LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

2 1 e 99
11357

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Terza edizione interamente rifatta

IN DUE VOLUMI

VOLUME I.

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1922

PREFAZIONE

Esaurita la seconda edizione (1902-1909) del presente trattato, in questa terza edizione del libro ho cercato di apportare, nelle singole parti, quelle *modificazioni* e quei perfezionamenti che i più recenti progressi della teoria mi hanno consigliato. Per altro il contenuto essenziale dell' opera è rimasto il medesimo, e sempre limitato alla geometria *metrica* infinitesimale nell' antico senso. Tutte le teorie contenute nei tre volumi della seconda edizione trovarono qui il loro posto in due volumi, con parziali rimaneggiamenti nell' ordine dei capitoli, soppressioni ed aggiunte.

Questo primo volume che ora con molto ritardo esce alla luce (dopo due anni dalla consegna del manoscritto dell' intero libro) riproduce nei primi X capitoli i corrispondenti della seconda edizione, esponendo la teoria generale delle superficie e delle congruenze rettilinee, dal punto di vista metrico infinitesimale.

Segue il Cap. XI colla trattazione delle superficie a linee di curvatura piane e sferiche, indi nei Cap. XII, XIII, senza maggiori sviluppi dalle edizioni anteriori, viene riprodotta la teoria delle superficie d'area minima.

Gli ultimi tre capitoli sono dedicati allo studio delle superficie a curvatura costante. Nel primo di questi (XIV) si tratta, in modo più esteso, della geometria sulle superficie (moltiplicità) pseudosferiche colla interpretazione *non-euclidea*. Gli altri due studiano le effettive forme di queste superficie nell'ordinario spazio con particolare riguardo

alla teoria delle *trasformazioni*. La trasformazione *complementare*, che fornì il punto di partenza per tutta questa teoria, forma oggetto degli ultimi paragrafi del Capitolo XV. Il Capitolo finale (XVI) tratta delle generali trasformazioni di Bäcklund, con ampio sviluppo del *teorema di permutabilità* e delle sue importanti conseguenze. I procedimenti di *integrazione successiva* che ne derivano, per la ricerca delle superficie a curvatura costante, sono tanto più importanti che essi forniscono il primo esempio di metodi, di cui si è dimostrata la fecondità in molti altri campi della geometria infinitesimale e nei campi analitici che trovano in quelli la loro rappresentazione.

Ho aggiunto in fondo al Volume una nota sul metodo del *triedro mobile*, collo scopo di facilitare al lettore il passaggio dalla trattazione della geometria infinitesimale nell' indirizzo adottato nell' opera, che ripete le sue origini dalle *Disquisitiones* di Gauss, all'altra egualmente completa ed ispirata a concetti cinematici, che viene preferita dai geometri Francesi ed è resa ormai classica nelle *Leçons* di Darboux, dove ha trovato il suo assetto definitivo.

Pisa, 1 Novembre 1921.

Capitolo I.

Curve a doppia curvatura

Tangente e piano normale. — Prima curvatura o flessione. - Piano osculatore. — Triedro principale. — Seconda curvatura o torsione. — Formole di Frenet. — Equazioni intrinseche. — Eliche cilindriche. — Superficie inviluppi. - Superficie canali. — Superficie sviluppabili. - Sviluppabile rettificante di una curva. — Sviluppabile polare e suo spigolo di regresso. — Sfera osculatrice. — Evolventi ed evolute. — Trajettorie ortogonali di una semplice infinità di piani. — Trasformazioni di Combescure. — Trajettorie ortogonali di una semplice infinità di sfere. — Curve di Bertrand.

§. 1.

Tangente e piano normale.

Per definire analiticamente una curva C, riferiamola ad un sistema di assi Cartesiani ortogonali O (x, y, z) ed esprimiamo le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla curva in funzione di un parametro u:

$$x = x(u) \ , \ y = y(u) \ , \ z = z(u).$$

Rispetto alle funzioni $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ (che non debbono naturalmente ridursi a tre costanti), diciamo una volta per tutte che *si suppongono finite e continue, insieme almeno alle loro derivate prime, seconde e terze, in tutto l' intervallo per la variabile indipendente u nel quale esse sono definite, fatta astrazione al più da punti speciali.* Ed occorrendo negli ulteriori sviluppi fare uso di derivate di ordine più elevato, si sottintenderà sempre che esse siano pure finite e continue.

Ad ogni valore particolare u_1 attribuito al parametro u, entro l' intervallo considerato, corrisponderà una posizione particolare M_1 del punto M generatore della curva e variando u con continuità, il punto M si muoverà con legge continua nello spazio, descrivendo la curva C. Supporremo poi sempre che il senso secondo cui si muove il punto generatore M quando cresce il parametro u sia preso per senso positivo della curva C, l' opposto come negativo.

Il più delle volte assumeremo per parametro, o variabile ausiliaria u, l'arco s della curva contato a partire da un punto fisso (origine) sulla curva, e nel verso crescente di u. In ogni caso, per definire s in funzione di u, abbiamo la formola

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2},$$

dove il segno del radicale dovrà scegliersi positivo per la convenzione fatta.

In un punto M della curva C consideriamo la tangente, la cui direzione positiva si assume concordante col verso positivo fissato su C. Indicando allora, come faremo costantemente in seguito, con α, β, γ i coseni di direzione positiva della tangente, avremo le formole

$$(1) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

i cui secondi membri possono riguardarsi indifferentemente o come quozienti di differenziali, presi rispetto alla variabile indipendente u, o come derivate di x, y, z rispetto all'arco s.

Il piano normale in M alla tangente dicesi il piano *normale* della curva, e la sua equazione, indicando con X, Y, Z le coordinate correnti, si scrive:

$$(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma = 0.$$

§. 2.

Prima curvatura o flessione.

Dalla deviazione più o meno rapida che il punto, descrivente la curva, subisce dalla direzione rettilinea, noi giudichiamo della maggiore o minore *flessione* della curva stessa. Per precisare questo concetto e renderlo suscettibile di misura, consideriamo un punto M della curva ed un altro punto vicino M_1 della curva stessa; se dividiamo l'angolo piccolissimo $\Delta\varepsilon$ che formano fra loro le direzioni delle due tangenti in M, M_1 per la lunghezza dell'archetto $MM_1 = \Delta s$, il quoziente $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}$ quando M_1 si accosta indefinitamente ad M (cioè al convergere di Δs a zero), converge generalmente verso un limite determinato e finito, e diverso da zero, che si assume come misura della *prima curvatura o flessione* della curva nel punto M. Indicheremo questo limite (il suo valore assoluto) con $\frac{1}{\rho}$, e la sua inversa ρ, interpretata come lunghezza, si dirà il *raggio di prima curvatura*.

Per provare l'esistenza di questo limite, e trovarne in pari tempo l'espressione, facciamo uso delle considerazioni seguenti. Col centro nell'origine e con raggio eguale all'unità descriviamo una sfera, ed intercettiamo colla superficie sferica i raggi condotti parallelamente alle direzioni positive delle successive tangenti della curva C. Il luogo degli estremi di questi raggi si dirà l'*indicatrice sferica* delle tangenti; ad ogni posizione del punto $M \equiv (x, y, z)$ sulla curva C corrisponderà un punto $M' \equiv (x', y', z')$ sull'indicatrice sferica C' delle tangenti, e si avrà evidentemente

$$(2) \qquad x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma.$$

Ora se consideriamo un punto M_1 della curva C vicino ad M, l'angolo $\Delta\varepsilon$ sarà misurato precisamente dall'archetto di cerchio massimo, che sulla sfera rappresentativa unisce i due punti immagini M', M_1'. Trattandosi di calcolare il limite

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right),$$

potremo sostituire a $\Delta\varepsilon$ il corrispondente arco $\Delta s'$ dell'indicatrice, poichè $\lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s'}\right) = 1$. Indicando dunque con ds' l'arco elementare dell'indicatrice sferica, avremo senz'altro

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ds'}{ds},$$

ossia per le (2)

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}.$$

Ove si assuma s per variabile indipendente, questa formola può scriversi per le (1):

$$(3^*) \qquad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} ,$$

gli accenti indicando derivazione rispetto all' arco.

Facciamo la convenzione, da mantenersi sempre nel seguito, che: *la prima curvatura* $\frac{1}{\rho}$ *si misura soltanto in valore assoluto* $\frac{1}{\rho} > 0$, e nelle formule (3), (3*) dovremo sempre scegliere il valore positivo del radicale.

Osserviamo subito che una curva C non può avere *per un tratto* nulla la flessione senza essere, per quel tratto, rettilinea. È infatti da $\frac{1}{\rho} = 0$ segue

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0 , \quad \frac{d\beta}{ds} = 0 , \quad \frac{d\gamma}{ds} = 0 ,$$

cioè α, β, γ costanti, indi

$$x = \alpha s + a , \quad y = \beta s + b , \quad z = \gamma s + c ,$$

con a, b, c costanti, equazioni parametriche di un tratto rettilineo.

Della prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ si possono dare altre definizioni equivalenti, tra le quali la più importante, per future generalizzazioni, è la seguente.

Sulla tangente in M alla curva stacchiamo un tratto rettilineo $M\bar{M}$ eguale in lunghezza all' arco $MM_1 = \Delta s = h$, che riguarderemo come infinitesimo del primo ordine, e indichiamo con d la distanza dei due punti M_1, $\bar{M}$; si ha allora

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{h=0} \frac{2d}{h^2} .$$

È infatti le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di $\bar{M}$ sono

$$\bar{x} = x + h\alpha , \quad \bar{y} = y + h\beta , \quad \bar{z} = z + h\gamma$$

e quelle x_1, y_1, z_1 di M_1, *trascurando gli infinitesimi di terzo ordine*

$$x_1 = x + h\alpha + \frac{h^2}{2} x'' = x + \frac{h^2}{2} x''$$

$$y_1 = y + h\beta + \frac{h^2}{2} y'' = y + \frac{h^2}{2} y''$$

$$z_1 = z + h\gamma + \frac{h^2}{2} z'' = z + \frac{h^2}{2} z'' ,$$

indi

$$d = \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2 + (z_1 - \bar{z})^2} = \frac{h^2}{2} \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} .$$

Dunque per la (3*) si ha (a meno d'infinitesimi di terzo ordine)

$$d = \frac{h^2}{2\rho} ,$$

e perciò appunto

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{h=0} \frac{2d}{h^2} \text{ c. d. d.}$$

§. 3.

Piano osculatore.

Pel punto $M \equiv (x, y, z)$ della curva C conduciamo un piano π qualunque, la cui equazione scriviamo

$$(4) \qquad a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0 ,$$

dove X, Y, Z indicano le coordinate correnti ed a, b, c, i coseni di direzione (positiva) della normale al piano ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) riguardando come pagina positiva di π quella rivolta verso la direzione positiva (a, b, c). Prendendo per parametro u l' arco s della curva, consideriamo un punto M' dell' intorno di M sulla curva, corrispondente al valore $s + h$ dell' arco, e riguardiamo h come infinitesimo di primo ordine. Se Δx, Δy, Δz sono gli accrescimenti che subiscono x, y, z nel passaggio da s ad $s + h$, la distanza (algebrica) δ del punto M' dal piano π sarà data, secondo la nota formola di geometria analitica, da

$$\delta = a\,\Delta x + b\,\Delta y + c\,\Delta z ,$$

e δ risulterà positiva o negativa secondo che il punto M' si trova dalla banda positiva o negativa di π. Ora abbiamo

$$(a)\qquad \begin{cases} \Delta x = x'h + x''\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_1 \\ \Delta y = y'h + y''\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_2 \\ \Delta z = z'h + z''\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_3 \end{cases}$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, sono infinitesimi del *terzo* ordine e perciò

$$\delta = (ax' + by' + cz')h + (ax'' + by'' + cz'')\frac{h^2}{2} + \varepsilon,$$

con ε infinitesimo del terzo ordine, e per vedere il segno di δ basterà esaminare quello del termine preponderante, cioè della più bassa potenza di h. Ora, se il coefficiente di h

$$ax' + by' + cz' = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

non è nullo, la potenza preponderante è la prima e δ cangia quindi il segno con h, *cioè la curva* C *attraversa in* M *il piano* π. Ma se $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ ciò significa che il piano π passa per la tangente alla curva, ossia è un piano tangente della curva onde vediamo che: *la curva attraversa in* M *ogni piano per* M *non tangente alla curva.*

Al contrario per ogni piano tangente, essendo $ax' + by' + cz' = 0$, la formula per δ diventa

$$\delta = (ax'' + by'' + cz'')\frac{h^2}{2} + \gamma,$$

e supposto $ax'' + by'' + cz'' \neq 0$, la potenza preponderante è la seconda, onde δ non cangia più il segno con h, e *la curva resta, nell' intorno di* M, *tutta da una parte di* π. Nel fascio dei piani tangenti in M vi ha dunque uno ed un solo piano, quello determinato dalle due equazioni simultanee per a, b, c

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' = 0 \\ ax'' + by'' + cz'' = 0, \end{cases}$$

per cui δ risulta un infinitesimo (generalmente) del terzo ordine, onde la curva lo attraversa in M. Questo piano, la cui equazione, eliminando a, b, c, fra le due precedenti e la (4), si scrive (1),

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

dicesi il *piano osculatore* della curva in M; fra tutti i piani che passano per M esso è manifestamente quello che si scosta nell' intorno di M meno di tutti gli altri dalla curva ed è l' unico fra i piani tangenti che venga (in generale) attraversato dalla curva.

Il piano osculatore in un punto M della curva è in generale unico e determinato. Eccezione si ha soltanto per quei punti singolari ove si annullassero insieme i tre minori della matrice

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Ma a causa delle formole

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

si ha

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

onde si vede che i detti punti singolari sono unicamente quelli eventuali ove la flessione si annulli.

Accenniamo anche ad altre definizioni equivalenti del piano osculatore. Per la tangente in M alla curva C, e per un punto M' di C vicino a M, si faccia passare un piano; questo al convergere di M' verso M tende ad una posizione limite, che è quella del piano osculatore. Ancora: se per M e per due altri punti vicini M', M'' della curva si fa passare un piano, questo, se M', M'' si acco-

(1) L' equazione del piano osculatore serba evidentemente la stessa forma assumendo una qualunque variabile indipendente u.

stano simultaneamente a M (in guisa che le differenze fra le coordinate di M′, M″ non diventino infinitesime d'ordine superiore rispetto alle corrispondenti differenze con M), tende nuovamente verso il piano osculatore (¹).

Per quest'ultima proprietà si dice anche, con locuzione abbreviata, che il piano osculatore in un punto è il piano condotto per questo punto e per due punti successivi della curva.

§. 4.

Triedro principale.

Nel fascio delle normali in M alla curva, si distinguono quella giacente nel piano osculatore, che dicesi la ***normale principale***, e l'altra, normale al piano osculatore, che porta il nome di ***binormale***. Si è già fissata la direzione positiva della tangente come quella concordante col senso positivo scelto sulla curva, ed ora fisseremo, con opportune convenzioni, anche i versi positivi per la normale principale e per la binormale. Queste tre direzioni positive individuano un triedro trirettangolo, che diremo il ***triedro principale*** della curva in M; le sue tre facce sono: 1° il piano normale, 2° il piano osculatore, 3° il piano della tangente e della binormale (normale alla normale principale) che si chiama, per una ragione che si vedrà più oltre (§. 15), il ***piano rettificante***.

Per quanto si è osservato in generale al paragrafo precedente, la curva giace, nell'intorno di M, tutta da una parte del piano rettificante, e noi riguarderemo come pagina positiva di questo piano quella rivolta verso la curva, indi come direzione positiva della normale principale (della sua normale) quella verso cui tale pagina è rivolta (²). In fine la direzione positiva della binormale si assumerà in guisa che la terna ortogonale formata ordinatamente dalla tangente, normale principale e binormale sia ***direttamente*** congruente colla terna O (x, y, z) degli assi coordinati. Per ciò indicando, come costantemente in seguito, con

(¹) V. i p. e Dini Calcolo differenziale.

(²) A differenza della direzione positiva della tangente che cangia, rovesciando il senso positivo della curva, la direzione positiva della normale principale resta così invece assolutamente fissata.

α, β, γ i coseni di direzione della tangente
ξ, η, ζ « « della normale principale
λ, μ, ν « « della binormale,

avremo che il determinante ortogonale

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix}$$

delle tre direzioni principali risulta eguale all'unità ***positiva***, ed ogni suo elemento eguaglia il proprio complemento algebrico.

Dalla equazione (5) del piano osculatore risultano subito le proporzioni

$$\lambda : \mu : \nu = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

e quindi dalle condizioni d'ortogonalità

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = \xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0,$$
$$\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = 0,$$

le altre

$$\xi : \eta : \zeta = x'' : y'' : z''.$$

Da queste, avvertendosi per la (3*) $x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{\rho^2}$, risultano le formole

$$\xi = \varepsilon\rho x'', \quad \eta = \varepsilon\rho y'', \quad \zeta = \varepsilon\rho z'', \tag{6}$$

nelle quali $\varepsilon^2 = 1$, o $\varepsilon = \pm 1$, e resterà da decidere se, in base alle nostre convenzioni, debba prendersi il segno superiore o l'inferiore. Ora l'equazione del piano rettificante è

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0,$$

e la distanza (algebrica) del punto $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ dal detto piano è data da

$$\delta = \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z,$$

ossia per le formole (a) § 3 e per le (6)

$$\delta = \varepsilon \frac{h^3}{2\rho} = \varepsilon_1,$$

con ε_1 infinitesimo del terzo ordine. Ma, per le nostre convenzioni, δ deve essere positivo, per h sufficientemente piccolo; dobbiamo quindi prendere $\varepsilon = +1$ e si hanno le formole definitive

$$\xi = \rho x'', \quad \eta = \rho y'', \quad \zeta = \rho z'', \tag{7}$$

e per ciò anche le altre

$$\begin{cases} \lambda = \beta\zeta - \gamma\eta = \rho(y'z'' - z'y'') \\ \mu = \gamma\xi - \alpha\zeta = \rho(z'x'' - x'z'') \\ \nu = \alpha\eta - \beta\xi = \rho(x'y'' - y'x'') \end{cases} \tag{8}$$

§. 5.

Seconda curvatura o torsione

La giacitura del piano osculatore varia in generale al variare del punto M di osculazione, e la rapidità della sua deviazione, cioè dello scostarsi della curva dalla giacitura piana, si misura colla *seconda curvatura o torsione*. Per precisare anche qui tale concetto, considereremo un punto M della curva ed un suo punto vicino M_1, e i due piani osculatori in M, M_1 che comprendono fra loro un angolo piccolissimo $\Delta\sigma$; se il quoziente $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ (indicando Δs l'arco MM_1) convergerà al tendere di Δs a zero, verso un limite determinato e finito, questo si assumerà appunto come misura della torsione e, *preso con un segno conveniente*, si indicherà con $\frac{1}{T}$.

Per trovare questa espressione, cominciamo dall'osservare che l'angolo $\Delta\sigma$ è misurato dall'angolo delle due binormali successive in M, M_1; ed allora, in modo analogo come al §. 3, costruiamo qui la *indicatrice sferica delle binormali*, il cui punto generatore (x_1, y_1, z_1) avrà le coordinate

$$x_1 = \lambda, \quad y_1 = \mu, \quad z_1 = \nu,$$

e indicando con ds_1 il suo elemento d'arco, avremo intanto

$$\frac{1}{T^2} = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2. \tag{9}$$

Osserviamo subito che, se la torsione è nulla per un tratto, la curva in quel tratto è piana, poichè in tal caso per la (9) λ, μ, ν sono costanti, cioè la binormale ha una direzione fissa. Assumendola per semplicità per asse delle z, avremo

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = 1,$$

indi $\gamma = \frac{dz}{ds} = 0$, e per ciò $z = \text{cost.}^{te}$, il che prova essere la curva tracciata in un piano parallelo al piano xy.

§. 6.

Formole di Frenet (Serret).

Andiamo ora a stabilire le importanti formole che esprimono le derivate (prese rispetto all'arco s) dei nove coseni delle tre direzioni principali per i coseni stessi e per le due curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$. Tre di queste risultano immediatamente dalle (7) §. 4, che dànno

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho}. \tag{a}$$

Ora se deriviamo rapporto ad s le due identità

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \end{cases}$$

osservando le precedenti (a), deduciamo

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{d\lambda}{ds} + \beta\dfrac{d\mu}{ds} + \gamma\dfrac{d\nu}{ds} = 0 \\ \lambda\dfrac{d\lambda}{ds} + \mu\dfrac{d\mu}{ds} + \nu\dfrac{d\nu}{ds} = 0, \end{cases}$$

onde $\frac{d\lambda}{ds}$, $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$ risultano proporzionali ai tre minori della ma-

trice $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$, cioè a ξ, η, ζ, scriviamo

$$\frac{d\lambda}{ds} = k\,\xi\,,\quad \frac{d\mu}{ds} = k\,\eta\,,\quad \frac{d\nu}{ds} = k\,\zeta\,.$$

Quadrando e sommando ne viene per la (9)

$$k^2 = \frac{1}{T^2}\,,$$

e noi *fissiamo ora il segno della torsione* $\frac{1}{T}$ prendendo in queste formole $k = \frac{1}{T}$, cioè

$$(b)\qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}\,,\quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\eta}{T}\,,\quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\zeta}{T}\,;$$

così alla torsione viene attribuito un valore algebrico, che è quello dei tre rapporti eguali

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\eta}\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\zeta}\frac{d\nu}{ds}\,.$$

Le formole (a), (b) si completano colle altre che dànno i valori di $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$, osservando p. e. che si ha

$$\xi = \gamma\mu - \beta\nu\,,$$

indi derivando coll' osservare le (a), (b) segue:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\rho}(\zeta\mu - \eta\nu) + \frac{1}{T}(\gamma\eta - \beta\zeta)\,,$$

ossia

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}\,,$$

e formole analoghe per le altre due derivate $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$. Riassumendo le formole ottenute, abbiamo il quadro seguente:

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\xi}{\rho}\,,\quad \dfrac{d\beta}{ds} = \dfrac{\eta}{\rho}\,,\quad \dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{\zeta}{\rho}\,, \\ \dfrac{d\xi}{ds} = -\dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{\lambda}{T}\,,\quad \dfrac{d\eta}{ds} = -\dfrac{\beta}{\rho} - \dfrac{\mu}{T}\,,\quad \dfrac{d\zeta}{ds} = -\dfrac{\gamma}{\rho} - \dfrac{\nu}{T}\,, \\ \dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{\xi}{T}\,,\quad \dfrac{d\mu}{ds} = \dfrac{\eta}{T}\,,\quad \dfrac{d\nu}{ds} = \dfrac{\zeta}{T}\,. \end{cases}$$

Queste sono le formole fondamentali della teoria delle curve, note sotto il nome di formole di Frenet, o anche di Serret, sebbene il primo le abbia fatte conoscere anteriormente.

È bene osservare che dalle formole (A) di Frenet seguono subito pei valori delle derivate prime, seconde e terze delle coordinate le altre

$$(B)\qquad x' = \alpha\,,\quad x'' = \frac{\xi}{\rho}\,,\quad x''' = -\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{T}\right\} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\,\xi\,,$$

colle analoghe per y, z. Ne segue che il determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}\,,$$

cioè il Wronskiano di x', y', z' è dato da

$$-\frac{1}{\rho^2 T}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho^2 T}\,,$$

e per ciò

$$(10)\qquad \frac{1}{T} = -\rho^2\begin{vmatrix} x' & y' & z''' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}\,.$$

Questa formola pone in evidenza che mentre la prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ è una funzione irrazionale delle derivate:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}\,,$$

invece la seconda curvatura $\frac{1}{T}$ è data da una funzione *razionale*, a cui compete quindi un segno, che può essere positivo o negativo. Si osservi ancora che l'annullarsi di $\frac{1}{T}$ per un tratto equivale all'annullarsi del Wronskiano, cioè all'esistenza di una relazione lineare a coefficienti costanti fra x, y, z

$$ax + by + cz + d = 0$$

e la curva giace allora in un piano, come già si è visto sopra.

§. 7.

Significato del segno della torsione.

Dalle ultime formole del quadro (A) risulta già che il segno della torsione non cambia se si rovescia il senso positivo della curva, perchè ξ, η, ζ restano invariati mentre α, β, γ e per conseguenza anche λ, μ, ν cangiano di segno, invertendo il senso positivo di s.

Per vedere quale è il significato geometrico del segno della torsione calcoliamo, sino agli infinitesimi del terzo ordine, la distanza δ di un punto M' della curva corrispondente al valore $s + h$ dell'arco dal piano osculatore in M, assumendo al solito h come infinitesimo del primo ordine. L'equazione del piano osculatore in M essendo

$$(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0,$$

avremo

$$\delta = \lambda \Delta x + \mu \Delta y + \nu \Delta z;$$

Ora abbiamo

$$\begin{cases} \Delta x = hx' + \frac{h^2}{2} x'' + \frac{h^3}{6} x''' + \varepsilon_1 \\ \Delta y = hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' + \varepsilon_2 \\ \Delta z = hz' + \frac{h^2}{2} z'' + \frac{h^3}{6} z''' + \varepsilon_3 \end{cases}$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono infinitesimi d'ordine *superiore* al terzo rispetto ad h. Osservando le (B) ne risulta subito la formola

$$\delta = -\frac{1}{6\rho T} h^3 + \varepsilon,$$

dove $\frac{\varepsilon}{h^3}$ è infinitesimo con h. Supposto che le due curvature $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ siano ambedue non nulle in M, si vede che il primo termine nella formola precedente è il preponderante, e quindi δ cangia il segno con h, ossia la curva attraversa in *M il suo piano osculatore* (cf. §. 3). Più precisamente (essendo $\frac{1}{\rho} > 0$), si ha che δ ha il segno opposto ad h se $\frac{1}{T} > 0$ e invece lo stesso segno quando $\frac{1}{T} < 0$, ossia nel primo caso il punto mobile, scorrendo sulla curva in verso positivo, passa in M dalla faccia positiva alla negativa del piano osculatore, nel secondo invece dalla negativa alla positiva. Ne risulta nuovamente che il segno della torsione è indipendente dal verso positivo della curva poichè, invertendo questo verso, restano permutate le due facce del piano osculatore.

Per dare a questo risultato un significato geometrico più espressivo, immaginiamo un osservatore collocato sull'una o sull'altra pagina del piano osculatore che guardi verso la direzione positiva della normale principale ossia verso la curva. Questa, nell'*innalzarsi rispetto all'osservatore*, passerà in M dalla sua sinistra alla destra, ovvero dalla destra alla sinistra, ed è chiaro che capovolgendo l'osservatore l'indicata circostanza non muta. La curva si dirà nel primo caso *destrorsa* in M, nel secondo *sinistrorsa*.

Ora fissiamo qui, una volta, per tutte, l'orientazione del triedro coordinato O (x, y, z), e conseguentemente (§. 4) quella del triedro principale, come sinistrorsa, convenendo che: *sulla pagina positiva del piano xy (rivolta verso Oz) la direzione Oy giaccia alla sinistra della Ox.* Ciò premesso, per l'osservatore collocato p. e. sulla pagina positiva del piano osculatore, la direzione positiva della tangente volge a destra e quindi il punto generatore, scorrendo in verso positivo sulla curva, passa in M da sinistra a destra. D'altra parte se $\frac{1}{T} > 0$ il punto passa come si è visto dalla pagina negativa alla positiva del piano osculatore, cioè s'innalza rispetto all'osservatore e la curva è quindi *destrorsa*, nel caso opposto invece *sinistrorsa*. Concludiamo: *La torsione* $\frac{1}{T}$ *di una curva, calcolata dalle formole di Frenet, risul-*

terà positiva o negativa secondo chè nel punto considerato la curva è sinistrorsa ovvero destrorsa.

Un modo equivalente per riconoscere il significato del segno della torsione si ha calcolando il *momento* Ω della normale principale in M e della successiva in M'. Si ha invero pel valore algebrico di Ω, dalla nota formula di geometria analitica

$$\Omega = \begin{vmatrix} \Delta x & , & \Delta y & , & \Delta z \\ \xi & & \eta & & \zeta \\ \xi + \Delta\xi & , & \eta + \Delta\eta & , & \zeta + \Delta\zeta \end{vmatrix},$$

indi a meno di infinitesimi di terzo ordine

$$\Omega = h^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T} & -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{T} & -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{T} \end{vmatrix}$$

cioè

$$\Omega = -\frac{h^2}{T}.$$

Dunque Ω ha il segno opposto a $\frac{1}{T}$, cioè due normali principali successive formano una coppia destrorsa o sinistrorsa secondo che la curva stessa è destrorsa o sinistrorsa, ossia: *La rigata delle normali principali di una curva è destrorsa o sinistrorsa colla curva.* E la medesima cosa si constata per la rigata delle binormali.

§. 8.

Equazioni intrinseche delle curve.

Applichiamo subito le formole di Frenet a dimostrare l'importante teorema:

A) *Una curva gobba* C *è pienamente determinata di forma dalle espressioni delle sue due curvature* $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ *in funzione dell'arco* s.

In altre parole diciamo che se due curve C, C', ad eguale arco, hanno eguali tanto le flessioni che le torsioni, esse sono (direttamente) sovrapponibili. Indicando cogli accenti le quantità relative a C', abbiamo intanto per ipotesi

$$s' = s\ ,\quad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}\ ,\quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{T}\ .$$

Ora muoviamo la curva C' nello spazio in modo da sovrapporre un suo punto, p. es. l'origine $s = 0$ degli archi, al punto corrispondente di C, e insieme il suo triedro principale a quello di C nel medesimo punto $s = 0$; così avremo

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha\ ,\ \beta' = \beta\ ,\ \gamma' = \gamma \\ \xi' &= \xi\ ,\ \eta' = \eta\ ,\ \zeta' = \zeta \\ \lambda' &= \lambda\ ,\ \mu' = \mu\ ,\ \nu' = \nu \end{aligned}\right\} \text{ per } s = 0\ .$$

D'altra parte per le formole (A) di Frenet della prima verticale abbiamo

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}\ ,\quad \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}\ ,\quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}\ ,$$

e ancora

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \frac{\xi'}{\rho}\ ,\quad \frac{d\xi'}{ds} = -\frac{\alpha'}{\rho} - \frac{\lambda'}{T}\ ,\quad \frac{d\lambda'}{ds} = \frac{\xi'}{T}\ ,$$

sicchè le due terne di funzioni di s, (α, ξ, λ) $(\alpha', \xi', \lambda')$ sono soluzioni di uno stesso sistema di equazioni differenziali (lineari) del 1.° ordine. D'altronde esse ricevono per $s = 0$ i medesimi valori iniziali, onde pel teorema fondamentale di unicità del sistema integrale, coincidono per tutti i valori di s in considerazione:

$$\alpha' = \alpha\ ,\ \xi' = \xi\ ,\ \lambda' = \lambda\ ,$$

e similmente

$$\beta' = \beta\ ,\ \eta' = \eta\ ,\ \mu' = \mu$$
$$\gamma' = \gamma\ ,\ \zeta' = \zeta\ ,\ \nu' = \nu\ .$$

Ne segue

$$\frac{d(x' - x)}{ds} = 0\ ,\quad \frac{d(y' - y)}{ds} = 0\ ,\quad \frac{d(z' - z)}{ds} = 0$$

e però le differenze $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ sono tre costanti che, an-

nullandosi inizialmente per $s = 0$, sono sempre nulle: così $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ e le due curve coincidono c. d. d.

Le espressioni di

$$\frac{1}{\rho} = f(s), \quad \frac{1}{T} = \varphi(s),$$

(delle quali la prima $f(s)$ sarà sempre positiva per le nostre convenzioni) individuano dunque la forma della curva, a meno di movimenti. Le equazioni scritte diconsi per ciò opportunamente *equazioni intrinseche* della curva, ed ora dimostreremo facilmente che in effetto $f(s)$ e $\varphi(s)$ possono darsi affatto ad arbitrio ($f(s) > 0$).

È qui il luogo di osservare che, se di una curva C si assume la simmetrica C′ rispetto ad un punto, o ad un piano (o ad una retta), la C′ ha, ad eguale arco, la stessa flessione e la torsione cangiata di segno. Viceversa quindi le equazioni intrinseche

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{T'} = -\frac{1}{T}$$

definiscono la simmetrica della curva primitiva.

§. 9.

Integrazione delle equazioni intrinseche.

Insieme al teorema A) di unicità, dimostriamo ora il teorema d'esistenza:

B) *Date ad arbitrio le due equazioni intrinseche di una curva*

$$\frac{1}{\rho} = f(s), \quad \frac{1}{T} = \varphi(s).$$

la curva corrispondente esiste, ed è regolare finchè $f(s)$, $\varphi(s)$ si mantengono finite e continue ($f(s) > 0$).

Per ciò, ponendo mente alle equazioni differenziali cui debbono soddisfare le tre terne di funzioni

$$(\alpha, \xi, \lambda), \quad (\beta, \eta, \mu), \quad (\gamma, \zeta, \nu),$$

nell'ipotesi che la curva esista, scriviamo il sistema differenziale lineare ed omogeneo

$$\text{(I)} \qquad \frac{dl}{ds} = m f'(s), \quad \frac{dm}{ds} = -l f'(s) - n \varphi(s), \quad \frac{dn}{ds} = m \varphi(s)$$

nelle tre funzioni incognite l, m, n. Si sa dal calcolo integrale che, dati arbitrariamente i valori iniziali p. e. per $s = 0$ (l_0, m_0, n_0), esiste (ed è unica) una corrispondente terna d'integrali (l, m, n), i quali di più si conservano regolari in tutto l'intervallo per s, nel quale $f(s)$ $\varphi(s)$ si mantengono finite e continue.

Osserviamo di più che se (l, m, n), (l', m', n') sono due sistemi integrali delle (I), distinti ovvero coincidenti, risulta dalle equazioni differenziali stesse

$$\frac{d}{ds}(ll' + mm' + nn') = 0,$$

indi

$$ll' + mm' + nn' = \text{cost.te}$$

In particolare per ogni terna integrale (l, m, n) si avrà $l^2 + m^2 + n^2 = \text{cost.te}$, onde disponendo di un fattore costante d'omogeneità potremo rendere

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Ciò premesso, scegliamo tre terne di costanti

$$\begin{matrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l'_0 & m'_0 & n'_0 \\ l''_0 & m''_0 & n''_0 \end{matrix}$$

che siano i nove coefficienti di una sostituzione ortogonale, e prendiamo le tre terne d'integrali delle (I)

$$(l, m, n), \quad (l', m', n'), \quad (l'', m'', n'')$$

che si riducano rispettivamente per $s = 0$ alle terne iniziali

$$(l_0, m_0, n_0), \quad (l'_0, m'_0, n'_0), \quad (l''_0, m''_0, n''_0).$$

Dalla proprietà fondamentale sopra osservata risulta intanto che

$$\begin{matrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{matrix}$$

formeranno, per tutti i valori di s, i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

Poniamo allora

$$x = \int l\,ds\ ,\quad y = \int l'\,ds\ ,\quad z = \int l''\,ds$$

e queste riguardiamo come equazioni parametriche di una curva C, onde

$$\frac{dx}{ds} = l\ ,\quad \frac{dy}{ds} = l'\ ,\quad \frac{dz}{ds} = l''\ ,$$

e poichè $l^2 + l'^2 + l''^2 = 1$, sarà s l'arco di C e pei coseni di direzione della tangente si avrà

$$\alpha = l\ ,\quad \beta = l'\ ,\quad \gamma = l''\ .$$

Derivando rapporto ad s, a sinistra colle formole di Frenet, a destra colle (I), abbiamo

$$\frac{\xi}{\rho} = m f'(s)\ ,\quad \frac{\eta}{\rho} = m' f(s)\ ,\quad \frac{\zeta}{\rho} = m'' f'(s),$$

e siccome $f(s)$ è per ipotesi positiva, mentre

$$m^2 + m'^2 + m''^2 = 1\ ,$$

ne deduciamo

$$\xi = m\ ,\quad \eta = m'\ ,\quad \zeta = m''$$

e inoltre

$$\frac{1}{\rho} = f'(s)\ .$$

Segue poi ancora

$$\lambda = n\ ,\quad \mu = n'\ ,\quad \nu = n''\ ,$$

e derivando nuovamente rapporto ad s

$$\frac{1}{T} = \varphi(s);$$

la curva C ha dunque le equazioni intrinseche richieste, c. d. d.

L'integrazione del sistema lineare (1) coll'integrale quadratico

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

si riconduce, secondo Darboux [1], all'integrazione di un'unica equazione *del tipo di Riccati* in una funzione incognita (complessa) σ. Pongasi per ciò

$$\sigma = \frac{l + im}{1 - n} = \frac{1 + n}{l - im}$$

e derivando rapporto ad s coll'osservare le (I), si otterrà subito

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{i\varphi(s)}{2}(1 - \sigma^2) - if(s)\sigma\ , \tag{II}$$

che è appunto un'equazione del tipo di Riccati.

Viceversa da questa, separando il reale dall'immaginario, seguono nuovamente le (I). Dunque: *Il problema di trovare una curva dalle sue equazioni intrinseche si riconduce ad integrare un' equazione del tipo di Riccati.*

In particolare se $\frac{1}{T} = \varphi(s) = 0$ (se la curva è piana) la (II) s'integra con una quadratura. Del resto in questo caso potremo fare $z = 0$, $l'' = 0$, $m'' = 0$

$$\begin{matrix} l = \cos\varphi\ , & l' = \operatorname{sen}\varphi\ , & l'' = 0 \\ m = -\operatorname{sen}\varphi\ , & m' = \cos\varphi\ , & m'' = 0 \\ n = 0 & n' = 0\ , & n'' = 1 \end{matrix}$$

indi $\frac{d\varphi}{ds} = f(s) = \frac{1}{\rho}$, $\varphi = \int \frac{ds}{\rho}$, e perciò le formole

$$x = a + \int \cos\varphi\,ds\ ,\quad y = b + \int \operatorname{sen}\varphi\,ds\quad z = 0$$

daranno per quadrature la curva piana richiesta.

---

[1] Leçons sur la théorie des surfaces (2ème Edition 1ère Partie pag. 30 s. s.

Così p. e. se prendiamo $\rho = ks$ (k costante), la curva richiesta è una spirale logaritmica.

§. 10.

Eliche cilindriche in generale.

Si chiamano eliche cilindriche le curve tracciate sopra una superficie cilindrica arbitraria, che ne tagliano sotto angolo costante le generatrici, ossia le curve le cui tangenti hanno inclinazione costante sopra una direzione fissa.

Se il cilindro, su cui l'elica è tracciata, si spiega in un piano, l'elica si distende in una linea retta, poichè questa linea trasformata taglia sotto angolo costante le rette parallele in cui si distendono le generatrici. E poichè, nello spiegamento, le lunghezze lineari non si alterano, segue che una proprietà caratteristica dell'elica è di segnare sulla superficie cilindrica il più breve cammino fra due suoi punti. Le linee tracciate su qualunque superficie corrispondenti a questo problema di minimo diconsi *linee geodetiche*, e possiamo quindi anche dire: *Le eliche sono le geodetiche di superficie cilindriche.*

Consideriamo una qualunque elica e prendiamo l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro, onde sarà $\gamma = \text{cost.}^{te}$. Le formole di Frenet dell'ultima colonna nel quadro (A) § 6

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{\zeta}{\rho}, \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{T}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\zeta}{T},$$

escludendo naturalmente il caso $\frac{1}{\rho} = 0$ della linea retta, dànno in primo luogo $\zeta = 0$, e viceversa da $\zeta = 0$ segue $\gamma = \text{cost.}^{te}$. Abbiamo dunque:

1) *In ogni punto di un'elica cilindrica la normale principale dell'elica coincide colla normale al cilindro, e questa proprietà caratterizza le eliche* (1).

In secondo luogo, essendo $\gamma = \text{cost}^{te}$, $\zeta = 0$, indi $\nu = \sqrt{1-\gamma^2} = \text{cost}^{te}$, si ha $\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\nu}{T} = 0$, ossia

(1) In generale se per una curva Γ, di una qualunque superficie Σ, la normale principale coincide in ogni punto colla normale alla superficie, la linea Γ è geodetica; anzi più tardi (Cap. VI) definiremo le linee geodetiche da questa loro proprietà caratteristica.

$$(11) \qquad \frac{\rho}{T} = -\frac{\gamma}{\nu} = \text{cost}^{te}$$

dunque: 2) *In ogni elica cilindrica è costante il rapporto delle due curvature.* Anche questa proprietà è invertibile col teorema di Bertrand.

3) *Ogni curva che ha costante il rapporto delle due curvature è un'elica cilindrica.*

E infatti supponiamo $\frac{\rho}{T} = k$ (costante). Si ha per le formole di Frenet

$$\frac{\rho}{T}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}, \quad \frac{\rho}{T}\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\mu}{ds}, \quad \frac{\rho}{T}\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\nu}{ds},$$

cioè nel caso attuale

$$\frac{d}{ds}(k\alpha - \lambda) = 0, \quad \frac{d}{ds}(k\xi - \mu) = 0, \quad \frac{d}{ds}(k\gamma - \nu) = 0.$$

e quindi

$$k\alpha - \lambda = A, \quad k\xi - \mu = B, \quad k\gamma - \nu = C,$$

con A, B, C costanti e $A^2 + B^2 + C^2 = k^2 + 1$. Pongasi

$$a = \frac{k\alpha - \lambda}{\sqrt{k^2+1}}, \quad b = \frac{k\xi - \mu}{\sqrt{k^2+1}}, \quad c = \frac{k\gamma - \nu}{\sqrt{k^2+1}}$$

e saranno a, b, c i coseni di una direzione *fissa* nello spazio, colla quale le tangenti alla curva, a causa di

$$a\alpha + b\xi + c\gamma = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}},$$

formeranno un angolo costante; la curva è dunque un'elica cilindrica c. d. d.

§. 11.

Eliche cilindriche speciali.

