + \dfrac{k_1}{2} \end{cases}$$

$$g_2)\begin{cases} x_2 = \lambda_2\sqrt{p_2}\,\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2} \\[2ex] y_2 = \lambda_2\sqrt{q_2}\,\zeta_2 - \dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2} \\[2ex] z_2 = \zeta_2 + \dfrac{k_2}{2}. \end{cases}$$

L'affinità d'Ivory fra i paraboloidi confocali P_{k_1}, P_{k_2} fa corrispondere ai due punti $M_1 \equiv (x_1\, y_1\, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2\, y_2\, z_2)$ di P_{k_1}, P_{k_2} rispettivamente due punti di P_{k_2}, P_{k_1} che indicheremo con

$$\overline{M}_1 \equiv (\bar{x}_1\, \bar{y}_1\, \bar{z}_1)\,, \quad \overline{M}_2 \equiv (\bar{x}_2\, \bar{y}_2\, \bar{z}_2)\,.$$

Mentre M_1 descrive la generatrice g_1 di P_{k_1}, il punto $\overline{M}_1$ descriverà su P_{k_2} una generatrice $\bar{g}_1$ corrispondente (per tratti eguali); e similmente alla g_2 di P_{k_2} corrisponderà su P_{k_1} una generatrice $\bar{g}_2$. Per le formole dell'affinità d' Ivory (§ 11), le equazioni di queste due nuove generatrici $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ sono

$$\bar{g}_1)\begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda_1\sqrt{p_2}\,\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_1} \\ \bar{y}_1 = \lambda_1\sqrt{q_2}\,\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_1} \\ \bar{z}_1 = \zeta_1 + \dfrac{k_2}{2} \end{cases} \qquad \bar{g}_2)\begin{cases} \bar{x}_2 = \lambda_2\sqrt{p_1}\,\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_2} \\ \bar{y}_2 = \lambda_2\sqrt{q_1}\,\zeta_2 - \dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_2} \\ \bar{z}_2 = \zeta_2 + \dfrac{k_1}{2}. \end{cases}$$

Sappiamo dal § 14 che esiste un movimento rigido M, pel quale la coppia di rette (g_1, g_2) coi loro punti M_1, M_2 si sovrappone alla coppia $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ ed ai punti corrispondenti $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$.

Consideriamo ora la quadrica determinata dalle tre rette g, g_1, g_2, che diremo la quadrica (g, g_1, g_2). Essa ha a comune col paraboloide P_0 la generatrice g e nessun' altra generatrice, come è facile intendere a priori e come risulterà confermato in seguito dal calcolo. La prima proposizione che andremo a stabilire sarà la seguente: *Se si assoggetta la quadrica (g, g_1, g_2) al movimento rigido* M, *che trasporta la coppia (g_1, g_2) nella coppia $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$, essa taglierà ancora, dopo il movimento, il paraboloide* P_0 *in una ed in una sola generatrice g' del primo sistema.*

Cominciamo dall'osservare che le generatrici del secondo sistema della quadrica (g, g_1, g_2) segnano sulle rette g_1, g_2 coppie di punti M_1, M_2 che generano due punteggiate projettive; ad ogni punto M_1 corrisponde così un determinato punto M_2 di g_2. Questa corrispondenza (projettività) sarà analiticamente espressa da una relazione bilineare fra ζ_1, ζ_2, sia

$$(1) \qquad A\zeta_1\zeta_2 + B\zeta_1 + C\zeta_2 + D = 0.$$

Vogliamo anzi tutto calcolare, in funzione di $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ i coefficienti A, B, C, D. Basterebbe per questo esprimere che ogni congiungente M_1M_2 si appoggia alla retta g, ma per lo scopo nostro è più utile procedere nel modo seguente. Alla coppia di punti M_1M_2 facciamo corrispondere quel punto $M \equiv (x\,y\,z)$ di g, ove il piano di questa generatrice e della retta M_1M_2 tocca il paraboloide fondamentale P_0.

Scrivendo che il piano tangente in $M \equiv (x\,y\,z)$ a P_0 passa pel punto $M_1 \equiv (x_1\,y_1\,z_1)$, abbiamo la equazione

$$\frac{xx_1}{p} - \frac{yy_1}{q} = z + z_1,$$

che, per le equazioni sopra scritte di g, g_1, si traduce nella relazione bilineare fra z e ζ_1:

$$\left[(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\lambda\lambda_1 . \zeta_1 + (\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\frac{\lambda}{2\lambda_1} - \sqrt{pq}\right] z +$$
$$+ \left[(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\frac{\lambda_1}{2\lambda} - \sqrt{pq}\right]\zeta_1 + \frac{\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}}{4\lambda\lambda_1} - \frac{k_1}{2}\sqrt{pq} = 0.$$

Similmente avremo fra z e ζ_2 l'altra relazione

$$\left[(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda\lambda_2 . \zeta_2 + (\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\frac{\lambda}{2\lambda_2} - \sqrt{pq}\right] z +$$
$$+ \left[(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\frac{\lambda_2}{2\lambda} - \sqrt{pq}\right]\zeta_2 + \frac{\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}}{4\lambda\lambda_2} - \frac{k_2}{2}\sqrt{pq} = 0;$$

ed, eliminando fra queste due la z, ne risulta la relazione bilineare cercata (1) fra ζ_1, ζ_2 coi valori seguenti pei coefficienti A, B, C, D:

$$(2)\begin{cases} A = (\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2 + (\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda\lambda_2 + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda\lambda_1 \\ B = (\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\dfrac{\lambda}{2\lambda_2} + (\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\dfrac{\lambda_1}{2\lambda} - (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\dfrac{\lambda_1}{2\lambda_2} + \\ \qquad + \dfrac{k_2}{2}(\sqrt{pq_1} - \sqrt{pq_1})\lambda\lambda_1 - \sqrt{pq} \\ C = -(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\dfrac{\lambda}{2\lambda_1} - (\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\dfrac{\lambda_2}{2\lambda} + (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1} - \\ \qquad - \dfrac{k_1}{2}(\sqrt{pq_2} - \sqrt{pq_2})\lambda\lambda_2 + \sqrt{pq} \\ D = \dfrac{\sqrt{q_1p_2} - \sqrt{p_1q_2}}{4\lambda_1\lambda_2} + \dfrac{\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2}}{4\lambda\lambda_2} + \dfrac{\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}}{4\lambda\lambda_1} + \\ \qquad + k_1(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_1})\dfrac{\lambda}{4\lambda_2} - k_2(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\dfrac{\lambda}{4\lambda_1} + \dfrac{k_2 - k_1}{2}\sqrt{pq}. \end{cases}$$

Si osservi che, scambiando fra loro gli indici 1 e 2, i coefficienti estremi A, D cangiano segno, i medii B, C si permutano cangiati di segno e la relazione bilineare (1) resta invariata, come era prevedibile a priori.

§ 56.

Determinazione della quarta generatrice g'.

Per dimostrare la proposizione enunciata al paragrafo precedente, siccome la quadrica (g, g_1, g_2) dopo il movimento M diventa il luogo di tutte le congiungenti $\overline{M}_1\overline{M}_2$, dobbiamo provare che esiste una ed una sola generatrice g' di P_0 appoggiata a tutte queste rette $\overline{M}_1\overline{M}_2$. Indichiamo con λ' il valore incognito del parametro λ per questa generatrice g', e cerchiamo di determinarlo. Siccome le equazioni delle rette $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ si ottengono (§ 55) scambiando k_1 con k_2 e conseguentemente p_1 con p_2, q_1 con q_2, noi esprimeremo la condizione che la retta g' si appoggi a tutte le rette $\overline{M}_1\overline{M}_2$ mediante la relazione bilineare

$$(1^*) \qquad A'\zeta_1\zeta_2 + B'\zeta_1 + C'\zeta_2 + D' = 0,$$

dove i valori di A', B', C', D' si ottengono dai valori (2) di A, B, C, D cangiando in questi λ in λ' e scambiandovi k_1 con k_2, p_1 con p_2 e q_1 con q_2. Le due equazioni bilineari (1) e (1*) debbono coincidere ed il nostro teorema sarà dunque provato se dimostriamo che esiste uno ed un solo valore dell'incognita λ' che soddisfa simultaneamente alle tre equazioni

$$(3) \qquad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{D'}{D}.$$

Indicando con $\frac{\lambda}{2\lambda'}\zeta$ il valor comune dei quattro rapporti (3), ove ζ sarà una nuova incognita, e ponendo ancora

$$(4) \qquad \xi = 2\lambda'^2, \quad \eta = 2\lambda',$$

le condizioni da soddisfarsi si traducono nelle *quattro* seguenti equazioni lineari per le tre incognite ξ, η, ζ:

$$(5_1) \quad \left[(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_1 + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_2\right].\xi + (\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2.\eta +$$
$$+ \left\{\left[(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_2 + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_1\right]\lambda^2 + (\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2\lambda\right\}\zeta = 0$$

$$(5_2) \quad \left[k_1(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_1\lambda_2 - (\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\right].\xi +$$
$$+ \left[2\sqrt{pq}\,\lambda_2 + (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\right].\eta +$$
$$+ \left\{\left[(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}) + k_2(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_1\lambda_2\right]\lambda^2 - \left[2\sqrt{pq}\,\lambda_2 + (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\right]\lambda +\right.$$
$$\left. + (\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\lambda_1\lambda_2\right\}\zeta = 2(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\lambda_1\lambda_2$$

$$(5_3) \quad \left[k_2(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_1\lambda_2 + (\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\right]\xi - \left[2\sqrt{pq}\,\lambda_1 + (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\lambda_2\right]\eta +$$
$$+ \left\{\left[k_1(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_1\lambda_2 - (\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\right]\lambda^2 + \left[2\sqrt{pq}\,\lambda_1 + (\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2})\lambda_2\right]\lambda -\right.$$
$$\left. - (\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\lambda_1\lambda_2\right\}. = -2(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\lambda_1\lambda_2$$

$$(5_4) \quad \left[k_1(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2})\lambda_2 - k_2(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\lambda_1\right]\xi +$$
$$+ \left[2(k_2 - k_1)(\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2 + (\sqrt{q_1p_2} - \sqrt{p_1q_2})\right]\eta +$$
$$+ \left\{\left[k_1(\sqrt{qp_2} + \sqrt{qp_2})\lambda_1 - k_2(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1})\lambda_2\right]\lambda^2 +\right.$$
$$\left. + \left[2(k_2 - k_1)\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2 + (\sqrt{q_1p_2} - \sqrt{p_1q_2})\right]\lambda + (\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_1 + (\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\lambda_2\right\}\zeta =$$
$$= 2(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_1 + 2(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_2.$$

Noi dobbiamo dimostrare che queste quattro equazioni lineari in ξ, η, ζ ammettono una ed una sola soluzione per la quale risulta inoltre, conformemente alle (4),

$$\eta^2 = 2\xi.$$

Cominciamo per ciò dal prendere le prime tre equazioni (5_1), (5_2), (5_3) e risolviamole colla regola di Cramer; avremo

$$(6) \qquad \xi = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Per calcolare i valori dei determinanti $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ introduciamo le tre seguenti quantità L, P, N

$$(7)\quad\begin{cases} L=(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1})\lambda_1+(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_2\,,\\ P=(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_1+(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1})\lambda_2\,,\\ N=(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})^2-(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})^2+\\ \quad+\left[k_2(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})-k_1(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})\right]\lambda_1\lambda_2\,,\end{cases}$$

e poniamo inoltre

$$(8)\qquad h=\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})^2-(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})^2}{\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}}\,.$$

Osserviamo che si hanno le identità, facili a verificarsi,

$$(8_1)\quad\begin{cases} h=\dfrac{(\sqrt{q_1p_2}+\sqrt{p_1q_2})(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})-2\sqrt{pq}(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}}\\ h=\dfrac{(\sqrt{q_1p_2}+\sqrt{p_1q_2})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})-2\sqrt{pq}(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})}{\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}}\,.\end{cases}$$

Tenendo conto di queste identità e delle altre

$$\frac{k_1(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}}=\frac{k_2(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})}{\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}}=\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{p+q}\,,$$

si vede primieramente che la quantità N definita dalla (7_3) può anche scriversi

$$(9)\quad N=h(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2})\left[1+\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})}{p+q}\lambda_1\lambda_2\right],$$

e pei valori cercati di $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ risulta, dopo alcune riduzioni elementari,

$$(10)\quad\begin{cases}\Delta=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{h}(N\lambda-hP)^2\,,\ \Delta_1=2h\lambda_1\lambda_2\left[L\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2\right]^2\\ \Delta_2=2\lambda_1\lambda_2\left[L\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2\right].(N\lambda-hP)\,,\\ \Delta_3=-2\lambda_1\lambda_2\left[hLP+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2N\right].\end{cases}$$

È intanto evidente di qui che si ha

$$\Delta_2^2=2\Delta_1\Delta\,,$$

ossia $\eta^2=2\xi$, come si era asserito.

Resta ora soltanto da verificare che i valori così determinati colle (6) per ξ, η, ζ soddisfano altresì la (5_4), ossia che sussiste l'identità

$$\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{p+q}P\Delta_1+\left[2(k_2-k_1)\sqrt{pq}\lambda_1\lambda_2+(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2})\right]\Delta_2+$$
$$+\left\{\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{p+q}L\lambda^2+\left[2(k_2-k_1)\sqrt{pq}\lambda_1\lambda_2+(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{q_1p_2})\right]\lambda-P\right\}\Delta_3-$$
$$-2L\Delta=0\,.$$

Sostituendo qui i valori (10) per $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, si ha nel primo membro un polinomio di 2.° grado in λ, i cui coefficienti, come facilmente si verifica, sono identicamente nulli.

La proposizione enunciata risulta così dimostrata ed abbiamo di più la formola effettiva che dà il valore cercato di λ'

$$(10^*)\qquad \lambda'=\frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{\Delta}=h\frac{L\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2}{N\lambda-hP}\,.$$

Sostituendovi per L, P, N i valori effettivi (7), (9), abbiamo la formola definitiva

$$(\mathrm{I})\quad \lambda'=\frac{\left[(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1})\lambda_1+(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_2\right]\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2}{\Phi}\,,$$

dove si è posto:

$$\Phi=(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2})\left[1+\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})}{p+q}\lambda_1\lambda_2\right]\lambda+$$
$$+(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2})\lambda_1+(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})\lambda_2\,.$$

Se in queste si fa $k_1=k_2$, indi $p_1=p_2$, $q_1=q_2$, ne viene semplicemente $\lambda'=\lambda$ e la generatrice g' coincide con g stessa. Ne risulta appunto, come avevamo asserito al § 55, che la quadrica (g, g_1, g_2) ha a comune col paraboloide P_0 la sola generatrice g.

Osserviamo poi che la formola (I), ridotta a forma intera, assume la forma quadrilineare in $\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2$

$$(\mathrm{I}^*)\quad(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\left[\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})}{p+q}\,.\,\lambda\lambda'\lambda_1\lambda_2+\lambda'\lambda+\lambda_1\lambda_2\right]+$$
$$+(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})(\lambda_1\lambda'+\lambda_2\lambda)+(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1})(\lambda_2\lambda'+\lambda_1\lambda)=0\,.$$

Essa non varia sia scambiando k_1 con k_2 e λ con λ', sia scambiando fra loro $\lambda_1 \lambda_2$ e λ con λ', proprietà di cui è facile rendersi ragione a priori.

§ 57.

Birapporto costante delle quattro rette $g, \bar{g}, g_1, g_2$.

Consideriamo il movimento M^{-1}, inverso di M, che trasporta la coppia $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ nella primitiva (g_1, g_2) e quindi la quadrica $(g', \bar{g}_1, \bar{g}_2)$ nella (g, g_1, g_2). Esso trasporterà la generatrice g' su quest'ultima quadrica, in una certa posizione che indicheremo con $\bar{g}$. Le quattro rette

$$g_1, g_2, g, \bar{g},$$

come generatrici di uno stesso sistema sulla detta quadrica, formeranno fra loro un certo birapporto

$$\Omega = (g_1, g_2, g, \bar{g}).$$

Noi vogliamo dimostrare la semplice ed importante proprietà:

Il birapporto $\Omega = (g_1, g_2, g, \bar{g})$ è costante (indipendente da $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$) e precisamente eguale al rapporto $\frac{k_1}{k_2}$ delle due costanti k_1, k_2.

Calcoliamo effettivamente il valore di Ω.

Una qualunque delle congiungenti $M_1 M_2$ incontrerà le due rette $g, \bar{g}$ in due punti che indicheremo rispettivamente con $N, \bar{N}$, ed avremo

$$\Omega = (M_1 M_2 N \bar{N}).$$

Indicando con $m, \bar{m}$ i rapporti semplici dei segmenti

$$m = \frac{M_1 N}{N M_2}, \quad \bar{m} = \frac{M_1 \bar{N}}{\bar{N} M_2},$$

sarà

$$\Omega = \frac{m}{\bar{m}}.$$

Ci basterà calcolare m, poichè un semplice cangiamento nelle notazioni darà il valore di $\bar{m}$.

Se X, Y, Z denotano le coordinate di N, avremo

$$X = \frac{m x_2 + x_1}{m+1}, \quad Y = \frac{m y_2 + y_1}{m+1}, \quad Z = \frac{m z_2 + z_1}{m+1}.$$

Ma poichè il punto N è sopra g ed i punti M_1, M_2 rispettivamente sopra g_1, g_2, dalle equazioni di queste tre rette (§ 55) si traggono le due equazioni per m

$$\begin{cases} \dfrac{m\left(\lambda_2 \sqrt{p_2}\,\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2}\right) + \lambda_1 \sqrt{p_1}\,\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1}}{m+1} = \lambda \sqrt{p}\, \dfrac{m\left(\zeta_2 + \dfrac{k_2}{2}\right) + \zeta_1 + \dfrac{k_1}{2}}{m+1} + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} \\[2ex] \dfrac{m\left(\lambda_2 \sqrt{q_2}\,\zeta_2 - \dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2}\right) + \lambda_1 \sqrt{q_1}\,\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1}}{m+1} = \lambda \sqrt{q}\, \dfrac{m\left(\zeta_2 + \dfrac{k_2}{2}\right) + \zeta_1 + \dfrac{k_1}{2}}{m+1} - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda}, \end{cases}$$

onde deduciamo per m la doppia espressione

$$m = \frac{(\lambda\sqrt{p} - \lambda_1\sqrt{p_1})\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} - \dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1} + \dfrac{k_1}{2}\lambda\sqrt{p}}{(\lambda_2\sqrt{p_2} - \lambda\sqrt{p})\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} - \dfrac{k_2}{2}\lambda\sqrt{p}} = \frac{(\lambda\sqrt{q} - \lambda_1\sqrt{q_1})\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1} - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda} + \dfrac{k_1}{2}\lambda\sqrt{q}}{(\lambda_2\sqrt{q_2} - \lambda\sqrt{q})\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda} - \dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{k_2}{2}\lambda\sqrt{q}}.$$

L'eguagliare questi due valori di m conduce, come è naturale, nuovamente alla equazione bilineare (1) fra ζ_1 e ζ_2. Possiamo utilizzare questa doppia forma del valore di m per semplificarne l'espressione. A tale oggetto moltiplichiamo i due termini del primo quoziente per $\sqrt{q}$, quelli del secondo per $\sqrt{p}$ e sottragghiamo; ne risulta

$$(11) \qquad m = \frac{(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_1\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}}{2\lambda_1} + \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}{(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}.$$

Ora per avere il valore di $\bar{m}$ si osservi che, indicando con N' il punto ove la $\bar{M}_1 \bar{M}_2$ interseca la g', avremo

$$\bar{m} = \frac{\bar{M}_1 N'}{N' \bar{M}_2},$$

poichè il movimento M sovrappone $M_1, M_2, \bar{N}$ rispettivamente a $\bar{M}_1, \bar{M}_2, N'$. Ne risulta che il valore di $\bar{m}$ si deduce da quello superiormente calcolato per m semplicemente scambiando k_1 con k_2, indi p_1 con p_2 e q_1 con q_2, e cangiando λ in λ'; dunque

$$(11^*) \qquad \bar{m} = \frac{(\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_1\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{2\lambda_1} + \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}{(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}.$$

Dividendo la (11) per la (11*), si ha dunque pel cercato valore di Ω

$$\Omega = \frac{(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\lambda_1\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{2\lambda_1} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}{(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_1\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{2\lambda_1} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}} \times$$

$$\times \frac{(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}{(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}.$$

Ora l'equazione bilineare (1) ci dà

$$\zeta_2 = -\frac{B\zeta_1 + D}{A\zeta_1 + C},$$

e poichè Ω è certamente indipendente da ζ_1, possiamo calcolarne il valore dalla precedente facendovi per es.

$$\zeta_1 = \infty \ , \ \zeta_2 = -\frac{B}{A},$$

onde segue

$$\Omega = \frac{\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}}{\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}} \; \frac{\left(\dfrac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{\lambda_2} - 2\dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}\right) A + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_2 \, . \, 2B}{\left(\dfrac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{\lambda_2} - 2\dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}\right) A + (\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_2 \, . \, 2B}.$$

Ricorriamo ora al valore (2_1) di A, che per la (7_1) può scriversi

$$A = L\lambda + (\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2,$$

e quindi per la (10*)

$$\frac{A}{\lambda'} = \frac{N\lambda - hP}{h};$$

così abbiamo

$$\Omega = \frac{\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}}{\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}} \; \frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})A + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_2^2 \, . \, 2B - 2\sqrt{pq}\,\dfrac{\lambda_2}{h}(N\lambda - hP)}{\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2} - 2\sqrt{pq}\,\dfrac{\lambda_2}{\lambda}\right)A + (\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_2^2 \, . \, 2B}.$$

Per dimostrare la formola enunciata

$$\Omega = \frac{k_1}{k_2},$$

conviene verificare l'identità

$$k_2(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\left[(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})A + (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda_2^2 \, . \, 2B - 2\frac{\sqrt{pq}\,\lambda_2}{h}(N\lambda - hP)\right] =$$

$$= k_1(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\left\{\left[(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}) - 2\frac{\sqrt{pq}\,\lambda_2}{\lambda}\right]A + (\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_2^2 \, . \, 2B\right\}.$$

Ora se si osserva che identicamente

$$k_2(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}) = k_1(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}),$$

la precedente, moltiplicata per $\dfrac{\lambda}{\lambda_2}$, resta

$$[k_1(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})^2 - k_2(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})^2] \, . \, 2\lambda\lambda_2 B + 2k_1\sqrt{pq}(F\overline{qp_2} - \sqrt{pq_2})A +$$

$$+ 2k_2\sqrt{pq}(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\left(\frac{N}{h}\lambda^2 - P\lambda\right) = 0.$$

Basta sostituire qui per A, B, N, P i valori (2), (7) per verificare che si ha nel primo membro un polinomio di 2.° grado in λ identicamente nullo. Il nostro teorema è così dimostrato.

§ 58.

Conseguenze — Il teorema di permutabilità al limite.

Dai risultati ora ottenuti deduciamo alcune conseguenze che vengono in sostanza a dimostrare il teorema di permutabilità nel caso limite, indicato al principio del § 55, ove la superficie S si riduca al paraboloide P_0 e le due trasformate S_1, S_2 si restringano rispettivamente alle due generatrici g_1, g_2 di P_{k_1}, P_{k_2}.

Se facciamo percorrere alla generatrice g il paraboloide P_0, tenendo fissi λ_1, λ_2 e rendendo variabile λ, l'altra generatrice g' percorre proiettivamente [1]) il paraboloide stesso, e la quarta retta $\bar{g}$ percorre il paraboloide congruente, che indicheremo con P'_0, in cui si trasporta P_0 pel movimento M^{-1}. Ma abbiamo visto sopra che le quattro generatrici $(g_1, g_2, g, \bar{g})$ della quadrica (g_1, g_2, g) formano il birapporto costante $\frac{k_1}{k_2}$. Se consideriamo dunque l'*omografia biassiale* Φ di cui g_1, g_2 sono le due punteggiate di punti uniti e $\frac{k_1}{k_2}$ la costante dell'omografia, possiamo dire:

L'omografia biassiale Φ *trasporta il paraboloide* P_0 *nel paraboloide congruente* P'_0 *precisamente come il movimento* M^{-1}.

Ciò equivale a dire che l'omografia ΦM, composta di Φ e di M, trasforma P_0 in sè medesimo e sui punti delle due rette g_1, g_2 ha il medesimo effetto come il movimento M.

Ciò posto, ricordiamo che ai due punti M_1, M_2 di g_1, g_2 corrisponde quel punto M di g ove il piano $M_1 M_2 g$ tocca P_0; e medesimamente ai punti $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ corrisponde su g' quel punto M' ove il piano $\overline{M}_1 \overline{M}_2 g'$ tocca P_0 stesso. Dunque il movimento M^{-1}, che trasporta $\overline{M}_1, \overline{M}_2, g'$ in $M_1, M_2, \bar{g}$ e il paraboloide P_0 in P'_0, trasporterà M' nel punto $\overline{M}$ ove il piano $M_1 M_2 \bar{g}$ tocca P'_0. Dopo ciò è evidente che l'*omografia* Φ *sopra considerata farà corrispondere al punto* M *il punto* $\overline{M}$. Per ciò la retta $M\overline{M}$ si appoggierà ad ambedue le rette g_1, g_2 e i due punti d'incontro di $M\overline{M}$ con queste due rette formeranno con $M, \overline{M}$ il birapporto $\frac{k_1}{k_2}$. Segue di qui in particolare che i due piani (M, g_1), $(\overline{M}, g_1)$ coincidono e così gli altri due (M, g_2), $(\overline{M}, g_2)$. Ma il movimento M trasporta i punti $M_1, M_2, \overline{M}$ rispettivamente nei punti $\overline{M}_1, \overline{M}_2, M'$ e le rette g_1, g_2 in $\bar{g}_1, \bar{g}_2$; esso trasporta quindi i piani

$$(\overline{M}, g_1) \equiv (M, g_1)\ ,\ (\overline{M}, g_2) \equiv (M, g_2)$$

rispettivamente nei piani $(M', \bar{g}_1)$, $(M', \bar{g}_2)$.

Enunciamo esplicitamente questa proprietà importante per il seguito:

Il movimento M *che trasporta la coppia* (g_1, g_2) *e i suoi punti* M_1, M_2 *nella coppia* $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ *coi suoi punti* $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ *sovrappone altresì il piano* (M, g_1) *al piano* $(M', \bar{g}_1)$ *e similmente il piano* (M, g_2) *al piano* $(M', \bar{g}_2)$.

[1]) Si ricordi che per la (I) λ' è funzione lineare di λ.

Facciamoci ora a considerare i due paraboloidi congruenti P_0, P'_0, posti dall'omografia Φ in corrispondenza di punto a punto, tale che i loro piani tangenti in punti corrispondenti $M, \overline{M}$ incontrano le due rette g_1, g_2 nei medesimi punti M_1, M_2. La configurazione formata dai due paraboloidi P_0, P'_0 e dalle due rette fisse g_1, g_2 può considerarsi come caso limite della configurazione Ω (S, S', S_1, S_2) dell'enunciato teorema di permutabilità (§ 54), le superficie S_1, S_2 essendo rispettivamente contratte nelle due rette g_1, g_2. È invero evidente (cf. § 8 in fine) che g_1 rappresenta una trasformata S_1 di P_0 per la B_{k_1} ed una trasformata di P'_0 per la B_{k_2}, e similmente g_2 una trasformata S_2 di P_0 mediante B_{k_2} e di P'_0 mediante B_{k_1}.

Da ultimo ritorniamo sull'osservazione già fatta sopra che: *l'omografia* ΦM *cangia il paraboloide in sè stesso e trasporta la coppia* (g_1, g_2) *ed i suoi punti* M_1, M_2 *nella coppia* $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ *e nei suoi punti* $\overline{M}_1, \overline{M}_2$, per darne una nuova interpretazione in geometria non-euclidea. Se prendiamo P_0 per assoluto di una metrica del Cayley (a ds^2 indefinito), l'omografia $\overline{M} = \Phi M$ rappresenta in questa metrica un movimento. D'altronde la schiera di quadriche confocali a P_0 nel senso euclideo è ancora una schiera di quadriche omofocali nella metrica Cayleyana. Il movimento $\overline{M}$ non-euclideo compie precisamente, rispetto a questa metrica, il medesimo ufficio come il movimento M euclideo nella metrica ordinaria. Questo dipende dal fatto che tutte le proprietà dell'affinità d'Ivory valgono egualmente nella metrica non-euclidea, come si può facilmente dimostrare. Ed anzi, servendosi di queste considerazioni di metrica non-euclidea, si riconosce a priori l'esistenza della omografia biassiale $\Phi = \overline{M} M^{-1}$, che sopra abbiamo dedotto direttamente dalle ricerche precedenti. Per tal modo si giungerebbe ad una nuova dimostrazione dei risultati stabiliti, con calcoli molto più semplici.

§ 59.

Preparativi pel teorema di permutabilità.

Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti sono di natura elementare e corrispondono a semplici proprietà dell'affinità d'Ivory. Per prepararci la via alla dimostrazione del teorema di permutabilità, conviene ora procedere ad altri calcoli di natura differenziale.

Sia R una deformata rigata del paraboloide fondamentale P_0, siano R_1, R_2 due trasformate della R per mezzo delle trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}, e indichiamo con

$$r\,,\ r_1\,,\ r_2$$

una terna variabile di generatrici corrispondenti di R, R_1, R_2. Se si distende R sopra P_0, la retta r andrà a sovrapporsi ad una certa generatrice $g \equiv (\lambda)$ [1]) di P_0, e le due rette r_1, r_2, trascinate in sistema invariabile da r, si disporranno rispettivamente sui due paraboloidi P_{k_1}, P_{k_2} in due loro generatrici $g_1 \equiv (\lambda_1)$, $g_2 \equiv (\lambda_2)$. Se ricordiamo che $\lambda = \frac{1}{2v}$, dalla equazione differenziale fondamentale (I) § 7 (pag. 19) vediamo che λ_1, considerata come funzione di $v = \frac{1}{2\lambda}$, soddisferà all'equazione differenziale

$$(12)\quad \frac{d\lambda_1}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_1}\left\{\left[2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)v^2+\frac{k_1}{2}\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\right]\lambda_1^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)v\,.\,\lambda_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\right\};$$

similmente si avrà l'altra

$$(12^*)\quad \frac{d\lambda_2}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_2}\left\{\left[2\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)v^2+\frac{k_2}{2}\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\right]\lambda_2^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)v\,.\,\lambda_2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\right\}.$$

Dividendo la (12) per la (12*) ed esprimendo v per λ, ne segue

$$(13)\quad \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda^2\right]\lambda_1^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_1\lambda+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda^2}{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda^2\right]\lambda_2^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_2\lambda+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda^2}.$$

Supponendo adunque che ad una generatrice variabile λ di P_0 si facciano corrispondere rispettivamente sui paraboloidi confocali P_{k_1}, P_{k_2}

[1]) Con questa notazione indichiamo che la generatrice g corrisponde al valore λ del parametro.

due generatrici λ_1, λ_2 vediamo che: se esiste una deformazione del paraboloide P_0 in una rigata R tale che, ciascuna generatrice (λ) di P_0 trascinando seco in sistema invariabile le due $(\lambda_1), (\lambda_2)$ di P_{k_1}, P_{k_2}, queste abbiano per luogo, dopo la deformazione, due rigate R_1, R_2, trasformate di R mediante due trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}, le due funzioni λ_1, λ_2 di λ dovranno soddisfare la relazione differenziale (13). Ma quel che più importa pel nostro scopo è di osservare che questa condizione è anche sufficiente, cioè: *Se le due funzioni λ_1, λ_2 di λ soddisfano la relazione differenziale* (13), *esisterà una (ed una sola) deformazione del paraboloide* P_0 *in una rigata* R, *tale che le generatrici* $(\lambda_1), (\lambda_2)$ *di* P_{k_1}, P_{k_2} *rispettivamente, trascinate dalla corrispondente* (λ), *avranno per luoghi, dopo la deformazione, due rigate* R_1, R_2 *trasformate di* R *per due trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2}.

La dimostrazione segue facilmente dal teorema alla fine del § 8. Esiste infatti, ed è individuata, una deformazione di P in una tale rigata R che la generatrice (λ_1) di P_{k_1}, trascinata dalla corrispondente (λ), abbia per luogo dopo la deformazione una rigata R_1 trasformata di R mediante B_{k_1}. La deformazione stessa è determinata dal valore di $\varphi(v)$, che si ha dalla (12). Similmente esisterà una seconda deformazione analoga scambiando k_1 con k^2 e λ_1 con λ_2; ma le due deformazioni coincidono perchè, in virtù della (13), alle due appartiene il medesimo valore per la funzione $\varphi(v)$.

Ciò premesso, supponiamo ancora che R sia una deformata rigata (qualunque) di P_0 e R_1, R_2 due sue trasformate mediante le trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2} e indichiamo con

$$\lambda\,,\ \lambda_1\,,\ \lambda_2$$

i valori del parametro λ per tre generatrici corrispondenti r, r_1, r_2. Saranno λ_1, λ_2 due funzioni di λ soddisfacenti alla (13). Ora prendiamo quella funzione λ' di λ che è data dalla formola finale (I) del § 56, (pag. 164).

Dimostriamo che: *considerando λ_1, λ_2 come funzioni di λ' esse soddisfano alla relazione differenziale che viene dalla* (13) *cangiandovi λ in λ' e scambiando k_1 con k_2, indi p_1 con p_2, q_1 con q_2.* Dobbiamo dunque provare che si avrà

$$(13^*)\quad \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{k_1}{k_2}\,\frac{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda'^2\right]\lambda_1^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_1\lambda'+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda'^2}{\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda'^2\right]\lambda_2^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_2\lambda'+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda'^2}.$$

Paragonandola colla (13), e ricordando che per le (6)

$$2\lambda'^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\quad 2\lambda' = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,$$

si vede che la (13*) equivale alla relazione seguente

$$(14)\qquad \frac{\begin{aligned}&\left[2\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\Delta+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\Delta_1\right]\lambda_1^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_1\Delta_2+\\&\qquad\qquad+\left(\mathrm{F}\overline{qp_2}+\mathrm{F}\overline{pq_2}\right)\Delta_1\end{aligned}}{\begin{aligned}&\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_1^2\right]\lambda^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_1\lambda+\\&\qquad\qquad+\left(\sqrt{pq_1}+\sqrt{qp_1}\right)\lambda_1^2\end{aligned}}=$$

$$=\frac{k_2^2}{k_1^2}\,\frac{\begin{aligned}&\left[2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\Delta+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\Delta_1\right]\lambda_2^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_2\Delta_2+\\&\qquad\qquad+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\Delta_1\end{aligned}}{\begin{aligned}&\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda_2^2\right]\lambda^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_2\lambda+\\&\qquad\qquad+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda_2^2\end{aligned}}\ .$$

Si osservi ora che, per le formole (7), (10), i valori di Δ, Δ_1, Δ_2 non cambiano scambiando (λ_1, λ_2), (k_1, k_2), (p_1, p_2), (q_1, q_2), onde il secondo membro della (14), prescindendo dal fattore $\frac{k_2^2}{k_1^2}$, si deduce dal primo precisamente coi detti scambi. Ma se nel primo membro della (14) sostituiamo per Δ, Δ_1, Δ_2 i valori (10) si vede che il numeratore è un polinomio di 2.° grado in λ come il denominatore, e il loro quoziente è indipendente da λ ed eguale alla espressione seguente

$$\begin{aligned}\Theta=\frac{2h\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}\Big\{&\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\left[\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1+\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_2\right]^2+\\&+\left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_2^2\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda_1^2\right]+\\&+2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\left[\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1+\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_2\right]\lambda_1\Big\}.\end{aligned}$$

Se indichiamo dunque con Θ_1 ciò che diventa l'espressione stessa scambiandovi gli indici 1 e 2, la (14) si riduce all'identità

$$k_1^2\,\Theta = k_2^2\,\Theta_1\ ,$$

che si verifica con breve calcolo.

Dunque la relazione (13*) è in effetto verificata, onde deduciamo pel teorema dimostrato più sopra: *Esiste una deformazione perfettamente determinata del paraboloide* P_0 *in una rigata* R', *dopo la quale le generatrici* (λ_1), (λ_2) *di* P_{k_2}, P_{k_1} *rispettivamente, trascinate in sistema invariabile dalla corrispondente* (λ') *di* P_0 *avranno per luoghi due nuove deformate* R'_1, R'_2 *di* P_0, *legate rispettivamente a* R' *da una* B_{k_2} *e da una* B_{k_1}.

Ed ora ci proponiamo di dimostrare che un medesimo movimento sovrappone la coppia (R'_1, R'_2) di superficie alla coppia primitiva (R_1, R_2), dopo di che il teorema di permutabilità sarà dimostrato.

§ 60.

Congruenza delle due coppie di superficie (R_1, R_2), (R'_1, R'_2).

Pel modo stesso come, data la terna R, R_1, R_2 di deformate del paraboloide, abbiamo costruita l'altra R', R'_1, R'_2, resta stabilita fra queste superficie una corrispondenza di punto a punto. Siano

$$r\,,\,r_1\,,\,r_2\,;\ r'\,,\,r'_1\,,\,r'_2$$

sei loro generatrici corrispondenti e

$$F\,,\,F_1\,,\,F_2\,;\ F'\,,\,F'_1\,,\,F'_2$$

sei punti corrispondenti sopra queste. Se R si distende su P_0 la generatrice r prenderà la posizione $g \equiv (\lambda)$, e r_1, r_2, trascinate da r, prenderanno su P_{k_1}, P_{k_2} le rispettive posizioni $g_1 \equiv (\lambda_1)$, $g_2 \equiv (\lambda_2)$. Distendiamo ora R' su P_0: la r' prenderà la posizione $g' \equiv (\lambda')$ ed r'_1, r'_2, trascinate da r', andranno ad occupare rispettivamente su P_{k_2}, P_{k_1} le posizioni $\bar{g}_1 \equiv (\lambda_1)$, $\bar{g}_2 \equiv (\lambda_2)$, cioè appunto quelle che corrispondono nell'affinità d'Ivory a g_1, g_2. Ai punti F, F_1, F_2; F', F'_1, F'_2 corrisponderanno così i punti M, M_1, M_2; $\bar{M}'$, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ sulle rispettive rette

$$g\,,\,g_1\,,\,g_2\,;\ g'\,,\,\bar{g}_1\,,\,\bar{g}_2\,,$$

e queste formeranno precisamente la configurazione del § 58.

Dopo ciò possiamo vedere che: *la corrispondenza stabilita fra i punti* F_1, F'_1 *di* R_1, R'_1 *è appunto quella d'applicabilità; e lo stesso vale per la corrispondenza fra i punti* F_2, F'_2 *di* R_2, R'_2. E infatti i due punti M_1, $\bar{M}_1$ di P_{k_1}, P_{k_2}, ai quali vanno a sovrapporsi F_1, F'_1 quando R si distende su P_0, si corrispondono nell'affinità d'Ivory e per ciò corrispondono anche nell'affinità d'Ivory ad un medesimo punto di P_0, ed in questo punto, per la legge d'applicabilità, vengono dunque a sovrapporsi tanto F_1 quanto F'_1, se si distende R_1 ovvero R'_1 su P_0. Dunque, F_1 e F'_1 *si corrispondono nell'applicabilità di* R_1 *sopra* R'_1.

D'altra parte segue dal § 58 che esiste un movimento rigido, pel quale la coppia (r_1, r_2), coi rispettivi punti F_1, F_2 si sovrappone alla coppia (r'_1, r'_2) ed ai rispettivi punti F'_1, F'_2, mentre il piano (F, r_1) tangente in F_1 alla R_1 si trasporta nel piano (F', r'_1) tangente in F'_1 ad R'_1, e similmente il piano (F, r_2) tangente in F_2 alla R_2 sul piano (F'_1, r'_2) tangente in F'_2 a R'_2. Tutti i segmenti $F_1 F_2$ hanno quindi rispetto alle due superficie R_1, R_2 (cioè rispetto ai loro punti F_1, F_2 ai loro piani tangenti ed elementi lineari spiccati da F_1, F_2) la medesima giacitura come i segmenti corrispondenti $F'_1 F'_2$ rispetto ad R'_1, R'_2. Da tutto ciò è facile inferire che la superficie R'_1 è congruente con R_1, R'_2 con R_2 ed un medesimo movimento trasporta (R_1, R_2) in (R'_1, R'_2). Poichè infatti la R_1 è certamente applicabile sopra R'_1 e se immaginiamo che in questa deformazione della R_1 nella R'_1 i segmenti F_1F_2 restino invariabilmente legati alla R_1, la superficie R_2 luogo degli estremi F_2 serba, per quanto si è visto, il medesimo elemento lineare e la medesima giacitura dei suoi elementi rispetto ai segmenti $F_1 F_2$. Si puo riguardare come geometricamente intuitivo che in tali condizioni la detta deformazione deve ridursi ad un puro movimento. Ma per non lasciare alcun dubbio al proposito procediamo ora analiticamente ed esaminiamo in generale se una superficie qualunque S, da ciascun punto M della quale esce un segmento rettilineo MM', può flettersi in guisa che la superficie S' luogo degli estremi M' dei segmenti, trascinati nella flessione, serbi lo stesso elemento lineare ed i segmenti MM' restino ancora invariabilmente legati ad S'.

Per semplicità riferiamo la S ad un sistema coordinato (u, v) ortogonale, le cui linee $u = \text{cost.}^{\text{te}}$ siano normali ai segmenti MM'. Adottando le consuete notazioni (cf. in particolare vol. II pag. 91), per una qualunque configurazione di S, le coordinate x', y', z' dell'estremo M' del segmento MM' saranno

$$x' = x + A X_1 + B X_3, \text{ ecc.}$$

dove A, B indicano due funzioni fisse di u, v. Derivando si ottiene (l. c. formole (1)).

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \left(\sqrt{E} + \frac{\partial A}{\partial u} - B\frac{D}{\sqrt{E}}\right)X_1 - \left(\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + B\frac{D'}{\sqrt{G}}\right)X_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial u} + A\frac{D}{\sqrt{E}}\right)X_3 \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= \left(\frac{\partial A}{\partial v} - B\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)X_1 + \left(\sqrt{G} + \frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - B\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)X_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial v} + A\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)X_3 \end{aligned}\right.$$

e per ipotesi restano invariabili nella deformazione considerata

$$E' = \sum\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2, \quad F' = \sum\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}, \quad G' = \sum\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2.$$

Inoltre due qualunque elementi lineari spiccati da M, M' rispettivamente sopra S, S' formano sistema invariabile col segmento MM' ed i due piani tangenti. Ne segue che serberà invariato il proprio valore ciascuna delle quantità

$$\sum X_1\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \sum X_2\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \sum X_3\frac{\partial x'}{\partial u}$$
$$\sum X_1\frac{\partial x'}{\partial v}, \quad \sum X_2\frac{\partial x'}{\partial v}, \quad \sum X_3\frac{\partial x'}{\partial v},$$

cioè ciascuno dei coefficienti di X_1, X_2, X_3 nei secondi membri delle (15), e quindi anche

$$AD, \quad AD', \quad BD, \quad BD', \quad BD''.$$

Dunque anche D, D', D'' non variano [1]) e la deformazione supposta di S è un puro movimento.

§ 61.

Il teorema di permutabilità per le deformate rigate del paraboloide.

Le considerazioni del paragrafo precedente ci hanno dimostrato che un movimento rigido porta a coincidere la coppia di superficie (R'_1, R'_2) colla primitiva (R_1, R_2). Immaginiamo effettuato questo movimento; avremo così la quaderna di deformate rigate del paraboloide

$$R, \quad R_1, \quad R_2, \quad R'$$

poste in corrispondenza di punto a punto per modo che, se

$$M, \quad M_1, \quad M_2, \quad M'$$

sono quattro loro punti corrispondenti, le quattro congruenze rettilinee

[1]) Si osservi che se fosse $B = 0$, sarebbe certo $A \neq 0$ (altrimenti S' coinciderebbe con S) e però non cangierebbero D, D', conseguentemente nemmeno D''.

generate dalle congiungenti

$$MM_1\ ,\ MM_2\ ,\ M'M_1\ ,\ M'M_2$$

sono congruenze W della nostra specie, aventi per rispettive falde focali

$$(R\,,R_1)\ ,\ (R\,,R_2)\ ,\ (R'\,,R_1)\ ,\ (R'\,,R_2)\,.$$

Le trasformazioni B_k colle quali si passa da R rispettivamente ad $R_1\,,R_2$ hanno le costanti $k_1\,,k_2$; quelle con cui si passa dalla quarta R' alle medesime $R_1\,,R_2$, hanno ancora le stesse costanti $k_2\,,k_1$, ma invertite. Il teorema di permutabilità è così completamente dimostrato nel caso attuale.

Ma le ricerche eseguite ci danno altresì il modo di formulare una semplice e notevole costruzione geometrica, colla quale dalle tre superficie $R\,,R_1\,,R_2$, supposte note, si deduce in termini finiti la quarta R'. Si ricordi (§ 57) che se

$$r\ ,\ r'\ ,\ r_1\ ,\ r_2$$

sono quattro generatrici corrispondenti di

$$R\ ,\ R'\ ,\ R_1\,,R_2\,,$$

queste quattro rette sono generatrici di un medesimo sistema di una quadrica e formano il birapporto costante

$$(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r\ ,\ r')=\frac{k_1}{k_2}\,.$$

Possiamo dunque formulare il nostro risultato nel modo definitivo seguente:

Siano $R\,,R_1\,,R_2$ *tre deformate rigate del paraboloide fondamentale, delle quali le due ultime* $R_1\,,R_2$ *provengano dalla prima* R *mediante due trasformazioni* $B_{k_1}\,,B_{k_2}$. *Presa una terna variabile* $r_1\,,r_2\,,r$ *di generatrici corrispondenti di* $R_1\,,R_2\,,R$, *sulla quadrica* $(r_1\,,r_2\,,r)$ *determinata da queste tre rette si determini quella quarta retta* r' *del medesimo sistema, che forma colle prime tre il birapporto costante*

$$(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r\ ,\ r')=\frac{k_1}{k_2}\,.$$

Questa quarta retta r' *descrive la quarta superficie* R' *del teorema di permutabilità, legata rispettivamente a* $R_1\,,R_2$ *da due trasformazioni* $B_{k_2}\,,B_{k_1}$.

La costruzione superiore fornisce la quarta superficie come luogo di rette; ma importa altresì, specialmente per l'estensione del teorema alle deformate non rigate, formulare una costruzione per punti, che da ciascun punto M della prima superficie R conduca al punto corrispondente M' della quarta R'. Questo è ora ben facile ove si osservi che ogni congiungente MM', intersezione dei due piani tangenti MM_1M', MM_2M' ad $R_1\,,R_2$ in $M_1\,,M_2$, si appoggia alle due rette $r_1\,,r_2$ ed anche manifestamente ad $r\,,r'$. Essa è quindi una generatrice del 2.° sistema della quadrica $(r\,,r_1\,,r_2)$, e per ciò i due punti ove $r_1\,,r_2$ incontrano MM' formano con M, M' il birapporto $\frac{k_1}{k_2}$. La costruzione domandata è dunque la seguente:

Se M *è un punto qualunque di* R *ed* $r_1\,,r_2$ *le generatrici di* $R_1\,,R_2$ *uscenti dai punti corrispondenti* $M_1\,,M_2$, *si conduca per* M *la retta* s *appoggiata in due punti* $N_1\,,N_2$ *a* $r_1\,,r_2$, *e si prenda su questa retta* s *il quarto punto* M' *tale che il birapporto*

$$(N_1N_2\ MM')$$

riesca costante ed uguale a $\frac{k_1}{k_2}$. *Questo quarto punto* M', *variando* M *su* R, *descrive corrispondentemente la quarta superficie* R' *del teorema di permutabilità.*

Come si vede, la nostra costruzione è data semplicemente da un'omografia biassiale, ad invariante $\frac{k_1}{k_2}$ costante, ma colla coppia di assi $(r_1\,,r_2)$ variabile, che percorre le coppie di generatrici corrispondenti di $R_1\,,R_2$.

Si osservi che se le due costanti $k_1\,,k_2$ sono eguali, la quarta superficie R' viene a coincidere colla prima, come risulta dalla costruzione stessa. Se $k_1\,,k_2$ sono eguali e di segno contrario l'omografia biassiale considerata è armonica. Ciò accade per es. pel paraboloide equilatero $(p=q)$ e per le due trasformazioni singolari corrispondenti alle parabole focali.

Un'altra conseguenza importante si può dedurre dal teorema di permutabilità: *esso permette di utilizzare anche le trasformazioni* B_k *immaginarie (a costante* k *complessa) per dedurne, mediante composizione, delle trasformazioni reali.*

E infatti prendasi per k_1 una costante complessa qualunque e per λ_1 una soluzione, necessariamente complessa, della equazione fondamentale di Riccati (12); la rigata R_1 trasformata di R mediante la B_k, sarà immaginaria. Ora per la seconda costante k_2 prendasi la coniugata di k_1

$$k_2 = \bar{k}_1,$$

ed ai radicali

$$\sqrt{p_2}\ ,\ \sqrt{q_2}$$

si attribuiscano i valori coniugati di

$$\sqrt{p_1}\ ,\ \sqrt{q_1}\ .$$

Potremo soddisfare evidentemente alla equazione differenziale (12*) prendendo per λ_2 la coniugata di λ_1

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 .$$

La nuova rigata R_2 sarà la coniugata di R_1 e due loro generatrici corrispondenti r_1, r_2 saranno rette coniugate [1]). La nostra costruzione dimostra che la quarta superficie R′ sarà *reale* come la prima R.

E infatti la retta condotta pel punto reale M ed appoggiata alle rette coniugate r_1, r_2 è reale e le incontra in punti immaginarii coniugati N_1, N_2; ma poichè il birapporto

$$(M_1 M_2\, M M') = \frac{k_1}{k_2}$$

è di modulo $=1$, anche M′ è reale.

A conferma di tutto ciò si osservi che la formola fondamentale (I) § 56 (pag. 164) pel teorema di permutabilità mostra chiaramente che λ' è reale per λ reale poichè, nelle nostre ipotesi, il numeratore ed il denominatore nel secondo membro sono puramente immaginarii. Ora λ, λ' sono i valori dei parametri delle due generatrici del paraboloide su cui vanno a distendersi due generatrici corrispondenti r, r' di R, R′, quando queste superficie si applicano sul paraboloide.

[1]) Per vederlo chiaramente basta riferirsi alle formole fondamentali

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ ecc.,}$$

i cui secondi membri assumono per le due superficie B_1, B_2 valori coniugati.

§ 62.

Prime considerazioni pel caso dell'iperboloide.

Passiamo ora alle ricerche analoghe pel caso delle deformate rigate dell'iperboloide ad una falda. Troveremo che anche qui sussiste, e sotto la medesima forma, il teorema di permutabilità, ed in particolare la costruzione finale data al paragrafo precedente per la quarta superficie R′ vale, senza alcun mutamento, per le deformate rigate dell'iperboloide. Noi non staremo però a sviluppare tutti i calcoli anche per questo caso; basterà indicare i punti principali della ricerca per la quale terremo una via alquanto diversa da quella prima seguita, avendo in mira principalmente di trovare la formola che, nel caso attuale dell'iperboloide, tiene il luogo pel teorema di permutabilità della (I) § 56.