Per stabilire le formule generali relative alle eliche cilindriche, prendiamo l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro, e supponiamo che le coordinate x, y di un punto della sezione retta $z = 0$

del cilindro siano espresse in funzione dell'arco u della sezione stessa dalle formole

$$x = x(u), \quad y = y(u).$$

Le coordinate di un punto mobile sull'elica saranno date da

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = u \cot \varepsilon,$$

dove con ε indichiamo l'angolo costante d'inclinazione (che si può supporre acuto) dell'elica sulle generatrici del cilindro e per semplicità contiamo l'arco u dal punto ove l'elica incontra la sezione retta.

Applicando le formole dei paragrafi precedenti, e indicando qui con accenti derivazione rapporto ad u, troviamo

$$du = \frac{du}{\operatorname{sen}\varepsilon}, \quad s = \frac{u}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

contando $s = 0$ da $u = 0$, poi

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{sen}\varepsilon\, x'(u), \quad \beta = \operatorname{sen}\varepsilon\, y'(u), \quad \gamma = \cos\varepsilon \\ \dfrac{\xi}{\rho} = \operatorname{sen}^2\varepsilon\, x''(u), \quad \dfrac{\eta}{\rho} = \operatorname{sen}^2\varepsilon\, y''(u), \quad \zeta = 0, \end{cases}$$

indi

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{sen}^2\varepsilon \sqrt{x''^2 + y''^2},$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{R} \tag{12}$$

dove con $\frac{1}{R}$ indichiamo la curvatura (assoluta) della sezione retta. Ora, essendo $\gamma = \cos\varepsilon$, $\zeta = 0$, si ha $\nu = \pm \operatorname{sen}\varepsilon$, e precisamente risulta dalla considerazione geometrica che vale il segno superiore o l'inferiore secondo che l'elica è destrorsa o sinistrorsa. Dalla formola (11) § 10 segue ora

$$\frac{\rho}{T} = -\frac{\gamma}{\nu} = \mp \cot\varepsilon,$$

cioè per la (12)

$$\frac{1}{T} = \mp \frac{\operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon}{R} \tag{13}$$

ed il segno della torsione è conforme alla regola generale trovata al § 7.

Dalle (12), (13) segue che i raggi di flessione e torsione sono insieme costanti solo per l'elica del cilindro circolare retto. Una tale elica dicesi *circolare* o ordinaria (profilo della vite) e la sua proprietà caratteristica (secondo Puiseux) di aver costanti i due raggi di curvatura corrisponde alla proprietà, che ha a comune soltanto colla retta e col cerchio (casi limiti dell'elica), di essere, in ogni sua parte, sovrapponibile a sè stessa.

Risulta dalle (12), (13) che il problema di determinare un'elica dalle sue equazioni intrinseche si riduce al problema analogo per la sezione retta del cilindro, cioè: *Date le equazioni intrinseche di un'elica cilindrica, questa si trova in termini finiti con quadrature.*

Dopo l'elica circolare la più notevole è la così detta *elica cilindro-conica*, che definiamo mediante le sue equazioni intrinseche

$$\rho = as, \quad T = bs,$$

con a, b costanti. La sezione retta del cilindro su cui una tale elica è descritta è caratterizzata dalla proprietà di avere il raggio di curvatura proporzionale all'arco, cioè è una spirale logaritmica. Ne segue che le equazioni parametriche di questa elica possono scriversi

$$x = Ae^{ht}\cos t, \quad y = Ae^{ht}\operatorname{sen} t, \quad z = Be^{ht}, \tag{14}$$

dove A, B, h sono costanti (arbitrarie) e t il parametro. L'elica è quindi tracciata sul cono di rotazione attorno all'asse Oz.

$$x^2 + y^2 - \frac{A^2}{B^2} z^2 = 0.$$

Di più essa ne taglia sotto angolo costante le generatrici, ossia è una *lossodromica* [1] del cono, poichè i coseni di direzione della tangente all'elica sono

---

[1] Dicesi *lossodromica* di qualunque superficie di rotazione una curva che ne tagli sotto angolo costante i meridiani (i paralleli).

$$x = \frac{A(h\cos t - \operatorname{sen} t)}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}, \quad y = \frac{A(h\operatorname{sen} t + \cos t)}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}, \quad z = \frac{Bh}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}$$

e quelli della generatrice del cono

$$a = \frac{A\cos t}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{A\operatorname{sen} t}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad c = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

onde

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{h\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}} = \text{cost}^{te}$$

Per queste proprietà si è dato appunto alla curva il nome di elica cilindro-conica. Si osservi in fine che spiegando il cono in un piano l'elica si trasforma in una spirale logaritmica.

§. 12.

Superficie inviluppi.

Allo studio delle ulteriori proprietà delle curve gobbe (a doppia curvatura) premettiamo alcune brevi nozioni sulle superficie *inviluppi*.

Sia

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{15}$$

l'equazione di una superficie contenente un parametro α, che supponiamo variabile con continuità in un assegnato intervallo. E supponiamo inoltre che, nel campo di variabilità che si considera per x, y, z, α la funzione f di queste quattro variabili sia finita e continua ed ammetta, rispetto a queste variabili, derivate parziali pure finite e continue, fino all'ordine in cui figureranno nei calcoli seguenti. Ad ogni valore α attribuito al parametro nella (15) corrisponde una particolare superficie $S\alpha$, la quale, al variare di α, descrive la serie ∞^1 data dalla (15). Consideriamo nella serie una superficie $S\alpha + h$ vicinissima ad $S\alpha$, corrispondente ad un accrescimento piccolissimo h di α: la $S\alpha$ sarà intersecata dalla $S\alpha + h$ in una linea (che qui supponiamo reale) ed avrà le due equazioni simultanee

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad f(x, y, z, \alpha + h) = 0$$

equivalenti al sistema

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \frac{f(x, y, z, \alpha + h) - f(x, y, z, \alpha)}{h} = 0.$$

Se ora facciamo convergere h a zero, la seconda equazione converge verso l'equazione limite

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

e s'intende che la intersezione considerata di $S\alpha$, $S\alpha + h$ convergerà corrispondentemente, tendendo h a zero, verso la curva $C\alpha$ rappresentata dalle due equazioni

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \text{ (1)}. \tag{16}$$

Questa curva $C\alpha$ dicesi, secondo Monge, la *caratteristica* della $S\alpha$. Facendo ora variare α, la caratteristica $C\alpha$ descrive una superficie Σ che dicesi l'*inviluppo* della serie ∞^1 (15), mentre ciascuna superficie $S\alpha$ dicesi *inviluppata*. Per avere l'equazione ordinaria della superficie inviluppo Σ, basta manifestamente eliminare α fra le due equazioni (16), o ciò che è lo stesso trarre α in funzione di x, y, z dalla seconda e sostituirlo nella prima. Così la stessa equazione (15), che *per α costante* rappresenta l'inviluppata, viene a rappresentare anche l'inviluppo, purchè per α vi si sostituisca quella funzione di x, y, z che si trae dalla

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Segue di qui la proprietà fondamentale (caratteristica dell'inviluppo): *La superficie inviluppo tocca lungo tutta la caratteristica $C\alpha$ la superficie inviluppata $S\alpha$.*

Difatti l'equazione del piano tangente all'inviluppo è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}\right)(X - x) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y}\right)(Y - y) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z}\right)(Z - z) = 0$$

(1) Per le dimostrazioni rigorose Cf. p. e. Dini Calcolo differenziale Vol. I Cap. 33 pag. 617 s. s.

dove qui α è tratta, come si è detto, dalla $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$. E per ciò appunto l'equazione superiore si riduce alla

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0$$

che rappresenta il piano tangente dell'inviluppata $S\alpha$.

La caratteristica $C\alpha$ della $S\alpha$ incontrerà la superficie vicina $S\alpha + h$ della serie in un certo numero discreto di punti, i quali al tendere di h a zero tenderanno generalmente verso certi punti limiti, che determiniamo nel modo seguente.

Finchè $h \neq 0$ i detti punti d'intersezione della $C\alpha$ colla $S\alpha + h$ sono dati dalle tre equazioni simultanee:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad f(x, y, z, \alpha + h) = 0.$$

Sviluppando la terza per potenze di h fino alla seconda, e tenendo conto delle prime due, vi si può sostituire nel sistema l'altra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\varepsilon}{h^2} = 0,$$

dove ε è infinitesimo d'ordine superiore al secondo rispetto ad h. Quando dunque h converge a zero, quest'ultima equazione converge verso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

e per ciò: *i punti limiti sulla caratteristica* $C\alpha$ *si hanno dal sistema simultaneo*

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0,$$

Il luogo dei punti limiti delle caratteristiche prende il nome di *spigolo di regresso* della superficie inviluppo, e le sue equazioni si hanno traendo α dalla terza e sostituendo nelle prime due. Ma poichè queste, per α costante, dànno la caratteristica $C\alpha$, si vedrà come sopra che ogni caratteristica tocca nei suoi punti limiti lo spigolo di regresso. Insomma lo spigolo di regresso (quando esiste) è sulla superficie inviluppo l'inviluppo di tutte le caratteristiche.

§. 13.

Superficie canali.

Come primo esempio consideriamo una sfera di raggio costante a che si muove nello spazio assumendo una semplice infinità di posizioni, e cerchiamone l'inviluppo. Il centro della sfera mobile descriverà una curva Γ per la quale manteniamo le consuete notazioni. L'equazione della sfera mobile sarà

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = a^2, \tag{17}$$

e il parametro variabile sarà qui l'arco s della curva Γ, di cui sono funzioni x, y, z. Per trovare la caratteristica C_s sulla sfera (17) occorre, per quanto precede, associare alla (17) l'equazione che ne risulta con una prima derivazione rapporto ad s, il che dà

$$(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma = 0. \tag{18}$$

Ma questa è l'equazione del piano normale in (x, y, z) alla curva Γ, e per ciò: *La caratteristica* C_s *della sfera mobile è quel suo cerchio massimo che giace nel piano normale alla curva* Γ *luogo dei centri.*

La superficie inviluppo è adunque il luogo di un circolo di raggio costante $= a$, il cui centro percorre la curva Γ e il cui piano è normale alla curva stessa; questo inviluppo dicesi una *superficie canale*, di cui Γ è l'asse curvilineo ed a il raggio.

Esiste qui uno spigolo di regresso? Per trovarlo dobbiamo eseguire una seconda derivazione rapporto ad s sulla (18) il che dà

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = \rho.$$

Ora questa rappresenta il piano normale alla normale principale nel punto di questa normale alla distanza ρ dal punto $M \equiv (x, y, z)$, cioè nel *centro di curvatura*. I punti limiti sul circolo caratteristico C_s sono quindi due, reali e distinti se $\rho < a$, reali coincidenti se $\rho = a$, e immaginarii quando $\rho > a$.

Esisterà dunque un effettivo spigolo di regresso composto di due rami solo in quella regione della superficie canale in cui sia $\rho < a$. Le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto dello spigolo di regresso si trovano subito colle formole

$$(19)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \rho\xi \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\lambda \\ y_1 = y + \rho\eta \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\mu \\ z_1 = z + \rho\zeta \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\nu \end{cases}$$

§. 14.

Superficie sviluppabili.

Per la teoria delle curve dovremo considerare solo il caso dell' inviluppo di una semplice infinità di *piani*, (non formanti un fascio) nel qual caso l' inviluppo prende il nome di *superficie sviluppabile* per una ragione di cui diremo subito.

La caratteristica di ogni piano del sistema sarà manifestamente una retta (propria) e su ciascuna caratteristica avremo un punto limite necessariamente reale. Se questo punto limite è fisso nello spazio (proprio od improprio) la sviluppabile è un cono o un cilindro. In generale il punto limite descriverà una curva, spigolo di regresso, di cui tutte le rette caratteristiche saranno le tangenti; così: *una sviluppabile è il luogo delle tangenti ad una curva dello spazio.*

È facile vedere che il piano mobile (inviluppata) coincide col piano osculatore dello spigolo di regresso Γ. Difatti, ritenendo per la curva Γ le solite notazioni, l' equazione del piano osculatore è

$$(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0\,,$$

e la caratteristica del piano osculatore si ottiene associandovi l'equazione che ne risulta derivando rapporto ad s, cioè

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0\,.$$

Ma questa è l' equazione del piano rettificante (§. 4), che interseca il piano osculatore appunto lungo la tangente.

Ogni piano inviluppato tocca la sviluppabile lungo tutta la retta caratteristica (generatrice), sicchè nelle sviluppabili i piani tangenti formano una *semplice* infinità, mentre per le altre superficie si ha una doppia infinità di piani tangenti. Si osservi che scindendo ciascuna tangente di Γ nelle due semirette partenti dal punto di contatto M, le due semirette generano due falde della superficie che si raccordano lungo Γ.

Un piano qualunque per M sega le due falde in due rami di curva, che si raccordano in M formando una *cuspide*, da cui il nome di spigolo di regresso.

Il nome di superficie sviluppabile proviene da ciò che, immaginando la superficie come flessibile ed inestendibile, si può spiegarla senza rottura nè duplicatura sul piano (come un cono o cilindro).

Viceversa vedremo poi che ogni superficie applicabile (distendibile) sul piano è una sviluppabile.

In relazione con ogni curva a doppia curvatura vi sono da considerare tre sviluppabili intimamente legate colla curva, e cioè gli inviluppi delle tre facce del triedro principale. Di queste l' inviluppo del piano osculatore si è già visto non essere altro che la sviluppabile delle tangenti alla curva. Ora passiamo a considerare successivamente le altre due sviluppabili, e cioè 1.° l' inviluppo del piano rettificante, 2.° l' inviluppo del piano normale, la prima delle quali dicesi la sviluppabile *rettificante* e la seconda la sviluppabile *polare* della curva.

§. 15.

Sviluppabile rettificante.

Il piano rettificante ha l' equazione

$$(20)\qquad (X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0$$

e la sua caratteristica si avrà associandovi l' equazione ottenuta derivando rapporto ad s, il chè dà

$$(X - x)\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}\right) + (Y - y)\left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{T}\right) + (Z - z)\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\nu}{T}\right) = 0\,,$$

che scriviamo

$$(21)\qquad (X - x)\left(\alpha + \frac{\rho}{T}\lambda\right) + (Y - y)\left(\beta - \frac{\rho}{T}\mu\right) + (Z - z)\left(\gamma + \frac{\rho}{T}\nu\right) = 0\,.$$

Questa rappresenta un piano che passa pel punto (x, y, z) di Γ, e la caratteristica del piano rettificante è quindi una retta uscente dal punto $M \equiv (x, y, z)$ di Γ, che dicesi la retta *rettificante*. La sviluppabile Σ passa dunque per la curva Γ e la normale principale di Γ coincide colla normale a Σ.

In generale, come già abbiamo detto (§. 10 nota), una curva tracciata sopra una qualunque superficie S che abbia in ogni suo punto la normale principale coincidente colla normale alla superficie è una linea *geodetica* di questa e segna il più breve cammino fra due suoi punti. Dunque la nostra sviluppabile Σ contiene la curva Γ come geodetica ed è l'unica sviluppabile condotta per Γ che abbia tale proprietà. Il nome di sviluppabile rettificante proviene appunto da ciò che, distendendo Σ in un piano, la curva Γ si trasforma in una retta (si rettifica).

La retta rettificante intersezione dei piani (20) (21) ha i coseni di direzione proporzionali ai binomii

$$\frac{\rho}{T}\alpha - \lambda\,,\quad \frac{\rho}{T}\beta - \mu\,,\quad \frac{\rho}{T}\gamma - \nu\,,$$

onde pel suo angolo σ d'inclinazione sulla tangente abbiamo

$$\cos\sigma = \frac{\frac{\rho}{T}}{\sqrt{1+\frac{\rho^2}{T^2}}}\,,\quad \operatorname{sen}\sigma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\rho^2}{T^2}}}\,,\quad \operatorname{cot}\sigma = \frac{\rho}{T}\,.$$

Come si vede, l'angolo σ d'inclinazione della retta rettificante sulla tangente è costante nel solo caso delle eliche cilindriche $\left(\frac{\rho}{T} = \text{cost}^{te}\right)$. In questo caso la sviluppabile rettificante è manifestamente il cilindro stesso e le rette rettificanti sono le generatrici.

Escludendo ora il caso delle eliche, il rapporto $\frac{\rho}{T}$ sarà un'effettiva funzione di s, poniamo

$$\frac{\rho}{T} = \psi(s)$$

e supponiamo che la $\psi(s)$ abbia derivata prima e seconda (1). Cerchiamo allora lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante e per questo torniamo a derivare la (21) rapporto ad s, colle formole

(1) In aggiunta alle ipotesi fatte al §. 1 occorre qui per x, y, z, l'esistenza anche delle derivate quinte.

di Frenet e tenendo conto della (20), onde risulta

$$\psi'(s)\{(X-x)\lambda + (Y-y)\mu + (Z-z)\nu\} = 1\,. \tag{22}$$

Risolvendo le (20), (21), (22) rapporto ai binomi $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, per le coordinate x_1, y_1, z_1 del punto ove la retta rettificante tocca il corrispondente spigolo di regresso troviamo

$$\begin{cases} x_1 = x - \dfrac{\psi}{\psi'}\alpha + \dfrac{1}{\psi'}\lambda\,, \\ y_1 = y - \dfrac{\psi}{\psi'}\beta + \dfrac{1}{\psi'}\mu\,, \\ z_1 = z - \dfrac{\psi}{\psi'}\gamma + \dfrac{1}{\psi'}\nu\,. \end{cases} \tag{23}$$

Può però darsi il caso che questo spigolo di regresso si riduca ad un punto, cioè la sviluppabile rettificante sia un cono, di cui dunque la curva Γ sarà una *geodetica*. Ciò avviene se nelle (23) risultano x_1, y_1, z_1, costanti. Ma derivando si ha subito

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{\psi''}{\psi'^2}(\psi\alpha - \lambda)\,,\quad \frac{dy_1}{ds} = \frac{\psi''}{\psi'^2}(\psi\beta - \mu)\,,\quad \frac{dz_1}{ds} = \frac{\psi''}{\psi'^2}(\psi\gamma - \nu)\,,$$

onde si vede che x_1, y_1, z_1 si ridurranno a costanti nel solo caso in cui sia $\psi'' = 0$, $\psi(s) = as + b$ (con a, b costanti). Si ha dunque il risultato: *Le curve geodetiche dei coni sono caratterizzate dall'equazione intrinseca*:

$$\frac{\rho}{T} = as + b\,.$$

In questo risultato rientra anche quello relativo alle eliche (geodetiche di cilindri), ove però $a = 0$.

§. 16.

Determinazione delle geodetiche di una sviluppabile

Trattiamo ora il problema inverso di quello al paragrafo precedente, e cioè: data una curva Γ, cerchiamo tutte le curve Γ_1 di cui Γ è spigolo di regresso della sviluppabile rettificante. In altri termi-

ci domandiamo di : *determinare tutte le linee geodetiche di una sviluppabile data.*

Sia Γ lo spigolo di regresso della sviluppabile, e mantenendo per la curva Γ le consuete notazioni, (1) consideriamo una geodetica Γ_1 della sviluppabile e sia $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ il punto di Γ_1 situato sulla tangente in $M \equiv (x, y, z)$ alla Γ. Se con t indichiamo il valore algebrico del segmento MM_1, avremo

$$x_1 = x + t\alpha, \quad y_1 = y + t\beta, \quad z_1 = z + t\gamma, \tag{24}$$

e il problema consiste nel determinare t in funzione di s in guisa che la curva Γ_1 rappresentata dalle (24) abbia la normale principale parallela alla binormale della curva Γ. Dalle (24) derivando abbiamo :

$$\frac{dx_1}{ds} = \left(1 + \frac{dt}{ds}\right)\alpha + \frac{t}{\rho}\xi, \quad \frac{dy_1}{ds} = \left(1 + \frac{dt}{ds}\right)\beta + \frac{t}{\rho}\eta, \quad \frac{dz_1}{ds} = \left(1 + \frac{dt}{ds}\right)\gamma + \frac{t}{\rho}\zeta,$$

e quindi, se coll'apposizione dell'indice 1 indichiamo le quantità relative a Γ_1, risulta

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{t^2}{\rho^2} + \left(1 + \frac{dt}{ds}\right)^2},$$

$$\alpha_1 = \alpha\cos\sigma + \xi\operatorname{sen}\sigma, \quad \beta_1 = \beta\cos\sigma + \eta\operatorname{sen}\sigma, \quad \gamma_1 = \gamma\cos\sigma + \zeta\operatorname{sen}\sigma, \tag{24*}$$

dove si è posto

$$\cos\sigma = \frac{1 + \frac{dt}{ds}}{\frac{ds_1}{ds}}, \qquad \operatorname{sen}\sigma = \frac{\frac{t}{\rho}}{\frac{ds_1}{ds}},$$

(1) Lasciamo da parte il caso ovvio che, riducendosi Γ ad un punto, la sviluppabile sia un cono. In questo caso l'*elemento lineare ds* del cono è quello stesso del piano in coordinate polari:

$$ds^2 = dt^2 + t^2\,d\theta^2$$

essendo t la lunghezza di generatrice, θ l'angolo di una generatrice variabile con una fissa, e l'equazione delle geodetiche è quella stessa delle rette del piano in coordinate polari :

$$t\cos(\theta - \sigma) = \sigma'.$$

indi

$$\cot\sigma = \frac{\rho}{t}\left(1 + \frac{dt}{ds}\right). \tag{25}$$

ove σ significa l'angolo d'inclinazione della Γ_1 sulla tangente a Γ.

Derivando nuovamente le (24*), risultano nel primo membro quantità proporzionali a ξ_1, η_1, ζ_1 cioè, per ipotesi a λ, μ, ν; dovremo dunque avere

$$\frac{d}{ds}(\alpha\cos\sigma + \xi\operatorname{sen}\sigma) = k\lambda, \quad \frac{d}{ds}(\beta\cos\sigma + \eta\operatorname{sen}\sigma) = k\mu, \quad \frac{d}{ds}(\gamma\cos\sigma + \zeta\operatorname{sen}\sigma) = k\nu,$$

essendo k un fattore di proporzionalità, e queste esprimono le condizioni necessarie e sufficienti del problema. Eseguendo le derivazioni troviamo

$$\begin{cases} -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\alpha + \cos\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\xi - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\lambda = k\lambda \\ -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\beta + \cos\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\eta - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\mu = k\mu \\ -\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\gamma + \cos\sigma\left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{1}{\rho}\right)\zeta - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\nu = k\nu, \end{cases}$$

che equivalgono alle due

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \quad k = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}. \tag{25*}$$

Dalla prima si ha subito σ con una quadratura

$$\sigma = \sigma - \int\frac{ds}{\rho}, \tag{26}$$

che introduce una prima costante arbitraria c poi sostituendo nella (25) col prendere σ per variabile indipendente si ha l'equazione lineare del 1° ordine

$$\frac{dt}{d\sigma} = \rho - t\cot\sigma,$$

che ha per integrale

$$t = \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\left(\sigma' - \int \operatorname{sen}\vartheta\, ds\right) \tag{26*}$$

con σ' nuova costante arbitraria. Dunque: *data la sviluppabile, si ottiene con due quadrature la doppia infinità delle sue linee geodetiche.*

È da osservarsi che le due quadrature (26), (26*) non dipendono affatto dalla torsione $\frac{1}{T}$ e rimangono quindi le stesse se la curva Γ si deforma torcendola senza cambiare la flessione. Considerando una altra tale forma della Γ, sia Γ', le due corrispondenti sviluppabili Σ, Σ' saranno distendibili l'una sull'altra (applicabili) in guisa che Γ, Γ' si sovrappongano per i loro punti corrispondenti e le generatrici di Σ si distendano sulle corrispondenti di Σ'. (1).

Con ciò l'osservazione precedente acquista il significato che: *ogni geodetica di Σ si distende sopra una geodetica di Σ'*, la quale proprietà è un caso particolare di un teorema che incontreremo più tardi.

In particolare si può prendere per Γ' la trasformata piana di Γ, di modo che Σ' diventa il piano stesso come luogo delle tangenti a Γ', e le geodetiche di Σ' sono in questa configurazione le rette del piano. Questo viene confermato dalla seconda formola (25*), poichè, annullandosi la torsione, diventa $k = 0$, e per ciò:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\beta_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = 0.$$

Le linee Γ_1, avendo allora fissa la direzione della tangente, diventano adunque rette.

§. 17.

Sviluppabile polare.

La terza sviluppabile, che dobbiamo ora considerare è quella del piano inviluppo del piano normale:

(1) Geometricamente la cosa è intuitiva quando si riguardi la sviluppabile come costituita di infinite striscie comprese fra una generatrice e la successiva. La deformazione avviene allora facendo rotare ciascuna striscia attorno alla generatrice comune colla precedente di un angolo conveniente (infinitesimo), ciò che non altera la flessione dello spigolo di regresso.

$$(X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0, \tag{27}$$

che già abbiamo detto (§ 14) chiamarsi sviluppabile polare.

Derivando la (27) rapporto al parametro s, otteniamo

$$(X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = \rho, \tag{28}$$

e la caratteristica del piano normale è quindi la sua intersezione con quest'ultimo piano, il quale è perpendicolare alla normale principale nel punto $M_1 = (x+\rho\xi, y+\rho\eta, z+\rho\zeta)$ situato sulla normale principale, dalla parte positiva, alla distanza ρ dal punto M della curva Γ. Ora questo punto M_1 si dice il *centro di curvatura* di Γ in M, mentre il circolo descritto nel piano osculatore col centro in M e raggio $M M_1 = \rho$ prende il nome di *circolo osculatore* o circolo di curvatura, perchè fra tutti i circoli che toccano in M la curva è quello che ha colla curva il più intimo contatto (1).

La generatrice della sviluppabile polare è adunque la normale al piano osculatore nel centro del circolo osculatore, o come si dice l'*asse del circolo osculatore*; per ciò: *La sviluppabile polare è il luogo di tutti gli assi dei circoli osculatori.* Si osserverà che se la curva Γ fosse piana, la sua sviluppabile polare sarebbe la superficie cilindrica, con generatrici normali al piano di Γ, ed avente per sezione retta la evoluta piana di Γ.

Ritornando al caso generale, cerchiamo il punto M_0 dove l'asse del circolo osculatore tocca lo spigolo di regresso, che diremo Γ_0, della sviluppabile polare. Per questo bisogna associare alle (27), (28) l'equazione ottenuta da quest'ultima con una nuova derivazione, cioè

$$(X-x)\lambda + (Y-y)\eta + (Z-z)\nu = -T\frac{d\rho}{ds} \tag{29}$$

Risolvendo le (27), (28), (29) rispetto alle differenze

$$X-x, \quad Y-y, \quad Z-z,$$

per le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 troviamo:

(1) Facilmente si dimostra che se si descrive un circolo che tocchi la curva in M e passi per un suo punto vicino M', poi si fa convergere M' verso M, il detto circolo tende al circolo osculatore come circolo limite.

$$(30)\qquad \begin{cases} x_0 = x + \rho\xi - T\dfrac{d\rho}{ds}\lambda \\ y_0 = y + \rho\eta - T\dfrac{d\rho}{ds}\mu \\ z_0 = z + \rho\zeta - T\dfrac{d\rho}{ds}\nu, \end{cases}$$

e queste sono le equazioni parametriche dello spigolo di regresso Γ_0 della sviluppabile polare.

§. 18.

La sfera osculatrice.

Le formole (30) ora ottenute possono riguardarsi sotto un secondo aspetto come determinanti il centro della *sfera osculatrice*, alla quale (in analogia della definizione del piano osculatore (§. 3) siamo condotti cercando fra tutte le sfere che passano per un punto $M \equiv (x, y, z)$ di una curva Γ quella che meno di ogni altra si scosta, nell' intorno di M, dalla curva (che ha più intimo contatto colla curva).

Consideriamo dapprima una sfera qualunque che passi pel punto $M \equiv (x, y, z)$, e indichiamo con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del suo centro, con R il raggio, talchè

$$R^2 = (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2 .$$

Pei calcoli seguenti è opportuno scrivere $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sotto la forma

$$(31)\qquad \begin{cases} \bar{x} = x + a\alpha + b\xi + c\lambda \\ \bar{y} = y + a\beta + b\eta + c\mu \\ \bar{z} = z + a\gamma + b\zeta + c\nu , \end{cases}$$

dove dunque a, b, c sono le coordinate del centro della sfera *rispetto al triedro principale*, e quindi

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

Prendiamo ora un punto M′ della curva vicino a Γ e corrispondente al valore $s + h$ dell' arco, con h infinitesimo del 1° ordine, e

calcoliamo la potenza P di M′ rispetto alla sfera *sino agli infinitesimi di terzo ordine*. Dette $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, le coordinate di M′, abbiamo

$$P = (x - \bar{x} + \Delta x)^2 + (y - \bar{y} + \Delta y)^2 + (z - \bar{z} + \Delta z)^2 - R^2 ,$$

cioè

$$P = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - 2\{(\bar{x} - x)\Delta x + (\bar{y} - y)\Delta y + (\bar{z} - z)\Delta z\} ,$$

o con notazione abbreviata (1).

$$P = S(\Delta x)^2 - 2S(a\alpha + b\xi + c\lambda)\Delta x .$$

Ora per le formole (B) pag. 13, *trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al terzo* abbiamo

$$\Delta x = h\alpha + \frac{h^2}{2\rho}\xi - \frac{h^3}{6\rho}\left\{\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{T} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\xi\right\}$$

e quindi

$$S(\Delta x)^2 = h^2$$

$$S(a\alpha + b\xi + c\lambda)\Delta x = ah + \frac{b}{2\rho}h^2 - \frac{h^3}{6\rho}\left\{\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \frac{c}{T}\right\},$$

da cui

$$(32)\qquad P = -2ah + \left(1 - \frac{b}{\rho}\right)h^2 + \frac{h^3}{3\rho}\left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \frac{c}{T}\right) + \varepsilon$$

con ε infinitesimo, d' ordine superiore al terzo.

Ora, indicando con δ la distanza (assoluta) infinitesima del punto M′ dalla superficie sferica, abbiamo

$$P = \delta(2R + \delta) \quad \text{se } P > 0 \text{ (M′ esterno)}$$
$$P = -\delta(2R - \delta) \text{ se } P < 0 \text{ (M′ interno)} ,$$

ed in ogni caso δ è un infinitesimo dello stesso ordine di P. Se vogliamo dunque che questo infinitesimo sia dell' ordine più alto possibile bisognerà nella (32) annullare i tre coefficienti di h, h^2, h^3 il che dà:

(1) Qui, come sempre in seguito, usiamo il simbolo sommatorio S per indicare la somma di tre termini simili rispetto ai tre assi coordinati.

$$(33) \qquad a = 0\ ,\quad b = \rho\ ,\quad c = -\,\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}$$

e le formole (31) vengono allora precisamente a coincidere colle (30).

Si osservi che la prima (33) $a = 0$, o $\mathrm{S}(x - x)\alpha = 0$ dice che la sfera tocca in M la curva; la seconda $b = \rho$ che il centro della sfera è sull' asse del circolo osculatore, ossia che la nostra sfera passa pel circolo osculatore, e in fine la terza che il centro della sfera coincide col punto M_0 ove l'asse del circolo osculatore tocca lo spigolo di regresso Γ_0 della sviluppabile polare. Il calcolo eseguito dimostra appunto che la sfera così determinata è quella che ha in M il più intimo contatto colla curva; per ciò appunto dicesi *sfera osculatrice*. Essa può anche riguardarsi come la posizione limite di una sfera che sia condotta pel circolo osculatore e per un punto vicino M' della curva, quando M' si accosta indefinitamente ad M. Come si vede, per ogni sfera del fascio di sfere condotte per il circolo osculatore, che non coincide colla sfera osculatrice, P è un infinitesimo del terzo ordine, e quindi la sfera è attraversata dalla curva; soltanto per la sfera osculatrice l' infinitesimo diventa d' ordine superiore al terzo, *generalmente* del quarto, e la curva non attraversa la sfera (1).

Notiamo che il raggio R della sfera osculatrice, avendosi $\mathrm{R}^2 = a^2 + b^2 + c^2$, è dato da

$$(34) \qquad \mathrm{R}^2 = \rho^2 + \left(\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}\right)^2$$

Nel solo caso delle curve a flessione costante $\left(\frac{d\rho}{ds} = 0\right)$ il centro della sfera osculatrice coincide costantemente col centro del circolo osculatore.

(1) Ammessa l' esistenza anche delle derivate del quarto ordine x^{IV}, y^{IV}, z^{IV} (finite e continue), si trova che la parte del 4° ordine in P è data da

$$\mathrm{P} = \frac{h^4}{12\,\rho\,\mathrm{T}}\left\{\frac{\rho}{\mathrm{T}} + \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\,\frac{d\rho}{ds}\right)\right\} + \dots$$

L' arco della curva nell' intorno di M è tutto esterno alla sfera osculatrice se il coefficiente di h^4 è positivo, tutto interno se negativo. L' infinitesimo è d'ordine superiore al quarto se il detto coefficiente si annulla (sfera osculatrice stazionaria cf. §. seguente).

§. 19.

Curva Γ_0 luogo dei centri delle sfere osculatrici.

Andiamo ora a studiare, in relazione colla curva data Γ, la curva Γ_0 luogo dei centri M_0 delle sfere osculatrici, che coincide per quanto si è visto collo spigolo di regresso della sviluppabile polare.

In primo luogo derivando rapporto ad s le (30), e ponendo per brevità

$$(35) \qquad \mathrm{M} = \frac{\rho}{\mathrm{T}} + \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}\right),$$

otteniamo

$$(36) \qquad \frac{dx_0}{ds} = -\,\mathrm{M}\lambda\,,\quad \frac{dy_0}{ds} = -\,\mathrm{M}\mu\,,\quad \frac{dz_0}{ds} = -\,\mathrm{M}\nu\ .$$

Consideriamo dapprima il caso particolare notevole in cui sia $\mathrm{M} = 0$, cioè

$$\frac{\rho}{\mathrm{T}} + \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Allora per le (36) sono costanti x_0, y_0, z_0, cioè il centro della sfera osculatrice è immobile; ma di più è costante anche il raggio R di questa sfera, poichè dalla (34) derivando risulta

$$(36^*) \qquad \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \mathrm{M}\,\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}\,,$$

indi nel caso attuale $\frac{d\mathrm{R}}{ds} = 0$. Dunque in questo caso la curva Γ è descritta su questa sfera; e viceversa se la curva è sferica, tutti i piani normali della curva passano pel centro della sfera, che è sfera osculatrice per tutti i punti. Dunque: *L' equazione intrinseca*

$$(37) \qquad \frac{\rho}{\mathrm{T}} + \frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}\right) = 0$$

è caratteristica per le curve (gobbe) (1) *sferiche.*

(1) L' unica curva piana sferica è il circolo $\frac{1}{\mathrm{T}} = 0$, $\rho = \text{cost.te}$.

Se la curva Γ non è sferica, il centro della sfera osculatrice descrive un' effettiva curva Γ_0, e noi ne andiamo a calcolare gli elementi, che indicheremo coll'apposizione dell' indice o. Dalle (36) avremo in primo luogo

$$\frac{ds_0}{ds} = \varepsilon M \tag{38}$$

con $\varepsilon = \pm 1$ e se conveniamo di contare s_0 crescente con s, dovremo dare ad ε il segno stesso di M, del cui significato geometrico abbiamo già discorso in nota al paragrafo precedente (3).

Ora abbiamo dalle (36)

$$\alpha_0 = -\varepsilon\lambda\,, \quad \beta_0 = -\varepsilon\mu\,, \quad \gamma_0 = -\varepsilon\nu\,, \tag{39}$$

e nuovamente differenziando

$$\frac{ds_0}{\rho_0}\xi_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\xi\,, \quad \frac{ds_0}{\rho_0}\eta_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\eta\,, \quad \frac{ds_0}{\rho_0}\zeta_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\zeta\,,$$

da cui

$$\frac{ds_0}{\rho_0} = \varepsilon'\frac{ds}{T} \tag{40}$$

con $\varepsilon' = \pm 1$, dello stesso segno di $\frac{1}{T}$.

Ne risulta

$$\xi_0 = -\varepsilon\varepsilon'\xi\,, \quad \eta_0 = -\varepsilon\varepsilon'\eta\,, \quad \zeta_0 = -\varepsilon\varepsilon'\zeta \tag{39'}$$

e quindi

$$\lambda_0 = -\varepsilon'\alpha\,, \quad \mu_0 = -\varepsilon'\beta\,, \quad \nu_0 = -\varepsilon'\gamma\,. \tag{39''}$$

Infine differenziando queste ultime risulta per la (39')

$$\frac{ds_0}{T_0} = \varepsilon\frac{ds}{\rho}\,. \tag{41}$$

Le formole precedenti pongono in evidenza che per ciascuna delle due curve Γ, Γ_0 la tangente dell' una è parallela alla binormale del-

(3) Si osserverà che se M si annulla in un punto, ivi $\frac{dR}{ds} = 0$, cioè la sfera osculatrice è stazionaria e la curva Γ_0 ha nel punto corrispondente generalmente un regresso.

l' altra, e le due normali principali sono parallele, risultati che (prescindendo dalla precisa determinazione dei segni) sono di immediata evidenza geometrica.

Si osserverà poi come le tre formole (38), (40), (41)

$$\frac{ds_0}{ds} = \varepsilon\left\{\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right)\right\}, \quad \frac{ds_0}{\rho_0} = \varepsilon'\frac{ds}{T}\,, \quad \frac{ds_0}{T_0} = \varepsilon\frac{ds}{\rho}$$

e la conseguente

$$\frac{\rho_0}{T_0}\cdot\frac{\rho}{T} = \varepsilon\varepsilon'\,,$$

bastino già per calcolare (con una quadratura) le equazioni intrinseche di Γ_0 note quelle di Γ.

P. e. se la curva Γ è un' elica, anche Γ_0 è un'elica (e viceversa); se Γ è un' elica circolare, ovvero un' elica cilindro conica, lo stesso accade di Γ_0.

Nei risultati precedenti è notevole il caso particolare delle curve a flessione costante. Allora è $M = \frac{\rho}{T}$, $\varepsilon = \varepsilon'$, indi

$$ds_0 = \varepsilon\frac{\rho}{T}ds$$

$$\rho_0 = \rho\,, \quad TT_0 = \rho^2$$

$$\xi_0 = -\xi\,, \quad \eta_0 = -\eta\,, \quad \zeta = -\zeta\,.$$

Queste formole esprimono il teorema (di Monge):

Per ogni curva Γ a flessione costante $\frac{1}{a}$ la curva Γ_0 luogo dei suoi centri di curvatura ha la stessa flessione costante $\frac{1}{a}$ e il prodotto delle due torsioni eguaglia il quadrato della flessione; le due curve Γ, Γ_0 hanno a comune le normali principali e sono in relazione involutoria, cioè Γ è alla sua volta il luogo dei centri di curvatura di Γ_0.

Si è già osservato che per ogni curva a flessione costante $\frac{1}{a}$ il raggio della sfera osculatrice è pure costante $= a$, come pure è costante tale raggio per le curve sferiche. Viceversa: *Se il raggio della sfera osculatrice è costante, la curva è sferica, ovvero a flessione costante.*

E infatti per la (36*), se $\frac{dR}{ds} = 0$, si ha necessariamente

$$M = 0 , \text{ o } \frac{dp}{ds} = 0 ;$$

nel primo caso la curva è sferica, nel secondo a flessione costante.

§. 20.

Evolventi ed evolute.

Consideriamo la sviluppabile Σ delle tangenti ad una curva Γ e proponiamoci di trovare le *traiettorie ortogonali* delle generatrici cioè le curve Γ' che tagliano ad angolo retto queste generatrici. Sia $M \equiv (x, y, z)$ un punto qualunque di Γ, $M' \equiv (x', y', z')$ il punto ove una di queste curve Γ' interseca ortogonalmente la tangente in M.

Se poniamo $\overline{MM'} = t$, avremo

$$x' = x + t\alpha , \quad y' = y + t\beta , \quad z' = z + t\gamma$$

e dovremo determinare t in funzione di s in guisa che la tangente a Γ' sia normale alla tangente a Γ, cioè si abbia

$$\alpha \frac{dx'}{ds} + \beta \frac{dy'}{ds} + \gamma \frac{dz'}{ds} = 0.$$

Ne risulta

$$\frac{dt}{ds} = -1,$$

indi $t = c - s$, con c costante arbitraria. Esistono dunque, come è intuitivo geometricamente, ∞^1 tali curve Γ', date dalle formole:

$$(42) \qquad x' = x + (c - s)\alpha , \; y' = y + (c - s)\beta , \; z' = z + (c - s)\gamma .$$

Per una qualunque di esse, contando s da una conveniente origine su Γ, si può fare $c = 0$, $\overline{MM'} = t = -s$, onde si vede che se si avvolge un filo flessibile ed inestendibile sulla curva, e se si svolge dalla curva (a partire dall' origine degli archi) per modo che il filo resti sempre teso, la porzione rettilinea MM' di filo svolto resterà sempre tangente in M alla curva Γ, eguagliando sempre in lunghezza

l'arco s. L'estremità libera M' del filo descriverà dunque la curva Γ', che dicesi perciò una *evolvente* (o sviluppante) di Γ, mentre Γ prende il nome di *evoluta* (o sviluppata) di Γ'. Così: *Ogni curva* Γ *ha una semplice infinità di evolventi, le traiettorie ortogonali delle generatrici sulla sviluppabile delle tangenti di* Γ.

Si osservi che le (42) (supposto $c = 0$) dànno derivando

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{s}{\rho}\xi , \quad \frac{dy'}{ds} = -\frac{s}{\rho}\eta , \quad \frac{dz'}{ds} = -\frac{s}{\rho}\zeta$$

e per ciò contando s' crescente con s

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{s}{\rho} ,$$

e

$$\alpha' = -\xi , \quad \beta' = -\eta , \quad \gamma' = -\zeta ,$$

in parole: *la tangente all' evolvente è parallela, ed opposta in direzione, alla normale principale della evoluta.*

Occupiamoci ora del problema inverso: *Trovare tutte le evolute di una data curva* Γ. Indicando con Γ' una qualunque delle evolute cercate, dovrà Γ' essere lo spigolo di regresso di una sviluppabile formata con una semplice infinità di normali alla curva Γ (1). Se riferiamo il punto M' dell' evoluta Γ', giacente nel piano normale in M alla evolvente Γ, alla normale principale ed alla binormale, come assi mobili ausiliarii, e indichiamo le relative coordinate di M' con u, v, per le coordinate ordinarie x', y', z' di M' avremo

$$x' = x + u\xi + v\lambda , \quad y' = y + u\eta + v\mu , \quad z' = z + u\zeta + v\nu .$$

Si tratta ora di determinare u, v in funzione di s in guisa che la tangente in M' a questa curva Γ' sia precisamente la normale MM' della Γ, cioè in guisa che

$$\frac{dx'}{ds} , \quad \frac{dy'}{ds} , \quad \frac{dz'}{ds}$$

---

(1) La totalità ∞^2 delle normali a Γ è una *congruenza* di raggi, come più tardi diremo, anzi una congruenza normale (delle normali alle superficie canali coll' asse curvilineo Γ).

Una prima serie di sviluppabili, costituite da raggi della congruenza, è data dai piani normali a Γ; una seconda serie è data dalle tangenti alle evolute di Γ, come si determinano nel testo.

riescano proporzionali ai binomii

$$u\xi + v\lambda, \quad u\eta + v\mu, \quad u\zeta + v\nu.$$

Siccome

$$\frac{dx'}{ds} = \left(1 - \frac{u}{\rho}\right)\alpha + \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{T}\right)\xi + \left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{T}\right)\lambda,$$

questo porta che si abbia

$$u = \rho, \quad \frac{1}{u}\left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{T}\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{T}\right),$$

ossia

$$u = \rho, \quad \frac{\rho\frac{dv}{ds} - v\frac{d\rho}{ds}}{v^2 + \rho^2} = \frac{1}{T}.$$

L'ultima integrata dà

$$arctg\,\frac{v}{\rho} = \int_0^s \frac{ds}{T} + c,$$

cioè

$$v = \rho\, tg\,(\tau + c),$$

dove c è una costante arbitraria, e si è posto

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{T}.$$

Il problema proposto si risolve dunque con una quadratura mediante le formole:

$$(42)\quad x' = x + \rho\xi + \rho\, tg\,(\tau + c)\lambda,\ y' = y + \rho\eta + \rho\, tg\,(\tau + c)\mu,\ z' = z + \rho\zeta + \rho\, tg\,(\tau + c)\nu$$

$$\left(\tau = \int_0^s \frac{ds}{T}\right),$$

dalle quali risulta che vi sono ∞^1 evolute di Γ, tutte tracciate sulla sua sviluppabile polare. Poichè inoltre la normale principale di ogni evoluta è parallela alla tangente dell'evolvente, e coincide quindi colla normale di questa sviluppabile, vediamo che tutte le evolute sono geodetiche della sviluppabile polare. Se si spiega questa sviluppabile in un piano, le evolute si cangiano in un sistema di rette, più precisamente nelle rette di un fascio.

Si osservi che se la Γ è una curva piana, essa ha una sola evoluta piana, il luogo dei suoi centri di curvatura; le altre evolute sono eliche del cilindro retto (sviluppabile polare) che ha per base l'evoluta piana.

Alle formole (42) che dànno le evolute, conviene aggiungere le altre che dànno i coseni di direzione delle loro tangenti:

$$(42^a)\quad \alpha' = \cos(\tau + c)\xi + \operatorname{sen}(\tau + c)\lambda,\ \beta' = \cos(\tau + c)\eta + \operatorname{sen}(\tau + c)\mu,$$
$$\gamma' = \cos(\tau + c)\zeta + \operatorname{sen}(\tau + c)\nu$$

onde risulta $S\xi\alpha' = \cos(\tau + c)$, cioè $\tau + c$ è *l'angolo che la tangente all'evoluta forma colla normale principale all'evolvente*. Ne segue che se si considera una seconda evoluta Γ'' corrispondente ad un altro valore c' della costante, avremo

$$\alpha'' = \cos(\tau + c')\alpha + \operatorname{sen}(\tau + c')\lambda,\ \beta'' = \cos(\tau + c')\beta + \operatorname{sen}(\tau + c')\mu,$$
$$\gamma'' = \cos(\tau + c')\gamma + \operatorname{sen}(\tau + c')\nu,$$

e quindi

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \cos(c - c') = \text{cost.te}$$

Abbiamo quindi il notevole teorema:

A) *Le tangenti a due diverse evolute, uscenti (normalmente) da un medesimo punto della evolvente* Γ, *formano fra loro un angolo costante lungo* Γ.

È utile enunciarlo anche sotto l'altra forma:

B) *Se le generatrici di una sviluppabile si fanno rotare attorno ai rispettivi punti d'incontro con una loro trajettoria ortogonale, nel piano normale di questa, di un angolo costante, il luogo delle nuove posizioni delle generatrici è un'altra superficie sviluppabile.*

§. 21.

Traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di piani.

Analogo al problema ora risoluto di trovare le evolute di una curva data è l'altro: *Determinare tutte le curve* Γ' *di cui una curva assegnata* Γ *è il luogo dei centri delle sfere osculatrici.*

Siccome i piani osculatori di Γ debbono essere i piani normali della Γ', il problema proposto equivale alla ricerca delle curve Γ' che tagliano ortogonalmente una serie ∞^2 assegnata di piani [1]. Se Γ' è una tale curva, ed M′ il punto ove essa incontra ortogonalmente il piano osculatore della Γ in M, fissiamo la posizione di M′ in questo piano mediante le sue coordinate cartesiane ortogonali l, m, riferite alla tangente ed alla normale principale come assi. Per le coordinate x', y', z' di M′ avremo

$$(43) \qquad x' = x + l\alpha + m\xi, \; y' = y + l\beta + m\eta, \; z' = z + l\gamma + m\zeta,$$

e la condizione imposta alla Γ', luogo di M′, porta che $\frac{dx'}{ds}, \frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds}$ siano proporzionali a λ, μ, ν; ne seguono per le incognite l, m le due condizioni (necessarie e sufficienti)

$$(a) \qquad \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{\rho}, \quad \frac{dl}{ds} = \frac{m}{\rho} - 1,$$

soddisfatte le quali restano le formole

$$(44) \qquad \frac{dx'}{ds} = -\frac{m}{T}\lambda, \; \frac{dy'}{ds} = -\frac{m}{T}\mu, \; \frac{dz'}{ds} = -\frac{m}{T}\nu.$$

Il sistema lineare (a) s'integra nel modo più semplice prendendo per variabile indipendente, in luogo di s

$$\sigma = \int_0^s \frac{ds}{\rho};$$

così le (a) diventano

$$\frac{dl}{d\sigma} = m - \rho, \quad \frac{dm}{d\sigma} = -l,$$

e integrando abbiamo

[1] Si osservi che nel caso che la semplice infinità di piani inviluppino un cono o un cilindro, le traiettorie ortogonali dei piani sarebbero sferiche o piane e la ricerca si compirebbe subito direttamente. Nel caso del cono si tratta di trovare sulla sfera le traiettorie ortogonali di una serie ∞^1 di circoli massimi, e in quello del cilindro di trovare in un piano le evolventi di una curva del piano.

$$(45) \qquad \begin{cases} m = c\cos\sigma + c'\operatorname{sen}\sigma - \cos\sigma\int_0^s \operatorname{sen}\sigma\, ds + \operatorname{sen}\sigma\int_0^s \cos\sigma\, ds \\ l = c\operatorname{sen}\sigma - c'\cos\sigma - \operatorname{sen}\sigma\int_0^s \operatorname{sen}\sigma\, ds + \cos\sigma\int_0^s \cos\sigma\, ds, \end{cases}$$

essendo c, c' due costanti arbitrarie. Sostituendo questi valori di l, m nelle (43) avremo così determinate, per quadrature, le traiettorie ortogonali Γ' dei piani, le quali formano, come era geometricamente evidente, una doppia infinità.

Analogamente come pel problema al §. 16, si osservi che i valori trovati per l, m, e quindi anche quello del raggio $R = \sqrt{l^2 + m^2}$ della sfera, contengono solo la flessione $\frac{1}{\rho}$ e si mantengono quindi i medesimi se la curva Γ si deforma, mantenendo la stessa flessione e cangiando comunque la torsione. Se adunque si immagina che la curva Γ, deformandosi, trascini seco i suoi piani osculatori coi loro punti, invariabilmente fissati in ciascuno di essi: *il luogo di quei punti, che formavano una trajettoria ortogonale Γ' in una configurazione di Γ, continua sempre a formare una tale trajettoria ortogonale, dopo qualunque deformazione.*

In particolare è interessante osservare quello che accade se Γ, deformandosi, si cangia nella sua trasformata piana, che diremo C (se si spiega la sviluppabile delle tangenti di Γ in un piano).

Quando Γ acquista la configurazione piana C, la torsione $\frac{1}{T}$ si annulla e le formole (44) dimostrano che x', y', z' diventano costanti, cioè ciascuna trajettoria ortogonale Γ' si riduce ad un punto del piano di C. Ed inversamente se C si deforma in Γ, un punto qualunque O fissato nel piano di C acquista, nei diversi piani osculatori di Γ, una semplice infinità di posizioni il cui luogo è appunto una delle ∞^2 trajettorie ortogonali Γ' cercate. Possiamo dare a questo risultato una forma più espressiva immaginando che preso un qualunque punto M di Γ si collochi ivi la curva C a toccare Γ nel punto corrispondente (ad eguale arco) e per modo che il piano di C coincida col piano osculatore di Γ (il centro di curvatura di C col centro di curvatura di Γ). Così la curva C subisce un movimento continuo ad un parametro, e noi diremo che essa *rotola* sopra Γ (per archi eguali). Dunque: *Per trovare tutte le ∞^2 trajettorie ortogonali Γ' dei*

piani osculatori di Γ *si faccia rotolare sopra* Γ *la sua trasformata piana* C *; un punto qualunque nel piano di* C, *trascinato rigidamente nel movimento, descrive una delle trajettorie ortogonali cercate* (1).

Una conseguenza immediata di questa costruzione è che, riguardando su due piani qualunque osculatori di Γ come punti corrispondenti quelli d' incontro con una medesima traiettoria ortogonale Γ', la corrispondenza fra i due piani è eguaglianza di figure, essendo le due figure eguali alla corrispondente nel piano di C. Abbiamo quindi: *Le trajettorie ortogonali di una serie* ∞^1 *di piani segnano su due piani qualunque della serie una corrispondenza che è una eguaglianza delle figure.*

§ 22.

Trasformazione di Combescure delle curve.

Date due curve gobbe Γ, Γ_1, se è possibile stabilire una tale corrispondenza fra le due curve che ad ogni punto M di Γ ne corrisponda uno M_1 di Γ_1 in guisa che: *le tangenti in due punti corrispondenti siano sempre parallele*, si dirà che le due curve si ottengono l' una dall' altra per *trasformazione di Combescure* (2). Affinchè due curve Γ, Γ_1 siano trasformate di Combescure l' una dell' altra è evidentemente necessario e sufficiente che abbiano a comune l' indicatrice sferica delle tangenti, come accade p. e. per due curve omotetiche, o per due curve piane in piani paralleli. Siccome poi, per le formole di Frenet, la tangente all' indicatrice sferica delle tangenti di una curva è parallela alla normale principale di quest' ultima, così anche le normali principali di Γ, Γ_1 sono parallele, conseguentemente le binormali: *In due curve* Γ, Γ_1 *trasformate di Combescure i due triedri principali in punti corrispondenti hanno eguale orientazione.*

In particolare i piani osculatori di Γ, Γ_1 in punti corrispondenti sono paralleli; ma anche viceversa se due curve Γ, Γ_1 si corrispondono punto a punto per piani osculatori paralleli, le due curve sono trasformate di Combescure.

(1) Sotto forma leggermente diversa è la costruzione geometrica data dal Cesàro per la risoluzione del problema (di Jamet) nelle sue *Lezioni di geometria intrinseca* (pag. 146).

(2) Propriamente la trasformazione di Combescure si applica ai sistemi tripli di superficie ortogonali; ma applicata alle curve loro intersezioni dà appunto luogo alle relazioni geometriche nel testo.

Si ottengono dunque tutte le trasformate di Combescure di una data curva Γ colla costruzione seguente: *Ad ogni piano* π *osculatore di* Γ *si conduca arbitrariamente un piano parallelo* π_1, *ad una distanza variabile con legge continua; lo sviluppabile inviluppo dei nuovi piani* π_1, *avrà per spigolo di regresso una trasformata generica* Γ_1 *di Combescure della* Γ.

Analiticamente le trasformate Γ_1 di Combescure della Γ si ottengono nel modo seguente. Indicando coll' apposizione dell'indice 1 gli elementi relativi a Γ_1 avremo

$$(46) \qquad x_1 = \int \alpha f(s)\, ds\,, \quad y_1 = \int \beta f(s)\, ds\,, \quad z_1 = \int \gamma f(s)\, ds\,,$$

essendo $f(s)$ una funzione *arbitraria* di s (1). Per le equazioni intrinseche della Γ_1 avremo quindi

$$ds_1 = f(s)\, ds\,, \quad \frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds}{\rho}\,, \quad \frac{ds_1}{T_1} = \frac{ds}{T}\,,$$

cioè

$$(47) \qquad \frac{ds_1}{ds} = f(s)\,, \quad \rho_1 = \rho f(s)\,, \quad T_1 = T f(s)\,,$$

e in particolare $\frac{\rho_1}{T_1} = \frac{\rho}{T}$: *Il rapporto delle due curvature è invariante per trasformazione di Combescure.*

Si osservi che le (47) possono scriversi sotto la forma equivalente

$$(47^*) \qquad s_1 = F(s)\,, \quad \rho_1 = \rho F'(s)\,, \quad T_1 = T F'(s)\,,$$

essendo ancora $F(s)$ una funzione arbitraria di s, $F'(s) = \frac{d F(s)}{ds}$.

§. 23.

Applicazioni della trasformazione di Combescure.

Sia proposto di trovare tutte le curve Γ_1 i cui raggi ρ_1, T_1 di prima e seconda curvatura e l'arco s_1 sono legati da una relazione prescritta

(1) In particolare se per $f(s)$ si prende una costante si ha una trasformata omotetica.

$$\Phi(\rho_1, T_1, s_1) = 0 \tag{48}$$

Prendiamo una curva Γ arbitraria, in cui ρ, T saranno funzioni note di s: fra le trasformate di Combescure di Γ esistono curve Γ_1 della classe (48), che si otterranno, per le (47*), determinando la funzione $F(s)$ dalla condizione

$$\Phi(\rho F'(s),\ T F'(s),\ F(s)) = 0. \tag{48*}$$

Questa è, in generale, per $F(s)$ un'equazione differenziale del 1° ordine, integrata la quale si avranno le curve Γ_1 dalle formule

$$x_1 = \int \alpha F'(s)\, ds, \quad y_1 = \int \beta F'(s)\, ds, \quad z_1 = \int \gamma F'(s)\, ds, \tag{49}$$

ed è chiaro dal procedimento stesso che si hanno così *tutte* le curve Γ_1 della classe (48).

In particolare si osservi che se la relazione prescritta (48) non contiene s_1, la (48*) contiene solo $F'(s)$, che ne risulta in termini finiti, e le (49) dànno allora per quadrature tutte le curve in cui ρ_1, T_1 sono legate dalla relazione prescritta. Ancora, se la (48) ha la forma $\frac{\rho_1}{T_1} = \psi(s_1)$, la (48) diventa

$$\frac{\rho}{T} = \psi(F(s))$$

e determina $F(s)$, dopo di che per quadrature si hanno dalle (49) le curve richieste.

In fine se la relazione (48) ha la forma

$$\rho_1 = \psi(s_1)$$

essendo ψ una funzione arbitrariamente data la (48*) si scrive

$$\rho F'(s) = \psi(F(s)),$$

e colla quadratura.

$$\int \frac{dF}{\psi(F)} = \int \frac{ds}{\rho} = \sigma$$

si ha F.

Come esempi particolari notevoli citiamo i seguenti: 1° *Curve a flessione costante* $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{a}$.

La (48) si riduce a $\rho_1 = a$, indi la (48*) dà

$$F'(s) = \frac{a}{\rho},$$

e le (49)

$$x_1 = a\int \alpha \frac{ds}{\rho},\ y_1 = a\int \beta \frac{ds}{\rho},\ z_1 = a\int \gamma \frac{ds}{\rho}$$

Siccome

$$\frac{ds}{\rho} = d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2},$$

si può enunciare il risultato sotto la forma seguente: *Per avere tutte le curve a flessione costante* $\frac{1}{a}$ *si prendano tre funzioni arbitrarie* α, β, γ *di un parametro t legate dalla relazione*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\ (^1)$$

Posto allora $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$, *colle quadrature*

$$x = a\int \alpha\, d\sigma,\ y = a\int \beta\, d\sigma,\ z = a\int \gamma\, d\sigma \tag{50}$$

si hanno tutte le curve a flessione costante $\frac{1}{a}$.

2° *Curve a torsione costante* $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a}$

Essendo $T_1 = a$, risulta $F'(s) = \frac{a}{T}$ e le formole (49) diventano

$$x_1 = a\int \alpha \frac{ds}{T},\ y_1 = a\int \beta \frac{ds}{T},\ z_1 = a\int \gamma \frac{ds}{T}$$

(1) In sostanza α, β, γ sono le coordinate in un punto mobile sopra una curva arbitraria della sfera unitaria, e σ è l'arco di questa curva (indicatrice delle tangenti).

Siccome

$$\alpha = \nu\eta - \mu\zeta = T\left(\nu\frac{d\mu}{ds} - \mu\frac{d\nu}{ds}\right),$$

e similmente per β, γ le formule superiori possono scriversi

$$(51)\qquad x = a\int(\nu\,d\mu - \mu\,d\nu),\ y = a\int(\lambda\,d\nu - \nu\,d\lambda),\ z = a\int(\mu\,d\lambda - \lambda\,d\mu)$$

e ponendovi per λ, μ, ν tre funzioni arbitrarie di un parametro, legate dalla relazione $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ dànno le curve a torsione costante $\frac{1}{a}$.

3° *Curve in cui il raggio di prima curvatura è proporzionale all' arco*

Qui abbiamo $\rho_1 = k s_1$ (k costante), indi

$$\rho\,F'(s) = k\,F(s),\ \frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{k}{\rho}$$

da cui integrando

$$F(s) = e^{k\sigma},\ F'(s) = \frac{k}{\rho}e^{k\sigma}$$

Dunque le formole:

$$(52)\qquad x = k\int\alpha\,e^{k\sigma}\,d\sigma,\ y = k\int\beta\,e^{k\sigma}\,d\sigma,\ z = k\int\gamma\,e^{k\sigma}\,d\sigma$$

dànno per quadrature le curve richieste, essendo, come nel primo esempio, α, β, γ, funzioni arbitrarie di un parametro (legate da $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) e

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

4° *Curve di equazione intrinseca* $\rho_1 = e^{s_1}$.

Si ha $\rho\,F'(s) = e^{F(s)}$

$$e^{-F}\,dF = \frac{ds}{\rho}$$

$$e^{-F} = c - \sigma,\ F' = \frac{1}{(c-\sigma)\rho}$$

indi:

$$x = \int\frac{\alpha\,d\sigma}{c-\sigma},\ y = \int\frac{\beta\,d\sigma}{c-\sigma},\ z = \int\frac{\gamma\,d\sigma}{c-\sigma}$$

per le curve richieste.

§. 24.

Trajettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di sfere.

Passiamo ora a trattare per un sistema ∞^1 di sfere il problema, già risolto al paragrafo 21 per un sistema di piani, di trovarne le trajettorie ortogonali (1).

Per definire il sistema di sfere (escludendo il caso ovvio di sfere concentriche) basterà dare la curva Γ luogo dei centri e il raggio R della sfera in funzione dell' arco s. Un punto qualunque $M' \equiv (x'\,y'\,z')$ della sfera generica potrà definirsi colle formole

$$\begin{cases} x' = x + R(\operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\xi + \cos\theta\,\lambda) \\ y' = y + R(\operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\beta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\eta + \cos\theta\,\mu) \\ z' = z + R(\operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\gamma + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\zeta + \cos\theta\,\nu), \end{cases}$$

avendo indicato con R, θ, ψ le coordinate polari di M', riferite al triedro principale di Γ.

Per trovare una curva Γ', luogo di M', trajettoria ortogonale delle sfere bisogna determinare le incognite θ, ψ in funzione di s in guisa che le derivate $\frac{dx'}{ds}, \frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds}$ risultino proporzionali ai binomii $x'-x$, $y'-y, z'-z$. Un semplice calcolo conduce alle equazioni differenziali del 1° ordine per θ, ψ:

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} + \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{T} + \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{R} = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{ds} + \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{\cot\theta\cos\varphi}{T} - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{R\operatorname{sen}\theta} = 0, \end{cases}$$

(1) I risultati esposti in questo e nel seguente paragrafo sono dovuti sostanzialmente Darboux (V. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes pag. 35 ss. 2ème Edition 1910).

onde si vede, come è evidente geometricamente, che esistono ∞^2 tali trajettorie ortogonali. Si vedrebbe facilmente che, introducendo la variabile complessa (sulla sfera) $\sigma = R \cot \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$, il sistema (52) porta ad un'equazione del tipo di Riccati per σ, di cui basta quindi conoscere una soluzione particolare per avere la generale con quadratura. Qui dimostriamo direttamente: *Se una delle trajettorie ortogonali delle sfere è nota, bastano quadrature per trovare tutte le altre.*

Indichiamo nuovamente con Γ la data traiettoria ortogonale delle sfere, e scriviamo le coordinate x', y', z' di un punto M della sfera generica p. e. sotto la forma

$$\begin{cases} x' = x + R\{(1+\cos\theta)\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\xi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\lambda\} \\ y' = y + R\{(1+\cos\theta)\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\eta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mu\} \\ z' = z + R\{(1+\cos\theta)\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\zeta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\nu\}. \end{cases}$$

Se vogliamo che il punto M' descriva una traiettoria ortogonale delle sfere dobbiamo determinare θ, φ in funzione di s in guisa che $\frac{dx'}{ds}$, $\frac{dy'}{ds}$, $\frac{dz'}{ds}$ risultino proporzionali all'espressione

$$x' - x - R\alpha = R\{\cos\theta\,\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\xi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\lambda\}$$

e alle altre due analoghe. Si ottiene così il sistema differenziale per θ, φ:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{ds} + 1\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{(1+\cos\theta)\cos\varphi}{\rho} \\ \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cot\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\varphi}{\rho} + \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Qui prendiamo come funzioni incognite, in luogo di θ, φ le altre due:

$$L = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi \qquad M = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\varphi\ (^1)$$

(1) Questo sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario della variabile complessa

$$\sigma = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$$

sulla sfera.

e il sistema precedente acquisterà in L, M la forma lineare

$$\begin{cases} \frac{dL}{ds} - \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{ds} + 1\right)L + \frac{M}{T} + \frac{1}{\rho} = 0 \\ \frac{dM}{ds} - \frac{L}{T} - \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{ds} + 1\right)M = 0, \end{cases}$$

che è facile integrare per quadrature, col metodo di d'Alembert. Per ciò cerchiamo un tale *moltiplicatore* λ che la funzione $L + \lambda M$ venga a soddisfare ad un'equazione del 1.° ordine, e troveremo

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda^2 + 1}{T}.$$

Ponendo

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{T},$$

questa ha l'integrale generale

$$\lambda = \operatorname{tg}(\tau + c).$$

Se prendiamo p. e. i due integrali particolari

$$\lambda_1 = \operatorname{tg}\tau, \quad \lambda_2 = -\cot\tau,$$

le due funzioni

$$L + \lambda_1 M = \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos(\tau - \varphi)}{\cos\tau}$$

$$L + \lambda_2 M = \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}(\tau - \varphi)}{\operatorname{sen}\tau}$$

saranno determinate, ciascuna, da un'equazione lineare del 1.° ordine e si avranno quindi per quadrature, c. d. d.

§. 25.

Metodo di Darboux.

Per la risoluzione del medesimo problema esponiamo ora il metodo più geometrico di Darboux, che utilizza in modo elegante la trasformazione di Combescure.

Ad ogni sistema ∞^1 di sfere date, come al principio del paragrafo precedente, coll'assegnare la curva Γ luogo dei centri, possiamo associarne infiniti altri (dipendenti da una funzione arbitraria) che si diranno i suoi *trasformati di Combescure* [1], nel modo seguente. Trasformiamo la curva Γ luogo dei centri con una qualunque trasformazione di Combescure (§. 22), secondo le formole (47)

$$ds_1 = f(s)\,ds\,, \quad \rho_1 = \rho f(s)\,, \quad T_1 = T f(s)\,,$$

e nello stesso rapporto riduciamo il raggio R della sfera, assumendo

$$R_1 = R f(s)\,;$$

diremo allora che il nuovo sistema di sfere è derivato, per trasformazione di Combescure, dal primitivo. Ora, se si osservano le relative equazioni differenziali (52) per le trajettorie ortogonali, è visibile che esse restano immutate, talchè i due problemi di trovare le trajettorie ortogonali dell'uno o dell'altro sistema di sfere (S) o (S_1) sono perfettamente equivalenti. Per considerare la cosa più da vicino geometricamente, si osservi che fra due sfere corrispondenti S, S_1 viene così stabilita una corrispondenza di punti P, P_1, dati dai medesimi valori di θ, φ, sicchè i raggi delle due sfere che vanno a punti corrispondenti sono paralleli. Dunque: *In due sistemi di sfere trasformati di Combescure l'uno dell'altro anche le trajettorie ortogonali corrispondenti sono trasformate di Combescure.*

Supponiamo ora nota una delle trajettorie ortogonali del dato sistema di sfere, sia la curva C, per la quale riteniamo le nostre solite notazioni e dimostriamo la proposizione fondamentale di Darboux: *Eseguendo una quadratura, si può cangiare, con una trasformazione di Combescure, il dato sistema* (S) *di sfere in un altro* (S_1), *le cui sfere* S_1 *passino tutte per un punto fisso* O *dello spazio.*

Consideriamo la curva Γ_0 luogo dei centri M_0 delle sfere, le coordinate x_0, y_0, z_0 di un cui punto variabile sono date da

$$x_0 = x + R\alpha\,, \quad y_0 = y + R\beta\,, \quad z_0 = z + R\gamma \tag{53}$$

e cerchiamo una trasformata Γ_1 di Combescure tale che le congiungenti i punti $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ di Γ_1 con un punto fisso O, che prendiamo nell'origine, siano paralleli alle tangenti MM_0 di C. Avremo

$$x_1 = R_1\alpha\,, \quad y_1 = R_1\beta\,, \quad z_1 = R_1\gamma\,, \tag{54}$$

dove R_1 è da determinarsi in funzione di s per modo che sussistano le proporzioni

$$\frac{dx_1}{ds} : \frac{dy_1}{ds} : \frac{dz_1}{ds} = \frac{dx_0}{ds} : \frac{dy_0}{ds} : \frac{dz_0}{ds}$$

le quali esprimono appunto che Γ_1 è trasformata di Combescure di Γ. Le proporzioni scritte si traducono nella equazione differenziale per R_1

$$\frac{1}{R_1}\frac{dR_1}{ds} = \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{ds} + 1\right), \tag{55}$$

che integrata dà

$$R_1 = C R e^{\int \frac{ds}{R}}.$$

Ora se con ds_0, ds_1 indichiamo rispettivamente gli elementi lineari di Γ_0, Γ_1, abbiamo dalle (53) (54)

$$\frac{ds_0^2}{ds^2} = \left(1 + \frac{dR}{ds}\right)^2 + \frac{R^2}{\rho^2}$$

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \left(\frac{dR_1}{ds}\right)^2 + \frac{R_1^2}{\rho^2}\,,$$

e quindi per la (55)

$$\frac{ds_0^2}{R^2} = \frac{ds_1^2}{R_1^2}\,.$$

Questa formola ci dimostra che il sistema di sfere (S_1) coi centri nei punti (x_1, y_1, z_1) di Γ_1 e di raggi R_1 è trasformato di Combescure del sistema dato. Ma siccome per le (54) si ha appunto

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_1^2\,,$$

tutte queste sfere S_1 passano per l'origine, come si voleva.

Ciò premesso, e ridotto il sistema di sfere S_1 a passare tutte per l'origine, eseguiamo *un' inversione per raggi vettori reciproci* col centro in O.

Per le note proprietà dell'inversione, di conservare gli angoli e di mutare sfere e circoli in sfere e circoli, le sfere S_1 (che passano

[1] In sostanza questa non è altro che la trasformazione di Combescure dei sistemi tripli ortogonali, applicata al caso in cui le superficie di una delle tre serie sono sfere.

per l' origine) daranno un sistema di piani e le loro trajettorie ortogonali si cangieranno nelle trajettorie ortogonali dei piani. Ma queste, come abbiamo visto al §. 21, si hanno con quadrature, e lo stesso quindi accade pel problema delle trajettorie ortogonali di un sistema di sfere, quando già una delle trajettorie ortogonali sia nota.

Con queste considerazioni geometriche abbiamo nuovamente stabilito il risultato principale del paragrafo precedente. Ma ora di più, tenendo presenti le proprietà della trasformazione di Combescure pei sistemi di sfere, e quelle della inversione per raggi vettori reciproci, insieme alla proposizione finale del § 21, possiamo segnalare questa altra conseguenza notevole:

In ogni sistema ∞^1 di sfere le traiettorie ortogonali del sistema segnano su due qualunque sfere del sistema una corrispondenza che conserva gli angoli e muta circoli in circoli (un' affinità circolare di Möbius).

§. 26.

Altre formole generali per le curve gobbe.

Alle formole generali per le curve a doppia curvatura (di cui occupano il posto centrale le formole di Frenet) usate da noi fin qui, si può dare un' altra forma equivalente, che è particolarmente quella di cui si serve il Cesàro nelle sue Lezioni di geometria intrinseca (1). Stabiliamo rapidamente queste formole introducendo per una curva qualunque Γ dello spazio le tre distanze algebriche u, v, w di un punto fisso dello spazio dalle tre facce del triedro principale, ordinatamente: dal piano normale, dal piano rettificante e dal piano osculatore. Prendendo per semplicità il punto fisso nell' origine, poniamo adunque

$$u = S.x\alpha, \quad v = S.x\xi, \quad w = S.x\lambda.$$

Se deriviamo rapporto ad s, colle formole (A) di Frenet § 6 (pag. 13), otteniamo subito le seguenti formole

$$(C) \qquad \frac{du}{ds} = \frac{v}{\rho} + 1, \quad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{\rho} - \frac{w}{T}, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{T}$$

(1) Napoli 1896 Cap. IX e X.

e la conseguente

$$(C^*) \qquad u\frac{du}{ds} + v\frac{dv}{ds} + w\frac{dw}{ds} = u,$$

che sono appunto le formole cercate.

Inversamente se u, v, w sono tre funzioni arbitrarie di un parametro t (tali però che non siano zero u, v nè $u^2 + v^2 + w^2 = \text{cost.}^{te}$), e prendendo secondo la (C*)

$$ds = \frac{1}{u}(u\,du + v\,dv + w\,dw),$$

si calcolano poi $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$, secondo le (C), da

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}\left(\frac{du}{ds} - 1\right), \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{v}\frac{dw}{ds},$$

esisterà una ed una sola curva Γ corrispondente a queste equazioni intrinseche (§ 9). Ora, situando convenientemente Γ nello spazio, è facile vedere che u, v, w saranno appunto le distanze algebriche dell' origine dalle tre facce del triedro principale. E infatti se indichiamo queste tre distanze per la nostra curva Γ con $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, esse soddisfano al medesimo sistema lineare (C) come u, v, w, e basta che si abbia

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v, \quad \bar{w} = w, \text{ p. e. per } s = 0$$

perchè le eguaglianze si mantengano per tutti i valori di s, ciò che si ottiene manifestamente col situare Γ convenientemente.

Il risultato ora stabilito si può presentare sotto una forma geometrica che conviene osservare. È chiaro che u, v, w sono le coordinate dell' origine, riferite al triedro principale come triedro coordinato. Quando il triedro principale si muove, percorrendo il suo vertice M la curva Γ, il punto O fisso nello spazio, viene ad occupare, dentro al triedro mobile, una serie di posizioni e descrive una curva C che si può dire la curva *traccia* del punto O rispetto alla curva Γ. Il dare dunque u, v, w in funzione di un parametro t, e cercare Γ significa: *trovare una curva Γ con curva traccia assegnata* C. Sopra si è visto che tale problema ammette sempre una ed una sola soluzione.

Per mostrare almeno un'altra applicazione delle formole (C) consideriamo le linee geodetiche Γ di un cono, il cui vertice collochiamo nell'origine. La normale principale di Γ è normale del cono quindi alla generatrice e si ha per ciò $v = 0$.

Le formole (C) dànno quindi

$$w = c, \quad u = s + a, \quad \frac{s+a}{\rho} = -\frac{c}{T} \quad (a, c \text{ costanti})$$

e per ciò

$$\frac{\rho}{T} = \alpha s + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ costanti}),$$

equazione intrinseca che già abbiamo riconosciuto (§ 15) appartenere alle geodetiche dei coni. Viceversa da $w = \text{cos.}^{te}$ segue $v = 0$, cioè: *Le geodetiche dei coni sono caratterizzate dall'avere costante la distanza del piano osculatore da un punto fisso (vertice del cono)* (1).

§. 27.

Le curve di Bertrand.

Chiuderemo questo primo capitolo coll'esame di un'importante classe di curve che si dicono *di Bertrand*. Si è visto, al § 19, che le curve a flessione costante si presentano a coppie aventi a comune le normali principali. B. de Saint-Venant propose (nel 1844) il problema di trovare tutte le coppie di curve che hanno a comune le normali principali, e il problema venne risoluto dal Bertrand (1850) nel modo che ora andiamo ad esporre.

Sia (Γ, Γ_1) una coppia di curve che hanno a comune le normali principali, e ritenendo per la prima le solite notazioni, denotiamo coll'indice 1 le quantità relative alla seconda. Osserviamo in primo luogo che il tratto di normale principale compreso fra Γ, Γ_1 è una costante k, poichè in generale: *sopra una qualunque superficie rigata*

(1) Geometricamente si osservi che se il piano osculatore di una curva Γ rimane a distanza costante da un punto O, questo piano inviluppa una sfera col centro in O, lungo una certa curva Γ' evolvente di Γ. Se M, M' sono due punti corrispondenti di Γ, Γ', la normale principale in M di Γ (parallela alla tangente in M' alla Γ') è perpendicolare tanto al raggio OM' che alla MM', e per ciò anche alla OM. La Γ è quindi geodetica del cono che la projetta da O.

due curve Γ, Γ_1 *trajettorie ortogonali delle generatrici intercettano su queste tratti rettilinei eguali* (1).

Avremo quindi

$$x_1 = x + k\xi, \quad y_1 = y + k\eta, \quad z_1 = z + k\zeta, \tag{55}$$

e siccome, per ipotesi

$$\xi_1 = \varepsilon\xi, \quad \eta_1 = \varepsilon\eta, \quad \zeta_1 = \varepsilon\zeta \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{56}$$

potremo porre

$$\alpha_1 = \alpha\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma, \beta_1 = \beta\cos\sigma + \mu\operatorname{sen}\sigma, \gamma_1 = \gamma\cos\sigma + \nu\operatorname{sen}\sigma, \tag{57}$$

indicando con σ l'angolo delle due tangenti, ed avremo conseguentemente

$$\lambda_1 = \varepsilon(-\alpha\operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma), \mu_1 = \varepsilon(-\beta\operatorname{sen}\sigma + \mu\cos\sigma), \nu_1 = \varepsilon(-\gamma\operatorname{sen}\sigma + \nu\cos\sigma) \tag{57*}$$

Ora derivando rapporto ad s le $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ si debbono ottenere, per le formole di Frenet, quantità proporzionali a ξ_1, η_1, ζ_1, cioè a ξ, η, ζ, ed eseguendo sulle (57), ne risulta subito

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0, \quad \sigma = \text{cost}^{te}$$

cioè: *Le tangenti in punti corrispondenti di* Γ, Γ_1 *debbono formare un angolo* σ *costante, e quindi anche le binormali.*

Ora dalle (55) derivando abbiamo

$$\alpha_1 \frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{k}{\rho}\right)\alpha - \frac{k}{T}\lambda, \text{ ecc.},$$

e confrontando colle (57) ne segue

$$\cos\sigma \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{k}{\rho}, \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{ds_1}{ds} = -\frac{k}{T}, \tag{58}$$

(1) Questo è un caso particolare di un teorema generale di Gauss sulle geodetiche di una superficie che incontreremo più tardi (§ 105). Nel caso attuale è facile dimostrarlo col calcolo, e geometricamente si stabilisce subito osservando che tutte le superficie canali (§ 13) aventi per asse curvilineo la curva Γ, hanno per normali le normali di Γ e quindi una qualunque rigata formata di tali normali interseca ciascuna delle dette superficie canali in una curva Γ_1 ortogonale a tutte le generatrici.

da cui, eliminando $\frac{ds_1}{ds}$, segue l'importante relazione

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} - \frac{\cos\sigma}{T} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{k}. \tag{58*}$$

E viceversa il calcolo stesso sopra eseguito prova che se le due curvature $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ di Γ sono legate da questa relazione lineare a coefficienti costanti (58*), la curva Γ_1 data dalle (55) ha a comune con Γ le normali principali, sulle quali le due curve Γ, Γ_1 staccano il segmento costante k.

Ora se una curva ha le due curvature legate da un'identità lineare

$$\frac{A}{\rho} + \frac{B}{T} + C = 0, \tag{α}$$

con $C \neq 0$ questa può identificarsi colla (58*) ponendo

$$k = -\frac{A}{C}, \quad \operatorname{tg}\sigma = -\frac{A}{B}$$

Se ne conclude: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva Γ abbia a comune le normali principali con una seconda Γ_1, è che le due curvature $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ di Γ siano legate da una relazione lineare* (α).

Ogni curva Γ che soddisfa ad una tale relazione dicesi una curva di BERTRAND. E, per la medesima ragione, anche la seconda curva Γ_1, che dicesi la coniugata o *associata* di Γ, è un'altra curva di Bertrand. Ma per determinare in modo preciso la relazione lineare che lega $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{T_1}$, si osservi che le formole (55), (56), (57), risolute rispetto agli elementi di Γ, si scrivono

$$x = x_1 - \varepsilon k \xi_1, \quad \alpha = \alpha_1 \cos\sigma - \varepsilon \operatorname{sen}\sigma \lambda_1, \quad \xi = \varepsilon \xi_1, \quad \lambda = \alpha_1 \operatorname{sen}\sigma + \varepsilon \cos\sigma \lambda$$

ciò che equivale manifestamente, scambiando le due curve, a cangiare rispettivamente

$$k \text{ in } -\varepsilon k, \quad \sigma \text{ in } -\varepsilon\sigma.$$

onde la relazione per Γ_1, corrispondente alla (58), sarà

$$-\frac{\varepsilon \operatorname{sen}\sigma}{\rho_1} - \frac{\cos\sigma}{T_1} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{k}$$

e coinciderà quindi colle (58) se $\varepsilon = -1$ (se le due normali principali sovrapposte hanno verso contrario), mentre ne differirà pel segno del primo coefficiente se $\varepsilon = +1$ (normali principali concordanti).

Si osservi ancora che, applicando alla seconda formola (58)

$$\operatorname{sen}\sigma \frac{ds_1}{ds} = -\frac{k}{T}$$

la stessa osservazione, ne risulta l'altra

$$\operatorname{sen}\sigma \frac{ds}{ds_1} = -\frac{k}{T_1},$$

e quindi moltiplicando

$$\frac{1}{TT_1} = \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{k^2}.$$

Questo ci dà il teorema di Schell: *Il prodotto delle torsioni di due curve associate di Bertrand in punti corrispondenti è una costante (positiva).*

Similmente dalla prima

$$\cos\sigma \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{k}{\rho}.$$

segue

$$\cos\sigma \frac{ds}{ds_1} = 1 + \frac{\varepsilon k}{\rho_1}$$

e quindi

$$\left(1 - \frac{k}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon k}{\rho_1}\right) = \cos^2\sigma.$$

Questa formola esprime il teorema di Mannheim: *Se* M, M_1 *sono due punti corrispondenti di* Γ, Γ_1 *e* C, C_1 *i loro centri di curvatura il birapporto*

$$(MM_1\ CC_1)$$

eguaglia la costante (positiva) $\frac{1}{\cos^2\sigma}$. E infatti le ascisse dei quattro

punti sono rispettivamente

$$0,\ k,\ \rho,\ k + \varepsilon\rho_1,$$

e il loro birapporto è l'inversa di $\left(1 - \frac{k}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon k}{\rho_1}\right)$.

Osserviamo ancora che le curve a flessione costante, quelle a torsione costante, come anche le eliche cilindriche, possono riguardarsi come curve di Bertrand corrispondenti rispettivamente a supporre nella (α) $B = 0$, $A = 0$, o $C = 0$. Nel primo caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$ la coniugata è la curva luogo dei centri di curvatura; nel secondo $k = 0$ le due curve di Bertrand coincidono, e nell'ultimo $k = \infty$ l'associata è respinta all'infinito.

Infine si osserverà che per l'elica circolare, essendo $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ costanti, la relazione (α) resta indeterminata e k può ricevere qualunque valore: *Le trajettorie ortogonali delle normali principali di un'elica circolare sono altrettante eliche circolari colle stesse normali principali.* La superficie luogo di queste normali principali si presenterà più tardi nei nostri studî come *elicoide rigata d'area minima.*

§. 28.

Determinazione di tutte le curve di Bertrand.

Delle curve di Bertrand, come già delle curve a flessione costante o a torsione costante, possiamo assegnare le equazioni in termini finiti applicando la trasformazione di Combescure (§. 23).