Ci converrà quindi introdurre subito le considerazioni differenziali analoghe a quelle del § 59, le quali ci permetteranno di stabilire facilmente la formola indicata.

Supponiamo data una qualunque deformata rigata R dell'iperboloide fondamentale ad una falda Q_0, e consideriamo due sue trasformate (rigate) R_1, R_2 mediante due trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}. Poniamo

$$\text{(16)}\qquad \begin{cases} a_1 = \sqrt{a^2+k_1}\ ,\ b_1 = \sqrt{b^2+k_1}\ ,\ c_1 = \sqrt{c^2-k_1} \\ a_2 = \sqrt{a^2+k_2}\ ,\ b_2 = \sqrt{b^2+k_2}\ ,\ c_2 = \sqrt{c^2-k_2}\ ; \end{cases}$$

le due trasformate R_1, R_2 saranno definite dalle formole del § 16 e precisamente la prima R_1 da quelle formole, ove per a', b', c' si ponga a_1, b_1, c_1 e per θ una soluzione θ_1 della corrispondente equazione di Riccati

$$\frac{d\theta_1}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_1}\left\{(bca_1+b_1c_1a)(v^2-1)\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + (abc_1+a_1b_1c)(v^2+1) - (acb_1+a_1c_1b)\,2v\cos\theta_1\right\}.$$

Similmente la R_2 dipenderà da una soluzione θ_2 dell'altra

$$\frac{d\theta_2}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_2}\left\{(bca_2+b_2c_2a)(v^2-1)\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + (abc_2+a_2b_2c)(v^2+1) - (acb_2+a_2c_2b)\,2v\cos\theta_2\right\}.$$

Se si divide la prima per la seconda, si vede che le funzioni θ_1 e θ_2 di v soddisfano alla relazione differenziale

$$\text{(17)}\quad \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{(bca_1+b_1c_1a)(v^2-1)\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + (abc_1+a_1b_1c)(v^2+1) - (acb_1+a_1c_1b)\,2v\cos\theta_1}{(bca_2+b_2c_2a)(v^2-1)\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + (abc_2+a_2b_2c)(v^2+1) - (acb_2+a_2c_2b)\,2v\cos\theta_2}\ ,$$

il cui significato è perfettamente analogo a quello che aveva la corrispondente (13) § 59. Mediante le funzioni $\theta_1(v), \theta_2(v)$ vien fatta corrispondere ad una generatrice mobile (v) sull'iperboloide Q_0 la generatrice (θ_1) sull'iperboloide confocale Q_{k_1} e la (θ_2) sopra Q_{k_2}. La (17) esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè esista una deformazione di Q_0 in una rigata R tale che le generatrici $(\theta_1), (\theta_2)$ di Q_{k_1}, Q_{k_2}, trascinate nella deformazione dalla corrispondente (v), vengano ad aver per luogo, a deformazione compiuta, due rigate R_1, R_2 trasformate di R mediante, rispettivamente, la B_{k_1} e la B_{k_2}.

Introducendo le nuove costanti

$$(18)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = bca_1 + b_1c_1a \ , \ \beta_1 = cab_1 + c_1a_1b \ , \ \gamma_1 = abc_1 + a_1b_1c \\ \alpha_2 = bca_2 + b_2c_2a \ , \ \beta_2 = cab_2 + c_2a_2b \ , \ \gamma_2 = abc_2 + a_2b_2c \ , \end{cases}$$

scriviamo la (17) così

$$(17^*)\qquad \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{(\gamma_1 + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta_1)v^2 - 2\beta_1\cos\theta_1\, v + (\gamma_1 - \alpha_1\operatorname{sen}\theta_1)}{(\gamma_2 + \alpha_2\operatorname{sen}\theta_2)v^2 - 2\beta_2\cos\theta_2\, v + (\gamma_2 - \alpha_2\operatorname{sen}\theta_2)} .$$

Ed ora, se sussiste il teorema di permutabilità, avremo una quarta superficie R' trasformata delle medesime R_1, R_2 mediante le B_{k_2}, B_{k_1}. Indicando dunque con (v') il parametro di quella generatrice di Q_0 su cui viene a sovrapporsi, nell'applicabilità, la generatrice di R' corrispondente alla (v) di R, dovrà sussistere la medesima (17*), ove si cangi v in v' e si permuti k_1 con k_2, indi (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2). Avremo dunque fra v e v' la relazione

$$\frac{k_2}{k_1}\,\frac{(\gamma_1 + \alpha_1\operatorname{sen}\theta_1)v^2 - 2\beta_1\cos\theta_1\, v + (\gamma_1 - \alpha_1\operatorname{sen}\theta_1)}{(\gamma_2 + \alpha_2\operatorname{sen}\theta_2)v^2 - 2\beta_2\cos\theta_2\, v + (\gamma_2 - \alpha_2\operatorname{sen}\theta_2)} =$$

$$= \frac{k_1}{k_2}\,\frac{(\gamma_2 + \alpha_2\operatorname{sen}\theta_1)v'^2 - 2\beta_2\cos\theta_1 . v' + (\gamma_2 - \alpha_2\operatorname{sen}\theta_1)}{(\gamma_1 + \alpha_1\operatorname{sen}\theta_2)v'^2 - 2\beta_1\cos\theta_2 . v' + (\gamma_1 - \alpha_1\operatorname{sen}\theta_2)} .$$

Ma qui però, per maggior simmetria delle formole, converrà sostituire ai parametri θ_1, θ_2 delle generatrici di Q_{k_1}, Q_{k_2} i corrispondenti valori v_1, v_2 del parametro v, secondo le formole

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{2v_1}{1+v_1^2} \ , \ \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{1-v_1^2}{1+v_1^2} \\ \cos\theta_2 = \dfrac{2v_2}{1+v_2^2} \ , \ \operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{1-v_2^2}{1+v_2^2} , \end{cases}$$

così la formola precedente si scrive

$$(19)\qquad \frac{k_2}{k_1}\,\frac{[(\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_1^2]v^2 - 4\beta_1 v_1 v + [(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_1^2]}{[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_2^2]v^2 - 4\beta_2 v_2 v + [(\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_2^2]} =$$

$$= \frac{k_1}{k_2}\,\frac{[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_1^2]v'^2 - 4\beta_2 v_1 v' + [(\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_1^2]}{[(\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_2^2]v'^2 - 4\beta_1 v_2 v' + [(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_2^2]} .$$

Questa è per l'incognita v' un'equazione di 2.° grado, ma le sue radici, come vedremo, sono razionali in v (e v_1, v_2) anzi lineari in queste quantità talchè fra v, v', v_1, v_2 sussiste una relazione *quadrilineare*, che è l'analoga della (I*) § 56, e fornisce la formola del teorema di permutabilità nel caso attuale. Scriviamola sotto la forma

$$(20)\qquad v' = \frac{pv+q}{rv+s} ,$$

e cerchiamo di determinare i coefficienti p, q, r, s in funzione di v_1, v_2, ricordando un'altra proprietà che, in analogia al caso del paraboloide (§ 56), dovrà presentarsi anche qui e cioè che per $k_1 = k_2$ la (20) deve ridursi a $v' = v$, ossia debbono annullarsi q, r e risultare $p = s \neq 0$.

Per i calcoli che andiamo ad eseguire conviene tener presenti le seguenti identità. Dai valori (18) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e dalle (16) risulta

$$\gamma_1^2 - \alpha_1^2 = k_1^2(a^2 + c^2) \ , \ \gamma_2^2 - \alpha_2^2 = k_2^2(a^2 + c^2)$$

e perciò l'identità

$$(21)\qquad k_2^2(\gamma_1^2 - \alpha_1^2) = k_1^2(\gamma_2^2 - \alpha_2^2) ,$$

che conviene anche scrivere sotto le forme equivalenti

$$(22)\qquad \frac{k_1(\gamma_2+\alpha_2)}{k_2(\gamma_1-\alpha_1)} = \frac{k_2(\gamma_1+\alpha_1)}{k_1(\gamma_2-\alpha_2)}$$

$$(22^*)\qquad \frac{k_1^2(\gamma_2+\alpha_2)^2 - k_2^2(\gamma_1+\alpha_1)^2}{k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2 - k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2} = \frac{k_1^2(\gamma_2+\alpha_2)^2}{k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2} = \frac{k_2^2(\gamma_1+\alpha_1)^2}{k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2} .$$

§ 63.

Formole del teorema di permutabilità.

Sostituiamo il valore (20) di v' nella (19), che dovrà ridursi ad una identità. Questo è espresso dalla eguaglianza dei sei seguenti rapporti che indichiamo con $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6$:

$$\Omega_1 = \frac{[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_1^2]p^2 - 4\beta_2 v_1 pr + [(\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_1^2]r^2}{k_2^2[(\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_1^2]}$$

$$\Omega_2 = \frac{[(\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_2^2]p^2 - 4\beta_1 v_2 pr + [(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_2^2]r^2}{k_1^2[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_2^2]}$$

$$\Omega_3 = \frac{[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_1^2]pq - 4\beta_2 v_1(ps+qr) + [(\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_1^2]rs}{-2k_2^2\beta_1 v_1}$$

$$\Omega_4 = \frac{[\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_2^2]pq - 4\beta_1 v_2(ps+qr) + [(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_2^2]rs}{-2k_1^2\beta_2 v_2}$$

$$\Omega_5 = \frac{[(\gamma_2+\alpha_2)+(\gamma_2-\alpha_2)v_1^2]q^2 - 4\beta_2 v_1 qs + [\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_1^2]s^2}{k_2^2[(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_1^2]}$$

$$\Omega_6 = \frac{[(\gamma_1+\alpha_1)+(\gamma_1-\alpha_1)v_2^2]q^2 - 4\beta_1 v_2 qs + [(\gamma_1-\alpha_1)+(\gamma_1+\alpha_1)v_2^2]s^2}{k_1^2[(\gamma_2-\alpha_2)+(\gamma_2+\alpha_2)v_2^2]}.$$

L'eguaglianza $\Omega_1 = \Omega_2$ dà pel quoziente $\frac{p}{r}$ l'equazione di 2.° grado

$$P\left(\frac{p}{r}\right)^2 - 2Q\frac{p}{r} + R = 0, \tag{23}$$

dove, osservando le identità (22), (22*), i coefficienti P, Q, R hanno le espressioni seguenti

$$\left\{\begin{aligned} P &= [k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2 - k_1^2(\gamma_1-\alpha_1)^2] \cdot \left[v_1^2 v_2^2 - \frac{k_1^2(\gamma_2+\alpha_2)^2}{k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2}\right] \\ Q &= 2[k_1^2\beta_2(\gamma_2+\alpha_2)v_1 - k_2^2\beta_1(\gamma_1+\alpha_1)v_2] + 2v_1v_2[k_1^2\beta_2(\gamma_2-\alpha_2)v_2 - k_2^2\beta_1(\gamma_1-\alpha_1)v_1] \\ R &= [k_1^2(\gamma_1+\alpha_2)^2 - k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2]v_1^2 + [k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2 - k_2^2(\gamma_1+\alpha_1)^2]v_2^2. \end{aligned}\right.$$

Formando il discriminante $Q^2 - PR$ della (23), si vede che esso è il quadrato perfetto della espressione

$$\sqrt{Q^2-PR} = 2k_1k_2\left\{[(\gamma+\alpha_1)\beta_2v_2 - (\gamma_2+\alpha_2)\beta_1v_1] + v_1v_2[(\gamma_1-\alpha_1)\beta_2v_1 - (\gamma_2-\alpha_2)\beta_1v_2]\right\}.$$

Avremo dunque

$$\frac{p}{r} = \frac{Q+\varepsilon\sqrt{Q^2-PR}}{P}, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

e poichè, osservando l'identità

$$\frac{k_1(\gamma_2+\alpha_2)v_1 + \varepsilon k_2(\gamma_1+\alpha_1)v_2}{\varepsilon k_2(\gamma_1-\alpha_1)v_1 + k_1(\gamma_2-\alpha_2)v_2} = \varepsilon\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2+\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1},$$

si trova

$$Q+\varepsilon\sqrt{Q^2-PR} = 2(k_1\beta_2-\varepsilon k_2\beta_1)[k_1(\gamma_2-\alpha_2)v_2+\varepsilon k_2(\gamma_1-\alpha_1)v_1] \cdot \left[v_1v_2+\varepsilon\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2+\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1}\right],$$

abbiamo per $\frac{p}{r}$ il valore

$$\frac{p}{r} = \frac{2(k_1\beta_2-\varepsilon k_2\beta_1)[k_1(\gamma_2-\alpha_2)v_2+\varepsilon k_2(\gamma_1-\alpha_1)v_1]}{[k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2] \cdot \left[v_1v_2-\varepsilon\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2+\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1}\right]} \quad (\varepsilon=\pm 1). \tag{24}$$

Si osservi ora che l'eguaglianza

$$\Omega_5 = \Omega_6$$

dà pel rapporto $\frac{s}{q}$ la equazione stessa (23) per $\frac{p}{r}$, ove però nelle espressioni di P, Q, R si cangino α_1, α_2 rispettivamente in $-\alpha_1, -\alpha_2$; avremo dunque

$$\frac{s}{q} = \frac{2(k_1\beta_2-\varepsilon' k_2\beta_1)[k_1(\gamma_2+\alpha_2)v_2+\varepsilon' k_2(\gamma_1+\alpha_1)v_1]}{[k_1^2(\gamma_2+\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1+\alpha_1)^2]\left[v_1v_2-\varepsilon'\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2-\alpha_2}{\gamma_1+\alpha_1}\right]} \quad (\varepsilon'=\pm 1). \tag{25}$$

Ma l'osservazione fatta al § precedente, che per $k_1 = k_2$ debbono annullarsi r, q e risultare $p = s \neq 0$, ci dimostra subito che deve prendersi $\varepsilon = \varepsilon' = -1$. In fine utilizzando una delle altre eguaglianze fra i rapporti Ω si vede che, disponendo del fattore di proporzionalità arbitrario nei quattro coefficienti p, q, r, s, si può prendere

$$\left\{\begin{aligned} p &= 2(k_1\beta_2+k_2\beta_1)[k_1(\gamma_2-\alpha_2)v_2-k_2(\gamma_1-\alpha_1)v_1] \\ q &= \frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2-\alpha_2}{\gamma_1+\alpha_1}[k_1^2(\gamma_2+\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1+\alpha_1)^2] \cdot \left[v_1v_2+\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2-\alpha_2}{\gamma_1+\alpha_1}\right] \\ r &= [k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2] \cdot \left[v_1v_2+\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2+\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1}\right] \\ s &= 2\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2-\alpha_2}{\gamma_1+\alpha_1}(k_1\beta_2+k_2\beta_1)[k_1(\gamma_2+\alpha_2)v_2-k_2(\gamma_1+\alpha_1)v_1], \end{aligned}\right. \tag{26}$$

restando così eguali tutti i sei rapporti Ω. La (20), coi valori precedenti di p, q, r, s, si scrive sotto la forma quadrilineare annunciata in v, v', v_1, v_2:

$$
\text{(II)}\quad [k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2](vv'v_1v_2+1)+\frac{k_1}{k_2}\frac{\gamma_2+\alpha_2}{\gamma_1-\alpha_1}[k_1^2(\gamma_2-\alpha_2)^2-k_2^2(\gamma_1-\alpha_1)^2](vv'+v_1v_2)+
$$
$$
+2k_2(\gamma_1-\alpha_1)(k_1\beta_2+k_2\beta_1)(vv_1+v'v_2)-2k_1(\gamma_2-\alpha_2)(k_1\beta_2+k_2\beta_1)(vv_2+v'v_1)=0\,.
$$

Essa è la formola del teorema di permutabilità pel caso delle deformate rigate dell'iperboloide, e corrisponde precisamente alla (I*) § 56 pel paraboloide. Come questa, essa rimane invariata scambiando k_1 con k_2 e v con v', ovvero scambiando fra loro v_1, v_2 ed insieme v, v'.

§ 64.

Verifiche relative all'affinità d'Ivory.

Resta ora da verificare effettivamente sulla formola trovata il teorema di permutabilità, per la qual cosa sarà da dimostrarsi che si arriva precisamente a questa formola procedendo per l'iperboloide nel modo tenuto ai §§ 55, 56 per il paraboloide. Siano g, g_1, g_2 tre generatrici prese rispettivamente (nel primo sistema) sull'iperboloide fondamentale Q_0 e sui due confocali Q_{k_1}, Q_{k_2}. Indicando con $\theta, \theta_1, \theta_2$ i valori del parametro θ per queste tre generatrici, le loro equazioni saranno

$$
g)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{c}\,\text{sen}\,\theta\, z + a\cos\theta \\ y &= -\frac{b}{c}\cos\theta\, z + b\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right.
$$

$$
g_1)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{c_1}\,\text{sen}\,\theta_1 z_1 + a_1\cos\theta_1 \\ y_1 &= -\frac{b_1}{c_1}\cos\theta_1 z_1 + b_1\,\text{sen}\,\theta_1 \end{aligned}\right.
\qquad
g_2)\left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_2}{c_2}\,\text{sen}\,\theta_2 z_2 + a_2\cos\theta_2 \\ y_2 &= -\frac{b_2}{c_2}\cos\theta_2 z_2 + b_2\,\text{sen}\,\theta_2\,. \end{aligned}\right.
$$

Nell'affinità d'Ivory fra Q_{k_1}, Q_{k_2}, ai punti $M_1 \equiv (x_1\, y_1\, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2\, y_2\, z_2)$ di Q_{k_1}, Q_{k_2} corrispondono rispettivamente sopra Q_{k_2}, Q_{k_1} i punti

$$
\overline{M}_1 \equiv \left(\frac{a_2}{a_1}x_1\,,\ \frac{b_2}{b_1}y_1\,,\ \frac{c_2}{c_1}z_1\right)
$$
$$
\overline{M}_2 \equiv \left(\frac{a_1}{a_2}x_2\,,\ \frac{b_1}{b_2}y_2\,,\ \frac{c_1}{c_2}z_2\right)
$$

e quando M_1, M_2 descrivono g_1, g_2, i punti $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ descrivono le generatrici corrispondenti $\bar{g}_1, \bar{g}_2$

$$
\bar{g}_1)\left\{\begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_2\,\text{sen}\,\theta_1 \frac{z_1}{c_1} + a_2\cos\theta_1 \\ \bar{y}_1 &= -b_2\cos\theta_1 \frac{z_1}{c_1} + b_2\,\text{sen}\,\theta_1 \\ \bar{z}_1 &= c_2\frac{z_1}{c_1} \end{aligned}\right.
\qquad
\bar{g}_2)\left\{\begin{aligned} \bar{x}_2 &= a_1\,\text{sen}\,\theta_2 \frac{z_2}{c_2} + a_1\cos\theta_2 \\ \bar{y}_2 &= -b_1\cos\theta_2 \frac{z_2}{c_2} + b_1\,\text{sen}\,\theta_2 \\ \bar{z}_2 &= c_1\frac{z_2}{c_2}\,. \end{aligned}\right.
$$

Procedendo come al § 55, stabiliamo la corrispondenza analoga fra i punti di $g, g_1, g_2\ \bar{g}_1, \bar{g}_2$. Le congiungenti $M_1 M_2$ sono le rette del 2.° sistema della quadrica (g, g_1, g_2), e noi dobbiamo provare che la quadrica generata dalle altre congiungenti $\overline{M}_1\overline{M}_2$ sega l'iperboloide Q_0 in una sola generatrice $g' \equiv (\theta')$ di Q_0 (cf. § 55).

Ora la corrispondenza fra M_1, M_2 è data da una relazione bilineare fra z_1, z_2, che scriviamo

$$
(27)\qquad A z_1 z_2 + B c_2 z_1 + C c_1 z_2 + c c_1 c_2 D = 0\,,
$$

e, col procedimento stesso del § 55, troviamo pei coefficienti A, B, C, D i valori seguenti:

$$
\left\{\begin{aligned}
A &= a(c_1b_2\cos\theta_2 - c_2b_1\cos\theta_1)\,\text{sen}\,\theta + b(a_1c_2\,\text{sen}\,\theta_1 - a_2c_1\,\text{sen}\,\theta_2)\cos\theta + \\
&\qquad + c(b_1a_2\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 - b_2a_1\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2) \\
B &= abc_1 + c(a_1b_2\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + a_2b_1\cos\theta_1(\cos\theta_2) - \\
&\qquad - (bca_1\,\text{sen}\,\theta_1 + ac_1b_2\,\text{sen}\,\theta_2)\,\text{sen}\,\theta - (acb_1\cos\theta_1 + ba_2c_1\cos\theta_2)\cos\theta \\
C &= -abc_2 - c(a_2b_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + a_1b_2\cos\theta_1\cos\theta_2) + \\
&\qquad + (bca_2\,\text{sen}\,\theta_2 + ac_2b_1\,\text{sen}\,\theta_1)\,\text{sen}\,\theta + (acb_2\cos\theta_2 + ba_1c_2\cos\theta_1)\cos\theta \\
D &= a_1b_2\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 - a_2b_1\cos\theta_2\,\text{sen}\,\theta_1 + b(a_2\cos\theta_2 - a_1\cos\theta_1)\,\text{sen}\,\theta + \\
&\qquad + a(b_1\,\text{sen}\,\theta_1 - b_2\,\text{sen}\,\theta_2)\cos\theta\,.
\end{aligned}\right.
$$

La (27) esprime altresì che la g si appoggia a tutte le rette $M_1 M_2$, e per esprimere che la g' si appoggia a sua volta a tutte le $\overline{M}_1\overline{M}_2$ dobbiamo scrivere la (27) stessa, scambiandovi θ_1 con θ_2, θ con θ' e cangiando rispettivamente z_1, z_2 in $\frac{c_1}{c_2}z_2, \frac{c_2}{c_1}z_1$). Se indichiamo pertanto con A', B', C', D' ciò che diventano A, B, C, D rispettivamente, quando vi si muti θ in θ' e si scambi θ_1 con θ_2, la nuova relazione bilineare fra z_1, z_2 sarà

$$A' z_1 z_2 + B' c_1 . z_2 + C' c_2 . z_1 + c c_1 c_2 D' = 0. \tag{28}$$

Esprimendo che questa coincide colla (27), abbiamo le proporzioni

$$\frac{A'}{A} = \frac{C'}{B} = \frac{B'}{C} = \frac{D'}{D}, \tag{29}$$

e queste tre relazioni fra $\theta, \theta', \theta_1, \theta_2$ esprimono tutte le condizioni necessarie e sufficienti perchè la generatrice g' di Q_0 si appoggi a tutte le congiungenti $\overline{M_1 M_2}$.

Ora nelle (29) si introducano al posto dei parametri $\theta, \theta', \theta_1, \theta_2$ i corrispondenti valori di v

$$v = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad v' = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta'}{\cos\theta'}, \quad v_1 = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_1}, \quad v_2 = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_2}.$$

Esse diventano altrettante equazioni di 2.° grado in v', che si convertono in identità sostituendo per v' l'espressione lineare (20) del § precedente, coi valori (26) dei coefficienti p, q, r, s. Con un procedimento analogo a quello del § 57, si dimostra anche qui che il birapporto delle quattro rette

$$g, \bar{g}, g_1, g_2$$

sulla quadrica $(g, g_1 g_2)$ è costante e precisamente ancora eguale a $\frac{k_1}{k_2}$. Dopo di ciò nulla è più da mutare ai successivi ragionamenti dei §§ 58, 60, ed i teoremi finali del § 61 e la costruzione ivi data per la quarta superficie del teorema di permutabilità valgono senz'altro anche per le deformate rigate dell'iperboloide ad una falda.

§ 65.

Il teorema di permutabilità per le deformate generali.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di permutabilità per le deformate generali delle quadriche, come venne enunciato al principio di questo Capitolo (§ 54); e di più potremo assegnare una semplice costruzione geometrica per dedurre da tre delle superficie S, S_1, S_2, sup-

poste note, la quarta S'. Procederemo per ciò geometricamente, appoggiandoci sul teorema di permutabilità già dimostrato per le deformate rigate, e ricordando le proprietà delle trasformazioni B_k stabilite al Cap. II.

Sia dunque S una deformata qualunque della quadrica fondamentale Q, e siano S_1, S_2 due trasformate contigue di S per mezzo delle rispettive trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}. Consideriamo sopra S le geodetiche g trasformate delle rette di un sistema di Q, e sopra S_1, S_2 le geodetiche omologhe g_1, g_2, e chiamiamo C, C_1, C_2 le congruenze rettilinee (normali) formate dalle tangenti alle geodetiche dei rispettivi sistemi $(g), (g_1), (g_2)$ ed aventi rispettivamente per una delle falde focali le superficie S, S_1, S_2.

Siano ora M, M_1, M_2 tre punti qualunque corrispondenti di S, S_1, S_2 e siano

$$r, r_1, r_2$$

i tre raggi delle congruenze C, C_1, C_2 che escono rispettivamente da M, M_1, M_2. Sulla quadrica (r_1, r_2, r), determinata dalle tre rette r_1, r_2, r, prendiamo quella quarta generatrice r' del medesimo sistema che forma colle tre precedenti il birapporto costante

$$(r_1, r_2, r, r') = \frac{k_1}{k_2}.$$

Prendiamo inoltre su questa retta il punto M', ove la incontra quella retta dell'altro sistema sulla quadrica (r_1, r_2, r) che esce da M. Dimostriamo:

La superficie S' luogo del punto M' è la quarta superficie del teorema di permutabilità, ed i raggi r' generano la relativa congruenza C', di cui la S' è una falda focale.

Cominciamo per ciò dall'osservare che se muoviamo M sopra S lungo un'asintotica a, per es. del primo sistema, i punti M_1, M_2 descriveranno rispettivamente sopra S_1, S_2 le asintotiche corrispondenti a_1, a_2, ed i raggi r, r_1, r_2 descriveranno rispettivamente tre rigate R, R_1, R_2, circoscritte lungo a, a_1, a_2 alle S, S_1, S_2. Queste tre rigate sono applicabili sulla quadrica fondamentale Q, ed inoltre R_1 è trasformata di R per una B_{k_1}, e similmente R_2 per una B_{k_2} (§ 33). Mentre M percorre a, il punto M' descriverà una certa linea che diremo a' ed il raggio r' descriverà una quarta rigata R' la quale, pel teorema di permutabilità delle rigate, sarà applicabile sopra Q e legata a R_1, R_2 da trasformazioni

B_{k_2}, B_{k_1}. Inoltre la linea a' sarà asintotica di R' ed il piano $M' M_1 M_2$, tangente ad R', sarà il piano osculatore di a'.

Ma, ricorrendo ora nel medesimo modo all'asintotica $\bar{a}$ di S del secondo sistema uscente da M, avremo medesimamente sopra S' una seconda curva $\bar{a}'$, avente in M' il medesimo piano osculatore $M' M_1 M_2$. Facendo variare le asintotiche $a, \bar{a}$ nei rispettivi sistemi, vediamo che la superficie S' è ricoperta dai due sistemi di curve $a', \bar{a}'$, che in ogni loro punto M' d'incrociamento hanno a comune il piano osculatore. Questo è dunque il piano tangente di S' e i due sistemi di curve $a', \bar{a}'$ sono le asintotiche di S'. Risulta inoltre che i raggi r' della congruenza C' sono tangenti alla S', che ne è una falda focale, ed associati lungo un'asintotica a' del primo sistema, ovverò lungo un'asintotica $\bar{a}'$ del secondo, formano delle rigate $R', \bar{R}'$ circoscritte alla S' lungo queste asintotiche ed applicabili tutte sulla quadrica fondamentale.

Dopo ciò è facile concludere che la S' stessa è applicabile sulla quadrica Q e deriva da S_1, S_2 per trasformazioni B_{k_2}, B_{k_1}.

Invero i piani tangenti in M_1, M' alle due superficie S_1, S' sono gli stessi che per le rigate R_1, R'. Se applichiamo S_1 sulla quadrica Q, mentre S_1 trasporta in sistema invariabile i punti M' ed i piani tangenti $M' M_1 M_2$ della superficie S', questi assumono alla fine la medesima posizione che operando analogamente per R_1, R', poichè nell'applicabilità di R_1 sopra S_1 i punti dell'asintotica comune si corrispondono. Dunque il punto M' si collocherà sulla conica sezione del piano tangente a Q colla quadrica confocale Q_{k_2} (poichè R' è legata ad R_1 da una B_{k_2}) ed il piano tangente $M' M_1 M_2$ risulterà tangente al cono circoscritto alla quadrica Q_{k_2} dal punto di Q ove viene a sovrapporsi M_1. L'osservazione finale del § 30 (pag. 89) ci dimostra allora che la superficie S' è trasformata della S_1 per una B_{k_2}, c. d. d.

§ 66.

Costruzioni relative al teorema di permutabilità.

Il teorema di permutabilità è così dimostrato in generale e possiamo formulare i nostri risultati colla costruzione geometrica seguente che, data una deformata qualunque S della quadrica fondamentale e note due sue trasformate S_1, S_2 per le rispettive trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}, serve a trovare, in termini finiti, la quarta superficie S':

Siano M, M_1, M_2 *una terna qualunque di punti corrispondenti sopra*

S, S_1, S_2 *e si considerino quelle due tangenti* r_1, r_2 *di* S_1, S_2 *che escono da* M_1, M_2 *nelle direzioni corrispondenti, per l'applicabilità, alle rette di un medesimo sistema della quadrica Q. Si conduca per* M *la retta s appoggiata alle due rette* r_1, r_2 *in due punti che diciamo* N_1, N_2 *e si prenda sopra s il quarto punto* M' *tale che il birapporto* $(N_1 N_2 M M')$ *sia costante ed eguale a* $\frac{k_1}{k_2}$. *Questo quarto punto* M' *descrive allora la quarta superficie* S' *del teorema di permutabilità.*

Si osservi esplicitamente che se nella costruzione precedente si sostituiscono alle due rette r_1, r_2 le altre due r'_1, r'_2 tangenti ad S_1, S_2 nelle direzioni delle generatrici del secondo sistema, si arriva alla *medesima* quarta superficie S'. E invero le rigate circoscritte a S, S_1, S_2, S' lungo quattro asintotiche corrispondenti, e colle generatrici corrispondenti alle rette del secondo sistema di Q, formano sempre una quaderna del teorema di permutabilità ed il birapporto di quattro generatrici corrispondenti è sempre eguale a $\frac{k_1}{k_2}$.

La costruzione precedente si applica in sostanza in tutti i casi, qualunque sia la specie della quadrica Q; soltanto, se la Q è a punti ellittici, le due r_1, r_2 della costruzione saranno immaginarie.

Ma possiamo anche formulare la costruzione in altro modo che valga per tutti i casi, senza far uso di elementi immaginarii. Per questo è opportuno introdurre una denominazione, ricordando che per una qualunque deformata S della quadrica Q, in relazione con una data trasformazione B_k, abbiamo in ogni piano tangente π di S una determinata conica C; la diremo *la conica appartenente* alla trasformazione B_k.

La conica C è il luogo di tutti i punti delle ∞^1 superficie S_1, trasformate della S per la B_k, corrispondenti al punto di contatto di π [1]). Ciò posto, consideriamo una quaderna

$$(S, S_1, S_2, S')$$

di deformate di Q nella relazione del teorema di permutabilità e siano

$$M, M_1, M_2, M'$$

quattro loro punti corrispondenti e

$$\pi, \pi_1, \pi_2, \pi'$$

[1]) Essa è anche la posizione occupata dalla conica sezione del piano tangente alla quadrica Q colla quadrica confocale Q_k quando Q si applica su S.

i rispettivi piani tangenti. Diciamo C_1 la conica di π_1 *appartenente* a B_{k_1} e C_2 quella di π_2 appartenente a B_{k_2}; poichè S è legata a S_1 da una B_{k_1} e a S_2 da una B_{k_2}, queste due coniche hanno a comune il punto M e, come facilmente si vede [1]), questo soltanto. Per la medesima ragione, se diciamo C'_1 la conica di π_1 appartenente alla trasformazione B_{k_2} e C'_2 quella di π_2 appartenente a B_{k_1}, queste due coniche si taglieranno nel solo punto M'. Possiamo dunque formulare la costruzione per la quarta superficie S' del teorema di permutabilità nel modo generale seguente:

Sia S *una deformata qualunque della quadrica fondamentale Q ed* S_1, S_2 *due sue trasformate per le trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *e siano* M, M_1, M_2 *tre loro punti corrispondenti e* π, π_1, π_2 *i rispettivi piani tangenti. Tracciamo nel piano* π_1 *la conica* C'_1 *appartenente a* B_{k_2} *e nel piano* π_2 *la conica* C'_2 *appartenente a* B_{k_1}. *Queste due coniche s'incontrano in un solo punto* M' *della retta* (π_1, π_2), *ed il luogo del punto* M' *è la quarta superficie* S' *del teorema di permutabilità.*

È ben naturale che, interpretando analiticamente questo risultato, potremo determinare univocamente le coordinate del quarto punto M', poichè le due equazioni di 2.° grado che servono a determinare i punti d'intersezione della retta (π_1, π_2) colle due coniche C'_1, C'_2 hanno una ed una sola radice comune.

§ 67.

Applicazione successiva delle trasformazioni B_k.

Veniamo ora alla più importante applicazione del teorema di permutabilità, già indicata al principio del Capitolo (§ 54), al perfezionamento del processo d'integrazione nell'applicazione ripetuta delle trasformazioni B_k.

Supponiamo dunque che della deformata iniziale S della quadrica Q si conoscano tutte le ∞^2 trasformate contigue per le trasformazioni B_k, cioè si sia completamente integrata la corrispondente equazione differenziale di Riccati *col parametro k arbitrario.* Prendiamo una qualunque di queste trasformate contigue, sia S_1, derivata della S per una particolare B_{k_1}. Dico che: *della nuova superficie* S_1 *potremo trovare, in termini finiti, senza alcuna quadratura, tutte le* ∞^2 *trasformate contigue per trasformazioni* B_k.

[1]) Per convincersene basta per es. ricorrere al caso più semplice delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

La dimostrazione è la medesima come pel caso particolare delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche. Sia S' una qualunque trasformata contigua di S_1 per una trasformazione B_k e supponiamo dapprima $k \neq k_1$. Esiste, pel teorema di permutabilità, una quarta superficie Σ legata a S dalla B_k e a S' dalla B_{k_1}. Ma questa Σ ci è nota per ipotesi, come contigua a S; le costruzioni del paragrafo precedente, applicate alle tre superficie note S, S_1, Σ, faranno dunque conoscere, in termini finiti, la quarta S' ancora incognita.

Abbiamo escluso il caso $k = k_1$; cioè il caso in cui della S_1 si vogliano determinare le altre trasformate per mezzo della B_{k_1}, oltre la S; ma è ora facile trattare anche questo caso per mezzo di considerazioni al limite (cf. vol. II, pag. 417).

Supponiamo per es.; per fissare le idee, che la quadrica fondamentale Q sia un iperboloide ad una falda. Per la deformata S conosciamo, per ipotesi, la soluzione generale θ delle equazioni differenziali fondamentali (II) § 36, la quale contiene, oltre le variabili u, v, il parametro k ed una costante arbitraria c, scriviamo

$$\theta = \theta(u, v ; k, c).$$

Sia

$$\theta_1 = \theta(u, v ; k_1, c_1)$$

la soluzione particolare corrispondente alla trasformata S_1. Consideriamo una semplice infinità di soluzioni θ, contenente la soluzione θ_1, ossia, geometricamente, prendiamo ad arbitrio, entro la doppia infinità di superficie Σ, una semplice infinità contenente S_1. Per ciò basterà prendere per c una funzione arbitraria di k

$$c = \varphi(k),$$

assoggettata alla sola condizione di ridursi a c_1 per $k = k_1$.

Ora, finchè la superficie Σ è distinta da S_1, la quarta superficie S' dopo (S, Σ, S_1) si ottiene (§ 66) colla costruzione seguente:

Siano M, N, M_1 tre punti corrispondenti di S, Σ, S_1 e π, π_1 i piani rispettivi tangenti di Σ, S_1; e si traccino nei piani π, π_1 le coniche C'_{k_1}, C_k appartenenti alle trasformazioni B_{k_1}, B_k. La retta (π, π_1) uscente da M incontra le due coniche C'_{k_1}, C_k in un solo punto comune M' che descrive la quarta superficie S'. Ma se teniamo fisso M, gli ∞^1 piani tangenti π delle $\infty^1 \Sigma$ inviluppano un cono determinato Γ col vertice in M e tangente al piano π_1, poichè la S_1 è una di queste Σ. Sia g la generatrice di contatto di π_1 con Γ; essa è evidentemente la posizione limite della retta (π, π_1) quando si fa tendere k verso k_1. D'altronde per $k=k_1$ la conica C_k diventa la conica C_{k_1} tracciata in π_1 ed appartenente alla B_{k_1}, conica che passa altresì per M, essendo S legata ad S_1 dalla B_{k_1}. Ne concludiamo che il quarto punto M' converge al limite, per $k=k_1$, verso il secondo punto d'intersezione della retta g, uscente da M, colla conica C_{k_1}. Possiamo dunque formulare pel caso attuale la costruzione geometrica seguente:

Se di una deformata S *della quadrica fondamentale* Q *si conoscono tutte le* ∞^1 *trasformate contigue* Σ *per la trasformazione generica* B_k, *e di una speciale trasformata* S_1 *per mezzo della* B_{k_1} *si vogliono trovare le ulteriori trasformate per la* B_{k_1}, *oltre* S, *si scelga ad arbitrio una semplice infinità di superficie* Σ *contenente* S_1, *e nei piani* π_1 *tangenti di* S_1 *si traccino le coniche* C_{k_1} *appartenenti alla* B_{k_1}. *Preso un punto qualunque* M *di* S, *i piani tangenti nei punti corrispondenti alle* ∞^1 *superficie* Σ *scelte inviluppano un cono col vertice in* M, *tangente al piano* π_1 *lungo una retta uscente da* M. *L'ulteriore punto* M' *d'intersezione di questa retta colla corrispondente conica* C_{k_1} *descrive una trasformata di* S_1 *mediante la* B_{k_1}.

In questa costruzione abbiamo naturalmente supposto di scegliere la semplice infinità di Σ con k variabile per una catena continua di valori contenente k_1, e basta prendere ∞^1 di tali sistemi (Σ) per avere tutte le ∞^1 trasformate di S_1 per la B_{k_1}.

Ma è facile vedere che la costruzione non fa nemmeno difetto se per la semplice infinità di Σ si prendono le ∞^1 trasformate di S per mezzo della B_{k_1} stessa, cioè se si prende k fisso $=k_1$. Allora le dette coniche C_{k_1} toccano in M la corrispondente retta limite, cioè la generatrice del cono circoscritto da M alla quadrica Q_{k_1}, il punto M' coincide con M e la trasformata della S_1 viene a coincidere colla S primitiva.

§ 67*.

Configurazioni di Möbius di $8, 16, \ldots, 2^n$ deformate della quadrica Q [1]).

Terminiamo questo Capitolo coll'esposizione di ulteriori proprietà delle trasformazioni B_k relative al teorema di permutabilità. Questo

[1]) V. per ricerche più generali la mia memoria: *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XXV (1908).

teorema stabilisce in sostanza l'esistenza di cicli di $2^2=4$ deformate di una medesima quadrica Q, così costituiti che ciascuna superficie nel ciclo ne ha due contigue per trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}. Procedendo ulteriormente nella ricerca, dimostriamo l'esistenza di cicli di $2^3=8$ deformate della quadrica Q tali che ciascuna superficie nel ciclo ne ha tre contigue per trasformazioni

$$B_{k_1}\ ,\ B_{k_2}\ ,\ B_{k_3}$$

e in generale l'esistenza di cicli di 2^n deformate tali che ciascuna superficie è contigua per trasformazioni

$$B_{k_1}\ ,\ B_{k_2} \ldots B_{k_n}$$

ad altre n superficie del ciclo stesso. Se si considerano 2^n punti corrispondenti delle 2^n deformate e i loro 2^n piani tangenti, essi formano una configurazione $(2^n)_{n+1}$ della geometrica sintetica, cioè ogni punto giace su $n+1$ dei piani ed ogni piano passa per $n+1$ dei punti. Ogni tale configurazione $(2^n)_{n+1}$ risulta dalla riunione di due configurazioni inferiori $(2^{n-1})_n$ rispettivamente inscritte l'una nell'altra. In particolare la configurazione $(2^3)_4$ è l'insieme dei vertici e delle facce di due *tetraedri di Möbius* inscritti l'uno nell'altro. Le dette configurazioni si diranno per ciò *configurazioni di Möbius*.

Basterà occuparsi delle configurazioni di 8 deformate, perchè da questo caso particolare si deduce facilmente il generale. Sia dunque S una deformata della quadrica fondamentale Q, e siano S_1, S_2, S_3 tre sue trasformate contigue per trasformazioni

$$B_{k_1}\ ,\ B_{k_2}\ ,\ B_{k_3}\ ,$$

a costanti k_1, k_2, k_3 differenti. Pel teorema di permutabilità, la terna di deformate

$$S\ ,\ S_2\ ,\ S_3$$

è completata a quaderna (o configurazione $(2^2)_2$) da una quarta deformata, perfettamente determinata, che indicheremo con $\overline{S}_1$. Similmente siano $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ le deformate che completano le rispettive terne

$$(S\ ,\ S_3\ ,\ S_1)\ \ (S\ ,\ S_1\ ,\ S_2).$$

Abbiamo così le sette superficie

$$S\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3\ ,\ \overline{S}_1\ ,\ \overline{S}_2\ ,\ \overline{S}_3$$

e noi dimostriamo che ne esiste una *ottava* $\bar{S}$ legata ad $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ dalle trasformazioni $B_{k_1}, B_{k_2}, B_{k_3}$; essa è il luogo del punto $\bar{M}$ ove si incontrano tre piani tangenti corrispondenti di $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$, ed altresì l'inviluppo del piano determinato dai tre loro punti corrispondenti. Il ciclo delle 8 deformate di Q così trovato avrà allora appunto le proprietà descritte. Per dimostrare il teorema basterà provare che se si considera la superficie $\bar{S}$ completante, secondo il teorema di permutabilità, la quaderna

$$(S_3, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}),$$

gli elementi di questa $\bar{S}$ *si compongono simmetricamente con quelli di* S_1, S_2, S_3, cioè non varia $\bar{S}$ se si permutano comunque fra loro S_1, S_2, S_3. E per le considerazioni esposte nei paragrafi precedenti, ove abbiamo dedotto il teorema generale di permutabilità da quello relativo alle rigate, basterà provare la nostra asserzione per le deformate rigate. A questo scopo basta utilizzare convenientemente la formola del teorema di permutabilità (I) § 56 (pag. 164) per le deformate del paraboloide e la corrispondente (II) § 63 per quelle dell'iperboloide. Ma ci limiteremo al primo caso, chè la dimostrazione pel secondo sarebbe perfettamente analoga. Siano

$$r, r_1, r_2, r_3, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3,$$

sette generatrici corrispondenti di

$$S, S_1, S_2, S_3, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$$

e siano

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$$

i corrispondenti valori del parametro λ.

Scriviamo le corrispondenti formole (I) § 56, introducendo per brevità le 6 quantità seguenti

$$(30)\begin{cases} a_1 = \sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\,, & a_2 = \sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2}\,, \quad a_3 = \sqrt{pq_3} - \sqrt{qp_3} \\ b_1 = \sqrt{p_2q_3} - \sqrt{q_2p_3}\,, & b_2 = \sqrt{p_3q_1} - \sqrt{q_3p_1}\,, \quad b_3 = \sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2}\,, \end{cases}$$

tra le quali hanno luogo, come subito si verifica, le due seguenti identità

$$(31)\qquad \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \\ a_2a_3b_1 + a_3a_1b_2 + a_1a_2b_3 + b_1b_2b_3 = 0 \end{cases}$$ [1].

---

[1]) Per questa seconda si osservi che si ha

$$a_2a_3b_1 + a_3a_1b_2 + a_1a_2b_3 = -b_1b_2b_3 =$$
$$= (p+q)\left[(k_2-k_3)\sqrt{p_1q_1} + (k_3-k_1)\sqrt{p_2q_2} + (k_1-k_2)\sqrt{p_3q_3}\right]$$

Allora per le espressioni di $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ avremo

$$(32)\qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = \dfrac{(a_2\lambda_2 - a_3\lambda_3)\,.\,\lambda + b_1\lambda_2\lambda_3}{-b_1\left(1 + \dfrac{a_2a_3}{p+q}\lambda_2\lambda_3\right).\,\lambda + a_3\lambda_2 - a_2\lambda_3} \\[2ex] \bar{\lambda}_2 = \dfrac{(a_3\lambda_3 - a_1\lambda_1)\,.\,\lambda + b_2\lambda_3\lambda_1}{-b_2\left(1 + \dfrac{a_3a_1}{p+q}\lambda_3\lambda_1\right).\,\lambda + a_1\lambda_3 - a_3\lambda_1} \\[2ex] \bar{\lambda}_3 = \dfrac{(a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2)\,.\,\lambda + b_3\lambda_1\lambda_2}{-b_3\left(1 + \dfrac{a_1a_2}{p+q}\lambda_1\lambda_2\right).\,\lambda + a_2\lambda_1 - a_1\lambda_2}\,. \end{cases}$$

Consideriamo ora la superficie $\bar{\bar{S}}$ completante la quaderna

$$(S_3, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}),$$

e sia $\bar{\lambda}$ il valore del parametro della corrispondente generatrice. Siccome la terza della (32), risoluta rispetto a λ, dà

$$\lambda = \frac{(a_2\lambda_1 - a_1\lambda_2)\bar{\lambda}_3 - b_3\lambda_1\lambda_2}{b_3\left(1 + \dfrac{a_1a_2}{p+q}\lambda_1\lambda_2\right)\bar{\lambda}_3 + a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2}\,,$$

così avremo corrispondentemente

$$(33)\qquad \bar{\lambda} = \frac{(a_2\bar{\lambda}_1 - a_1\bar{\lambda}_2)\lambda_3 - b_3\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2}{b_3\left(1 + \dfrac{a_1a_2}{p+q}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\right)\lambda_3 + a_1\bar{\lambda}_1 - a_2\bar{\lambda}_2}\,.$$

In questa sostituiremo per $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ i valori (32) ed avremo così $\bar{\lambda}$ espressa per $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, e tutta la nostra dimostrazione si riduce a provare che questa espressione di $\bar{\lambda}$ è simmetrica rispetto agli elementi di S_1, S_2, S_3. Ora se nella (33) eseguiamo la detta sostituzione, poi liberiamo dai denominatori parziali, troviamo dapprima $\bar{\lambda}$ come quoziente di due polinomi di 2.° grado in λ, scriviamo

$$(34)\qquad \bar{\lambda} = \frac{A_1\lambda^2 + B_1\lambda + C_1}{A_2\lambda^2 + B_2\lambda + C_2}\,.$$

Introduciamo le due funzioni di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\left\{\begin{aligned} \Omega &= b_1\lambda_2\lambda_3 + b_2\lambda_3\lambda_1 + b_3\lambda_1\lambda_2 \\ \Theta &= \frac{b_1 b_2 b_3}{p+q}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - b_1\lambda_1 - b_2\lambda_2 - b_3\lambda_3 , \end{aligned}\right.$$

e pei coefficienti nella (34), osservando le due identità (31), troveremo facilmente

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= a_1 a_2\left(1+\frac{a_3^2\lambda_3^2}{p+q}\right).\,\Omega\,, & A_2 &= a_1 a_2\left(1+\frac{a_3^2\lambda_3^2}{p+q}\right).\,\Theta \\ C_1 &= a_1 a_2 \lambda_3^2\,.\,\Omega & , \quad C_2 &= a_1 a_2\lambda_3^2\,.\,\Theta \end{aligned}\right.$$

e inoltre

$$(36)\left\{\begin{aligned} B_1 &= \lambda_3\Big\{a_1(a_2^2-a_3^2+b_1^2)\lambda_2\lambda_3 + a_2(a_3^2-a_1^2-b_2^2)\lambda_3\lambda_1 + (a_3a_1^2-a_3a_2^2+a_1b_1b_3-a_2b_2b_3)\lambda_1\lambda_2\Big\} \\ B_2 &= \lambda_3\Big\{[a_3b_1b_2(a_2^2-a_1^2)+a_1b_2b_3(a_2^2-a_3^2)+a_2b_3b_1(a_3^2-a_1^2)]\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{p+q} - \\ &\quad - a_1(a_2^2-a_3^2+b_1^2)\lambda_1 - a_2(a_3^2-a_2^2-b_2^2)\lambda_2 - (a_3a_1^2-a_3a_2^2+a_1b_1b_3-a_2b_2b_3)\lambda_3\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Le (35) dimostrano che si ha

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\Omega}{\Theta};$$

ma di più si ha ancora

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\Omega}{\Theta},$$

poichè, a causa delle identità (31), risultano le proporzioni

$$\frac{a_3b_1b_2(a_2^2-a_1^2)+a_1b_2b_3(a_2^2-a_3^2)+a_2b_3b_1(a_3^2-a_1^2)}{b_1b_2b_3} = \frac{a_1(a_2^2-a_3^2+b_1^2)}{b_1} = \frac{a_2(a_3^2-a_1^2-b_2^2)}{b_2} =$$
$$= \frac{a_3a_1^2-a_3a_2^2+a_1b_1b_3-a_2b_2b_3}{b_3}.$$

Perciò nella (34) il secondo membro è indipendente da λ e resta semplicemente

$$\bar{\lambda} = \frac{\Omega}{\Theta} = \frac{b_1\lambda_2\lambda_3 + b_2\lambda_3\lambda_1 + b_3\lambda_1\lambda_2}{\dfrac{b_1b_2b_3}{p+q}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - b_1\lambda_1 - b_2\lambda_2 - b_3\lambda_3},$$

espressione simmetrica rispetto alle tre superficie S_1, S_2, S_3 c. d. d. [1]).

[1]) Si noti che Ω e Θ non cangiano affatto per una permutazione pari fra S_1, S_2, S_3 e cangiano contemporaneamente di segno per le dispari, a causa dei valori (30) di b_1, b_2, b_3.

Il nostro teorema per le configurazioni di 8 deformate della quadrica fondamentale Q è così dimostrato. Ed ora osserviamo che se

$$M, M_1, M_2, M_3, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3, \overline{M}$$

sono 8 loro punti corrispondenti e

$$\pi, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3, \bar{\pi}$$

i rispettivi piani tangenti, ciascuno degli 8 piani contiene 4 dei punti e cioè

$$\begin{aligned} \pi &\equiv (M, M_1, M_2, M_3) \quad , & \bar{\pi} &\equiv (\overline{M}, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3) \\ \pi_1 &\equiv (M_1, M, \overline{M}_2, \overline{M}_3) \quad , & \bar{\pi}_1 &\equiv (\overline{M}_1, \overline{M}, M_2, M_3) \\ \pi_2 &\equiv (M_2, M, \overline{M}_3, \overline{M}_1) \quad , & \bar{\pi}_2 &\equiv (\overline{M}_2, \overline{M}, M_3, M_1) \\ \pi_3 &\equiv (M_3, M, \overline{M}_1, \overline{M}_2) \quad , & \bar{\pi}_3 &\equiv (\overline{M}_3, \overline{M}, M_1, M_2), \end{aligned}$$

e dualmente ciascuno degli 8 punti giace in 4 dei piani: i due tetraedri

$$M\overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3 \quad , \quad \overline{M}M_1M_2M_3$$

hanno ciascuno i vertici sulle facce corrispondenti dell'altro, cioè sono due tetraedri di Möbius.

In generale, se di una deformata S della quadrica si considerano n trasformate contigue

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$$

per trasformazioni $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}$, e si applica ripetutamente il teorema di permutabilità e la proposizione precedente, si arriva ad un ciclo di 2^n deformate, costituenti la configurazione generale di Möbius $(2^n)_{n+1}$ sopra accennata [1]). Se si applicano questi risultati generali al caso particolare delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, le relative configurazioni di Möbius vengono allora a godere di speciali proprietà metriche molto notevoli. In questo caso ogni vertice della configurazione dista dagli n circostanti, nel piano corrispondente pel vertice stesso, di n lunghezze fisse

$$l_1, l_2, \ldots, l_n.$$

[1]) V. per i dettagli della dimostrazione la nota sopracitata.

Se si pensa congiunto ciascun vertice di una tale configurazione (regolare) agli n circostanti mediante n aste rigide, liberamente mobili attorno ai vertici, si ottiene un sistema articolato di $n \cdot 2^{n-1}$ aste, che è ancora in alto grado deformabile.

E invero risulta che: *un tale sistema articolato è suscettibile di un movimento a due parametri nel quale 2^n vertici descrivono 2^n superficie pseudosferiche ed i 2^n piani della configurazione restano costantemente i loro piani tangenti.*

CAPITOLO V.

Le quadriche coniugate in deformazione e la trasformazione H

§ 68.

Coppie di superficie coniugate in deformazione.

Andiamo ora ad introdurre nella nostra teoria della deformazione delle quadriche una nuova trasformazione di natura affatto diversa da quella delle trasformazioni B_k studiate fin qui. Questa nuova trasformazione, che si troverà per molti rapporti assimilabile alla trasformazione di Hazzidakis per le superficie a curvatura costante positiva, dà il passaggio dalle deformate di una quadrica Q a quelle di un'altra quadrica $\overline{Q}$, in generale distinta da Q, e combinata colle trasformazioni B_k permette in certo modo di duplicarne i risultati.

Siamo condotti alla nuova trasformazione, che diremo la *trasformazione H,* dallo studio di una questione generale relativa alla deformazione delle superficie che andiamo dapprima a formulare [1]).

Diciamo *asintotiche virtuali* di una qualunque superficie S ogni doppio sistema di linee tracciate sopra S, suscettibili, dopo una conveniente flessione della superficie S, di diventarne le linee asintotiche effettive. Un noto teorema di Bonnet (V. vol. I, § 114) ci assicura che dal sistema di asintotiche virtuali la corrispondente deformazione risulta determinata (intrinsecamente) in modo unico.

[1]) Della questione qui accennata mi occupai la prima volta in queste due note:

1. *Sopra un problema generale relativo alla deformazione delle superficie* (Rendiconti dei Lincei aprile 1902).

2. *Sulle quadriche coniugate in deformazione* (Ibid. aprile 1904).

Cf. anche la nota del sig. SERVANT: *Sur la déformation des surfaces* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 2.me sémestre 1902).

Suppongasi ora di avere una coppia $(S, \overline{S})$ di superficie, poste in tale corrispondenza di punto a punto, che vi sia corrispondenza fra le loro asintotiche *attuali* ed inoltre: *ad ogni sistema di asintotiche virtuali sopra* S *corrisponda un sistema di asintotiche virtuali sopra* $\overline{S}$, *e viceversa.*

In tale ipotesi è chiaro che alle deformazioni dell'una corrisponderanno biunivocamente le deformazioni dell'altra, per modo che i due problemi di deformare la S, ovvero la $\overline{S}$, saranno *intrinsecamente* equivalenti. Di due tali superficie si dirà perciò che esse sono *coniugate in deformazione;* ed è da osservarsi che ogni tale coppia $(S, \overline{S})$ viene trasformata, per deformazioni corrispondenti, in altre coppie $(S', \overline{S}')$ di superficie nuovamente coniugate in deformazione.

Se le due superficie $S, \overline{S}$ sono reali, come generalmente supporremo, e la corrispondenza fra i loro punti ha luogo fra le regioni reali, è chiaro che le asintotiche, attuali o virtuali, saranno insieme reali od insieme immaginarie per le due superficie $S, \overline{S}$, le quali avranno dunque in punti corrispondenti curvature di egual segno. Se questo segno è il positivo le asintotiche sono immaginarie, e, per enunciare la questione ancora sotto forma reale, basterà parlare della conservazione dei *sistemi coniugati.*

Allora, per qualunque deformazione della S, vi ha uno ed un solo sistema coniugato, sempre reale, che si conserva coniugato dopo la deformazione e che diciamo il relativo *sistema coniugato permanente* di S. Sulla coppia $(S, \overline{S})$ di superficie coniugate in deformazione si corrispondono i sistemi coniugati attuali ed i sistemi coniugati permanenti.

Premesse queste definizioni e considerazioni fondamentali, il problema generale da trattare sarà quello di *determinare tutte le coppie di superficie* $(S, \overline{S})$ *coniugate in deformazione.* Soluzioni evidenti di questo problema si hanno associando ad una qualunque superficie S una sua omotetica $\overline{S}$; ma una tale soluzione è tanto ovvia e così priva d'interesse che l'intenderemo sempre scartata in seguito.

Un'altra osservazione importante vogliamo fare ed è che nulla è a cambiare alle considerazioni precedenti se S ed $\overline{S}$, in luogo di appartenere allo spazio euclideo, appartengono ad uno spazio a curvatura costante, e più in generale a due spazii di diversa curvatura costante. E l'analisi del problema che facciamo ora seguire, appoggiata sulle equazioni di Gauss e di Codazzi, si applica appunto indifferentemente al caso Euclideo, ovvero al caso più generale testè indicato.

§ 69.

Equazioni di condizione.

Suppongasi che le due superficie $S, \overline{S}$, riferite punto per punto, siano coniugate in deformazione, e siano

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

$$\overline{ds}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2 \tag{1*}$$ [1])

i loro ds^2, riferiti a linee cordinate u, v corrispondenti. Ogni configurazione della S, flessibile ed inestendibile, è *intrinsecamente* determinata dalla sua seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

dove i coefficienti D, D', D'' dovranno unicamente soddisfare alle relative equazioni di Gauss e di Codazzi. La nostra ipotesi che $S, \overline{S}$ siano coniugate in deformazione equivale a ciò che per ogni tale seconda forma fondamentale della S ne esista una corrispondente *proporzionale* per la $\overline{S}$

$$\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2.$$

Pei calcoli seguenti sarà però più opportuno sostituire a D, D', D'' le quantità proporzionali

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}\,,\quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\,,\quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}$$

e analogamente a $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$ le altre

$$\overline{\Delta} = \frac{\overline{D}}{\sqrt{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}}\,,\quad \overline{\Delta}' = \frac{\overline{D}'}{\sqrt{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}}\,,\quad \overline{\Delta}'' = \frac{\overline{D}''}{\sqrt{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}}.$$

L'equazione di Gauss per la S si scrive allora

$$\Delta\Delta'' - \Delta'^2 = K, \tag{2}$$

[1]) È quasi superfluo avvertire che le notazioni $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ ecc. non hanno più qui e nel seguito il significato introdotto al § 41 e seguenti.

dove K designa la curvatura assoluta di S se la S appartiene allo spazio euclideo, o la sua curvatura *relativa* se S è immersa in uno spazio a curvatura costante (cf. vol. I, § 213) [1]. Le equazioni di Codazzi si scrivono poi in ogni caso (ibid):

$$
(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta'}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\Delta'' = 0\\
&\frac{\partial \Delta''}{\partial u} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Delta'' = 0,
\end{aligned}\right.
$$

i simboli di Christoffel essendo costruiti per la prima forma fondamentale (1) della S.

Ora si ha per ipotesi

$$
\overline{\Delta} = \lambda\Delta \;,\; \overline{\Delta}' = \lambda\Delta' \;,\; \overline{\Delta}'' = \lambda\Delta'' ,
$$

dove λ indica un fattore di proporzionalità, che si vede subito restare invariato per qualunque deformazione simultanea di $S, \overline{S}$. Risulta invero dalla corrispondente equazione di Gauss

$$
\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}'' - \overline{\Delta}'^2 = \overline{K},
$$

e quindi

$$
(4)\qquad \lambda^2 = \frac{\overline{K}}{K} \;,\; \lambda = \sqrt{\frac{\overline{K}}{K}} .
$$

Se scriviamo le equazioni (3) di Codazzi relative alla $\overline{S}$ e ne sottragghiamo ordinatamente le stesse moltiplicate per λ, otteniamo le due equazioni di condizione:

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \Delta'\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}\overline{22}\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta' + \left[\begin{Bmatrix}\overline{11}\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0\\
&\Delta''\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \Delta'\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \left[\begin{Bmatrix}\overline{22}\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta + 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta' + \left[\begin{Bmatrix}\overline{11}\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]\lambda\Delta'' = 0 .
\end{aligned}\right.
$$

E siccome λ non cangia di valore, comunque si deformi la S, queste sono relazioni lineari omogenee in $\Delta, \Delta', \Delta''$ che debbono risolversi in identità (cf. vol. II, pag. 90). Troviamo così le *sei* equazioni di condizione

[1] K è adunque in generale la curvatura della forma quadratica (1) diminuita della curvatura K_0 dello spazio.

che debbono aver luogo fra i due ds^2

$$
(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{11}\\1\end{Bmatrix}\\
&\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = 2\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\overline{22}\\2\end{Bmatrix}\quad \left(\lambda = \sqrt{\frac{\overline{K}}{K}}\right)\\
&\qquad\qquad \begin{Bmatrix}\overline{11}\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} \,,\; \begin{Bmatrix}\overline{22}\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} ;
\end{aligned}\right.
$$

queste esprimono manifestamente le condizioni necessarie e sufficienti perchè ai due ds^2 (1) e (1*) appartengano coppie di superficie coniugate in deformazione.

Osserviamo subito che, se siamo nell'ordinario caso euclideo, e supponiamo λ costante, le (6) ci dicono che le due forme (1), (1*) hanno gli stessi valori dei simboli di Christoffel e le curvature in rapporto costante.

Dalle formole (IV) al § 37 vol. I segue allora che

$$
KE = \overline{K}\,\overline{E} \;,\; KF = \overline{K}\,\overline{F} \;,\; KG = \overline{K}\,\overline{G} ,
$$

cioè

$$
\frac{\overline{ds}^2}{ds^2} = \frac{K}{\overline{K}} = \lambda^2 = \text{cost.}^{\text{te}} ,
$$

e le due superficie corrispondenti $S, \overline{S}$ coniugate in deformazione sono omotetiche col rapporto λ di omotetia. È il caso ovvio che abbiamo escluso.

Se poi, sempre supponendo λ costante, le due superficie $S, \overline{S}$ appartenessero a spazii di curvatura costante $K_0, \overline{K}_0$ si trarrebbe ancora dall'eguaglianza dei simboli di Christoffel

$$
\frac{\overline{ds}^2}{ds^2} = \frac{k}{\overline{k}} = \text{cost.}^{\text{te}}\ ^{1)} ,
$$

dove $k, \overline{k}$ indicano le curvature dei due ds^2, o le curvature assolute

$$
k = K + K_0 \;,\; \overline{k} = \overline{K} + \overline{K}_0
$$

[1] Si vede subito che se due ds^2 proporzionali hanno i medesimi valori pei simboli $\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$ di Christoffel, il fattore di proporzionalità è costante.

delle due superficie. Ma, poichè anche $\frac{\bar{k}}{k}$ è costante, se ne conclude, escludendo il caso ovvio della similitudine, che le due superficie $S, \bar{S}$ sono esse stesse a curvatura costante. Si ha così il risultato ben noto che il problema di determinare le superficie a curvatura costante è sempre il medesimo qualunque sia la curvatura (costante) dello spazio ambiente.

§ 70.

Corrispondenza delle geodetiche.

Riprendiamo il nostro problema generale.

Dalle equazioni di condizione (6) risultano in particolare le quattro relazioni seguenti fra i valori dei simboli di Christoffel dei due ds^2:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left\{ {\overline{11} \atop 2} \right\} = \left\{ {11 \atop 2} \right\}, \quad \left\{ {\overline{22} \atop 1} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} \\ &\left\{ {\overline{11} \atop 1} \right\} - 2\left\{ {\overline{12} \atop 2} \right\} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\}, \quad \left\{ {\overline{22} \atop 2} \right\} - 2\left\{ {\overline{12} \atop 1} \right\} = \left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ora queste hanno un notevole significato geometrico, che troviamo ricorrendo alla equazione differenziale delle geodetiche per un dato ds^2, scritta sotto la forma del § 87 vol. I (pag. 188):

$$v'' - \left\{ {22 \atop 1} \right\} v'^3 + \left[\left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} \right] v'^2 + \left[2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right] v' + \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0,$$

dove lungo la geodetica si suppone v espresso in funzione di u, e

$$v' = \frac{dv}{du}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2}.$$

Osservando le (7), si vede che esse esprimono essere la medesima l'equazione differenziale delle geodetiche pei due ds^2. Dunque due superficie $S, \bar{S}$ coniugate in deformazione si corrispondono di necessità *geodeticamente*, cioè alle linee geodetiche dell'una corrispondono le geodetiche dell'altra.

Ma è facile invertire questo risultato e dimostrare che se due superficie $S, \bar{S}$ si corrispondono geodeticamente, e *si corrispondono inoltre le asintotiche attuali*, si corrispondono anche tutte le virtuali. E infatti

indichino $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$; $\bar{\Delta}_0, \bar{\Delta}'_0, \bar{\Delta}''_0$ i valori attuali di $\Delta, \Delta', \Delta''$; $\bar{\Delta}, \bar{\Delta}', \bar{\Delta}''$ per la configurazione supposta di $S, \bar{S}$. Il calcolo eseguito al paragrafo precedente prova che $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$ soddisfano le (5), e poichè $S, \bar{S}$ si corrispondono, per ipotesi, geodeticamente, hanno luogo necessariamente le (7), onde le (5) si scrivono

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ {\overline{22} \atop 2} \right\} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \right\} - \Delta'_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + 2\left\{ {\overline{12} \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} \right\} = 0 \\ &\Delta''_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ {\overline{11} \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right\} - \Delta'_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + 2\left\{ {\overline{12} \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ma si ha, a causa delle (7) stesse,

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ {\overline{11} \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + 2\left\{ {\overline{12} \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} \\ &\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ {\overline{22} \atop 2} \right\} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + 2\left\{ {\overline{12} \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}, \end{aligned} \right.$$

e le precedenti diventano

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ {\overline{22} \atop 2} \right\} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \right\} - \Delta'_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ {\overline{11} \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right\} = 0 \\ &-\Delta'_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ {\overline{22} \atop 2} \right\} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \right\} + \Delta''_0 \left\{ \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ {\overline{11} \atop 1} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ne segue che, se si suppone

$$\Delta_0 \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = K \neq 0,$$

sono necessariamente nulle le quattro quantità (a) ed, essendo verificate tutte le (6), le due superficie $S, \bar{S}$ sono coniugate in deformazione c. d. d.

Possiamo dunque enunciare il risultato colla proposizione seguente:

Affinchè due superficie $S, \bar{S}$ dello spazio euclideo, o più in generale di due diversi spazii a curvatura costante, siano coniugate in deformazione è necessario e sufficiente che esse si corrispondano per sistemi coniugati attuali e per linee geodetiche.

Il caso escluso $K=0$ corrisponde alle sviluppabili dello spazio euclideo o a curvatura costante, caso questo ove il nostro problema perde ogni interesse. Ma si osservi che in questo caso ogni sistema di asintotiche virtuali si riduce ad un solo sistema ∞^1 di geodetiche arbitrarie e basta far corrispondere geodeticamente le due sviluppabili nei due spazii (ciò che è sempre possibile come è ben noto, poichè le loro curvature assolute sono costanti ed eguali alla curvatura dello spazio) e le due superficie sono coniugate in deformazione. Il teorema precedente vale dunque in ogni caso.

Il nostro problema è così ricondotto a trovare tutte le coppie di superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra, coll'aggiunta della condizione che si corrispondano i sistemi coniugati attuali. È ben noto come, sopprimendo quest'ultima condizione, il problema delle coppie di ds^2 a due variabili in corrispondenza geodetica è stato risoluto dal Dini [1]). Partendo dai risultati del Dini, si può risolvere il nostro problema generale.

Nella prima mia nota citata al § 68 ho risoluto appunto in questo modo la questione pei ds^2 appartenenti a superficie di rotazione. Successivamente il sig. Servant (n. c.) ha trovato che due superficie, coniugate in deformazione, non applicabili sopra superficie di rotazione, sono deformate di quadriche.

Indipendentemente dal sig. Servant io sono giunto per mia parte alla nozione di quadriche coniugate in deformazione per una semplice via geometrica che si lega nuovamente alla considerazione dei sistemi confocali di quadriche (V. 2.ª nota citata).

Andiamo ora a riprodurre queste considerazioni geometriche perchè esse ci servono di base per lo studio della nuova trasformazione H.

§ 71.

Quadriche coniugate in deformazione.

Consideriamo una quadrica qualunque Q e la schiera (Q) di quadriche confocali a Q. Con una proiettività cangiamo Q in un'altra quadrica $\overline{Q}$ e supponiamo che la detta proiettività cangi la schiera confocale (Q) nell'altra schiera confocale $(\overline{Q})$. Dico allora che *le due quadriche* Q, $\overline{Q}$ *sono coniugate*

[1]) *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra* (Annali di matematica t. III, pag. 269 (1869)).

in deformazione. Basterà provare (§ 70) che si corrispondono sopra Q, $\overline{Q}$ i sistemi coniugati e *le linee geodetiche*. La prima cosa è evidente, poichè la corrispondenza fra Q, $\overline{Q}$ è un'omografia. Per dimostrare anche la seconda si osservi che la nostra proiettività, cangiando la schiera confocale (Q) nella schiera confocale $(\overline{Q})$, ad ogni retta normale a Q in un punto M fa corrispondere la normale a $\overline{Q}$ nel corrispondente punto $\overline{M}$, perchè le altre due quadriche della schiera uscenti da M s'intersecano secondo una linea normale in M a Q (V. per es. Clebsch-Lindemann-Vorlesungen, Band. II, pag. 269). Dunque ogni piano normale in M a Q viene cangiato dalla omografia in un piano normale in $\overline{M}$ a $\overline{Q}$.

Ora una geodetica g di Q è caratterizzata dall'avere in ogni suo punto il piano osculatore normale alla superficie, e la medesima proprietà compete quindi sopra $\overline{Q}$ alla linea corrispondente $\overline{g}$, che è per ciò una geodetica c. d. d. Così possiamo enunciare il teorema:

Se due quadriche Q, $\overline{Q}$ *si corrispondono in una proiettività che cangi il sistema confocale* (Q), *nel sistema confocale* $(\overline{Q})$, *esse sono coniugate in deformazione.*

È ben noto che in una proiettività, distinta da una similitudine, vi ha una sola schiera di quadriche confocali che si cangia in un'altra tale schiera. Essa traduce quindi ogni quadrica della prima schiera in un'altra coniugata in deformazione della seconda.

Data una quadrica Q, per trovare le sue coniugate in deformazione basta quindi cercare le omografie che cangiano la schiera confocale (Q) in un'altra schiera confocale. Una schiera confocale di quadriche è caratterizzata, come ben si sa, da questo che delle quattro quadriche limiti (o singolari come inviluppi di piani) l'una si riduce al circolo assoluto (circolo immaginario all'infinito) mentre le altre tre sono le coniche focali. Affinchè una proiettività trasformi la schiera confocale (Q) in un'altra schiera confocale, occorre e basta che essa cangi una delle coniche focali nel circolo assoluto, ovvero questo in sè medesimo. Noi escludiamo però questo ultimo caso perchè la proiettività sarebbe allora una similitudine e si avrebbe il caso ovvio di quadriche coniugate in deformazione *omotetiche*.

Tutto ciò che abbiamo detto fino ad ora è assolutamente generale e vale per qualunque specie di quadriche reali od immaginarie. Ma fermiamoci qui particolarmente al caso più interessante per noi di quadriche reali generali a centro, trasformate da omografie reali in quadriche coniugate in deformazione. Scriviamo l'equazione del sistema confocale sotto la solita forma

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1\,, \tag{8}$$

supponendo come di consueto

$$a^2>b^2>c^2.$$

Le quattro quadriche limiti sono qui il circolo assoluto $\rho=\infty$ e le tre coniche focali

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-c^2}+\dfrac{y^2}{b^2-c^2}=1 & ,\ z=0 \text{ (ellisse reale) } \rho=-c^2 \\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2-b^2}-\dfrac{z^2}{b^2-c^2}=1 & ,\ y=0 \text{ (iperbola reale) } \rho=-b^2 \\[2mm] \dfrac{y^2}{a^2-b^2}+\dfrac{z^2}{a^2-c^2}+1=0 & ,\ x=0 \text{ (ellisse immaginaria) } \rho=-a^2\,. \end{cases}$$

La proiettività reale cercata dovrà dunque cangiare la terza conica nel circolo assoluto, e per ciò il piano $x=0$ nel piano all'infinito.

Indicando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del punto ove l'omografia trasporta il punto (x, y, z), le formole dell'omografia saranno

$$\bar{x}=\frac{\mathrm{U}}{x}\,,\ \bar{y}=\frac{\mathrm{V}}{x}\,,\ \bar{z}=\frac{\mathrm{W}}{x}\,,$$

dove $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ dovranno essere tali polinomii lineari in x, y, z che l'equazione

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2=0$$

dell'assoluto equivalga a quella della terza conica focale

$$(a^2-c^2)\,y^2+(a^2-b^2)\,z^2+(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)=0\,.$$

Trascurando un fattore costante d'omotetia, dovremo dunque avere identicamente

$$\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2+\mathrm{W}^2=(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)+(a^2-c^2)\,y^2+(a^2-b^2)\,z^2\,,$$

onde segue che $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ non conterranno la x e potremo porre, a meno di una sostituzione ortogonale,

$$\mathrm{U}=\sqrt{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)}\,,\quad \mathrm{V}=\sqrt{a^2-b^2}\,.\,z\,,\quad \mathrm{W}=\sqrt{a^2-c^2}\,.\,y\,.$$

L'omografia cercata è data dunque, a meno di movimenti e omotetie, dalle formole

$$\bar{x}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)}}{x}\,,\ \bar{y}=\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{z}{x}\,,\ \bar{z}=\sqrt{a^2-c^2}\,\frac{y}{x}\ \text{[1]}. \tag{9}$$

Essa cangia effettivamente il sistema confocale (8) nell'altro

$$\frac{\bar{x}^2}{\dfrac{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)}{a^2+\rho}}-\frac{\bar{y}^2}{\dfrac{(a^2-b^2)\,(c^2+\rho)}{a^2+\rho}}-\frac{\bar{z}^2}{\dfrac{(a^2-c^2)(b^2+\rho)}{a^2+\rho}}=1\,, \tag{10}$$

che è ancora un sistema confocale, anzi coincide col sistema (8) stesso, come si vede osservando che se si pone

$$\bar{\rho}=\frac{b^2c^2-a^2(b^2+c^2+\rho)}{a^2+\rho}\,, \tag{11}$$

la (10) si scrive

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2+\bar{\rho}}+\frac{\bar{y}^2}{b^2+\bar{\rho}}+\frac{\bar{z}^2}{c^2+\bar{\rho}}=1\,. \tag{10*}$$

Ai valori singolari di ρ

$$\rho=\infty\,,\ -c^2\,,\ -b^2\,,\ -a^2\,,$$

appartenenti alle quattro coniche confocali, corrispondono per la (11) i valori medesimi permutati

$$\bar{\rho}=-a^2\,,\ -b^2\,,\ -c^2\,,\ \infty\,,$$

onde l'omografia (9) scambia il circolo assoluto coll'ellisse focale immaginaria e le due coniche focali reali fra loro. Essa muta evidentemente la famiglia degli ellissoidi in quella degli iperboloidi a due falde, e la famiglia degli iperboloidi rigati in sè medesima.

Se, in luogo del sistema confocale (8) di quadriche a centro, prendessimo quello dei paraboloidi confocali

$$\frac{x^2}{p+k}+\frac{y^2}{q+k}=2z+k\,,$$

---

[1]) Si vede subito che questa è un'omografia biassiale armonica avente per punteggiate unite le due rette

$$x=\pm\sqrt[4]{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,,\ y\sqrt[4]{a^2-c^2}\mp z\sqrt[4]{a^2-b^2}=0.$$

e domandassimo ancora le omografie *reali* che lo trasformano in un sistema confocale, siccome qui il circolo assoluto è conica focale doppia, non avremmo altre omografie che similitudini, solito caso ovvio che trascuriamo. Ma nulla impedisce di utilizzare per la teoria generale delle deformate delle quadriche (anche solo dal punto di vista di deformate reali) omografie immaginarie. E così per es. se nel caso attuale eseguiamo l'omografia immaginaria

$$\bar{x} = \frac{y}{x}\ ,\ \ \bar{y} = \frac{z - \frac{q}{2}}{x}\ ,\ \ \bar{z} = i\,\frac{z - p + \frac{q}{2}}{x}\ ,$$

che cangia la parabola focale

$$x = 0\ ,\ \ y^2 + (p-q)(2z-p) = 0$$

nel circolo assoluto, il paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

viene trasformato nella quadrica *a centro*

$$q(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) - 2p\bar{y}(\bar{y} + i\bar{z}) + (p-q)^2\left(\frac{\bar{x}^2}{q} + \frac{1}{p}\right) = 0\ ,$$

la quale, come facilmente si vede, è tangente in un solo punto al circolo assoluto (V. vol. II, § 300).

Queste quadriche tangenti in un solo punto al circolo assoluto si sono presentate, come si sa, nelle ricerche di Darboux; le diciamo *quadriche di Darboux*.

Qui osserviamo inversamente che se Q è una quadrica di Darboux tangente in un punto P al circolo assoluto C_∞, la schiera di quadriche confocali (Q) è formata di quadriche che si toccano tutte in P ed il loro piano tangente comune contiene una conica focale Γ (almeno) doppia. Una omografia che cangi Γ nel circolo C_∞ cangia dunque il sistema confocale (Q) in un sistema confocale di paraboloidi. Ne deduciamo: *Ogni quadrica di Darboux ammette come quadrica coniugata in deformazione un paraboloide.* In questo fatto risiede la ragione geometrica della proprietà nota che i due problemi della deformazione di una quadrica di Darboux o di un paraboloide sono equivalenti.

§ 72.

Ellissoidi ed iperboloidi coniugati in deformazione.

Ritorniamo all'omografia reale (9) che trasforma in sè medesimo il sistema omofocale (8). Se prendiamo un ellissoide della schiera, per es. l'ellissoide $\rho = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ , \tag{12}$$

vediamo che la quadrica coniugata in deformazione è l'iperboloide a due falde

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}} - \frac{\bar{y}^2}{\frac{(a^2-b^2)c^2}{a^2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{(a^2-c^2)b^2}{a^2}} = 1\ , \tag{12*}$$

e riconosciamo così senz'altro che sono problemi intrinsecamente equivalenti i due della ricerca delle deformate dell'ellissoide e delle deformate dell'iperboloide a due falde coniugato. In particolare se si suppone

$$a^2 > b^2 = c^2,$$

l'ellissoide diventa di rivoluzione *schiacciato* e la quadrica coniugata in deformazione è un iperboloide rotondo a due falde. Abbiamo già incontrato queste coppie particolari di quadriche rotonde coniugate in deformazione nello studio dei teoremi di Guichard sulle deformate di queste quadriche (vol. II, § 405), ed abbiamo visto come si collegano alla trasformazione di Hazzidakis delle deformate della sfera.

Prendiamo ora nella schiera (8) un iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1\ (A^2 > B^2)\ ; \tag{13}$$

l'omografia (9), o ciò che è lo stesso, l'altra.

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{(A^2-B^2)(A^2+C^2)}}{x}\ ,\ \ \bar{y} = \sqrt{A^2-B^2}\,\frac{z}{x}\ ,\ \ \bar{z} = \sqrt{A^2+C^2}\,\frac{y}{x} \tag{14}$$

lo cangia nell'altro iperboloide ad una falda coniugato in deformazione

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{(A^2-B^2)(A^2+C^2)}{A^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{(A^2-B^2)C^2}{A^2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{(A^2+C^2)B^2}{A^2}} = 1\ . \tag{13*}$$

Si osservi che questi due iperboloidi sono in generale distinti e non simili.

Solo quando

$$\frac{1}{B^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{C^2}$$

l'iperboloide, che dicesi allora *ortogonale*, coincide col proprio coniugato in deformazione [1]). L'omografia (14) lo cangia in sè medesimo e conserva ad un tempo le linee geodetiche. I due problemi di deformare l'iperboloide (13) o il coniugato (13*) sono equivalenti: per l'iperboloide ortogonale le deformazioni si presentano dunque a coppie di deformazioni coniugate.

Importa osservare che l'omografia (9) trasforma fra loro le due regioni reali delle due quadriche coniugate in deformazione, ma cangia anche nel medesimo tempo una regione ideale dell'una in una regione ideale dell'altra; e se a queste regioni appartengono ds^2 reali definiti e positivi, avremo ancora coppie *reali* di superficie corrispondenti coniugate in deformazione.

Esaminiamo appunto a questo proposito come si comportano le regioni immaginarie di queste quadriche, che abbiamo considerato nel Cap. III, appartenenti a ds^2 di superficie reali. Per l'iperboloide ad una falda abbiamo detto al § 48 potersi considerare due di queste regioni, la prima corrispondente nelle formole

$$\frac{x}{A}=\frac{1+uv}{u+v}\,,\quad \frac{y}{B}=\frac{u-v}{u+v}\,,\quad \frac{z}{C}=\frac{1-uv}{u+v}$$

1) Nella schiera confocale (8) vi ha uno ed un solo iperboloide rigato ed ortogonale, quello che corrisponde al valore di ρ

$$\rho=\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-a^2\,;$$

esso viene trasformato in sè dall'omografia (9). Ma vi ha nella schiera una ed un'altra sola quadrica che l'omografia cangia in sè, cioè l'ellissoide immaginario corrispondente al valore di ρ

$$\rho=-\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-a^2\,.$$

Se si prende quest'ultima quadrica come assoluto di una metrica del Cayley si ha uno spazio ellittico nel quale l'omografia (9) è un movimento. Due quadriche del sistema coniugate in deformazione sono congruenti per quella metrica ellittica (cf. più avanti § 73).

ad assumere u, v complesse coniugate, la seconda ad assumere v coniugata di $\frac{1}{u}$.

Ma il primo caso corrisponde nelle formole superiori ad assumere

$$x\,,z \text{ reali} \qquad y \text{ puramente immaginaria,}$$

il secondo a prendere invece

$$x\,,y \text{ reali} \qquad z \text{ puramente immaginaria,}$$

e le formole dell'omografia (14) dimostrano come questa scambi appunto fra loro le regioni delle due specie. I due ds^2 relativi sono quindi coniugati in deformazione onde basta limitarsi, come abbiamo fatto al § 48, a considerare uno di essi.

Ancora per l'ellissoide e per l'iperboloide a due falde si sono presentate spontaneamente due loro regioni ideali (§§ 44 e 46) sulle quali sono applicabili le seconde falde focali (S_1) reali delle relative congruenze W. Per l'ellissoide si ottiene la regione in discorso assumendo

$$x\,,y \text{ reali} \qquad z \text{ immaginaria}$$

e per l'iperboloide

$$x\,,z \text{ reali} \qquad y \text{ immaginaria.}$$

L'omografia (9) cangia l'una regione dell'ellissoide nell'altra dell'iperboloide e i due corrispondenti ds^2 sono da capo coniugati in deformazione, come i ds^2 della regione reale.

§ 73.

La trasformazione H e le sue prime proprietà.

Consideriamo due quadriche $\overline{Q}$, Q coniugate in deformazione. Ogni deformata S di Q determina *intrinsecamente* una deformata $\overline{S}$ di $\overline{Q}$, corrispondente ad S per sistemi coniugati e linee geodetiche: la sua coniugata in deformazione. Diremo *trasformazione* H il passaggio da S a $\overline{S}$. È questa una trasformazione di carattere involutorio (a periodo 2), che fa passare dalle deformate della quadrica Q a quelle dell'altra quadrica $\overline{Q}$, e viceversa. Essa non si traduce, come le trasformazioni B_k, in una costruzione geometrica nello spazio colla quale si passi dalla prima superficie S alla seconda $\overline{S}$ [1]); ciò non ostante essa ha colle trasformazioni B_k molte proprietà a comune, come ora deduciamo facilmente dalla definizione stessa della H.

In primo luogo, osserviamo che, se la S è rigata, sarà ancora rigata la sua coniugata in deformazione $\overline{S}$, poichè le rette di S, essendo ad un tempo geodetiche ed asintotiche, avranno per corrispondenti sopra $\overline{S}$ linee che saranno pure geodetiche ed asintotiche, cioè linee rette. Dunque:

La trasformazione H *cangia ogni deformata rigata* R *di* Q *in una deformata rigata* $\overline{R}$ *di* $\overline{Q}$.

Discende poi immediatamente dalla definizione stessa quest'altra proprietà, che abbiamo visto appartenere pure alle trasformazioni B_k:

La trasformazione H *conserva i sistemi coniugati ed in particolare cangia il sistema coniugato permanente di* S *nel sistema coniugato permanente di* $\overline{S}$.

Supponiamo ora che la S si deformi attorno ad un'asintotica rigida a. Nella deformazione corrispondente di $\overline{S}$ la linea $\overline{a}$, che corrisponde ad a, si manterrà sempre asintotica e per ciò rigida, perchè non varia nè la sua flessione (curvatura geodetica) nè la sua torsione (teorema d'Enneper).

Segue di qui: *Se la superficie* S *si deforma attorno ad un'asintotica rigida, anche la sua coniugata in deformazione* $\overline{S}$ *si deforma attorno alla corrispondente asintotica rigida.*

Se in particolare deformiamo la S attorno all'asintotica rigida a sino a rettificare le geodetiche g trasformate delle rette (di un sistema) di Q, e a trasformarla quindi nella rigata R circoscritta ad S lungo a, secondo il teorema di Chieffi, lo stesso avrà luogo per la $\overline{S}$ e si ha quindi il teorema:

Se per i punti di due asintotiche corrispondenti delle due superficie coniugate in deformazione S , $\overline{S}$ *si tirano le tangenti alle geodetiche trasformate di rette corrispondenti delle quadriche* Q , $\overline{Q}$, *le due superficie rigate* R , $\overline{R}$ *che si formano sono ancora applicabili rispettivamente sopra* Q , $\overline{Q}$, *e coniugate fra loro in deformazione.*

Abbiamo detto, al principio di questo Capitolo (§ 68), che la trasformazione H delle deformate delle quadriche è assimilabile sotto molti

[1]) Fissata la posizione di S nello spazio, la $\overline{S}$ è determinata solo intrinsecamente a meno di movimenti e simmetrie.

rapporti alla trasformazione di Hazzidakis per le superficie a curvatura costante positiva (deformate della sfera).

Vediamo la ragione di questo riguardando l'effetto della trasformazione di Hazzidakis, anzichè sulle superficie a curvatura costante positiva, sulle loro falde dell'evoluta, le quali costituiscono, secondo il teorema di Weingarten, classi di superficie applicabili. Dimostriamo per ciò la proposizione seguente:

Se di due superficie a curvatura costante positiva, trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra, si considerano due falde omonime della evoluta, queste si corrispondono per sistemi coniugati e per linee geodetiche e sono quindi superficie coniugate in deformazione.

Per dimostrarlo prendiamo le formole relative a due superficie Σ , $\overline{\Sigma}$ di curvatura $K = +1$ e trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra, date al § 392 delle Lezioni (vol. II, pag. 436). Se ne consideriamo le due prime falde dell'evoluta S , $\overline{S}$, ne troviamo gli elementi lineari dalla formola (9*) § 126 delle Lezioni (vol. I, pag. 275) che ci dà

$$ds^2 = \frac{du^2}{\operatorname{senh}^2\theta} + \frac{d\theta^2}{\operatorname{senh}^4\theta}$$

$$\overline{ds}^2 = \frac{du^2}{\cosh^2\theta} + \frac{d\theta^2}{\cosh^4\theta}.$$

Questi si riducono alla forma tipica di superficie di rotazione ponendo rispettivamente $\alpha = \coth\theta$ nel primo caso, $\alpha = \operatorname{tangh}\theta$ nel secondo, con che

$$ds^2 = d\alpha^2 + (\alpha^2 - 1)\, du^2$$

$$\overline{ds}^2 = d\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\, du^2.$$

Secondo le formole relative alle geodetiche delle superficie di rotazione (vol. I, pag. 208), l'integrale primo di Clairaut dell'equazione delle geodetiche per la prima superficie S è

$$(a^2 - \operatorname{senh}^2\theta)\, du^2 - d\theta^2 = 0,$$

e per la seconda $\overline{S}$

$$(b^2 - \cosh^2\theta)\, du^2 - d\theta^2 = 0,$$

essendo a , b due costanti arbitrarie. Basta legare le due costanti colla relazione

$$b^2 - a^2 = 1$$

per far coincidere queste due equazioni. Dunque la corrispondenza fra i punti di S, $\bar{S}$, fissata dalla corrispondenza stessa fra i punti delle evolventi $\Sigma, \bar{\Sigma}$, trasforma le geodetiche di S in geodetiche di $\bar{S}$. D'altronde la trasformazione di Hazzidakis conserva i sistemi coniugati sulle superficie a curvatura costante positiva $\Sigma, \bar{\Sigma}$ [1]), ed a questi corrispondono i sistemi coniugati sulle evolute (vol. I, pag. 282). Per ciò sulle S, $\bar{S}$ si corrispondono, oltre alle geodetiche, i sistemi coniugati e le due superficie sono quindi coniugate in deformazione c. d. d.

Un altro ravvicinamento fra la trasformazione H per le deformate delle quadriche e la trasformazione di Hazzidakis è già stato ricordato al § precedente e si riferisce ad un ellissoide rotondo schiacciato e ad un iperboloide a due falde coniugati in deformazione.

§ 74.

Congruenze W corrispondenti.

Riprendiamo a considerare in generale due superficie S, $\bar{S}$ coniugate in deformazione.

Ad una deformazione *infinitesima* della S corrisponde una determinata deformazione infinitesima della $\bar{S}$ e nelle due deformazioni si corrispondono i sistemi coniugati permanenti. Possiamo ulteriormente precisare queste proprietà ricorrendo alla nota relazione fra le deformazioni infinitesime di una superficie S e le congruenze W aventi S per una delle falde focali (vol. II, § 242). Consideriamo una congruenza qualunque C di raggi tangenti ad S: se pei punti di $\bar{S}$ tiriamo i raggi tangenti nelle direzioni corrispondenti a quelle dei raggi di C, avremo una congruenza $\bar{C}$ che si dirà corrispondente a C. Ora dimostriamo il seguente teorema:

Se la congruenza C *colla prima falda focale* S *è una congruenza W,*

[1]) Secondo le formole citate del § 392, vol. II, le due superficie $\Sigma, \bar{\Sigma}$ hanno infatti la seconda forma fondamentale

$$\operatorname{senh}\theta \cosh\theta\,(du^2 + dv^2)$$

a comune.

anche la corrispondente $\bar{C}$, *avente per una falda focale la coniugata* $\bar{S}$ *in deformazione, sarà una congruenza* W.

Per dimostrarlo prendiamo a linee coordinate sopra S le linee $v=$ cost.^{te} inviluppate dai raggi di C ed a linee $u=$ cost.^{te} le loro linee a tangenti coniugate [1]), sicchè avremo $D'=0$.

Le coordinate x_1, y_1, z_1 del secondo fuoco F_1 potranno scriversi (§ 3)

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u}\,,\quad y_1 = y + l\frac{\partial y}{\partial u}\,,\quad z_1 = z + l\frac{\partial z}{\partial u}\,,$$

ed applicando le formole del § 3, ove sarà da farsi

$$m = 0\,,\quad D' = 0,$$

troveremo dalla (5) ibid.

$$Q = 0$$

e dalle (3), (4)

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + Dl\,X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P\frac{\partial x}{\partial u} \end{aligned}\right.$$

ove

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= \frac{\partial l}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} l + 1\,,\quad M = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} l \\ P &= \frac{\partial l}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} l\,,\quad Q = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} l + 1\,, \end{aligned}\right.$$

e siccome $Q=0$, ne verrà

$$\frac{1}{l} = -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\ ^{2}).$$

Per esprimere che la C è una congruenza W basta porre la condizione (vol. II § 242) che esista una deformazione infinitesima della seconda falda S_1, nella quale i punti $(x_1 y_1 z_1)$ di questa si spostino nella

[1]) Con ciò escludiamo il caso che le linee (v) siano asintotiche, caso che non fa però eccezione al teorema del testo.

[2]) Si osservi di passaggio che se si ha $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=0$ le sviluppabili circoscritte alla S lungo le linee (u) sono cilindri, cioè queste linee sono linee d'ombra.

direzione (X, Y, Z) della normale alla prima falda S. Siano

$$\varepsilon RX, \ \varepsilon RY, \ \varepsilon RZ$$

gli accrescimenti subiti da x_1, y_1, z_1, dove ε indica una costante infinitesima ed $R = R(u, v)$ un fattore incognito di proporzionalità, che dovrà soddisfare (vol. II § 224) alle condizioni necessarie e sufficienti

$$(17)\quad \begin{cases} \sum \frac{\partial (RX)}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ \sum \frac{\partial (RX)}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 \\ \sum \frac{\partial (RX)}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \sum \frac{\partial (RX)}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

A causa delle (15) e delle altre

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = -D, \ \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = -D''$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = -D',$$

la seconda delle (17) è un' identità e le altre due danno

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{L}{l}, \ \frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{P}{l} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{D''}{D},$$

ovvero per le (16)

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{\partial \log l}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ \frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{\partial \log l}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{D''}{D}. \end{cases}$$

Come unica condizione affinchè la congruenza sia W si ha la condizione d' integrabilità delle (18)

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{D''}{D}\right]\right],$$

e questa si suppone adunque soddisfatta.

Dobbiamo ora dimostrare che anche la congruenza corrispondente $\overline{C}$ è W, per la qual cosa basterà dunque provare che esiste una funzione

$\overline{R}(u, v)$ soddisfacente alle due equazioni analoghe alle (18)

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \overline{R}}{\partial u} = \frac{\partial \log \overline{l}}{\partial u} + \overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}} - \overline{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}} \\ \frac{\partial \log \overline{R}}{\partial v} = \frac{\partial \log \overline{l}}{\partial v} + \overline{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}}\frac{\overline{D}''}{\overline{D}}. \end{cases}$$

Sottragghiamo da queste le (18) ricordando che, essendo $S, \overline{S}'$ coniugate in deformazione, sono soddisfatte le (6) § 69 ed è

$$\frac{\overline{D}''}{\overline{D}} = \frac{D''}{D};$$

così si trova

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\overline{R}}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\overline{l}}{l}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\overline{R}}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\overline{l}}{l}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial v}. \end{cases}$$

Queste si soddisfano senz'altro ponendo

$$\overline{R} = \frac{R\overline{l}}{l\sqrt{\lambda}},$$

ed il teorema è dimostrato.

Ma nel seguito è un caso particolare di questo teorema che ci interessa, quello in cui $S, \overline{S}$ sono applicabili sulle quadriche $Q, \overline{Q}$ e per congruenza C si prenda una di quelle che corrispondono alle trasformazioni B_k. Allora si vedrà che anche la congruenza corrispondente $\overline{C}$ è della medesima specie e dà quindi una corrispondente trasformazione $B_{\overline{k}}$ di $\overline{S}$. Così, in questo caso speciale, la proposizione viene vieppiù a precisarsi e pone in relazione le trasformazioni B_k per le deformate della quadrica Q con quelle delle deformate della coniugata in deformazione $\overline{Q}$.

In fine si osservi che, insieme al teorema ora dimostrato, sussiste l'altro:

Ad ogni congruenza normale C *colla falda focale* S *corrisponde una congruenza normale* $\overline{C}$ *colla falda focale* $\overline{S}$. Questa è una immediata conseguenza della corrispondenza delle geodetiche sopra $S, \overline{S}$. Supponiamo in particolare che S sia applicabile sopra una superficie di rotazione e prendiamo per C la congruenza delle tangenti alle deformate dei meridiani. Questa è allora insieme una congruenza W e normale, e lo stesso accade quindi della congruenza corrispondente $\overline{\mathrm{C}}$; dunque in tal caso anche la $\overline{\mathrm{S}}$ è applicabile sopra una superficie di rotazione e sopra $\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}}$ le geodetiche trasformate dei meridiani si corrispondono.

§ 75.

Formole relative a due iperboloidi ad una falda coniugati in deformazione.

Veniamo ora allo studio delle proprietà che pongono in relazione, come si è detto, la trasformazione H colle B_k. Siano sempre $\mathrm{Q}, \overline{\mathrm{Q}}$ due quadriche coniugate in deformazione e $\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}}$ due qualunque loro deformate coniugate. Per mezzo di una trasformazione B_k trasformiamo la S in un'altra S_1 applicabile sopra Q, e consideriamo la congruenza C formata dalle congiungenti FF_1 i loro punti corrispondenti. Se applichiamo S sopra Q, i segmenti focali FF_1 si dispongono col primo estremo M tangenzialmente a Q e col secondo M_1 sulla quadrica confocale Q_k, e i secondi piani focali (tangenti ad S_1) diventano i piani π_1 della retta MM_1 e della generatrice della Q_k (del primo o del secondo sistema secondo che B_k è della prima o della seconda classe) uscente dal punto M_1. Ora l'omografia che cangia Q in $\overline{\mathrm{Q}}$, e l'intero sistema confocale (Q) in sè medesimo, cangia la quadrica Q_k in un'altra quadrica $\overline{\mathrm{Q}}_{\bar{k}}$ dello stesso sistema confocale, e muta quindi i segmenti MM_1 in segmenti $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{M}}_1$ tangenti nel primo estremo alla $\overline{\mathrm{Q}}$ e terminati nel secondo $\overline{\mathrm{M}}_1$ alla quadrica $\overline{\mathrm{Q}}_{\bar{k}}$; ed insieme i piani π_1 in piani $\overline{\pi}_1$ pel segmento $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{M}}_1$ e per la generatrice di $\overline{\mathrm{Q}}_{\bar{k}}$ uscente da $\overline{\mathrm{M}}_1$. Ciò posto, prendiamo la superficie $\overline{\mathrm{S}}$ coniugata in deformazione di S e deformiamo la seconda quadrica $\overline{\mathrm{Q}}$, che seco trasporti in sistema invariabile i segmenti $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{M}}_1$ ed i piani $\overline{\pi}_1$, nella superficie applicabile $\overline{\mathrm{S}}$. Il teorema finale, alla cui dimostrazione ci accingiamo, è allora il seguente: *La superficie $\overline{\mathrm{S}}_1$ luogo dei nuovi termini $\overline{\mathrm{M}}_1$ dei segmenti $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{M}}_1$ avrà per piani tangenti i piani $\overline{\pi}_1$ dopo la deformazione e insieme colla superficie $\overline{\mathrm{S}}$ formerà le due falde focali della congruenza $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{M}}_1$, talchè $\overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{S}}_1$ saranno trasformate l'una dell'altra per la $\mathrm{B}_{\bar{k}}$. Inoltre la $\overline{\mathrm{S}}_1$ sarà coniugata in deformazione della S_1 come la $\overline{\mathrm{S}}$ di* S.

Per eseguire i calcoli necessarii alla dimostrazione di questo teorema, ci riferiremo, per maggiore determinatezza, al caso di due *iperboloidi ad una falda* coniugati in deformazione; ma avvertiamo che il procedimento analitico stesso conserva il suo valore per ogni altra coppia di quadriche coniugate in deformazione.

Sia dunque

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2)$$

l'equazione del primo iperboloide Q; il coniugato $\overline{\mathrm{Q}}$ in deformazione avrà per equazione (§ 72)

$$\frac{\bar{x}_0^2}{\bar{a}^2}+\frac{\bar{y}_0^2}{\bar{b}^2}-\frac{\bar{z}_0^2}{\bar{c}^2}=1,$$

dove abbiamo posto

$$\text{(20)} \qquad \bar{a}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}}{a}, \quad \bar{b}=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-b^2}, \quad \bar{c}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+c^2},$$

e le formole dell'omografia che cangia Q in $\overline{\mathrm{Q}}$ saranno

$$\text{(21)} \qquad \frac{\bar{x}_0}{\bar{a}}=\frac{a}{x_0}, \quad \frac{\bar{y}_0}{\bar{b}}=\frac{a}{c}\frac{z_0}{x_0}, \quad \frac{\bar{z}_0}{\bar{c}}=\frac{a}{b}\frac{y_0}{x_0}.$$

Esprimendo x_0, y_0, z_0 per le coordinate curviline u, v colle formole (58) § 16 (pag. 47), avremo per le espressioni corrispondenti di $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$

$$\text{(22)} \qquad \bar{x}_0=\bar{a}\,\frac{u+v}{1+uv}, \quad \bar{y}_0=\bar{b}\,\frac{1-uv}{u+v}, \quad \bar{z}=\bar{c}_0\,\frac{u-v}{1+uv}.$$

Calcoliamo di qui le quantità

$$\overline{\mathrm{E}}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{G}}, \overline{\mathrm{D}}_0, \overline{\mathrm{D}}'_0, \overline{\mathrm{D}}''_0, \bar{\rho},$$

che sono per l'iperboloide $\overline{\mathrm{Q}}$ le analoghe delle

$$\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{D}_0, \mathrm{D}'_0, \mathrm{D}''_0, \rho$$

per il primitivo Q. Troviamo in primo luogo le formole

$$\text{(23)} \qquad \frac{\overline{\mathrm{E}}\,\overline{\mathrm{G}}-\overline{\mathrm{F}}^2}{\mathrm{E}\,\mathrm{G}-\mathrm{F}^2}=\frac{\bar{a}^2}{a^2}\frac{(u+v)^6}{(1+uv)^6}$$

$$(24) \qquad \overline{\mathrm{D}}_0 = \overline{\mathrm{D}}_0 = 0 \;, \; \overline{\mathrm{D}}'_0 = -\frac{4\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{(1+uv)^4\sqrt{\overline{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{G}}-\overline{\mathrm{F}}^2}},$$

e quindi

$$\overline{\rho} = \frac{(1+uv)^4(\overline{\mathrm{E}}\,\overline{\mathrm{G}}-\overline{\mathrm{F}}^2)}{4\bar{a}\bar{b}\bar{c}},$$

onde ricordando che

$$\rho = \frac{(u+v)^4)(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}{4abc},$$

ed osservando la (23), segue

$$\frac{\overline{\rho}}{\rho} = \frac{\bar{a}bc}{a\bar{b}\bar{c}}\frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2}.$$

Ma dalle (20) si ha subito

$$\bar{a}bc = a\bar{b}\bar{c}$$

e resta quindi

$$(25) \qquad \frac{\overline{\rho}}{\rho} = \frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2}.$$

Aggiungiamo che i valori dei simboli di Christoffel per il ds^2 dell'iperboloide $\overline{\mathrm{Q}}$ sono i seguenti

$$(26) \qquad \begin{cases} \overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}} = -\dfrac{2v}{1+uv} \;, & \overline{\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \overline{\rho}}{\partial v} \;, \quad \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}} = 0 \\[2ex] \overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}} = \quad 0 \;, & \overline{\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \overline{\rho}}{\partial u} \;, \quad \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}} = -\dfrac{2u}{1+uv}. \end{cases}$$

Confrontandoli coi valori corrispondenti (62) § 16 (pag. 48), si vede subito che le condizioni (7) § 70 sono soddisfatte e si ha così una verifica che sopra $\mathrm{Q}, \overline{\mathrm{Q}}$ si corrispondono le geodetiche e $\mathrm{Q}, \overline{\mathrm{Q}}$ (corrispondendosi già i sistemi coniugati) sono coniugati in deformazione.