Ma qui procediamo in un secondo modo risolvendo il seguente problema: *Data una curva* Γ, *trovare una seconda curva* Γ′, *che corrisponda a* Γ *per eguaglianza d'arco ed abbia, in ogni punto, la normale principale parallela a quella di* Γ.

Per ipotesi abbiamo

$$ds' = ds.$$

$$\xi' = \varepsilon\xi,\quad \eta' = \varepsilon\eta,\quad \zeta' = \varepsilon\zeta,$$

e se indichiamo con σ l'angolo di due tangenti corrispondenti potremo scrivere

$$\alpha' = \alpha\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma,\quad \beta' = \beta\cos\sigma + \mu\operatorname{sen}\sigma,\quad \gamma' = \gamma\cos\sigma + \nu\operatorname{sen}\sigma,$$

indi (come al paragrafo precedente)

$$\lambda' = \varepsilon(-\alpha\operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma),\ \mu' = \varepsilon(-\beta\operatorname{sen}\sigma + \mu\cos\sigma),\ \nu' = \varepsilon(-\gamma\operatorname{sen}\sigma + \nu\cos\sigma).$$

Ma, derivando le formole per α', β', γ', si trova subito

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0,\quad \sigma = \text{cost.}^{te}$$

quindi: *Le due tangenti in punti corrispondenti (conseguentemente le binormali) formano un angolo costante* σ.

Inversamente, se prendiamo per σ un angolo costante qualunque, indi poniamo

$$x' = \int(\alpha\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma)ds,\quad y' = \int(\beta\cos\sigma + \mu\operatorname{sen}\sigma)ds,\quad z' = \int(\gamma\cos\sigma + \nu\operatorname{sen}\sigma)ds,$$

avremo definita con queste formole (a meno di una traslazione) una curva Γ′ che soddisfa a tutte le condizioni richieste. E infatti, siccome $S\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 = 1$, potremo prendere $ds' = ds$, indi

$$\alpha' = \alpha\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma, \text{ ecc.}$$

Derivando risulta

$$\frac{\xi'}{\rho'} = \left(\frac{\cos\sigma}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\right)\xi, \text{ ecc.}$$

e per ciò

$$\xi' = \varepsilon\xi,\ \eta' = \varepsilon\eta,\ \zeta' = \varepsilon\zeta$$

$$\frac{1}{\rho'} = \varepsilon\left(\frac{\cos\sigma}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\right),$$

dove $\varepsilon = \pm 1$ dovrà avere il segno di $\frac{\cos\sigma}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}$.

Di qui seguono le altre

$$\lambda' = \varepsilon(-\alpha\operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma), \text{ ecc.}$$

e derivando nuovamente

$$\frac{1}{T'} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} + \frac{\cos\sigma}{T}$$

È notevole che in questa trasformazione di curve, dipendente da una costante arbitraria σ, le due curvature subiscono la sostituzione ortogonale

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho'} = \varepsilon \cos\sigma \dfrac{1}{\rho} + \varepsilon \operatorname{sen}\sigma \dfrac{1}{T} \\ \qquad\qquad (\det = \varepsilon) \\ \dfrac{1}{T'} = -\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} + \dfrac{\cos\sigma}{T}, \end{cases}$$

talchè: *La somma dei quadrati delle due curvature* $\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{T^2}$ *è un invariante della trasformazione.*

È chiaro che la trasformazione, applicata ad una curva di Bertrand, dà un'altra curva di Bertrand (di diversa famiglia). E siccome ogni curva di Bertrand possiede fra le sue trasformate una curva a flessione costante, vediamo che: *Tutte le curve di Bertrand si ottengono applicando l'attuale trasformazione alle curve di flessione costante.*

Notevole è nella nostra trasformazione il caso particolare $\sigma = \dfrac{\pi}{2}$.

Per la curva trasformata Γ_0 abbiamo semplicemente

$$(60) \qquad x_0 = \int \lambda\, ds, \quad y_0 = \int \mu\, ds, \quad z_0 = \int \nu\, ds$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{T}, \quad \frac{1}{T_0} = -\frac{1}{\rho}$$

$$\alpha_0 = \lambda \qquad \xi_0 = \varepsilon\xi, \quad \lambda_0 = -\varepsilon\alpha:$$

Nelle due curve Γ, Γ_0 *le direzioni della tangente e della binormale sono permutate, e (salvo il segno) sono permutate altresì le due curvature.*

È da osservarsi che, per le (60), le formole (59) possono anche scriversi

$x' = x\cos\sigma + x_0 \operatorname{sen}\sigma$, $y' = y\cos\sigma + y_0 \operatorname{sen}\sigma$, $z' = z\cos\sigma + z_0 \operatorname{sen}\sigma$

e, fissata la posizione relativa di Γ: Γ_0, dànno una costruzione geometrica semplicissima per le rimanenti curve trasformate.

CAPITOLO II.

Forme differenziali quadratiche

Forme quadratiche algebriche — Definizione degli invarianti e parametri differenziali di una forma differenziale quadratica — Parametro differenziale primo $\Delta_1 U$ e parametro differenziale misto $\nabla(U, V)$ — Equivalenza di due forme differenziali quadratiche ed equazioni fondamentali di Christoffel — Simboli di Christoffel a tre indici delle due specie — Derivate seconde covarianti — Parametro differenziale secondo $\Delta_2 U$ — Condizione di integrabilità delle equazioni di Christoffel e simboli a quattro indici — Forma trilineare covariante a due forme quadratiche simultanee — Curvatura di una forma differenziale binaria — Riduzione di due forme binarie simultanee a forma ortogonale.

§. 29.

Forme quadratiche algebriche.

Per la trattazione sistematica della geometria differenziale delle superficie nell'indirizzo inaugurato da Gauss, a cui il presente corso è informato, è indispensabile che premettiamo alcune nozioni fondamentali sulla teoria delle forme differenziali quadratiche. Questo sarà l'oggetto dell'attuale capitolo, ove del resto ci limiteremo a quanto è strettamente necessario al nostro scopo (1). I semplici algoritmi, che desumeremo da questa teoria, ci permetteranno di condensare in poche formole trasparenti le equazioni fondamentali della

---

(1) Le principali memorie che hanno servito alla redazione di questo capitolo ausiliario sono le seguenti:

BELTRAMI — *Sulla teoria generale dei parametri differenziali.* Opere Tomo II Mem. XXX pag. 74-118.

CHRISTOFFEL — *Ueber die Transformation der homogenenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* (Crelle Bd. 70).

RICCI — *Sui parametri e sugli invarianti delle forme quadratiche differenziali.* (Annali di matematica s.° 2.ª t. XIV). *Lezioni sulla teoria delle superficie.* (Litografia, Padova 1898).

WEINGARTEN — *Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen.* (Festschrift — Berlin 1883).

teoria delle superficie, e più tardi quelle della geometria infinitesimale a n dimensioni.

Premettiamo col Beltrami (l. c.) un breve cenno sui teoremi *algebrici* relativi alle forme quadratiche. Consideriamo una forma quadratica f in n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$, che scriviamo

$$(1) \qquad f = \sum_{r,s} a_{r\,s}\, x_r\, x_s \qquad (a_{rs} = a_{sr}),\ (^1)$$

dove la sommazione per gli indici r, s si riferisce a tutte le combinazioni (con ripetizione) prese nella serie $1, 2, \dots n$. Rispetto ai coefficienti (costanti) a_{rs}, supporremo solo che il determinante simmetrico:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

che dicesi il *discriminante* della forma f, sia *diverso da zero* (forma quadratica irriducibile). Cangiamo le variabili x, nelle nuove x', colla sostituzione lineare omogenea

$$(2) \qquad x_r = \sum_i p_{ri}\, x'_i \quad (r = 1, 2, \dots n),$$

dove gli n^2 coefficienti (costanti) p_{ri} sono qualunque, colla condizione (necessaria per l'indipendenza delle x) che il determinante

$$P = |p_{rs}| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \dots p_{1n} \\ \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} \dots p_{nn} \end{vmatrix}$$

o *modulo della sostituzione* sia diverso da zero.

Mediante la (2), la forma f si cangia in una nuova forma quadratica f' nelle x':

(2) Per brevità omettiamo nella scrittura l'indicazione dei limiti della sommazione che è sempre da 1 a n.

$$(3) \qquad f' = \sum_{r,s} a'_{r\,s}\, x'_r\, x'_s,$$

esprimendosi i nuovi coefficienti a'_{rs} per gli antichi a e pei coefficienti p della (2) colla formola

$$(4) \qquad a'_{rs} = \sum_{ik} a_{ik}\, p_{ir}\, p_{ks}.$$

Da queste ultime, indicando con A' il discriminante della f', segue, per la regola di moltiplicazione dei determinanti, il teorema fondamentale espresso dalla formola:

$$(5) \qquad A' = AP^2.$$

Pongasi ora

$$(6) \qquad X_s = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_r a_{r\,s}\, x_r$$

da cui, risolvendo rispetto alle x ed indicando, come sempre in seguito: con $A_{r\,s}$ *il complemento algebrico di* $a_{r\,s}$ *in* A, *diviso per* A *stesso* (1), si ottiene

$$(6^*) \qquad x_k = \sum_s A_{k\,s}\, X_s.$$

Avendo riguardo a queste ultime formule, si costruisca la forma quadratica $F = \sum_r X_r\, x_r$ e si avrà

$$F = \sum_{r,s} a_{r\,s}\, x_r\, x_s = \sum_{r,s} A_{r\,s}\, X_r\, X_s,$$

sussistendo fra le x, X le relazioni (6) o (6*).

Questa forma $F = \sum_{r,s} A_{r\,s}\, X_r\, X_s$ dicesi la *reciproca* della f, e la relazione tra f, F è perfettamente involutoria, trasformandosi F nella f colla (6), e inversamente f nella F colla inversa (6*), che può anche scriversi

(1) Riguardando nel determinante A gli elementi $a_{r\,s}$ come tutti indipendenti (senza tener conto che $a_{r\,s} = a_{s\,r}$) si può scrivere

$$A_{r\,s} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial a_{r\,s}} = \frac{\partial \lg A}{\partial a_{r\,s}}$$

$$x_k = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

Supponiamo ora che la f si cangi nella f' colla sostituzione lineare (2), e sia

$$F' = \sum_{r,s} A'_{r,s} X'_r X'_s$$

la reciproca della f'. Questa si cangia nella f' colla sostituzione lineare

$$X'_r = \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial x'_r}.$$

la f' nella f colla *inversa* della (2), poi la f nella F colla (6). Si compone così una sostituzione lineare fra le X, X' che porta la F' nella F e che noi calcoliamo subito colla regola di derivazione delle funzioni composte, osservando che si ha

$$X'_r = \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial x'_r} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}$$

ossia per la (2) e per la (6)

$$X'_r = \sum_i p_{i,r} X_i \tag{2*}$$

Questa sostituzione lineare (2*) non differisce dalla (2) che per la trasposizione dei due indici delle p e dicesi per ciò la *sostituzione trasposta* della (2).

Dunque: *Se la forma f si cangia nella f' mediante la sostituzione lineare $|p_{r,i}|$, la reciproca F' della seconda si cangia nella reciproca* F *della prima mediante la sostituzione trasposta* $|p_{i,r}|$.

Ne risulta che le $A_{r,s}$ si esprimeranno per le $A'_{r,s}$ come le $a'_{r,s}$ per le $a_{r,s}$, purchè nella relativa formola (4) si scambino i due indici in ciascuna

Troviamo così la formola, importante pel nostro scopo

$$A_{r,s} = \sum_{i,k} A'_{i,k}\, p_{r,i}\, p_{s,k}. \tag{7}$$

§. 30.

Forme differenziali quadratiche.

Essendo $x_1, x_2, \ldots x_n$, n variabili indipendenti e $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ i loro differenziali, consideriamo la forma differenziale quadratrica

$$f = \sum_{r,s} a_{r,s}\, dx_r\, dx_s\,; \quad (a_{r,s} = a_{s,r}) \tag{8}$$

ove i coefficienti $a_{r,s}$ sono date funzioni delle x.

In generale riterremo che le $x_1, x_2, \ldots x_n$ siano *variabili reali*, e supporremo dei coefficienti $a_{r,s}$ che siano funzioni ad un solo valore, finite e continue insieme almeno alle loro derivate parziali *prime e seconde* rispetto alle x; [1] e inoltre, nel campo di variabilità supposto per le x, il discriminante A della f si supporrà *diverso da zero*. Le teorie che andiamo a svolgere conservano del resto il loro valore anche se le $x_1, x_2, \ldots x_n$ si suppongono variabili complesse e i coefficienti $a_{r,s}$ funzioni *analitiche* olomorfe nel campo.

Se eseguiamo un qualunque cangiamento di variabili, ponendo le x_i eguali ad altrettante funzioni (indipendenti) delle nuove variabili x'_i.

$$x_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots n)\,, \tag{9}$$

(dove le f_i si supporranno finite e continue colle loro derivate parziali e il loro determinante funzionale $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial(x'^1, x_2, \ldots x'_n)} \neq 0$), i differenziali dx_r verranno a subire la sostituzione lineare

$$dx_r = \sum_i p_{r,i}\, dx'_i\,, \text{ con } p_{r,i} = \frac{\partial x_r}{\partial x'_i}. \tag{10}$$

Così la f si cangierà in una nuova forma differenziale quadratica

$$f' = \sum_{r,s} a'_{r,s}\, dx'_r\, dx'_s\,, \tag{11}$$

---

[1] Occorrendo considerare derivate d' ordine superiore s' intenderà tacitamente ammesso che esistano e siano finite e continue.

ove sarà

$$a'_{r\,s} = \sum_{i\,k} a_{i\,k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \tag{12}$$

Il modulo della sostituzione lineare (10) è appunto il determinante funzionale (Jacobiano)

$$\mathrm{P} = \frac{\partial\,(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial\,(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)},$$

che già abbiamo detto diverso da zero, e si ha

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}\mathrm{P}^2.$$

Serbando alle $\mathrm{A}_{r\,s}$, $\mathrm{A}'_{r\,s}$ il significato del paragrafo precedente abbiamo dalla (7)

$$\mathrm{A}_{r\,s} = \sum_{i\,k} \mathrm{A}'_{i\,k} \frac{\partial x_r}{\partial x'_i} \frac{\partial x_s}{\partial x'_k}. \tag{13}$$

§. 31.

Invarianti e parametri differenziali.

Supponiamo ora di avere un' espressione Φ formata coi coefficienti $a_{r\,s}$ della f, e colle loro derivate prime, seconde ecc.

$$\Phi\left(a_{r\,s}, \frac{\partial a_{r\,s}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 a_{r\,s}}{\partial x_j\,\partial x_k} \ldots\right) \quad r, s, i, j, k \ldots = 1, 2, \ldots n$$

la quale sia di tale natura che, operando *un qualsiasi cangiamento di variabili indipendenti dalle x alle x', essa si cangi nella identica espressione*

$$\Phi\left(a'_{r\,s}, \frac{\partial a'_{r\,s}}{dx_i}, \frac{\partial^2 a'_{r\,s}}{\partial x'_j\,\partial x'_k}, \ldots\right)$$

costruita nello stesso modo coi coefficienti $a'_{r\,s}$ della forma trasformata, e delle loro derivate; si dirà allora che Φ è *un invariante differenziale della forma f.*

Se in un' espressione Φ come la precedente entrano inoltre delle funzioni arbitrarie U, V in qualunque numero, insieme alle loro derivate, in tale guisa che si abbia *per qualsiasi mutamento di variabili*

$$\Phi\left(a_{r\,s}, \frac{\partial a_{r\,s}}{\partial x_i} \ldots \mathrm{U}, \mathrm{V} \ldots \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_k} \ldots\right) = \Phi\left(a'_{r\,s}, \frac{\partial a'_{r\,s}}{\partial x'_i} \ldots \mathrm{U}', \mathrm{V}', \ldots \frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial x'_j}, \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x'_k} \ldots\right),$$

intendendo che le U', V'... siano le U, V ... stesse, entro le quali per le x si siano posti i loro valori in funzione delle x', allora si dirà che Φ è un *parametro differenziale.* Si chiamerà poi ordine di un parametro differenziale il più alto ordine delle derivate *delle funzioni arbitrarie* che vi figurano.

Come si vede, i parametri differenziali di f sono espressioni formate coi coefficienti di f, con un certo numero di funzioni arbitrarie, e derivate dei coefficienti e delle funzioni, *che non cangiano di forma per un mutamento qualsiasi di variabili.*

Ove in una tale espressione manchino le funzioni arbitrarie U, V,.. si avrà un invariante differenziale e qui l'ordine si computerà dal più alto ordine delle derivate dei coefficienti.

Prima di procedere alla costruzione di quei parametri differenziali che più ci interessa di conoscere, sarà bene chiarire il metodo che seguiremo colle osservazioni seguenti (Cf. Ricci l. c.). Supponiamo di conoscere una forma differenziale φ, quadratica o di grado superiore nei differenziali, i cui coefficienti siano formati con quelli della forma fondamentale f e loro derivate, ed eventualmente anche con funzioni arbitrarie U, V e loro derivate, e la forma φ sia di tale natura che, mutando comunque le variabili, si cangi in una forma φ' costruita nello stesso modo rispetto alla forma trasformata ed alle funzioni arbitrarie U', V'.

Si dirà in tal caso che la forma φ è *covariante* alla forma f, ed è chiaro che, riguardando f, φ come forme algebriche (nei differenziali), e costruendo i loro *invarianti simultanei assoluti* nel senso algebrico, si avranno appunto dei parametri differenziali di f, o degli invarianti differenziali, secondo che φ contiene funzioni arbitrarie o ne è priva.

Le stesse considerazioni valgono, pel loro carattere generale, se in luogo di una sola forma covariante φ se ne considerano più, ed ancora se in luogo di un solo sistema di differenziali se ne introducono più serie indipendenti.

§. 32.

Parametri differenziali primi $\Delta_1\,\mathrm{U}$. $\nabla\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})$.

Se U è una funzione arbitraria, il suo differenziale primo

$$d\mathrm{U} = \sum_r \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} dx_r$$

è già una forma (lineare) covariante, poichè identicamente $dU = dU'$ o

$$\sum_r \frac{\partial U}{\partial x_r}\, dx_r = \sum_r \frac{\partial U'}{\partial x'_r}\, dx'_r ,$$

quindi nel quadrato del differenziale primo

$$(dU)^2 = \sum_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s}\, dx'_r\, dx'_s$$

abbiamo una forma quadratica ψ covariante alla f. Se indichiamo con λ un parametro arbitrario la forma

$$f + \lambda\psi = \sum_{r,s} \left(a_{rs} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s} \right) dx_r\, dx_s$$

sarà pure covariante. Il quoziente dal discriminante di $f + \lambda\psi$

$$\left| a_{rs} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s} \right|$$

pel discriminante Δ di f è un invariante assoluto simultaneo delle due forme, e quindi pel principio generale sopra esposto: *i coefficienti delle varie potenze di λ nel detto quoziente saranno altrettanti parametri differenziali primi.* In particolare nel coefficiente della prima potenza di λ, che indicheremo con $\Delta_1 U$, dato manifestamente da

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s} , \tag{14}$$

abbiamo quello che si dice col Beltrami il *parametro differenziale primo* di U (1).

---

(1) La proprietà *invariantiva* del $\Delta_1 U$ si verifica subito a posteriori dalla (13) poichè si ha

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s} = \sum_{rik} A'_{ik} \frac{\partial x_r}{\partial x'_i}\,\frac{\partial x_s}{\partial x'_k}\,\frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial U}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,k} A'_{ik} \left(\sum_r \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial x}{\partial x'_i} \right) \left(\sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s}\,\frac{\partial x_s}{\partial x'_k} \right)$$

$$= \sum_{i,k} A'_{ik}\, \frac{\partial U'}{\partial x'_i}\,\frac{\partial U'}{\partial x'_k} = \Delta_1' U' .$$

Se indichiamo ora con V una seconda funzione arbitraria, nel prodotto di due differenziali primi

$$dU\, dV = \sum_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial V}{\partial x_s}\, dx_r\, dx_s$$

abbiamo nuovamente una forma quadratica covariante a f, e le stesse considerazioni superiori provano che l'espressione

$$\sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial V}{\partial x_s}$$

è un parametro differenziale primo colle due funzioni arbitrarie U, V. Questo si indicherà con Beltrami, col simbolo $\nabla(U, V)$ e si dirà il *parametro differenziale misto* di U, V. È chiaro che se nel parametro differenziale misto

$$\nabla(U, V) = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r}\,\frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{15}$$

si pone $V = U$ si ottiene il parametro differenziale primo $\Delta_1 U$.

Esempio. Se si suppone

$$f = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

si ha

$$\Delta_1 U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)^2$$

$$\nabla(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\,\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\,\frac{\partial V}{\partial x_n}$$

e la proprietà invariantiva di queste espressioni permette di calcolarne subito le trasformate cangiando comunque le variabili indipendenti.

Così nel caso di tre variabili x, y, z, trasformando in coordinate polari ρ, θ, φ colle formole

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi , \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi , \quad z = \rho\cos\theta ,$$

siccome

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

si ha

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2.$$

§. 33.

Equivalenza di due forme quadratiche differenziali e formole di Christoffel.

Diciamo *equivalenti* due forme differenziali quadratiche

$$f=\sum_{r,s}a_{r,s}\,dx_r\,dx_s\ ,\quad f'=\sum_{r,s}a'_{r,s}\,dx'_r\,dx'_s\ ,$$

la prima in n variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$, la seconda in altrettante variabili $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ (dove i coefficienti $a_{r,s}$ sono funzioni delle x e gli $a'_{r,s}$ delle x') se è possibile di porre nella prima tali funzioni x_i delle x'_i che la prima si cangi nella seconda.

Per l'equivalenza delle due forme è adunque necessario e sufficiente che si possano determinare le n funzioni incognite.

$$x_i\ (x'_1, x'_2, \ldots x'_n)\quad i=1,2,\ldots n\ ,$$

in guisa da soddisfare le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni simultanee a derivate parziali del 1° ordine

$$(I)\qquad a'_{r,s}=\sum_{i,k}a_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\ .$$

Siccome il numero delle equazioni $\frac{n(n+1)}{2}$ supera il numero n delle incognite, già si può prevedere che l'equivalenza delle due forme richiederà particolari condizioni pei coefficienti. Per esaminare la compatibilità delle (I) converrà procedere nel modo che insegna la teoria generale, e cioè formare le equazioni che seguono dalle (I) per derivazione. E qui troveremo subito che basta già una prima derivazione delle (I) rispetto a tutte le x' *per esprimere tutte le derivate seconde delle funzioni incognite x_i per le derivate prime, le funzioni stesse e le variabili indipendenti x'_i*. Sono queste le formole fondamentali di Christoffel che andiamo ora a stabilire. Cominciamo

dal derivare la (I) rispetto ad una qualunque x' sia x'_t, e ponendo mente che le $a'_{r,s}$ sono funzioni immediate delle x', le $a_{r,s}$ invece funzioni delle x, le quali pensiamo espresse per le x', avremo

$$(a)\qquad \frac{\partial a'_{r,s}}{\partial x'_t}=\sum_{i,k,l}\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t}+\sum_{i,k}a_{i,k}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_t}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}+\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_s\,\partial x'_t}\right).$$

Scambiamo in questa s con t e nello stesso tempo permutiamo nella somma tripla del secondo membro gli indici di sommazione k, l, onde risulta

$$(b)\qquad \frac{\partial a'_{r,t}}{\partial x'_s}=\sum_{i,k,l}\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t}+\sum_{i,k}a_{i,k}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_s}\frac{\partial x_k}{\partial x'_t}+\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_s\,\partial x'_t}\right).$$

Ancora permutiamo in quest'ultima r, s e nella somma tripla del secondo membro, come pure nel secondo termine della somma doppia, i con k, ed avremo:

$$(c)\qquad \frac{\partial a'_{s,t}}{\partial x'_r}=\sum_{i,k,l}\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t}+\sum_{i,k}a_{i,k}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_s}\frac{\partial x_k}{\partial x'_t}+\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_t}\right).$$

Sommando la *(b)* colla *(c)* e sottraendovi la *(a)*, troviamo

$$\frac{\partial a'_{r,t}}{\partial x'_s}+\frac{\partial a'_{s,t}}{\partial x'_r}-\frac{\partial a'_{r,s}}{\partial x'_t}=\sum_{i,k,l}\left(\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l}\right)\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t}+$$
$$+2\sum_{i,k}a_{i,k}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_s}\frac{\partial x_k}{\partial x'_t}\ ,$$

che possiamo anche scrivere

$$(18)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{r,t}}{\partial x'_s}+\frac{\partial a'_{s,t}}{\partial x'_r}-\frac{\partial a'_{r,s}}{\partial x'_t}\right)=\sum_{l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t}\sum_{i,k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l}\right)\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}+$$
$$+\sum_{i,k}a_{i,k}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\,\partial x'_s}\frac{\partial x_k}{\partial x'_t}\ .$$

Introduciamo ora con Christoffel il simbolo a tre indici (di prima specie)

$$(17)\qquad \left[\begin{matrix}i\ k\\ l\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l}\right)$$

formato colle derivate dei coefficienti di f, e la stessa notazione cogli accenti adoperiamo per i simboli analoghi per la forma trasformata f'; così la (16) si scrive

$$\left[\begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix}\right]' = \sum_t \frac{\partial x_t}{\partial x'_t} \sum_{i,k} \left[\begin{matrix} i & k \\ t \end{matrix}\right] \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} + \sum_i a_{it} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s}. \tag{18}$$

Se in queste teniamo fissi gli indici r, s e diamo a t i suoi n valori, abbiamo n equazioni lineari rispetto alle n derivate seconde

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x'_r \partial x'_s}, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial x'_r \partial x'_s}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 x_n}{\partial x'_r \partial x'_s}$$

con determinante non nullo, (1) che possono dunque risolversi rispetto a queste derivate seconde ottenendo così le formole annunziate.

Per compiere questa risoluzione si moltiplichi la (18) per

$$A'_{\mu t} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

essendo ν, μ due indici arbitrarii e si sommi rispetto a μ, t da 1 a n, ricordando che per la (13) pag. 74:

$$\sum_{\mu t} A'_{\mu t} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_t}{\partial x'_t} = A_{\nu t},$$

e d'altra parte

$$\sum_t a_{it} A_{\nu t} = \varepsilon_{i\nu},$$

dove, come sempre in seguito, il simbolo $\varepsilon_{i\nu}$ significa lo zero se gli indici i, ν sono disuguali, l'unità se $i = \nu$; si ottiene così

$$\sum_\mu \left(\sum_t A'_{\mu t} \left[\begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix}\right]' \right) \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \sum_{ik} \left(\sum_t A_{\nu t} \left[\begin{matrix} i & k \\ t \end{matrix}\right] \right) \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s}.$$

Introduciamo ora i nuovi simboli di Christoffel a tre indici (di seconda specie)

(1) Si vede subito infatti che questo è il prodotto del discriminante A pel Jacobiano $\frac{\partial (x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial (x'_1, x'_2, \ldots x'_n)}$ ambedue non nulli.

$$\left\{\begin{matrix} i & k \\ \nu & \end{matrix}\right\}_l = \sum_t A_{\nu t} \left[\begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix}\right], \tag{19}$$

anche qui, denotando cogli accenti le formazioni analoghe per f', avremo così le formole finali:

$$\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s} = \sum_\mu \left\{\begin{matrix} r & s \\ \mu & \end{matrix}\right\}' \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} - \sum_{ik} \left\{\begin{matrix} i & k \\ \nu & \end{matrix}\right\}_l \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s}. \tag{11}$$

Queste sono le formole fondamentali di Christoffel che esprimono nel modo asserito, *tutte* le derivate seconde delle funzioni incognite. E già a questo punto i principii generali della teoria dei sistemi di equazioni differenziali portano a concludere che, ove le due forme differenziali f, f' siano in effetto equivalenti, nelle formole di trasformazione $x_i = x_i(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)$ non possono entrare *al massimo* che costanti arbitrarie in numero finito $\left(\leqq \frac{n(n+1)}{2}\right)$ (V.ª più oltre §. 36), e la decisione sull'effettiva equivalenza e sul numero delle costanti d'integrazione si ottiene in ogni caso con soli calcoli di derivazione e di eliminazione. Ma sospendiamo pel momento questa ricerca per dedurre prima altre conseguenze dalle formole (11) di Christoffel.

§. 34.

Proprietà dei simboli a tre indici.

Occorre in primo luogo trattenersi alquanto sulle proprietà dei simboli di Christoffel a tre indici, che useremo sempre in seguito.

I simboli di 1ª specie $\left[\begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix}\right]$ definiti dalla (17) godono evidentemente della proprietà espressa dalla formola

$$\left[\begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} k & i \\ l \end{matrix}\right],$$

e dalla (19) si riconosce che lo stesso accadè per simboli di 2ª specie

$$\left\{\begin{matrix} i & k \\ \nu & \end{matrix}\right\}_l = \left\{\begin{matrix} k & i \\ \nu & \end{matrix}\right\}_l,$$

cioè: *un simbolo a tre indici di 1ª o di 2ª specie non cangia di valore scambiando i due indici superiori.*

Osserviamo ancora che, mentre i simboli di 1ª specie sono aggregati di tre derivate dei coefficienti, inversamente ciascuna di queste derivate si esprime come aggregato di due tali simboli colla formola

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \left|\begin{matrix} i & l \\ k & \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} k & l \\ i & \end{matrix}\right|. \tag{20}$$

Possiamo qui introdurre i simboli di 2ª specie, pei quali si esprimono quelli di 1ª specie colle formole inverse delle (19)

$$\left|\begin{matrix} i & k \\ l & \end{matrix}\right| = \sum_{\nu} a_{l\nu} \left\{\begin{matrix} i & k \\ \nu & \end{matrix}\right\}, \tag{19*}$$

e allora la precedente diventa

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_{\mu} \left\{\begin{matrix} i & l \\ \mu & \end{matrix}\right\} a_{k\mu} + \sum_{\mu} \left\{\begin{matrix} k & l \\ \mu & \end{matrix}\right\} a_{i\mu}. \tag{A}$$

Insieme a queste ultime, conviene osservare un secondo sistema di formole che esprimono similmente le derivate delle A_{ik}. Per questo si parta dalla identità

$$\sum_i a_{si} A_{li} = \delta_{sl} \quad (s, l = 1, 2, \ldots n)$$

e si derivi rapporto ad x_λ, da cui per la (20)

$$\sum_i a_{si} \frac{\partial A_{li}}{\partial x_\lambda} = -\sum_i A_{ri} \left|\begin{matrix} s & \lambda \\ i & \end{matrix}\right| - \sum_i A_{li} \left|\begin{matrix} i & \lambda \\ s & \end{matrix}\right| = -\left\{\begin{matrix} s & \lambda \\ l & \end{matrix}\right\} - \sum_i A_{li} \left|\begin{matrix} i & \lambda \\ s & \end{matrix}\right|$$

e moltiplicando per A_{sk} col sommare rapporto ad s si ottiene

$$\frac{\partial A_{lk}}{\partial x_\lambda} = -\sum_i A_{li} \left\{\begin{matrix} \lambda & l \\ k & \end{matrix}\right\} - \sum_i A_{ki} \left\{\begin{matrix} \lambda & l \\ l & \end{matrix}\right\}. \tag{B}$$

In fine osserviamo ancora una formola che esprime la derivata logaritmica del discriminante A rispetto ad una qualunque x_l. Siccome

$$\frac{\partial \log A}{\partial x_l} = \sum_{r,s} \frac{\partial \log A}{\partial a_{rs}} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_l} = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_l},$$

abbiamo per la (20)

$$\frac{\partial \log A}{\partial x_l} = \sum_{r,s} A_{rs} \left|\begin{matrix} r & l \\ s & \end{matrix}\right| + \sum_{r,s} A_{rs} \left|\begin{matrix} s & l \\ r & \end{matrix}\right|;$$

ma le due somme del secondo membro sono eguali, (come risulta dallo scambiare gli indici di sommazione p. es. nella seconda) e resta quindi

$$\frac{\partial \log A}{\partial x_l} = 2 \sum_{r,s} A_{rs} \left|\begin{matrix} r & l \\ s & \end{matrix}\right|,$$

che possiamo anche scrivere, per la (19), sotto la forma definitiva

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_l} = \sum_r \left\{\begin{matrix} r & l \\ r & \end{matrix}\right\}. \tag{C}$$

§. 35.

Derivate seconde covarianti, e parametro differenziale secondo $\Delta_2 U$.

Possiamo utilizzare subito le formole fondamentali (II) pag. 81 di Christoffel per costruire una forma differenziale quadratica φ covariante alla f, e contenente nei suoi coefficienti le derivate prime e seconde di una funzione arbitraria U.

Indicando al solito con U' la U stessa, espressa per le x', abbiamo

$$\frac{\partial U'}{\partial x'_r} = \sum_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_r}$$

e derivando rapporto a x'_s

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x'_r \partial x'_s} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_r} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_s} + \sum_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s}.$$

Se qui introduciamo per $\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s}$ il valore dato dalle formule (II), risulta

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x'_r\,\partial x'_s} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\}' \frac{\partial U'}{\partial x'_t} = \sum_{\mu\nu} \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \sum_i \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_r} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_s}.$$

Ora introduciamo le notazioni

$$U_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \sum_i \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{21}$$

e adoperando le notazioni analoghe cogli accenti per la forma trasformata f', le precedenti si scrivono:

$$U'_{rs} = \sum_{\mu\nu} U_{\mu\nu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_r} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_s},$$

le quali, confrontate colle (12), mostrano che le U'_{rs} si esprimono per le U_{rs} precisamente come i coefficienti a'_{rs} per gli a_{rs}. Per ciò si ha

$$\sum_{rs} U'_{rs}\,dx'_r\,dx'_s = \sum_{rs} U_{rs}\,dx_r\,dx_s,$$

vale a dire la forma quadratica

$$\varphi = \sum_{rs} U_{rs}\,dx_r\,dx_s$$

è *covariante* alla forma f. Le U_{rs} si dicono (secondo Ricci) le *derivate seconde covarianti* della funzione U, costruite rispetto alla forma fondamentale f. Operando sulla forma covariante φ (che può dirsi il differenziale secondo covariante di U), come al § 32 sul quadrato del differenziale primo dU, vediamo che i coefficienti delle varie potenze di λ nel discriminante della forma

$$\frac{1}{A} \sum_{rs} (a_{rs} + \lambda U_{rs})\,dx_r\,dx_s$$

sono altrettanti *parametri differenziali secondi* della U. Fra questi il più importante è quello della prima potenza di λ, che si indica col simbolo $\Delta_2 U$ e si chiama il *parametro differenziale secondo*. Esso è dato dalle formole:

$$\Delta_2 U = \sum_{rs} A_{rs} U_{rs} = \sum_{rs} A_{rs} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_r\,\partial x_s} - \sum_i \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \tag{22}$$

A questa espressione del $\Delta_2 U$ possiamo dare un'altra forma importante, spesso usata nelle applicazioni. Permutando a destra nella somma tripla gli indici i, s, possiamo scrivere

$$\Delta_2 U = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial U}{\partial x_s} \right) - \sum_{r,s,i} A_{ri} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ s \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

od anche

$$\Delta_2 U = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \sum_s A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_s} - \sum_s \sum_r \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial x_r} + \sum_i A_{ri} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ s \end{matrix} \right\} \right) \frac{\partial U}{\partial x_s}.$$

Ora abbiamo, a causa delle (B) pag. 82

$$\frac{\partial A_{rs}}{\partial x_r} + \sum_i A_{ri} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ s \end{matrix} \right\} = - \sum_i A_{si} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ r \end{matrix} \right\},$$

e per ciò anche

$$\Delta_2 U = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \sum_s A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_s} + \sum_{s,i} A_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ r \end{matrix} \right\}$$

Sostituendo in questa per

$$\left\{ \begin{matrix} r & i \\ r \end{matrix} \right\}$$

il suo valore dato dalla (C): $\frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_i}$, poi scrivendo r al posto di i come indice di sommazione, risulta

$$\Delta_2 U = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \sum_s A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_s} + \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

o infine

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\sum_s A_{rs} \sqrt{A} \frac{\partial U}{\partial x_s} \right), \tag{23}$$

che ci dà la forma definitiva richiesta.

Se si applica questa formola in particolare al caso che la f abbia la forma così detta ortogonale (coi soli quadrati dei differenziali), che scriviamo

$$f = H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx^2 + \ldots + H_n^2\,dx_n^2\,,$$

abbiamo

$$A = H_1 H_2 \ldots H_n\,,\quad A_{rs} = 0 \text{ per } r \neq s\,,$$

$$A_{rr} = \frac{1}{H_r^2}\,A^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\Delta_2 U = \frac{1}{H_1 H_2 \ldots H_n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2 H_3 \ldots H_n}{H_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1 H_3 \ldots H_n}{H_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{H_1 H_2 \ldots H_{n-1}}{H_n}\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)\right\}.$$

Così nel caso di tre variabili

$$\Delta_2 U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right\}. \quad (1)$$

Osservazione. Per le forme differenziali binarie, quali si presentano nella geometria infinitesimale delle superficie, i parametri differenziali introdotti

$$\Delta_1 U\,,\quad \nabla(U,V)\,,\quad \nabla_2 U$$

bastano già per comporre ogni altro parametro differenziale. Sarà bene però considerare qui esplicitamente un altro parametro differenziale secondo molto importante (nella teoria dell' applicabilità).

Questo è il coefficiente di λ^2 in

$$\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda U_{11} & a_{12}+\lambda U_{12} \\ a_{12}+\lambda U_{12} & a_{22}+\lambda U_{22} \end{vmatrix},$$

(1) P. e. se $f = dx^2 + dy^2 + dz^2$ si ha

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

e in coordinate polari, essendo

$$f = d\rho^2 + \rho^2 d\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\,,$$

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

che si indica col simbolo $\Delta_{22} U$, e si ha quindi

$$\Delta_{22} U = \frac{U_{11}U_{22} - U_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\,. \quad (24)$$

Esso si esprime del resto per gli altri colla formola

$$\Delta_{22} U = \frac{2\Delta_2 U\,\nabla(U,\Delta_1 U) - \Delta_1(\Delta_1 U)}{4\Delta_1 U}\,.$$

(V. Darboux T. III pag. 260).

§. 36.

Equazioni ai differenziali totali per le $p_{i\,k}$.

Ritorniamo alle equazioni (II) di Christoffel, che abbiamo dedotto come conseguenze differenziali delle (I). Se introduciamo, come altrettante nuove funzioni incognite, oltre le $x_1, x_2 \ldots x_n$, le loro n^2 derivate prime

$$p_{i\,r} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\,,$$

le (II) possono scriversi come un sistema di equazioni ai differenziali totali per le nostre $n + n^2$ funzioni incognite x_i, $p_{i\,r}$, e cioè:

$$(II^*)\quad \begin{cases} dx_i = \sum_r p_{i\,r}\,dx'_r \\ dp_{\nu\,r} = \sum_r \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} r & s \\ \mu & \end{matrix} \right\} p_{\nu\mu} - \sum_{i,k} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \nu & \end{matrix} \right\} p_{i\,r}\,p_{k\,s}\,dx'_s\,, \end{cases}$$

alle quali dobbiamo poi aggiungere, come equazioni in termini finiti fra le x, p, le (I), cioè

$$(I)^* \qquad \sum_{i\,k} a_{i\,k}\,p_{i\,r}\,p_{k\,s} = a'_{r\,s}\,.$$

Le (I*), (II*) insieme formano un così detto *sistema misto* ai differenziali totali e noi ora andiamo a constatare intanto che le equazioni ottenute derivando le (I*) sono già conseguenze del sistema stesso (I*), (II). Più precisamente dimostriamo con Christoffel (l. c.)

che se dalle x, p sono soddisfatte le (II*), lo saranno anche le (I*) quando lo siano per un sistema iniziale di valori $\bar{x}'$ delle variabili indipendenti.

Pongasi

$$\Omega_{rs} = \sum_{ik} a_{ik}\, p_{ir}\, p_{ks}$$

e si derivi rispetto ad una qualunque x'_t ponendo mente alle (II*), onde

$$\frac{\partial \Omega_{rs}}{\partial x'_t} = \sum_{ikl} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\, p_{ir}\, p_{ks}\, p_{lt} +$$

$$+ \sum_{ik} a_{ik}\, p_{ks} \frac{\partial p_{ir}}{\partial x'_t} + \sum_{ik} a_{ik}\, p_{ir} \frac{\partial p_{ks}}{\partial x'_t}.$$

Sostituendo per le derivate delle p i valori tratti dalle (II*), e ricordando le proprietà dai simboli a tre indici, si trova

$$\frac{\partial \Omega_{rs}}{\partial x'_t} = \sum_{v} \left\{ \begin{matrix} r & t \\ l & v \end{matrix} \right\} \Omega_{sv} + \sum_{v} \left\{ \begin{matrix} s & t \\ l & v \end{matrix} \right\} \Omega_{rv}.$$

$$(r, s, t = 1, 2, \ldots n).$$

Questo è per le Ω_{rs} un sistema di equazioni ai differenziali totali, *lineari ed omogenee*, che è identico, per le (A) pag. 82; a quello cui soddisfano le a'_{rs}, onde segue che se, inizialmente per $x'_t = \bar{x}'_t$ si ha

$$\Omega_{rs} = a'_{rs},$$

queste eguaglianze continueranno a sussistere per tutti i valori delle x'. Così basta soddisfare al sistema differenziale (II*), aggiungendo soltanto come condizioni *iniziali* le (I*) le quali vincolano i valori iniziali delle x, p con $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni, manifestamente indipendenti. In queste condizioni la teoria generale insegna che il sistema integrale (se pure esiste) conterrà *al massimo* $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie, e ciò avverrà quando anche le conseguenze differenziali

delle (II* rientrino nel sistema stesso (II*), (I*). Intanto ne concludiamo: *Le formole della più generale trasformazione di una forma differenziale quadratica f in n variabili in un' altra f' possono contenere al massimo* $\frac{n(n+1)}{2}$ *costanti arbitrarie.*

Questo vale in particolare delle eventuali trasformazioni di una forma in sè, e poichè tali trasformazioni costituiscono manifestamente un gruppo continuo o discontinuo, secondo che nelle formole di trasformazione figurano delle costanti arbitrarie o nessuna, ne deduciamo:

Le trasformazioni di una forma differenziale quadratica in sè medesima formano, al massimo, un gruppo continuo con $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri.*

In generale, proseguendo la ricerca come è indicato dalla teoria generale, dobbiamo ora esaminare le conseguenze differenziali del 1° ordine del sistema (II*), cioè *le condizioni d' integrabilità*, le quali ove non seguano già algebricamente dalle (I*), (II*), dovranno essere aggiunte al sistema.