Ora prendiamo una deformata qualunque S di Q, e sia

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2$$

la sua seconda forma fondamentale. Per la coniugata $\overline{\mathrm{S}}$ in deformazione la seconda forma fondamentale

$$\overline{\mathrm{D}}\,du^2 + 2\overline{\mathrm{D}}'\,du\,dv + \overline{\mathrm{D}}''\,dv^2$$

sarà proporzionale alla precedente e precisamente sarà

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}} = \frac{\overline{\mathrm{D}}'}{\mathrm{D}'} = \frac{\overline{\mathrm{D}}''}{\mathrm{D}''} = \frac{\overline{\mathrm{D}}'_0}{\mathrm{D}'_0}.$$

Ma per la (24), e per la corrispondente (60) § 16 (pag. 47)

$$\frac{\mathrm{D}'_0}{\mathrm{D}_0} = \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{abc}\frac{(u+v)^4}{(1+uv)^4}\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\sqrt{\overline{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{G}}-\overline{\mathrm{F}}^2}},$$

onde per la (23)

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}'_0}{\mathrm{D}_0} = \frac{\bar{b}\bar{c}}{bc}\frac{u+v}{1+uv} = \frac{\bar{a}}{a}\frac{u+v}{1+uv},$$

e quindi

$$(27) \qquad \frac{\overline{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}} = \frac{\overline{\mathrm{D}}'}{\mathrm{D}'} = \frac{\overline{\mathrm{D}}''}{\mathrm{D}''} = \frac{\bar{a}}{a}\frac{u+v}{1+uv} = \frac{\bar{a}}{a}\sqrt{\frac{\overline{\rho}}{\rho}}.$$

Se trasformiamo la S mediante una B_k nella nuova deformata S_1 di Q, avremo per la S_1 le solite formole

$$(28) \qquad x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

Indicando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del punto $\overline{\mathrm{M}}$ corrispondente di $\overline{\mathrm{S}}$ e con $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ quelle del secondo estremo $\overline{\mathrm{M}}_1$ del segmento $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}_1$ ottenuto nel modo descritto al principio di questo paragrafo, potremo scrivere le formole corrispondenti

$$(28^*) \qquad \bar{x}_1 = \bar{x} + \bar{l}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \bar{m}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \text{ ecc.},$$

dove resteranno da calcolare i coefficienti $\bar{l}, \bar{m}$. Intanto, siccome i raggi $\mathrm{MM}_1, \overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}_1$ delle congruenze $\mathrm{C}, \overline{\mathrm{C}}$ sono tirati in direzioni corrispondenti, saranno $\bar{l}, \bar{m}$ proporzionali a l, m, scriviamo

$$\bar{l} = hl \;, \; \bar{m} = hm$$

e cerchiamo il fattore h di proporzionalità. A questo oggetto, osserviamo che se si indicano con ξ, η, ζ ciò che diventano x_1, y_1, z_1 quando S si applica sopra Q, e medesimamente con $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ ciò che diventano $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$

quando $\bar S$ si distende su $\bar Q$, avremo

$$\begin{cases} \xi = x_0 + l\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\,\frac{\partial x_0}{\partial v} \\ \bar\xi = \bar x_0 + \bar l\,\frac{\partial \bar x_0}{\partial u} + \bar m\,\frac{\partial \bar x_0}{\partial v}, \end{cases}$$

e per ciò

$$\frac{\xi}{a} = \frac{(u+v)(1+uv)+l(v^2-1)+m(u^2-1)}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\bar\xi}{\bar a} = \frac{(u+v)(1+uv)-\bar l(v^2-1)-\bar m(u^2-1)}{(1+uv)^2}.$$

D'altra parte si passa dal punto (ξ,η,ζ) al punto $(\bar\xi,\bar\eta,\bar\zeta)$ mediante l'omografia (21), e quindi

$$\frac{\bar\xi}{\bar a} = \frac{a}{\xi};$$

ne segue

$$\frac{(u+v)(1+uv)-h[l(v^2-1)+m(u^2-1)]}{(1+uv)^2} = \frac{(u+v)^2}{(u+v)(1+uv)+l(u^2-1)+m(v^2-1)},$$

onde pel valore cercato di h

$$h = \frac{(u+v)(1+uv)}{(u+v)(1+uv)+l(v^2-1)+m(u^2-1)}.$$

Sostituiamo qui i valori (§ 16)

$$l = (u+v)\frac{U}{W}, \quad m = (u+v)\frac{V}{W},$$

ed avremo

$$h = \frac{(1+uv)W}{(1+uv)W+(v^2-1)U+(u^2-1)V}.$$

Pei valori effettivi (67) § 16 (pag.49) di U, V, W (segni superiori) si ha

$$(1+uv)W+(v^2-1)U+(u^2-1)V = (u+v)\Omega,$$

ove si ponga

(29) $$\Omega = 2\left[\frac{b}{b'}(1-uv)\cos\theta - \frac{bc}{b'c'}(u+v)\operatorname{sen}\theta + \frac{c}{c'}(u-v)\right];$$

così il valore di h diventa

$$h = \frac{1+uv}{u+v}\,\frac{W}{\Omega},$$

da cui

$$\bar l = hl = (1+uv)\frac{U}{\Omega}, \quad \bar m = hm = (1+uv)\frac{V}{\Omega},$$

e in fine per le formole (28*) che definiscono $\bar S_1$

(30) $$\bar x_1 = \bar x + \frac{1+uv}{\Omega}\left(U\frac{\partial \bar x}{\partial u} + V\frac{\partial \bar x}{\partial v}\right).$$

§ 76.

La superficie $\bar S_1$ come trasformata della $\bar S$ per una $B_{\bar k}$.

Per dimostrare il teorema enunciato dobbiamo in primo luogo dimostrare che le formole (30) ora ottenute definiscono una trasformata $\bar S_1$ della $\bar S$ mediante una conveniente $B_{\bar k}$. Occorre anzi tutto calcolare questo valore $\bar k$ in funzione di k, ciò che si fa subito osservando che esso è il valore del parametro della quadrica confocale $\bar Q_{\bar k}$

$$\frac{\bar x^2}{\bar a^2+\bar k} + \frac{\bar y^2}{\bar b^2+\bar k} - \frac{\bar z^2}{\bar c^2-\bar k} = 1,$$

in cui l'omografia (21) trasforma la quadrica Q_k di equazione

$$\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} - \frac{z^2}{c^2-k} = 1;$$

si ha subito di qui per la formola cercata

(31) $$\bar k = -\frac{\bar a^2 . k}{a^2+k}.$$

Ed ora per compiere le verifiche indicate conviene trasformare le formole relative all'attuale iperboloide $\bar Q$ nelle nostre primitive del § 16, e così scriviamo, in corrispondenza colle (58) § 16,

$$\bar x_0 = \bar a\,\frac{1+\bar u\bar v}{\bar u+\bar v}, \quad \bar y_0 = \bar b\,\frac{\bar u-\bar v}{\bar u+\bar v}, \quad \bar z_0 = \bar c\,\frac{1-\bar u\bar v}{\bar u+\bar v};$$

queste, confrontate colle (22), danno subito le semplici formole

$$\bar{u} = \frac{1}{u}\ ,\ \bar{v} = v$$

pel passaggio dalle antiche variabili u, v alle nuove $\bar{u}, \bar{v}$.

Secondo le formole del § 16, una trasformata $\overline{S}'_1$ della $\overline{S}$ mediante la $B_{\bar{k}}$ sarà data dalle formole

$$\text{(31*)} \qquad \bar{x}'_1 = \bar{x} + \lambda \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}} + \mu \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}} \ \text{ecc.},$$

dove

$$\lambda = (\bar{u} + \bar{v}) \frac{\overline{\mathrm{U}}}{\overline{\overline{\mathrm{W}}}}\ ,\ \mu = (\bar{u} + \bar{v}) \frac{\overline{\mathrm{V}}}{\overline{\overline{\mathrm{W}}}}$$

ed $\overline{\overline{\mathrm{U}}}, \overline{\overline{\mathrm{V}}}, \overline{\overline{\mathrm{W}}}$ hanno i valori

$$\text{(32)} \left\{ \begin{aligned} \overline{\overline{\mathrm{U}}} &= \left(\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'} - \frac{\bar{b}}{\bar{b}}\right) 2\bar{u}\cos\theta + \left(\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'} - \frac{\bar{a}}{\bar{a}'}\right)(\bar{u}^2 - 1)\,\mathrm{sen}\,\theta + \left(\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'} - \frac{\bar{c}}{\bar{c}'}\right)(\bar{u}^2 + 1) \\ \overline{\overline{\mathrm{V}}} &= \left(-\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'} - \frac{\bar{b}}{\bar{b}'}\right) 2\bar{v}\cos\theta + \left(\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'} + \frac{\bar{a}}{\bar{a}'}\right)(\bar{v}^2 - 1)\,\mathrm{sen}\,\theta + \left(\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'} + \frac{\bar{c}}{\bar{c}'}\right)(\bar{v}^2 + 1) \\ \overline{\overline{\mathrm{W}}} &= 2\left[\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'}(\bar{u} - \bar{v})\cos\theta - \frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'}(1 + \bar{u}\bar{v})\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'}(1 - \bar{u}\bar{v})\right], \end{aligned} \right.$$

e le costanti $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ gli altri

$$\text{(33)} \qquad \bar{a}' = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}}\ ,\ \bar{b}' = \sqrt{\bar{b}^2 + \bar{k}}\ ,\ \bar{c}' = \sqrt{\bar{c}^2 - \bar{k}}\,.$$

Dovrà inoltre $\theta(\bar{u}, \bar{v})$ soddisfare le corrispondenti equazioni differenziali fondamentali (II) § 36 in coordinate $(\bar{u}, \bar{v})$ per la trasformazione $B_{\bar{k}}$.

Dalle (33), osservando le (20) e la (31), si traggono intanto le seguenti

$$\text{(34)} \qquad \frac{\bar{a}}{\bar{a}'} = \frac{a'}{a}\ ,\ \frac{\bar{b}}{\bar{b}'} = \frac{a'}{a}\frac{c}{c'}\ ,\ \frac{\bar{c}}{\bar{c}'} = \frac{a'}{a}\frac{b}{b'}\,.$$

Se si sostituiscono poi nei valori (32) di $\overline{\overline{\mathrm{U}}}, \overline{\overline{\mathrm{V}}}, \overline{\overline{\mathrm{W}}}$ per $\bar{u}, \bar{v}$ i valori

$$\bar{u} = \frac{1}{u}\ ,\ \bar{v} = v\,,$$

e si confrontano colle (67) § 16 e col valore (29) di Ω_1 si trovano subito

le seguenti

$$\overline{\overline{\mathrm{U}}} = -\frac{a'^2}{a^2}\frac{\mathrm{U}}{u^2}\ ,\ \overline{\overline{\mathrm{V}}} = \frac{a'^2}{a^2}\mathrm{V}\ ,\ \overline{\overline{\mathrm{W}}} = \frac{a'^2}{a^2}\frac{\Omega}{u}\,.$$

Ma, in coordinate u, v, le (31*) si scrivono

$$\bar{x}'_1 = \bar{x} - \lambda u^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\,,$$

mentre per le precedenti si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda u^2 &= \left(\frac{1}{u} + v\right)\frac{u^2\overline{\overline{\mathrm{U}}}}{\overline{\overline{\mathrm{W}}}} = -(1 + uv)\frac{\mathrm{U}}{\Omega} \\ \mu &= \left(\frac{1}{u} + v\right)\frac{\overline{\overline{\mathrm{V}}}}{\overline{\overline{\mathrm{W}}}} = (1 + uv)\frac{\mathrm{V}}{\Omega}\,, \end{aligned} \right.$$

onde

$$\bar{x}'_1 = \bar{x} + (1 + uv)\left(\frac{\mathrm{U}}{\Omega}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{\mathrm{V}}{\Omega}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right),$$

formole che coincidono colle (30).

Resta ora da eseguire la seconda verifica differenziale, cioè da provare che la funzione $\theta(u, v)$, che soddisfaceva alle equazioni differenziali della trasformazione B_k relative alla superficie S, cioè alle

$$\text{(36)} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\mathrm{V} + \frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathrm{DU} + \mathrm{D'V}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\mathrm{U} + \frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathrm{D'U} + \mathrm{D''V})\,, \end{aligned} \right.$$

soddisfa altresì alle altre

$$\text{(37)} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{u}} &= \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(\bar{u}+\bar{v})^2\bar{\rho}}\overline{\mathrm{V}} + \varepsilon\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}}(\overline{\Delta}\,\overline{\mathrm{U}} + \overline{\Delta}'\overline{\mathrm{U}}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{v}} &= \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(\bar{u}+\bar{v})^2\bar{\rho}}\overline{\mathrm{U}} + \varepsilon\frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}}(\overline{\Delta}'\overline{\mathrm{U}} + \overline{\Delta}''\overline{\mathrm{V}})\,, \end{aligned} \right. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

relative alla trasformazione $B_{\bar{k}}$ della $\overline{S}$, ove con

$$\overline{\Delta}\,d\bar{u}^2 + 2\overline{\Delta}'\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \overline{\Delta}''\,d\bar{v}^2$$

si indica la seconda forma fondamentale di $\bar{S}$

$$\bar{D}\,du^2 + 2\bar{D}'\,du\,dv + \bar{D}''\,dv^2,$$

trasformata in coordinate $\bar{u} = \frac{1}{u}$, $\bar{v} = v$. Basterà dunque provare che, scegliendo convenientemente il segno di ε nelle (37), queste vengono a coincidere colle (36). Ma si ha

$$\bar{\Delta} = u^4 \bar{D}\,,\quad \bar{\Delta}' = -u^2 \bar{D}'\,,\quad \bar{\Delta}'' = \bar{D}'',$$

indi per le (27)

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{a}}{a} u^4 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}}\,.\,D\,,\quad \bar{\Delta}' = -\frac{\bar{a}}{a} u^2 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}}\,D'\,,\quad \bar{\Delta}'' = \frac{\bar{a}}{a} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}}\,.\,D'', \tag{38}$$

ed essendo

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial\theta}{\partial \bar{u}}\,,\quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial \bar{v}}\,,$$

le (37), *ove si prenda* $\varepsilon = -1$ [1]), e si osservino le (35) e (38), danno

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(1+uv)^2\bar{\rho}}\frac{a'^2}{a^2}V - \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}}\frac{a'^2\bar{a}}{a^3}(DU + D'V) \\
\frac{\partial\theta}{\partial v} &= -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{k}(1+uv)^2\bar{\rho}}\frac{a'^2}{a^2}U - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}}\frac{a'^2\bar{a}}{a^3}(D'U + D''V)\,.
\end{aligned}\right.$$

Ed in fine, osservando le formole

$$\bar{k} = -\frac{\bar{a}^2}{a'^2}k\,,\quad \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{abc} = \frac{\bar{a}^2}{a^2}\,,\quad \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{a'b'c'} = \frac{a^2}{a'^4}\bar{a}^2$$

$$\bar{\rho} = \frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2}\rho\,,$$

vediamo convertirsi le precedenti nelle (36), ciò che completa le verifiche proposte.

---

[1]) La scelta $\varepsilon = -1$ dipende dal segno preso nelle (27) per $\bar{D}, \bar{D}', \bar{D}''$, chè se questo si cangiasse nell'opposto verrebbe allora $\varepsilon = +1$. Si ricordi a questo proposito che la S determina la coniugata in deformazione $\bar{S}$ solo a meno di movimenti e simmetrie.

§ 77.

Conclusione. — Permutabilità della trasformazione H colle B_k.

I calcoli del paragrafo precedente ci hanno dimostrata solo la prima parte della proposizione enunciata al § 75 e cioè che la superficie $\bar{S}_1$ luogo dei punti $\bar{M}_0$ (data dalle formole (30)) è una trasformata della $\bar{S}$ per la $B_{\bar{k}}$, onde segue poi che i suoi piani tangenti sono appunto i piani $\bar{\pi}_1$ dell'enunciato. Quello che ci rimane ancora da provare è che la superficie $\bar{S}_1$ è coniugata in deformazione della S_1. Questo dedurremo, senza alcun calcolo, dalla legge d'applicabilità per le due falde focali di una delle nostre congruenze W, data come sappiamo dall'affinità d'Ivory.

Osserviamo per ciò che, quando applichiamo S sopra Q, i segmenti focali FF_1 si dispongono col primo estremo in un punto M di Q, tangenzialmente a Q, e vanno a terminare nel secondo M_1 alla quadrica confocale Q_k.

Ora, per il modo stesso come al § 75 abbiamo costruito $\bar{S}_1$, allorquando distendiamo $\bar{S}$ sopra $\bar{Q}$ i termini dei rispettivi segmenti focali $\bar{F}\bar{F}_1$ si dispongono sulla quadrica confocale $\bar{Q}_{\bar{k}}$ nei punti $\bar{M}_1$ corrispondenti ai punti M_1 nell'omografia (21). Trasportiamo ora, coll'affinità di Ivory, il punto M_1 da Q_k in N_1 sopra Q, e medesimamente $\bar{M}_1$ da $\bar{Q}_{\bar{k}}$ in $\bar{N}_1$ sopra $\bar{Q}$. Saranno allora rispettivamente N_1 ed $\bar{N}_1$ le posizioni occupate da F_1 e $\bar{F}_1$ quando si distende la S_1 sopra Q, ovvero la $\bar{S}_1$ sopra $\bar{Q}$. D'altra parte l'omografia (21) cangia in sè medesima la famiglia degli iperboloidi confocali ad una falda e però anche quella delle loro trajettorie ortogonali, onde segue che i due punti $N_1, \bar{N}_1$ si corrispondono nell'omografia (21). E siccome questa cangia le geodetiche di Q in quelle di $\bar{Q}$, ne segue che se F_1 descrive una geodetica sopra S_1 il punto $\bar{F}_1$ corrispondente su $\bar{S}_1$ descrive pure una geodetica. Dunque nella corrispondenza fra S_1 e $\bar{S}_1$ le geodetiche sono conservate; ma sono conservati anche i sistemi coniugati, poichè questi corrispondono ai sistemi coniugati di $S, \bar{S}$, i quali si corrispondono fra loro. Concludiamo pertanto che $S_1, \bar{S}_1$ sono coniugate in deformazione c. d. d.

Possiamo enunciare la proposizione così stabilita anche sotto la forma equivalente:

La trasformazione H *cangia contemporaneamente le due falde focali* S, S_1 *di una delle nostre congruenze* W *nelle due falde focali* $\overline{S}, \overline{S}_1$ *di un' altra tale nuova congruenza.*

Si vede così che per passare da S ad $\overline{S}_1$ si può eseguire prima la B_k da S ad S_1, indi la H da S_1 ad $\overline{S}_1$, ovvero anche prima la H che da S porta ad $\overline{S}$ e successivamente la $B_{\overline{k}}$ che conduce da $\overline{S}$ ancora ad $\overline{S}_1$. Si può dunque dire che il risultato ottenuto esprime la permutabilità della trasformazione H colla B_k, nello stesso modo come il teorema di permutabilità (cap. IV) riguardava la permutabilità delle B_k fra loro.

Se le due superficie $S, \overline{S}$ coniugate in deformazione sono note, ed è nota altresì una trasformata S_1 di S per una B_k, si ottiene senz'altro in *termini finiti* una corrispondente trasformata $\overline{S}_1$ di $\overline{S}$ per una $B_{\overline{k}}$ e questa $\overline{S}_1$ è al tempo stesso la coniugata in deformazione di S_1. Per ciò, nell'applicare le trasformazioni B_k alle deformate di una quadrica Q, conviene sempre associarvi le deformate dell'altra quadrica $\overline{Q}$ coniugata in deformazione, poichè i due problemi di trasformazione si risolvono l'uno coll'altro. Per tal modo, in particolare, si passa dalle deformate dell' iperboloide ad una falda a quelle del coniugato in deformazione e ciò tanto che si tratti delle deformate delle regioni reali, quanto che si tratti invece di quelle immaginarie.

Similmente dalle superficie applicabili sulla regione reale o ideale di un ellissoide si passa, colla trasformazione H, a quelle applicabili sulla regione reale od ideale dell' iperboloide a due falde. Ed in fine osserviamo che, siccome l'omografia, che cangia la quadrica Q nella coniugata $\overline{Q}$, scambia fra loro le coniche focali, le trasformazioni *singolari* per le deformate della prima quadrica vengono cangiate dalla trasformazione H nelle corrispondenti trasformazioni singolari per le deformate dell'altra quadrica.

§ 78.

Cenno sulla estensione delle trasformazioni B_k alla geometria non-euclidea.

Tutte le teorie che abbiamo sviluppato in questo libro per le deformate delle quadriche nello spazio euclideo si trasportano inalterate (coi

medesimi principii geometrici fondamentali dei sistemi confocali di quadriche e della affinità d'Ivory) alle deformate delle quadriche negli spazi di curvatura costante, positiva o negativa. Noi qui però ci limiteremo ad indicare un modo di effettuare questo trasporto, servendosi della trasformazione H studiata in questo capitolo.

Premettiamo per ciò le osservazioni seguenti:

Di due quadriche omofocali Q, Q' dell'ordinario spazio prendiamo p. e. la seconda Q' come *assoluto* di una metrica del Cayley. Il ds^2 di questa metrica appartiene, come ben si sa (vol. I § 192), ad uno spazio di curvatura costante e la quadrica Q euclidea è al tempo stesso una quadrica dello spazio curvo o, come diremo, una quadrica non-euclidea. È evidente che i sistemi coniugati di Q nel senso euclideo sono anche coniugati nel senso non-euclideo. Ma importa di più osservare che: *la quadrica* Q *ha le medesime geodetiche sia nello spazio euclideo sia nello spazio curvo.* Questa proprietà, osservata la prima volta da Darboux [1]), si dimostra subito ricordando che il polo del piano tangente in un punto p alla quadrica Q rispetto alla quadrica confocale Q' è situato sulla normale in p a Q, e perciò ogni normale alla quadrica Q nel senso euclideo è pure la normale non-euclidea. Ora una geodetica euclidea di Q ha il suo piano osculatore normale nel senso euclideo a Q e per ciò anche nel senso non-euclideo, onde essa è altresì geodetica non-euclidea, e viceversa ogni geodetica non- euclidea di Q è anche geodetica euclidea.

Se a queste osservazioni associamo il teorema dimostrato al § 70, vediamo che:

La quadrica Q *ha i medesimi sistemi di asintotiche virtuali tanto nella metrica ordinaria come in quella del Cayley e per ciò i due problemi di deformare* Q *nel senso euclideo o nel senso non-euclideo sono intrinsecamente equivalenti.*

Così adunque ad ogni deformata euclidea S della quadrica Q corrisponde una deformata $\overline{S}$ non-euclidea, che è coniugata in deformazione della S; la trasformazione H dà il passaggio dall'una specie di deformate alle altre.

Ed ora si presenta ben naturale la domanda:

Dalle deformate delle quadriche euclidee si ottengono così tutte le

[1]) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.* Paris 1878.

deformate delle quadriche non-euclidee? Consideriamo la questione dal punto di vista reale, e distinguiamo secondo che si tratta di metrica ellittica od iperbolica. Nel primo caso l'assoluto Q' sarà un ellissoide immaginario, nel secondo una quadrica reale a punti ellittici. Per quanto precede, la questione è riportata alla elementare seguente: Si può eseguire un'omografia reale che cangi le due quadriche Q, Q' in due quadriche omofocali?

Se siamo in metrica ellittica ed adoperiamo coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2, x_3 (vol. I, § 193), l'equazione dell'assoluto Q' è

$$Q') \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

e con una sostituzione ortogonale reale su x_0, x_1, x_2, x_3, che rappresenta una trasformazione delle coordinate di Weierstrass (ovvero un movimento dello spazio ellittico), possiamo ridurre l'equazione della quadrica Q alla forma normale

$$Q) \qquad \frac{x_0^2}{A} + \frac{x_1^2}{B} + \frac{x_2^2}{C} + \frac{x_3^2}{D} = 0,$$

dove le costanti A, B, C, D non saranno tutte eguali; altrimenti Q coinciderebbe con Q'. Escludiamo inoltre il caso in cui queste costanti siano a coppie eguali; allora la quadrica (reale) Q avrebbe l'equazione

$$x_0^2 + x_1^2 - \operatorname{tang}^2 \sigma \, (x_2^2 + x_3^2) = 0$$

con σ costante reale e sarebbe la *superficie di Clifford* [1]). Nelle nostre ipotesi vi sarà dunque una almeno delle quattro costanti diversa da tutte le altre tre, poniamo p. e. A. Introduciamo coordinate cartesiane ortogonali ordinarie x, y, z, ponendo

$$x = a\frac{x_1}{x_0}, \quad y = b\frac{x_2}{x_0}, \quad z = c\frac{x_3}{x_0}$$

[1]) Se si esprimono x_0, x_1, x_2, x_3 per due variabili u, v colle formole

$$x_0 = \cos\sigma \cos u, \quad x_1 = \cos\sigma \operatorname{sen} u, \quad x_2 = \operatorname{sen}\sigma \cos v, \quad x_3 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} v,$$

si vede subito che queste rappresentano una superficie di Clifford riferita alle sue linee di curvatura u, v (circoli).

con a, b, c costanti. Le equazioni delle due quadriche Q, Q' diventano

$$\frac{x^2}{\frac{a^2 B}{A}} + \frac{y^2}{\frac{b^2 C}{A}} + \frac{z^2}{\frac{c^2 D}{A}} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad ,$$

e queste saranno omofocali se

$$a^2 - a^2\frac{B}{A} = b^2 - b^2\frac{C}{A} = c^2 - c^2\frac{D}{A},$$

cioè se le costanti a, b, c sono prese in guisa che sia

$$a^2(A - B) = b^2(A - C) = c^2(A - D),$$

ciò che è sempre possibile con valori reali per a, b, c se le tre differenze (non nulle) $A - B$, $A - C$, $A - D$ hanno il medesimo segno. Se B, C, D sono diseguali fra loro, e da A come si è supposto, basterà scegliere per A la maggiore di esse per trovarsi nel caso ora detto. Resta il solo caso che due delle B, C, D, sieno eguali fra loro per es. $B = C$ e differente dalla terza D [1]) e le differenze

$$A - B \;,\; A - D$$

abbiano segno contrario. Ma allora le altre due

$$D - A \;,\; D - B$$

hanno egual segno e basta quindi scambiare A con D per ritrovarsi nel caso precedente.

Concludiamo adunque: *Esclusa la superficie di Clifford, ogni altra quadrica dello spazio ellittico ha la sua quadrica (a centro) coniugata in deformazione nello spazio euclideo, e quindi il problema di deformare una quadrica, diversa dalla superficie di Clifford, in metrica ellittica è perfettamente equivalente al problema della deformazione delle quadriche a centro dello spazio euclideo.*

Che la superficie di Clifford faccia veramente eccezione, che cioè non

[1]) Se fosse $B = C = D$ le differenze $A - B$, $A - C$, $A - D$ sarebbero eguali e quindi del medesimo segno.

esista una quadrica Q euclidea coniugata in deformazione, si vede per es. osservando che la Q_1 corrispondendo geodeticamente alla superficie di Clifford che è a curvatura nulla, sarebbe (pel teorema di Beltrami) a curvatura costante, quindi o una sfera o un cono o cilindro di rotazione. Ambedue i casi sono da escludersi perchè sulla superficie di Clifford le asintotiche sono reali distinte mentre sono immaginarie sulla sfera e coincidenti sul cono o cilindro.

Ricordiamo poi che il problema della deformazione della superficie di Clifford è già completamente risoluto, poichè le sue deformate sono le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico di cui si conoscono le equazioni in termini finiti (vol. I, § 219).

Abbiamo qui esaminato la questione proposta solo per lo spazio ellittico. Per l'iperbolico le cose procedono diversamente perchè, a causa della realità dell'assoluto, non è più possibile in ogni caso ridurre l'equazione della quadrica Q a somme di quadrati. Converrebbe quindi suddistinguere varii casi parziali, nel cui esame non vogliamo qui addentrarci.

Ritorniamo ora al nostro oggetto principale, al trasporto della teoria delle trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche dalla metrica euclidea alla metrica ellittica od iperbolica. Essendo dunque Q una quadrica, e Q' una quadrica confocale, presa come assoluto di una metrica non-euclidea, consideriamo, come sopra, una sua deformata euclidea S e la corrispondente deformata non-euclidea $\bar{S}$ coniugata in deformazione. Applichiamo alla S una trasformazione B_k, che la cangi in una nuova deformata (euclidea) S_1, sicchè S, S_1 sono le due falde focali della congruenza rettilinea FF_1 che ne congiunge i punti corrispondenti.

Applichiamo nel senso euclideo S sopra Q, dopo di che i termini F_1 dei segmenti focali FF_1, trasportati nella deformazione, verranno a disporsi sulla quadrica omofocale. Ed ora immaginiamo che la quadrica stessa Q_1 trasportando i segmenti FF_1, si deformi *nel senso non euclideo* nella superficie $\bar{S}$; il luogo dei termini F_1 dei segmenti così trasportati sarà una nuova superficie $\bar{S}_1$.

Ora vale qui il medesimo teorema come nel caso euclideo (§ 75), e cioè:

La superficie $\bar{S}_1$ *e la* $\bar{S}$ *sono, nello spazio non euclideo, le due falde focali della congruenza* FF_1 *ed ambedue risultano applicabili sulla quadrica* Q. *Inoltre* $\bar{S}_1$ *sarà coniugata in deformazione di* S_1 *come* $\bar{S}$ *di* S.

Questo teorema, che ci limitiamo qui ad enunciare, mostra appunto come la teoria delle trasformazioni B_k sia estendibile dallo spazio euclideo agli spazî a curvatura costante ed il trasporto si possa effettuare per mezzo della trasformazione H.

Un caso particolare ben noto è quello delle superficie a curvatura costante dello spazio non-euclideo, alle quali sono coniugate in deformazione ancora superficie a curvatura costante nell'euclideo. Così la teoria delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura costante sussiste indipendentemente dalla curvatura dello spazio. È questo un risultato che stabilii per tutt'altra via la prima volta nella mia memoria: *Sui sistemi di Weingarten negli spazî di curvatura costante* [1]).

[1]) Memorie della R. Accademia dei Lincei, Serie IV, vol. IV, (1887).

CAPITOLO VI.

I sistemi coniugati permanenti sulle deformate delle quadriche

§. 79.

Sistemi isotermo-coniugati sulle quadriche.

Le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche conservano, come sappiamo dal § 84, i sistemi coniugati permanenti sulle due falde focali S, S_1 delle relative congruenze W. D'altronde una deformata S della quadrica fondamentale Q è intrinsecamente determinata quando si conosce sulla quadrica Q il sistema coniugato permanente nel passaggio da Q ad S, ovvero il corrispondente sistema di asintotiche virtuali. È quindi naturale di pensare che si possa fare uno studio delle trasformazioni B_k senza uscire dalla quadrica, cioè riguardandole come trasformazioni dei sistemi coniugati permanenti, o delle asintotiche virtuali. In questo senso appunto, al § 381 delle Lezioni (vol. II, pag. 406), si sono studiate le trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche come trasformazioni delle loro reti di Tchebychef (asintotiche virtuali). Stabiliremo nel presente Capitolo i principii fondamentali per lo studio indicato e ne dedurremo, fra le altre, varie proprietà notevoli delle deformate delle quadriche, già note per le ricerche di Darboux, Calapso e Servant.

Premettiamo una ricerca sui sistemi isotermo-coniugati delle quadriche; e qui, estendendo la denominazione introdotta al § 79 delle Lezioni (vol. I, pag. 167), diremo isotermo-coniugato ogni sistema (α, β) di una qualunque superficie che dia alla sua seconda forma fondamentale la forma

$$D(d\alpha^2 \pm d\beta^2),$$

valendo naturalmente il segno superiore per una superficie (o regione)

a punti ellittici, l'inferiore per una superficie a punti iperbolici. Si noti che le equazioni delle asintotiche saranno

$$\alpha + i\beta = \text{cost.}^{te}, \quad \alpha - i\beta = \text{cost.}^{te}$$

nel primo caso, ed

$$\alpha + \beta = \text{cost.}^{te}, \quad \alpha - \beta = \text{cost.}^{te}$$

nel secondo.

Consideriamo ora una quadrica qualunque Q riferita dapprima alle sue generatrici (u, v) (reali od immaginarie). Siccome esse sono ad un tempo asintotiche e geodetiche, si avrà

$$D = D'' = 0, \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0,$$

onde segue per le formole fondamentali (vol. I, pag. 116) che le coordinate x, y, z di un punto u, v della quadrica saranno soluzioni del sistema simultaneo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial v},$$

che, ammettendo la quarta soluzione $\xi = 1$ linearmente indipendente da x, y, z, sarà illimitatamente integrabile. Si avrà quindi in particolare

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix},$$

ciò che risulta anche dalla formola del Dini

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

ricordando che si ha

$$(2) \qquad \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}.$$

Segue di qui che, indicando con L una conveniente funzione di u, v, si potrà porre

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = 2\frac{\partial \log L}{\partial u}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 2\frac{\partial \log L}{\partial v},$$

e il sistema (1) prenderà la forma

$$(1^*) \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = 2\,\frac{\partial \log L}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial u}\ , \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = 2\,\frac{\partial \log L}{\partial v}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\,.$$

Dalle coordinate asintotiche (u, v) passiamo ad un sistema isotermo-coniugato (α, β) ponendo

$$\alpha = u + v \ , \quad \beta = u - v\,;$$

ed anzi, stante l'arbitrarietà dei parametri asintotici u, v, avremo così il più generale sistema isotermo-coniugato. Il sistema (1^*), trasformato in coordinate (α, β) si scrive

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2} &= 2\,\frac{\partial \log L}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + 2\,\frac{\partial \log L}{\partial\beta}\,\frac{\partial\xi}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= \frac{\partial \log L}{\partial\beta}\,\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \frac{\partial \log L}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\,. \end{aligned}\right.$$

Qui però si osservi che se le asintotiche u, v sono reali i parametri α, β possono intendersi reali, ma quando le asintotiche sono immaginarie converrà, per conservare α, β reali, cangiare β in $i\beta$. Abbiamo dunque il risultato:

Le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra una quadrica, espresse pei parametri α, β di un sistema isotermo-coniugato, sono soluzioni del sistema simultaneo illimitatamente integrabile

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2} + \varepsilon\,\frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2} &= 2\,\frac{\partial \log L}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + 2\varepsilon\,\frac{\partial \log L}{\partial\beta}\,\frac{\partial\xi}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= \frac{\partial \log L}{\partial\beta}\,\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \frac{\partial \log L}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\,, \end{aligned}\right.$$

dove $\varepsilon = \pm 1$ secondo che le generatrici sono reali od immaginarie, ed L è una conveniente funzione di α, β.

È facile vedere che, a causa della illimitata integrabilità del sistema (I), la funzione $L(\alpha, \beta)$ deve essere una soluzione della equazione di Liouville

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta^2} = k\,L^2 \ (k \text{ costante})\,,$$

e viceversa, se L soddisfa a questa equazione, il sistema (I) è illimita-

tamente integrabile [1]). In tale ipotesi vale la proprietà reciproca della precedente:

Se x, y, z sono tre soluzioni indipendenti del sistema (I), le formole

$$x = x(\alpha, \beta)\ , \quad y = y(\alpha, \beta)\ , \quad z = z(\alpha, \beta)$$

---

[1]) Pongasi per un momento $L = e^\theta$ e si considerino le equazioni simultanee (I) che scriviamo colle notazioni di Monge $\left(p = \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}, q = \frac{\partial\xi}{\partial\beta}, r = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}, s = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta}, t = \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}\right)$

$$\left\{\begin{aligned} s &= \frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,p + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,q \\ t &= 2\varepsilon\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,p + 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,q - \varepsilon r\,. \end{aligned}\right.$$

Per formare le condizioni d'integrabilità si traggano da queste le

$$\frac{\partial r}{\partial\beta} = \frac{\partial s}{\partial\alpha} = \left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right]p + \left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)^2\right]q + \frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,r$$

$$\frac{\partial t}{\partial\alpha} = \frac{\partial s}{\partial\beta}\,,$$

e da quest'ultima

$$\frac{\partial r}{\partial\alpha} = \left[2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} - 2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right)^2\right]p + \left[\varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \varepsilon\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right]q + 3\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,r\,.$$

Ed ora, formando

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right) = \mathrm{A}r + \mathrm{B}p + \mathrm{C}q\,,$$

le condizioni di illimitata integrabilità consistono nell'annullarsi dei coefficienti A, B, C. Ma si trova

$$\mathrm{A} = 0\ , \quad \mathrm{B} = -\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^2\,\partial\beta} + \varepsilon\,\frac{\partial^3\theta}{\partial\beta^3} + 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - 2\varepsilon\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}$$

$$\mathrm{C} = \frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^3} - \varepsilon\,\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} - 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + 2\varepsilon\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\,.$$

Le condizioni $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$ si scrivono

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right] = 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right] = 2\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right]$$

e integrate danno

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} - \varepsilon\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} = k e^{2\theta}\,,$$

che è l'equazione di Liouville del testo.

definiranno una quadrica, riferita ad un sistema isotermo-coniugato (α,β).

E infatti avremo

$$D+\varepsilon D''=0$$

e, ripristinando le variabili primitive u, v, risulterà

$$D=D''=0\,,\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0\,,$$

onde le linee u, v, essendo asintotiche e geodetiche, saranno rette e la superficie sarà dunque una quadrica.

§ 80.

Proprietà dei sistemi isotermo-coniugati sulle quadriche.

Supponendo la quadrica Q riferita al sistema isotermo-coniugato (α,β) ove

$$D''=-\varepsilon D\,,\quad D'=0\,, \tag{3}$$

indichiamo con $\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel pel

$$ds^2=E\,d\alpha^2+2F\,d\alpha\,d\beta+G\,d\beta^2$$

in coordinate (α,β). Dalle formole (I) paragonate colle fondamentali abbiamo subito

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\,,\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\,,\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\varepsilon\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\,.$$

Associando a queste le (2) e introducendo la nuova funzione

$$\sqrt{H}=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{L^3}\,, \tag{4}$$

avremo pei valori dei simboli di Christoffel le formole

$$\text{(II)}\quad\left\{\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\alpha}\\&\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\beta}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\beta}\,.\end{aligned}\right.$$

Osserviamo che se della quadrica Q si considera una quadrica $\overline{Q}$ coniugata in deformazione (cap. V), il sistema (α,β) sarà ancora isotermo-coniugato sopra $\overline{Q}$ e varranno quindi formole come le (II).

Dalle formole (6) § 69 (pag. 204) risulta poi che: *passando dalla quadrica* Q *alla coniugata in deformazione* $\overline{Q}$, *la funzione* H *resta la medesima e la* L *si cangia in* $\frac{L}{\sqrt{\lambda}}$.

Per le (3), le equazioni di Codazzi danno

$$\frac{\partial\log D}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\left(\frac{L}{\sqrt{H}}\right)\,,\quad \frac{\partial\log D}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\frac{L}{\sqrt{H}}\right)\,,$$

da cui

$$D=c\frac{L}{\sqrt{H}}\,,\quad D''=-\varepsilon c\frac{L}{\sqrt{H}}\qquad (c\ \text{costante})\,, \tag{5}$$

indi per la curvatura

$$K=-\frac{\varepsilon c^2}{H^2L^4}\,. \tag{6}$$

Vediamo adunque che per il ds^2 di una quadrica, riferita ad un sistema isotermo-coniugato (α,β) qualunque, i simboli di Christoffel hanno i valori (II), dove le funzioni L, H sono legate ad $EG-F^2$ ed alla curvatura K dalle (4), (6).

Inversamente suppongasi che per un ds^2 reale, definito e positivo i simboli di Christoffel abbiano i valori (II), e le funzioni L, H siano legate fra loro dalla (4) ed alla curvatura K dalla formola

$$K\,.\,H^2L^4=\text{cost.}^{\text{te}}$$

Se la curvatura ha il segno opposto ad ε, il valore della costante c tratto dalla (6) sarà reale ed i valori (5) di D, D″ soddisferanno alle equazioni di Gauss e Codazzi ed esisterà una superficie reale corrispondente

$$x=x(\alpha,\beta)\,,\quad y=y(\alpha,\beta)\,,\quad z=z(\alpha,\beta)\,, \tag{7}$$

che sarà una quadrica a punti iperbolici se $\varepsilon=+1$, a punti ellittici se $\varepsilon=-1$.

Quando invece K abbia lo stesso segno di ε, sarà c puramente immaginaria quindi anche D, D″; in tal caso si potranno prendere nelle (7) per es. x, y reali, z puramente immaginaria (vol. II, pag. 143 nota) e le formole (7) daranno una quadrica immaginaria, ovvero una regione ideale di una quadrica reale.

Dalle formole stabilite deduciamo ora il seguente teorema di Servant:

Ogni sistema coniugato isotermo di una quadrica è un sistema permanente in una deformazione infinitesima della superficie [1]).

Per dimostrarlo ricorriamo al secondo metodo per la teoria delle deformazioni infinitesime esposto al § 231 delle Lezioni. Converrà provare che si possono soddisfare le equazioni (20), (21) a pag. 23, vol. II prendendo

$$\Gamma' = 0 \ , \ \Gamma'' = \varepsilon\Gamma .$$

Esse diventano

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\Gamma = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \varepsilon\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\log(L\sqrt{H})$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log\Gamma = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \varepsilon\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\beta}\log(L\sqrt{H})$$

e si soddisfano effettivamente con

$$\Gamma = L\sqrt{H} .$$

Domandiamoci ora di più se un sistema isotermo coniugato (α, β) della quadrica può essere permanente non solo in una deformazione infinitesima ma anche in una deformazione finita, nel qual caso esisterà una deformazione continua ad un parametro che mantiene (α, β) coniugato (vol. II, pag. 43). I valori dei simboli

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' , \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'$$

per la rappresentazione sferica sono (vol. I, pag. 167)

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = -\frac{D''}{D}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\beta}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = -\frac{D}{D''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\log H}{\partial\alpha}$$

[1]) Si osservi inoltre che un tale sistema coniugato è sempre ad invarianti eguali perchè

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$$

e le condizioni richieste si esprimono colle equazioni (vol. II, pag. 42)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' ,$$

ossia con

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0 .$$

La circostanza voluta si presenta dunque allora soltanto quando H ha la forma

$$f(\alpha) + \varphi(\beta) .$$

Osserviamo una classe particolare notevole di sistemi isotermo-coniugati sulle quadriche. Si ottiene sempre un tale sistema intersecando la quadrica con due fasci di piani i cui assi siano rette polari reciproche rispetto alla quadrica. E invero la proprietà ha luogo per la sfera ove i sistemi sono formati da fasci di circoli ortogonali, e dalla sfera trasportiamo il risultato a qualunque quadrica con una trasformazione proiettiva, perchè ogni tale trasformazione conserva i sistemi isotermo-coniugati (vol. I, pag. 169 nota 2.ª).

In particolare, se per asse di uno dei fasci di piani si prende un asse della quadrica, la funzione H avrà la forma sopra notata

$$H = f(\alpha) + \varphi(\beta) ,$$

come ora constateremo.

§ 81.

Casi particolari.

Sarà utile, prima di procedere oltre, applicare le formole stabilite ad alcuni casi particolari, riferendo ogni volta la quadrica ad uno speciale sistema (α, β) isotermo-coniugato, e calcolare i corrispondenti valori delle funzioni L, H nelle formole (II).

1.° Paraboloide ellittico $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$

a) Regione reale. Per sistema (α, β) prendiamo quello delle sezioni prodotte dai piani paralleli ai piani delle parabole principali, ponendo come al § 41:

$$x = \sqrt{p}\,\alpha \ , \ y = \sqrt{q}\,\beta \ , \ z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} ,$$

onde

$$ds^2 = (\alpha^2+p)\, d\alpha^2 + 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2+q)\, d\beta^2$$

$$EG - F^2 = q\alpha^2 + p\beta + pq\,.$$

Pei valori di D, D′, D″ abbiamo

$$D = D'' = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\ D' = 0$$

e per quelli dei simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\beta}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Qui abbiamo dunque nelle formole generali del § precedente

$$\varepsilon = -1\ ,\ L = 1\ ,\ H = \frac{EG-F^2}{pq} = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1\,.$$

b) Regione ideale (cf. § 42).

Pongasi

$$x = i\sqrt{p}\,\beta_1\ ,\ y = \sqrt{q}\,\alpha_1\ ,\ z = \frac{\alpha_1^2-\beta_1^2}{2}\,,$$

onde

$$ds^2 = (\alpha_1^2+q)\, d\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\, d\alpha_1\, d\beta_1 + (\beta_1^2-p)\, d\beta_1^2$$

$$EG - F^2 = q\beta_1^2 - p\alpha_1^2 - pq\,.$$

Ne seguono le formole

$$D'' = -D = \frac{i\sqrt{pq}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\ D' = 0$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\alpha_1}\ ,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\beta_1}\ ,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Dobbiamo dunque prendere qui

$$\varepsilon = +1\ ,\ L = 1\ ,\ H = \frac{\beta_1^2}{p} - \frac{\alpha_1^2}{q} - 1$$

2.° Paraboloide iperbolico $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$

a) Regione reale.

Poniamo

$$x = \sqrt{p}\,\alpha\ ,\ y = \sqrt{q}\,\beta\,,\ z = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\,,$$

onde

$$ds^2 = (\alpha^2+p)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2+q)\, d\beta^2$$

$$EG - F^2 = q\alpha^2 + p\beta^2 + pq$$

$$D = -D'' = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\ D' = 0$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\beta}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Qui adunque è da farsi nelle formole generali

$$\varepsilon = +1\ ,\ L = 1\ ,\ H = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1\,.$$

b) Regione ideale (cf. § 47).

$$x = \sqrt{p}\,.\,\alpha\ ,\ y = i\sqrt{q}\,.\,\beta\,,\ z = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$$ds^2 = (\alpha^2+p)\, d\alpha^2 + 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2-q)\, d\beta^2$$

$$EG - F^2 = p\beta^2 - q\alpha^2 - pq$$

$$D = D'' = \frac{i\sqrt{pq}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\ D' = 0$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial\beta}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

I valori di ε, L, H sono quindi

$$\varepsilon = -1\ ,\ L = 1\ ,\ H = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - 1\,.$$

3.° Ellissoide reale: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\,.$

a) Regione reale.

Pongasi

$$x = a\frac{\cos\beta}{\cosh\alpha}\ ,\ y = b\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cosh\alpha}\ ,\ z = c\ \operatorname{tangh}\alpha$$

e si troverà

$$\mathrm{E}=\frac{1}{\cosh^4\alpha}\left[(a^2\cos^2\beta+b^2\,\mathrm{sen}^2\beta)\,\mathrm{senh}^2\alpha+c^2\right],\ \mathrm{F}=\frac{(a^2-b^2)\,\mathrm{senh}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cosh^3\alpha},\ \mathrm{G}=\frac{a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta}{\cosh^2\alpha}$$

$$\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2=\frac{c^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta)+a^2b^2\,\mathrm{senh}^2\alpha}{\cosh^6\alpha}$$

$$\mathrm{D}=\mathrm{D}''=\frac{abc}{\cosh^4\alpha\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\ ,\ \mathrm{D}'=0$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=-2\,\mathrm{tangh}\,\alpha+\frac{a^2b^2\,\mathrm{senh}\,\alpha}{\cosh^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\ ,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{a^2b^2\,\mathrm{senh}\,\alpha}{\cosh^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{c^2(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cosh^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\ ,\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=-\mathrm{tangh}\,\alpha\ ,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{c^2(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cosh^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}.$$

Queste formole corrispondono a prendere nelle formole generali

$$\varepsilon=-1\ ,\ \mathrm{L}=\frac{1}{\cosh\alpha}\ ,\ \mathrm{H}=c^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta)+a^2b^2\,\mathrm{senh}^2\alpha.$$

b) Regione ideale (cf. § 46)

Qui si ponga

$$x=a\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\ ,\ y=b\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\alpha}\ ,\ z=ic\,\mathrm{tang}\,\alpha\ ,$$

ciò che corrisponde a cangiare nelle precedenti α in $i\alpha$.

Si trova

$$\mathrm{E}=\frac{1}{\cos^4\alpha}\left[(a^2\cos^2\beta+b^2\,\mathrm{sen}^2\beta)\,\mathrm{sen}^2\alpha-c^2\right],\ \mathrm{F}=\frac{(b^2-a^2)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cos^3\alpha}\ \mathrm{G}=\frac{a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2=\frac{a^2b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha-c^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta)}{\cos^6\alpha}$$

$$\mathrm{D}''=-\mathrm{D}=\frac{i\,a\,b\,c}{\cos^4\alpha\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\ ,\ \mathrm{D}'=0$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=2\,\mathrm{tang}\,\alpha+\frac{a^2b^2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^5\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}\ ,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0\ ,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{a^2b^2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^5\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{c^2(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cos^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)},\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\mathrm{tang}\,\alpha\ ,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=-\frac{c^2(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta}{\cos^6\alpha\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}.$$

Esse corrispondono a prendere nelle formole generali

$$\varepsilon=+1\ ,\ \mathrm{L}=\frac{1}{\cos\alpha}\ ,\ \mathrm{H}=a^2b^2\,\mathrm{sen}^2\alpha-c^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta)\,.$$

Formole analoghe a queste si troverebbero riferendo le regioni reali od ideali dei due iperboloidi al sistema coniugato (α,β) delle sezioni coi piani normali ad un asse e dei piani per questo asse. Come negli esempi superiori, si troverebbe che la funzione H ha sempre la forma $f(\alpha)+\varphi(\beta)$, onde (§ 80) un tale sistema isotermo-coniugato di una quadrica è permanente in una deformazione continua.

Fu Peterson il primo [1]) che avvertì l'esistenza di queste deformate delle quadriche. Le loro equazioni in termini finiti dipendono dalle funzioni circolari ed iperboliche nel caso dei paraboloidi e dalle funzioni ellittiche per le quadriche a centro.

§ 82.

Sistemi coniugati permanenti sulle deformate delle quadriche — Caso $\varepsilon=-1$.

Volgiamoci ora all'oggetto proprio di questo Capitolo, allo studio dei sistemi coniugati permanenti (u,v) sulle deformate reali delle quadriche. E qui notiamo che la quadrica fondamentale Q può essere reale o immaginaria e varranno sempre le formole (II) e le (5) del § 80, quando la quadrica sia riferita ad un qualunque sistema isotermo-coniugato (α,β). Il valore della costante c nelle (5) può essere reale o puramente immaginario; nel primo caso si tratterà della regione reale della quadrica, nel secondo di una regione ideale della quadrica reale Q, ovvero di una quadrica Q immaginaria.

Sia S una deformata *reale* qualunque di Q, e consideriamo il sistema coniugato comune (u,v) a Q e ad S. Intendendo qui escluso, come sempre in seguito, il caso delle deformate *rigate*, questo sistema coniugato comune consta sempre di due distinti sistemi di linee u,v reali, ovvero coniugate immaginarie. Esaminiamo quando potrà aver luogo questo secondo caso. La seconda forma fondamentale di Q in coordinate α,β è

$$\frac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}(d\alpha^2-\varepsilon\,d\beta^2)\,,$$

[1]) V. la memoria citata al § 40.

per cui indicando con

$$\overline{\mathrm{D}}\,d\alpha^2 + 2\,\overline{\mathrm{D}}'\,d\alpha\,d\beta + \overline{\mathrm{D}}''\,d\beta^2$$

quella di S, per il sistema coniugato comune avremo l'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} \overline{\mathrm{D}}\,d\alpha + \overline{\mathrm{D}}'\,d\beta & \overline{\mathrm{D}}'\,d\alpha + \overline{\mathrm{D}}''\,d\beta \\ d\alpha & -\varepsilon\,d\beta \end{vmatrix} = 0\,,$$

ossia l'equazione di 2.° grado nel rapporto $\dfrac{d\alpha}{d\beta}$

$$\overline{\mathrm{D}}'\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + \left(\overline{\mathrm{D}}'' + \varepsilon\overline{\mathrm{D}}\right)\frac{d\alpha}{d\beta} + \varepsilon\overline{\mathrm{D}}' = 0\,.$$

Se $\varepsilon = -1$ le radici sono manifestamente reali, e per $\varepsilon = +1$ sono immaginarie solo quando

$$(\overline{\mathrm{D}}''+\overline{\mathrm{D}})^2 - 4\,\overline{\mathrm{D}}'^2 = (\overline{\mathrm{D}}''-\overline{\mathrm{D}})^2 + 4\,(\overline{\mathrm{D}}\,\overline{\mathrm{D}}''-\overline{\mathrm{D}}'^2) = (\overline{\mathrm{D}}''-\overline{\mathrm{D}})^2 + 4\,\mathrm{K}(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)$$

risulta negativo. Dunque: *il sistema coniugato comune* (u, v) *può essere immaginario solo quando* $\varepsilon = -1$ *e la curvatura* K *è negativa.*

Ciò premesso, cominciamo a trattare nel presente paragrafo il caso $\varepsilon = -1$, dove valgono le formole

$$(8)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 2\dfrac{\partial \log \mathrm{L}}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{\partial \log \mathrm{L}}{\partial \beta}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha} \\[2ex] \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}\,,\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \dfrac{\partial \log \mathrm{L}}{\partial \alpha}\,,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 2\dfrac{\partial \log \mathrm{L}}{\partial \beta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}\,. \end{cases}$$

Per il sistema coniugato comune (u, v), certamente reale in questo caso, indicheremo le rispettive seconde forme fondamentali di Q e di S con

$$\Delta\,du^2 + \Delta''\,dv^2 \ldots \text{ per } \mathrm{Q}$$

$$\overline{\Delta}\,du^2 + \overline{\Delta}''\,dv^2 \ldots \text{ per } \mathrm{S}.$$

Si avrà quindi in primo luogo

$$\Delta\,du^2 + \Delta''\,dv^2 = \frac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,(d\alpha^2 + d\beta^2)\,,$$

onde si ricava

$$(9)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right] \\[2ex] \Delta'' = \dfrac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right] \end{cases}$$

ed ancora

$$(10)\quad \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = 0\,.$$

Ponendo

$$(11)\quad \begin{cases} \lambda^2 = \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 \\[2ex] \mu^2 = \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

scriviamo le (9)

$$(12)\quad \Delta = \frac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,\lambda^2\,,\ \Delta'' = \frac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,\mu^2\,,$$

Ed ora, continuando a indicare con $\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel relativi al ds^2 comune a Q e ad S in coordinate (α, β), introduciamo anche i simboli di Christoffel relativi al ds^2 in coordinate (u, v), che indicheremo con $\overline{\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}}$. Le funzioni α, β di u, v dovranno soddisfare alle equazioni del 2.° ordine di Christoffel per l'equivalenza dei due ds^2 in coordinate (α, β), e (u, v) [Vol. I pag. 64 equaz. (II)]. Di queste consideriamo solo le due relative alle derivate miste di α, β:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right) + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \\[2ex] \qquad = \overline{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} + \overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\beta}{\partial u\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right) + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \\[2ex] \qquad = \overline{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial\beta}{\partial u} + \overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\,, \end{cases}$$

le quali, a causa delle (8), (10), possono scriversi ancora

$$(13^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial\log L}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial\log L}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)=\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}+\begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\beta}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial\log L}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\log L}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)+\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}+\begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima di queste per $\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$ la seconda per $\dfrac{\partial\beta}{\partial u}$ e sommiamo, osservando la (10), ciò che dà

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]=$$

$$=\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right],$$

ovvero, ricordando la posizione (11),

$$(14)\qquad 2\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\log(L^2\lambda^2).$$

Similmente, moltiplicando la prima delle (13*) per $\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}$ la seconda per $\dfrac{\partial\beta}{\partial v}$ e sommando, si dedurrà

$$(14^*)\qquad 2\begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial u}\log(L^2\mu^2).$$

Ciò premesso, prendiamo le due prime equazioni di Codazzi relative alle due superficie Q e S

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Delta}{\partial v}=\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\Delta-\begin{Bmatrix}\overline{11}\\2\end{Bmatrix}\Delta'' \\ \dfrac{\partial\overline{\Delta}}{\partial v}=\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}\overline{\Delta}-\begin{Bmatrix}\overline{11}\\2\end{Bmatrix}\overline{\Delta}''\end{cases}$$

e moltiplicando la prima per Δ, la seconda per $\overline{\Delta}$, e sottraendo coll'osservare che, per l'equazione di Gauss;

$$(15)\qquad \overline{\Delta}\,\overline{\Delta}''=\Delta\,\Delta'',$$

ne viene

$$\frac{\partial(\overline{\Delta}^2-\Delta^2)}{\partial v}=2\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix}(\overline{\Delta}^2-\Delta^2),$$

cioè per la (14)

$$\frac{\partial(\overline{\Delta}^2-\Delta^2)}{\partial v}=(\overline{\Delta}^2-\Delta^2)\frac{\partial}{\partial v}\log(L^2\lambda^2).$$

Integrando si ha di qui

$$(16)\qquad \overline{\Delta}^2-\Delta^2=\psi(u).L^2.\lambda^2,$$

dove $\psi(u)$ è una funzione della sola u. Escludiamo il caso in cui $\psi(u)=0$ perchè allòra sarebbe $\overline{\Delta}^2=\Delta^2$, $\overline{\Delta}=\pm\Delta$, indi per la (15) $\overline{\Delta}''=\pm\Delta''$ e la superficie S sarebbe identica a Q, caso ove il nostro problema perde ogni significato.

Similmente dalle seconde equazioni di Codazzi dedurremo

$$(16^*)\qquad \overline{\Delta}''^2-\Delta''^2=\varphi(v).L^2\mu^2,$$

con $\varphi(v)$ funzione della sola v, e sarà $\varphi(v)\neq 0$.

Cangiando i parametri u, v in u_1, v_1, le funzioni $\psi(u)$, $\varphi(v)$ risultano, come subito si vede, rispettivamente moltiplicate per i fattori

$$\left(\frac{du}{du_1}\right)^2,\ \left(\frac{dv}{dv_1}\right)^2$$

e per ciò, cangiando convenientemente i parametri, potremo dar loro un valore costante qualunque, che potrà risultare però positivo o negativo. Indicando con a il modulo della costante c (reale o puramente immaginaria), noi sceglieremo i parametri u, v per modo che si abbia

$$\psi(u)=\varepsilon a^2,\quad \varphi(v)=\varepsilon' a^2,$$

dove $\varepsilon, \varepsilon'$ sono eguali ciascuna all'unità positiva o negativa; con ciò avremo

$$(17)\qquad \overline{\Delta}^2=\Delta^2+\varepsilon a^2L^2\lambda^2,\quad \overline{\Delta}''^2=\Delta''^2+\varepsilon' a^2L^2\mu^2.$$

ed ora, sostituendo qui per Δ, Δ'' i valori (12), diventa necessario separare i due casi di c reale, ovvero c puramente immaginaria; nel primo caso sarà da farsi $c=a$, nel secondo $c=ia$.

§ 83.

Separazione dei due casi $c=a$, $c=ia$. Trasformazione del problema.

1.° caso $c=a$

Le (12) diventano

$$(12^*)\qquad \Delta=\frac{aL}{\sqrt{H}}\lambda^2,\ \Delta''=\frac{aL}{\sqrt{H}}\mu^2,$$

e le (17)

$$\overline{\Delta}^2=a^2L^2\lambda^2\left(\varepsilon+\frac{\lambda^2}{H}\right),\ \overline{\Delta}''^2=a^2L^2\mu^2\left(\varepsilon'+\frac{\mu^2}{H}\right).$$

Ma per la (15) dobbiamo avere

$$\overline{\Delta}^2\,\overline{\Delta}''^2=\Delta^2\,\Delta''^2,$$

onde

$$\varepsilon'\lambda^2+\varepsilon\mu^2+\varepsilon\varepsilon' H=0.$$

Ora, H essendo positiva, come λ^2,μ^2, necessariamente ε,ε' hanno segno contrario e si può fare per es. $\varepsilon=+1$, $\varepsilon'=-1$, chè il caso opposto equivarrebbe a scambiare u con v. Così resta

$$(18)\qquad \mu^2-\lambda^2=H$$

$$\overline{\Delta}^2=\overline{\Delta}''^2=\frac{a^2L^2\lambda^2\mu^2}{H};$$

e siccome qui $\overline{\Delta},\overline{\Delta}''$ debbono avere lo stesso segno, come Δ,Δ'', (per la (15)), avremo

$$(19)\qquad \overline{\Delta}=\overline{\Delta}''=\frac{aL\lambda\mu}{\sqrt{H}}.$$

È importante osservare che inversamente, se le funzioni α,β di u,v soddisfano le due equazioni (10) e (18)

$$(A)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}=0\\[2ex] \left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right]-\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]=H(\alpha,\beta),\end{cases}$$

i valori (19) di $\overline{\Delta},\overline{\Delta}''$ soddisfano alle equazioni di Codazzi e di Gauss,

e ne resta quindi intrinsecamente definita una deformata S della quadrica Q, sulla quale le linee u,v tracciano il sistema coniugato permanente

2.° caso $c=ia$

Qui abbiamo per le (12)

$$\Delta=\frac{iaL}{\sqrt{H}}\lambda^2,\ \Delta''=\frac{iaL}{\sqrt{H}}\mu^2,$$

onde le (17) diventano

$$\overline{\Delta}^2=a^2L^2\lambda^2\left(\varepsilon-\frac{\lambda^2}{H}\right),\ \overline{\Delta}''^2=a^2L^2\mu^2\left(\varepsilon'-\frac{\mu^2}{H}\right),$$

e siccome $\overline{\Delta},\overline{\Delta}''$ debbono essere reali, bisogna evidentemente che sia $\varepsilon=\varepsilon'=+1$. La condizione

$$\overline{\Delta}^2\,\overline{\Delta}''^2=\Delta^2\,\Delta''^2$$

dà

$$(20)\qquad \lambda^2+\mu^2=H$$

e resta

$$\overline{\Delta}^2=\overline{\Delta}''^2=\frac{a^2L^2\lambda^2\mu^2}{H}.$$

Ma deve essere

$$\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}''=\Delta\Delta''=-\frac{a^2L^2}{H}\lambda^2\mu^2,$$

e per ciò si può prendere

$$(21)\qquad \overline{\Delta}=\frac{aL\lambda\mu}{\sqrt{H}},\ \overline{\Delta}''=-\frac{aL\lambda\mu}{\sqrt{H}}.$$

Il sistema (A) è surrogato in questo caso dall'altro

$$(B)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}=0\\[2ex] \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2=H(\alpha,\beta),\end{cases}$$

e il problema della deformazione della quadrica Q è qui ridotto alla integrazione di questo sistema.

I sistemi (A), (B) sono suscettibili di un'interpretazione geometrica evidente. Riguardiamo α,β come coordinate cartesiane ortogonali in un piano π sul quale rappresentiamo punto per punto la quadrica [1]. La prima equazione del sistema (A) o (B) dice che ad ogni sistema coniugato permanente della quadrica Q corrisponde sul piano π un sistema ortogonale, ciò che del resto ha evidentemente per conseguenza che *a qualsiasi sistema coniugato su* Q *corrisponde un sistema ortogonale sul piano* π. Ma di più, se il sistema coniugato di Q è permanente (in una deformazione finita), deve verificarsi la seconda equazione del sistema (A) o (B). Scrivendo l'elemento lineare del piano

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 = e\,du^2 + g\,dv^2\,,$$

questa seconda equazione si scrive

$$g \mp e = \mathrm{H}(\alpha\,,\beta)\,.$$

Possiamo dunque dire:

Il problema di deformare la quadrica Q *equivale all'altro di ridurre l'elemento lineare del piano* π, *in cui* $\alpha\,,\beta$ *sono coordinate cartesiane ortogonali, a forma ortogonale*

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2\,,$$

tale che la differenza o la somma dei coefficienti g, e *sia eguale ad una determinata funzione* H *di* $\alpha\,,\beta$.

Ricordiamo che la funzione $\mathrm{H}(\alpha,\beta)$ dipende essenzialmente dal sistema isotermo-coniugato $(\alpha\,,\beta)$, a cui la quadrica Q è riferita, e varia con questo sistema $(\alpha\,,\beta)$. Di questa indeterminazione della H possiamo appunto approfittare per dare alla H, in ogni singolo caso, la forma più conveniente. Del resto è molto facile vedere come varia la funzione H quando si cangia il sistema isotermo-coniugato $(\alpha\,,\beta)$, in un altro (α',β'), poichè dovrà essere evidentemente $\alpha'+i\beta'$ funzione della variabile com-

[1]) Per es. nel caso del paraboloide ellittico (§ 81, 1.°) si può prendere per questo piano rappresentativo il piano tangente nel vertice al paraboloide e le formole

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{p}}\,,\quad \beta = \frac{y}{\sqrt{q}}$$

dimostrano che la detta rappresentazione si ottiene con una semplicissima costruzione geometrica, e cioè proiettando prima ortogonalmente i punti del paraboloide su π, indi trasformando la figura coll'affinità $x_1 = \frac{x}{\sqrt{p}}\,,\ y_1 = \frac{y}{\sqrt{}}$

plessa $\alpha+i\beta$ (o della coniugata $\alpha-i\beta$); il detto fattore è quindi

$$\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\right)^2.$$

Per es. se la funzione H ha la forma

$$\mathrm{H} = f(\alpha) + \varphi(\beta)\,,$$

si soddisferà alle condizioni (A) o (B) prendendo α funzione della sola u e β funzione della sola v per modo che

$$\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 \mp \left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 = f(\alpha) + \varphi(\beta)\,,$$

cioè determinando $\alpha\,,\beta$ colle quadrature

$$\left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = \varphi(\beta) + k\,,\quad \left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 = \pm k \mp f(\alpha)\,,$$

con k costante arbitraria. Questa osservazione conduce nuovamente alle deformate di Peterson delle quadriche (cf. § 81 in fine).

§ 84

Sistemi coniugati permanenti nel caso $\varepsilon = +1$.

Abbiamo fin qui considerato soltanto il caso che nelle formole generali del § 80 si abbia $\varepsilon = -1$; dobbiamo ora trattare l'altro caso $\varepsilon = +1$. Qui il sistema coniugato $(u\,,v)$ comune ad S, Q può essere reale, ovvero immaginario. Ci limiteremo a trattare il primo caso; le formole relative all'altro se ne dedurrebbero cangiando le variabili reali $u\,,v$ in variabili complesse coniugate.

Riprendiamo l'analisi del § 82, adoperando le medesime notazioni, avvertendo però che alle formole (8) debbono ora sostituirsi le altre

$$\tag{22} \left\{\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = 2\frac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}}{\partial\alpha}\,,\quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial\beta}\,,\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}}{\partial\alpha}\\ &\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}}{d\beta}\,,\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial\alpha}\,,\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 2\frac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}}{\partial\beta}\end{aligned}\right.$$

Qui abbiamo

$$\Delta\,du^2 + \Delta''\,dv^2 = \frac{c\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,(d\alpha^2 - d\beta^2)$$

e per ciò

$$(23)\qquad \begin{cases} \Delta = \dfrac{cL}{\sqrt{H}}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right] \\ \Delta'' = \dfrac{cL}{\sqrt{H}}\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right] \end{cases}$$

$$(24)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = 0\,.$$

In forza di quest'ultima i due binomii

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 \,,\quad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2$$

hanno segno contrario [1]), e senza alterare la generalità possiamo supporre positivo il primo, negativo il secondo (in caso contrario si scambierebbe u con v); poniamo dunque

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda^2 = \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 \\ \mu^2 = \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 \end{cases}$$

e le (23) si scriveranno

$$(26)\qquad \Delta = \frac{cL}{\sqrt{H}}\lambda^2 \,,\quad \Delta'' = -\frac{cL}{\sqrt{H}}\mu^2\,.$$

Prendiamo ora nuovamente le due equazioni (13) di Cristoffel, le quali, a causa delle (22), (24), danno ancora le (13*). Su queste procediamo come al § 82, ma per sottrazione anzichè per addizione e troveremo nuovamente le formole (14), (14*). Se ne deduce ancora che, scegliendo convenientemente i parametri u, v, si avranno le medesime formole (17)

$$\overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \varepsilon a^2 L^2 \lambda^2 \,,\quad \overline{\Delta}''^2 = \Delta''^2 + \varepsilon' a^2 L^2 \mu^2 \quad \text{con} \quad |\varepsilon| = |\varepsilon'| = 1\,.$$

---

[1]) Si ha invero

$$\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 =$$

$$= -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2.$$

Qui occorre nuovamente separare i due casi di c reale o puramente immaginaria:

$$c = a \,,\quad c = ia\,.$$

1.° caso $c = a$.

Allora si ha per le (26)

$$\Delta = \frac{aL}{\sqrt{H}}\lambda^2 \,,\quad \Delta'' = -\frac{aL}{\sqrt{H}}\mu^2$$

e però

$$\overline{\Delta}^2 = a^2L^2\lambda^2\left(\varepsilon + \frac{\lambda^2}{H}\right) \,,\quad \overline{\Delta}''^2 = a^2L^2\mu^2\left(\varepsilon' + \frac{\mu^2}{H}\right).$$

Dalla condizione

$$\overline{\Delta}^2\overline{\Delta}''^2 = \Delta^2\Delta''^2$$

si trae

$$\varepsilon'\lambda^2 + \varepsilon\mu^2 + \varepsilon\varepsilon' H = 0\,.$$

Qui manifestamente debbono $\varepsilon, \varepsilon'$ avere segno contrario e potremo fare

$$\varepsilon = +1 \,,\quad \varepsilon' = -1\,,$$

chè l'ipotesi contraria equivarrebbe solo a scambiare λ con μ scambiando (α, β), (u, v). Dopo ciò abbiamo

$$(27)\qquad \mu^2 - \lambda^2 = H$$

e

$$\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta}''^2 = \frac{a^2L^2\lambda^2\mu^2}{H}\,,$$

indi estraendo la radice quadrata e badando che Δ, Δ'' debbono avere segno opposto, si avrà

$$(28)\qquad \overline{\Delta} = \frac{aL\lambda\mu}{\sqrt{H}} \,,\quad \overline{\Delta}'' = -\frac{aL\lambda\mu}{\sqrt{H}}\,.$$

Nel caso attuale adunque il problema della deformazione della quadrica è equivalente alla integrazione del sistema

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} - \dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v} = 0 \\ \left[\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2\right] - \left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right] = H(\alpha, \beta)\,. \end{cases}$$

2.° caso $c = ia$

Per le (26)

$$\Delta = \frac{ia\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\lambda^2\,,\quad \Delta'' = -\frac{ia\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mu^2\,,$$

e quindi

$$\overline{\Delta}^2 = a^2\mathrm{L}^2\lambda^2\left(\varepsilon - \frac{\lambda^2}{\mathrm{H}}\right)\,,\quad \overline{\Delta}''^2 = a^2\mathrm{L}^2\mu^2\left(\varepsilon' - \frac{\mu^2}{\mathrm{H}}\right).$$

Ne deriva che necessariamente

$$\varepsilon = \varepsilon' = +1\,,$$

dopo di che l'equazione

$$\overline{\Delta}^2\overline{\Delta}''^2 = \Delta^2\Delta''^2$$

dà

$$\mu^2 + \lambda^2 = \mathrm{H}\,. \tag{29}$$

e conseguentemente, avvertendo che $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}''$ debbono avere lo stesso segno,

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}'' = \frac{a\mathrm{L}\lambda\mu}{\sqrt{\mathrm{H}}}\,. \tag{30}$$

Al sistema (C) deve allora sostituirsi l'altro

$$\text{(D)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = 0 \\ &\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right] = \mathrm{H}(\alpha\,,\beta)\,. \end{aligned}\right.$$

§ 85.

Teoremi di Darboux e Servant.

Dalle formole sviluppate nei paragrafi precedenti deduciamo facilmente due notevoli teoremi, già noti per le ricerche di Darboux e Servant.

Abbiamo visto che per ogni deformata di una quadrica, riferita al suo sistema coniugato permanente (u, v), si ha sempre

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}'',\ \text{ovvero}\ \overline{\Delta} = -\overline{\Delta}''$$

[formole (19), (21), (28), (30)]. Questo ci dà il teorema di Darboux:

Sopra qualunque deformata di una quadrica il sistema coniugato permanente è isotermo-coniugato.

Ed ora dimostriamo l'altro teorema dovuto a Servant:

Nota una deformata S *di una quadrica* Q, *il suo sistema coniugato permanente si ha con quadrature.*

Sia

$$ds^2 = \mathrm{E}_1\,du^2 + 2\,\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2$$

il ds^2 comune a Q e S, in coordinate curvilinee qualunque u, v, e siano

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \\ &\mathrm{D}_1\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'_1\,du\,dv + \mathrm{D}''_1\,dv^2 \end{aligned}\right.$$

le loro rispettive seconde forme fondamentali. L'equazione differenziale del sistema coniugato comune si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme, od anche il *covariante* irrazionale

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}}\begin{vmatrix} \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv & \mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv \\ \mathrm{D}_1\,du + \mathrm{D}'_1\,dv & \mathrm{D}'_1\,du + \mathrm{D}''_1\,dv \end{vmatrix}.$$

Ora dimostriamo quest'altro teorema:

La forma differenziale quadratica che si ottiene dividendo il covariante Ω *per* $\sqrt[4]{|\mathrm{K}|}$ *è a curvatura nulla.* Il teorema di Servant ne segue allora come corollario, per le proprietà delle forme a curvatura nulla (vol. I, pag. 79).

Per la natura invariativa della proprietà ora enunciata, basterà dimostrarla per un particolare sistema (u, v), e prendiamo per questo appunto il sistema coniugato comune.

Riferiamoci ad esempio al primo caso trattato al § 83; abbiamo

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}}\begin{vmatrix} \Delta\,du & \Delta''\,dv \\ \overline{\Delta}\,du & \overline{\Delta}''\,dv \end{vmatrix},$$

ossia per le (12*), (19)

$$\Omega = \frac{a^2\mathrm{L}^2\lambda\mu}{\mathrm{H}\sqrt{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}}(\lambda^2 - \mu^2)\,du\,dv\,,$$

cioè per la (18)

$$\Omega = -\frac{a^2\mathrm{L}^2\lambda\mu}{\sqrt{\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1 - \mathrm{F}_1^2}}\,.\,du\,dv\,.$$

Ora, siccome

$$E_1 du^2 + 2F_1 du\, dv + G_1 dv^2 = E\, d\alpha^2 + 2F\, d\alpha\, d\beta + G\, d\beta^2,$$

si ha

$$E_1 G_1 - F_1^2 = (EG - F^2) \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = (EG - F^2)\lambda^2\mu^2,$$

e però

$$\Omega = -\frac{a^2 L^2}{\sqrt{EG - F^2}}\, du\, dv,$$

indi per la (4) § 80 (pag. 241)

$$\Omega = -\frac{a^2}{L\sqrt{H}}\, du\, dv.$$

Ma, siccome per la (6) ibid. (pag. 242)

$$\sqrt[4]{K} = \frac{\sqrt{a}}{L\sqrt{H}},$$

ne viene

$$\frac{\Omega}{\sqrt[4]{K}} = -a\sqrt{a}\, du\, dv,$$

ciò che dimostra l'ultimo teorema.

Si osservi che nel caso particolare delle deformate della sfera il sistema coniugato permanente è quello delle linee di curvatura, e la dimostrazione precedente si riduce a quella di Weingarten (vol. I pag. 284) pel teorema di Lie sulle superficie W.

§ 86.

Nuova trasformazione del problema.

Andiamo ora a trasformare i sistemi di equazioni a derivate parziali (A), (B), (C), (D) §§ 83, 84, alla cui integrazione si riduce il problema di deformare una qualunque quadrica, in altri sistemi equivalenti. Questa trasformazione venne effettuata da Calapso nel caso dei paraboloidi, ove essa riesce particolarmente utile, come ora vedremo.

1.° caso: Sistema (A).

Ponendo come prima

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 = \lambda^2$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 = \mu^2,$$

introduciamo come funzione ausiliaria un angolo ω definito dalle formole [1])

$$(31) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, & \dfrac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, & \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \end{cases}$$

con che la prima equazione del sistema (A) riesce soddisfatta, e dobbiamo al sistema aggregare l'ulteriore

$$(32) \qquad \mu^2 - \lambda^2 = H(\alpha, \beta).$$

Coi soliti processi generali dobbiamo formare le conseguenze differenziali del sistema (31), (32). Le (31) derivate danno le due

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda \operatorname{sen} \omega) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \cos \omega) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda \cos \omega) - \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \operatorname{sen} \omega) = 0, \end{cases}$$

ossia

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\lambda.$$

Derivando ora la (32) rapporto ad u, v, e ponendo per brevità

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad H_2 = \frac{\partial H}{\partial \beta},$$

si ha

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial \mu}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = -\dfrac{H_1}{2}\lambda \operatorname{sen} \omega + \dfrac{H_2}{2}\lambda \cos \omega \\[2ex] \mu\dfrac{\partial \mu}{\partial v} - \lambda\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \dfrac{H_1}{2}\mu \cos \omega + \dfrac{H_2}{2}\mu \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

---

[1]) Si osservi che sul piano rappresentativo (§ 88) d'elemento lineare $ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 = \lambda^2 du^2 + \mu^2 dv^2$ l'angolo ω significa l'inclinazione delle linee (v) sulle rette $\alpha = \text{cost.}$".

onde, combinando colle precedenti, abbiamo il sistema

$$(a)\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=-\lambda\operatorname{sen}\omega, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\cos\omega, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{H_1}{2}\operatorname{sen}\omega-\dfrac{H_2}{2}\cos\omega-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\lambda\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\cos\omega, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\operatorname{sen}\omega, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\cos\omega+\dfrac{H_2}{2}\operatorname{sen}\omega+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\lambda.\end{cases}$$

Si osservi che, se le funzioni $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega$ di u, v soddisfano al sistema (a), ne segue

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mu^2-\lambda^2-H)=0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\mu^2-\lambda^2-H)=0$$

e per ciò

$$\mu^2-\lambda^2=H+\text{cost.}^{\text{te}}.$$

Basterà dunque che si abbia inizialmente, per un particolare sistema di valori $(u_0\, v_0)$

$$(a_0) \qquad \mu^2-\lambda^2=H \text{ per } (u, v)\equiv(u_0, v_0)$$

e la (32) sarà soddisfatta per tutti i valori di (u, v).

La trasformazione del sistema (A) nel sistema (a), coll'aggiunta della condizione iniziale (a_0), è quella che volevamo eseguire.

Se si formano le condizioni d'integrabilità pel sistema (a) ponendo

$$H_{11}=\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha^2}, \quad H_{12}=\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \quad H_{22}=\frac{\partial^2 H}{\partial\beta^2},$$

si trova unicamente l'equazione del 2.° ordine in ω

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{H_{11}-H_{22}}{2}\operatorname{sen}\omega\cos\omega-\frac{H_{12}}{2}\cos 2\omega.$$

Se la funzione H è un polinomio di 2.° grado in α, β, le H_{11}, H_{12}, H_{22} sono costanti, e questa è un'equazione del 2.° ordine implicante puramente ω. Il problema della deformazione è allora ridotto alla integrazione della equazione (α) di tipo ben noto ed alla successiva integrazione del sistema (a) *lineare omogeneo nelle quattro incognite* $\alpha, \beta, \lambda, \mu$.

Procediamo ora in modo analogo per gli altri tre sistemi (B), (C), (D), che basterà ora indicare.

2.° caso: Sistema (B).

Facendo le medesime posizioni come nel primo caso, otteniamo il sistema

$$(b)\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=-\lambda\operatorname{sen}\omega, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\cos\omega, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-\dfrac{H_1}{2}\operatorname{sen}\omega+\dfrac{H_2}{2}\cos\omega+\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\lambda\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\cos\omega, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\operatorname{sen}\omega, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\cos\omega+\dfrac{H_2}{2}\operatorname{sen}\omega-\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\lambda,\end{cases}$$

colla condizione iniziale

$$(b_0) \qquad \mu^2+\lambda^2=H \text{ per } (u, v)\equiv(u_0, v_0).$$

L'equazione (α) è surrogata dall'altra

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{H_{22}-H_{11}}{2}\operatorname{sen}\omega\cos\omega+\frac{H_{12}}{2}\cos 2\omega$$

3.° caso: Sistema (C).

Qui introdurremo un'incognita ausiliaria θ ponendo

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta, \quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\operatorname{senh}\theta$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\operatorname{senh}\theta, \quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta,$$

ed avremo il sistema seguente

$$(c)\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\operatorname{senh}\theta, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-\dfrac{H_1}{2}\cosh\theta-\dfrac{H_2}{2}\operatorname{senh}\theta+\\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\operatorname{senh}\theta, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta, \quad \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\operatorname{senh}\theta+\\ \qquad\qquad +\dfrac{H_2}{2}\cosh\theta+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,\end{cases}$$

colla condizione iniziale

$$(c_0) \qquad \mu^2-\lambda^2=H \text{ per } (u, v)\equiv(u_0, v_0).$$

L'equazione di 2.° ordine per θ è

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\frac{H_{11}+H_{22}}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta+\frac{H_{12}}{2}\cosh 2\theta.$$

4.° caso: Sistema (D).

Introducendo l'ausiliaria θ come nel caso precedente, abbiamo il sistema:

$$(d)\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\operatorname{senh}\theta,\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{H_1}{2}\cosh\theta+\dfrac{H_2}{2}\operatorname{senh}\theta-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\operatorname{senh}\theta\ \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta,\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\operatorname{senh}\theta+\dfrac{H_2}{2}\cosh\theta=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,\end{cases}$$

colla condizione iniziale

$$(d_0)\qquad \mu^2+\lambda^2=H \text{ per } (u,v)\equiv(u_0,v_0)$$

e l'equazione di 2.° ordine per θ

$$(\delta)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{H_{11}+H_{22}}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta+\frac{H_{12}}{2}\cosh 2\theta.$$

§ 87.

Caso dei paraboloidi.

Nel caso speciale dei paraboloidi i risultati precedenti assumono una forma particolarmente semplice perchè, assumendo a linee coordinate (α,β) le sezioni fatte coi piani paralleli a quelli delle parabole principali, la funzione H risulta un polinomio di 2.° grado in α,β. E invero, percorrendo gli esempi relativi del § 81, abbiamo:

$H=\dfrac{\alpha^2}{p}+\dfrac{\beta^2}{q}+1$ per la regione reale del paraboloide ellittico

$H=\dfrac{\beta_1^2}{p}-\dfrac{\alpha_1^2}{q}-1$ per la regione ideale " "

$H=\dfrac{\alpha^2}{p}+\dfrac{\beta^2}{q}+1$ per la regione reale del paraboloide iperbolico

$H=\dfrac{\beta^2}{q}-\dfrac{\alpha^2}{p}-1$ per la regione ideale " "

Per quanto abbiamo detto al paragrafo precedente, questo fa sì che le rispettive equazioni (α), (β), (γ), (δ) diventano equazioni pure del 2.° ordine in ω o θ, alle quali è da associarsi ogni volta il corrispondente

sistema lineare ed omogeneo in

$$\alpha,\beta,\lambda,\mu$$

dato da (a), (b), (c), (d). Si osservi però che questa circostanza favorevole alla trattazione del corrispondente problema di deformazione non si presenta soltanto per i paraboloidi (reali od immaginarii) ma ha luogo ancora per tutte le quadriche di Darboux tangenti in un punto al circolo assoluto, perchè ogni tale quadrica ammette per coniugata in deformazione un paraboloide (cf. § 71 in fine), e per due quadriche coniugate in deformazione la funzione $H(\alpha,\beta)$ resta la stessa (§ 80).

Scriviamo ora esplicitamente i sistemi differenziali da cui dipende la deformazione di un paraboloide nei quattro casi sopra considerati. Per semplicità di formole, cangiando il paraboloide in uno simile, porremo fra i parametri p, q delle parabole principali le rispettive relazioni

$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=1$ pel paraboloide ellittico

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ pel paraboloide iperbolico.

1.° caso: Regione reale del paraboloide ellittico.

Siccome $\varepsilon=-1$ e D, D″ sono reali (§ 81), siamo nel 1.° caso del § precedente, ed essendo

$$H=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1$$

$$H_1=\frac{2\alpha}{p},\ H_2=\frac{2\beta}{q},\ H_{11}=\frac{2}{p},\ H_{22}=\frac{2}{q},\ H_{12}=0,$$

il sistema (α) diventa

$$(33)\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=-\lambda\operatorname{sen}\omega,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\cos\omega,\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{\alpha}{p}\operatorname{sen}\omega-\dfrac{\beta}{q}\cos\omega-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mu,\\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\lambda\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\cos\omega,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\operatorname{sen}\omega,\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\mu,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{\alpha}{p}\cos\omega+\dfrac{\beta}{q}\operatorname{sen}\omega+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\lambda,\end{cases}$$

colla condizione iniziale

$$(33^*)\qquad \mu^2-\lambda^2=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1.$$

L'equazione (α) diventa semplicemente

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega \,. \tag{34}$$

Da ogni soluzione di questa risultano intrinsecamente determinate ∞^3 deformate del paraboloide, che si ottengono integrando il sistema lineare (33) in $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, coll'aggiunta della condizione iniziale (33*).

2.° caso: Regione ideale del paraboloide ellittico.

Qui abbiamo § 81) $\varepsilon = +1$, D, D'' puramente immaginarii e siamo nell'ultimo caso del paragrafo precedente, ove è da farsi $H = \frac{\beta_1^2}{p} - \frac{\alpha_1^2}{q} - 1$ e quindi

$$H_1 = -\frac{2\alpha_1}{q}\,,\ H_2 = \frac{2\beta_1}{p}\,,\ H_{11} = -\frac{2}{q}\,,\ H_{22} = \frac{2}{p}\,,\ H_{12} = 0\,.$$

Dunque: la deformazione della regione ideale del paraboloide ellittico dipende dalla integrazione del sistema lineare

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \lambda_1 \cosh\theta\,,\ \frac{\partial \beta_1}{\partial u} = \lambda_1 \operatorname{senh}\theta\,,\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -\frac{\alpha_1}{q}\cosh\theta + \frac{\beta_1}{p}\operatorname{senh}\theta - \\ &\qquad\qquad - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu_1\,,\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda_1 \\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \mu_1 \operatorname{senh}\theta\,,\ \frac{\partial \beta_1}{\partial v} = \mu_1 \cosh\theta\,,\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu_1\,,\ \frac{\partial \mu_1}{\partial v} = -\frac{\alpha_1}{q}\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad\qquad + \frac{\beta_1}{p}\cosh\theta - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda_1\,, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

colla condizione iniziale

$$\mu_1^2 + \lambda_1^2 = \frac{\beta_1^2}{p} - \frac{\alpha_1^2}{q} - 1\,, \tag{35*}$$

essendo $\theta(u, v)$ una soluzione della equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\,. \tag{36}$$

3.° caso: Regione reale del paraboloide iperbolico.

Per essere qui $\varepsilon = +1$, D, D'' reali, siamo nel terzo caso del § 86. Abbiamo $H = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1$, quindi: le deformate della regione reale del paraboloide iperbolico dipendono dall'integrazione del sistema lineare

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta\,,\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta\,,\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\alpha}{p}\cosh\theta - \frac{\beta}{q}\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad\qquad + \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu\,,\ \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh}\theta\,,\ \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh\theta\,,\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu\,,\ \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\alpha}{p}\operatorname{senh}\theta + \\ &\qquad\qquad + \frac{\beta}{q}\cosh\theta + \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda \end{aligned}\right. \tag{37}$$

colla condizione iniziale

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1 \tag{37*}$$

e colla equazione a derivate parziali per θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\,. \tag{38}$$

4.° caso: Regione ideale del paraboloide iperbolico

Essendo $\varepsilon = -1$, D, D'' puramente immaginarii, siamo nel 2.° caso del § 86 e dobbiamo fare $H = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - 1$.

Il sistema lineare (b) diventa

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen}\omega\,,\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \lambda \cos\omega\,,\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\alpha}{p}\operatorname{sen}\omega + \frac{\beta}{q}\cos\omega + \frac{\partial \omega}{\partial v}\mu\,,\ \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\lambda \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos\omega\,,\ \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen}\omega\,,\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\mu\,,\ \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\alpha}{p}\cos\omega + \frac{\beta}{q}\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial \omega}{\partial u}\lambda \end{aligned}\right. \tag{39}$$

colla condizione iniziale

$$\mu^2 + \lambda^2 = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - 1\,, \tag{39*}$$

ed ω deve essere una soluzione della equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega\,. \tag{40}$$

Si osserverà che questa è la medesima equazione da cui dipende la determinazione (intrinseca) delle superficie pseudosferiche [vol. II, pag. 391 equazione (13)].

§ 88.

Le trasformazioni intrinseche delle deformate dei paraboloidi.

Colla deduzione delle formole precedenti si collega naturalmente la domanda: come si esprimono le trasformazioni B_k delle deformate dei paraboloidi mediante i sistemi di equazioni a derivate parziali del paragrafo precedente, che intrinsecamente le definiscono?

Prendiamo per es. una deformata S della regione reale del paraboloide ellittico.

Alla S corrisponderà una soluzione ω della (34) ed una quaderna $(\sigma, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni del sistema lineare associato (33); queste funzioni $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega$ di u, v si potranno calcolare, pel teorema di Servant (§ 85), con quadrature appena sia nota la superficie S. Viceversa, siccome note $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega$ è individuata la S, scriveremo $S \equiv (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega)$.

Sappiamo che dalla S, mediante una trasformazione B_k, derivano ∞^1 superficie S_1 applicabili sulla regione ideale del paraboloide ellittico (§§ 41, 42) e a ciascuna di queste corrisponderanno cinque funzioni $(\alpha_1 \beta_1, \lambda_1, \mu_1, \theta)$ di u, v delle quali la θ sarà una soluzione della (36) ed $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ integrali del sistema lineare (35). È bene evidente che la trasformazione B_k che porta da S ad S_1 si deve tradurre analiticamente nel passaggio da una soluzione ω della (34) ad una soluzione θ della (36) e da un sistema integrale $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ delle (33) ad un corrispondente sistema integrale $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ delle (35). Sono queste le formole che si tratta di stabilire. La via naturale per risolvere la questione proposta sarebbe manifestamente di cangiare le formole delle trasformazioni B_k dalle primitive coordinate asintotiche a quelle del sistema coniugato permanente, nella qual cosa dovremmo servirci del teorema al § 85 dal quale abbiamo dedotto il teorema di Servant. Qui, per abbreviare, sopprimiamo i calcoli intermedii e diamo le formole finali, sulle quali è poi facile compiere le opportune verifiche.

Data la costante k, compresa fra p e q,

$$p \leq k \leq q \quad (\text{cf. } § 41),$$

e ricordando che qui si è preso

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1,$$

introduciamo un angolo costante reale σ fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ tale che

$$\text{(41)} \qquad \operatorname{sen}^2\sigma = \frac{q-k}{kq}, \quad \cos^2\sigma = \frac{k-p}{kp};$$

dipendentemente dal valore di k l'angolo σ potrà avere un valore qualunque fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, non esclusi gli estremi, che corrisponderanno alle trasformazioni singolari

$$k = q, \quad k = p.$$

Ciò posto, prendiamo il sistema simultaneo seguente fra ω e θ

$$\text{(42)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\theta} = \cos\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta \\[2mm] \dfrac{\partial\omega}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta. \end{cases}$$

Se deriviamo la prima rispetto ad u la seconda rispetto a v e sommiamo, avendo riguardo alle (42) stesse, la θ resta eliminata e troviamo che ω deve soddisfare la (34). Se invece deriviamo la seconda rispetto ad u, la prima rispetto a v, sottraendo si elimina ω e ne segue che θ deve essere una soluzione della (36). Inversamente se per θ mettiamo nelle (42) una soluzione della (36), il sistema in ω è illimitatamente integrabile e l'integrale generale ω, contenente una costante arbitraria oltre σ, è una soluzione della (34). Similmente se nelle (42) mettiamo per ω una soluzione della (34), il sistema in θ è completamente integrabile e il suo integrale θ soddisfa la (36).

Siano (ω, θ) due tali funzioni di u, v legate dalle (42) e consideriamo i sistemi lineari associati (33), (35). Allora abbiamo questo semplice risultato: *Da ogni quaderna* $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ *di soluzioni del sistema* (33) *si passa ad una corrispondente quaderna* $(\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \lambda_1)$ *di soluzioni delle* (35) *me-*

diante le formole di sostituzione lineare

$$
(43)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{\sqrt{k}} &= -\operatorname{sen}\sigma\,.\,\beta - \cosh\theta\,.\,\lambda + \operatorname{senh}\theta\,.\,\mu\\
\frac{\beta_1}{\sqrt{k}} &= -\cos\sigma\,.\,\alpha - \operatorname{senh}\theta\,.\,\lambda + \cosh\theta\,.\,\mu\\
\frac{\lambda_1}{\sqrt{k}} &= -\operatorname{sen}\omega\,.\,\frac{\alpha}{p} + \cos\omega\,.\,\frac{\beta}{q} - D\lambda + B\mu\\
\frac{\mu_1}{\sqrt{k}} &= \cos\omega\,.\,\frac{\alpha}{p} + \operatorname{sen}\omega\,.\,\frac{\beta}{q} + A\lambda - C\mu\,,
\end{aligned}\right.
$$

dove si è posto

$$
(44)\quad\left\{\begin{aligned}
A &= \cos\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta\\
B &= \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta\\
C &= \cos\sigma\cos\omega\cosh\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\theta\\
D &= \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\cosh\theta\,.
\end{aligned}\right.
$$

La verifica è ben facile: supposto che $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ soddisfino le (33), la derivazione delle (43) dimostra che $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, soddisfano le (35). Ma un'altra osservazione essenziale è da farsi, e cioè che si ha identicamente

$$
\frac{\alpha_1^2}{q} - \frac{\beta_1^2}{p} + \lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2\,,
$$

per cui se $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ soddisfano la (33*), le $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, soddisferanno la (35*).

Dobbiamo poi notare che, risolvendo le (43) rispetto ad $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ si hanno le formole inverse:

$$
(43^*)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\sqrt{k}} &= \cos\sigma\,.\,\beta_1 - \operatorname{sen}\omega\,.\,\lambda_1 + \cos\omega\,.\,\mu_1\\
\frac{\beta}{\sqrt{k}} &= -\operatorname{sen}\sigma\,.\,\alpha_1 + \cos\omega\,.\,\lambda_1 + \operatorname{sen}\omega\,.\,\mu_1\\
\frac{\lambda}{\sqrt{k}} &= -\cosh\theta\,.\,\frac{\alpha_1}{q} + \operatorname{senh}\theta\,.\,\frac{\beta_1}{p} - D\lambda_1 + A\mu_1\\
\frac{\mu}{\sqrt{k}} &= -\operatorname{senh}\theta\,.\,\frac{\alpha_1}{q} + \cosh\theta\,.\,\frac{\beta_1}{p} - B\lambda_1 + C\mu_1\,,
\end{aligned}\right.
$$

le quali inversamente da una quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ di soluzioni delle (35), (35*) conducono ad una corrispondente quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni delle (33), (33*).

Le dette due quaderne $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ definiscono intrinsecamente due deformate S, S_1 del paraboloide ellittico, la prima della regione reale, la seconda dell'ideale. Si mostrerà nel prossimo paragrafo che esse possono collocarsi nello spazio in guisa che risultino le due falde focali della congruenza rettilinea che ne unisce i punti corrispondenti, intendendo per punti corrispondenti $F = (u, v)$ $F_1 \equiv (u, v)$ di S, S_1 quelli dati dalla medesima coppia di valori delle coordinate curvilinee u, v. Allora sarà facile vedere che si passa da S ad S_1 colla trasformazione B_k.

Diamo ancora le analoghe formole di trasformazione intrinseca per le deformate della regione reale del paraboloide iperbolico. Qui la costante k della trasformazione B_k può avere (§ 5) un valore qualunque fra $-q$ e p; ma supponiamo per fissare le idee $k > 0$, bastando nell'altro caso scambiare p con q. Prendiamo allora una costante σ reale, tale che

$$
\cosh^2\sigma = \frac{1}{q} + \frac{1}{k}\,, \quad \operatorname{senh}^2\sigma = \frac{1}{k} - \frac{1}{p}\ ^{1)}.
$$

Prendasi allora il sistema

$$
(45)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= -(\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1)\\
\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= (\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1)\,,
\end{aligned}\right.
$$

che lega fra loro due soluzioni della *medesima* equazione (38), come prima il sistema (42) legava due soluzioni corrispondenti delle (34), (36). Pongasi inoltre

$$
(46)\quad\left\{\begin{aligned}
A' &= \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1\\
B' &= \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1\\
C' &= \cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\\
D' &= \cosh\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1
\end{aligned}\right.
$$

1) Si ricordi che $k < p$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Da una quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ di soluzioni del sistema (87) si passerà ad una quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ di soluzioni del medesimo sistema, ove θ sia sostituito da θ_1, colle seguenti formole di sostituzione lineare:

$$(47)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{k}} = \cosh\theta_1 . \lambda + \operatorname{senh}\theta_1 . \mu - \operatorname{senh}\sigma . \alpha \\ \dfrac{\beta_1}{\sqrt{k}} = \operatorname{senh}\theta_1 . \lambda + \cosh\theta_1 . \mu + \cosh\sigma . \beta \\ \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{k}} = -\cosh\theta\dfrac{\alpha}{p} - \operatorname{senh}\theta\dfrac{\beta}{q} - A'\lambda - B'\mu \\ \dfrac{\mu_1}{\sqrt{k}} = \operatorname{senh}\theta\dfrac{\alpha}{p} + \cosh\theta\dfrac{\beta}{q} + C'\lambda + D'\mu . \end{cases}$$

Inoltre si ha identicamente

$$\frac{\alpha_1^2}{p} + \frac{\beta_1^2}{q} + \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2,$$

per cui se la quaderna $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ soddisfa la (87*), lo stesso accadrà della quaderna $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$. Le due *corrispondenti deformate* S, S_1 del paraboloide, convenientemente collocate nello spazio, derivano l'una dall'altra per la trasformazione B_k.

§ 89.

Nuove formole per le trasformazioni B_k delle deformate dei paraboloidi.

Per dimostrare quanto abbiamo asserito nel paragrafo precedente daremo ora le formole effettive che, nota la superficie S, fissano l'altra S_1 nella posizione voluta.

a) Per il paraboloide ellittico le formole richieste sono le seguenti

$$(48)\quad x_1 = x - \sqrt{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \text{ ecc.}$$

Se si derivano infatti queste rapporto ad u, v e si calcolano gli elementi relativi per la superficie S_1 luogo del punto $(x_1\, y_1\, z_1)$, si trova che essi corrispondono precisamente a quelli che definivano intrinsecamente questa superficie.

Il lettore potrà trovare sviluppati i calcoli relativi nella mia memoria degli Annali di matematica (Tomo XII della Serie III, 1906). Qui, supposte effettuate queste verifiche, occupiamoci di constatare che in effetto la S_1 deriverà dalla S per una trasformazione B_k. Bisognerà dimostrare per ciò:

1.° che, se si applica S sul paraboloide ellittico, i segmenti focali FF_1, trascinati nella deformazione, andranno a collocarsi coi loro estremi F_1 sul paraboloide confocale P_k.

2.° che la legge d'applicabilità di S sopra S_1 è quella data dall'affinità d'Ivory fra i due paraboloidi.

Queste sono invero le proprietà caratteristiche colle quali, al Cap. II, abbiamo determinato le trasformazioni B_k.