La costruzione di queste condizioni d' integrabilità ci condurrà inoltre, nel caso binario, a costruire un importante invariante differenziale del 2° ordine (la così detta curvatura).

§. 37.

Le condizioni d' integrabilità.

Per formare queste condizioni si può operare sulle (II*), ovvero sulle (II), nel modo seguente. Scriviamo le due formole di Christoffel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_v}{\partial x'_\alpha\, \partial x'_\beta} + \displaystyle\sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ l & v \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} = \sum_{t} \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ l & t \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_v}{\partial x'_t} \\ \dfrac{\partial^2 x_v}{\partial x'_\alpha\, \partial x'_\gamma} + \displaystyle\sum_{rh} \left\{ \begin{matrix} r & h \\ l & v \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma} = \sum_{t} \left\{ \begin{matrix} \alpha & \gamma \\ l & t \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'_v}{\partial x'_t} \end{cases}$$

e, derivando la prima rispetto a x'_γ la seconda rispetto a x'_β, sottragghiamo omettendo i termini che si distruggono, il che dà:

$$\sum_{r,i,h}\left|\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} r & i \\ \nu & \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} r & h \\ \nu & \end{Bmatrix}\right|\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}+\sum_{l,i}\begin{Bmatrix} l & i \\ \nu & \end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_l}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\gamma}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}-$$

$$-\sum_{l,h}\begin{Bmatrix} l & h \\ \nu & \end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_l}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}=\sum_t\left|\frac{\partial}{\partial x'_\gamma}\begin{Bmatrix} \alpha & \beta' \\ t & \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x'_\beta}\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma' \\ t & \end{Bmatrix}\right|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}+$$

$$+\sum_t\begin{Bmatrix} \alpha & \beta' \\ t & \end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_t\,\partial x'_\gamma}-\sum_t\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma' \\ t & \end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_t\,\partial x'_\beta}.$$

Se in queste sostituiamo per le derivate seconde i valori tratti dalle (11), si vede che i termini contenenti i prodotti di due derivate prime si elidono, e cangiando convenientemente in alcune delle somme la notazione per gli indici, sì da far comparire le stesse derivate nei termini omologhi, troviamo le formole:

$$\sum_{r,i,h}\left[\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} r & i \\ \nu & \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} r & h \\ \nu & \end{Bmatrix}+\sum_t\left(\begin{Bmatrix} r & i \\ t & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t & h \\ \nu & \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} r & h \\ t & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t & i \\ \nu & \end{Bmatrix}\right)\right]\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}=$$

$$=\sum_t\left[\frac{\partial}{\partial x'_\gamma}\begin{Bmatrix} \alpha & \beta' \\ t & \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x'_\beta}\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma' \\ t & \end{Bmatrix}+\sum_t\left(\begin{Bmatrix} \alpha & \beta' \\ l & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & \gamma' \\ t & \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma' \\ l & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & \beta' \\ t & \end{Bmatrix}\right)\right]\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}$$

le quali sono già le cercate condizioni d' integrabilità. Ora si osservi che i coefficienti di $\dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}$ e quello del prodotto $\dfrac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\dfrac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\dfrac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}$ nelle somme del secondo e del primo membro sono costruiti colla stessa legge, l' uno rispetto ai coefficienti della f'', l' altro rispetto a quelli della f'. Conviene introdurre queste formazioni come nuovi simboli a quattro indici e noi porremo

$$(25)\qquad \left\{r\nu,\,ih\right\}=\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} r & i \\ \nu & \end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} r & h \\ \nu & \end{Bmatrix}+\sum_l\left(\begin{Bmatrix} r & i \\ l & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & h \\ \nu & \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} r & h \\ l & \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l & i \\ \nu & \end{Bmatrix}\right),$$

dopo di che le condizioni d' integrabilità assumeranno la forma

$$(26)\qquad \sum_{r,ih}\left\{r\nu,\,ih\right\}\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}=\sum_t\left\{\alpha t,\,\beta\gamma\right\}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}.$$

In fine accanto ai simboli $\left\{r\nu,\,ih\right\}$ definiti dalla (25), che diremo di *seconda specie*, introdurremo anche dei simboli a quattro indici di *prima specie* mediante la formola

$$(27)\qquad (rk,\,ih)=\sum_\nu a_{\nu k}\left\{r\nu,\,ih\right\},$$

da cui risolvendo si ha la

$$(27^*)\qquad \left\{r\nu,\,ih\right\}=\sum_k A_{\nu k}(rk,\,ih),$$

colla quale esprimiamo inversamente quelli di seconda per quelli di prima.

Se ora moltiplichiamo la (26) per

$$a_{\nu k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\varepsilon}$$

e sommiamo a tutti i valori di ν, k, osservando le (1), otteniamo in fine le formole

$$(III)\qquad (\alpha\delta,\,\beta\gamma)'=\sum_{r,k,i,h}(rk,\,ih)\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\varepsilon}$$

che sono perfettamente equivalenti alle (26) e rappresentano le condizioni d' integrabilità sotto la forma finale.

§. 38.

Simboli di Riemann e loro proprietà.

I simboli a quattro indici di prima specie $(rk,\,ih)$ erano già stati introdotti, prima che da Christoffel, da Riemann in una memoria postuma (1), e si diranno i *simboli di Riemann*. Conviene che ci trattegniamo alquanto sulle loro proprietà esprimendoli anzi tutto pei simboli a tre indici di prima specie. Per le (25), (27) abbiamo

$$(rk,\,ih)=\sum_\nu a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} r & i \\ \nu & \end{Bmatrix}-\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} r & h \\ \nu & \end{Bmatrix}+$$

$$+\sum_l\left(\begin{Bmatrix} r & i \\ l & \end{Bmatrix}\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} l & h \\ \nu & \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} r & h \\ l & \end{Bmatrix}\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} l & i \\ \nu & \end{Bmatrix}\right).$$

(1) RIEMANN'S WERKE. — *Commentatio mathematica etc.*, pag. 391 (2ª edizione).

Ora si ha

$$\sum_\nu a_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ \nu \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} r & i \\ k \end{matrix} \right|, \quad \sum_\nu a_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} r & h \\ \nu \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} r & h \\ k \end{matrix} \right|,$$

$$\sum_\nu a_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} l & h \\ \nu \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} l & h \\ k \end{matrix} \right|, \quad \sum_\nu a_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} l & i \\ \nu \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} l & i \\ k \end{matrix} \right|,$$

e quindi

$$(rk,\ ih) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left| \begin{matrix} r & i \\ k \end{matrix} \right| - \frac{\partial}{\partial x_i} \left| \begin{matrix} r & h \\ k \end{matrix} \right| + \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} r & h \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_i} - \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} r & i \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_h} +$$

$$+ \sum_l \left(\left\{ \begin{matrix} r & i \\ l \end{matrix} \right\} \left| \begin{matrix} l & h \\ k \end{matrix} \right| - \left\{ \begin{matrix} r & h \\ l \end{matrix} \right\} \left| \begin{matrix} l & i \\ k \end{matrix} \right| \right).$$

Sostituendo per $\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_l}$, $\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_h}$ i loro rispettivi valori

$$\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_l} = \left[\begin{matrix} \nu & i \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} i & k \\ \nu \end{matrix} \right], \quad \frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_h} = \left[\begin{matrix} \nu & h \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} h & k \\ \nu \end{matrix} \right]$$

resta

$$(rk,\ ih) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left[\begin{matrix} r & i \\ k \end{matrix} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\begin{matrix} r & h \\ k \end{matrix} \right] + \sum_l \left(\left[\begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} r & h \\ l \end{matrix} \right\} - \left[\begin{matrix} h & k \\ l \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} r & i \\ l \end{matrix} \right\} \right).$$

formola che, esprimendo i simboli $\left\{ \begin{matrix} r & h \\ l \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} r & i \\ l \end{matrix} \right\}$ di seconda specie per quelle di prima, diventa

$$(28)\quad (rk,\ ih) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\begin{matrix} r & h \\ k \end{matrix} \right] + \sum_{l,m} A_{l,m} \left(\left[\begin{matrix} r & h \\ m \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} ri \\ m \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} hk \\ l \end{matrix} \right] \right).$$

Se in fine sviluppiamo effettivamente nel secondo membro i primi due termini che solo contengono le derivate seconde dei coefficienti, abbiamo

$$(30^*)\quad (rk,\ ih) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_r\, \partial x_h} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial x_h\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_r\, \partial x_i} \right) +$$

$$+ \sum_{l,m} A_{lm} \left(\left[\begin{matrix} r & h \\ m \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} r & i \\ m \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} h & k \\ l \end{matrix} \right] \right).$$

Da quest' ultime discende subito che si ha

$$(a)\quad \begin{cases} (kr,\ ih) = -(rk,\ ih) \\ (rk,\ hi) = -(rk,\ ih), \end{cases}$$

cioè per lo scambio dei due primi, come dei due secondi indici, il valore del simbolo di Riemann cangia segno ed è quindi zero se sono uguali. Dalla (28*) seguono ancora le identità

$$(b)\quad \begin{cases} (ih,\ rh) = (rk,\ ih) \\ (rk,\ ih) + (ri,\ hk) + (rh,\ ki) = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto di queste relazioni, si vede facilmente (Christoffel l. c.) che il numero N_n dei simboli distinti di Riemann per n variabili è dato da

$$N_n = \frac{n^2 (n^2 - 1)}{12},$$

in particolare $N_2 = 1$, $N_3 = 6$, $N_4 = 20$ ecc.

§. 39.

Caso di illimitata integrabilità.

In generale le condizioni d' integrabilità (III) aggiungono nuove equazioni del primo ordine alle (I) pag. 78 ma vi ha un caso particolare molto notevole in cui esse risultano *identicamente* soddisfatte ed un altro in cui, senza essere identiche, sono conseguenze algebriche delle (I) stesse. In ambedue i casi, per quanto già si è detto, le (I), (II) formano un sistema completamente integrabile e le due forme sono equivalenti, comportando le formole di trasformazione $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie.

1.° caso. Supponiamo che tutti i simboli di Riemann per la prima forma f siano nulli: a causa delle (III) lo stesso dovrà accadere per la seconda f', nell' ipotesi della equivalenza. Ma inversamente, se sono nulli i simboli Riemanniani tanto per l' una che per l' altra forma, le (III) si risolvono in tante identità e le due forme f, f' sono equivalenti in $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ modi. Per altro, dal punto di vista

reale, è necessario aggiungere che le due forme algebriche

$$\sum a_{r\,s}\,\xi_r\,\xi_s\,,\ \sum a'_{r\,s}\,\xi_r\,\xi_s$$

(dove con $a'_{r\,s}$, $\overline{a'_{r\,s}}$ intendiamo i valori assunti dai coefficienti per i particolari sistemi $\bar{x}$, $\bar{x}'$ delle variabili) siano algebricamente equivalenti per sostituzione lineare *reale*, cioè ridotte a forma ortogonale presentino lo stesso numero di coefficienti positivi (legge d'inerzia). Ora osserviamo che una forma f' a coefficienti costanti ha certamente nulli tutti i simboli di Riemann e quindi:

Affinchè la forma f sia equivalente ad una forma a coefficienti costanti è necessario e sufficiente che si annullino tutti i simboli di Riemann. E in particolare si potrà ridurre f alla forma normale

$$\varepsilon_1\,dy_1^{\,2} + \varepsilon_2\,dy_2^{\,2} + \ldots + \varepsilon_n\,dy_n^{\,2}$$

dove ciascuna ε_i è l'unità, positiva o negativa.

2.° *caso.* Supponiamo ora che per la forma f i simboli di Riemann (rk, ih), senza essere nulli, siano tutti proporzionali, per un fattore costante C, ai minori del secondo ordine del discriminante, secondo la formola seguente

$$(rk, ih) = C\,(a_{ri}\,a_{kk} - a_{rh}\,a_{ik}), \tag{29}$$

nel qual caso, per una ragione che apparirà in ulteriori studi, si dirà che *la forma f è di curvatura Riemanniana costante C.* (Il caso precedente corrisponde manifestamente al caso della curvatura C nulla). Ora le (III) ci dànno

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)' = C \sum_{r\,k\,i\,h} (a_{ri}\,a_{hk} - a_{rk}\,a_{ih}) \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\delta}$$

che per le (I) si cangiano subito nelle altre

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)' = C(a'_{\alpha\beta}\,a'_{\gamma\delta} - a'_{\alpha\gamma}\,a'_{\beta\delta}), \tag{29*}$$

e dimostrano che: *Se la forma f è a curvatura Riemanniana costante C, qualunque forma f' equivalente ad f ha la stessa curvatura di Riemann costante C.*

Ora, inversamente, se f, f' hanno la stessa curvatura di Riemann costante, essendo soddisfatte le (29), (29*), le condizioni (III) risultano conseguenze algebriche delle (I) ed il sistema misto ai differenziali totali (I*), (II*) è illimitatamente integrabile.

Dunque: *Due forme differenziali quadratiche colla medesima curvatura di Riemann costante sono sempre equivalenti e nelle formole di trasformazione dell'una nell'altra entrano $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie.*

In particolare abbiamo il risultato:

Ogni forma differenziale f a n variabili, colla curvatura di Riemann costante, ammette un gruppo continuo di trasformazioni in sè stessa con $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri.

Aggiungiamo in fine, senza dimostrazione, che il caso sopra considerato è l'unico in cui le formole di trasformazione comportano il massimo numero possibile $\frac{n(n+1)}{2}$ di costanti arbitrarie.

§ 40.

Forme quadratiche simultanee f, φ e forma trilineare associata (f, φ).

Insieme alla forma fondamentale

$$f = \sum_{r\,s} a_{r\,s}\,dx_r\,dx_s$$

(con discriminante $A \neq 0$), consideriamo un'altra forma quadratica *qualunque, nello stesso numero di variabili*:

$$\varphi = \sum_{r\,s} b_{r\,s}\,dx_r\,dx_s\ ,$$

i cui coefficienti $b_{r\,s}$ potranno essere funzioni date delle sole x, ovvero contenere anche i coefficienti $a_{r\,s}$ e loro derivate, come pure un certo numero di funzioni arbitrarie e loro derivate; ma in questo secondo caso aggiungeremo la condizione che la φ sia *covariante* alla f. Ci proponiamo ora di costruire una certa forma *trilineare*, in tre diversi sistemi di differenziali, *covariante* essa stessa al sistema di f, φ: questa forma trilineare ha la massima importanza, come vedremo poi, nelle applicazioni geometriche.

Supponiamo che, per una trasformazione qualunque delle variabili x nelle x', le f, φ si cangino rispettivamente in

$$f' = \sum_{r,s} a'_{r,s}\, dx'_r\, dx'_s\ , \quad \varphi' = \sum_{r,s} b'_{r,s}\, dx'_r\, dx'_s\ ,$$

e prendiamo la formola

$$b'_{r,s} = \sum_{i,k} b_{i,k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\ ,$$

che deriviamo rispetto ad una qualunque x'_t, col sostituire nel secondo membro alle derivate secondo i valori dati dalle formole fondamentali di Christoffel (II) pag. 81; così otteniamo

$$(30)\qquad \frac{\partial b'_{r,s}}{\partial x'_t} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} s & t \\ \mu & \end{matrix} \right\}' b'_{r\mu} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} r & t \\ \mu & \end{matrix} \right\}' b'_{s\mu} =$$

$$= \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial b_{i,k}}{\partial x_l} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{k\mu} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} k & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{i\mu} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t}\ ,$$

i simboli di Christoffel essendo costruiti al solito per la forma f, e per la trasformata f'.

Il primo membro della (30), ed il coefficiente del prodotto delle tre derivate prime nel secondo, sono costruiti nello stesso modo, l'uno rispetto alle forme trasformate f', φ', l'altro rispetto alle primitive e la (30) dice che la *forma cubica*

$$\sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial b_{i,k}}{\partial x_l} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{k\mu} \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} k & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{i\mu} \right) dx_i\, dx_k\, dx_l$$

è una forma *covariante* al sistema f, φ. Queste espressioni a tre indici

$$(31)\qquad \frac{\partial b_{i,k}}{\partial x_l} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{k\mu} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} k & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{i\mu}$$

vengono perciò dette dal RICCI le derivate covarianti del sistema $(b_{i,k})$ dei coefficienti rispetto alla forma primitiva f. Esse si annullano identicamente se si pone $\varphi = f$, cioè $b_{i,k} = a_{i,k}$, riducendosi allora alle formole (A) pag. 82. Pel nostro scopo dovremo considerare altre espressioni a tre indici che nascono dalla (31) sottraendo da questa quella che se ne ottiene scambiando k con l, che indicheremo col simbolo $b_{i,k,l}$

$$(32)\qquad b_{ikl} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_k} + \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & k \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{l\mu} - \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l \\ \mu & \end{matrix} \right\} b_{k\mu}$$

Dalla (30) abbiamo manifestamente

$$(32^*)\qquad b'_{r,s,t} = \sum_{i,k,l} b_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t}\ ,$$

e quindi se coi simboli d, δ, D indichiamo tre diversi sistemi di differenziali delle variabili, moltiplicando le (32) per $dx'_r\ \delta x'_s\ \mathrm{D}x'_t$ e sommando rispetto ad r, s, t, otteniamo

$$\sum_{r,s,t} b'_{r,s,t}\, dx'_r\, \delta x'_s\, \mathrm{D}x_t = \sum_{i,k,l} b_{ikl}\, dx_i\, \delta x_k\, \mathrm{D}x_l\ .$$

Dunque la forma trilineare

$$\sum_{i,k,l} b_{ikl}\, dx_i\, \delta x_k\, \mathrm{D}x_l$$

nei tre sistemi differenziali d, δ, D è una forma covariante al sistema f, φ; essa si dirà: *la forma trilineare costruita* per la forma φ rispetto ad f e si indicherà con

$$(f, \varphi) = \sum_{i,k,l} b_{ikl}\, dx_i\, \delta x_k\, \mathrm{D}x_l\ .$$

È da osservarsi che le formazioni b_{ikl}, definite dalle (32), soddisfano alle identità

$$(a)\qquad \begin{cases} b_{ikl} + b_{ilk} = 0 \\ b_{ikl} + b_{kli} + b_{lik} = 0\ . \ (^1) \end{cases}$$

Ora è chiaro che: *l'annullarsi identico della forma trilineare (f, φ), per l'annullarsi di tutti i coefficienti b_{ikl}, esprime una relazione invariante fra le due forme, che si mantiene cioè per qualunque trasformazione di variabili.*

Merita particolare attenzione il caso che per seconda forma differenziale φ si assuma il differenziale secondo covariante di una funzione arbitraria U (§ 35)

$$\varphi = \sum_{i,k} \mathrm{U}_{i,k}\, dx_i\, dx_k\ .$$

---

(1) Ne segue che facendo eguali i tre sistemi di differenziali d, δ, D la forma cubica $\sum_{ikl} b_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l$ avrebbe un significato puramente formale annullandosi identicamente.

In tal caso le formazioni a tre indici U_{ikl}

$$U_{ikl}=\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial U_{il}}{\partial x_k}+\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} U_{l\mu}-\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ k & \mu \end{matrix} \right\} U_{k\mu}$$

si esprimono per le derivate prime soltanto di U e pei simboli di Riemann con formole che andiamo a stabilire. Abbiamo

$$(33)\qquad \begin{cases} U_{ik}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_k}-\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial U}{\partial x_\lambda} \\ U_{il}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_l}-\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial U}{\partial x_\lambda}, \end{cases}$$

indi

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial U_{il}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial}{\partial x_l}\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}=$$

$$=\sum_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \right] \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}+\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k\,\partial x_\mu}-\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i k_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial^2 U}{\partial x_l\,\partial x_\mu}.$$

Sostituendo a destra per $\dfrac{\partial U}{\partial x_k\,\partial x_\mu}$, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_l\,\partial x_\mu}$ le espressioni equivalenti per le (33)

$$U_{k\mu}+\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} k & \mu_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda},\quad U_{l\mu}+\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} l & \mu_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda},$$

e lasciando a destra i soli termini contenenti $\dfrac{\partial U}{\partial x_\lambda}$ (col trasportare a sinistra quelli con $U_{k\mu}$, $U_{l\mu}$) si ottiene

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial U_{il}}{\partial x_k}+\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} U_{l\mu}-\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ k & \mu \end{matrix} \right\} U_{k\mu}=$$

$$=\sum_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{matrix} i & k_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} + \sum_\mu \left(\left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & \mu_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i k_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & \mu_l \\ l & \lambda \end{matrix} \right\} \right) \right] \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}$$

Il coefficiente di $\dfrac{\partial U}{\partial x_\lambda}$ è precisamente il simbolo a quattro indici

di seconda specie

$$\{ i\,\lambda\,,\,l\,k \},$$

e risultano quindi le formole

$$(D)\quad U_{ikl}=\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial U_{il}}{\partial x_k}+\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} ik_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} U_{l\mu}-\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ k & \mu \end{matrix} \right\} U_{k\mu}=\sum_\lambda \left\{ ik\,,\,lk \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda},$$

ovvero anche, introducendo invece i simboli di Riemann:

$$(D^*)\quad \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_l}-\frac{\partial U_{il}}{\partial x_k}+\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} ik_l \\ l & \mu \end{matrix} \right\} U_{l\mu}-\sum_\mu \left\{ \begin{matrix} i & l_l \\ k & \mu \end{matrix} \right\} U_{k\mu}=\sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu}\,(i\mu\,,\,lk)\,\frac{\partial U}{\partial x_\lambda}$$

Insieme a queste formole ci converrà nel seguito utilizzare anche quelle che dànno le derivate prime dei parametri differenziali primi $\nabla(U,V)$, $\Delta_1 U$.

Siccome

$$\nabla(U,V)=\sum_{i\,k} A_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k},$$

derivando rapporto ad x_l si ottiene

$$\frac{\partial \nabla(U,V)}{\partial x_l}=\sum_{i\,k}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_\lambda A_{\lambda k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_\lambda\,\partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_k}$$

$$+\sum_{\lambda k} A_{i\lambda}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda\,\partial x_l}=$$

$$=\sum_{i\,k}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}+\sum_{\lambda k} A_{\lambda k}\frac{\partial V}{\partial x_k}\left(U_{\lambda l}+\sum_i \left\{ \begin{matrix} \lambda & l_l \\ i & \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)$$

$$+\sum_{\lambda i} A_{\lambda i}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(V_{\lambda l}+\sum_k \left\{ \begin{matrix} \lambda & l \\ k & \end{matrix} \right\} \frac{\partial V}{\partial x_k} \right).$$

Ma, a causa delle formole (B) pag. 82,

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}+\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} \lambda & l_l \\ i & \end{matrix} \right\} A_{\lambda k}+\sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} \lambda & l_l \\ k & \end{matrix} \right\} A_{\lambda i}=0$$

e resta quindi per la formola domandata

$$(E)\qquad \frac{\partial \Delta(U,V)}{\partial x_l} = \sum_{\lambda k} A_{\lambda k} U_{l\lambda} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_{\lambda k} A_{\lambda k} V_{l\lambda} \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

In particolare, se facciamo $V = U$, risulta

$$(E^*)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta_1 U}{\partial x_l} = \sum_{\lambda k} A_{\lambda k} U_{l\lambda} \frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

§. 41.

Invariante assoluto K (curvatura) di una forma binaria

Occupiamoci da ultimo del caso di due variabili ($n = 2$), che interessa la geometria differenziale delle superficie. In questo caso le formole (III) pag. 91 condincono subito a trovare un invariante differenziale del secondo ordine della forma

$$f = a_{11}\,dx_1^2 + 2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2$$

$$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \neq 0).$$

Vi sono infatti allora, per le proprietà dei simboli di Riemann (§. 38) quattro soli simboli (rk, ih) non nulli e sono

$$(12, 12),\ (12, 21),\ (21, 12),\ (21, 21),$$

ma i due estremi sono eguali e i due medii eguali a questi cangiati di segno. Le formole (III) si riducono quindi ad una sola e cioè alla seguente

$$(12, 12)' = (12, 12)\cdot P^2,\quad P = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x'_1, x'_2)};$$

ma poichè anche pei discriminanti A', A di f', f sussiste la stessa relazione

$$A' = A\,P^2,$$

dividendo risulta

$$\frac{(12, 12)'}{A'} = \frac{(12, 12)}{A}.$$

Dunque:

Nel caso di una forma differenziale binaria, il quoziente dell' unico simbolo di Riemann pel discriminante è un invariante differenziale (del secondo ordine).

Questo invariante si indica col simbolo K e si chiama la *curvatura* della forma (pel suo significato geometrico quando f rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie); abbiamo dunque

$$(34)\qquad K = \frac{(12, 12)}{A}.$$

Alla espressione della curvatura K si possono dare varie altre forme che importa considerare pel seguito. In primo luogo dalla (27*), e dalle proprietà del simbolo di Riemann (rk, ih), seguono subito le quattro formole seguenti per la curvatura:

$$(35)\quad K a_{11} = \{12,12\},\ K a_{12} = \{11,21\},\ K a_{12} = \{22,12\},\ K a_{22} = \{21,21\},$$

che conviene scrivere esplicitamente sviluppate pei simboli a tre indici:

$$(IV)\quad \begin{cases} K a_{11} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}^2 \\ K a_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} \\ K a_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} \\ K a_{22} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}^2 \end{cases}.$$

Un' altra forma importante per la curvatura risulta trasformando la prima delle (IV) nel modo seguente. Scriviamola

$$K a_{11} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right) + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right) +$$

$$+ 2\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right),$$

ed osserviamo che per la formola (C) §. 34 (pag. 83) si ha

$$(36)\qquad \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial \log\sqrt{A}}{\partial x_1}\,,\quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial \log\sqrt{A}}{\partial x_2}\,.$$

Sostituendo nella precedente e dividendo per a_{11}, che *supponiamo dapprima diverso da zero*, possiamo scrivere

$$K=\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{a_{11}^2}\left[\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}+2\,a_{11}\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right)\right].$$

Ma il coefficiente di $\frac{1}{a_{11}^2}$ nell' ultimo termine è identicamente nullo, come risulta dalle (A) §. 34 (pag. 82) e resta la formola cercata

$$(V)\qquad K=\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{11}}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right)\right\}\quad(\text{supposto } a_{11}\neq 0).$$

Se fosse $a_{11}=0$, ma $a_{22}\neq 0$, si calcolerà K dall' altra simmetrica:

$$(V^*)\qquad K=\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{22}}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{A}}{a_{22}}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right)\right\}.$$

Se in fine si avrà insieme $a_{11}=a_{22}=0$, le (IV) intermedie, essendo allora nulli tutti i simboli $\left\{\begin{matrix}i\ k\\l\end{matrix}\right\}$ tranne

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial \log a_{12}}{\partial x_1}\,,\quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial \log a_{12}}{\partial x_2}\,,$$

daranno

$$(VI)\qquad K=-\frac{1}{a_{12}}\frac{\partial^2 \log a_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2}\,.$$

Supponiamo in particolare che la forma f sia a curvatura nulla e quindi equivalente ad una qualunque forma a coefficienti costanti (§. 39), che potremo prendere sotto la forma

$$f=dy_1\,dy_2$$

con y_1, y_2 reali se f è a discriminante negativo, e invece coniugate immaginarie se il discriminante positivo. In ogni caso scindendo $f=a_{11}\,dx_1^2+2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2+a_{22}\,dx_2^2$ nei suoi due fattori lineari

$$(\alpha\,dx_1+\beta\,dx_2)\,(\gamma\,dx_1+\delta\,dx_2)$$

reali nel primo caso, coniugati immaginari nel secondo, dovremo avere ad un tempo

$$dy_1=M(\alpha\,dx_1+\beta\,dx_2)\,,\quad dy_2=\frac{1}{M}(\gamma\,dx_1+\delta\,dx_2)$$

essendo M un conveniente moltiplicatore. Ponendo $M=e^{\nu}$, deve aversi ad un tempo

$$\frac{\partial(e^{\nu}\alpha)}{\partial x_2}=\frac{\partial(e^{\nu}\beta)}{\partial x_1}\,,\quad \frac{\partial(e^{-\nu}\gamma)}{\partial x_2}=\frac{\partial(e^{-\nu}\delta)}{\partial x_1}\,,$$

cioè

$$\begin{cases}\beta\dfrac{\partial\nu}{\partial x_1}-\alpha\dfrac{\partial\nu}{\partial x_2}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\beta}{\partial x_1}\\[2ex] \delta\dfrac{\partial\nu}{\partial x_1}-\gamma\dfrac{\partial\nu}{\partial x_2}=\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_2}\,.\end{cases}$$

da cui, essendo $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ perchè i due fattori lineari di f sono distinti, si ottengono risolvendo $\frac{\partial\nu}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\nu}{\partial x_2}$ e per ciò ν con una quadratura, e successivamente $y_1\,y_2$ con altre quadrature. Dunque: *Se la forma binaria è a curvatura nulla, bastano quadrature per ridurla alla forma normale $dy_1\,dy_2$ se è indefinita, o all' altra $dz_1^2+dz_2^2$ se definita.*

§. 42.

Forme binarie simultanee.

Si considerino in fine due forme binarie quadratiche differenziali simultanee

$$\begin{cases} f=a_{11}\,dx_1^2+2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2+a_{22}\,dx_2^2\\ \varphi=b_{11}\,dx_1^2+2\,b_{12}\,dx_1\,dx_2+b_{22}\,dx_2^2,\end{cases}$$

delle quali la prima almeno si supporrà a discriminante A non nullo (irreducibile).

Nei due coefficienti di λ, λ' nel quoziente

$$\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & , & a_{12}+\lambda b_{12} \\ a_{12}+\lambda b_{12} & , & a_{22}+\lambda b_{22} \end{vmatrix},$$

che indicheremo rispettivamente con H, K

$$\begin{cases} H = \dfrac{a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ K = \dfrac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

abbiamo due invarianti assoluti simultanei di f, φ.

Se consideriamo poi il Jacobiano delle due forme

$$J = \begin{vmatrix} a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 & , & a_{12}dx_1 + a_{22}dx_2 \\ b_{11}dx_1 + b_{12}dx_2 & , & b_{12}dx_1 + b_{22}dx_2 \end{vmatrix}$$

questo ci dà una forma differenziale quadratica che, per qualunque cangiamento di variabili, acquista come fattore il modulo della sostituzione nei differenziali $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x'_1, x'_2)}$, precisamente come *la radice quadrata* del discriminante A. Ne segue che la forma quadratica $\Theta = \dfrac{J}{\sqrt{A}}$, ossia

$$(37) \qquad \Theta = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \begin{vmatrix} a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 & , & a_{12}dx_1 + a_{22}dx_2 \\ b_{11}dx_1 + b_{12}dx_2 & , & b_{12}dx_1 + b_{22}dx_2 \end{vmatrix}$$

è un *covariante (irrazionale) simultaneo* di f, φ.

Se lo scriviamo sviluppato

$$(37^*) \qquad \Theta = c_{11}dx_1^2 + c_{12}dx_1dx_2 + c_{22}dx_2^2$$

abbiamo

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{A}}(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}), \quad c_{12} = \frac{1}{\sqrt{A}}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})$$

$$c_{22} = \frac{1}{\sqrt{A}}(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}),$$

cioè $c_{22} - c_{12}, c_{11}$ sono proporzionali ordinatamente ai tre minori della matrice $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}$. Ne segue l'identità

$$(38) \qquad a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - a_{12}c_{12} = 0 \ (^1)$$

e similmente l'altra

$$(38^*) \qquad b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11} - b_{12}c_{12} = 0$$

Dalla prima risulta

$$a_{11}^2(c_{12}^2 - 4c_{11}c_{22}) = a_{11}^2c_{12}^2 - 4a_{11}c_{11}(a_{12}c_{12} - a_{22}c_{11}) = \\ = (a_{11}c_{12} - 2a_{12}c_{11})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)c_{11}^2$$

e da questa identità

$$a_{11}^2(c_{12}^2 - 4c_{11}c_{22}) = (a_{11}c_{12} - 2a_{12}c_{11})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)c_{12}^2,$$

supponendo ora la forma f definita indi

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \ , \ a_{11} \neq 0$$

segue

$$c_{12}^2 - 4c_{11}c_{22} > 0,$$

salvo nel caso $(c_{12}^2 - 4c_{11}c_{22} = 0)$ in cui φ sia proporzionale a f

$$b_{11} : b_{12} : b_{22} - a_{11} : a_{12} : a_{22}$$

chè allora le tre c si annullano, e svanisce identicamente Θ. Dunque: *Se la prima forma f è a discriminante positivo (definita) e la forma φ non è proporzionale a f, il covariante quadratico Θ non si annulla identicamente e si risolve in due fattori lineari reali distinti.*

Siano $\alpha dx_1 + \beta dx_2, \gamma dx_1 + \delta dx_2$ questi fattori lineari, e si considerino le due equazioni differenziali del 1° ordine

$$\alpha dx_1 + \beta dx_2 = 0 \ , \ \gamma dx_1 + \delta dx_2 = 0$$

---

(1) Si sviluppi per la prima linea il determinante nullo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} \end{vmatrix}$$

di cui indichiamo gli integrali, necessariamente indipendenti, con

$$x'_1 = \text{cost.}^{te}\ ,\ x'_2 = \text{cost.}^{te}$$

Se prendiamo per nuove variabili le x'_1, x'_2, nelle forme trasformate

$$\begin{cases} a'_{11}\,dx'^{\,2}_1 + 2\,a'_{12}\,dx'_1\,dx'_2 + a'_{22}\,dx'^{\,2}_2 \\ b'_{11}\,dx'^{\,2}_1 + 2\,b'_{12}\,dx'_1\,dx'_2 + b'_{22}\,dx'^{\,2}_2 \end{cases}$$

avremo ad un tempo

$$a'_{12} = 0\ \ b'_{12} = 0\,,$$

o come si dice le due forme si troveranno ridotte simultaneamente a forma ortogonale (normale).

E invero, siccome il covariante Θ trasformato si deve ridurre a $c'_{12}\,dx'_1\,dx'_2$, avremo $c'_{11} = c'_{22} = 0$ e quindi dalle identità (38), (38*)

$$a'_{12}\,c'_{12} = 0\ ,\ b'_{12}\,c'_{12} = 0\,,$$

per cui essendo $c'_{12} \neq 0$, segue appunto

$$a'_{12} = b'_{12} = 0.$$

Ma anche viceversa se $a'_{12} = b'_{12} = 0$, si ha subito

$$c'_{11} = c'_{22} = 0\,,$$

onde il teorema: *Date due forme differenziali quadratiche binarie (non proporzionali) di cui una almeno definita si può* essenzialmente *in un sol modo, con una trasformazione reale di variabili, ridurle simultaneamente a mancare del termine medio (a forma ortogonale). Le nuove variabili da introdursi sono quelle che, eguagliate a costanti, dànno gli integrali della equazione quadratica che si ottiene eguagliando a zero il covariante Θ (il Jacobiano).*

È manifesto poi che, nel caso escluso della proporzionalità, basta ridurre a forma ortogonale la prima e lo sarà anche la seconda, ciò che può ottenersi in infiniti modi.

In fine ritornando per questo caso binario alla forma trilineare covariante (f, φ) del § 40, si osserverà che, in forza delle identità (α) vi sono quattro sole b_{ikl} a tre indici non identicamente nulle:

$$b_{112}\ ,\ b_{121}\ ,\ b_{221}\ ,\ b_{212}\ ,$$

delle quali però le prime due e le ultime due sono eguali e di segno contrario. Per ciò l'*annullarsi identico della forma trilineare (f, φ) è espresso dalle due equazioni*

$$b_{112} = 0\ ,\ b_{221} = 0,$$

ossia sviluppando colla (32):

$$\text{(VII)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial b_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} b_{11} + \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] b_{12} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} b_{22} = 0 \\ \dfrac{\partial b_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x_2} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} b_{11} + \left[\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] b_{12} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} b_{22} = 0\,. \end{cases}$$

Capitolo III.

Coordinate curvilinee sulle superficie. Rappresentazioni conformi.

Coordinate curvilinee sopra una superficie. — Elemento lineare — Angoli di una curva sulla superficie colle linee coordinate. Simboli di Christoffel, parametri differenziali e curvatura — Sistemi isotermi — Parametri isometrici — Teoremi di Lie — Rappresentazioni conformi — Sistemi isotermi sulle superficie di rotazione — Proiezione stereografica polare della sfera — Sistemi doppi ortogonali di circoli sulla sfera e sul piano — Movimenti della sfera in sè rappresentati da sostituzioni lineari (Cayley) — Le reti di Tchebychef sopra una superficie qualunque.

§. 43.

Coordinate curvilinee sopra una superficie.

Andiamo ora a cominciare lo studio sistematico della geometria infinitesimale della superficie.

Come nel Capitolo I per le curve, noi partiremo anche qui dalla rappresentazione *parametrica* della superficie, o meglio della regione della superficie che si studia (1). Daremo quindi le coordinate (cartesiane ortogonali) di un punto $P = (x, z, z)$, mobile sulla superficie come funzioni, finite e continue e ad un sol valore, di due variabili u, v:

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v) \tag{1}$$

e supporremo una volta per tutte che *in tutto il campo di variabilità da considerarsi per u, v, queste tre funzioni ammettano derivate*

(1) In generale, nella geometria infinitesimale, quello che interessa è lo studio delle proprietà di una regione *sufficientemente piccola*, sebbene finita, della superficie. D'altronde i teoremi di calcolo integrale sull'esistenza degli integrali di equazioni differenziali ordinarie, o a derivate parziali, che occorre continuamente applicare, hanno validità soltanto in campi convenientemente ristretti per le variabili.

parziali almeno fino al terzo ordine tutte finite e continue. Quando poi debbano figurare nei calcoli derivate d'ordine superiore, s'intenderà che la stessa ipotesi si suppone verificata per queste più alte derivate. Si avverta subito che se le (1) debbono rappresentare una superficie, è necessario che le due variabili u, v siano *essenziali*, per la qual cosa occorre e basta che: *la matrice funzionale*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sia di caratteristica 2 (non abbia nulli i minori di secondo ordine); altrimenti x, y, z sarebbero funzioni di una stessa funzione di u, v e le (1) rappresenterebbero le equazioni di una linea non di una superficie (1).

Se nelle (1) diamo ad una delle due variabili, p. e. alla v, un valore costante $v = v_1$, le equazioni

$$x = x(u, v_1),\ y = y(u, v_1),\ z = z(u, v_1)$$

vengono a rappresentare una linea della superficie che si dice la linea $v = v_1$. Facendo variare v_1 con continuità, questa linea varia con continuità (deformandosi) e descrive la superficie (o la regione che si considera). Questo sistema di linee si dirà delle $v = \text{cost.}^{te}$ od anche delle *linee* v (2).

Così avremo un secondo sistema di linee le $u = \text{cost.}^{te}$, o linee u, e questi due sistemi di linee (u, v) ricopriranno la superficie (la regione di superficie), per modo che per ogni suo punto P passerà una ed una sola linea di ciascun sistema. Così ad ogni punto P apparterrà un solo valore u_1 per u ed uno per v_1 per v; questi due valori (u_1, v_1) si chiamano le coordinate *curvilinee* del punto, mentre le linee $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ si dicono le *linee coordinate*. Affinchè non sorgano ambiguità nella rappresentazione, occorre che il *reticolo coordinato* ricopra tutta la regione considerata per modo che due

(1) In altri termini, se la detta matrice è di caratteristica 2, delle tre funzioni x, y, z di u, due restano indipendenti; se di caratteristica 1 una sola.

(2) Alcuni autori chiamano invece linee v quelle lungo le quali varia v e si mantiene fissa u.

curve coordinate di sistema diverso s' incrocino (senza toccarsi) in un sol punto.

Eliminando u, v fra le (1), risulterà l'equazione ordinaria

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1*}$$

della superficie; e inversamente, data l'equazione ordinaria (1*), basterà porre in questa p. e. x, y eguali a funzioni arbitrarie di u, v e dalla (1*) trarre la z in funzione di u, v. Per tal modo si avrà una rappresentazione parametrica (1) della superficie, limitatamente s' intende a quella regione in cui z ne risulti determinata in modo univoco per u, v.

Si osservi che, stabilita una qualunque rappresentazione parametrica (1) della superficie, se ne ottiene un' altra, nel modo più generale possibile, con un cangiamento di variabili ponendo

$$u = u(\alpha, \beta) \quad v = v(\alpha, \beta)$$

dove $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ sono due funzioni finite e continue colle derivate delle nuove variabili α, β, col determinante funzionale $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$; le nuove linee coordinate saranno ora le $\alpha = \text{cost.}^{te}$ $\beta = \text{cost.}^{te}$. Per altro è da osservarsi che se p. e. u contenesse una sola delle nuove variabili, poniamo la sola α, non sarebbero cangiate le linee $u = \text{cost.}^{te}$, ma solo il parametro che le fissa nel loro sistema.

Le coordinate curvilinee così introdotte sono dette anche *coordinate di Gauss*, perchè Gauss pel primo ne fece un uso sistematico. Esse sono utilissime nello studio delle superficie come quelle che per loro natura sono già intimamente legate alla superficie in sè, astrazione fatta dalla sua posizione nello spazio (1).