Per quanto riguarda la prima, cominciamo dallo scrivere le (48) in coordinate α, β

$$(49)\quad x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial \alpha} + m\frac{\partial x}{\partial \beta} \text{ ecc.}$$

Osservando le (33), ne viene

$$\begin{cases} l = \sqrt{k}(\lambda_1 \operatorname{sen}\omega - \mu_1 \cos\omega) \\ m = -\sqrt{k}(\lambda_1 \cos\omega + \mu_1 \operatorname{sen}\omega) , \end{cases}$$

ovvero per le (43)

$$(50)\quad \begin{cases} l = k\left(L\cos\sigma - \dfrac{\alpha}{p}\right) \\ m = k\left(M\operatorname{sen}\sigma - \dfrac{\beta}{q}\right), \end{cases}$$

dove si è posto

$$(51)\quad \begin{aligned} L &= \cosh\theta . \mu - \operatorname{senh}\theta . \lambda \\ M &= \cosh\theta . \lambda - \operatorname{senh}\theta . \mu . \end{aligned}$$

Ora quando S diviene il paraboloide si ha

$$x = \sqrt{p}\,\alpha\ ,\ y = \sqrt{q}\,\beta\ ,\ z = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

e dalle formole (49) per le coordinate dei termini dei segmenti, ricordando che

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{q} + \operatorname{sen}^2\sigma = \frac{1}{p} - \cos^2\sigma ,$$

si hanno le formole

$$(52)\quad \begin{cases} x_1 = k\sqrt{p}\cos\sigma\,(L - \alpha\cos\sigma) \\ y_1 = k\sqrt{q}\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(M + \beta\,\mathrm{sen}\,\sigma) \\ z_1 = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + k(\alpha L\cos\sigma + \beta M\,\mathrm{sen}\,\sigma) - k\left(\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}\right). \end{cases}$$

Se osserviamo che per le (51) si ha identicamente

$$L^2 - M^2 = \mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1,$$

ne viene

$$\frac{x_1^2}{k^2 p\cos^2\sigma} - \frac{y_1^2}{k^2 q\,\mathrm{sen}^2\sigma} + 2\frac{z_1}{k} = 1,$$

ovvero

$$\frac{x_1^2}{k-p} - \frac{y_1^2}{q-k} + 2z_1 - k = 0,$$

che è appunto l'equazione del paraboloide (iperbolico) P_k confocale all'ellittico P_0

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1.$$

Il primo punto essendo così dimostrato, passiamo al secondo. Qui l'affinità d'Ivory fra i due paraboloidi è data dalle formole

$$(53)\qquad x_1 = i\sqrt{\frac{k-p}{p}}\,x \quad y_1 = \sqrt{\frac{q-k}{q}}.$$

Ma si ha

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = \alpha, \quad \frac{y}{\sqrt{q}} = \beta$$

e le due prime equazioni (52), a causa dei valori (43) di α_1, β_1, si scrivono

$$x_1 = \sqrt{kp}\cos\sigma\,.\,\beta_1,\quad y_1 = -\sqrt{kq}\,\mathrm{sen}\,\sigma\,.\,\alpha_1,$$

ossia

$$x_1 = \sqrt{k-p}\,.\,\beta_1,\quad y_1 = -\sqrt{q-k}\,.\,\alpha_1$$

e il paragone colle (53) dà

$$\beta_1 = i\,\alpha,\quad \alpha_1 = -\beta.$$

Queste sono precisamente le formole d'applicabilità di S, S_1 (§ 43), ciò che completa la nostra verifica.

Affatto analogamente si prova che, nel caso del paraboloide iperbolico, le formole corrispondenti alle (48) sono le seguenti

$$x_1 = x + \sqrt{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\text{ecc.},$$

e si dimostra che le due falde focali S, S_1 della relativa congruenza W derivano l'una dall'altra per trasformazione B_k.

§ 90.

Estensione delle ricerche al caso non-euclideo.

Indichiamo ora rapidamente come le proprietà dei sistemi coniugati permanenti e le formole fondamentali ad essi relative si trasportano senz'altro dallo spazio euclideo allo spazio a curvatura costante. Basterà dimostrare come le formole (II) del § 80, relative ai sistemi isotermo-coniugati delle quadriche, sussistono invariate in geometria non-euclidea, poichè è su queste formole e sulle equazioni di Codazzi, le quali conservano la medesima forma nello spazio curvo, che noi abbiamo fondato le successive deduzioni.

Chiamiamo K_0 la curvatura dello spazio e poniamo per semplicità $K_0 = \pm 1$, secondo che si tratta di spazio ellittico od iperbolico, ed indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di Weierstrass di punto, legate fra loro dalla identità

$$x_0^2 + K_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1.$$

Essendo S una qualunque superficie riferita ad un sistema curvilineo (u, v) e colle due forme fondamentali,

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

valgono qui le formole fondamentali (vol. I § 213)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 E\,x_i + D\,\xi_i \\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 F\,x_i + D'\xi_i \\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 G\,x_i + D''\xi_i \end{cases}$$

per $i = 0, 1, 2, 3$,

dove $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ sono le coordinate di Weierstrass del piano tangente, legate dalla identità quadratica

$$K_0\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1.$$

Supponiamo ora che la S sia una quadrica, che riferiamo dapprima alle sue generatrici rettilinee (u, v); avremo

$$D=D''=0, \qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0.$$

Dunque x_0, x_1, x_2, x_3 saranno quattro soluzioni del sistema (illimitatamente integrabile)

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}&=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}-K_0Ex\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}&=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}-K_0Gx,\end{aligned}\right.$$

e si avrà in particolare (cf. § 79)

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix},$$

onde potremo porre

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial u}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=2\frac{\partial\log L}{\partial v}.$$

Dopo ciò, passando dalle variabili asintotiche alle variabili α, β di un sistema isotermo-coniugato col porre

$$\alpha=u+v \quad , \quad \beta=u-v,$$

il sistema (α) prenderà la forma

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}&=2\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+2\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta}+Ax\\ \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}&=\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+Bx\end{aligned}\right.$$

dove A, B sono funzioni di α, β, che non importa precisare. Volendo adoperare variabili reali α, β in tutti i casi, si scriverà

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+\epsilon\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}&=2\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+2\epsilon\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta}+Ax\\ \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}&=\frac{\partial\log L}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+Bx.\end{aligned}\right.$$

Come si vede, il sistema ha la medesima forma del sistema (I) § 79, salvo l'aggiunta dei termini Ax, Bx nei secondi membri. Di qui, ragionando come al principio del § 80, si traggono pei valori dei simboli di Christoffel in coordinate (α, β) le stesse formole (II), e solo naturalmente, nella formola (6) ibid., per la curvatura K devesi intendere la curvatura *relativa* della superficie. Dopo ciò tutte le deduzioni, dal § 82 al § 86, relative alle proprietà generali dei sistemi coniugati permanenti sulle quadriche, si applicano senza variazioni di sorta alla deformazione delle quadriche in geometria ellittica ed iperbolica.

Capitolo VII. [1]

Le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche rotonde e delle quadriche tangenti all'assoluto

§. 91.

La trasformazione complementare.

In quest'ultimo capitolo ci proponiamo di ritornare sulla teoria delle nostre trasformazioni generali B_k per le deformate delle quadriche e di esaminare in primo luogo più da vicino il caso particolarmente interessante delle quadriche di rotazione. I bei teoremi scoperti da Guichard nel 1899, al cui studio abbiamo dedicato il Cap. XVII (vol. II, pag. 87-129) delle Lezioni, collegano, come si sa, la deformazione delle quadriche rotonde a quella delle superficie a curvatura costante. S'intende quindi che le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche rotonde si debbono tradurre in corrispondenti trasformazioni delle superficie a curvatura costante. E noi dimostreremo che queste ultime non sono altro che le *trasformazioni di Bäcklund*. Per altro sarà più opportuno allo scopo nostro tenere qui il cammino inverso, cioè dimostrare come le trasformazioni di Bäcklund delle superficie a curvatura costante, convenientemente interpretate col teorema di Guichard, si traducono nelle trasformazioni B_k per le quadriche di rotazione.

Questa è in effetto la via per la quale giunsi la prima volta alle trasformazioni B_k nel caso speciale delle quadriche rotonde e lo studio

[1] I primi §§ di questo capitolo fino al § 98 sono una riproduzione della memoria dell'autore: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*. Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) Serie 3.ª, tomo XIV (1905).

delle circostanze geometriche che si presentano in questo caso, come nell'altro direttamente trattato dei paraboloidi, mi permise di risalire alle leggi del caso generale, confermate poi dai procedimenti di calcolo esposti nei primi Capitoli di questo libro.

Cominceremo la nostra ricerca dal caso particolare della *trasformazione complementare* delle deformate delle quadriche rotonde per esaminare più da vicino la relazione fra i due ds^2 di due tali deformate complementari. Prendiamo per asse delle z l'asse di rotazione della quadrica Q e indichiamo con r, z le coordinate rettangolari di un punto mobile sulla curva meridiana, la cui equazione scriviamo

$$\frac{r^2}{A}+\frac{z^2}{B}=1,$$

significando A, B due costanti reali, che supponiamo però diseguali a fine di escludere il caso delle superficie a curvatura costante. Poichè r è il raggio del parallelo, l'elemento lineare della quadrica Q sarà dato dalla formola

$$ds^2=\frac{A^2+(B-A)\,r^2}{A\,(A-r^2)}\,dr^2+r^2dv^2,$$

il parametro v indicando la longitudine.

Pel calcolo dell'elemento lineare $\overline{ds}$ della superficie complementare $\overline{S}$ ricorreremo alla formola generale data nelle Lezioni (vol. I pag. 296), ed avremo

$$\overline{ds}^2=r^2d\rho^2+\rho^2dv_1^2,$$

ove si ponga

$$\rho=\sqrt{\frac{A^2+(B-A)\,r^2}{A\,(A-r^2)}}. \tag{2}$$

Di qui, eliminando r, troviamo

$$\overline{ds}^2=\frac{A^2(\rho^2-1)}{A\rho^2+(B-A)}\,d\rho^2+\rho^2dv_1^2, \tag{3}$$

e questa ponendo

$$\rho=k\bar r\ ,\ v_1=\frac{\bar v}{k},$$

e determinando convenientemente la costante k, si riconduce nuovamente alla forma stessa (1)

$$\overline{ds}^2=\frac{A^2+(B-A)\,\bar r^2}{A\,(A-\bar r^2)}\,d\bar r^2+\bar r^2d\bar v^2.$$

Basta invero assumere per questo $k^2 = \frac{A-B}{A^2}$, onde le formole per l'identificazione dei due elementi lineari della deformata S e della sua complementare $\overline{S}$ sono

$$(4)\qquad \bar r = \sqrt{\frac{A^2+(B-A)r^2}{A-r^2}\cdot\frac{A}{A-B}}\ ,\quad \bar v = \frac{A}{\sqrt{A-B}}\,v$$

Se ne conclude intanto: *Ogni deformata di una quadrica rotonda è applicabile (nel senso generale analitico) sopra la sua complementare.* Questo risultato ci era già noto dalla teoria generale, poichè la trasformazione complementare non è che una particolare trasformazione B_k.

Ma conviene ora completarlo coll'esame della specie d'applicabilità fra S e $\overline{S}$, e ciò discutendo le formole (4) non solo riguardo alla loro realità, ma anche rispetto ai limiti entro i quali variano i nostri parametri, supposti reali. Distinguendo così le cinque forme di quadriche a centro, troviamo i risultati seguenti

a) Ellissoide allungato: $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 < b^2$ [1]).

Le formole (4) dimostrano che $\bar r, \bar v$ sono puramente immaginarii quando r, v sono reali (essendo $r^2 < a^2$), e quindi l'applicabilità delle due superficie complementari è soltanto ideale.

b) Ellissoide schiacciato $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 > b^2$.

Allora $\bar r, \bar v$ sono bensì reali con r, v; però mentre nella regione reale dell'ellissoide è $r^2 < a^2$, si ha invece dalla (4)

$$\bar r^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}\,\frac{a^4-(a^2-b^2)r^2}{a^2-r^2} > a^2 .$$

Alla regione reale di S ne corrisponde una immaginaria di $\overline{S}$ e l'applicabilità è ancora ideale.

c) Iperboloide a due falde: $A = -a^2$, $B = b^2$.

La quantità $\bar r, \bar v$ sono (puramente) immaginarie per r, v reali e l'applicabilità è sempre ideale.

d) Iperboloide ad una falda: $A = a^2$, $B = -b^2$.

Le formole (4) diventano

$$\bar r = a\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\,r^2-a^4}{(a^2+b^2)\,(r^2-a^2)}}\ ,\quad \bar v = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,v$$

———

[1]) Qui ed in seguito a, b denotano costanti reali positive.

e danno valori reali per $\bar r, \bar v$ quando r, v sono reali; ma di più, essendo nella regione reale dell'iperboloide $r^2 > a^2$, ne risulta anche $\bar r^2 > a^2$. Dunque: *Nel caso delle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda l'applicabilità delle superficie complementari ha luogo per le loro regioni reali.* E così è dimostrato direttamente quanto abbiamo asserito in nota al § 24.

D'altra parte però osserviamo che l'elemento lineare di questa quadrica

$$ds^2 = \frac{(a^2+b^2)\,r^2-a^4}{a^2\,(r^2-a^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2$$

riveste forma reale anche quando

$$r^2 < \frac{a^4}{a^2+b^2} < a^2 ,$$

cioè per una regione ideale della quadrica stessa. Esiste quindi un'altra classe di superficie *reali* applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide; il loro ds^2 si scriverà sotto la forma

$$ds^2 = \frac{a^4-(a^2+b^2)\,r^2}{a^2\,(a^2-r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2 .$$

Noi l'abbiamo già considerata per l'iperboloide generale rigato al § 48 ed è facile vedere che essa appartiene al secondo dei casi ivi considerati $\left(\bar u = \frac{1}{v}\ ,\ \bar v = \frac{1}{u}\right)$ e che pel caso dell'iperboloide rotondo il ds^2 si riduce appunto alla forma precedente. È chiaro che anche per questa classe l'applicabilità di una superficie sulla complementare è reale.

e) Ellissoide immaginario: $A = -a^2$, $B = -b^2$.

Qui abbiamo

$$ds^2 = \frac{a^4+(a^2-b^2)\,r^2}{a^2\,(a^2+r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2$$

e le formole di trasformazione (4) sono

$$\bar r = a\sqrt{\frac{a^4+(a^2-b^2)\,r^2}{(b^2-a^2)\,(a^2+r^2)}}\ ,\quad \bar v = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,v .$$

Qui dobbiamo suddistinguere, come pel caso dell'ellissoide reale, secondo che $a^2 < b^2$, ovvero $a^2 > b^2$.

e_1) Supponiamo dapprima $a^2 < b^2$, e l'elemento lineare precedente rivestirà forma reale sia per r, v reali, sia per r, v puramente immaginarii. Per r, v reali scriviamo

$$e'_1)\qquad ds^2 = \frac{a^4-(b^2-a^2)r^2}{a^2(a^2+r^2)}dr^2 + r^2 dv^2,$$

colla naturale limitazione $r^2 < \frac{a^4}{b^2-a^2}$; così $\bar{r}, \bar{v}$ sono pure reali e l'applicabilità delle due superficie complementari è reale.

Per r, v puramente immaginarii, cangiandoli in ir, iv, scriviamo

$$e''_1)\qquad ds^2 = \frac{a^4+(b^2-a^2)r^2}{a^2(r^2-a^2)}dr^2 + r^2 dv^2$$

colla limitazione $r^2 > a^2$. Qui ancora $\bar{r}, \bar{v}$ sono puramente immaginarii e l'applicabilità di $S, \bar{S}$ è reale. Per superficie tipica di rotazione corrispondente si può prendere il *catenoide accorciato* (vol. II, pag. 109)

$$\rho = \sqrt{b^2-a^2}\cosh\left(\frac{z}{b}\right),$$

dove $\rho = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}r$ designa il raggio del parallelo.

e_2) Supponiamo ora $a^2 > b^2$; allora $\bar{r}, \bar{v}$ sono puramente immaginarii per r, v reali ed inversamente. Come superficie tipiche di rotazione corrispondenti si può prendere il *sinusoide iperbolico* (vol. II, pag. 109).

$$\rho = \sqrt{a^2-b^2}\,\operatorname{senh}\left(\frac{z}{b}\right)$$

e la sua complementare. L'applicabilità dell'una sull'altra è ideale.

§ 92.

Deformazione di inviluppi di sfere colle due falde a curvatura costante.

Per stabilire le relazioni enunciate fra le trasformazioni di Bäcklund delle superficie a curvatura costante e le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche di rotazione, dobbiamo qui riprendere e generalizzare la ricerca effettuata al Cap. XVII delle Lezioni sulla determinazione di quegli inviluppi di sfere pei quali, deformando comunque la superficie S_0 luogo dei centri, l'una e quindi anche l'altra falda dell'inviluppo serba sempre la medesima curvatura costante K. Allora si supponeva reale non solo la superficie S_0 luogo dei centri delle sfere, ma anche reali le sfere stesse e di più le due falde dell'inviluppo. Qui lascieremo solo la condizione che sia reale la superficie S_0 luogo dei centri, potendo le sfere stesse essere reali od immaginarie, ed anche per sfere reali potendo le due falde dell'inviluppo essere immaginarie. Nella discussione così completata del problema vedremo presentarsi, come è prevedibile a priori, tutte le superficie applicabili realmente od idealmente sulle quadriche a centro rotonde delle varie specie.

La parte analitica della trattazione, come è esposta nei §§ 253-259 delle Lezioni, resta naturalmente inalterata; solo conviene riprendere la discussione delle formole finali al § 259 sotto il punto di vista più generale attuale. Intanto la superficie S_0 luogo dei centri dovrà essere applicabile sopra una superficie di rotazione ed il suo elemento lineare avrà la forma (vol. II, pag. 107)

$$(5)\qquad ds_0^2 = -\frac{d\sigma^2}{c\,\mathrm{sen}^4\sigma\left(1+\frac{c}{K}\mathrm{sen}^2\sigma\right)} + \cot^2\sigma\, dv^2$$

dove σ, v sono rispettivamente i parametri dei paralleli e dei meridiani nella configurazione rotonda di S_0, e c indica una costante arbitraria. Il raggio T della sfera, invariabile lungo ogni singolo parallelo, è dato dalla formola (l. c. formole (31) e (32)

$$(6)\qquad T = \sqrt{\frac{1}{K} + \frac{1}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma}}.$$

Ora, per ipotesi, la S_0 deve essere reale ed il suo ds_0^2 ridursi quindi alla forma reale di superficie di rotazione

$$ds_0^2 = du^2 + r^2 dv_1^2.$$

Paragonando colla (5), si ha

$$r = k\cot\sigma \qquad (k \text{ costante}),$$

indi

$$du^2 = \frac{k^2+r^2}{k^2c\left(\frac{k^2c}{K}+k^2+r^2\right)}dr^2;$$

dunque l'espressione

$$\frac{k^2+r^2}{k^2 c\left(\frac{k^2 c}{K}+k^2+r^2\right)}$$

deve essere reale, variando r in un certo intervallo reale, per la qualcosa è evidentemente necessario che tutte tre le costanti K, c, k^2 siano reali. Dunque nella (5) dovrà σ assumere tali valori che $\cot^2\sigma$ risulti reale (positiva o negativa), e corrispondentemente il parametro v sarà reale, ovvero puramente immaginario. La formola (6) dimostra poi che T^2 è in ogni caso reale, e per ciò il raggio T della sfera sarà, secondo i casi, reale ovvero puramente immaginario.

Siccome nella (5) possiamo aumentare σ di un multiplo di π senza che cangi la formola, la condizione che $\cot^2\sigma$, ovvero $\operatorname{sen}^2\sigma$, sia reale dà luogo a questi tre casi distinti: 1.° σ reale, 2.° σ puramente immaginario, 3.° $\sigma-\frac{\pi}{2}$ puramente immaginario. Il primo caso è quello già completamente discusso nel Cap. XVII e qui non avremo più dunque da occuparci che degli altri due che diremo

Caso α) $\sigma = i\tau$ (τ reale).

Caso β) $\sigma=\frac{\pi}{2}+i\tau$ (τ reale).

§ 93.

Proprietà comuni ai tre casi.

Prima di intraprendere la discussione è opportuno ricordare dai §§ 265, 266 alcune proprietà fondamentali, che valgono indipendentemente dall'essere reali o immaginarie le due falde dell'inviluppo di sfere.

Indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate del centro M_0 della sfera mobile sulla superficie S_0 e con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della normale alla S_0, e siano

$$M \equiv (x, y, z)\ ,\quad M_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$$

i due punti simmetrici, rispetto al piano tangente di S_0, ove la sfera di centro M_0 e di raggio $=T$ tocca le due falde dell'inviluppo, che diremo rispettivamente le superficie S, S_3. Ponendo sotto forma invariantiva le formole (b) a pag. 88 vol. II, abbiamo facilmente

$$(7)\qquad x = x_0 - T\nabla(T, x_0) + T\sqrt{1-\Delta_1 T}\,.\ X_0 \text{ ecc.},$$

ove $\nabla(T, x_0)$, $\Delta_1 T$ sono i soliti simboli di parametri differenziali, calcolati rispetto all'elemento lineare di S_0. Pel radicale $\sqrt{1-\Delta_1 T}$ si prenderà nelle (7) uno qualunque dei suoi due valori; l'altro darà le formole per x_3, y_3, z_3. Osserviamo che, siccome T è reale o puramente immaginario, le (7) mostrano che S, S_3 saranno reali o coniugate immaginarie; ed ancora si noti che, pur essendo T reale, le due falde S, S_3 dell'inviluppo saranno reali soltanto se $\Delta_1 T < 1$.

Ai §§ 265, 266 delle lezioni abbiamo dimostrato che alle due superficie S, S_3 di curvatura costante K sono contigue, per trasformazione di Bäcklund, due altre superficie S_1, S_2 colla medesima curvatura K e le quattro superficie

$$(S, S_1, S_2, S_3)$$

formano una quaderna del teorema di permutabilità, ed il quadrilatero sghembo $M M_1 M_3 M_2$ coi vertici in quattro punti corrispondenti è una *losanga* coi quattro lati di lunghezza costante

$$d=\sqrt{\frac{1}{c}}.$$

Le coordinate x_1, y_1, z_1 di M_1 e quelle x_2, y_2, z_2 di M_2 sono date dalle formole

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + \dfrac{T}{\cos\sigma}X_1 + \operatorname{tg}\sigma\sqrt{-\dfrac{1}{K}-\dfrac{1}{c}}\,.\ X_2 \\[2ex] x_2 = x_0 + \dfrac{T}{\cos\sigma}X_1 - \operatorname{tg}\sigma\sqrt{-\dfrac{1}{K}-\dfrac{1}{c}}\,.\ X_2 \text{ ecc.,}\end{cases}$$

dove (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) sono i rispettivi coseni di direzione delle tangenti alle deformate di meridiani e dei paralleli sopra S_0. E come le normali a S, S_3 in due punti corrispondenti M, M_3 si incontrano in M_0, così le normali in punti corrispondenti M_1, M_2 a S_1, S_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$. Se si tiene presente che i coseni di direzione dalle normali di S_1, S_2 sono rispettivamente proporzionali ai binomii

$$T\operatorname{sen}\sigma X_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K}-\frac{1}{c}}\,X_1,\quad T\operatorname{sen}\sigma\, Y_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K}-\frac{1}{c}}\,Y_1,$$

$$T\operatorname{sen}\sigma\, Z_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K}-\frac{1}{c}}\,Z_1,$$

si trova subito per le coordinate $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ di $\overline{M}_0$

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{\cos\sigma}{c\,T\,\mathrm{sen}^2\sigma} X_1 \text{ ecc.} \tag{9}$$

Il luogo di questo punto $\overline{M}_0$ è precisamente la superficie $\overline{S}_0$ complementare di S_0, come risulta dalle (9) stesse; le sfere descritte col centro in $\overline{M}_0$ e di raggio $\overline{T}$ dato dalla formola

$$\overline{T} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{c}\right)}}{T} \tag{10}$$

toccano in M_1, M_2 rispettivamente le due S_1, S_2, le quali formano dunque l'inviluppo del secondo sistema di sfere. Ricordiamo poi l'importante proprietà: *Sulle quattro superficie a curvatura costante* S, S_1, S_2, S_3 *i sistemi coniugati si corrispondono fra loro ed a quelli delle superficie* $S_0, \overline{S}_0$.

Notiamo ancora che dalla forma (5) dell'elemento lineare di S_0 risulta per la sua curvatura K_0

$$K_0 = \frac{c^2\,\mathrm{sen}^4\sigma}{K}. \tag{11}$$

Il numeratore è reale e positivo e quindi K_0 ha il segno di K.

§ 94.

Caso α) con K negativa.

Volgiamoci ora all'esame dei singoli casi possibili, cominciando dal caso indicato con α) alla fine del § 92, ove σ è puramente immaginario $= i\tau$, indi

$$\mathrm{sen}\,\sigma = i\,\mathrm{sen\,h}\,\tau\ , \quad \cos\sigma = \cos\mathrm{h}\,\tau.$$

Allora nella (5) deve essere anche v puramente immaginario, e noi lo cangiamo in ikv, essendo la costante k ed il nuovo parametro v reali. Così la (5) diventa

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c\,\mathrm{sen\,h}^4\tau\left(\frac{c}{K}\mathrm{sen\,h}^2\tau - 1\right)} + k^2\cot\mathrm{h}^2\tau\,.\,dv^2 \tag{12}$$

e la (6) dà l'altra

$$T = \sqrt{\frac{\frac{c}{K}\mathrm{sen\,h}^2\tau - 1}{c\,\mathrm{sen\,h}^2\tau}}. \tag{13}$$

Sotto il segno radicale abbiamo qui una quantità che ha il segno stesso del coefficiente di $d\tau^2$ nella (21) ed è per ciò positiva; dunque nel caso attuale le quantità

$$T \text{ e } \frac{T}{\cos\sigma}$$

sono reali. Ora dobbiamo scindere la discussione in due, secondo che la curvatura K è negativa o positiva. Trattando in questo paragrafo il primo caso, poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2},$$

con b reale positiva. Manifestamente perchè il ds_0^2, dato dalla (12), risulti reale occorre che c sia negativa e noi poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2},$$

onde risulta

$$ds_0^2 = \frac{a^4\,d\tau^2}{\mathrm{sen\,h}^4\tau\,(a^2 - b^2\,\mathrm{sen\,h}^2\tau)} + k^2\cot\mathrm{h}^2\tau\,dv^2. \tag{14}$$

Se diamo alla costante arbitraria k il valore

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e poniamo

$$r = k\cot\mathrm{h}\,\tau = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cot\mathrm{h}\,\tau, \tag{15}$$

la (14) diventa

$$ds_0^2 = \frac{(a^2+b^2)\,r^2 - a^4}{a^2\,(r^2 - a^2)}dr^2 + r^2\,dv^2. \tag{14*}$$

Questo elemento lineare, secondo la (1) § 91, appartiene all'iperboloide ad una falda coll'iperbola meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

E poichè, per la (14), deve essere $\mathrm{sen\,h}^2\tau < \frac{a^2}{b^2}$, indi $\cot\mathrm{h}^2\tau > \frac{a^2+b^2}{a^2}$

segue dalla (15): $r^2 > a^2$. Dunque la superficie S_0 è nel caso attuale applicabile sulla regione reale dell'iperboloide. Osserviamo poi che la formola (13) per T ci dà

$$T = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{r^2-a^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}z\,;$$

il valore del secondo membro ha un significato geometrico semplicissimo, eguagliando il tratto di generatrice dell'iperboloide dal punto M_0 che si considera fino al circolo di gola.

Si avverta ora che, sebbene il sistema ∞^2 di sfere sia in questo caso reale, le due falde S, S_3 dell'inviluppo sono immaginarie (coniugate), poichè $\Delta_1 T = \cos^2\sigma = \cosh^2\tau > 1$ (§ 93). Quando la S_0 ha la forma dell'iperboloide, le due falde S, S_3 si riducono a due sfere di raggio $= ib$ coi centri nei due fuochi immaginarii dell'asse di rotazione. In fine la superficie $\overline{S}_0$ complementare è applicabile sulla regione reale stessa dell'iperboloide e le due falde del relativo inviluppo di sfere coi centri nei punti di $\overline{S}_0$ e di raggio $\overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}$, sono le altre due superficie S_1, S_2 pseudosferiche immaginarie (coniugate) che completano con S, S_3 la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) del teorema di permutabilità associata ad $S_0, \overline{S}_0$. Per questo primo caso enunciamo esplicitamente i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Se attorno ad ogni punto dell'iperboloide rotondo ad una falda come centro, e con raggio eguale al tratto di generatrice che intercede fra il detto punto ed il circolo di gola si descrive una sfera, indi si deforma comunque per flessione l'iperboloide che seco trascini le sfere, l'inviluppo di questo sistema ∞^2 di sfere consta sempre di due superficie immaginarie coniugate S, S_3 colla curvatura costante $K = -\frac{1}{b^2}$, essendo b la lunghezza del semi-asse immaginario dell'iperboloide. Queste due superficie pseudosferiche S, S_3 sono completate ad una quaderna del teorema di permutabilità (S, S_1, S_2, S_3) da altre due superficie S_1, S_2 della stessa specie, ottenute nel medesimo modo dalla superficie complementare della deformata dell'iperboloide.*

Ed in fine si noti che la lunghezza d del lato della losanga del teorema di permutabilità ha qui il valore

$$d = \sqrt{\frac{1}{c}} = ia\,,$$

essendo a il raggio del circolo di gola.

§ 95.

Caso α) con K positiva.

Supponiamo ora sempre $\sigma = i\tau$, però K positiva, poniamo

$$K = \frac{1}{b^2},$$

e la formola (12) diverrà

$$(16)\qquad ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c\,\mathrm{senh}^4\tau\,(cb^2\,\mathrm{senh}^2\tau - 1)} + k^2\coth^2\tau\, dv^2\,.$$

Qui conviene suddistinguere secondo che la quantità

$$-\frac{1}{K} - \frac{1}{c} = -b^2 - \frac{1}{c}\,,$$

che figura sotto il segno radicale nelle (8) § 93, è positiva, negativa o nulla.

Cominciando dal primo caso, poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2}\,,\ \text{con } a^2 > b^2$$

ed avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4\,d\tau^2}{\mathrm{senh}^4\tau\,(a^2 + b^2\,\mathrm{senh}^2\tau)} + k^2\coth^2\tau\, dv^2\,,$$

Se poniamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,,\quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-a^2}}\coth\tau,$$

questo ds_0^2 rientra nella formola (1) § 91, ove si faccia

$$A = a^2\,,\ B = b^2\,,$$

ed appartiene quindi all'ellissoide schiacciato rotondo di ellisse meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\ (a^2 > b^2)\,.$$

Però, siccome $r^2 = \frac{a^4}{a^2-b^2}\coth^2\tau > \frac{a^4}{a^2-b^2} > a^2$, la superficie S_0 è applicabile sulla regione ideale dell'ellissoide; la complementare $\overline{S}_0$ sarà applicabile (§ 91) sulla regione reale dell'ellissoide stesso. Si osservi poi che nel caso attuale il raggio T delle sfere del primo sistema, coi centri nei punti di S_0, è reale, ed invece quello $\bar{T}$ delle sfere del sistema complementare è puramente immaginario.

Le quattro superficie (S, S_1, S_2, S_3) di curvatura costante $K = \frac{1}{b^2}$ sono due a due coniugate immaginarie (S di S_3 ed S_1 di S_2) e i lati della losanga hanno la lunghezza

$$d = ia\,.$$

Restano da considerare i casi $\frac{1}{c} > -b^2$, $\frac{1}{c} = -b^2$; ma vediamo subito che essi conducono ai risultati già noti del cap. XVII. E infatti se $\frac{1}{c} > -b^2$, tutte le quantità che figurano nelle formole (8) § 93 sono reali (perchè $\sigma = i\tau$) e le due falde S_1, S_2 del secondo inviluppo di sfere sono reali. Rispetto alla superficie $\bar{S}_0$ siamo dunque nel caso reale, onde $\bar{S}_0$ è applicabile sull'ellissoide allungato o sull'iperboloide a due falde; e invero se nella (3) § 91 che dà l'elemento lineare della complementare si pone

$$k = 1\,,\ \rho = \coth\tau\,,\ A = -\frac{1}{c}\,,\ B = b^2\,,$$

si ottiene appunto la (16) attuale, onde risulta che avremo un ellissoide allungato se c è negativa, un iperboloide a due falde se c è positiva. In fine nel caso limite $\frac{1}{c} = -b^2$ le due superficie S_1, S_2 vengono a coincidere fra loro e colla $\bar{S}_0$, la quale è adunque una superficie a curvatura costante positiva.

§ 96.

Caso β) : $\sigma = \frac{\pi}{2} + i\tau$

Qui abbiamo

$$\operatorname{sen}\sigma = \cosh\tau\,,\ \cos\sigma = -i\operatorname{senh}\tau\,,$$

indi

$$ds_0^2 = -\frac{d\tau^2}{c\cosh^4\tau\left(1 + \frac{c}{K}\cosh^2\tau\right)} + k^2\operatorname{tgh}^2\tau\,dv^2 \tag{17}$$

$$T = \sqrt{\frac{1 + \frac{c}{K}\cosh^2\tau}{c\cosh^2\tau}}\,. \tag{18}$$

Il raggio T della sfera è puramente immaginario, per ciò $\frac{T}{\cos\sigma} = i\frac{T}{\operatorname{senh}\tau}$ è reale.

Per non ricadere nel caso di S_1, S_2 reali, dovremo dunque supporre

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{c} < 0\,, \tag{19}$$

altrimenti i secondi membri delle (8) § 93 sarebbero reali. Ciò premesso, distinguiamo anche qui due casi, secondo che K è positiva o negativa.

Caso β_1) : $K > 0$, poniamo

$$K = \frac{1}{b^2}$$

e dalla diseguaglianza (19), o dalla forma (17) del ds^2, risulta che c dovrà avere un valore negativo, e sia

$$c = -\frac{1}{a^2}\,,$$

onde per la (19)

$$a^2 > b^2\,. \tag{19*}$$

La (17) diventa

$$ds_0^2 = \frac{a^4\,d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(a^2 - b^2\cosh^2\tau)} + k^2\operatorname{tgh}^2\tau\,dv^2\,, \tag{20}$$

e se prendiamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,,\ r = k\operatorname{tgh}\tau\,, \tag{21}$$

avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,r^2}{a^2\,(a^2 - r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2\,,$$

formola che coincide colla (1) § 91 ove si ponga $A = a^2$, $B = b^2$. La S_0 è dunque applicabile sull'ellissoide schiacciato; ma questa volta, siccome nella (20) il parametro τ deve assumere valori pei quali

$$\cosh^2\tau < \frac{a^2}{b^2}\,,\ \operatorname{tgh}^2\tau < \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,,$$

risulta dalla (21) $r^2 < a^2$ e la S_0 è applicabile sulla regione ideale dell'ellissoide, indi la sua complementare sulla regione reale.

Manifestamente questo è lo stesso caso considerato al paragrafo precedente; soltanto S_0, $\overline{S}_0$ sono permutate.

Caso β_2): $K < 0$, poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2}$$

e le (17), (18) diventano

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c\cosh^2\tau\,(cb^2\cosh^2\tau - 1)} + k^2\,\mathrm{tgh}^2\tau\,dv^2 \tag{22}$$

$$T = \sqrt{-\frac{cb^2\cosh^2\tau - 1}{c\cosh^2\tau}}\,. \tag{23}$$

Per la diseguaglianza (19) sarà $\frac{1}{c} < b^2$, e dobbiamo ancora suddistinguere due casi secondo che $c < 0$, ovvero $c > 0$.

1.° caso: Sia c negativa, poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2}\,;$$

la (22) diventa

$$ds_0^2 = \frac{a^4\,d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(a^2 + b^2\cosh^2\tau)} + k^2\,\mathrm{tgh}^2\tau\,dv^2\,,$$

e ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\quad r = k\,\mathrm{tgh}\,\tau\,,$$

si traduce nell'elemento lineare

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)\,r^2}{a^2\,(a^2 - r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2$$

dell'iperboloide ad una falda. Però, siccome qui

$$r^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}\,\mathrm{tgh}^2\tau < \frac{a^4}{a^2 + b^2} < a^2\,,$$

la S_0 è applicabile sulla regione ideale dell'iperboloide. Il lato d della losanga ha ancora qui il valore $d = ia$ come nel caso del § 4 delle deformate della regione reale; ma mentre allora il raggio T della sfera

era reale, qui è puramente immaginario

$$T = i\,\frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a}\sqrt{a^2 - r^2}\,.$$

2.° caso: $c > 0$, poniamo

$$c = \frac{1}{a^2}$$

e sarà per la (19) $a^2 < b^2$. Dalla (22) abbiamo

$$ds_0^2 = \frac{a^4\,d\tau^2}{\cos\mathrm{h}^4\tau\,(b^2\cos\mathrm{h}^2\tau - a^2)} + k^2\,\mathrm{tgh}^2\tau\,dv^2\,,$$

che ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\,,\quad r = k\,\mathrm{tgh}\,\tau$$

si converte nella

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (b^2 - a^2)\,r^2}{a^2\,(a^2 + r^2)}\,dv^2 + r^2\,dv^2\,.$$

Questa forma del ds_0^2 appartiene precisamente a quella classe di superficie applicabili sull'ellissoide immaginario contraddistinta nella formola e'_1) § 91. Il raggio T della sfera è puramente immaginario

$$T = i\,\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\sqrt{a^2 + r^2}$$

e il lato d della losanga del teorema di permutabilità ha la lunghezza reale $d = a$.

§ 97.

Formole relative alla composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund.

Ci occorre ancora pel nostro scopo riprendere e completare le formole per la composizione di due trasformazioni opposte B_σ e $B_{-\sigma}$ di Bäcklund, date al § 390 delle lezioni (vol. II pag. 429-431). Sia dunque (S, S_1, S_2, S_3) una quaderna del teorema di permutabilità di superficie a curvatura costante $K = -\frac{1}{R^2}$ relativa a due trasformazioni di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$ con costanti eguali ed opposte, e siano

$$\begin{cases} ds^2 = R^2(\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2 dv^2)\,,\ ds_1^2 = R^2(\cos^2\theta_1\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, dv^2) \\ ds_2^2 = R^2(\cos^2\theta_2\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2\, dv^2)\,,\ ds_3^2 = R^2(\cos^2\theta_3\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\, dv^2) \end{cases}$$

i loro rispettivi ds^2 riferiti alle linee di curvatura (u, v). La funzione θ_3 è determinata per $\theta, \theta_1, \theta_2$ colla formola del teorema di permutabilità

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta_3-\theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\,.$$

La losanga $MM_1M_3M_2$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_3, S_2 ha il lato di lunghezza costante d

$$d = R\cos\sigma\,;$$

le normali in M, M_3 alle S, S_3 si incontrano in punto M_0 e similmente quelle a S_1, S_2 nei punti M_1, M_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$, e questi due punti $M_0, \overline{M}_0$ descrivono due superficie complementari applicabili sulla medesima quadrica rotonda (cf. § 93).

Calcoliamo ora gli elementi relativi alla superficie S_0. Ponendo (l. c.)

$$\text{(25)} \qquad \Omega = \frac{\theta_1-\theta_2}{2}\,,\ \Phi = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\,,$$

abbiamo

$$\text{(25*)} \qquad x_0 = x + R\operatorname{sen}\sigma\cot\Omega\,.\,X_3 \ \text{ecc.}$$

e se poniamo ancora

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} A = \cos\theta\operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\Omega \\ B = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\Omega\,, \end{cases}$$

si ha

$$\text{(27)} \qquad \cos\sigma\, d\Omega = A\cos\Phi\, du + B\operatorname{sen}\Phi\, dv\,.$$

Ancora è un differenziale esatto l'espressione

$$A\operatorname{sen}\Phi\, du - B\cos\Phi\, dv\,,$$

e se si pone

$$\text{(27*)} \qquad dV = A\operatorname{sen}\Phi\, du - B\cos\Phi\, dv\,,$$

per l'elemento lineare della S_0 abbiamo

$$\text{(28)} \qquad ds_0^2 = R^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^4\Omega}\, d\Omega^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2\Omega}\right].$$

Questo appartiene alla quadrica Q di rotazione colla conica meridiana definita dalle formole

$$r = \frac{iR\cos\sigma}{\operatorname{sen}\Omega}\,,\ z = R\cot\Omega$$

e colla longitudine v_1 data da

$$v_1 = \frac{iV}{\cos\sigma}\,.$$

Calcoliamo ora, in coordinate u, v, la seconda forma fondamentale di S_0

$$F_0 = D_0\, du^2 + 2\, D'_0\, du\, dv + D''_0\, dv^2\,.$$

Per ciò si osservi che i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S_0 sono

$$\text{(28*)} \qquad X_0 = \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\Phi\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\Phi\, X_2 + \cos\sigma\operatorname{sen}\Omega\, X_3}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}} \ \text{ecc.}\,,$$

e calcolando di qui

$$F_0 = -\sum dx_0\, dX_0\,,$$

dalle formole del vol. II pag. 391 e dalle precedenti si troverà facilmente

$$\text{(29)} \qquad F_0 = \frac{RAB}{\cos\sigma\operatorname{sen}\Omega\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}}(dv^2 - du^2)\,.$$

D'altra parte se con $\overline{F}_0$ indichiamo similmente la seconda forma fondamentale della quadrica rotonda Q, abbiamo

$$\overline{F}_0 = \frac{iR}{\cos\sigma\operatorname{sen}\Omega\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}}(dV^2 + \cos^2\sigma\, d\Omega^2)\,,$$

ossia per le (27), (27*)

$$\text{(29*)} \qquad \overline{F}_0 = \frac{iR}{\cos\sigma\operatorname{sen}\Omega\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}}(A^2\, du^2 + B^2\, dv^2)\,.$$

Tanto nella (29) che nella (29*) manca il termine in $du\,dv$ e quindi il sistema (u, v) è coniugato comune alla quadrica Q ed alla sua deformata S_0. Se ne conclude l'importante teorema: *Alle linee di curvatura (u, v) delle quattro superficie pseudosferiche* (S, S_1, S_2, S_3) *corrisponde sulle deformate complementari* $S_0, \overline{S}_0$ *della quadrica* Q *il sistema coniugato permanente.*

§ 98.

Congruenze W con falde applicabili su quadriche rotonde.

Dopo tutti questi preparativi arriviamo al punto fondamentale della nostra ricerca: *alla dimostrazione della esistenza di congruenze* W *colle due falde focali applicabili sulla quadrica rotonda.*

Per ciò riprendiamo dal § 67* il risultato relativo al caso particolare di una configurazione di Möbius composta di 8 superficie pseudosferiche legate ciascuna a tre nel ciclo da tre trasformazioni di Bäcklund $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}, B_{\sigma_3}$. Questo teorema si può enunciare sotto la forma seguente: *Ogni quaderna* (S, S_1, S_2, S_3) *di superficie pseudosferiche del teorema di permutabilità è cangiata da una qualunque trasformazione di Bäcklund* B_τ, *che cangi* S *in un'altra* S', *in un'altra tale quaderna* (S', S'_1, S'_2, S'_3).

Applichiamo questo alla particolare quaderna (S, S_1, S_2, S_3) del § precedente relativa a due trasformazioni opposte $B_\sigma, B_{-\sigma}$.

Come le normali ad S, S_3 in punti corrispondenti si incontrano nel punto M_0 che descrive la deformata S_0 della quadrica Q, così le normali alle trasformate S', S'_3 s'incontreranno in un punto M'_0 che descriverà un'altra deformata S'_0 della stessa quadrica. Le due superficie S_0, S'_0 hanno una posizione relativa nello spazio perfettamente determinata e sono poste, pel modo stesso della loro generazione geometrica, in corrispondenza di punto a punto. Ora noi dimostreremo la proprietà fondamentale:

Le rette $M_0M'_0$ *congiungenti le coppie di punti corrispondenti* M_0, M'_0 *delle due superficie* S_0, S'_0 *generano una congruenza* W, *di cui* S_0, S'_0 *sono le due falde focali.*

Siccome già nella corrispondenza fra S_0, S'_0 si corrispondono le asintotiche, perchè le une e le altre corrispondono alle asintotiche delle superficie pseudosferiche, basterà mostrare che il segmento $M_0M'_0$ tocca S_0 in M_0 ed S'_0 in M'_0; anzi basterà verificare la prima cosa, chè l'altra ne segue allora permutando S_0, S'_0.

Indichiamo con accenti le quantità relative alla nuova quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) dedotta da (S, S_1, S_2, S_3) colla trasformazione di Bäcklund B_τ, ed applicando la formola generale del teorema di permutabilità (vol. II, pag. 416) alle successive quaderne

$$(S, S_1, S', S'_1)\ ,\ (S, S_2, S', S'_2)\ ,\ (S_3, S_2, S'_3, S'_2)\ ,\ (S_3, S_1, S'_3, S'_1)$$

abbiamo le formole seguenti

$$(30)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_1-\theta}{2} = \dfrac{\cos\frac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}\ ,\quad \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_2-\theta}{2} = -\dfrac{\cos\frac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_2-\theta'}{2} \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_2}{2} = \dfrac{\cos\frac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_2}{2}\ ,\quad \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_1}{2} = -\dfrac{\cos\frac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_1}{2}. \end{cases}$$

Se dalle due prime formiamo il valore di

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta'_1-\theta}{2} - \frac{\theta'_2-\theta}{2}\right),$$

deduciamo, con semplici trasformazioni trigonometriche, la formola seguente importante pel nostro scopo:

$$(31)\quad \operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\sigma\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - \cos\tau\cos\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

Ricordiamo ora che per le (25*)

$$x_0 = x + R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}X_3,$$

indi similmente

$$x'_0 = x' + R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}X'_3.$$

Ma poichè si passa da S a S' con una B_τ si ha (vol. II, pag. 391-392)

$$\begin{cases} x' = x + R\cos\tau(\cos\theta' X_1 + \operatorname{sen}\theta' X_2) \\ X'_3 = \cos\tau\operatorname{sen}\theta' X_1 - \cos\tau\cos\theta' X_2 - \operatorname{sen}\tau X_3, \end{cases}$$

e le precedenti diventano quindi

$$(32)\quad \begin{aligned} x'_0 - x_0 = {} & R\cos\tau\left[\cos\theta' + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\cot\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}\right]X_1 + \\ & + R\cos\tau\left[\operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\cot\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}\right]X_2 \\ & - R\operatorname{sen}\sigma\left[\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + \operatorname{sen}\tau\cot\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}\right]X_3. \end{aligned}$$

D'altra parte pei coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S_0 abbiamo le formole (28*), ove $\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\Phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Se scriviamo dopo ciò la condizione

$$\sum X_0 (x'_0 - x_0) = 0,$$

la quale esprime che il segmento $M_0 M'_0$ tocca S_0 in M_0, troviamo subito che essa coincide colla formola (31), e la nostra proposizione è così dimostrata.

Si osservi poi che, fissata S_0, esiste una *doppia infinità* di superficie trasformate S'_0, poichè ogni quaderna (S, S_1, S_2, S_3) ha appunto ∞^2 quaderne trasformate (S', S'_1, S'_2, S'_3). Così adunque per una nuova via siamo giunti, nel caso delle deformate delle quadriche rotonde, a dimostrare il teorema fondamentale A) enunciato al § 1. Ed ora altro più non ci resta che verificare come le trasformazioni così trovate coincidono colle generali trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche.

§. 99.

Identità delle trasformazioni trovate colle B_k.

Per dimostrare l'asserita coincidenza delle due specie di trasformazioni noi dobbiamo provare che se la superficie S_0 si applica sulla quadrica Q, seco trascinando i segmenti tangenti $M_0 M'_0$:

1.° Il luogo dei nuovi estremi M'_0 sarà una quadrica Q_k confocale a Q.

2.° La legge d'applicabilità fra S_0 e S'_0 corrisponderà all'affinità d'Ivory fra Q e Q_k.

Secondo quanto si è osservato al § 97, quando la S_0 assume la forma della quadrica Q, le coordinate di un suo punto sono date dalle formole

$$x_0 = R\frac{i\cos\sigma}{\operatorname{sen}\Omega}\cos v_1, \quad y_0 = R\frac{i\cos\sigma}{\operatorname{sen}\Omega}\operatorname{sen} v_1, \quad z_0 = R\cot\Omega, \tag{33}$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} d\Omega &= \frac{A\cos\Phi}{\cos\sigma}du + \frac{B\operatorname{sen}\Phi}{\cos\sigma}dv \\ dv_1 &= i\frac{A\operatorname{sen}\Phi}{\cos\sigma}du - iB\frac{\cos\Phi}{\cos\sigma}dv. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Poniamo le formole (32) sotto la forma

$$x'_0 - x_0 = R\left(\lambda\frac{\partial x_0}{\partial\Omega} + \mu\frac{\partial x_0}{\partial v_1}\right) \text{ ecc.,} \tag{35}$$

ove ora per variabili indipendenti sono prese Ω, v_1, in luogo di u, v, e calcoliamo i coefficienti λ, μ.

Se scriviamo dapprima

$$x'_0 - x_0 = l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v} \text{ ecc.} \tag{35*}$$

e ricordiamo che si ha (vol. II, pag. 431)

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = R\left[\frac{A}{\operatorname{sen}\Omega}X_1 - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}^2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial u}X_3\right]$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = R\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\Omega}X_2 - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}^2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial v}X_3\right],$$

dal confronto colle (32), viene

$$\left\{\begin{aligned} lA &= \cos\tau\operatorname{sen}\Omega\left[\cos\theta' + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\cot\frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2}\right] \\ mB &= \cos\tau\operatorname{sen}\Omega\left[\operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\cot\frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2}\right]. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Confrontiamo queste formole colle (34) e (35) e poniamo per brevità

$$\psi = \theta' - \Phi = \theta' - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \Omega' = \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2} \tag{37}$$

ne deduciamo per i valori cercati di λ, μ

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\cos\sigma}(lA\cos\Phi + mB\operatorname{sen}\Phi) = \frac{\cos\tau\operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma}[\cos\psi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\psi\cot\Omega'] \\ \mu &= \frac{i}{\cos\sigma}(lA\operatorname{sen}\Phi - mB\cos\Phi) = i\frac{\cos\tau\operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma}[-\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\sigma\cos\psi\cot\Omega']. \end{aligned}\right.$$

Per la (31) si ha

$$\cot\Omega' = \frac{\cos\sigma\cos\Omega - \cos\tau\cos\psi}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}, \tag{37*}$$

onde i valori precedenti di λ, μ diventano

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos\tau\operatorname{sen}\Omega\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\Omega\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega\cos\psi}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega} \\ \mu &= \frac{i\cos\tau\operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\cos\Omega\cos\psi + \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\sigma\cos\tau}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Trasformate così le formole (32) nelle (35), coi valori superiori per λ, μ, esse si applicano in qualunque flessione di S_0, e supponendo in particolare che la S_0 diventi la quadrica (33), ne deduciamo calcolando x'_0, y'_0, z'_0:

$$(39)\quad \begin{cases} x'_0 = i R \dfrac{\cos\sigma\cos\tau[\operatorname{sen}\tau\cos\Omega\cos\psi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\psi] - \operatorname{sen}\tau\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}\cos v_1 + \\ \qquad + R\dfrac{\cos\sigma\cos\tau[\operatorname{sen}\sigma\cos\Omega\cos\psi + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\psi] - \operatorname{sen}\sigma\cos^2\tau}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}\operatorname{sen} v_1 \\ y'_0 = i R \dfrac{\cos\sigma\cos\tau[\operatorname{sen}\tau\cos\Omega\cos\psi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\psi] - \operatorname{sen}\tau\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}\operatorname{sen} v_1 - \\ \qquad - R\dfrac{\cos\sigma\cos\tau[\operatorname{sen}\sigma\cos\Omega\cos\psi + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\psi] - \operatorname{sen}\sigma\cos^2\tau}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}\cos v_1 \\ z'_0 = R\operatorname{sen}\tau\dfrac{\cos\sigma\cos\psi - \cos\sigma\cos\Omega}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega}. \end{cases}$$

Paragonando da queste formole $x'^2_0 + y'^2_0$ con z'^2_0, si trova subito la relazione

$$(40)\qquad \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{R^2(\cos\sigma - \cos^2\tau)} + \frac{z'^2_0}{R^2\operatorname{sen}^2\tau} + 1 = 0,$$

mentre l'equazione della quadrica fondamentale Q dalle (33) è

$$(40^*)\qquad \frac{x^2_0 + y^2_0}{R^2\cos^2\sigma} + \frac{z^2_0}{R^2} + 1 + 0.$$

Come si vede, la (40) rappresenta una quadrica Q_k confocale alla fondamentale Q e di parametro

$$(41)\qquad k = R^2\cos^2\tau.$$

La prima delle nostre asserzioni è così dimostrata.

Per dimostrare anche la seconda cominciamo dall'osservare che la formola (28), applicata alla S'_0, dà per il suo ds^2

$$(42)\qquad ds'^2_0 = R^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega'}{\operatorname{sen}^4\Omega'}d\Omega'^2 + \frac{dV'^2}{\operatorname{sen}^2\Omega'}\right],$$

ove Ω', V' sono le quantità analoghe ad Ω, V. Ora l'affinità d'Ivory fra le quadriche (40), (40*) trasporta il punto $(x'_0 y'_0 z'_0)$ nel punto $(\bar x_0 \bar y_0 \bar z_0)$

della seconda, ove

$$(43)\quad \bar x_0 = \frac{\cos\sigma}{\sqrt{\cos^2\sigma - \cos^2\tau}}x'_0, \quad \bar y_0 = \frac{\cos\sigma}{\sqrt{\cos^2\sigma - \cos^2\tau}}y'_0, \quad \bar z_0 = \frac{z'_0}{\operatorname{sen}\tau}.$$

D'altra parte se con $\bar\Omega, \bar V$ indichiamo i valori di Ω, V in $\bar x_0, \bar y_0, \bar z'_0$, avremo anche per le (33)

$$(43^*)\quad \bar x_0 = \frac{iR\cos\sigma}{\operatorname{sen}\bar\Omega}\cos\left(\frac{i\bar V}{\cos\sigma}\right), \bar y_0 = \frac{iR\cos\sigma}{\operatorname{sen}\bar\Omega}\operatorname{sen}\left(\frac{i\bar V}{\cos\sigma}\right), \bar z_0 = R\cot\bar\Omega$$

e sarà

$$(42^*)\qquad \overline{ds^2_0} = R^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\bar\Omega}{\operatorname{sen}^4\bar\Omega}d\bar\Omega^2 + \frac{d\bar V^2}{\operatorname{sen}^2\bar\Omega}\right].$$

Il confronto fra le due ultime equazioni (43), (43*) dà

$$\cot\bar\Omega = \frac{\cos\tau\cos\psi - \cos\sigma\cos\Omega}{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\Omega},$$

onde, osservando la (37*),

$$\Omega' = -\bar\Omega.$$

È chiaro che con questo i due primi termini nelle espressioni (42), (42*) di ds'^2_0, $\overline{ds^2_0}$ vengono a coincidere. Ed ora altro più non resta che dimostrare la relazione

$$dV' = d\bar V.$$

Per questo basterebbe calcolare dalle due prime (43*), confrontate colle (43), il valore di $\bar V$, indi verificare che ne risulta

$$d\bar V = A'\operatorname{sen}\Phi'du - B'\cos\Phi'dv.$$

Così siamo giunti ancora, per mezzo delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie a curvatura costante, alle trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche rotonde. In questa deduzione però noi non ci siamo preoccupati della distinzione fra il reale e l'immaginario. Volendo per questa via separare la discussione delle varie specie di quadriche rotonde, saremmo condotti ad uno studio più accurato delle quaderne (S, S_1, S_2, S_3) di superficie pseudosferiche, reali od immaginarie, associate alle deformate *reali* delle quadriche rotonde. Questo studio trovasi esposto nella memoria citata dell'autore [1]) e conduce in particolare ai

[1]) Società dei XL, t. XIV.

risultati già osservati nel § 46 di questo volume per le regioni reali delle quadriche rotonde. Ma l'apparato analitico necessario a raggiungere per questa via lo scopo indicato è ben lungi dall'offrire qualche maggiore semplicità in confronto di quello che è stato costruito nei Capitoli precedenti per le deformate delle quadriche generali.

§ 100.

Paraboloide tangente nel centro all'assoluto.

Le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche rotonde si deducono, come si è visto, dalle trasformazioni di Bäcklund delle superficie a curvatura costante, dalle quali il teorema di Guichard le fa dipendere.

Ma vi ha un'altra classe di quadriche per le cui deformate il medesimo fatto si presenta. Le quadriche rotonde possono caratterizzarsi come *bitangenti* all'assoluto e le altre, di cui ora vogliamo trattare, sono le quadriche di Darboux (cf. § 71) tangenti in un solo punto al circolo assoluto. Esse sono necessariamente immaginarie, ma ne esistono però varie classi che ammettono deformate reali (cf. vol. II §§ 303-311) e queste appunto ci interessa qui di considerare.

Cominciamo dalle deformate di quella quadrica (paraboloide) a cui conduce il metodo di Weingarten (vol. II § 291), applicato alle superficie a curvatura costante.

Prendiamo una superficie pseudosferica S, il cui raggio R facciamo per semplicità $= 1$, e riferiamola, come al § 373 delle lezioni, alle sue linee di curvatura u, v. Avremo

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2$$

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta\,,\quad r_2 = \cot\theta$$

e varranno le formole fondamentali (l. c.):

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta\,.\,X_1\,,\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\theta\, X_3\,,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_1\,,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\, X_1 \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,.\,X_2\,,\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_2\,,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_1 + \cos\theta\, X_3\,,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta\, X_3\,. \end{cases}$$

Poniamo ora

$$(45)\quad \lambda = \sum x X_1\,,\ \mu = \sum x X_2\,,\ \alpha = \sum x X_3$$

$$\beta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2)\,,$$

sicchè λ, μ, α sono le distanze *algebriche* dell'origine dalle tre facce del triedro principale di S, col vertice in (x, y, z), e β è il semiquadrato della distanza dell'origine dal vertice stesso. Secondo il metodo di Weingarten, formiamo le tre espressioni

$$(46)\quad dx_0 = x\,d\beta + X_3\,d\alpha\,,\ dy_0 = y\,d\beta + Y_3\,d\alpha\,,\ dz_0 = z\,d\beta + Z_3\,d\alpha\,,$$

che sono tre differenziali esatti. Si hanno così le funzioni x_0, y_0, z_0, definite ciascuna a meno di una costante additiva; il punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ descrive una superficie S_0 d'elemento lineare

$$(46^*)\quad ds_0^2 = d\alpha^2 + 2\,\alpha\, d\alpha\, d\beta + 2\,\beta\, d\beta^2\,.$$

Questo appartiene alla quadrica definita dalle formole

$$(47)\quad x + iy = \beta\,,\ x - iy = \alpha^2 + \beta^2\,,\ z = \alpha\,,$$

di equazione

$$(48)\quad (x + iy)^2 + z^2 = x - iy\,.$$

Essa è, come si vede, un paraboloide le cui generatrici sul piano all'infinito

$$x + iy + iz = 0\,,\ x + iy - iz = 0$$

s'intersecano nel punto $x = 1$, $y = i$, $z = 0$ del circolo assoluto, che tocca dunque questo paraboloide nel centro.

Si osservi ora che le funzioni

$$\lambda, \mu, \alpha, \beta$$

di u, v, definite dalle (45), vengono a soddisfare, a causa delle (44), al sistema lineare seguente:

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu - \operatorname{sen}\theta\,.\,\alpha + \cos\theta\,,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\,,\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\lambda\,,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = \cos\theta\,.\,\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu\,,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda + \cos\theta\,.\,\alpha + \operatorname{sen}\theta\,,\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = -\cos\theta\,.\,\mu\,,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\mu\,, \end{cases}$$

coll'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2 - 2\beta = \text{cost.}^{\text{te}}\,,$$

e, per quanto precede, la costante del secondo membro deve prendersi nulla.

Le formole (46) possono ora scriversi

$$(50)\quad \frac{\partial x_0}{\partial u} = (x\cos\theta + X_3 \operatorname{sen}\theta)\lambda\,,\ \frac{\partial x_0}{\partial v} = (x \operatorname{sen}\theta - X_4\cos\theta)\,\mu\,,$$

e derivate nuovamente danno le formole

$$(50^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u^2} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + X_1\lambda \\ \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} = \dfrac{\mu}{\lambda}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial v}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + X_2\mu\,,\ \text{ecc.} \end{cases}$$

Dalla media di queste risulta che $D'_0 = 0$, cioè il sistema (u, v) è coniugato sopra S_0. Poichè inoltre, sommando le estreme ed osservando che identicamente [1])

$$X_1\lambda + X_2\mu = \frac{\cos\theta - \alpha\,\mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta + \alpha\cos\theta}{\mu}\frac{\partial x_0}{\partial v}\,,$$

segue che $D_0 + D''_0 = 0$, vediamo che il sistema (u, v) è isotermo-coniugato sulla S_0, come sulla superficie pseudosferica S, talchè *ai sistemi coniugati di* S *corrispondono sistemi coniugati su* S_0.

Osserviamo di più che il detto sistema (u, v) è il sistema coniugato *permanente* di S_0 nella sua applicabilità sul paraboloide (47). E invero la seconda forma fondamentale di questa quadrica in coordinate α, β è proporzionale a

$$d\alpha^2 + d\beta^2$$

e, trasformata in coordinate u, v, manca del termine in $du\,dv$, perchè

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} = 0\ \text{[2]}).$$

Ne risulta di nuovo, pel teorema di Darboux (§ 85), che il detto sistema permanente (u, v) è isotermo-coniugato.

---

[1]) Si osservi che dalle (45) si ha

$$x = \lambda X_1 + \mu X_2 + \alpha X_3\,.$$

[2]) La stessa cosa segue dall'osservare che $\alpha, \beta, \alpha^2 + \beta^2$ sono tre soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\,.$$

§ 101.

Le trasformazioni B_k per le deformate S_0 del paraboloide (48).

Della superficie pseudosferica S prendiamo una trasformata di Bäcklund S' per la trasformazione B_σ (II § 373), e sia

$$ds'^2 = \cos^2\theta'\,du^2 + \mathrm{sen}^2\theta'\,dv^2\,;$$

indicando cogli accenti le quantità relative, avremo le formole (l. c.):

$$(51)\qquad x' = x + \cos\sigma\,(\cos\theta' X_1 + \mathrm{sen}\,\theta' X_2)$$

$$(52)\qquad \begin{cases} X'_1 = A X_1 + B X_2 - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\, X_3 \\ X'_2 = C X_1 + D X_2 + \cos\sigma\cos\theta\, X_3 \\ X'_3 = \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta' X_1 - \cos\sigma\cos\theta' X_2 - \mathrm{sen}\,\sigma\, X_3\,, \end{cases}$$

dove si è posto

$$(53)\qquad \begin{cases} A = \cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' \\ B = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta' \\ C = \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta' + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' \\ D = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' - \mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\cos\theta'. \end{cases}$$

Calcoliamo ancora per la S' le quantità

$$\lambda', \mu', \alpha', \beta',$$

analoghe alle $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ per S; troveremo subito dalle precedenti le formole di sostituzione lineare

$$(54)\qquad \begin{cases} \lambda' = A\lambda + B\mu - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\,\alpha + \cos\sigma\cos\theta \\ \mu' = C\lambda + D\mu + \cos\sigma\cos\theta\,\alpha + \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \alpha' = \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\lambda - \cos\sigma\cos\theta'\,\mu - \mathrm{sen}\,\sigma\,\alpha \\ \beta' = \cos\sigma\cos\theta'\,\lambda + \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mu + \beta + \dfrac{1}{2}\cos^2\sigma\,. \end{cases}$$

Ed ora come dalla S abbiamo dedotto la S_0, così dalla S' deduciamo una seconda deformata S'_0 del paraboloide (48), definita dapprima, a meno di una traslazione nello spazio, dalle formole corrispondenti alle (50)

$$(55)\quad \frac{\partial x'_0}{\partial u}=(x'\cos\theta'+X'_3\operatorname{sen}\theta')\lambda',\quad \frac{\partial x'_0}{\partial v}=(x'\operatorname{sen}\theta'-X'_3\cos\theta')\mu',$$

che per le (51), (52) possiamo scrivere

$$(55^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_0}{\partial u}=(\cos\theta' x+\cos\sigma X_1-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta' X_3)\lambda' \\[2mm] \dfrac{\partial x'_0}{\partial v}=(\operatorname{sen}\theta' x+\cos\sigma X_2+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta' X_3)\mu'. \end{cases}$$

Supposta fissata la S_0 nello spazio, dimostreremo che: *è possibile fissare la S'_0 per modo che la congruenza generata dalle congiungenti $M_0 M'_0$ i punti corrispondenti abbia S_0, S'_0 per falde focali.*

Basterà per ciò provare che, disponendo delle costanti additive in x'_0, y'_0, z'_0, si possono determinare due tali funzioni l, m di u, v da rendere (§ 3)

$$x'_0=x_0+l\frac{\partial x_0}{\partial u}+m\frac{\partial x_0}{\partial v}.$$

Possiamo determinare facilmente l, m osservando che, siccome $D'_0=0$, si avrà di qui colle notazioni del § 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'_0}{\partial u}=L_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u}+M_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v}+D_0 l X_0 \\[2mm] \dfrac{\partial x'_0}{\partial v}=P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u}+Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v}+D''_0 m X_0, \end{cases}$$

e per ciò dalle (55*)

$$\begin{cases} D_0 l=\sum X_0\dfrac{\partial x'_0}{\partial u}=\lambda'\left[\cos\theta'\sum X_0 x+\cos\sigma\sum X_0 X_1-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\sum X_0 X_3\right] \\[2mm] D''_0 m=\sum X_0\dfrac{\partial x'_0}{\partial v}=\mu'\left[\operatorname{sen}\theta'\sum X_0 x+\cos\sigma\sum X_0 X_2+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\sum X_0 X_3\right]. \end{cases}$$

Ma si ha per le (50)

$$\sum X_0 x=0,\quad \sum X_0 X_3=0,$$

indi per le (50*)

$$D_0=\sum X_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial u^2}=\lambda\sum X_0 X_1,\quad D''_0=\sum X_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2}=\mu\sum X_0 X_2,$$

e sostituendo nelle precedenti, abbiamo i valori per l, m

$$l=\cos\sigma\frac{\lambda'}{\lambda},\quad m=\cos\sigma\frac{\mu'}{\mu},$$

e così

$$(56)\quad x'_0=x_0+\cos\sigma\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u}+\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)\text{ecc.}$$

ossia per le (50)

$$(56^*)\quad x'_0=x_0+\cos\sigma(x\cos\theta+X_3\operatorname{sen}\theta)\lambda'+\cos\sigma(x\operatorname{sen}\theta-X_3\cos\theta)\mu'\text{ ecc.}$$

Ed ora si derivino queste rapporto ad u, v, osservando le (44) e le formole analoghe alle (46) soddisfatte da $\lambda', \mu' \ldots$ sostituite θ' a θ, e ricordando inoltre che per le formole di trasformazione di Bäcklund

$$\frac{\partial\theta'}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{B}{\cos\sigma},\quad \frac{\partial\theta'}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\frac{C}{\cos\sigma};$$

si verifica così senza difficoltà che i valori di x'_0, y'_0, z'_0 fissati dalle (56) soddisfano effettivamente le (55*). Ed osservando ancora che si ha identicamente

$$(x\cos\theta+X_3\operatorname{sen}\theta)\lambda'+(x\operatorname{sen}\theta-X_3\cos\theta)\mu'=$$
$$=(x'\cos\theta'+X'_3\operatorname{sen}\theta')\lambda+(x'\operatorname{sen}\theta'-X'_3\cos\theta')\mu,\ ^{1)}\text{ ecc.},$$

vediamo che le (56) possono scriversi sotto la forma equivalente

$$x_0=x'_0-\cos\sigma\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\frac{\partial x'_0}{\partial u}+\frac{\mu}{\mu'}\frac{\partial x'_0}{\partial v}\right).$$

Le nostre formole (56) collocano dunque effettivamente le due deformate S_0, S'_0 del paraboloide in tale posizione nello spazio che la congruenza generata dalle congiungenti $M_0 M'_0$ i loro punti corrispondenti ha S_0, S'_0 per falde focali. Questa congruenza è inoltre una congruenza W, perchè i sistemi coniugati di S_0, S'_0 corrispondono a quelli delle superficie pseudosferiche S, S', e si corrispondono per ciò fra loro. Si osservi di più che i sistemi coniugati permanenti di S_0, S'_0 corrispondono alle linee di curvatura (u, v) delle superficie pseudosferiche. È evidente poi che, fissata la S_0, esistono ∞^2 congruenze della specie descritta ed aventi S_0 per prima falda focale.

---

[1]) Nel modo più semplice si verificano queste formole osservando che se si moltiplica ordinatamente per X_1, Y_1, Z_1 e si somma, indi similmente per X_2, Y_2, Z_2 poi per X_3, Y_3, Z_3, tutte tre le volte risulta un' identità.

§ 102.

Verifiche relative al sistema confocale.

Tutte le proprietà sopra descritte coincidono con quelle che abbiamo dimostrato aver luogo per le trasformazioni generali B_k delle deformate delle quadriche, ed in effetto andiamo ora a constatare che le trasformazioni trovate per le deformate del paraboloide (48) appartengono appunto alla classe delle trasformazioni B_k. Per questo converrà dimostrare che hanno luogo le proprietà stesse già enumerate al principio del § 99.

Cominciamo per ciò dallo scrivere le formole (56) in coordinate α, β, invariabili per le flessioni; siccome per le (49)

$$\frac{\partial x_0}{\partial u}=\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial u}=\lambda\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}+\cos\theta\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v}=\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v}+\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v}=\mu\left(-\cos\theta\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\right),$$

le (56) diventano

$$x'_0=x_0+\cos\sigma(\operatorname{sen}\theta\,.\,\lambda'-\cos\theta\,\mu')\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}+\cos\sigma(\cos\theta\,\lambda'+\operatorname{sen}\theta\,\mu')\frac{\partial x_0}{\partial \beta},$$

ossia per le (54)

$$(57)\quad x'_0=x_0+\cos\sigma[-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\lambda+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\mu-\cos\sigma\,\alpha]\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}+$$
$$+\cos\sigma[\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu+\cos\sigma]\frac{\partial x_0}{\partial \beta}\ \text{ecc.}$$

Ora, quando la S_0 affetta la forma del paraboloide (47), abbiamo

$$x_0+i\,y_0=\beta\,,\ x_0-i\,y_0=\alpha^2+\beta^2\,,\ z_0=\alpha\,,$$

e le (57) danno corrispondentemente [1])

$$(58)\quad\begin{cases} x'+i\,y'=\beta+\cos\sigma(\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu+\cos\sigma) \\ x'-iy'=\alpha^2+\beta^2+2\cos\sigma\,.\,\alpha[-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\lambda+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\mu-\cos\sigma\,.\,\alpha]+ \\ \qquad\qquad+2\cos\sigma\,.\,\beta[\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu+\cos\sigma] \\ z'=\alpha\operatorname{sen}^2\sigma+\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma[-\operatorname{sen}\theta'\lambda+\cos\theta'\mu]. \end{cases}$$

Se formiamo di qui l'espressione

$$(x'+iy')^2+\frac{z'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}-(x'-i\,y'),$$

[1]) Qui, per semplicità di scrittura, abbiamo soppresso l'indice 0 a x', y', z'.

ricordando l'identità

$$\lambda^2+\mu^2=2\beta-\alpha^2,$$

troviamo

$$(x'+iy')^2+\frac{z'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}-(x'-iy')=\cos^4\sigma+2\beta\cos^2\sigma+2\cos^3\sigma(\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu)$$
$$=2\cos^2\sigma(x'+iy')-\cos^4\sigma\,.$$

Dunque: *quando la* S_0 *si applica sul paraboloide* (48), *seco trascinando i segmenti focali* $M_0M'_0$, *il luogo dei secondi estremi* M'_0 *diventa la quadrica*

$$\left(x'+iy'\right)^2+\frac{z'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}-2\cos^2\sigma(x'+iy')-(x'-iy')+\cos^4\sigma=0.$$

Ora questa è precisamente una quadrica confocale al paraboloide (48), poichè per l'equazione di Q' in coordinate tangenziali (cartesiane) u, v, w troviamo

$$3u^2+5v^2+2\,iuv+8u+8iv-4\operatorname{sen}^2\sigma(u^2+v^2+w^2)=0,$$

che è l'equazione di una *schiera* di quadriche di cui fa parte, come quadrica singolare, l'assoluto

$$u^2+v^2+w^2=0\,.$$

Il parametro k del sistema ha il valore $k=4\operatorname{sen}^2\sigma$, e per $\sigma=\frac{\pi}{2}$ si ha il paraboloide fondamentale (48).

Così la prima proprietà (§ 99) è verificata; passiamo alla seconda. Quando la seconda superficie S'_0 si applica sul paraboloide, il punto x'_0, y'_0, z'_0 va nel punto di coordinate curvilinee (α', β'), od anche, se si vuole, $(-\alpha', \beta')$. Diciamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ i valori delle coordinate cartesiane in questo punto; avremo per le (47)

$$\bar{x}+i\bar{y}=\beta'\,,\ \bar{x}-i\bar{y}=\alpha'^2+\beta'^2\,,\ \bar{z}=-\alpha',$$

ossia per le (54) (e ricordando che $\lambda^2+\mu=2\beta-\alpha^2$)

$$\begin{cases} \bar{x}+i\bar{y}=\cos\sigma(\cos\theta'.\lambda+\operatorname{sen}\theta'.\mu)+\beta+\frac{1}{2}\cos^2\sigma \\ \bar{x}-i\bar{y}=\cos^2\sigma(2\beta-\alpha^2)+\beta^2+\alpha^2\operatorname{sen}^2\sigma+\frac{1}{4}\cos^4\sigma-2\,\alpha\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma(\operatorname{sen}\theta'\lambda-\cos\theta'\mu)+ \\ \qquad+2\beta\cos\sigma(\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu)+\cos^3\sigma(\cos\theta'\lambda+\operatorname{sen}\theta'\mu)+\beta\cos^2\sigma \\ \bar{z}=\cos\sigma(-\operatorname{sen}\theta'\lambda+\cos\theta'\mu)+\alpha\operatorname{sen}\sigma\,. \end{cases}$$

Paragonando queste colle (58), si trova subito

$$
(59)\qquad \begin{cases} \bar{x}+i\bar{y}=x'+iy'-\dfrac{1}{2}\cos^2\sigma \\ \bar{x}-i\bar{y}=x'-iy'+\cos^2\sigma(x'+iy')-\dfrac{3}{4}\cos^4\sigma \\ \bar{z}=\dfrac{z'}{\operatorname{sen}\sigma}. \end{cases}
$$

Queste formole definiscono un'omografia, che cangia la quadrica Q

$$
(Q)\qquad (\bar{x}+i\bar{y})^2+\bar{z}^2-(\bar{x}-i\bar{y})=0
$$

nella quadrica confocale Q'; essa rappresenta precisamente *l'affinità d'Ivory* fra le due quadriche. E invero si scrivano le (59) risolute

$$
(59^*)\qquad \begin{cases} x'+iy'=\bar{x}+i\bar{y}+\dfrac{1}{2}\cos^2\sigma \\ x'-iy'=\bar{x}-i\bar{y}-\cos^2\sigma(\bar{x}+i\bar{y})+\dfrac{1}{4}\cos^4\sigma \\ z'=\bar{z}\operatorname{sen}\sigma. \end{cases}
$$

Se, tenendo fisse $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$, si fa variare σ il punto (x',y',z') descrive infatti una traiettoria ortogonale del sistema confocale (Q), poichè calcolando dalle (59)

$$
\frac{dx'}{d\sigma},\ \frac{dy'}{d\sigma},\ \frac{dz'}{d\sigma},
$$

si trovano subito proporzionali ai coseni di direzione della normale alla quadrica Q'.

Concludiamo che le trasformazioni date dalle formole (56) per le deformate S_0 del paraboloide (48) non sono altro appunto che le trasformazioni B_k della teoria generale.

§ 103.

Quadrica Q osculante l'assoluto e famiglie pseudosferiche di Lamé.

Passiamo ora alle quadriche *a centro* tangenti all'assoluto e trattiamo in primo luogo di quella singolare quadrica Q *osculante* l'assoluto, che già incontrammo alla fine del vol. II. Le sue deformate reali si ottengono dalle famiglie (S) di Lamé costituite di superficie S a curvatura costante, ma variabile dall'una all'altra superficie della famiglia, colla

notevole costruzione seguente (l. c. pag. 568): *nei punti di una di queste superficie* S *si considerino i piani osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia* (S); *la superficie* S_0 *inviluppo di questi piani ha un elemento lineare che dipende solo dalla curvatura* K *di* S *ed appartiene alla quadrica* Q *osculante l'assoluto di equazione*

$$
y^2+z^2+(x-y+iz)^2=\frac{1}{K}.
$$

Se la famiglia di Lamé è costituita di superficie colla *medesima* curvatura costante (sistemi di Weingarten), vale ancora il risultato precedente, ma la superficie S_0 diventa allora una complementare della superficie a curvatura costante ed è applicabile sopra una quadrica Q che *iperoscula* l'assoluto (ha un contatto quadripunto coll'assoluto) (V. più avanti).

Per avere trasformazioni reali B_k di queste superficie S_0 conviene partire anche qui da superficie *pseudosferiche* S.

Sia dunque S una tale superficie pseudosferica (di raggio $=1$), per la quale valgono le formole (44) § 100. Nel sistema triplo ortogonale pseudosferico, di cui S fa parte, consideriamo la distanza normale infinitesima $\varepsilon\psi$ fra la S e la superficie successiva nel sistema. La ψ, come funzione di u,v, soddisfa ad un sistema simultaneo di equazioni del 2.° ordine, il sistema segnato (α) a pag. 566 del vol. II. Introducendo le due nuove funzioni

$$
\lambda=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial u}\ ,\quad \mu=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial v},
$$

questo sistema si scrive sotto la forma lineare

$$
(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu+\cos\theta\,.\,\psi-c\operatorname{sen}\theta\ ,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\ ,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}=\cos\theta\,.\,\lambda \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu\ ,\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda+\operatorname{sen}\theta\,.\,\psi+c\cos\theta\ ,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v}=\operatorname{sen}\theta\,.\,\mu\,, \end{cases}
$$

dove c è una costante, che è nulla soltanto per i sistemi di Weingarten, mentre nel caso generale, che vogliamo ora considerare, alterando ψ,λ,μ di un fattor costante, si può dare a c un valore fisso qualunque e noi prenderemo senz'altro

$$
c=1.
$$

I piani osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia (S) nei punti di S non sono altro che i piani normali alle *linee di livello* $\psi=$cost.^{te}

di S. I coseni di direzione della tangente a queste linee sono

$$X_0=\frac{\mu X_1-\lambda X_2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\ ,\quad Y_0=\frac{\mu Y_1-\lambda Y_2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\ ,\quad Z_0=\frac{\mu Z_1-\lambda Z_2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \tag{61}$$

e questi sono altresì i coseni di direzione della normale alla superficie S_0. Indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto M_0 di S_0, corrispondente al punto $M\equiv(x, y, z)$ di S, si trova subito

$$\bar{x}_0=x-\frac{1}{\psi}(\lambda X_1+\mu X_2+X_3)\ \text{ecc.}, \tag{62}$$

onde derivando abbiamo

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial u}&=\frac{1}{\psi^2}\Big\{(\lambda X_1+\mu X_2)\cos\theta\,.\,\lambda+(\psi\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\lambda X_3\Big\}\\ \frac{\partial x_0}{\partial v}&=\frac{1}{\psi^2}\Big\{(\lambda X_1+\mu X_2)\operatorname{sen}\theta\,.\,\mu+(-\psi\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\mu X_3\Big\}.\end{aligned}\right. \tag{63}$$

Si osservi che, in forza delle (60),

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\operatorname{sen}\theta)=-\frac{\partial}{\partial u}(\mu\cos\theta),$$

e si introduca una quarta funzione w, determinata a meno di una costante additiva, dalle formole

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\,.\,\lambda\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=-\cos\theta\,.\,\mu\,. \tag{60*}$$

Si vede allora che l'espressione

$$\lambda^2+\mu^2-\psi^2+2w$$

è una costante onde, scegliendo la costante additiva in w, possiamo fare

$$\lambda^2+\mu^2=\psi^2-2w. \tag{64}$$

Ora, scrivendo le (63) sotto la forma

$$dx_0=\frac{1}{\psi^2}\Big\{(\lambda X_1+\mu X_2)\,d\psi+(\psi\,dw+d\psi)X_3\Big\}\ \text{ecc.},$$

ne deduciamo subito per l'elemento lineare di S_0

$$ds_0^2=\frac{(\psi^2+1-2w)\,d\psi^2+2\psi\,d\psi\,dw+\psi^2dw^2}{\psi^4}.$$

Questo appartiene alla quadrica definita dalle formole

$$x=\frac{w-1}{\psi}\ ,\quad y-iz=-\frac{1}{\psi}\ ,\quad y+iz=\frac{w^2+\psi^2}{\psi};$$

essa è la quadrica Q di equazione

$$(x-y+iz)^2+y^2+z^2+1=0$$

ed osculante l'assoluto, come sopra si è detto.

Le formole precedenti sono relative al caso dei sistemi pseudosferici a curvatura variabile; per quelli di Weingarten invece bisogna fare nelle (60) $c=0$, e allora si ha

$$\lambda^2+\mu^2=\psi^2+C \qquad (C\ \text{cost.}^{\text{te}}).$$

Per l'elemento lineare ds_0 il medesimo calcolo dà

$$ds_0^2=\frac{(\psi^2+C)\,d\psi^2+\psi^2dw^2}{\psi^4} \tag{65}$$

e questo appartiene alle complementari delle pseudosferiche (vol. I, pag. 294), come è evidente a priori perchè allora le linee $\psi=$cost.$^{\text{te}}$ sulla S sono circoli geodetici paralleli e precisamente col centro reale a distanza finita, all'infinito (oricicli), ovvero a centro ideale secondo che

$$C<0\ ,\quad C=0\ ,\quad C>0.$$

Ma l'elemento lineare (65) si può anche riguardare come appartenente alla quadrica

$$x=\frac{w}{\psi}\ ,\quad y-iz=\frac{1}{\psi}\ ,\quad y+iz=\frac{C}{\psi}-\frac{w^2+\psi^2}{\psi};$$

questa ha l'equazione

$$x^2+y^2+z^2-C(y-iz)^2+1=0$$

ed iperoscula l'assoluto per $C\neq0$. Se $C=0$ essa diviene la sfera immaginaria.

§ 104.

Trasformazioni B_k relative.

Della famiglia pseudosferica (S) consideriamo un'altra famiglia (S') trasformata di Bäcklund della primitiva per mezzo di una B_σ (vol. II, § 434). In particolare le due superficie pseudosferiche S, S' saranno legate fra loro dalle formole (51), (52), (53) del § 101. Sia $\varepsilon\psi'$ la distanza normale infinitesima della S' dalla successiva, e pongasi

$$\lambda' = \frac{1}{\cos\theta'}\frac{\partial\psi'}{\partial u}\ , \quad \mu' = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\frac{\partial\psi'}{\partial v}\ ,$$

sicchè λ', μ', ψ' sono per la S' le quantità analoghe alle λ, μ, ψ del § precedente per la S. Se si prendono ora le formole effettive della trasformazione di Bäcklund pei sistemi pseudosferici (l. c.), si trova facilmente che λ', μ', ψ' dipendono *linearmente* da λ, μ, ψ colle formole seguenti:

$$\tag{66} \left\{\begin{aligned} \lambda' &= A\lambda + B\mu + \cos\sigma\cos\theta\,.\,\psi - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \\ \mu' &= C\lambda + D\mu + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,.\,\psi + \cos\sigma\cos\theta \\ \psi' &= \cos\sigma\cos\theta'\lambda + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta'\mu + \psi\,. \end{aligned}\right.$$

E del resto facilmente si verifica che questi valori di λ', μ', ψ' soddisfano alle equazioni (60), ove si cangi θ in θ' e si prenda la costante $c' = -\operatorname{sen}\sigma$.

Ciò posto, consideriamo insieme alla superficie S_0 l'altra S'_0, inviluppo dei piani normali alle linee di livello $\psi' = \text{cost.}^{\text{te}}$ sopra S'; per essa avremo le formole analoghe alle (62), che, a causa del valore attuale della costante $c' = -\operatorname{sen}\sigma$, si scriveranno

$$\tag{67} x'_0 = x' - \frac{\lambda'}{\psi'}X'_1 - \frac{\mu'}{\psi'}X'_2 + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\psi'}X'_3\,.$$

Ed ora andiamo anche qui a verificare che: *le due superficie* S_0, S'_0 *sono le due falde focali della congruenza rettilinea* $M_0M'_0$. Per ciò basterà evidentemente dimostrare che si ha

$$\sum X_0(x'_0 - x_0) = 0\ ,$$

che cioè il raggio $M_0M'_0$ tocca S_0 in M_0, chè allora per la medesima ragione toccherà S'_0 in M'_0. Osservando le (61), (62), (67) e le (51) § 101, la relazione da dimostrarsi diventa

$$\sum(\mu X_1 - \lambda X_2)\Big\{\cos\sigma\cos\theta' X_1 + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta' X_2 + \frac{\lambda}{\psi}X_1 + \frac{\mu}{\psi}X_2 + \frac{1}{\psi}X_3 - $$
$$ - \frac{\lambda'}{\psi'}X'_1 - \frac{\mu'}{\psi'}X'_2 + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\psi'}X'_3\Big\} = 0\ ,$$

e facilmente si vede, tenendo conto delle formole precedenti, che essa si riduce ad una identità.

Con un calcolo simile a quello eseguito al § 102 si dimostrerebbe poi: 1.° che applicando la prima falda focale S_0 della congruenza $M_0M'_0$ sulla quadrica Q il luogo dei secondi termini diventa una quadrica omofocale a Q, 2.° che la legge d'applicabilità fra S_0 e S'_0 è data dall'affinità d'Ivory fra le quadriche omofocali Q, Q'.

Possiamo dunque enunciare il risultato seguente: *Se si considerano due famiglie di Lamé di superficie a curvatura costante, trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Bäcklund, e per due superficie corrispondenti* S, S' *si costruiscono le rispettive superficie* S_0, S'_0 *inviluppi dei piani osculatori delle traiettorie ortogonali delle famiglie nei punti di* S, S', *queste due superficie* S_0, S'_0 *sono applicabili sulla quadrica Q osculante l'assoluto e trasformate l'una dell'altra per trasformazione* B_k.

La proprietà vale anche naturalmente nel caso particolare dei sistemi di Weingarten ed assume in questo caso la forma seguente:

Siano S, S' *due superficie pseudosferiche in trasformazione di Bäcklund e si consideri quella speciale applicabilità dell'una sull'altra data dall'affinità d'Ivory (v. § 51 e vol. II pag. 410): se si prendono due fasci di geodetiche corrispondenti sopra* S, S', *e rispetto a questi si costruiscono le superficie complementari* S_0, S'_0, *queste ultime formano le due falde focali di una congruenza* W *e derivano l'una dall'altra per una trasformazione* B_k.

§ 105.

Caso delle quadriche tangenti all'assoluto.

Veniamo in fine a trattare del caso delle deformate delle quadriche a centro di Darboux semplicemente tangenti all'assoluto.

Secondo i risultati esposti nel cap. XX delle lezioni, esse si ottengono nel modo seguente. Si prenda al solito una superficie pseudosferica S e, indicando con γ una costante arbitraria ma $\neq 1$, si consideri il sistema lineare completo nelle quattro funzioni λ, μ, ψ, w

$$\tag{68} \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\mu + (1-\gamma)\cos\theta\,.\,\psi - \gamma\operatorname{sen}\theta\,.\,w\,, \quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\,, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = \cos\theta\,.\,\lambda\,, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\lambda \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\mu\,, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda + (1-\gamma)\operatorname{sen}\theta\,.\,\psi + \gamma\cos\theta\,.\,w\,, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\mu\,, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -\cos\theta\,.\,\mu \end{aligned}\right.$$

coll'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + \gamma w^2 + (\gamma - 1)\psi^2 = C \quad (\text{cost.}^{\text{te}}) . \tag{69}$$

La superficie S_0 inviluppo dei piani normali alle linee $\psi = \text{cost.}^{\text{te}}$ è data da

$$x_0 = x + \frac{1}{(\gamma - 1)\psi}(\lambda X_1 + \mu X_2) + \gamma w X_3 ; \tag{70}$$

essa ha un elemento lineare dipendente soltanto dal segno della costante C nella (69) ed è applicabile sopra una quadrica fissa di Darboux tangente all'assoluto (cf. vol. II § 308).

Ora prendasi una superficie pseudosferica S' trasformata di Bäcklund della S per una B_σ e si consideri per essa il sistema lineare nelle funzioni

$$\lambda', \mu', \psi', w',$$

ottenuto dal sistema (68) cangiandovi soltanto θ in θ'. Si dimostra facilmente che si passa da una quaderna (λ, μ, ψ, w) di soluzioni del primo sistema ad una quaderna di soluzioni pel secondo mediante le formole di sostituzione lineare

$$\left\{\begin{aligned} \lambda' &= A\lambda + B\mu + (1-\gamma)\cos\sigma\cos\theta \, . \, \psi - \gamma\cos\sigma\,\text{sen}\,\theta \, . \, w \\ \mu' &= C\lambda + D\mu + (1-\gamma)\cos\sigma\,\text{sen}\,\theta \, . \, \psi + \gamma\cos\sigma\cos\theta \, . \, w \\ \psi' &= \cos\sigma\cos\theta'\,\lambda + \cos\sigma\,\text{sen}\,\theta'\,\mu + \psi \\ w' &= \cos\sigma\,\text{sen}\,\theta'\,\lambda - \cos\sigma\cos\theta'\,\mu - \text{sen}\,\sigma\, w \, . \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Ed ora, come dalla S abbiamo dedotto la S_0 mediante le formole (70), così dalla S' deduciamo la corrispondente S'_0 mediante le analoghe

$$x'_0 = x' + \frac{1}{(\gamma - 1)\psi'}(\lambda' X'_1 + \mu' X'_2 + \gamma w' X'_3) .$$

Verifichiamo facilmente che S_0, S'_0 sono le due falde focali della congruenza $M_0 M'_0$ che ne unisce i punti corrispondenti.

Basta per ciò, a causa della relazione simmetrica fra S_0 e S'_0, verificare per es. che si ha

$$\sum X_0 (x'_0 - x_0) = 0 ,$$

ossia

$$\sum (\mu X_1 - \lambda X_2)(x'_0 - x_0) = 0 .$$

Introducendo in questa i valori effettivi di x_0, x'_0, e tenendo conto delle relazioni precedenti, si trova invero che questa condizione è identicamente soddisfatta.

Così si ottengono, anche per le deformate S_0 della quadrica Q tangente all'assoluto, delle trasformazioni per congruenze W, che si potrebbe dimostrare col solito procedimento (cf. § 102) appartenere alle trasformazioni generali B_k delle deformate delle quadriche.

Terminiamo il presente volume, tutto dedicato allo studio delle congruenze W colle due falde focali applicabili sulla medesima quadrica, coll'accennare che esistono ancora congruenze W colle due falde focali applicabili sopra quadriche di diversa specie. L'esempio più semplice di tali congruenze è fornito dalle congruenze delle tangenti ad un fascio di geodetiche di una superficie a curvatura costante S. Qui la prima falda è la superficie S stessa applicabile sulla sfera, e la sua complementare S_1 è invece applicabile sulla quadrica Q, considerata alla fine del § 103, iperosculante l'assoluto. Similmente si dimostra senza difficoltà l'esistenza di congruenze W, la cui prima falda è applicabile sopra una qualunque quadrica rotonda, mentre la seconda falda è deformata di una quadrica di Darboux tangente all'assoluto [1]. Ma noi ci contenteremo qui di aver accennato ad un nuovo campo di ricerche che resta ancora da esplorare.

---

[1] Cf. la mia memoria. *Sulla deformazione delle quadriche* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. XXII 1906].

Nota I

Sulle trasformazioni B_k della seconda classe

Le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche rigate sono state distinte in due classi, corrispondenti rispettivamente ai due sistemi di generatrici della quadrica fondamentale [cf. particolarmente pag. 81, 88 e 103]. Da quanto abbiamo detto nei luoghi ora citati risultano in sostanza due diversi sistemi di formole per definire le trasformazioni B_k di ciascuna classe. Nel testo abbiamo fatto uso di uno dei due sistemi di formole; qui vogliamo scrivere anche il secondo per paragonare i due sistemi fra loro e riconoscere come si portano a coincidere. Ci limiteremo al caso delle deformate del paraboloide iperbolico, per l'altro caso delle deformate dell'iperboloide ad una falda valendo considerazioni analoghe.

Riferendoci alle trasformazioni della seconda classe, ricordiamo che esse furono definite (pag. 81) mediante le equazioni differenziali

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V} - \frac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}+\mathrm{D'V}) \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U} - \frac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}+\mathrm{D''V}), \end{aligned}\right.$$

dove le funzioni $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sono date dalle (18) pag. 13, coi segni superiori:

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= 2\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 u^2 - 2\left(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q}\right)\lambda u - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right) \\ \mathrm{V} &= 2\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 v^2 - 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q}\right)\lambda v - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right) \\ \mathrm{W} &= 2\lambda\left[\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda+\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda\right]. \end{aligned}\right.$$

Se si prende per λ una funzione di u, v che soddisfi le equazioni fondamentali (A), la corrispondente superficie trasformata S_1 è data dalle formole

$$(\mathrm{C})\qquad x_1 = x + \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

La seconda maniera di determinare le medesime trasformazioni B_k consiste (cf. § 30 in fine) nel prendere nelle formole (I) pag. 81 $\varepsilon = +1$, come per le trasformazioni B_k della prima classe, assumendo invece nelle (18) pag. 13 per $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ i segni inferiori. Per paragonare i due sistemi di formole e mostrarne l'equivalenza, scriviamo nelle formole corrispondenti alla seconda maniera $\lambda_1, \mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1, \mathrm{W}_1$ al posto di $\lambda, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$; così avremo le equazioni differenziali

$$(\mathrm{A}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda_1}{\partial u} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}_1 + \frac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{DU}_1+\mathrm{D'V}_1) \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial v} &= \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}_1 + \frac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{D'U}_1+\mathrm{D''V}_1), \end{aligned}\right.$$

e per $\mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1, \mathrm{W}_1$ le espressioni

$$(\mathrm{B}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U}_1 &= 2\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda_1^2 u^2 - 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q}\right)\lambda_1 u - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda_1^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right) \\ \mathrm{V}_1 &= 2\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda_1^2 v^2 - 2\left(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q}\right)\lambda_1 v - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda_1^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right) \\ \mathrm{W}_1 &= 2\lambda_1\left[\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda_1-\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda_1\right], \end{aligned}\right.$$

mentre le formole (C) diventano

$$(\mathrm{C}_1)\qquad x_1 = x + \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{W}_1}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{W}_1}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Si riconosce in qual modo si riconduce il sistema delle formole (A), (B), (C) all'altro delle (A_1), (B_1), (C_1), esaminando le formole d'applicabilità (45) pag. 32; queste ci danno λ_1 in funzione di u, v, λ colla formola

$$(1)\qquad \lambda_1 = \frac{\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}}{\mathrm{C}\lambda+\mathrm{D}},$$

dove A, B, C, D hanno i valori seguenti:

$$(2)\quad \begin{cases} A=\sqrt{pq}\,(u-v)-\sqrt{qp'}\,(u+v)\,, & B=\sqrt{pq} \\ C=-\sqrt{pq}\,(4\,uv+k) & , \ D=\sqrt{pq'}\,(u-v)+\sqrt{qp'}\,(u+v)\,. \end{cases}$$

Ed ora, verificando direttamente che, mediante la (1), le (A_1), (B_1), (C_1) si traducono nelle (A), (B), (C), veniamo a riconoscere l'equivalenza dei due sistemi di formole.

Per ciò si osservi in primo luogo che dalle (2) segue l'identità

$$(3)\qquad AD-BC=kH\,.$$

Inoltre, osservando la (1), si trova

$$(4)\quad U_1=-\frac{kH}{(C\lambda+D)^2}\cdot U\,,\ V_1=-\frac{kH}{(C\lambda+D)^2}\cdot V\,,\ W_1=-\frac{kH}{(C\lambda+D)^2}\cdot W\,,$$

onde segue che le (C_1) vengono ad identificarsi colle (C).

Resta a verificare che, soddisfacendo λ alle (A), la funzione λ_1 definita dalla (1) verrà a soddisfare le (A_1). Ma dalle (1), (2) e dalla identità (3) si trae

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial u}=\dfrac{kH}{(C\lambda+D)^2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}+\dfrac{A\lambda+B}{(C\lambda+D)^2}\left[4\sqrt{pq}\,v\lambda-(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\right]+\dfrac{(\sqrt{pq'}-\sqrt{qp'})\lambda}{C\lambda+D} \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial v}=\dfrac{kH}{(C\lambda+D)^2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}+\dfrac{A\lambda+B}{(C\lambda+D)^2}\left[4\sqrt{pq}\,u\lambda+(\sqrt{pq'}-\sqrt{qp'})\right]-\dfrac{(\sqrt{pq'}+\sqrt{qp'})\lambda}{C\lambda+D}\,. \end{cases}$$

Basta ora sostituire questi valori nelle (A_1), avendo riguardo alle (A) ed alle identità (4), e si vede che le (A_1) riescono identicamente soddisfatte, ciò che dà la verifica richiesta.

NOTA II

Sopra un caso limite delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche

§ 1.

Considerazioni generali.

Nella teoria delle trasformazioni B_k per le superficie applicabili sopra una quadrica, esposta in questo libro, si è sempre supposta la quadrica fondamentale Q non degenere. Mi propongo di dimostrare nella presente nota che tutte le proprietà essenziali di queste trasformazioni si conservano ancora nel caso limite in cui la quadrica Q diventa una delle quadriche singolari nella schiera confocale, degenerando, come inviluppo, in una delle coniche focali, le cui tangenti vengono a rappresentare i due sistemi (coincidenti) di generatrici.

Il teorema fondamentale B § 4 (pag. 10) continua invero a sussistere, convenientemente interpretato, in questo caso limite e dà luogo a trasformazioni di quella classe di curve che si ottengono dalle coniche ordinarie, riguardando queste come curve flessibili ed inestendibili, e torcendo comunque la curva senza alterarne la flessione in ciascun punto. Indicheremo per brevità le curve così ottenute col nome di *coniche distorte*, riguardandole come deformate delle coniche, od applicabili sopra queste. Il più semplice esempio di curve di questa classe si ha nelle deformate del circolo, cioè nelle curve a flessione costante (circoli storti secondo Cesaro).

Supposto adunque che nel citato teorema B (pag. 10) la quadrica Q si riduca alla sviluppabile delle tangenti alla conica focale C, vediamo in primo luogo cosa debba intendersi per una rigata R applicabile sopra Q *in guisa che le generatrici si corrispondano.* La R sarà essa stessa una sviluppabile ed il suo spigolo di regresso Γ sarà una conica distorta deformata di C, nel senso sopra stabilito [1]).

Nel rotolamento di Q sopra R, la conica C *rotola* sulla sua deformata Γ in guisa che il piano di C si porta successivamente a coincidere coi piani osculatori di Γ. Consideriamo ora una quadrica Q' del sistema confocale (avente dunque C per conica focale) e sia C' la conica, confocale a C, sezione principale di Q' nel piano di C.

Questa conica C', trascinata nel rotolamento, descrive una superficie modanata, che indicheremo con Σ, inviluppata lungo le coniche C' dalle varie posizioni della quadrica Q'. Le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) di Q' descrivono una congruenza, per la quale le sviluppabili di un sistema hanno gli spigoli di regresso Γ' sulla superficie modanata Σ, e sono quelle curve che seguono, in ogni loro punto, la direzione di quella generatrice di Q' che vi passa. Se il teorema B rimane vero anche al limite, come si è asserito, queste sviluppabili cogli spigoli di regresso Γ' saranno distendibili sopra Q, le generatrici trasformandosi nelle tangenti della conica C; queste curve Γ' saranno dunque coniche distorte deformate della fondamentale C, come Γ.

Avremo dunque il seguente teorema: *Se la quadrica Q' viene trascinata da una sua conica focale* C *nel rotolamento di questa curva sopra una sua deformata* Γ, *le rette (dell'uno o dell'altro sistema) di Q' generano una congruenza, le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso altrettante nuove coniche distorte* Γ' *deformate della medesima* C.

Dimostreremo appunto in questa nota il teorema ora enunciato, col quale le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche si cangiano, come si era detto, in questo caso limite, in trasformazioni delle coniche distorte.

Le formole date nel libro pel caso di una quadrica non degenere male si presterebbero al nostro scopo attuale, e converrebbe anzitutto cangiare tutte queste formole da coordinate di punti in coordinate di piani. Ma, poichè l'attuale questione appartiene alla teoria delle curve ed è di natura più elementare, gioverà meglio procedere per via diretta, nel modo che andiamo ora a descrivere in generale.

Consideriamo una deformata qualunque Γ della conica fondamentale

[1]) In generale se una sviluppabile si deforma, conservando rettilinee le generatrici, il suo spigolo di regresso serba in ogni punto invariata la flessione, cangiando la torsione.

C, e riteniamo per questa curva Γ le solite notazioni del Cap. I delle Lezioni, indicando con u un parametro che fissa la posizione di un punto mobile su Γ. Similmente sulla conica confocale C' prendiamo un secondo parametro v per individuare la posizione di un punto mobile su C'. Quando la conica C, rotolando sopra Γ, viene con essa a contatto in un punto $P\equiv(x,y,z)$, corrispondente al valore u del parametro, le coordinate x', y', z' di un punto qualunque P' di C', corrispondente al valore v del parametro, saranno funzioni di u, v della forma

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x + l\alpha + m\xi \\ y' = y + l\beta + m\eta \\ z' = z + l\gamma + m\zeta. \end{cases}$$

Qui l, m indicano due funzioni di u, v, che restano sempre le stesse comunque si deformi la curva Γ (cf. § 3 pag. 7), e per calcolarne i valori basterà assumere Γ nella forma stessa della conica C.

È chiaro che, se in queste formole (1) lasciamo u, v variabili indipendenti, esse ci daranno la superficie modanata Σ generata dalla conica confocale C', quando C rotola sopra Γ.