§ 44.

Elemento lineare ed elemento d' area.

Una equazione

$$\varphi(u, v) = 0, \tag{2}$$

(1) Del resto anche nella geometria analitica elementare piana, adopriamo due sole coordinate, senza uscire dal piano.

che vincoli le coordinate curvilinee (u, v) del punto mobile P, ne limita il corso sulla superficie ad una linea, di cui la (2) si dice la equazione (1). Indicando con ds l'elemento d' arco di questa linea, avremo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3}$$

ove per x, y, z si sostituiscano i valori (1), essendo le variabili u, v legate dalla (2). Ora abbiamo

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

e quadrando e sommando coll'adottare le notazioni ormai classiche di Gauss:

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \end{cases} \tag{4}$$

risulterà

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2, \tag{5}$$

dove, essendo u, v legate dalla (2), i differenziali du, dv saranno vincolati dalla conseguente relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0.$$

Siccome la (5) vale per qualunque linea tracciata sulla superficie, l' espressione data dalla (5) per ds si dirà l'*elemento lineare* della superficie, e la forma differenziale quadratica del secondo membro

$$f = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

(1) Risolvendo p. e. la (2) rispetto a v, se ne ricavi

$$v = \varphi(u),$$

e sostituendo nelle (1) si avranno le equazioni parametriche della curva.

prenderà il nome di *prima forma quadratica fondamentale*. Generalmente, nel seguito, le nostre considerazioni saranno limitate al campo reale (1), ed allora è da osservarsi che il discriminante $EG - F^2$ della forma, dato manifestamente, per le (4), da

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

come quadrato della matrice funzionale, è essenzialmente *positivo* (non nullo), e la forma f è definita positiva, essendo sempre per le (4) i coefficienti estremi E, G positivi. Adopreremo nel seguito frequentemente i simboli

$$\sqrt{E}\,,\ \sqrt{G}\,,\ \sqrt{EG - F^2},$$

colla convenzione che *rappresentino sempre i valori positivi dei radicali*.

In ogni punto di una linea coordinata u o v distingueremo il *senso positivo* della linea dall' opposto negativo, e converremo di assumere per senso positivo di una linea $u = \text{cost.}^{te}$ ($v = \text{cost.}^{te}$) quello secondo cui cresce l'altro parametro (v) (u) variabile lungo la linea. Ne segue che se ds_u, ds_v indicano gli archi elementari delle linee $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ rispettivamente, si avrà per la (5)

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv\,,\ ds_v = \sqrt{E}\,du.$$

E allora se con $\alpha_u\ \beta_u\ \gamma_u$ indichiamo i coseni di direzione positiva della tangente alla linea $u = \text{cost.}^{te}$, e con $\alpha_v\,,\ \beta_v\,,\ \gamma_v$ quelli della tangente alla $v = \text{cost.}^{te}$, avremo:

$$(a)\qquad \begin{cases} \alpha_u = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}\,,\ \beta_u = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial y}{\partial v}\,,\ \gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \alpha_v = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\,,\ \beta_v = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}\,,\ \gamma_v = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial z}{\partial u}\,, \end{cases}$$

(1) Per altro i teoremi analitici che incontreremo valgono anche nel campo complesso (come gli sviluppi dati al Capitolo precedente) e di questo ci serviremo in alcune deduzioni.

da cui

$$\alpha_u\,\alpha_v + \beta_u\,\beta_v + \gamma_u\,\gamma_v = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

L'espressione a sinistra è il coseno dell' angolo ω, fra o e π, delle direzioni positive delle linee coordinate, incrociantisi nel punto $u\,,v$ della superficie, onde la formola

$$(b)\qquad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

indi

$$(b^*)\qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

coi segni positivi dei radicali perchè, per le nostre convenzioni, $\operatorname{sen}\omega > 0$.

Dalla (b) risulta: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee coordinate u, v siano ortogonali* ($\omega = \frac{\pi}{2}$) *è che nella prima forma fondamentale* $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ *sia nullo il coefficiente medio* F.

Diamo ancora la formola che assegna l' *elemento* $d\sigma$ *d' area* della superficie, della quale però raramente avremo da fare uso. Qui la stabiliamo con considerazioni infinitesimali che possono del resto rendersi rigorose (1). Il quadrilatero curvilineo infinitesimo racchiuso dalle quattro linee coordinate

$$u\,,\ v\,,\ u + du\,,\ v + dv$$

può riguardarsi, a meno d' infinitesimi d' ordine superiore, come un parallelogrammo e poichè

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv\,,\ ds_v = \sqrt{E}\,du$$

sono le lunghezze dei suoi lati, che racchiudono un angolo ω il cui seno è dato dalla (b^*), la sua area sarà $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$; dunque:

(1) V. p. e. Dini. Calcolo integrale pag. 270 o Goursat Cours d'Analyse 2ème Edition T. I pag. 329 s.s.

L' elemento d' area $d\sigma$ della superficie è dato dalla formola

$$(b) \qquad d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv .$$

Volendo l' area Σ di una porzione della superficie, basterà calcolare l' integrale doppio

$$(b^*) \qquad \Sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv ,$$

esteso per u, v a quei limiti a cui si estende il reticolato coordinato nella regione Σ.

Dalla regola pel cangiamento delle variabili indipendenti negli integrali multipli si desume del resto subito che se u', v' sono le nuove variabili ed E', F', G' i nuovi coefficienti, si ha

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint \sqrt{EG - F^2}\, \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}\, du\, dv = \iint \sqrt{E'G' - F'^2}\, du'\, dv' ,$$

o come si dice: *L' espressione $\iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ è un invariante integrale.*

§. 45.

Metrica angolare sulla superficie.

Consideriamo una linea qualunque Γ tracciata sulla superficie, per la quale sia fissata arbitrariamente la direzione positiva dell'arco s, e quindi quella della tangente t in ogni punto.

Per misurare senza ambiguità, in grandezza ed in verso, gli angoli sulla superficie noi distingueremo due pagine o facce della superficie, la positiva e la negativa, concordanti con quelle del relativo piano tangente. Converremo di: *assumere come pagina positiva della superficie nel punto (u, v) quella sulla quale la tangente positiva alla linea $u = \text{cost}^{te}$ giace alla sinistra rispetto a quella della linea $v = \text{cost}^{te}$* (1).

Allora, essendo t, t' due tangenti qualunque nel punto u, v, nei loro versi positivi, col simbolo $\overset{\wedge}{t t'}$ indicheremo il minimo angolo fra

(1) Teniamo sempre ferma la convenzione fatta al §. 7 per l' orientazione del triedro coordinato.

0 e 2π di cui deve rotare *in verso positivo* (da destra verso sinistra) la direzione t per andare a sovrapporsi alla t' (angolo che potrà aumentarsi del resto ad arbitrio di multipli interi positivi o negativi di 2π). Intanto, per le nostre convenzioni stesse, avremo

$$\overset{\wedge}{t_v t_u} = \omega$$

dove t_v, t_u indicano le tangenti positive alle linee coordinate $v = \text{cost}^{te}$, $u = \text{cost}^{te}$.

Indichiamo ora, per la tangente t alla nostra curva Γ, con θ l'angolo $\overset{\wedge}{t_v t}$

$$\theta = \overset{\wedge}{t_v t} ,$$

e andiamo a calcolarne le linee trigonometriche. I coseni di direzione della t_v sono per le (a)

$$\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} , \quad \beta_v = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} , \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}$$

e quelli α, β, γ della t

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{dv}{ds}, \quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

essendo lungo Γ le u, v determinate funzioni di s, di cui $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ indicano le derivate totali. Abbiamo pertanto

$$\cos\theta = \alpha_v \alpha + \beta_v \beta + \gamma_v \gamma ,$$

cioè

$$(7) \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} \right).$$

Ora dall' identità

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds^2 ,$$

che possiamo scrivere

$$\left[\frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\right]^2 + \frac{EG - F^2}{E}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

risulta subito

$$\operatorname{sen}\theta = \pm \frac{\sqrt{EG - F^2}\ dv}{\sqrt{E}\ ds},$$

e per decidere del segno basta osservare che, stante alle nostre convenzioni, se v cresce con s l'angolo θ è fra 0 e π e $\operatorname{sen}\theta > 0$ (perchè t giace allora come t_u alla sinistra di t_v), se invece v decresce al crescere di s è $\operatorname{sen}\theta < 0$. Per ciò, nella formola scritta, vale in ogni caso il segno sùperiore, ed abbiamo definitivamente

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}\ dv}{\sqrt{E}\ ds}. \tag{7*}$$

Naturalmente se la curva Γ si fa coincidere colla $u = \text{cost}_{u_0}$, essendo $du = 0$ $ds_u = \sqrt{G}\,dv$, le (7), (7*) tornano a dare le (6), (6*). Osserviamo anche che, combinando queste formole, risulta l'altra analoga alla (7)

$$\operatorname{sen}(\omega - \theta) = \frac{\sqrt{EG - F^2}\ du}{\sqrt{G}\ ds}. \tag{8}$$

Dalle (2) (7*) deduciamo anche

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{EG - F^2}\ \frac{dv}{E\,du + F\,dv}, \tag{9}$$

dalla quale formola risulta che l'inclinazione della curva (o dell'elemento lineare ds) sulle linee coordinate dipende soltanto dal rapporto $\frac{dv}{du}$ degli incrementi dv, du in quella direzione, di cui la *coordinata tangente* $\operatorname{tg}\theta$ è funzione lineare.

Dunque il rapporto $\frac{dv}{du}$ nel fascio delle direzioni uscente da u, v può riguardarsi come una *coordinata projettiva*.

Si osservi che quando in particolare le linee coordinate sono ortogonali, essendo $F = 0$, le formole precedenti diventano

$$\cos\theta = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds},\quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds},\quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}. \tag{10}$$

In generale consideriamo i due elementi lineari di lunghezze $ds, \delta s$ spiccati dal punto (u, v) della superficie ai due punti infinitamente vicini $(u + du,\ v + dv)$, $(u + \delta u,\ v + \delta v)$. I coseni delle loro rispettive direzioni sono, come sopra

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{ds},\quad \beta = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{ds},\quad \gamma = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} \\ \alpha' = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\delta u}{\delta s} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\delta v}{\delta s},\quad \beta' = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\delta u}{\delta s} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\delta v}{\delta s},\quad \gamma' = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\delta u}{\delta s} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\delta v}{\delta s}, \end{cases}$$

e quindi, se indichiamo con Ω l'angolo fra 0 e π racchiuso dai due elementi lineari, avendosi

$$\cos\Omega = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

deduciamo la formola generale

$$\cos\Omega = E\frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F\left(\frac{du}{ds}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + G\frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s}, \tag{11}$$

che definisce la *metrica angolare* sulla superficie d'elemento lineare ds dato dalla (5).

§. 46.

Involuzione ortogonale di elementi lineari.

Secondo la (11), la condizione d'ortogonalità dei due elementi lineari $ds, \delta s$ si scrive

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0, \tag{12}$$

ovvero, ordinando altrimenti

$$(E\,du + F\,dv)\,\delta u + (F\,du + G\,dv)\,\delta v = 0. \tag{12*}$$

Come relazione *bilineare simmetrica* nei rapporti $\frac{dv}{du}, \frac{\delta v}{\delta u}$ (da cui dipendono linearmente, secondo la (9), le rispettive coordinate tangenti nel fascio delle direzioni uscenti da (u, v)) essa distribuisce gli elementi lineari $ds, \delta s$ nelle coppie di un'involuzione, che qui è

appunto l' ***involuzione ortogonale.*** I raggi doppi della involuzione sono qui le direzioni *cicliche* (immaginarie coniugate) che vanno ai punti ciclici del piano tangente. I corrispondenti rapporti per $\frac{dv}{du}$ si hanno eguagliando le δ alle d e sono quindi date dalle radici (immaginarie coniugate) in $\frac{dv}{du}$ della equazione quadratica

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0\,.$$

Le linee, immaginarie coniugate, integrali di questa equazione diconsi per ciò le linee di ***lunghezza nulla*** della superficie e sono caratterizzate dalla proprietà che le loro tangenti si appoggiano al circolo immaginario all' infinito.

Colla (12*) risolviamo facilmente il problema: ***Dato un sistema*** ∞^1 ***di linee sulla superficie, trovare l' equazione differenziale delle loro traiettorie ortogonali.*** Sia

$$\varphi(u, v) = c$$

l' equazione del sistema dato di linee, risoluta rispetto alla costante arbitraria c. Spostandosi lungo una linea $\varphi = \text{cost.}^{te}$, gli incrementi δu, δv delle coordinate sono legate dalla relazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\delta v = 0,$$

cioè

$$\delta u : \delta v = \frac{\partial\varphi}{\partial v} : -\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Sostituendo nella (12) a δu, δv le quantità proporzionali $\frac{\partial\varphi}{\partial v}, -\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, otteniamo

$$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0, \tag{13}$$

come condizione necessaria e sufficiente affinchè l'elemento lineare ds, spiccato dal punto (u, v) nella direzione corrispondente agli incrementi d sia ortogonale alla curva $\varphi = c$ che passa per (u, v). Ora nella (13) i coefficienti di du, dv sono funzioni note di u, v e la (13)

è quindi un'equazione differenziale del 1° ordine, di cui sappiamo dal calcolo esistere l' integrale

$$\psi(u, v) = \text{cost.}^{te}.$$

Queste linee $\psi = \text{cost.}^{te}$ sono dunque appunto le traiettorie ortogonali delle $\varphi = \text{cost.}^{te}$, la cui esistenza è geometricamente intuitiva.

È bene osservare che, anche se le curve del sistema φ non sono note in termini finiti, ma solo definite come linee *integrali* di una equazione differenziale del 1° ordine $M\,du + N\,dv = 0$ si può facilmente formare l' equazione differenziale delle loro traiettorie ortogonali. Basta notare che si ha necessariamente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} : \frac{\partial\varphi}{\partial v} = M : N$$

per concluderne: ***Le linee integrali della equazione differenziale del*** 1° ***ordine***

$$M\,du + N\,dv = 0$$

hanno per traiettorie ortogonali le linee integrali dell' altra

$$(E\,N - F\,M)\,du + (F\,N - G\,M)\,dv = 0. \tag{14}$$

§. 47.

Involuzioni generali di coppie di elementi lineari.

In luogo della prima forma quadratica fondamentale della superficie; $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ consideriamo ora una forma quadratica qualunque

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 \tag{15}$$

con A, B, C funzioni date di u, v, nell' ipotesi soltanto che *il discriminante* $AC - B^2$ sia diverso da zero. Come alla prima era subordinata, attorno ad ogni punto (u, v), dalla (12), l' involuzione ortogonale, così alla nuova forma (15) sarà subordinata una nuova involuzione ***propria*** (1) di elementi lineari ds, δs spiccati da u, v, secondo la

(1) L' involuzione sarebbe degenere nel caso escluso $AC - B^2 = 0$.

formola corrispondente alla (12)

$$(16) \qquad (A\,du + B\,dv)\,\delta u + (B\,du + C\,dv)\,\delta v = 0.$$

I raggi doppi di questa involuzione sono determinati manifestamente dall' equazione quadratica

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$$

ottenuta coll' eguagliare a zero la forma (15); essi sono in ogni caso distinti, *reali* nel caso che la forma (15) sia indefinita ($AC - B^2 < 0$), *immaginarii coniugati* se definita ($AC - B^2 > 0$). Nel primo caso abbiamo un'involuzione iperbolica, nel secondo una involuzione ellittica.

Prendiamo ora una seconda forma quadratica

$$A'\,du^2 + 2B'\,du\,dv + C'\,dv^2 \quad (A'C' - B'^2 > 0),$$

alla quale sarà subordinata una seconda involuzione come la (16)

$$(16^*) \qquad (A'\,du + B'\,dv)\,\delta u + (B'\,du + C'\,dv)\,\delta v = 0.$$

Hanno le due involuzioni (16), (16*) coppie comuni?

Affinchè l' elemento lineare ds abbia lo stesso corrispondente δs nelle due involuzioni occorre e basta che le due equazioni lineari omogenee (16), (16*) in $\delta u, \delta v$ coincidano, cioè si abbia

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} A\,du + B\,dv\ , & B\,du + C\,dv \\ A'\,du + B'\,dv\ , & B'\,du + C'\,dv \end{vmatrix} = 0$$

Questo è il Jacobiano delle due forme eguagliato a zero, ed abbiamo così l' interpretazione geometrica del risultato segnalato al §. 42. Le radici in $\frac{dv}{du}$ della (16) sono certamente reali e distinte come si è visto (§ 42) quando una almeno delle due forme è definita (quando una delle involuzioni è ellittica (1)).

In ogni caso la coppia corrispondente alle due radici della (17) è quella che separa armonicamente i raggi doppi delle due involuzioni; in particolare se una delle due forme è la fondamentale, è l' unica coppia ortogonale della seconda involuzione. Ancora più in particolare se la seconda forma è la

$$2\,du\,dv$$

l' involuzione subordinata è quella delle coppie che dividono armonicamente le direzioni delle linee coordinate e la (17) diventa

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ dv & du \end{vmatrix} = 0,$$

onde si conclude: *L' equazione differenziale*

$$E\,du^2 - G\,dv^2 = (\sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv)\,(\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv) = 0$$

è quella delle linee bisettrici delle linee coordinate.

(1) È un risultato ben noto dalla geometria.

Ritornando al caso della involuzione generale (16), e ripetendo le osservazioni fatte nel paragrafo precedente per l' involuzione ortogonale vediamo che: *L' involuzione* (16) *subordina ad ogni sistema* ∞^1 *di linee* $\varphi(u, v) = \text{cost.}^{te}$, *un secondo sistema di linee integrali della equazione differenziale*

$$(18) \qquad \left(A\frac{\partial\varphi}{\partial v} - B\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(B\frac{\partial\varphi}{\partial v} - C\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0,$$

caratterizzate dalla proprietà che in ogni punto *le tangenti dei due sistemi di linee formano una coppia dell' involuzione.*

Così p. e. le linee *armoniche* delle $\varphi = \text{cost.}^{te}$ rispetto alle linee coordinate sono le linee integrali della equazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = 0.$$

In fine osserveremo che per due involuzioni proprie (16), (16*): *l' annullarsi dell' invariante simultaneo comune*

$$AC' - 2BB' + CA'$$

esprime che i raggi doppi dell' una formano una coppia dell' altra involuzione.

§. 48.

Simboli di Christoffel. Parametri differenziali e curvatura.

Nelle questioni trattate nei paragrafi precedenti, come in tutte quelle che concernono soltanto la così detta *geometria della superficie*, intervengono soltanto i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale. È utile quindi che fin d'ora calcoliamo i valori espliciti dei simboli di Christoffel, dei parametri differenziali e della curvatura per la nostra forma fondamentale

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

dovendo spesso nel seguito ricorrere a queste formole esplicite che riuniamo nelle tabelle seguenti.

Riguardando u come prima, e v come seconda variabile, porremo nelle formole generali del Capitolo precedente

$$x_1 = u \ , \quad x_2 = v$$

$$a_{11} = E \ , \quad a_{12} = F \ , \quad a_{22} = G \ ,$$

indi

$$A_{11} = \frac{G}{EG - F^2} , \quad A_{12} = -\frac{F}{EG - F^2} , \quad A_{22} = \frac{E}{EG - F^2} :$$

I simboli di Christoffel hanno i valori segnati nella tabella qui appresso:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} , \quad \left[\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} , \quad \left[\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right] = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \left[\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} , \quad \left[\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} , \quad \left[\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)} , \quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} , \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial v} + 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} , \quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)} . \end{array} \right.$$

I parametri differenziali primo e secondo di una funzione arbitraria φ e il parametro differenziale misto di due funzioni φ, ψ hanno le rispettive espressioni:

$$\text{(B)} \quad \Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\text{(C)} \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\}$$

$$\text{(D)} \quad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2} ,$$

che nel caso ortogonale ($F = 0$) si semplificano nelle altre:

$$\text{(B*)} \quad \Delta_1 \varphi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

$$\text{(C*)} \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\}$$

$$\text{(D*)} \quad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{1}{E}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} .$$

Per la curvatura K della nostra forma fondamentale (di cui impareremo più tardi a conoscere il significato geometrico per la superficie) dalla formola (V) del §. 41 (pag. 102), sostituendo ai simboli $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ i loro valori dati dalla tabella (A), troviamo:

$$\text{(E)} \quad K = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial G}{\partial u} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial u} \right] \right\} .$$

Particolarmente notevole è il caso di coordinate ortogonali $F = 0$, ove la formola si semplifica nell'altra di frequente uso:

$$(E^*) \qquad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Ancora più in particolare se

$$E = G = \lambda\ , \quad F = 0$$

(ciò che si può ottenere per qualunque superficie come ora vedremo) risulta per K l' espressione molto semplice

$$(F) \qquad K = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2}\right),\quad ds^2 = \lambda(du^2+dv^2).$$

Se nella (E*), oltre che $F = 0$, si suppone $E = 1$, si ha la formola particolare

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

relativa alla forma *geodetica*

$$(G) \qquad ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

dell' elemento lineare, che si vedrà ancora appartenere a qualunque superficie.

§. 49.

Cangiamento di variabili. — Sistemi isotermi.

Per mezzo dei parametri differenziali possiamo facilmente risolvere il problema di calcolare i coefficienti della forma trasformata della fondamentale per una qualunque sostituzione di variabili. Per questo si osservi che dalle formole (B), (D) risulta in particolare

$$\Delta_1 u = \frac{G}{EG-F^2}\ , \quad \Delta_1 v = \frac{E}{EG-F^2}\ , \quad \nabla(u,v) = -\frac{F}{EG-F^2}\ ,$$

indi

$$\Delta_1 u\,\Delta_1 u - \nabla^2(u,v) = \frac{1}{EG-F^2}\ ,$$

da cui si hanno le formole

$$E = \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u\,\Delta_1 v - \nabla^2(u,v)}\ , \quad F = -\frac{\nabla(u,v)}{\Delta_1 u\,\Delta_1 v - \nabla^2(u,v)}\ , \quad G = \frac{\Delta_1 u}{\Delta_1 u\,\Delta_1 v - \nabla^2(u,v)}\ ,$$

dove i coefficienti E, F, G stessi sono espressi per parametri differenziali. Ciò, posto, se cangiamo le variabili u, v in due nuove arbitrarie (indipendenti) φ, ψ, pei coefficienti della forma trasformata

$$E_1\,d\varphi^2 + 2F_1\,d\varphi\,d\psi + G_1\,d\psi^2$$

dalle formole sopra scritte avremo senz' altro

$$(19) \qquad E_1 = \frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)}\ , \quad F_1 = -\frac{\nabla(\varphi,\psi)}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)}\ , \quad G_1 = \frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)}\ ,$$

dove, appunto per la proprietà invariantiva dei parametri differenziali, $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\nabla(\varphi,\psi)$, si potranno calcolare dalle antiche coordinate u, v (1). Per l' angolo Ω delle nuove linee coordinate φ, ψ abbiamo dalla (6)

$$\cos\Omega = \frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1}} = -\frac{\nabla(\varphi,\psi)}{\sqrt{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi}}\ ,$$

formola equivalente alla (11), come facilmente si osserva.

In particolare abbiamo: *La condizione necessaria e sufficiente perchè i due sistemi di linee* $\varphi = \text{cost}^{te}$, $\psi = \text{cost}^{te}$ *siano ortogonali fra loro è che si abbia*

$$\nabla(\varphi,\psi) = 0\ .$$

Applichiamo subito le formole (19) alla dimostrazione dell' importante proprietà, cui già sopra si è accennato, che si può (in infiniti modi) eseguire un cangiamento di variabili tale che risulti

$$F_1 = 0\ , \quad E_1 = G_1$$

Per questo dobbiamo determinare, secondo le (19), le funzioni incognite φ, ψ in guisa da soddisfare alle due equazioni simultanee del

(1) Si osservi che la relazione fra i discriminanti delle due forme

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2)\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)^2$$

diventa qui

$$\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi) = \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)^2 .$$

1.° ordine

$$\nabla(\varphi,\psi)=0\ ,\quad \Delta_1\varphi=\Delta_1\psi\ ,$$

che possiamo mettere subito sotto un' altra forma notevole. La prima equazione dà

$$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}=0,$$

e quindi indicando con μ un fattore per ora incognito di proporzionalità, possiamo scrivere

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}=\mu\dfrac{F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\\[2ex]\dfrac{\partial\psi}{\partial v}=\mu\dfrac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\end{cases}$$

le quali formole, risolute rispetto alle derivate di φ, dànno

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{E\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-F\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{F\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-G\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\ .\end{cases}$$

Ora formando dalle prime l' espressione

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

la troviamo eguale a $\mu\Delta_1\varphi$, dalle seconde invece $=\dfrac{1}{\mu}\Delta_1\psi$. E siccome per ipotesi $\Delta_1\varphi=\Delta_1\psi$ ne segue $\mu^2=1$, cioè $\mu=\pm 1$. Possiamo adottare il segno superiore $\mu=+1$, chè l' altro caso $\mu=-1$ se ne

deduce cangiando ψ in $-\psi$. Così dunque le due funzioni incognite debbono soddisfare al sistema lineare:

$$(20)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}=\dfrac{F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\\[2ex]\dfrac{\partial\psi}{\partial v}=\dfrac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\ ,\end{cases}$$

che si scrive anche, risoluto

$$(20^*)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}=-\dfrac{E\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-F\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\dfrac{F\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-G\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\ .\end{cases}$$

Viceversa, se le funzioni φ,ψ soddisfano le (20), esse verificano anche le due

$$\nabla(\varphi,\psi)=0\ ,\quad \Delta_1\varphi=\Delta_1\psi,$$

e l' elemento lineare trasformato ha la forma richiesta

$$(21)\qquad ds^2=\lambda(d\varphi^2+d\psi^2)\ ,\ \lambda=\frac{1}{\Delta_1\varphi}=\frac{1}{\Delta_1\psi}\ .$$

Noi ammettiamo qui noto dall' analisi che il sistema lineare (20) ammette infinite coppie di soluzioni. Ed ora osserviamo di più che la condizione d' integrabilità delle (20) dà

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=0,$$

ossia per la (6): $\Delta_2\varphi=0$. Similmente dalle (20*) si ha $\Delta_2\psi=0$. Inversamente, se φ è una qualunque soluzione del $\Delta_2\varphi=0$, le (20)

sono compatibili e determinano ψ con una quadratura, a meno di una costante arbitraria additiva.

Questi particolari sistemi ortogonali (φ, ψ) che dànno al ds^2 la forma (21) diconsi *isotermi* (dalla fisica matematica). Geometricamente essi sono caratterizzati da ciò che *essi dividono, come si dice, la superficie in quadrati infinitesimi.*

Per intendere questo si osservi che i rispettivi elementi d'arco delle linee coordinate φ, ψ sono dati da

$$ds_\varphi = \sqrt{\lambda}\, d\psi\,, \quad ds_\psi = \sqrt{\lambda}\, d\varphi\,,$$

e per ciò se si assumono $d\varphi$, $d\psi$ costanti ed eguali (infinitesimi), le linee coordinate, così convenientemente spaziate, dànno appunto sulla superficie una rete di quadrati infinitesimi.

Se il sistema iniziale (u, v) è già isotermo, con

$$E = G\,, \quad F = 0\,,$$

le (20) si riducono al noto sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial u}, \end{cases}$$

le quali equazioni esprimono che: $\varphi + i\psi$ *è funzione della variabile complessa* $u + iv$. E siccome possiamo anche cangiare ψ in $-\psi$, ne deduciamo: *Noto sulla superficie un sistema isotermo* (φ, ψ), *si ottengono tutti gli altri* (φ', ψ') *ponendo*

$$\varphi' + i\psi' = F(\varphi \pm i\psi),$$

essendo F *il simbolo di funzione arbitraria di variabile complessa.* Ogni funzione complessa $\varphi + i\psi$ formata coi due soluzioni coniugate della equazione $\Delta_2\varphi = 0$ dicesi, secondo Beltrami, *variabile complessa sulla superficie.*

Da ultimo osserviamo che, ridotto il ds^2 alla forma isoterma

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

si conoscono in termini finiti le linee di lunghezza nulla (§ 46)

$$u + iv = \text{cost.}^{te}\,, \quad u - iv = \text{cost.}^{te}\,;$$

e viceversa integrata l'equazione differenziale

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0\,,$$

si conoscono i sistemi isotermi.

§. 50.

Parametri isometrici.

Se in un sistema ortogonale isotermo (u_1, v_1), che dà al ds^2 la forma

$$ds^2 = \lambda\,(du_1^2 + dv_1^2),$$

senza cangiare le linee coordinate u_1, v_1, si cangiano i parametri che le determinano ponendo

$$u_1 = \varphi(u)\,, \quad v_1 = \psi(v),$$

il ds^2 prende la forma

$$ds^2 = \lambda\,[\varphi'^2(u)\,du^2 + \psi'^2(v)\,dv^2],$$

nella quale, essendo

$$E = \lambda\varphi'^2(u)\,, \quad G = \lambda\psi'^2(v)\,,$$

il quoziente $\dfrac{E}{G}$ è il quoziente (o il prodotto) di una funzione di u per una funzione di v. Inversamente, se in un sistema ortogonale (u, v)

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

si ha

$$\frac{E}{G} = \frac{U^2}{V^2} \tag{22}$$

con U funzione di u, e V di v, ponendo

$$\frac{E}{G^2} = \frac{G}{V^2} = \lambda$$

si può scrivere

$$ds^2 = \lambda\,(U^2\,du^2 + V^2\,dv^2)$$

e basta cambiare i parametri u, v rispettivamente in

$$u_1 = \int U\,du,\quad v_1 = \int V\,dv \tag{23}$$

per avere

$$ds^2 = \lambda(du_1^2 + dv_1^2).$$

Per questa ragione un sistema ortogonale (u, v) nel quale sia soddisfatta la condizione (22), o ciò che è lo stesso l'equivalente differenziale

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{E}{G}\right) = 0 \tag{22*}$$

dicesi ancora isotermo. I parametri u_1, v_1 dati dalle (23), pei quali si ha la condizione caratteristica $E_1 = G_1$, diconsi parametri isometrici.

Dopo queste osservazioni, cerchiamo la condizione affinchè le linee $\varphi(u, v) = \text{cost.}^{te}$, insieme colle traiettorie ortogonali, formino un sistema isotermo. Per ciò occorre e basta che, cangiando il parametro φ in una sua conveniente funzione $F(\varphi)$, risulti

$$\Delta_2 F(\tau) = 0.$$

Ma dalla formola (C) § 48 (pag. 121) segue

$$\Delta_2 F(\tau) = F'(\tau)\Delta_2\varphi + F''(\tau)\Delta_1\varphi,$$

gli accenti indicando derivazione rapporto a φ, dunque deve essere

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = -\frac{F''(\tau)}{F'(\tau)} \tag{24}$$

una funzione della sola φ. Viceversa, se $\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi}$ è funzione della sola φ, prendendo

$$F'(\varphi) = e^{-\int \frac{\Delta_2\tau}{\Delta_1\varphi}\,d\varphi} \tag{25}$$

la condizione (24) è soddisfatta e il sistema è isotermo. Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee $\varphi = \text{cost.}^{te}$, insieme colle traiettorie ortogonali, formino un sistema isotermo è che il rapporto dei due parametri differenziali $\Delta_2\varphi$, $\Delta_1\varphi$ sia una funzione della sola φ.*

§. 51.

Teorema di Lie pei sistemi isotermi.

Supposta soddisfatta la condizione ora detta, cioè essendo note in un doppio sistema ortogonale isotermo le linee di uno dei due sistemi, siano le $\varphi = \text{cost.}^{te}$, risulta facilmente dal calcolo superiore il teorema di Lie che: *le trajettorie ortogonali si trovano con quadrature.* Infatti, scritta l'equazione differenziale di queste trajettorie ortogonali sotto la forma

$$\frac{F\frac{\partial\tau}{\partial u} - E\frac{\partial\tau}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\,du + \frac{G\frac{\partial\tau}{\partial u} - F\frac{\partial\tau}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\,dv = 0, \tag{26}$$

dalle formole (20), ove si muti τ in $F(\tau)$ e dalla (25) risulta: *Un fattore integrante del primo membro della (26) è dato da*

$$\mu = e^{-\int \frac{\Delta_2\tau}{\Delta_1\tau}\,d\tau}$$

Si può spingere anzi, con Lie, più avanti la ricerca e dimostrare: *Se delle linee $\varphi = \text{cost.}^{te}$, appartenenti colle trajettorie ortogonali ad un sistema isotermo, si conosce soltanto un' equazione differenziale del 1° ordine*

$$M\,du + N\,dv = 0$$

di cui esse sono gli integrali, se ne potrà avere con quadrature l'equazione in termini finiti. In questa ipotesi, esisterà infatti un fattore integrante μ di $M\,du + N\,dv$, tale che si abbia

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mu M,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \mu N, \tag{27}$$

risultando φ parametro isometrico. Ma allora dalle (20) risulta

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\mu\frac{GM - FN}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\mu\frac{EN - FM}{\sqrt{EG - F^2}}\right] = 0,$$

e d'altronde dalle (27)

$$-\frac{\partial}{\partial u}(\varrho N) + \frac{\partial}{\partial v}(\varrho M) = 0$$

Da queste due equazioni lineari omogenee in

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log \varrho}{\partial v}$$

si hanno i valori effettivi di queste due derivate, perchè il relativo determinante

$$M(GM - FN) + N(EN - FM) = EN^2 - 2FMN + GM^2$$

è certamente non nullo (positivo). Con una quadratura si ha dunque ϱ, e un'altra quadratura fa conoscere φ.

Nello stesso tempo si osserverà che il calcolo stesso dà il modo di decidere, senza eseguire integrazioni, se le linee integrali dell'equazione differenziale

$$M\,du + N\,dv = 0$$

appartengono ad un sistema isotermo. Occorre e basta per ciò che per le due espressioni trovate per $\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}$, $\frac{\partial \log \varrho}{\partial v}$ diciamo

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} = A, \quad \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} = B$$

risulti soddisfatta la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}.$$

§. 52.

Rappresentazioni di una superficie sopra un'altra in generale.

Supponiamo che fra i punti di due superficie S, S', o fra quelli di due loro regioni convenientemente limitate, sia stabilita una corrispondenza *biunivoca continua*. Ciò significa analiticamente che, riferite le due superficie rispettivamente a due sistemi di coordinate curvilinee (u, v), $(u' v')$ ed essendo $P \equiv (u, v)$, $P' \equiv (u', v')$ due punti corrispondenti, le u', v' sono funzioni finite, continue e ad un sol valore di u, v, scriviamo

$$u' = u'(u, v) \ , \ v' = v'(u, v) ; \tag{28}$$

e queste formole di *rappresentazione* sono risolubili in modo univoco (entro il campo considerato) rispetto ad u, v. Delle funzioni u', v' nelle (28) si supporrà inoltre che ammettano derivate parziali rispetto ad u, v almeno del primo ordine, o fino a quell'ordine che occorra considerare, sempre finite e continue [1]. Quando P', muovendosi su S', descrive una linea ordinaria

$$\varphi(u', v') = 0 ,$$

il punto P corrispondente descriverà su S una linea ordinaria corrispondente, la cui equazione è la precedente stessa nella quale per u', v' si siano posti i valori, espressi colle (28), per u, v. Così a qualunque figura $\mathfrak{G}'$ su S' corrisponderà una determinata figura $\mathfrak{G}$ su S, e noi riguarderemo, per fissare le idee, la prima figura $\mathfrak{G}'$ come *obiettiva*, la seconda $\mathfrak{G}$ come la sua *immagine*, e diremo che si è rappresentata la prima sulla seconda.

Una prima ed ovvia proprietà di queste rappresentazioni generali è la seguente. Ad ogni elemento lineare ds' uscente dal punto $(u' v')$ ne corrisponde nell'immagine uno ds pel punto corrispondente (u, v) e siccome nei differenziali du', dv'; $du\ dv$ le (28) subordinano sempre una sostituzione lineare

$$\begin{cases} du' = \dfrac{\partial u'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial u'}{\partial v}\,dv \\ dv' = \dfrac{\partial v'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial v'}{\partial v}\,dv \end{cases}$$

con determinante $\dfrac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$ diverso da zero, ne segue

---

[1] La reversibilità delle formole (28) di rappresentazione porta che il determinante funzionale $\dfrac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$ sia diverso da zero (u, v indipendenti).

$$\frac{dv'}{du'} = \frac{\alpha \dfrac{dv}{du} + \beta}{\gamma \dfrac{dv}{du} + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 .$$

Ora $\dfrac{dv}{du}$ è, nel fascio delle direzioni per (u, v), una coordinata projettiva (§. 45), e similmente $\dfrac{dv'}{du'}$ per il fascio di direzioni corrispondenti uscenti da (u', v'), e poichè le due coordinate sono legate da una sostituzione lineare propria, si conclude: *In qualunque rappresentazione di una superficie sopra un' altra la corrispondenza subordinata fra due fasci di direzioni corrispondenti è sempre una projettività* (1).

Sia ora

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{29}$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie S. Per la superficie obiettiva S', riferita, mediante le (28), al sistema coordinato corrispondente (u, v) abbiasi

$$ds'^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2 , \tag{29*}$$

Il quoziente

$$\mu = \frac{ds'}{ds}$$

si chiamerà il modulo di *dilatazione lineare* dell'elemento *ds*, appunto perchè

$$ds' = \mu\, ds$$

e varierà, in generale, se, restando fisso il punto (u, v), varia la direzione dell'elemento lineare pel punto, cioè il rapporto $\dfrac{dv}{du}$.

Ma può anche darsi che questo modulo μ di dilatazione lineare sia indipendente dalla direzione e varii soltanto (in generale) al variare del punto (sia funzione di u, v). Siccome

(1) Questa proprietà si mantiene in generale nelle rappresentazioni fra spazi di un numero qualunque di dimensioni.

$$\mu^2 = \frac{E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} , \tag{30}$$

ciò avviene allora ed allora soltanto quando sussistono le proporzioni

$$E' : F' : G' = E : F : G , \tag{31}$$

cioè quando sono proporzionali le due forme fondamentali (29), (29') dell'immagine e della superficie obiettiva. Ma in tal caso la formola fondamentale (11) §. 45 (pag. 117) per la metrica angolare dimostra subito che ogni angolo Ω nella figura immagine è eguale al corrispondente dell'obiettiva, cioè gli angoli sono conservati nella rappresentazione. Si dice allora che la rappresentazione è *conforme*. Viceversa se la rappresentazione è conforme, sussistono le proporzioni (31), perchè, dovendo in tal caso conservarsi in particolare gli angoli retti, le due condizioni d'ortogonalità

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$
$$E'\,du\,\delta u + F'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G'\,du\,\delta v = 0$$

debbono coincidere per il che occorre e basta che sussistano le proporzioni (31).

Le rappresentazioni conformi si dicono anche *simili nelle parti infinitesime*, poichè appunto la conservazione degli angoli porta la similitudine nelle parti infinitesime e viceversa.

§. 53.

Teorema di Tissot. Ellisse delle dilatazioni. Moduli principali.

Lasciamo per un momento da parte le rappresentazioni conformi, per occuparcene fra breve in modo più completo. Le due forme fondamentali (29), (29*) essendo definite e non proporzionali, esiste, pel teorema al §. 42, uno ed un sol modo di ridurle simultaneamente a forma ortogonale, di rendere cioè insieme $F = 0$, $F' = 0$, ciò che si esprime geometricamente col teorema di Tissot: *In ogni rappresentazione (non conforme) di una superficie sopra un' altra esiste uno ed un solo sistema ortogonale della superficie obiettiva che si conserva ortogonale nell'immagine* (1).

(1) S'intende bene che il teorema si riferisce alle rappresentazioni *reali* di superficie reali. Esso equivale in sostanza alla proprietà geometrica ben nota che in due fasci proiettivi di raggi (non eguali) vi è una sola coppia ortogonale di raggi dell'un fascio cui corrisponde una coppia ortogonale nell'altro.

Questo doppio sistema ortogonale, della superficie obiettiva, o dell'immagine, si dirà quello delle *linee principali* della rappresentazione. L'equazione differenziale delle linee principali si ottiene (§ 42) eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme fondamentali (1)

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv\,, & F\,du + G\,dv \\ E'\,du + F'\,dv\,, & F'\,du + G'\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Per studiare nel modo più semplice la legge di variazione del modulo $\mu = \frac{ds'}{ds}$ di dilatazione lineare attorno ad un punto, riferiamoci alle linee principali (u, v) della rappresentazione, come a linee coordinate. Essendo allora $F = F' = 0$ la (30) diventa

$$(33)\qquad \mu^2 = E'\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + G'\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

formola che, per le (10) §. 45 (pag. 116), possiamo scrivere

$$(34)\qquad \mu^2 = \frac{E'}{E}\cos^2\theta + \frac{G'}{G}\operatorname{sen}^2\theta\,,$$

dove θ è l'anomalia della direzione dell'elemento lineare ds rispetto alla direzione della $v = \text{cost.}^{te}$. Indichiamo ora con μ_1, μ_2 i moduli di dilatazione nel senso delle linee principali $v = \text{cost.}^{te}$, $u = \text{cost.}^{te}$ rispettivamente e diciamo questi i *moduli principali*. Siccome la prima corrisponde a $\theta = 0$, la seconda a $\theta = \frac{\pi}{2}$, abbiamo dalla (34)

(1) Come esempio si consideri una superficie di equazione ordinaria $z = z(x, y)$ e si proietti ortogonalmente sul piano xy. Il ds^2 della superficie in coordinate xy

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2\,pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2$$

e quella della sua proiezione piana

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2.$$

L'equazione (32) del testo si scinde nelle due

$$p\,dx + q\,dy = 0,\quad q\,dx - p\,dy = 0,$$

di cui la prima è subito integrata con $z = \text{cost.}^{te}$, ciò che dà sulla superficie le *linee di livello* (sezioni orizzontali). Le linee integrali della seconda sono le traiettorie ortogonali delle linee di livello e diconsi *linee di pendenza* (colla tangente in piano verticale). È questo il sistema ortogonale che si conserva ortogonale in proiezione, come è geometricamente evidente.

$$(35)\qquad \mu_1 = \sqrt{\frac{E'}{E}}\,,\quad \mu_2 = \sqrt{\frac{G'}{G}}\,,$$

e la (34) assume la forma normale

$$(36)\qquad \mu^2 = \mu_1^2\cos^2\theta + \mu_2^2\operatorname{sen}^2\theta\,.$$

Questa forma così semplice per la legge secondo cui varia il modulo μ di dilatazione al variare della direzione (dell'anomalia θ) si può rappresentare in modo geometrico introducendo la *ellisse delle dilatazioni*, p. e. nel piano tangente alla S nel punto (u, v), col centro in questo punto, cogli assi ξ, η diretti secondo le direzioni principali $v = \text{cost.}^{te}$, $u = \text{cost.}^{te}$ e i cui semi assi a, b siano le inverse dei moduli principali $a = \frac{1}{\mu_1}$, $b = \frac{1}{\mu_2}$. Se di questa ellisse di equazione

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \mu_1^2\xi^2 + \mu_2^2\eta^2 = 1\,,$$

scriviamo l'equazione in coordinate polari ponendo $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\operatorname{sen}\theta$:

$$\frac{1}{\rho^2} = \mu_1^2\cos^2\theta + \mu_2^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

vediamo che essa è identica alla (36), ove si faccia $\mu = \frac{1}{\rho}$. Per ciò:

Il modulo di dilatazione degli elementi lineari in un fascio varia coll'orientazione come l'inversa del semidiametro della ellisse indicatrice nella stessa direzione.

Dei due moduli principali di dilatazione uno sarà minore dell'altro, chè se fosse $\mu_1 = \mu_2$ in ogni punto la ellisse indicatrice sarebbe costantemente un circolo e la rappresentazione sarebbe conforme, caso che per ora escludiamo.

Poniamo che sia p. e. $\mu_1 < \mu_2$, ed allora essendo $a > b$, l'ellisse indicatrice avrà l'asse maggiore nella direzione (v) il minore nella direzione (u); per ogni altra direzione sarà

$$\mu_1 < \mu < \mu_2\,;$$

cioè: ***I moduli principali corrispondono al minimo e massimo valore del modulo di dilatazione, che hanno sempre luogo in direzioni ortogonali*** (nelle ***direzioni principali***).

In questa discussione ci siamo riferiti, per maggiore semplicità, alle linee principali come a linee coordinate. Ma il calcolo dei moduli principali μ_1, μ_2 si può facilmente eseguire *in coordinate generali*, osservando che lungo le linee principali si ha per la (37)

$$(37)\qquad \begin{cases} E'\,du + F'\,dv = \sigma(E\,du + F\,dv) \\ F'\,du + G'\,dv = \sigma(F\,du + G\,dv) \end{cases}$$

dove σ è un fattore di proporzionalità di cui si riconosce subito il significato dalla formola (30), che qui scriviamo

$$\mu^2 = \frac{(E'\,du - F'\,dv)\,du + (F'\,du + G'\,dv)\,dv}{(E\,du + F\,dv)\,du + (F\,du + G\,dv)\,dv}$$

onde per le (37) semplicemente

$$(38)\qquad \sigma = \mu^2.$$

Ora le due equazioni (37) lineari omogenee in du, dv dànno

$$\begin{vmatrix} E' - \sigma E & F' - \sigma F \\ F' - \sigma F & G' - \sigma G \end{vmatrix} = 0,$$

da cui l'equazione di secondo grado in σ.

$$(EG - F^2)\,\sigma^2 + (2FF' - EG' - GE')\,\sigma + E'G' - F'^2 = 0,$$

le cui due radici in σ sono dunque per la (38) i quadrati μ_1^2, μ_2^2 dei moduli principali. Notiamo in particolare le formole

$$(39)\qquad \begin{cases} \mu_1^2 + \mu_2^2 = \dfrac{EG' + GE' - 2FF'}{EG - F^2} \\ \mu_1^2\,\mu_2^2 = \dfrac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}, \end{cases}$$

i cui secondi membri sono precisamente gli invarianti simultanei H, K delle due forme quadratiche fondamentali.

Un caso particolare molto notevole di rappresentazioni si presenta quando è costante il prodotto dei moduli principali $\mu_1\mu_2 = k$ (k costante). Allora essendo

$$\sqrt{E'G' - F'^2} = k\sqrt{EG - F^2},$$

la formola (*b*) §. 44 per l'elemento d'area dice che: *Le aree corrispondenti delle due figure sono in rapporto costante* k, e l'inversa è evidente. Di tali rappresentazioni si dice che conservano la proporzionalità delle aree; in particolare si chiamano *equivalenti* quando le aree corrispondenti sono eguali ($k = 1$).

Può accadere, ancor più in particolare, che ambedue i moduli principali siano costanti, ed allora l'ellisse indicatrice è la stessa per tutti i punti; in questo caso la rappresentazione si dirà *uniforme*.

Le rappresentazioni uniformi sono caratterizzate da ciò che ambedue gli invarianti simultanei delle due forme fondamentali sono allora costanti.

§. 34.

Rappresentazioni conformi.

Lasciamo il caso delle rappresentazioni generali per studiare più da vicino quello che è per noi del maggiore interesse, il caso delle rappresentazioni conformi. Come si rappresenta nel modo più generale conformemente (con conservazione degli angoli) una superficie data S sopra un'altra S'?

Per vederlo partiamo dall'osservazione che le relazioni fondamentali (20) pag. 127

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \dfrac{F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \dfrac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}$$

le quali legano due soluzioni coniugate del $\Delta_2\varphi = 0$ per la superficie S restano immutate se si passa ad una seconda superficie S' rappresentata in modo conforme su S, come segue subito dalle proporzioni

$$E' : F' : G' = E : F : G,$$

caratteristiche per le rappresentazioni conformi.

Dunque ogni coppia di soluzioni coniugate del $\Delta_2\varphi = 0$ per la prima superficie S si cangia, per la rappresentazione conforme su S',

in una coppia analoga. Colla nozione di variabile complessa sopra una superficie introdotta al §. 49, possiamo anche dire:

Se le due superficie S, S' sono in rappresentazione conforme, ogni variabile complessa dell'una è una variabile complessa per l'altra.

Ciò premesso, supponiamo che sulla superficie S si conosca un doppio sistema ortogonale isotermo (u, v), già ridotto ai parametri isometrici con

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2);$$

e similmente sopra S' un analogo sistema con

$$ds'^2 = \lambda'\,(du'^2 + dv'^2).$$

La $u + iv$ è una variabile complessa sopra S e la $u' + iv'$ una variabile complessa su S'; se dunque abbiamo una rappresentazione conforme di S' su S, dovranno essere u', v' tali funzioni di u, v che $u' + iv'$ sia anche variabile complessa su S. Secondo il risultato alla fine del §. 49, dovremo dunque avere

$$u' + iv' = \mathrm{F}(u + iv) \quad \text{o} \quad u' - iv' = \mathrm{F}(u - iv)$$

dove F è il simbolo di una funzione (arbitraria) di variabile complessa), ossia u', v' dovranno soddisfare alle equazioni di monogeneità

$$\begin{vmatrix} \partial u' \\ \partial u \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \partial v' \\ \partial v \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \partial u' \\ \partial v \end{vmatrix} = \mp \begin{vmatrix} \partial v' \\ \partial u \end{vmatrix}.$$

Ma viceversa, se queste relazioni hanno luogo, il ds'^2 calcolato in coordinate u, v diventa

$$ds'^2 = \lambda' \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u} \right)^2 \right] (du^2 + dv^2)$$

e risultando proporzionale al ds^2

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\lambda'}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u} \right)^2 \right],$$

la rappresentazione è in effetto conforme.

Concludiamo dunque: *Per costruire tutte le rappresentazioni conformi di una superficie* S *sopra un' altra* S', *si cerchi una variabile complessa* $u + iv$ *della prima ed una variabile complessa* $u' + iv'$ *della seconda e si ponga*

$$u' + iv' = \mathrm{F}(u \pm iv),$$

dove F *è il simbolo di una funzione arbitraria.*

Come si vede, la soluzione del problema proposto richiede la conoscenza dei sistemi isotermi sull'una e sull'altra superficie. Così se di una superficie S conosciamo uno e quindi tutti i sistemi isotermi, sapremo rappresentarla, nel modo più generale, conformemente sul piano.

In particolare, se si vuole rappresentare conformemente un piano π' sopra un altro π, si riferiscano l'uno e l'altro a rispettivi sistemi di assi ortogonali $\mathrm{O}'(x', y')$, $\mathrm{O}(x, y)$ e si ponga

$$x' + iy' = \mathrm{F}(x \pm iy).$$

Quanto alla distinzione del doppio segno, si fissino p. e. le due pagine positive dei due piani in guisa che gli assi vi abbiano eguale orientazione; allora se $x' + iy' = \mathrm{F}(x + iy)$ si avranno rappresentazioni conformi *dirette* nelle quali gli angoli sono conservati in grandezza ed *in senso*. Per le altre (inverse) gli angoli sono ancora conservati in grandezza ma il senso ne è invertito.

§. 55.

Caso delle superficie di rotazione.

Applichiamo i risultati generali ottenuti ad una prima classe di superficie sulle quali si possono subito determinare i sistemi isotermi, alle *superficie di rotazione*. Prendiamo sopra una tale superficie, a linee coordinate, i meridiani ed i paralleli, assumendo per parametro v di un meridiano variabile l'angolo che il suo piano forma col piano di un meridiano fisso (longitudine) e per parametro di un parallelo il suo raggio r restando così pel momento escluso il caso di r costante (cilindro circolare retto). Prendendo per asse z l'asse di rotazione e per meridiano fisso, da cui si conta la longitudine v, p. e. quello del piano xz, le equazioni parametriche della superficie saranno

(40) $$x = r\cos v, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = \varphi(r),$$

essendo $z = \varphi(r)$ l'equazione della curva meridiana. Per l'elemento lineare della superficie in coordinate r, v abbiamo quindi

$$ds^2 = (1 + \varphi'^2(r))\, dr^2 + r^2\, dv^2 .$$

Se, in luogo di r, prendiamo per parametro u l'arco di meridiano, contato da un punto fisso, col porre

$$u = \int \sqrt{1 + \varphi'^2(r)}\, dr ,$$

ne risulterà $r = \psi(u)$; la natura della funzione $\psi(u)$ determinando la curva meridiana e si avrà

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 , \quad r = \psi(u). \tag{41}$$

Questa forma del ds^2 vale anche manifestamente pel caso prima escluso del cilindro di rotazione, e si riguarderà come la forma tipica pel ds^2 di una superficie di rotazione. Siccome nella (41) r è funzione di u soltanto, ne segue subito (§ 50): *Sopra ogni superficie di rotazione i meridiani ed i paralleli formano un doppio sistema ortogonale isotermo.*

Volendo ridurre la (41) ai parametri isometrici basta scriverla

$$ds^2 = r^2 \left(\frac{du^2}{r^2} + dv^2 \right),$$

e cangiare il solo parametro u in

$$u_1 = \int \frac{du}{r} :$$

I parametri isometrici pei meridiani e paralleli sono la longitudine v e l'integrale $\int \frac{du}{r}$.

Per ogni superficie di rotazione si sa dunque risolvere il problema di rappresentarla in modo conforme sul piano. In particolare, se le coordinate cartesiane ortogonali ξ, η sul piano si assumono date da

$$\xi = v , \quad \eta = \int \frac{du}{r} ,$$

si avrà una rappresentazione conforme nella quale il reticolato dei meridiani e paralleli ha per immagine piana il reticolato delle rette parallele agli assi coordinati.

Si osservi che una retta qualunque del piano taglia sotto angolo costante le rette parallele agli assi e perciò la linea obiettiva sulla superficie rotonda taglierà sotto angolo costante i meridiani (o i paralleli), sarà cioè una *lossodromica* (1). Nella rappresentazione conforme riesce quindi evidente il teorema: *in ogni triangolo racchiuso sulla superficie di rotazione da tre archi lossodromici la somma dei tre angoli è di due retti* (come nel triangolo piano immagine).

§. 56.

La sfera complessa.

Consideriamo la sfera col centro nell'origine e di raggio $= 1$, come superficie di rotazione attorno all'asse delle z. Le coordinate X, Y, Z di un suo punto possono scriversi

$$X = \operatorname{sen} u \cos v , \quad Y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v , \quad Z = \cos u, \tag{42}$$

essendo v la longitudine ed u la distanza angolare del punto dal polo $u = 0$, o *colatitudine* (complemento della latitudine). Pel ds^2 della sfera, essendo qui $r = \operatorname{sen} u$, abbiamo

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2 . \tag{43}$$

Come parametri isometrici prendiamo

$$u_1 = -\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \log \cot \frac{u}{2} , \text{ e } v$$

e per variabile complessa sulla sfera

$$\tau = e^{u_1 + iv} = \cot \frac{u}{2}\, e^{iv} . \tag{44}$$

Otteniamo una rappresentazione conforme della sfera sul piano riguardando τ come l'ordinaria variabile complessa sul piano, che

(1) È interessante osservare (Scheffers) che le curve lossodromiche possono definirsi, indipendentemente dalle superficie di rotazione, come le traiettorie isogonali (sotto angolo costante) di un fascio di piani ad asse proprio (piani meridiani). Le ordinarie eliche cilindriche sono invece traiettorie isogonali di un fascio di piani paralleli (ad asse improprio).

poniamo sotto la forma trigonometrica

$$\tau = \rho e^{iv},$$

indicando con ρ, v le coordinate polari del punto immagine nel piano. Le formole di rappresentazione sono dunque

$$\rho = \cot\frac{u}{2}, \quad v = v. \tag{45}$$

ed è facile interpretarle geometricamente. Si prenda per piano rappresentativo il piano dell'equatore $z = 0$, ed ogni punto $M \equiv (u, v)$ della sfera si proietti dal polo $u = 0$ sul piano equatoriale in M'. Le coordinate polari di M' sono precisamente le (45); sicchè la rappresentazione non è altro che una proiezione centrale della sfera fatta dal polo sul piano equatoriale, (1) e prende il nome di *proiezione stereografica polare*. Questa è una rappresentazione biunivoca di tutta la sfera, escluso il polo, sul piano e per togliere anche l'eccezione del polo basta riguardare anche il piano complesso come chiuso in un unico punto all'infinito, corrispondente al polo $u = 0$ o $\tau = \infty$. La sfera così caricata (biunivocamente) dei valori della variabile complessa τ dicesi la *sfera complessa*.

Alle formole (42) è utile dare un altro aspetto introducendo, insieme alla variabile complessa τ, la sua coniugata che indichiamo con τ_0 (2)

$$\tau_0 = \cot\frac{u}{2} e^{-iv}$$

Ora abbiamo

$$\tau\tau_0 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{u}{2}}, \quad \tau\tau_0 - 1 = \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2\frac{u}{2}}$$

$$\tau + \tau_0 = 2\cot\frac{u}{2}\cos v, \quad \tau - \tau_0 = 2i\cot\frac{u}{2}\operatorname{sen} v,$$

(1) Naturalmente se per piano di proiezione si prende un piano parallelo al piano dell'equatore (al piano tangente del polo) la figura immagine si cambia in una figura simile.

(2) In generale, seguendo una notazione di Hermite, con A_0 si indica qui ed in seguito la coniugata di una quantità complessa A.

e per ciò le (42) si scrivono

$$X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i}\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}. \tag{46}$$

In queste equazioni parametriche della sfera i parametri τ, τ_0 sono manifestamente quelli delle generatrici immaginarie (rette isotrope) che rappresentano anche, in questo caso, le linee di lunghezza nulla.

Si noti che il valore della variabile complessa τ nel punto (X, Y, Z) della sfera è

$$\tau = \frac{X + iY}{1 - Z},$$

e di qui, o dalle (46), segue che *il valore della variabile complessa nel punto diametralmente opposto* $(-X, -Y, -Z)$ *è precisamente* $-\frac{1}{\tau_0}$.

In fine osserviamo che: *nella proiezione stereografica della sfera ogni circolo della sfera ha per immagine piana un circolo (o una retta), e viceversa.* E infatti se (X, Y, Z) descrive un circolo sulla sfera, saranno X, Y, Z legati da una relazione lineare:

$$aX + bY + cZ + d = 0,$$

e sul piano rappresentativo questa si muta in

$$a(\tau + \tau_0) + b\frac{\tau - \tau_0}{i} + c(\tau\tau_0 - 1) + d(\tau\tau_0 + 1) = 0,$$

che è l'equazione di un circolo se $c + d \neq 0$, di una retta se $c + d = 0$ (se il circolo della sfera passa pel polo di proiezione). D'altronde, disponendo di a, b, c, d, l'equazione sopra descritta è quella del più generale circolo (o retta) nel piano.

Queste proprietà della proiezione stereografica della sfera di essere una rappresentazione conforme e di conservare i circoli si possono anche dimostrare con semplici considerazioni geometriche elementari (1).

(1) V. p. e. Baltzer — Stereometria.

§. 57.

I doppi sistemi ortogonali di circoli sulla sfera e sul piano.

Servendoci delle proprietà descritte della rappresentazione stereografica della sfera, possiamo facilmente risolvere il problema di: *determinare tutti i doppî sistemi ortogonali di circoli (o rette) sul piano.* Con questa proiezione il problema si riconduce a determinare i doppî sistemi ortogonali di circoli sulla sfera. Ora si osservi che se due circoli C, C′ della sfera, collocati nei piani π, π', s'incontrano ortogonalmente in un punto P, la tangente in P a C′ è una generatrice del cono circoscritto alla sfera lungo C e passa quindi pel vertice del cono, che è il polo di π rispetto alla sfera; per conseguenza anche π' passa pel polo di π, cioè π, π' sono piani coniugati.

Viceversa due circoli della sfera situati in piani coniugati, che si tagliano in punti reali, sono ortogonali fra loro.

Ciò premesso, siano (C), (C′) due serie ∞^1 di circoli della sfera mutuamente ortogonali. Ogni piano π della prima serie deve essere coniugato ad ogni piano π' della seconda, quindi la linea luogo dei poli dei piani (π) sta su tutti i piani (π'), e quella luogo dei poli dei piani (π') appartiene a tutti i piani (π). Dunque questi due luoghi sono necessariamente due rette r, r' polari reciproche (coniugate) rispetto alla sfera. Ne concludiamo che: *il modo più generale di ottenere un doppio sistema ortogonale di circoli sulla sfera è di segarla coi piani di due fasci, i cui assi siano rette coniugate rispetto alla sfera.*

Ora distinguiamo due casi secondo che le due rette coniugate sono sghembe, ovvero complanari. Nel primo caso una di esse, poniamo r, incontra la sfera in due punti reali, pei quali passeranno tutti i circoli del primo sistema. Proiettando stereograficamente sul piano otteniamo:

A) *Due fasci ortogonali di circoli, l'uno coi due punti base reali distinti, l'altro coi punti base immaginarii.*

In particolare se la retta r passa pel polo (centro di proiezione) nel piano si ottiene un fascio di rette, a centro proprio, ed i circoli col centro di questo punto.

Nel secondo caso, di r, r' complanari, esse sono tangenti alla sfera nel medesimo punto, in direzioni ortogonali, e per proiezione stereografica sul piano si ottiene:

B) *un doppio sistema di circoli che toccano nel medesimo punto due rette fra loro ortogonali.*

Nel caso particolare che il punto di contatto di r, r' sia il polo abbiamo nel piano, come caso limite, un doppio sistema ortogonale di rette.

In definitiva gli unici doppî sistemi ortogonali di circoli nel piano sono i doppî fasci ben noti nella geometria elementare.

§. 58.

Le affinità circolari di Möbius nel piano (sostituzioni lineari).

Consideriamo due piani π, π' sovrapposti, ed una rappresentazione conforme diretta dei due piani, ossia del piano π sopra sè stesso, data da

$$z' = F(z), \tag{a}$$

dove z è la variabile complessa su π, z' la trasformata, ed $F(z)$ indica una funzione *arbitraria* della variabile complessa. Siccome due trasformazioni conformi (*a*) si compongono in una terza conforme, così la totalità delle trasformazioni (*a*) forma un gruppo *continuo infinito* nel senso di Lie, colle condizioni di monogeneità:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}$$

quali equazioni di *definizione* del gruppo. Ora, entro questo gruppo infinito, merita speciale studio il gruppo *finito* (dipendente solo da costanti arbitrarie) dato dalle sostituzioni *lineari*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{l}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti complesse qualunque; e siccome il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ deve essere diverso da zero, si può senz'altro supporre (moltiplicando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per un fattore)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ossia la sostituzione l) *unimodulare*. Il gruppo l) (1) dipende così da 3 costanti arbitrarie complesse, ossia da 6 effettive reali: è un G_6.

(1) È manifesto che due sostituzioni lineari l), successivamente eseguite, danno una terza sostituzione lineare, epperò formano un gruppo.

Dimostriamo che il gruppo I) è caratterizzato geometricamente dalla seguente proprietà:

C) *Il gruppo* G_6 *delle sostituzioni lineari contiene tutte e sole le trasformazioni conformi del piano che cangiano circoli (o rette) in circoli o rette.*

Che ogni sostituzione lineare I) cangi qualunque circolo C descritto da z (o retta) in un circolo C' descritto da z', si può provare semplicemente così.

Prendasi una qualunque coppia $z=a$, $z=b$ di punti *simmetrici* rispetto al circolo C (o alla retta nel senso ordinario), cioè allineati col centro e coniugati rispetto a C. Si sa dalla geometria elementare che, se z si muove sulla circonferenza C, le sue due distanze da a, b rimangono in rapporto costante, cioè resta costante il modulo di $\frac{z-a}{z-b}$. Siano ora $z'=a'$, $z'=b'$ i due punti in cui la I) trasporta a, e b; la variabile $Z'=\frac{z'-a'}{z'-b'}$ sarà legata, in forza della I), linearmente alla $Z=\frac{z-a}{z-b}$. Ma siccome Z, Z' si annullano insieme (per $z=a$, $z'=a'$) e insieme diventano infinite (per $z=b$, $z'=b'$), la relazione lineare fra Z, Z' ha necessariamente la forma

$$Z'=kZ \qquad (k \text{ costante}), \text{ o}$$

$$\frac{z'-a'}{z'-b'}=k\frac{z-a}{z-b}.$$

In conseguenza quando rimane costante il modulo di $\frac{z-a}{z-b}$, tale rimane il modulo di $\frac{z'-a'}{z'-b'}$, cioè z' descrive una circonferenza, rispetto alla quale i due punti a', b' sono simmetrici: *Ogni sostituzione lineare* I) *cangia ogni circolo* C *in un' altro circolo* C' *e di più conserva le coppie di punti simmetrici rispetto al circolo.*

Per dimostrare completamente la proposizione C), proviamo ora che: *se una trasformazione conforme* $z'=F(z)$ *cangia circoli in circoli, essa è una sostituzione lineare* I).

Prendiamo nella figura (z) un doppio reticolato ortogonale di rette (p. e. delle rette parallele agli assi) che si cangierà, per ipotesi, nella figura (z') in un doppio sistema ortogonale di circoli, il quale dunque offrirà o il caso A) o il caso B) del paragrafo precedente. Però il primo caso resta subito escluso, se si osserva che le trajettorie isogonali (sotto angolo costante) del reticolato di rette sono pure rette e debbono quindi mutarsi in circoli trajettorie isogonali del fascio di circoli; ma le trajettorie isogonali di un fascio di circoli sono circoli nel solo caso che i punti base del fascio siano coincidenti, cioè nel caso B) (1). Dunque al reticolato ortogonale di rette in (z), la trasformazione supposta $z'=F(z)$ fa corrispondere in (z') un doppio fascio ortogonale di circoli che si toccano in un medesimo punto, $z'=a'$ in direzioni ortogonali. Ora, *con una sostituzione lineare*, cangiamo z' in $\bar{z}$ in modo che per $z'=a'$ sia $\bar{z}=\infty$ e il doppio fascio ortogonale di circoli in (z') sarà mutato nella figura $(\bar{z})$ in un doppio sistema ortogonale di rette, che potremo senz' altro prendere per quello delle rette coordinate $\bar{x}=\text{cost}^{te}$ $\bar{y}=\text{cost}^{te}$. Ma allora tra le figure (z) $(\bar{z})$ abbiamo una rappresentazione conforme che muta il reticolato cartesiano dell' una

$$x=\text{cost}^{te}, \quad y=\text{cost}^{te}$$

in quello dell' altra

$$\bar{x}=\text{cost}^{te}, \quad \bar{y}=\text{cost}^{te},$$

sia p. e.

$$\bar{x}=\bar{x}(x) \qquad \bar{y}=\bar{y}(y).$$

Dalla condizione di monogeneità $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}=\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}$ segue

$$\frac{d\bar{x}}{dx}=\frac{d\bar{y}}{dy}=c \qquad \text{(costante reale)}$$

e quindi

$$\bar{z}=cz+c' \qquad (c' \text{ costante}).$$

Dunque $\bar{z}$ è funzione lineare tanto di z, quanto di z', e perciò z' funzione lineare di z, c. d. d.

(1) Se il fascio ha punti base distinti, si può mutare con una sostituzione lineare in un fascio di rette a centro proprio, le cui trajettorie isogonali sono spirali logaritmiche e non circoli (salvo le trajettorie ortogonali)

Come trasformazioni geometriche del piano in sè, le trasformazioni I) erano state studiate da Möbius, che ha dato loro il nome di *affinità circolari*. Insieme a queste affinità circolari dirette, che conservano gli angoli col loro senso, si hanno anche le affinità circolari *inverse* che conservano i circoli e gli angoli, di questi ultimi però invertendo il senso. Una particolare di queste affinità circolari di seconda specie è per es. la

$$z' = z_0 , \qquad (x' = x , \; y' = -y)$$

che è un ribaltamento attorno all' asse reale; la più generale affinità circolare inversa si ottiene quindi cangiando nella I) z in z_0, ed ha l' espressione analitica

$$\text{II)} \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} .$$

§. 59.

Collineazioni della sfera in sè. — Movimenti.

Se con projezione stereografica riportiamo i risultati precedenti dal piano sulla sfera, avremo sulla sfera le affinità circolari di 1.ª specie (o dirette) rappresentate da

$$\text{I)} \qquad \tau' = \frac{\alpha \tau + \beta}{\gamma \tau + \delta}$$

e quelle di 2.ª specie (o inverse) coll' altra formola

$$\text{II)} \qquad \tau' = \frac{\alpha \tau_0 + \beta}{\gamma \tau_0 + \delta} .$$

Le trasformazioni così ottenute operano dapprima soltanto sui punti della superficie sferica, ma è facile estenderle a tutto lo spazio, dove diventano, come dimostreremo, le collineazioni reali (omografie) dello spazio che cangiano la sfera in sè medesima.

Come ogni altra quadrica, la sfera ammette ∞^6 collineazioni dello spazio che la trasformano in sè. Consideriamo una qualunque di queste collineazioni e cominciamo dal dimostrare che *sui punti della superficie sferica* essa è un' affinità circolare I) o II). Difatti la collineazione, mutando la sfera in sè e piani in piani, cangia le sezioni piane della sfera in sezioni piane cioè (sulla sfera) circoli in circoli). Di più essa cangia ogni coppia di piani coniugati rispetto alla sfera in un' altra tale coppia, e perciò due qualunque circoli fra loro ortogonali in altri due tali circoli (§. 79), onde segue che sulla sfera la trasformazione è anche conforme e coincide quindi, pel teorema C) del paragrafo precedente, con un' affinità circolare I) o II).

Viceversa prendiamo una qualunque di queste affinità circolari sulla sfera, sia Ω e vediamo come si estende nello spazio ad una collineazione della sfera in sè. Un punto qualunque P dello spazio determina nella sfera una rete di circoli situati nei piani per P, tutti ortogonali al circolo Γ di contatto del cono circoscritto da P alla sfera (Γ sarà reale se P è esterno alla sfera, immaginario se P è interno). Ora l' affinità circolare Ω muta la rete considerata in un' altra rete di circoli tutti ortogonali al trasformato Γ' di Γ, e dànno quindi un determinato punto P' dello spazio (il polo del piano di Γ') pel quale passano tutti i piani dei circoli della rete trasformata. Dopo ciò *facciamo corrispondere al punto* P *il punto* P'. Così l' affinità circolare Ω è ampliata ad una corrispondenza biunivoca dei punti dello spazio, che riconosciamo subito essere una collineazione, poichè se P descrive una retta, il punto P' descrive pure una retta (1).

Così abbiamo in effetto dimostrato che: *Ad ogni collineazione della sfera in sè è subordinata una sostituzione lineare* I) *o* II), *e viceversa.*

Quanto alla classificazione di queste collineazioni nelle due specie, se si ricorda che τ, τ_0 sono rispettivamente i parametri che individuano le generatrici dell' uno o dell' altro sistema della sfera (§. 78) si vede che: *Le collineazioni di* 1ª *specie lasciano invariato ciascuno dei due sistemi di generatrici, mentre quelle di seconda specie li scambiano fra loro.*

Da ultimo osserviamo che fra queste collineazioni di 1ª specie della sfera in sè vi sono pure i movimenti o rotazioni attorno al centro, e domandiamo: *Da quali particolari sostituzioni unimodulari*

$$(47) \qquad \tau' = \frac{\alpha \tau + \beta}{\gamma \tau + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

sono rappresentati i movimenti della sfera in sè?

---

(1) Quando P descrive una retta r il circolo Γ descrive un fascio, e quindi il circolo trasformato Γ' un secondo fascio ed il punto P' descrive l' asse r' del fascio dei piani di Γ'.

A questa domanda risponde un'importante formola del Cayley, che troviamo nel modo seguente.

In ogni rotazione della sfera attorno al centro due punti diametralmente opposti vanno in un'altra tale coppia, per cui se la (47) è un movimento, trasportando τ in τ', deve anche trasportare (§. 78) $-\frac{1}{\tau_0}, -\frac{1}{\tau'_0}$, onde insieme alla (47) dovrà sussistere l'altra

$$-\frac{1}{\tau'_0} = \frac{\alpha\frac{-1}{\tau_0}+\beta}{\gamma\frac{-1}{\tau_0}+\delta},$$

ossia:

$$\tau'_0 = \frac{-\delta\tau_0+\gamma}{\beta\tau_0-\alpha}.$$

Se in questa ultima formola cangiamo i, *in* $-i$, cioè ogni quantità nella sua coniugata, abbiamo

$$\tau' = \frac{-\delta_0\tau+\gamma_0}{\beta_0\tau-\alpha_0} \qquad \alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0=1.$$

Dovendo questa essere identica alla (47), avremo dapprima

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon\delta_0, \ \beta = -\varepsilon\gamma_0 \\ \gamma = -\varepsilon\beta_0, \ \delta = \varepsilon\alpha_0, \end{cases}$$

con $\varepsilon = \pm 1$; ma siccome

$$\alpha\delta-\beta\gamma = \varepsilon(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0) = 1$$

necessariamente $\varepsilon = +1$, e quindi la forma richiesta per la (47) nel caso particolare dei movimenti è

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{-\beta_0\tau+\alpha_0}, \quad \alpha\alpha_0+\beta\beta_0 = 1, \tag{48}$$

e questa è appunto la formola del Cayley.

Che inversamente ogni sostituzione di questa forma rappresenti un movimento si vede p. e. nel modo seguente. Essa cangia ogni diametro della sfera in un altro diametro, e per conseguenza, quale collineazione della sfera in sè, lascia fisso il centro, indi il piano all'infinito ed il circolo immaginario all'infinito. Essa è dunque una trasformazione conforme di tutto lo spazio, e in particolare conserva gli angoli attorno al centro, e quindi le lunghezze degli archi sulla sfera.

Da ultimo si osservi che in ogni tale movimento (48) vi sono due punti della sfera che rimangono fissi, quelli corrispondenti alle radici della equazione $\beta_0\tau^2+(\alpha-\alpha_0)\tau+\beta=0$, di cui detta una τ, l'altra è $-\frac{1}{\tau_0}$. I due punti fissi sono diametralmente opposti e il movimento non è che una rotazione attorno al diametro che li congiunge.

§. 60.

Le reti di Tchebychef sulla superficie.

Gli sviluppi dei paragrafi precedenti, relativi alle rappresentazioni conformi, erano essenzialmente legati alla forma isoterma

$$ds^2 = \lambda(du^2+dv^2),$$

che si può dare (in infiniti modi) al ds^2 di qualunque superficie. Vi sono altre forme *particolari* del ds^2, che convengono ancora a qualunque superficie, e di una di queste forme, che si presenta in diverse questioni di geometria, vogliamo appunto trattare in questi ultimi paragrafi del Capitolo. Dimostreremo che su qualunque superficie S esistono infiniti sistemi coordinati (α,β) pei quali nella corrispondente forma del ds^2

$$ds^2 = E\,d\alpha^2+2F\,d\alpha\,d\beta+G\,d\beta^2$$

si ha $E=G=1$, e quindi per la formola (*b*) §. 44 (pag. 114)

$$F = \cos\omega,$$

essendo ω l'angolo delle linee coordinate. Il problema, che diremo *problema di Tchebychef* consiste nel ridurre l'elemento lineare della superficie data alla forma

$$ds^2 = d\alpha^2+2\cos\omega\,d\alpha\,d\beta+d\beta^2. \tag{49}$$

Ammessa pel momento la possibilità della cosa, osserviamo che se le quattro linee coordinate $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$; $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$ racchiudono una porzione della superficie, il quadrilatero curvilineo da esse formato ha i lati opposti di eguale lunghezza $\alpha_1 - \alpha_0$ per la prima coppia, $\beta_1 - \beta_0$ per la seconda, e può quindi dirsi un parallelogrammo curvilineo nel senso finito, un rombo se prendiamo $\alpha_1 - \alpha_0 = \beta_1 - \beta_0$. Così le linee coordinate, convenientemente spaziate, dividono la superficie in rombi finiti, in particolare in rombi infinitesimi se facciamo crescere α, β per incrementi infinitesimi costanti ed eguali. Le reti coordinate (α, β), che dànno al ds^2 la forma (49), furono per primo studiate da Tchebychef e si diranno *reti di Tchebychef*. Immàginiamo ora lungo le linee (α, β) disteso un doppio sistema di fili *perfettamente flessibili ed inestendibili*; questa rete (o stoffa) potrà deformarsi restando fissi sui fili i loro punti d'intersezione e variando l'angolo ω sotto cui s'incontrano. Così p. e. potremo trasformare la rete in un reticolo piano cartesiano, ortogonale od obliquo. Il problema di ridurre il ds^2 alla forma (49) consiste adunque nell'adattare questa stoffa (inestendibile solo lungo i fili) sulla data superficie, o, come dice Tchebychef, nel *rivestire* la superficie. Prima di dimostrare che il problema è solubile (in infiniti modi) e di fissare il grado di arbitrarietà delle soluzioni, facciamo ancora diverse osservazioni.

1° Se per la supposta forma (49) dell'elemento lineare si calcolano, colla tabella (A) pag. 122, i valori dei simboli di Christoffel, si trova:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \cot\omega \, \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega} \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega} \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \cot\omega \, \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}. \end{cases}$$

Se indichiamo con K la curvatura della forma differenziale (49) ed applichiamo una delle quattro formole (IV) §. 41 (pag. 101) pel calcolo di K (oppure la (V) ibid) troviamo subito

$$\text{(50)} \qquad K = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

2.° Se in luogo della linea (α, β) della rete di Tchebychef prendiamo per linee coordinate le loro bisettrici (o linee diagonali), la cui equazione differenziale è (§. 47)

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

cogli integrali $\alpha + \beta = \text{cost}^{te}$, $\alpha - \beta = \text{cost}^{te}$, possiamo prendere

$$\text{(51)} \qquad \alpha + \beta = u, \quad \alpha - \beta = v$$

e allora la (49) si trasforma nell'equivalente

$$\text{(52)} \qquad ds^2 = \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) du^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) dv^2,$$

Viceversa da questa si ritorna alla (49) colle posizioni (51).

3.° Se in un ds^2 della forma (49), senza cangiare le linee coordinate α, β, si cangiano i *parametri di Tchebychef* α, β in rispettive loro funzioni $\varphi(\alpha), \psi(\beta)$, i coefficienti E, G diventano rispettivamente $\varphi'^2(\alpha)$, $\psi'^2(\beta)$, ed i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ sono ancora nulli. Viceversa se in un sistema coordinato

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

sono nulli:

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

allora, avendosi insieme

$$G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$-F\frac{\partial E}{\partial v} + E\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

ne risulta $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$, e però

$$E = U^2 \qquad G = V^2,$$

con U funzione di u, V funzione di v. Se ora si cangiano i parametri u, v in

$$\alpha = \int U\,du, \qquad \beta = \int V\,dv$$

si ottiene la forma di Tchebychef. Dunque:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema coordinato, scegliendo convenientemente i parametri, dia una rete di Tchebychef sono date dall'annullarsi dei due relativi simboli di Christoffel $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$.

§. 61.

Equazioni di Servant per le reti di Tchebychef.

Appoggiandoci sull' ultimo risultato, supponiamo dato il ds^2 di una superficie sotto una qualunque forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 , \tag{53}$$

e supponiamo che, per un cangiamento qualsiasi delle variabili u, v in altre α, β la, forma (53) si cangi nell' altra

$$ds^2 = E'\,d\alpha^2 + 2F'\,d\alpha\,d\beta + G'\,d\beta^2 . \tag{53*}$$

Se applichiamo le equazioni fondamentali di Christoffel (II) §. 33 (pag. 81) al calcolo delle derivate seconde miste $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, abbiamo

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\beta}, \end{cases}$$

dove i simboli di Christoffel a sinistra sono calcolati per la forma primitiva (53) (e quindi sono funzioni note di u, v), quelli a destra per la trasformata (53*).

Ora, se vogliamo che il nuovo sistema coordinato (α, β) (per una scelta conveniente dei parametri) dia una rete di Tchbychef, dobbiamo prendere per u, v tali funzioni di α, β che risulti $\left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\} = 0, \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\}$, cioè in guisa che u, v soddisfino al sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine:

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 . \end{cases}$$

Viceversa se le funzioni $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ sono *indipendenti* e soddisfano le (S), il nuovo sistema coordinato (α, β) sarà una rete di Tchebychef. E infatti sussistendo, insieme alle (S), le formole (54) di Christoffel, avremo

$$\left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0$$

$$\left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0 ,$$

e siccome, per ipotesi, è diverso da zero il determinante funzionale $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$, avremo *necessariamente*

$$\left\{\begin{matrix}12'\\1\end{matrix}\right\} = 0 , \quad \left\{\begin{matrix}12'\\2\end{matrix}\right\} = 0 ,$$

e il sistema coordinato (α, β) darà appunto una rete di Tchebychef.

Le equazioni (S) per la ricerca delle reti di Tchebychef su qualunque superficie sono state trovate la prima volta da Servant, e si diranno le *equazioni di Servant*. Si osservi, che essendo i valori dei simboli $\left\{\begin{matrix}i\,k\\l\end{matrix}\right\}$ di Christoffel funzioni note di u, v, esse appartengono al tipo così detto iperbolico delle equazioni simultanee del secondo ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F\left(u, v, \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial\beta}, \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \Phi\left(u, v, \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial\beta}, \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right) \end{cases}$$

per due funzioni incognite u, v, i secondi membri essendo funzioni finite e continue dei 6 argomenti (e semplicemente quadratiche nelle derivate), rispetto ai quali i rapporti incrementali restano finiti, ossia sono soddisfatte le *condizioni di Lipschitz*.

§. 62.

Esistenza delle reti di Tchebychef e arbitrarietà.

Nelle condizioni ora descritte per un sistema simultaneo (55) del tipo iperbolico, nel quale le linee α, β sono le così dette *caratteristiche*, i teoremi generali assicurano insieme *l'esistenza e l'unicità* di un sistema di soluzioni (u, v) quando della u e della v siano assegnati (arbitrariamente) i valori lungo due date caratteristiche p. e. $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Più precisamente richiediamo che

$$(56)\qquad \begin{cases} \text{per } \beta = 0 & \text{sia } u = f(\alpha), \quad v = \varphi(\alpha) \\ \text{per } \alpha = 0 & \text{sia } u = f_1(\beta), \quad v = \varphi_1(\beta), \end{cases}$$

essendo $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ funzioni arbitrarie (finite e continue colle derivate), soggette all'unica condizione

$$f(0) = f_1(0), \quad \varphi(0) = \varphi_1(0).$$

Allora, finchè teniamo α e β sufficientemente vicini a zero (di certi intervalli finiti), i citati teoremi assicurano l'esistenza e l'unicità di una soluzione (u, v) delle (55) (in quell'intorno finito di $\alpha = 0$, $\beta = 0$) per la quale le condizioni ai limiti (56) siano soddisfatte. E allora, ritornando alle speciali equazioni (S) di Servant, affinchè vi corrisponda un'effettiva rete di Tchebychef sulla superficie, resta solo da assicurarsi che le funzioni trovate $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ siano fra loro indipendenti. Ma inizialmente per $\alpha = \beta = 0$ il determinante funzionale $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$ ha il valore

$$(57)\qquad f'(0)\varphi'_1(0) - f'_1(0)\varphi'(0)$$

e basta quindi evitare per le quattro funzioni arbitrarie $f(\alpha), \varphi(\alpha), f_1(\beta), \varphi_1(\beta)$ nelle (56) che i valori iniziali delle derivate annullino l'espressione (57). Allora, il determinante funzionale $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$ essendo diverso da zero in $\alpha = \beta = 0$, rimane diverso da zero (a causa della continuità) in tutto un intorno *finito* di (o, v), al quale possiamo restringerci. Così abbiamo effettivamente dimostrato che su qualunque superficie esistono infinite reti di Tchebychef, e il grado di arbitrarietà è fissato da *due funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna*. E invero, nelle condizioni iniziali (56), figurano *quattro* funzioni arbitrarie, però due sono soltanto apparenti, dipendendo dall'arbitrarietà lasciata ancora ai parametri α, β.