Per una posizione qualunque di C', consideriamo la quadrica Q' che tocca Σ lungo C', e indichiamo con X, Y, Z i coseni di direzione della generatrice considerata di Q', uscente dal punto (u, v). Scriviamo X, Y, Z sotto la forma

$$(2)\qquad \begin{cases} X = L\alpha + M\xi + P\lambda \\ Y = L\beta + M\eta + P\mu \\ Z = L\gamma + M\zeta + P\nu, \end{cases}$$

dove L, M, P sono tre funzioni di u, v, la cui forma è indipendente dalla forma di Γ.

Le formole (1), (2) insieme definiscono la congruenza generata dalle rette di Q' nel rotolamento di C sopra Γ. Noi dobbiamo cercare quelle sviluppabili della congruenza che hanno gli spigoli di regresso Γ' sulla superficie modanata Σ, luogo della conica C', e dimostrare poi che le curve Γ' sono altrettante coniche distorte deformate della conica C.

§ 2.

Caso di una parabola.

Applichiamo dapprima il metodo generale ora descritto al caso che la conica fondamentale C sia una parabola. Supponiamo questa parabola nel piano coordinato xz e scriviamone l'equazione sotto forma normale

(3) $$x^2 = 2pz \qquad (p > 0).$$

L'equazione di un qualunque paraboloide iperbolico Q', avente C per parabola focale, sarà

(4) $$\frac{x^2}{p-k} - \frac{y^2}{k} = 2z - k,$$

il parametro k giacendo nell'intervallo $(0, p)$:

$$0 < k < p.$$

Assumiamo a parametro u di un punto mobile sulla parabola C quello definito dalle formole

(5) $$x = \sqrt{p}\,.\,u \ , \ y = 0 \ , \ z = \frac{u^2}{2}.$$

La parabola confocale C', sezione principale del paraboloide Q' nel piano xz, avrà l'equazione

(3') $$\frac{x'^2}{p'} = 2z' - k$$

con

$$p' = p - k.$$

Il parametro v di un punto mobile su C' sarà quello definito dalle formole analoghe alle (5)

(5') $$x' = \sqrt{p'}\,.\,v \ , \ y' = 0 \ , \ z' = \frac{v^2+k}{2}:$$

E qui notiamo che i punti delle due parabole confocali C, C', corrispondenti ad un medesimo valore del parametro $(u = v)$, si corrispondono altresì *nell'affinità d'Ivory*, secondo le formole

$$x' = \sqrt{\frac{p'}{p}}\,.\,x \ , \ z' = z + \frac{k}{2}.$$

Per l'elemento d'arco ds della parabola C abbiamo

(6) $$ds = \mathrm{R}\,du,$$

avendo posto

(6*) $$\mathrm{R} = \sqrt{u^2 + p},$$

e per il raggio ρ di prima curvatura si trova

(7) $$\rho = \frac{\mathrm{R}^3}{\sqrt{p}}.$$

Consideriamo ora una qualunque deformata Γ della parabola, che risulterà intrinsecamente definita quando alla espressione (7) del suo raggio di curvatura si aggiunga quella del suo raggio T di seconda curvatura

$$\mathrm{T} = \varphi(u).$$

La forma della funzione (arbitraria) $\varphi(u)$ fissa la parabola distorta Γ che si considera.

Secondo le osservazioni generali al § 1, cerchiamo ora le espressioni delle l, m nelle formole (1), in funzione di u, v. Quando la curva Γ assume la forma stessa della parabola C, i valori di x, y, z ; x', y', z' sono quelli dati dalle (5), (5'), e pei coseni di direzione del triedro principale della curva si ha

(8) $$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{p}}{\mathrm{R}} \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = \dfrac{u}{\mathrm{R}} \\ \xi = -\dfrac{u}{\mathrm{R}} \ , \ \eta = 0 \ , \ \zeta = \dfrac{\sqrt{p}}{\mathrm{R}} \\ \lambda = 0 \ , \ \mu = -1 \ , \ \nu = 0. \end{cases}$$

Ora dalle (1) si ha

$$\begin{cases} l = (x'-x)\alpha + (y'-y)\beta + (z'-z)\gamma \\ m = (x'-x)\xi + (y'-y)\eta + (z'-z)\zeta, \end{cases}$$

e quindi per l, m le espressioni effettive seguenti:

(9) $$\begin{cases} l = \dfrac{\sqrt{p}\,(v\sqrt{p'} - u\sqrt{p}) + \dfrac{u}{2}(v^2 - u^2 + k)}{\mathrm{R}} \\ m = \dfrac{\dfrac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - \sqrt{p'}\,.\,uv}{\mathrm{R}}. \end{cases}$$

Per calcolare le espressioni di L, M, P nelle (2) cominciamo dall'osservare che le equazioni dei due sistemi di generatrici sul paraboloide

Q' sono

$$
(10)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{p'}}{v}\left(\lambda - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{p'}}{2}\, v \\[2ex] y = \pm\, \dfrac{\sqrt{k}}{v}\left(z - \dfrac{k}{2}\right) \mp \dfrac{\sqrt{k}}{2}\, v\,, \end{cases}
$$

i segni superiori valendo per un sistema, gli inferiori per l'altro. Si passa dall'uno all'altro caso mutando il segno di $\sqrt{k}$, e perciò noi scriveremo le formole seguenti soltanto per i segni superiori.

Quando la curva Γ coincide con C, i coseni di direzione X, Y, Z sono per le (10)

$$
(10^*)\qquad X = \frac{\sqrt{p'}}{R'}\,,\quad Y = \frac{\sqrt{k}}{R'}\,,\quad Z = \frac{v}{R'}\,,
$$

dove, conformemente alla (6^*), si è posto

$$
(11)\qquad R' = \sqrt{v^2 + p}\,.
$$

Dopo ciò si hanno subito le espressioni di L, M, P dalle formole

$$
\begin{cases} L = X\alpha + Y\xi + Z\lambda \\ M = X\beta + Y\eta + Z\mu \\ P = X\gamma + Y\zeta + Z\nu\,, \end{cases}
$$

osservando le (8) e (10^*), e si ha così:

$$
(12)\qquad L = \frac{\sqrt{pp'} + uv}{RR'}\,,\quad M = \frac{v\sqrt{p} - u\sqrt{p'}}{RR'}\,,\quad P = -\frac{\sqrt{k}}{R'}\,.
$$

Ottenute così le espressioni (9) di l, m e le (12) per L, M, P, osserviamo che sussistono le formole:

$$
(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u} - \dfrac{Rm}{\rho} + R = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{Rl}{\rho} = 0\,; \end{cases}
$$

queste si constatano subito col calcolo diretto, ma risultano anche *a priori* osservando che, quando Γ coincide con C, le funzioni

$$
x + l\alpha + m\xi\,,\quad y + l\beta + m\eta\,,\quad z + l\gamma + m\zeta
$$

sono indipendenti da u,

Abbiamo inoltre le altre

$$
(14)\qquad \frac{\partial l}{\partial v} = R'L\,,\quad \frac{\partial m}{\partial v} = R'M\,.
$$

Ciò premesso, facciamo percorrere, nelle formole (1)

$$
x' = x + l\alpha + m\xi \text{ ecc.},
$$

al punto (x, y, z) la deformata Γ della parabola C, ponendo qui per l, m i valori (9). Le (1) ci daranno così la superficie modanata Σ descritta dalla parabola confocale C', che accompagna la parabola C nel suo rotolamento su Γ.

Derivando ora le (1) rapporto ad u, v, ricordando le formole di Frenet, ed osservando le (6), (13), (14), troviamo

$$
(15)\qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = -\frac{Rm}{T}\lambda\,,\quad \frac{\partial x'}{\partial v} = R'(L\alpha + M\xi)\,,
$$

colle analoghe per y', z'. Per l'elemento lineare ds' della superficie modanata Σ abbiamo quindi

$$
ds'^2 = \frac{R^2 m^2}{T^2} du^2 + R'^2 (L^2 + M^2)\, dv^2\,.
$$

Ma poichè

$$
L^2 + M^2 = 1 - P^2\,,
$$

si ha

$$
R'^2 (L^2 + M^2) = R'^2 - k\,,
$$

e quindi

$$
(16)\qquad ds'^2 = \frac{R^2 m^2}{T^2} du^2 + (R'^2 - k)\, dv^2\,.
$$

Cerchiamo ora l'equazione differenziale delle curve Γ' inviluppate, sulla superficie Σ, dalle rette coi coseni di direzione X, Y, Z. Spostandosi lungo una curva Γ', si deve avere

$$
dx' : dy' : dz' = X : Y : Z
$$

e per ciò

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} + \dfrac{\partial x'}{\partial v}\dfrac{dv}{du} = H(L\alpha + M\xi + P\lambda) \\[2ex] \dfrac{\partial y'}{\partial u} + \dfrac{\partial y'}{\partial v}\dfrac{dv}{du} = H(L\beta + M\eta + P\mu) \\[2ex] \dfrac{\partial z'}{\partial u} + \dfrac{\partial z'}{\partial v}\dfrac{dv}{du} = H(L\gamma + M\zeta + P\nu)\,, \end{cases}
$$

dove H indica un fattore di proporzionalità. Osservando le (15), abbiamo

$$R'\frac{dv}{du}=H\,,\quad -\frac{R\,m}{T}=H\,P=-\frac{\sqrt{k}}{R'}H\,,$$

e quindi, eliminando H, l'equazione differenziale cercata:

$$\text{(I)}\qquad \frac{dv}{du}=\frac{R\,m}{T\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{p}\,(v^2+u^2+k)-2\sqrt{p}\,u\,v}{2\,T\sqrt{k}}\,.$$

Come si vede, questa è un' equazione del tipo di Riccati per la funzione incognita v di u. Le curve Γ' definite da questa equazione differenziale si diranno le curve trasformate di Γ per mezzo della B_k e dimostreremo nei prossimi paragrafi che esse sono altrettante parabole distorte, deformate della fondamentale C.

La superficie modanata Σ contiene inoltre un secondo sistema di tali parabole distorte Γ', la cui equazione differenziale si ottiene semplicemente dalla (I) cangiando $\sqrt{k}$ in $-\sqrt{k}$, cioè mutando il segno del secondo membro. Esse corrispondono al secondo sistema di generatrici del paraboloide Q'.

§ 3.

Proprietà delle curve trasformate Γ'.

Una prima conseguenza che si trae dall'avere l'equazione differenziale (I) la forma di Riccati si ha nel teorema:

Sulla superficie modanata Σ le ∞^1 parabole distorte Γ' trasformate di Γ per una B_k segano projettivamente le coniche C', che sono i profili di Σ.

Una seconda osservazione è da farsi sulla (I). Se in luogo di fissare la forma della funzione T (u), diamo invece arbitrariamente v in funzione di u, ne risulterà determinata univocamente ed in termini finiti T; verrà cioè fissata una determinata configurazione della parabola distorta Γ. L' interpretazione geometrica si ha evidentemente nel teorema (cf. pag. 22):

Si stabilisca una corrispondenza qualunque (continua) di punto a punto fra le due parabole confocali C, C' e si considerino i segmenti FF' congiungenti le coppie di punti corrispondenti, come invariabilmente legati alla parabola nelle sue deformazioni per torsione. Esiste allora una ed una sola deformazione di C in una parabola distorta Γ, tale che i termini F' dei segmenti hanno per luogo, dopo la deformazione, una seconda parabola distorta Γ', applicabile sopra C, e trasformata di Γ per una B_k.

Procediamo ora alle verifiche delle proprietà enunciate per le curve trasformate Γ'. In primo luogo l'elemento lineare ds' delle Γ' sarà dato dalla (16), ove per du si ponga il suo valore

$$du=\frac{T\sqrt{k}}{R\,m}\,dv$$

tratto dalla (I); risulta così

$$ds'=R'\,dv=\sqrt{v^2+p}\,.\,dv\,.$$

Questa formola, paragonata colla (6)

$$ds=\sqrt{u^2+p}\,du\,,$$

dimostra che se si fa corrispondere ad ogni punto di Γ' col valore v del parametro v quel punto di Γ ove il valore del parametro u è il medesimo, le due curve si corrispondono *per archi eguali*. E si osservi che, per l'osservazione fatta al § 1 di questa nota, questa legge di corrispondenza fra i punti di Γ, Γ' è data semplicemente dalla affinità d'Ivory fra le due parabole confocali C, C'.

Ed ora, per dimostrare che Γ' è una parabola distorta deformata di C, basterà provare che il suo raggio ρ' di prima curvatura è dato dalla formola (7) stessa, cangiato u in v, cioè da

$$\text{(17)}\qquad \rho'=\frac{R'^3}{\sqrt{p}}\,.$$

A tale scopo calcoleremo gli elementi relativi alla curva trasformata Γ', che indicheremo cogli accenti. In primo luogo, pei coseni di direzione α', β', γ' della tangente avremo

$$\alpha'=\frac{dx'}{ds'}=\frac{1}{R'\,dv}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\,du+\frac{\partial x'}{\partial v}\,dv\right)\ \text{ecc.}\,,$$

e quindi, per le (15) e per la (I),

$$\text{(18)}\qquad \alpha'=L\alpha+M\xi+P\lambda\,.$$

Differenziando nuovamente colle formole di Frenet, e ricordando che

$$ds'=R'\,dv\,,\quad ds=R\,du\,,$$

viene

$$\frac{R'}{\rho'}\,\xi'=\frac{\partial}{\partial u}\left[L\alpha+M\xi+P\lambda\right].\ \frac{du}{dv}+\frac{\partial L}{\partial v}\,\alpha+\frac{\partial M}{\partial v}\,\xi+\frac{\partial P}{\partial v}\,\lambda\,,$$

cioè per la (I)

$$\frac{R'}{\rho'}\xi' = \frac{T\sqrt{k}}{Rm} \cdot \frac{\partial}{\partial u}[L\alpha + M\xi + P\lambda] + \frac{\partial L}{\partial v}\alpha + \frac{\partial M}{\partial v}\xi + \frac{\partial P}{\partial v}\lambda .$$

Se si eseguiscono le derivazioni, avendo riguardo alle identità

$$(19) \qquad \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{RM}{\rho}, \quad \frac{\partial M}{\partial u} = -\frac{RL}{\rho},$$

si ottiene

$$(20) \qquad \frac{R'}{\rho'}\xi' = \frac{\partial L}{\partial v}\alpha + \left(\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\sqrt{k} \, . \, P}{m}\right)\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\sqrt{k}M}{m}\right)\lambda$$

colle analoghe per η', ζ'.

Quadrando e sommando, abbiamo

$$\frac{R'^2}{\rho'^2} = \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\sqrt{k}P}{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\sqrt{k}M}{m}\right)^2,$$

e la formola (17) da dimostrarsi si traduce nella seguente

$$(21) \qquad \frac{p}{R'^4} = \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{k}}{m}\left(P\frac{\partial M}{\partial v} - M\frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{k(P^2+M^2)}{m^2}.$$

Ora dalle (12) si ricava

$$(22) \qquad \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\sqrt{p}(u\sqrt{p} - v\sqrt{p'})}{RR'^3}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{p\sqrt{p} + \sqrt{p'} \, . \, uv}{RR'^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{v\sqrt{k}}{R'^3},$$

da cui

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 = \frac{p}{R'^4} - \frac{kv^2}{R'^6} = \frac{p}{R'^4} - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2.$$

L'identità (21) da dimostrarsi resta così

$$(21^*) \qquad \frac{2\sqrt{k}}{m}\left(P\frac{\partial M}{\partial v} - M\frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{k(P^2+M^2)}{m^2} = 0;$$

e siccome si ha

$$P\frac{\partial M}{\partial v} - M\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\sqrt{kp}}{RR'^2}$$

$$P^2 + M^2 = \frac{p(u^2+v^2+k) - 2\sqrt{pp'}uv}{R^2R'^2} = \frac{2\sqrt{p} \, . \, Rm}{R^2R'^2},$$

la (21^*) è in effetto identicamente soddisfatta c. d. d.

Ne concludiamo che in effetto: *Le curve* Γ' *trasformate della parabola distorta* Γ *per una* B_k *sono altrettante parabole distorte deformate della primitiva* C.

§ 4.

Relazione reciproca fra Γ, Γ'.

Un'altra proprietà essenziale che dobbiamo stabilire è questa che: *le curve* Γ, Γ' *stanno fra loro in relazione reciproca, e cioè la* Γ *proviene dalla* Γ' *per una trasformazione* B_k, *precisamente come* Γ' *da* Γ.

Basterà per ciò continuare il calcolo degli elementi relativi alla curva trasformata Γ', ciò che in particolare ci farà conoscere l'espressione della sua torsione $\frac{1}{T'}$.

Cominciamo dal far vedere che, insieme alle formole

$$x' - x = l\alpha + m\xi,$$

sussistono le analoghe

$$x - x' = l'\alpha' + m'\xi',$$

dove l', m' indicano i valori stessi (9) di l, m, ove si scambi u con v. Se si confrontano le formole precedenti, avendo riguardo alle (17), (18), (20), si hanno per l', m' le tre equazioni lineari

$$(23) \qquad \left\{\begin{aligned} & l'L + m'\frac{R'^2}{\sqrt{p}}\frac{\partial L}{\partial v} = -l \\ & l'M + m'\frac{R'^2}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\sqrt{k}P}{m}\right) = -m \\ & l'P + m'\frac{R'^2}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\sqrt{k}\,M}{m}\right) = 0 . \end{aligned}\right.$$

Dall'ultima di queste si trae

$$\left\{\begin{aligned} & \Omega l' = \frac{v}{2}(u^2 - v^2 + k) + \sqrt{p}(u\sqrt{p'} - v\sqrt{p}) \\ & \Omega m' = \frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - \sqrt{p'}uv , \end{aligned}\right.$$

indicando con Ω un fattore di proporzionalità. Sostituendo nelle prime due (23), si trova *concordemente* $\Omega = R'$, cosicchè i seguenti valori di l', m':

$$\left\{\begin{aligned} l' &= \frac{\sqrt{p}\,(u\sqrt{p'} - v\sqrt{p}) + \frac{u}{2}(v^2 - u^2 + k)}{R'} \\ m' &= \frac{\frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - \sqrt{p'}\,uv}{R'} \end{aligned}\right.$$

soddisfano in effetto alle (22); essi risultano appunto dai valori (9) di l, m per lo scambio di u con v.

Da quanto abbiamo dimostrato fin qui risulta intanto che ogni segmento MM' che unisce due punti corrispondenti

$$M \equiv (x, y, z), \quad M' \equiv (x', y', z')$$

di Γ, Γ' giace ad un tempo nel piano osculatore di Γ in M e nel piano osculatore di Γ' in M', onde le due parabole distorte Γ, Γ' sono asintotiche della rigata luogo delle rette MM' [1]).

Ma, proseguendo nel calcolo degli altri elementi della curva trasformata Γ', troviamo facilmente i valori di λ', μ', ν' da quelli già calcolati per $\alpha', \beta', \gamma'; \xi', \eta', \zeta'$

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= L\alpha + M\xi + P\lambda \\ \xi' &= \frac{R'^2}{\sqrt{p}}\left[\frac{\partial L}{\partial v}\alpha + \left(\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\sqrt{k}\,P}{m}\right)\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\sqrt{p}\,M}{m}\right)\lambda\right] \end{aligned}\right.$$

e risultano così le formole

$$(24^*)\qquad \lambda' = -\frac{\sqrt{k}}{R}\alpha + \frac{l\sqrt{k}}{Rm}\xi + \frac{\sqrt{\frac{p'}{2}}(u^2 + v^2 - k) - \sqrt{p}\,uv}{Rm}\,.\,\lambda, \text{ ecc. } ^{2)}$$

Ora, per dedurne il valore della torsione $\frac{1}{T'}$ di Γ', basta differenziare

---

[1]) Secondo le denominazioni introdotte nella mia memoria: *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXV, 1908), le due curve Γ, Γ' sono da dirsi trasformate asintotiche l'una dell'altra.

[2]) Queste possono anche dedursi dalle due equazioni

$$\lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma' = 0$$
$$\lambda'(l\alpha + m\xi) + \mu'(l\beta + m\eta) + \nu'(l\gamma + m\zeta) = 0\,.$$

dall'una e dall'altra parte le (24*), osservando che

$$d\lambda' = \frac{R'}{T'}\xi'\,dv\,.$$

Sostituendo qui per ξ' il valore (24_2) e paragonando nei due membri il coefficiente di α, si ha

$$\frac{1}{T'}\frac{R'^3}{\sqrt{p}}\frac{\partial L}{\partial v}dv = \left(\frac{u\sqrt{k}}{R^3} - \frac{l\sqrt{k}}{Rm\,.\,\rho}\right)du\,,$$

cioè per la (I) e per la (22_1)

$$\frac{m}{kTT'}(u\sqrt{p} - v\sqrt{p'}) = \frac{uRm - \sqrt{p}\,.\,Rl}{R^4 m}\,;$$

ma si ha facilmente

$$uRm - \sqrt{p}\,Rl = (u\sqrt{p} - v\sqrt{p'})\,R^2$$

e resta quindi

$$(25)\qquad kTT' = R^2 m^2 = \left[\frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - \sqrt{p'}\,uv\right]^2.$$

Questa ci dà adunque il valore cercato della torsione della curva trasformata

$$\frac{1}{T'} = \frac{kT}{R^2 m^2}\,.$$

Ed ora si vede che l'equazione differenziale (I)

$$\frac{dv}{du} = \frac{Rm}{T\sqrt{k}}$$

può anche scriversi

$$\frac{du}{dv} = \frac{R'm'}{T'\sqrt{k}}\,,$$

che è l'equazione differenziale stessa scambiato u con v. La simmetria delle formole così stabilite dimostra appunto che le due curve Γ, Γ' stanno fra loro nella relazione reciproca che abbiamo enunciato al principio del paragrafo.

§ 5.

Le deformate della ellisse.

Prendiamo ora per conica fondamentale C la ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a \geq b)\,,$$

e consideriamo l'ellisse confocale minore C' di equazione

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1,$$

ove

$$a'=\sqrt{a^2-k}\ ,\ b'=\sqrt{b^2-k}$$
$$0<k<b^2.$$

Per quadrica Q' prendiamo l'iperboloide rigato

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{k}=1,$$

avente C' per ellisse di gola, e C per ellisse focale.

Per determinare rispettivamente un punto mobile sulle ellissi C, C' prendiamo i parametri u, v definiti dalle formole

$$\begin{cases} x=a\cos u\ ,\ \ y=b\operatorname{sen} u \\ x'=a'\cos v\ ,\ \ y'=b'\operatorname{sen} v, \end{cases}$$

ed osserviamo anche qui che i punti di C, C', corrispondenti ad un medesimo valore del parametro $(u=v)$, si corrispondono nella affinità d' Ivory.

Ed ora, procedendo in modo affatto simile a quello tenuto al § 2 per la parabola, troviamo in primo luogo per l'elemento d'arco di C

$$ds=R\,du,\quad \text{con}\quad R=\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u+b^2\cos^2 u}, \tag{26}$$

e per il raggio ρ di prima curvatura di C

$$\rho=\frac{R^3}{ab}. \tag{27}$$

I valori delle funzioni l, m ; L, M, P nelle (1), (2) risultano qui dati dalle formole

$$\begin{cases} l=\dfrac{(a^2-b^2)\operatorname{sen} u\cos u-aa'\operatorname{sen} u\cos v+bb'\cos u\operatorname{sen} v}{R} \\ m=\dfrac{ab-ab'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v-ba'\cos u\cos v}{R} \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} L=\dfrac{aa'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v+bb'\cos u\cos v}{RR'} \\ M=\dfrac{ba'\cos u\operatorname{sen} v-ab'\operatorname{sen} u\cos v}{RR'} \\ P=-\dfrac{\sqrt{k}}{R'}\ ,\ R'=\sqrt{a'^2\operatorname{sen}^2 v+b'^2\cos^2 v} \end{cases} \tag{29}$$ [1].

Sussistono inoltre ancora le medesime equazioni (13), (14) del § 2, e quindi anche le (15). Per l'equazione differenziale delle curve Γ' trasformate di Γ risulta quindi ancora

$$\frac{dv}{du}=\frac{Rm}{T\sqrt{k}},$$

cioè

$$\frac{dv}{du}=\frac{ab-ab'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v-ba'\cos u\cos v}{T\sqrt{k}}. \tag{II}$$

Se al parametro v si sostituisce per incognita l'altro

$$\lambda=\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

abbiamo anche qui un'equazione del tipo di Riccati.

Per verificare che le Γ' sono ellissi distorte deformate di C, cominciamo dall'osservare che l'elemento d'arco di una Γ' è

$$ds'=R'\,dv.$$

Differenziando le formole

$$\alpha'=L\alpha+M\xi+P\lambda,$$

viene come al § 3

$$\frac{R'}{\rho'}\xi'=\frac{\partial L}{\partial v}\alpha+\left(\frac{\partial M}{\partial v}+\frac{\sqrt{k}P}{m}\right)\xi+\left(\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\sqrt{k}M}{m}\right)\lambda,$$

indi

$$\frac{R'^2}{\rho'^2}=\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial M}{\partial v}+\frac{\sqrt{k}P}{m}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\sqrt{k}M}{m}\right)^2,$$

---

[1]) Queste (28), (29) si riferiscono alle generatrici di un sistema di Q'; per aver quelle relative all'altro sistema basta cangiare b' in $-b'$.

e noi proveremo che la Γ' è un'ellisse distorta applicabile su C dimostrando che si ha

$$\rho' = \frac{R'^3}{ab},$$

cioè che sussiste l'identità

$$\frac{a^2b^2}{R'^4} = \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\sqrt{k}\,P}{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\sqrt{k}\,M}{m}\right)^2. \tag{30}$$

Per ciò basta tener conto delle formole

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{ab(ba'\operatorname{sen} u\cos v - ab'\cos u\operatorname{sen} v)}{RR'^3}\\ \frac{\partial M}{\partial v} &= \frac{a^3b'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v + b^3a'\cos u\cos v}{RR'^3}\\ \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\sqrt{k}(a^2-b^2)\operatorname{sen} v\cos v}{R'^3}, \end{aligned}\right.$$

e delle altre conseguenti

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{R'^4} - \frac{k(a^4\operatorname{sen}^2 v + b^4\cos^2 v)}{R'^6}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2 = \frac{k(a^4\operatorname{sen}^2 v + b^4\cos^2 v)}{R'^6} - \frac{k}{R'^2}$$

$$M\frac{\partial P}{\partial v} - P\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\sqrt{k}(ab'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v + ba'\cos u\cos v)}{RR'^3}$$

$$M^2 + P^2 = \frac{(ab'\operatorname{sen} u\cos v - ba'\cos u\operatorname{sen} v)^2 + k(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)}{R^2R'^2}.$$

Sostituendo nella (30), la troviamo identicamente verificata, sicchè in effetto Γ' è un'ellisse distorta deformata di C.

In fine pei coseni di direzione λ', μ', ν' della binormale a Γ' troviamo

$$\lambda' = -\frac{\sqrt{k}}{R}\alpha + \frac{l\sqrt{k}}{Rm}\xi + \frac{a'b' - ab'\cos u\cos v - ba'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}{Rm}\lambda, \tag{31}$$

e si ha inoltre

$$x - x' = l'\alpha' + m'\xi',$$

avendo l', m' i valori che seguono da quelli (29) di l, m per lo scambio di u con v.

Differenziando poi le (31), troviamo che per la torsione $\frac{1}{T'}$ di Γ' vale ancora la formola (25) § 4

$$kTT' = R^2m^2, \tag{32}$$

e per ciò

$$\frac{du}{dv} = \frac{Rm}{T'\sqrt{k}} = \frac{R'm'}{T'\sqrt{k}}.$$

Così adunque, anche per le trasformazioni B_k delle ellissi distorte, le due curve Γ, Γ' sono in relazione invertibile.

§ 6.

Le deformate dell'iperbola.

Prendiamo in fine il caso che la conica fondamentale $\overline{C}$ sia un'iperbola e, per ulteriore confronto colle formole del § precedente relative all'ellisse, scriviamone l'equazione

$$\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2} - \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2} = 1.$$

Consideriamo un iperboloide rigato Q', avente $\overline{C}$ per iperbola focale, e quindi di equazione

$$\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2+\overline{k}} - \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2-\overline{k}} + \frac{\overline{z}^2}{\overline{k}} = 1,$$

ove

$$0 < \overline{k} < \overline{b}^2.$$

Poniamo altresì

$$\overline{a}' = \sqrt{\overline{a}^2+\overline{k}}\,,\quad \overline{b}' = \sqrt{\overline{b}^2-\overline{k}}\,,$$

e dell'iperboloide Q' consideriamo la sezione principale

$$\frac{\overline{x}'^2}{\overline{a}'^2} - \frac{\overline{y}'^2}{\overline{b}'^2} = 1,$$

che è un iperbola $\overline{C}'$ confocale alla fondamentale $\overline{C}$.

Introduciamo ora i parametri $\overline{u}, \overline{v}$ sulle iperbole $\overline{C}, \overline{C}'$ colle formole

$$\overline{x} = \overline{a}\cosh\overline{u}\,,\quad \overline{y} = \overline{b}\operatorname{senh}\overline{u}$$

$$\overline{x}' = \overline{a}'\cosh\overline{v}\,,\quad \overline{y}' = \overline{b}'\operatorname{senh}\overline{v}\,,$$

e procediamo ai medesimi calcoli come nei casi precedenti della parabola e della ellisse. Supponiamo che sia $\overline{\Gamma}$ una qualunque deformata dell'iperbola $\overline{C}$, definita dall'espressione della sua seconda curvatura $\frac{1}{\overline{T}}$ in funzione di $\bar{u}$. Per l'elemento d'arco $\overline{ds}$ e pel raggio $\bar{\rho}$ di prima curvatura abbiamo

$$\overline{ds} = \overline{R}\,d\bar{u}\ ,\ \overline{R} = \sqrt{\bar{a}^2 \operatorname{senh}^2\bar{u} + \bar{b}^2\cosh^2\bar{u}}\ ,\ \rho = \frac{\overline{R}^3}{\bar{a}\bar{b}}.$$

Alle formole (28), (29) del § precedente si sostituiscono qui le analoghe

$$\left\{\begin{aligned} \bar{l} &= \frac{\bar{a}\bar{a}'\operatorname{senh}\bar{u}\cosh\bar{v} + \bar{b}\bar{b}'\cosh\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} - (\bar{a}^2+\bar{b}^2)\operatorname{senh}\bar{u}\cosh\bar{u}}{\overline{R}} \\ \bar{m} &= \frac{\bar{b}\bar{a}'\cosh\bar{u}\cosh\bar{v} - \bar{a}\bar{b}'\operatorname{senh}\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} - \bar{a}\bar{b}}{\overline{R}} \end{aligned}\right.$$

$$\overline{L} = \frac{\bar{a}\bar{a}'\operatorname{senh}\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} + \bar{b}\bar{b}'\cosh\bar{u}\cosh\bar{v}}{\overline{R}'}\ ,\ \overline{M} = \frac{\bar{b}\bar{a}'\cosh\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} - \bar{a}\bar{b}'\operatorname{senh}\bar{u}\cosh\bar{v}}{\overline{R}'}$$

$$\overline{P} = -\frac{\sqrt{\bar{k}}}{\overline{R}'}\ ,\ \overline{R}' = \sqrt{\bar{a}^2\operatorname{senh}^2\bar{v} + \bar{b}^2\cosh^2\bar{v}}.$$

Per l'equazione differenziale delle curve $\overline{\Gamma}'$ trasformate si trova

$$\text{(III)}\qquad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \frac{\overline{R}\bar{m}}{\overline{T}\sqrt{\bar{k}}} = \frac{\bar{b}\bar{a}'\cosh\bar{u}\cosh\bar{v} - \bar{a}\bar{b}'\operatorname{senh}\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} - \bar{a}\bar{b}}{\overline{T}\sqrt{\bar{k}}},$$

che nel parametro

$$\lambda = \operatorname{tangh}\frac{\bar{v}}{2}$$

ha la forma di Riccati.

Si verifica poi, in modo analogo come per l'ellisse al § precedente, che si ha

$$\overline{ds}' = \overline{R}'\,d\bar{v}\ ,\ \bar{\rho}' = \frac{\overline{R}'^3}{\bar{a}\bar{b}},$$

onde le curve $\overline{\Gamma}'$ sono iperbole distorte deformate dell'iperbola $\overline{C}$.

E si trova ancora che per la torsione $\frac{1}{\overline{T}'}$ delle $\overline{\Gamma}'$ si ha l'equazione, analoga alla (32),

$$\text{(32*)}\qquad \bar{k}\overline{T}\,\overline{T}' = \overline{R}^2\bar{m}^2.$$

In fine si compiono nello stesso modo le altre verifiche che provano trovarsi $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}'$ in relazione invertibile.

§ 7.

Casi particolari.

Fra le trasformazioni B_k delle coniche distorte Γ è notevole la trasformazione *singolare*, che si ottiene quando la conica confocale C' degenera nell'asse focale ricoperto due volte, e la quadrica rigata Q' si riduce quindi alla totalità delle tangenti alla conica focale $\overline{C}$ di C. La trasformazione singolare corrisponde al valore $k=p$ del parametro, nel caso parabolico, ed al valore $k=b^2$ nel caso ellittico od iperbolico.

Le equazioni differenziali (I), (II), (III) delle coniche distorte trasformate Γ' diventano allora rispettivamente

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^2+v^2+p}{2T},\ \text{per la parabola}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a(1-e\cos u\cos v)}{T},\ \text{per l'ellisse}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{a(e\cosh u\cosh v - 1)}{T},\ \text{per l'iperbola,}$$

indicando con e l'eccentricità.

In questo caso la superficie modanata Σ luogo delle Γ' è la sviluppabile generata dall'asse focale di C nel rotolamento su Γ. Lo spigolo di regresso di Σ è quella geodetica della sviluppabile delle tangenti di Γ, sulla quale si distende l'asse focale di C, quando il piano di C si distende sulla detta sviluppabile, applicando C sopra Γ.

Non sarà inutile enunciare esplicitamente la proprietà geometrica corrispondente a questo caso particolare sotto la forma seguente:

Si considerino due coniche $C, \overline{C}$, focali l'una dell'altra, e si faccia rotolare una di esse, per es. C, sopra una conica distorta Γ sua deformata. Le tangenti dell'altra conica focale $\overline{C}$, trascinate nel rotolamento, generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno evidentemente per spigoli di regresso le ∞^1 posizioni occupate da $\overline{C}$; le sviluppabili del secondo sistema hanno per spigoli di regresso Γ' altrettante coniche distorte deformate di C.

Consideriamo ora in particolare il caso in cui la conica fondamentale C sia un circolo di raggio $= a$; l'iperbola focale degenera qui nell'asse del circolo (nella perpendicolare elevata nel centro al piano di C). Ogni deformata Γ del circolo C è allora una curva a flessione costante $\frac{1}{a}$, e quando C rotola su Γ, l'asse di C descrive la sviluppabile polare di Γ. Questa ha per spigolo di regresso la curva Γ' luogo dei centri di curvatura di Γ, che è una curva colla medesima flessione costante $\frac{1}{a}$ ed in relazione involutoria con Γ. La trasformazione singolare B_{a^2} diventa qui adunque quella trasformazione delle curve a flessione costante che già abbiamo considerato al principio delle lezioni (vol. I pag. 35). Del resto le nostre formole generali, essendo ora

$$a = b\,,\ a' = b' = 0\,,\ R = a\,,$$

danno

$$l = 0\,,\ m = a\,,$$

onde

$$x' = x + a\,\xi\,,$$

ciò che conferma quanto ora si è detto. Inoltre la formola (32) si cangia ora nella

$$\frac{1}{TT'} = \frac{1}{a^2} \text{ (cf. vol. I, pag. 35)}.$$

Se per il caso del circolo consideriamo poi anche le altre trasformazioni B_k non singolari, con $k < a^2$, la conica confocale C' diventa un circolo concentrico e minore di raggio $\sqrt{k}$. La superficie modanata Σ è in questo caso la superficie canale di raggio $\sqrt{k}$, che ha per asse la curva Γ_1 luogo dei centri di curvatura di Γ; su questa superficie canale le curve Γ' trasformate, a flessione costante, sono le traiettorie isogonali dei circoli, sotto l'angolo $\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{k}}{a}\right)$. Ricadiamo così in quelle trasformazioni delle curve a flessione costante di cui già abbiamo accennato nel vol. II (pag. 563) delle lezioni.

§ 8.

Ellisse ed iperbola focale come coniugate in deformazione.

Le ricerche precedenti ci hanno dimostrato come le proprietà fondamentali delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche si

conservano al limite per le deformate delle coniche. È interessante osservare ulteriormente come anche le proprietà delle quadriche coniugate in deformazione (cap. V) sussistono ancora per le coniche distorte, traducendosi in proprietà di deformazioni coniugate di due coniche focali l'una dell'altra.

Questo dimostriamo paragonando fra loro le formole stabilite ai §§ 5 e 6 per le ellissi ed iperbole distorte.

Della ellisse

$$\text{C)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

consideriamo l'iperbola focale di semi-assi trasverso ed immaginario

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 - b^2}\,,\ \bar{b} = b\,,$$

e, collocando l'iperbola nel piano stesso della ellisse, scriviamo l'equazione di $\overline{C}$ sotto la forma

$$\overline{\text{C}}) \qquad \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} - \frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2} = 1\,.$$

Colla omografia Ω data dalle seguenti formole

$$(\Omega) \qquad x = \frac{a\bar{a}}{\bar{x}}\,,\ y = \bar{a}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\,,$$

l'ellisse C si cangia appunto nell'iperbola $\overline{C}$, e insieme la schiera omofocale determinata da C nella schiera omofocale di $\overline{C}$. Precisamente l'ellisse confocale C' di equazione

$$\text{C}') \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1\,,$$

con

$$a' = \sqrt{a^2 - k}\,,\ b' = \sqrt{b^2 - k}\ (0 < k < b^2)\,,$$

è cangiata dalla omografia Ω nell'iperbola $\overline{C}'$ confocale a $\overline{C}$

$$\overline{\text{C}}') \qquad \frac{\bar{x}'^2}{\bar{a}'^2} - \frac{\bar{y}'^2}{\bar{b}'^2} = 1\,,$$

con

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{a}'^2 &= \bar{a}^2 + \bar{k} = \frac{a^2\bar{a}^2}{a'^2} \\ \bar{b}'^2 &= \bar{b}^2 - \bar{k} = \frac{a^2 b'^2}{a'^2} \end{aligned}\right.\,,\ \bar{k} = \frac{k\,\bar{a}^2}{a'^2}\,.$$

Si confrontino ora le formole (§ 5)

$$\begin{cases} x = a\cos u \quad & y = b \operatorname{sen} u \\ x' = a'\cos v \quad & y' = b' \operatorname{sen} v \end{cases}$$

colle altre

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{a}\cosh \bar{u}\ , & \bar{y} = \bar{b} \operatorname{senh} \bar{u} \\ \bar{x}' = \bar{a}'\cosh \bar{v}\ , & \bar{y}' = \bar{b}' \operatorname{senh} \bar{v}\ . \end{cases}$$

La corrispondenza data dalla omografia Ω fra i punti delle due coppie di curve si traduce nelle semplici relazioni seguenti fra i respettivi parametri $(u, \bar{u})$, $(v, \bar{v})$

$$(34) \qquad \begin{cases} \cosh \bar{u} = \dfrac{1}{\cos u}\ , & \operatorname{senh} \bar{u} = \operatorname{tg} u \\ \cosh \bar{v} = \dfrac{1}{\cos v}\ , & \operatorname{senh} \bar{v} = \operatorname{tg} v\ . \end{cases}$$

onde segue

$$(35) \qquad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \frac{\cos u}{\cos v}\frac{dv}{du}\ .$$

Confrontiamo ora le due equazioni differenziali (II) e (III) per le trasformazioni B_k e $B_{\bar{k}}$ della ellisse distorta Γ e della iperbola $\overline{\Gamma}$. Esse coincideranno se si può rendere

$$\frac{\bar{b}\,\bar{a}'\cosh\bar{u}\cosh\bar{v} - \bar{a}\,\bar{b}'\operatorname{senh} u \operatorname{senh} v - \bar{a}\,\bar{b}}{\overline{T}\sqrt{\bar{k}}} =$$

$$= \frac{\cos u}{\cos v}\,\frac{ab - ab'\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - ba'\cos u \cos v}{T\sqrt{\bar{k}}}\ ,$$

ciò che per le (33) e (34) si scrive

$$\frac{\dfrac{ab\bar{a}}{a'}\dfrac{1}{\cos u\cos v} - \dfrac{ab'\bar{a}}{a'}\dfrac{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}{\cos u\cos v} - \bar{a}\,b}{\overline{T}.\sqrt{k}\,\dfrac{\bar{a}}{a'}} =$$

$$= \frac{\cos u}{\cos v}\cdot\frac{ab - ab'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v - ba'\cos u\cos v}{T\sqrt{k}}\ .$$

Riducendo, resta la semplice formola

$$(36) \qquad \frac{1}{\overline{T}} = \frac{\cos^2 u}{T}\ .$$

Ponendo fra le torsioni di Γ e di $\overline{\Gamma}$ questa relazione, le equazioni differenziali (II) e (III) per le trasformazioni B_k e $B_{\bar{k}}$ delle coniche distorte Γ e $\overline{\Gamma}$ vengono dunque a coincidere.

Consideriamo ora di più le rispettive curve trasformate Γ' e $\overline{\Gamma}'$ per le cui torsioni $\dfrac{1}{T'}$, $\dfrac{1}{\overline{T}'}$, abbiamo le formole (§§ 5 e 6 formole (32), (32*))

$$\begin{cases} k\,TT' = (ab - ab'\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v - ba'\cos u\cos v)^2 \\ \bar{k}\,\overline{T}\,\overline{T}' = (\bar{b}\,\bar{a}'\cosh\bar{u}\cosh\bar{v} - \bar{a}\,\bar{b}'\operatorname{senh}\bar{u}\operatorname{senh}\bar{v} - \bar{a}\,\bar{b})^2. \end{cases}$$

Di qui, dividendo ed osservando le (33), (34), troviamo

$$\frac{\bar{k}\,\overline{T}\,\overline{T}'}{k\,TT} = \frac{\bar{a}^2}{a'^2}\,\frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v}\ ,$$

cioè

$$\frac{\overline{T}\,\overline{T}'}{TT'} = \frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v}\ ,$$

e dalla relazione (36) segue ora che la medesima relazione sussiste fra le torsioni di Γ' e $\overline{\Gamma}'$, e cioè

$$(36') \qquad \frac{1}{\overline{T}'} = \frac{\cos^2 v}{T'}\ .$$

Mediante la formola (36), ad ogni deformazione della ellisse C in un'ellisse distorta Γ corrisponde una determinata deformazione della iperbola focale $\overline{C}$ in un'iperbola distorta $\overline{\Gamma}$, ed inversamente.

Diremo per ciò che le due coniche distorte Γ, $\overline{\Gamma}$ sono *coniugate in deformazione* ed il passaggio dall'una all'altra curva equivarrà alla trasformazione H per le deformate delle quadriche. Le considerazioni superiori dimostrano poi che ad ogni trasformazione B_k della Γ in una nuova ellisse distorta Γ' corrisponde una trasformazione della coniugata in deformazione $\overline{\Gamma}$ in un'altra iperbola distorta $\overline{\Gamma}'$; *le due curve* Γ', $\overline{\Gamma}'$ *sono nuovamente coniugate in deformazione*, come risulta dalla (36').

Possiamo formulare questi risultati geometricamente come segue:

Siano Γ, Γ' due deformate dell'ellisse C, trasformate l'una dell'altra per una B_k, e consideriamo i segmenti FF' che ne uniscono i punti corrispondenti. Quando la curva Γ si applica sulla ellisse C, seco trasportando i segmenti FF', questi si dispongono coi loro estremi F' sulla ellisse confocale C'. Colla omografia Ω le due ellissi confocali C, C' si trasformano nelle due iperbole confocali $\overline{C}, \overline{C}'$ ed i segmenti FF' si disporranno secondo segmenti corrispondenti $\overline{F}\,\overline{F}'$. Si deformi ora l'iperbola $\overline{C}$ nell'iperbola distorta $\overline{\Gamma}$, coniugata in deformazione di Γ; i segmenti $\overline{F}\,\overline{F}'$, trasportati in questa deformazione, si dispongono coi loro estremi $\overline{F}'$ sulla iperbola distorta $\overline{\Gamma}'$ coniugata in deformazione di Γ'.

Queste proprietà delle deformate della ellisse e della iperbola focale corrispondono perfettamente, come si vede, a quelle delle quadriche coniugate in deformazione.

§ 9.

Teorema di permutabilità.

In fine osserveremo che anche per le trasformazioni B_k delle coniche distorte sussiste un teorema di permutabilità, affatto analogo a quello per le deformate delle quadriche (Cap. IV), sussiste cioè la proposizione seguente: *Se* Γ_1, Γ_2 *sono due coniche distorte, contigue per trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *alla conica distorta* Γ, *esiste una quarta tale conica* Γ' *legata alle medesime* Γ_1, Γ_2 *da trasformazioni* B'_{k_2}, B'_{k_1} *colle medesime costanti* k_1, k_2 *permutate.*

Basterà trovare la formola del teorema di permutabilità relativo per es. alle parabole, chè gli altri casi si tratterebbero in modo analogo.

Nelle formole del § 2 indichiamo con u_1, u_2 i valori del parametro v per le trasformate Γ_1, Γ_2 di Γ; l'equazione differenziale fondamentale (I) ci dà

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{du} = \dfrac{\sqrt{p}\,u^2 - 2\sqrt{p_1}\,u_1 u + \sqrt{p}\,(u_1^2 + k_1)}{2\mathrm{T}\sqrt{k_1}} \\[2ex] \dfrac{du_2}{du} = \dfrac{\sqrt{p}\,u^2 - 2\sqrt{p_2}\,u_2 u + \sqrt{p}\,(u_2^2 + k_2)}{2\mathrm{T}\sqrt{k_2}} \end{cases}$$

$$(p_1 = p - k_1\ ,\ p_2 = p - k_2).$$

Se la quarta parabola distorta Γ' del teorema di permutabilità esiste, dovranno, per le condizioni di questo teorema, sussistere le formole analoghe

$$(37')\qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{du'} = \dfrac{\sqrt{p}\,u'^2 - 2\sqrt{p_2}\,u_1 u' + \sqrt{p}\,(u_1^2 + k_2)}{2\mathrm{T}'\sqrt{k_2}} \\[2ex] \dfrac{du_2}{du'} = \dfrac{\sqrt{p}\,u'^2 - 2\sqrt{p_1}\,u_2 u' + \sqrt{p}\,(u_2^2 + k_1)}{2\mathrm{T}'\sqrt{k_1}} \end{cases}.$$

Paragonando le (37), (37'), si ottiene l'equazione di secondo grado in u':

$$\frac{\sqrt{p}\,u'^2 - 2\sqrt{p_2}\,u_1 u' + \sqrt{p}\,(u_1^2 + k_2)}{\sqrt{p}\,u'^2 - 2\sqrt{p_1}\,u_2 u' + \sqrt{p}\,(u_2^2 + k_1)} = \frac{k_2}{k_1}\,\frac{\sqrt{p}\,u^2 - 2\sqrt{p_1}\,u_1 u + \sqrt{p}\,(u_1^2 + k_1)}{\sqrt{p}\,u^2 - 2\sqrt{p_2}\,u_2 u + \sqrt{p}\,(u_2^2 + k_2)}.$$

Se si indicano con u', u'' le due radici, si trova facilmente che esse sono razionali in u, u_1, u_2 e lineari in u; esse hanno precisamente le espressioni:

$$(38)\qquad u' = \frac{\sqrt{p}\,(u_1\sqrt{k_1} - u_2\sqrt{k_2})\,u + (\sqrt{p_1 k_2} - \sqrt{p_2 k_1})\,(u_1 u_2 + \sqrt{k_1 k_2})}{(\sqrt{p_2 k_1} - \sqrt{p_1 k_2})\,u + \sqrt{p}\,(u_1\sqrt{k_2} - u_2\sqrt{k_1})}$$

$$(38')\qquad u'' = \frac{\sqrt{p}\,(u_1\sqrt{k_1} + u_2\sqrt{k_2})\,u - (\sqrt{p_1 k_2} + \sqrt{p_2 k_1})\,(u_1 u_2 - \sqrt{k_1 k_2})}{(\sqrt{p_2 k_1} + \sqrt{p_1 k_2})\,u - \sqrt{p}\,(u_1\sqrt{k_2} + u_2\sqrt{k_1})},$$

che si deducono l'una dall'altra cangiando il segno di $\sqrt{k_2}$.

Di queste la prima, (38), che per $k_1 = k_2$ si riduce ad u, risolve la questione proposta. Si può verificare invero che questo valore di u' soddisfa alle due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{du'}{du_1} = \dfrac{\sqrt{p}\,(u'^2 + u_1^2 + k_2) - 2\sqrt{p_2}\,u_1 u'}{2\,\mathrm{T}_1\sqrt{k_2}} \\[2ex] \dfrac{du'}{du_2} = \dfrac{\sqrt{p}\,(u'^2 + u_2^2 + k_1) - 2\sqrt{p_1}\,u_2 u'}{2\,\mathrm{T}_2\sqrt{k_1}} \end{cases}$$

e che le due trasformate corrispondenti Γ_1, Γ_2 hanno la medesima torsione $\dfrac{1}{\mathrm{T}}$ e sono quindi congruenti. Ma di più, applicando le formole

$$x' = x + l\alpha + m\xi \text{ ecc.},$$

si vedrebbe che Γ_1, Γ_2 coincidono assolutamente per la loro posizione nello spazio, ciò che dimostra l'enunciato teorema di permutabilità.

FINE.

INDICE

Capitolo V.

Le quadriche coniugate in deformazione e la trasformazione H.

Capitolo VI.

I sistemi coniugati permanenti sulle deformate delle quadriche.

Capitolo VII.

Le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche rotonde e delle quadriche tangenti all'assoluto.

Errata		Corrige
pag. 1	*linea* 7: negativa o positiva	*leggi:* positiva o negativa
» 33	*linea* 7: $\frac{\partial u_1}{\partial c} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2 \cdot \frac{V}{W^2}$	» $\frac{\partial u_1}{\partial c} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2 \frac{U}{W^2}$
» 47	*linea* 8: $\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{c^2} - \frac{z^2_0}{c^2}$	» $\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} - \frac{z^2_0}{c^2}$
» 87	*formola* (10*): M	» M_0
» 160	*formole* (2) *nel penultimo termine di* B *in luogo di* $\frac{k_2}{2}(\sqrt{pq_1} - \sqrt{pq_1})\lambda\lambda_1$	*leggi:* $\frac{k_2}{2}(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\lambda\lambda_1$
	e nel penultimo di C *in luogo di* $-\frac{k_1}{2}(\sqrt{pq_2} - \sqrt{pq_2})\lambda_1\lambda_2$	» $-\frac{k_1}{2}(\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\lambda_1\lambda_2$
» 172	*linea* 20 *in luogo di:* k_1 con k^2	» k_1 con k_2