A questi risultati possiamo dare una forma geometrica espressiva col teorema:

D) *Date ad arbitrio, sopra una qualunque superficie* S, *due curve* C, Γ *che si incrocino in un punto* O *della superficie, senza toccarsi, si può in uno ed in un sol modo ricoprire una regione finita di* S, *intorno ad* O, *con una rete di Tchebychef, sì che due fili incrociantisi della rete si distendano lungo le curve prescritte* C *e* Γ.

Per la dimostrazione, nell'ipotesi dapprima che la rete cercata esista, supponiamo che la curva C appartenga p. e. al sistema $\beta = \text{cost.}^{te}$ e la Γ al sistema $\alpha = \text{cost.}^{te}$, e la prima sia la $\beta = 0$, la seconda la $\alpha = 0$. Prendiamo inoltre, per maggiore determinatezza, a parametro α l'arco della C misurato a partire da O ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), e a parametro β l'arco della Γ, misurato medesimamente da O. Le curve C, Γ avranno sopra S determinate equazioni parametriche

$$(56^*)\qquad \begin{cases} u = f(\alpha), \ v = \varphi(\alpha) \text{ per la C } (\beta = 0) \\ u = f_1(\beta), \ v = \varphi_1(\beta) \text{ per la } \Gamma \ (\alpha = 0), \end{cases}$$

le quali vengono appunto a fissare le condizioni iniziali (56), talchè esisterà una ed una sola coppia u, v di soluzioni delle equazioni (S) di Servant soddisfacenti a queste condizioni iniziali. Di più è facile vedere che il loro determinante funzionale $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$ sarà, inizialmente per $\alpha = \beta = 0$, diverso da zero. Se infatti indichiamo con θ, θ' gli angoli d'inclinazione delle curve C, Γ sulle linee $v = \text{cost.}^{te}$, ricordando che per la C $ds = d\alpha$, per la Γ $ds = d\beta$, dalle formole fondamentali (7), (7*) §. 45 (pag. 115) per la metrica angolare abbiamo

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{\partial u}{\partial \alpha} + F\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right), \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

$$\cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{\partial u}{\partial \beta} + F\frac{\partial v}{\partial \beta}\right), \quad \operatorname{sen}\theta' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{\partial v}{\partial \beta},$$

da cui

$$\operatorname{sen}(\theta' - \theta) = \sqrt{EG - F^2}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}.$$

E siccome nel punto O l'angolo $\theta' - \theta$ è quello sotto cui s'incrociano le due curve, per ipotesi

$$\operatorname{sen}(\theta' - \theta) \neq 0,$$

quindi anche

$$\begin{pmatrix} \partial(u, v) \\ \partial(\alpha, \beta) \end{pmatrix}_{\substack{\alpha = 0 \\ \beta = 0}} \neq 0, \text{ c. d. d.}$$

Esiste dunque sulla superficie S una ed una sola rete di Tchebychef corrispondente alle condizioni iniziali (56*), le quali accertano appunto che il filo $\beta = 0$ della rete coinciderà colla curva prescritta C e l'altro $\alpha = 0$ colla Γ. La nostra proposizione geometrica resta così completamente dimostrata.

§. 63.

Reti di Tchebychef nel piano e sulla sfera.

Come esempio in cui le equazioni di Servant s'integrano a vista, consideriamo le reti di Tchebychef nel piano, ove si può prendere ponendo $u = x$, $v = y$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Annullandosi i simboli di Christoffel, le equazioni (S) di Servant diventano

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

e integrate dànno

$$(57) \qquad \begin{cases} x = f(\alpha) + \varphi(\beta) \\ y = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \end{cases}$$

con $f(\alpha), \varphi(\beta), f_1(\alpha), \varphi_1(\beta)$ funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti. Queste definiscono il piano come *superficie di traslazione*, essendo tutte le curve, in ciascuno dei due sistemi, congruenti per traslazione, e del resto di forma arbitraria. Dunque: *Le più generali reti di Tchebychef nel piano si ottengono tracciando nel piano due curve arbitrarie* C, Γ *che si incrocino in un punto O; movendo* C *con moto continuo di traslazione, sicchè* O *descriva* Γ, *si hanno le curve di un sistema nella rete, e così le altre per traslazione di* Γ *lungo* C.

Questo risultato illustra in un caso semplicissimo la proposizione generale D).

In altro modo equivalente si risolve qui il problema cercando direttamente le forme (49) dell'elemento lineare di Tchebychef appartenenti al piano, per il che occorre e basta, secondo i risultati generali del §. 39, che la curvatura K del ds^2 risulti nulla. Per la formola (50) dobbiamo dunque avere

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

indi $\omega = F(\alpha) + \Phi(\beta)$, e

$$ds^2 = d\alpha + 2\cos(F(\alpha) + \Phi(\beta))\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2,$$

elemento lineare che realizziamo prendendo

$$\begin{cases} x = \int \cos F\, d\alpha + \int \cos \Phi\, d\beta \\ y = \int \operatorname{sen} F\, d\alpha - \int \operatorname{sen} \Phi\, d\beta, \end{cases}$$

formole che corrispondono precisamente alla (57).

Ben differente è il risultato se cerchiamo le reti di Tchebychef sulla sfera, il cui raggio possiamo prendere $= 1$. L'elemento lineare si può assumere sotto la forma (43) §. 72

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2,$$

per la quale dalla tabella (A) pag. 122 risulta che tutti i simboli di Christoffel si annullano salvo

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \cot u, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\operatorname{sen} u \cos u,$$

e per la curvatura K si trova

$$K = 1.$$

Le equazioni (S) di Servant diventano qui

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen} u \cos u \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\cot u\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \end{array}\right.$$

equazioni che non si sanno integrare.

Si può però ridurre il problema ad una sola equazione del secondo ordine, procedendo come sopra pel piano, cercando cioè direttamente i ds^2 della forma (49) di Tchebychef che appartengono alla sfera, per il che è necessario e sufficiente (§. 39) che risulti $K=+1$, che cioè ω soddisfi, secondo la (50), alla equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\operatorname{sen}\omega = 0\,.\,(^1)$$

La determinazione delle reti di Tchebychef sulla sfera dipende dalla equazione del secondo ordine: $s+\operatorname{sen} z=0$ (nelle notazioni di Monge).

È questa un'equazione tipica che incontreremo in altre interessanti questioni geometriche, e sebbene coi mezzi attuali dell'analisi non si sappia integrare completamente, se ne possono trovare quante soluzioni si vogliano con un numero grande a piacere di costanti arbitrarie, mediante metodi di *integrazione successiva* che impareremo più tardi a conoscere, e che vennero introdotti nell'analisi appunto dalla geometria.

---

(1) Bene inteso si trascura la soluzione costante $\omega=0$ (o $\omega=\pi$) perchè allora il ds^2 sarebbe un quadrato perfetto $(du+dv)^2$.

Capitolo IV.

Formole fondamentali della teoria delle superficie.

Le due forme quadratiche fondamentali di una superficie $\left\{\begin{array}{l} E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \\ D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2 \end{array}\right.$

Formole che dànno le derivate seconde di x, y, z e le derivate prime di X, Y, Z. — Equazioni di Gauss e di Mainardi-Codazzi fra i coefficienti E, F, G, D, D', D'' delle due forme fondamentali. — Esistenza ed unicità della superficie corrispondente a due date forme fondamentali compatibili. — Linee di curvatura. — Raggi di prima curvatura delle linee tracciate sopra una superficie. — Teorema di Meusnier. — Formola d'Eulero. — Indicatrice di Dupin. — Curvatura totale e curvatura media. — Sistemi coniugati. — Linee asintotiche. — Calcolo di parametri differenziali. — Elementi di una superficie in coordinate cartesiane.

§. 64.

La seconda forma quadratica fondamentale di una superficie.

Nelle questioni trattate nel Capitolo precedente (come in altre che studieremo in seguito concernenti soltanto la geometria *sulla superficie*) interviene una sola forma differenziale, quella che dà il suo ds^2

$$ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

cioè la sua *prima forma fondamentale*. Ma quando, come nelle ricerche che ci proponiamo ora di svolgere, si studiano le proprietà inerenti alla *effettiva configurazione* della superficie nello spazio, allora vedremo che a questa prima forma differenziale quadratica viene ad associarsene una seconda ed anzi: *La teoria delle superficie, dal punto di vista della geometria infinitesimale, si riduce essenzialmente allo studio di queste due forme differenziali quadratiche simultanee.*

Per introdurre l'accennata seconda forma fondamentale della superficie, cominciamo dal fissare i coseni di direzione positiva della

normale alla superficie. Già al §. 45 (pag. 114), in relazione colla orientazione del reticolo coordinato (u, v), abbiamo fissata la *pagina positiva* della superficie, o del relativo piano tangente, e naturalmente per direzione positiva della normale assumeremo quella verso cui questa pagina positiva è rivolta. Allora, siccome i coseni di direzione positiva della tangente alla $v = \text{cost.}$ sono (§. 44):

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

e quelli dalla tangente positiva alla $u = \text{cost.}^{\text{te}}$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

mentre la seconda giace alla sinistra della prima, come Oy rispetto ad Ox, la geometria analitica fornisce per X, Y, Z, in grandezza e segno, le espressioni:

$$X = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dove ω è l'angolo fra 0 e π delle direzioni positive delle linee coordinate (§. 44) e quindi

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

Così dunque abbiamo le formole

$$(1) \quad X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dalle quali, si noti, segue l'altra

$$(1^*) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +\sqrt{EG - F^2}.$$

Mentre la prima forma fondamentale f è

$$f = ds^2 = S\,dx^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la seconda che ora introduciamo è data da

$$(2) \quad \varphi = -S\,dx\,dX,$$

e la scriveremo sempre colla notazione [1]

$$(2^*) \quad \varphi = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Si può subito assegnare un significato geometrico a questa seconda forma φ in relazione colla prima f (col ds^2). In ogni punto (u, v) di S eleviamo la normale e stacchiamo su di essa un segmento infi-

[1] Le notazioni D, D', D'' risalgono, come E, F, G, alla celebre memoria di Gauss: *Disquisitiones circa superficies curvas*, colla leggiera variante che Gauss indica con questi simboli stessi le quantità

$$D\sqrt{EG - F^2}, \quad D'\sqrt{EG - F^2}, \quad D''\sqrt{EG - F^2}.$$

nitesimo *costante* ε, le coordinate x, y, z del cui estremo saranno

$$\bar{x} = x + \varepsilon X, \quad \bar{y} = y + \varepsilon Y, \quad \bar{z} = z + \varepsilon Z.$$

Il luogo di questi estremi è una superficie $\bar{S}$ che si dice parallela ad S (ed infinitamente vicina). Se ne calcoliamo il $d\bar{s}^2$, avendosi

$$\bar{dx} = dx + \varepsilon dX, \quad \bar{dy} = dy + \varepsilon dY, \quad \bar{dz} = dz + \varepsilon dZ,$$

risulta subito

$$\overline{ds^2} = ds^2 - 2\varepsilon\varphi + \varepsilon^2 S\, dX^2.$$

Ora, riguardando ε come infinitesimo del 1° ordine, trascuriamo gli infinitesimi d'ordine superiore, e per la *variazione* del ds^2 avremo

$$\delta\, ds^2 = \overline{ds^2} - ds^2 = -2\varepsilon\varphi;$$

dunque: *La seconda forma differenziale di una superficie eguaglia (a meno di una costante infinitesima) la variazione del suo ds^2 nel passaggio alla superficie parallela infinitamente vicina.*

Diamo ora diverse forme dei coefficienti D, D′, D″ della seconda forma φ, definiti dalle (2), (2*). Per questo si osservi che dalle identità

$$S\, X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad S\, X \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

derivate rapporto ad u e v, si ottiene

$$S\, X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -S \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad S\, X \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = -S \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -S \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$S\, X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -S \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v},$$

e quindi per D, D′, D″ le formole:

$$(3) \qquad \begin{cases} D = S\, X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -S \dfrac{\partial X}{\partial u} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ D' = S\, X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = -S \dfrac{\partial X}{\partial v} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -S \dfrac{\partial X}{\partial u} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ D'' = S\, X \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -S \dfrac{\partial X}{\partial v} \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}.$$

A causa delle (1) si possono anche porre D, D′, D″ sotto forma di determinanti, abbreviati per comodità di scrittura alla prima linea

$$D = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

È manifesto, per il significato stesso di f, φ, che: *le due forme quadratiche fondamentali*

$$\begin{cases} E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \\ D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2, \end{cases}$$

per un qualunque cangiamento di variabili, si cangiano nelle due nuove forme fondamentali relative alle variabili trasformate.

§. 65.

Equazioni fondamentali per $\frac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s}$, $\frac{\partial X}{\partial u_r}$.

Andiamo ora a stabilire le *equazioni fondamentali* per la nostra teoria, colle quali ciascuna delle derivate seconde delle coordinate: $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ e delle derivate prime dei coseni della normale $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, X.$$

Per questo premettiamo l'osservazione generale che, date tre quantità qualunque A, B, C, funzioni di u, v, si possono sempre porre sotto la forma

$$(a)\qquad \begin{cases} A = \alpha_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \alpha_3 X \\ B = \alpha_1 \dfrac{\partial y}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial y}{\partial v} + \alpha_3 Y \\ C = \alpha_1 \dfrac{\partial z}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial z}{\partial v} + \alpha_3 Z , \end{cases}$$

determinando i tre coefficienti incogniti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ da queste tre equazioni lineari, il cui determinante per la (1*) eguaglia $\sqrt{EG - F^2}$ e non è zero.

Per maggiore comodità di calcolo riprendiamo per un momento la notazione dei doppi indici, ponendo $u = u_1$, $v = u_2$, indi

$$E = a_{11} , \quad F = a_{12} , \quad G = a_{22}$$
$$D = b_{11} , \quad D' = b_{12} , \quad D'' = b_{22} ,$$

e si avrà

$$(4)\qquad a_{rs} = S \frac{\partial x}{\partial u_r} \frac{\partial x}{\partial u_s} , \quad b_{rs} = - S \frac{\partial X}{\partial u_r} \frac{\partial x}{\partial u_s} = S X \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} ,$$

dalla prima delle quali segue pei valori dei simboli di Christoffel di prima specie

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} = S \frac{\partial x}{\partial u_t} \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} .$$

Poniamo dapprima nelle (a)

$$A = \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} , \quad B = \frac{\partial^2 y}{\partial u_r \partial u_s} , \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial u_r \partial u_s} ,$$

e scriviamole compendiosamente

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} \alpha_\lambda \frac{\partial x}{\partial u_\lambda} + \alpha_3 X ,$$

omettendo le analoghe per y, z. Formando di qui

$$S X \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}$$

si ottiene subito

$$\alpha_3 = b_{rs} .$$

E formando invece $S \dfrac{\partial x}{\partial x_i} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}$, risulta per la (5)

$$\begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} a_{i\lambda} \alpha_\lambda ,$$

da cui segue

$$\sum_{i=1}^{i=2} A_{ik} \begin{bmatrix} r & s \\ i \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i,\lambda}^{1,2} A_{ik} a_{i\lambda} \alpha_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} \varepsilon_{k\lambda} \alpha_\lambda = \alpha_k ,$$

e per ciò

$$\alpha_k = \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} .$$

Le formole domandate per le derivate seconde delle coordinate sono adunque le seguenti:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_k \begin{Bmatrix} r & s \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_k} + b_{rs} X , \quad (r, s = 1, 2)$$

ovvero colle notazioni delle derivate seconde covarianti (§. 35)

$$(6^*)\qquad x_{rs} = b_{rs} X .$$

Poniamo in secondo luogo nelle (a)

$$A = \frac{\partial X}{\partial u_r} , \quad B = \frac{\partial Y}{\partial u_r} , \quad C = \frac{\partial Z}{\partial u_r} ,$$

e da $S X^2 = 1$, $S X \dfrac{\partial X}{\partial u_r} = 0$ risulterà qui subito $\alpha_3 = 0$, poi da

$$\frac{\partial X}{\partial u_r} = \sum_\lambda \alpha_\lambda \frac{\partial x}{\partial u_\lambda} ,$$

formando

$$S \frac{\partial x}{\partial u_s} \frac{\partial X}{\partial u_r} = - b_{rs} ,$$

viene

$$- b_{rs} = \sum_\lambda a_{s\lambda} \alpha_\lambda ,$$

da cui

$$-\sum_s A_{k,s}\, b_{r,s} = \sum_{\lambda,s} a_{s\lambda}\, A_{s,k}\, \alpha_\lambda = \sum_\lambda \varepsilon_{\lambda k}\, \alpha_\lambda = \alpha_k .$$

Le formole richieste per le derivate delle X sono quindi le seguenti

$$\frac{\partial X}{\partial u_r} = -\sum_{\lambda,s}^{1,2} A_{\lambda,s}\, b_{r,s}\, \frac{\partial x}{\partial u_\lambda} \qquad (r = 1, 2) \tag{7}$$

Scrivendo ora per disteso le formole (6), colle notazioni senza indici, abbiamo il primo gruppo di formole fondamentali, dato da

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + D\,X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + D'\,X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + D''\,X, \end{cases}$$

e le formole (7) dànno il secondo gruppo (1):

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{F\,D' - G\,D}{E\,G - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{F\,D - E\,D'}{E\,G - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{F\,D'' - G\,D'}{E\,G - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{F\,D' - E\,D''}{E\,G - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}.$$

Qui, come sempre in seguito, scriviamo soltanto il gruppo di formole relativo ad uno degli assi (O_x) omettendo le altre che ne derivano permutando circolarmente le lettere (x, y, z), (X, Y, Z)

In queste formole (I), (II), fondamentali per tutta la teoria, i coefficienti dei secondi membri sono formati, come si vede, coi coefficienti E, F, G; D, D', D'' delle due forme fondamentali, e colle derivate dei tre primi E, F, G, che figurano nei simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}$, calcolati *per la prima forma fondamentale*. Le (I), (II) tengono in sostanza il luogo, nella teoria delle superficie, delle formole di Frenet per le curve (§. 6).

(1) Si ricordi che si ha

$$A_{11} = \frac{G}{E\,G - F^2}, \quad A_{12} = \frac{-F}{E\,G - F^2}, \quad A_{22} = \frac{E}{E\,G - F^2}$$

§. 66.

Le condizioni d' integrabilità.

I sei coefficienti E, F, G; D, D', D'' delle due forme fondamentali di una superficie non sono già fra loro indipendenti, ma legati da tre importanti relazioni caratteristiche, che derivano dalle *condizioni d' integrabilità* per le equazioni fondamentali (I), (II) (1).

Per compiere il calcolo delle condizioni d' integrabilità delle (I) e (II) nel modo più simmetrico, è opportuno che ricorriamo di nuovo alla notazione dei doppî indici, scrivendo ancora le (I), (II) sotto le forme (6) e (7) (2).

Prendiamo dapprima due equazioni (6)

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r\,\partial u_s} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ k \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u_k} + b_{r,s}\, X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r\,\partial u_t} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} r\,t \\ k \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u_k} + b_{r,t}\, X, \end{cases}$$

e derivando la prima rispetto ad u_t, la seconda rispetto ad u_s e sottraendo, il primo membro si annulla, mentre il secondo applicando le (6), (7) medesime, si cangia in un' espressione lineare omogenea

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial u_1} + \beta \frac{\partial x}{\partial u_2} + \gamma\, X,$$

che deve annullarsi insieme alle altre due analoghe per y, z, onde sarà necessariamente

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \text{ (3)}$$

(1) Nel caso delle curve (Cap. I), avendosi una sola variabile indipendente, non intervenivano condizioni d' integrabilità.

(2) È questo un calcolo che si ripeterà, nell'identico modo, in ulteriori studî per un numero qualunque n di variabili.

(3) Perchè il determinante $\left| \dfrac{\partial x}{\partial u_1} \dfrac{\partial x}{\partial u_2} X \right|$ è diverso da zero.

Abbreviamo il calcolo di queste condizioni d' integrabilità per le (8), scrivendole come prima

$$x_{r\,s} = b_{r\,s}\,\mathrm{X}\,,\quad x_{r\,t} = b_{r\,t}\,\mathrm{X}$$

e quindi

$$\frac{\partial x_{r\,s}}{\partial u_t} - \frac{\partial x_{r\,t}}{\partial u_s} = \frac{\partial}{\partial u_t}(b_{r\,s}\,\mathrm{X}) - \frac{\partial}{\partial u_s}(b_{r\,t}\,\mathrm{X}).$$

Calcolando il primo membro colla formola generale (D*) §. 40 (pag. 99 ed il secondo colle (7), otteniamo:

$$\sum_{\lambda\mu} \mathrm{A}_{\lambda\mu}(r\,\mu\,,\,t\,s)\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} + \sum_\lambda \left\{ {r\ t \atop \lambda} \right\} x_{s\,\lambda} - \sum_\lambda \left\{ {r\ s \atop \lambda} \right\} x_{t\,\lambda} = \left(\frac{\partial b_{r\,s}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_{r\,t}}{\partial u_s}\right)\mathrm{X} +$$

$$+ b_{r\,t}\sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{s\,\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} - b_{r\,s}\sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{t\,\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda}.$$

Siccome per le (6*): $x_{s\,\lambda} = b_{s\,\lambda}\,\mathrm{X}$, $x_{t\,\lambda} = b_{t\,\lambda}\,\mathrm{X}$, se, applicando l' osservazione precedente, confrontiamo dall' una e dall'altra parte il coefficiente di X, otteniamo

$$\frac{\partial b_{r\,s}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_{r\,t}}{\partial u_s} + \sum_\lambda \left\{ {r\ s \atop \lambda} \right\} b_{t\,\lambda} - \sum_\lambda \left\{ {r\ t \atop \lambda} \right\} b_{s\,\lambda} = 0\,. \tag{9}$$

E confrontando poi i coefficienti di $\frac{\partial x}{\partial u_\lambda}$ dall'una e dall'altra parte, abbiamo

$$\sum_\mu \mathrm{A}_{\lambda\,\mu}(r\,\mu\,,\,t\,s) = \sum_\mu \mathrm{A}_{\lambda\mu}\,(b_{r\,t}\,b_{s\,\mu} - b_{r\,s}\,b_{t\,\mu})\,,$$

ossia

$$(r\,\mu\,,\,t\,s) = b_{r\,t}\,b_{s\,\mu} - b_{r\,s}\,b_{t\,\mu}\,.$$

Ma i simboli Riemanniani riducendosi qui ad uno solo (§. 41), queste equivalgono all' unica

$$b_{11}\,b_{22} - b_{12}^{\,2} = (12,12)\,,$$

ossia all' altra

$$\frac{b_{11}\,b_{22} - b_{12}^{\,2}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^{\,2}} = \mathrm{K}, \tag{10}$$

essendo K la curvatura della prima forma fondamentale. Le condizioni (9) e la (10) dànno quindi *tutte* le condizioni d'integrabilità pel sistema (I).

Bisogna ora, in secondo luogo, calcolare le condizioni d' integrabilità per le equazioni (II); ma si vedrà che esse sono già contenute nelle (9).

Prendiamo infatti due equazioni (II), scritte sotto la forma

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_r} = -\sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\,\mu}\,b_{r\,\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda\,\mu}\mathrm{A}_{\lambda\,\mu}\,b_{s\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda}\,,$$

e costruiamo similmente la relativa condizione d' integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_s}\sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{r\,\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial}{\partial u_r}\sum\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{s\mu}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} = 0,$$

che possiamo scrivere per le (6)

$$\sum_{\lambda\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial u_s}(\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{r\mu}) - \frac{\partial}{\partial u_r}(\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{s\,\mu})\right\}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} + \sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\,\mu}\,b_{r\mu}\left[\sum_k \left\{ {\lambda\ s \atop k} \right\}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \right.$$

$$\left. + b_{\lambda\,s}\,\mathrm{X}\right] - \sum_{\lambda\,\mu}\mathrm{A}_{\lambda\,\mu}\,b_{s\,\mu}\left[\sum_k \left\{ {\lambda\ r \atop k} \right\}\frac{\partial x}{\partial u_k} + b_{\lambda\,r}\mathrm{X}\right]\right] = 0\,.$$

Il coefficiente di X nel primo membro

$$\sum_{\lambda\,\mu}\mathrm{A}_{\lambda\mu}\,b_{r\mu}\,b_{\lambda s} - \sum_{\mu\lambda}\mathrm{A}_{\lambda\,\mu}\,b_{s\mu}\,b_{\lambda\,r}$$

è già identicamente nullo, come risulta dallo scambiare nella seconda somma λ con μ. Resta da eguagliare a zero il coefficiente di

$$\frac{\partial x}{\partial u_k}\ \text{per}\ k = 1,\ 2,$$

il che dà

$$\sum_\mu\left[\frac{\partial}{\partial u_s}(\mathrm{A}_{k\mu}\,b_{r\mu}) - \frac{\partial}{\partial u_r}(\mathrm{A}_{k\mu}\,b_{s\,\mu})\right] + \sum_{\lambda\mu}\mathrm{A}_{\lambda\mu}\left[\left\{ {\lambda\ s \atop k} \right\} b_{r\mu} - \left\{ {\lambda\ r \atop k} \right\} b_{s\,\mu}\right] = 0\,.$$

Questa si può scrivere

$$\sum_{\mu} A_{k\mu}\left(\frac{\partial b_{r\mu}}{\partial u_s}-\frac{\partial b_{s\mu}}{\partial u_r}\right)+\sum_{\mu} b_{r\mu}\left[\frac{\partial A_{k\mu}}{\partial u_s}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda s\\ k\end{matrix}\right\} A_{\lambda\mu}\right]$$

$$-\sum_{\mu} b_{s\mu}\left[\frac{\partial A_{k\mu}}{\partial u_r}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda r\\ k\end{matrix}\right\} A_{\lambda\mu}\right]=0,$$

e siccome, a causa delle formole (B) al §. 34 (pag. 82), si ha

$$\frac{\partial A_{k\mu}}{\partial u_s}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda s\\ k\end{matrix}\right\} A_{\lambda\mu}=-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}s\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} A_{\lambda k}$$

$$\frac{\partial A_{k\mu}}{\partial u_r}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda r\\ k\end{matrix}\right\} A_{\lambda\mu}=-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}r\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} A_{\lambda k},$$

sostituendo nella precedente e scambiando nelle ultime somme gli indici λ, μ, si ottiene

$$\sum_{\mu} A_{k\mu}\left(\frac{\partial b_{r\mu}}{\partial u_s}-\frac{\partial b_{s\lambda}}{\partial u_r}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}r\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} b_{s\lambda}-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}s\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} b_{r\lambda}\right)=0.$$

Queste equivalgono alle condizioni

$$\frac{\partial b_{r\mu}}{\partial u_s}-\frac{\partial b_{s\mu}}{\partial u_r}+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}r\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} b_{s\lambda}-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}s\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} b_{r\mu}=0,$$

che (mutati gli indici) sono appunto le (9).

§. 67.

Le equazioni di Gauss e di Codazzi.

Il calcolo eseguito al paragrafo precedente ci ha dimostrato che le condizioni d' integrabilità per le equazioni fondamentali (I) e (II) sono tutte contenute nella equazione (10) e nelle *due* (9). La prima che, riprendendo le notazioni E, F, G, D, D', D'', si scrive

$$\text{(III)}\qquad \frac{D\,D''-D'^2}{E\,G-F^2}=K$$

ci esprime che: *Il quoziente del discriminante della seconda forma fondamentale* $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$ *per quello della prima* $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ *deve eguagliare la curvatura* K *di quest' ultima forma.*

La formola (III) è stata stabilita da Gauss nelle *Disquisitiones* ecc. e si citerà come *equazione di Gauss.* Si noti che essa è algebrica rispetto a D, D', D'' e differenziale (del secondo ordine) rispetto ad E, F, G.

Quanto alle due equazioni (9), scritte per disteso, esse non sono altro che le equazioni finali (VII) §. 42 (pag. 107) ed esprimono che: *La forma trilineare covariante* (f,φ), *costruita per la seconda forma fondamentale* φ *rispetto alla prima* f, *deve annullarsi identicamente.*

Scrivendo queste due equazioni colle notazioni solite, si ha:

$$\text{IV)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial D}{\partial v}-\dfrac{\partial D'}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\ 1\end{matrix}\right\} D+\left(\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}\right) D'+\left\{\begin{matrix}11\\ 2\end{matrix}\right\} D''=0\\ \dfrac{\partial D''}{\partial u}-\dfrac{\partial D'}{\partial v}-\left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\} D+\left(\left\{\begin{matrix}22\\ 2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\ 1\end{matrix}\right\}\right) D'-\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\} D''=0;\end{cases}$$

esse sono condizioni differenziali del 1° ordine per D, D', D'', come anche per E, F, G.

Le formole (IV) vengono citate più comunemente come *equazioni di Codazzi* perchè equivalenti alle equazioni stabilite da questo geometra (nel 1868) (1); ma in realtà furono date 12 anni prima dall' altro geometra italiano *Mainardi* (2). Ed è anche da osservare che già nelle *Disquisitiones* di Gauss si trovano tutti gli elementi per la deduzione delle (IV).

Queste si possono scrivere anche sotto un'altra forma, che qualche volta torna più utile nelle applicazioni.

Si ricorra per ciò alla formola (C) §. 34 (pag. 83) che dà la derivata logaritmica del discriminante, qui dunque alle due formole

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial \log\sqrt{E\,G-F^2}}{\partial u}=\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}\\ \dfrac{\partial \log\sqrt{E\,G-F^2}}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}22\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 1\end{matrix}\right\}.\end{cases}$$

(1) Annali di matematica T. II pag. 278.
(2) Giornale dell' Istituto Lombardo T. IX pag. 395.

Se dividiamo allora le (IV) per $\sqrt{EG-F^2}$, e poniamo per brevità

$$(12)\qquad \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}=\Delta\,,\quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}=\Delta'\,,\quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}=\Delta''\,,$$

facendo uso delle (11), le formole (IV) di Codazzi si scrivono ora

$$(IV^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta}{\partial v}-\dfrac{\partial\Delta'}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\Delta-2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\Delta'+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\Delta''=0 \\ \dfrac{\partial\Delta''}{\partial u}-\dfrac{\partial\Delta'}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\Delta-2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\Delta'+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\Delta''=0\,. \end{cases}$$

D'altra parte l'equazione (III) di Gauss prende la forma equivalente

$$(III^*)\qquad \Delta\Delta''-\Delta'^2=K.$$

Noi abbiamo così trovate l'equazione di Gauss e le due equazioni di Codazzi quali condizioni *necessarie* affinchè due date forme differenziali quadratiche in due variabili

$$\begin{cases} E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \\ D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2, \end{cases}$$

delle quali la prima (se si resta nel campo reale) definita positiva, appartengano rispettivamente, come prima e seconda forma quadratica fondamentale, ad una superficie. Ora ha importanza fondamentale per la teoria il dimostrare che queste condizioni sono anche *sufficienti*, ciò che precisiamo nel teorema:

A) *Se per le due date forme differenziali*

$$(13)\qquad \begin{cases} f=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \\ \varphi=D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2 \end{cases}$$

le equazioni di Gauss e Codazzi (III) *e* (IV) *sono soddisfatte, esiste una superficie* S *che le ammette per prima e per seconda forma fondamentale, e la superficie ne risulta individuata di forma a meno di movimenti nello spazio.*

Come si vede, questo teorema rappresenta, in un certo senso, per *le superficie* l'analogo del teorema A) §. 8 per le equazioni intrinseche di una curva, onde le (13) potranno dirsi le *equazioni intrinseche* della superficie.

E di qui si intende che lo studio di tutte le proprietà della superficie potrà farsi per mezzo delle sue due forme fondamentali, da cui resta perfettamente individuata.

§. 68.

Prima dimostrazione del teorema A) (in coordinate generali).

Supponiamo dunque date due forme differenziali quadratiche

$$a_{11}\,du_1^2+2a_{12}\,du_1\,du_2+a_{22}\,du_2^2$$
$$b_{11}\,du_1^2+2b_{12}\,du_1\,du_2+b_{22}\,du_2^2,$$

che, per brevità di scrittura, esprimiamo di nuovo nella notazione dei doppi indici, e siano soddisfatte le equazioni (9) di Codazzi e la (10) di Gauss. Per la superficie cercata (se esiste), che le ammette come forme quadratiche fondamentali, sono incognite le tre funzioni x, y, z e le tre altre X, Y, Z, che debbono in primo luogo soddisfare alle equazioni del secondo ordine (6), e alle (7) del primo ordine. Ma, come insegna la teoria generale, è opportuno in primo luogo ridurre tutto il sistema al *primo* ordine, introducendo quali nuove funzioni incognite le derivate prime di x, y, z; poniamo

$$(14)\qquad \frac{\partial x}{\partial u_i}=P_i\,,\quad \frac{\partial y}{\partial u_i}=Q_i\,,\quad \frac{\partial z}{\partial u_i}=R_i\ (i=1,2)\,,$$

ed il sistema del 1° ordine nelle 12 funzioni incognite x, y, z; X, Y, Z; P_i, Q_i, R_i si scriverà

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u_i}=P_i\,,\quad \dfrac{\partial y}{\partial u_i}=Q_i\,,\quad \dfrac{\partial z}{\partial u_i}=R_i \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial u_k}=\sum_\lambda \left\{\begin{matrix}ik\\\lambda\end{matrix}\right\}P_\lambda+b_{ik}X\,,\quad \dfrac{\partial Q_i}{\partial u_k}=\sum_\lambda \left\{\begin{matrix}ik\\\lambda\end{matrix}\right\}Q_\lambda+b_{ik}Y\,, \\ \dfrac{\partial R_i}{\partial u_k}=\sum_\lambda \left\{\begin{matrix}ik\\\lambda\end{matrix}\right\}R_\lambda+b_{ik}Z \\ \dfrac{\partial X}{\partial u_k}=-\sum_{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}\,b_{k\mu}\,P_\lambda\,,\quad \dfrac{\partial Y}{\partial u_k}=-\sum_{\mu\lambda}A_{\lambda\mu}\,b_{k\mu}\,Q_\lambda\,, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial u_k}=-\sum_{\lambda\,\mu}A_{\lambda\mu}\,b_{k\mu}\,R_\lambda \end{cases}$$

Qui sono date *tutte* le derivate prime delle 12 funzioni incognite, espresse per le funzioni stesse (linearmente ed omogeneamente) e per le variabili indipendenti; si tratta dunque di un sistema di equazioni (lineari omogenee) ai differenziali totali. Ora è facile vedere che il sistema differenziale (15) è completamente integrabile, perchè le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte. E invero per le equazioni della seconda e terza linea in (15) queste condizioni sono già state calcolate al §. 66, e consistono nelle equazioni (9) di Codazzi e nella (10) di Gauss, per ipotesi soddisfatte. Quanto alle condizioni d'integrabilità per le (15) della prima linea, come

$$\frac{\partial P_i}{\partial u_k} = \frac{\partial P_k}{\partial u_i},$$

sono anche soddisfatte, appunto per le (15) della seconda linea; dunque: *il sistema ai differenziali totali* (15) *è completamente integrabile*. Ciò significa che, per quanto riguarda soltanto questo sistema, noi possiamo trovare, in uno ed in un sol modo, le 12 funzioni incognite x, y, z; X, Y, Z; P_i , Q_i , R_i che soddisfino le (15) ed assumano, per un sistema iniziale di valori delle variabili indipendenti, p. e. per $u_1 = u_2 = 0$, valori iniziali arbitrariamente dati. (1)

Ma colle (15) abbiamo tenuto conto di una parte soltanto delle condizioni geometriche del problema, e dobbiamo completarle ora coll'aggiunta di queste nuove

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{S}X^2 = 1, \quad \mathrm{S}X\dfrac{\partial x}{\partial u_i} = 0, \ \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u_i}\dfrac{\partial x}{\partial u_k} = a_{i\,k} \\ \mathrm{S}X\dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k} = b_{i\,k}, \end{cases}$$

le quali esprimono che X, Y, Z sono i coseni di direzione della normale alla superficie, e che le due forme quadratiche fondamentali di quest'ultima sono appunto le due date.

Ora le (16), colle posizioni (14), si scrivono

$$(\alpha)\quad \mathrm{S}X^2 = 1 \qquad (\beta)\quad \mathrm{S}XP_i = 0, \ (\gamma)\quad \mathrm{S}P_i\,P_k = a_{i\,k}$$

$$(\delta)\quad \mathrm{S}X\frac{\partial P_i}{\partial u_k} = b_{i\,k},$$

(1) Si osservi che, essendo il sistema (14) lineare, gli integrali esistono e si serbano *regolari* finchè si mantengono finiti e continui i coefficienti $a_{i\,k}$, $b_{i\,k}$, $\left\{ {i\,k,\ l \atop l} \right\}$.

l'ultima delle quali però, avuto riguardo alle (15) (seconda linea) ed alle (α), (β), risulta già soddisfatta. Restano dunque da aggregare soltanto le (α), (β), (γ) al sistema (15), quali equazioni (in numero di 6) che vincolano *in termini finiti* le 12 funzioni incognite. Si ha così un sistema *misto* ai differenziali totali e se noi proviamo che, derivando le (α), (β), (γ), le equazioni che ne risultano sono conseguenze delle (α), (β), (γ) stesse e delle (15), sarà provato che *basta vincolare i valori iniziali, per* $u_1 = u_2 = 0$, *delle funzioni incognite colle* (α) (β) (γ), dopo di che queste saranno sempre sodisfatte.

Ora: 1° Derivando la (α) rispetto ad u_k si ottiene

$$\mathrm{S}X\frac{\partial X}{\partial u_k} = 0,$$

e questa è una conseguenza delle (β) e delle (15) della terza linea:

2° Derivando la (β) viene

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u_k}P_i + \mathrm{S}X\frac{\partial P_i}{\partial u_k} = 0,$$

cioè per le (15) e per le (α), (β), (γ)

$$-\sum_{\lambda\,\mu} A_{\lambda\mu}\,b_{k\mu}\,a_{\lambda i} + b_{i\,k} = 0$$

e questa è un'identità (1).

3° Derivando infine la (γ) rispetto ad u_l si ottiene

$$\mathrm{S}\frac{\partial P_i}{\partial u_l}P_k + \mathrm{S}\frac{\partial P_k}{\partial u_l}P_i = \frac{\partial a_{i\,k}}{\partial u_l},$$

ed osservando le (15) e le (β) (γ)

$$\sum_\lambda \left\{ {i\,l,\ \lambda \atop l} \right\} a_{k\lambda} + \sum_\lambda \left\{ {k\,l,\ \lambda \atop l} \right\} a_{i\lambda} = \frac{\partial a_{i\,k}}{\partial u_l},$$

e questa è precisamente la formola (A) §. 34 (pag. 82).

Dopo ciò la dimostrazione del teorema A) §. 67 si compie rapidamente. Delle 12 funzioni x, y, z; X, Y, Z: P_i , Q_i , R_i che soddi-

(1) $\displaystyle\sum_{\lambda\,\mu} A_{\lambda\mu}\,a_{\lambda\,i}\,b_{k\mu} = \sum_\mu b_{k\mu}\sum_\lambda A_{\lambda\mu}\,a_{\lambda i} = \sum_\mu \varepsilon_{i\mu}\,b_{k\mu} = b_{i\,k}$

sfano alle (15) ed alle (α), (β), (γ). si riguardino le tre prime

$$x = x(u_1, u_2),\ y = y(u_1, u_2),\ z = z(u_1, u_2)$$

come coordinate di un punto mobile sopra una superficie S. Questa, essendo soddisfatte le (16), avrà appunto X, Y, Z quali coseni di direzione della normale (a causa delle prime due) e le due forme quadratiche fondamentali assegnate, a causa delle seconde due. Dunque *la superficie cercata* S *esiste*. Che poi essa sia unica, a meno di movimenti nello spazio, risulta da che il sistema integrale è unico quando siano dati i valori iniziali delle incognite, però scelti in guisa da soddisfare inizialmente le (α), (β), (γ). Ora la scelta di questi valori equivale appunto a fissare un punto iniziale nello spazio (coi valori iniziali di x, y, z) quale punto $u_1 = u_2 = 0$ della superficie, e l'orientazione del triedro col vertice in questo punto avente per spigoli la normale alla superficie e le tangenti alle due linee coordinate (coi valori iniziali delle X, Y, Z; P_i, Q_i, R_i). Il teorema fondamentale A) è così perfettamente stabilito, e non è fuor di luogo osservare che l'analisi adoperata rende la dimostrazione valida anche estendendo la ricerca dal campo reale al campo complesso.

§. 69.

Seconda dimostrazione del teorema A con riferimento alle linee di curvatura).

Del teorema fondamentale A) diamo ora una seconda dimostrazione, equivalente in sostanza alla precedente, ma che qui (nel caso binario) procede con sviluppi più semplici, riferendosi ad un particolare sistema di coordinate, ciò che è lecito per la natura invariantiva delle equazioni di Gauss e di Codazzi, che rimangono sempre soddisfatte, comunque trasformando le variabili.

Prendiamo a linee coordinate (u, v) quel sistema che riduce simultaneamente le due forme quadratiche fondamentali a forma ortogonale, che rende cioè insieme

$$F = 0 \quad , \quad D' = 0. \tag{17}$$

Questo sistema è generalmente unico e determinato (§. 42), salvo quando la seconda forma fosse proporzionale alla prima, cioè quando

$$E : F : G = D : D' : D'',$$

chè allora la trasformazione qui utilizzata si potrebbe effettuare in infiniti modi (1). Il sistema coordinato così introdotto è quello che fra breve diremo delle *linee di curvatura*.

Sussistendo dunque le (17), le equazioni di Gauss e di Codazzi, calcolate colle formole del quadro A) §. 48, possono scriversi sotto la forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{DD''}{\sqrt{EG}} + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{E}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\dfrac{D''}{\sqrt{G}}, \quad \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\dfrac{D}{\sqrt{E}}. \end{cases} \tag{18}$$

Per la superficie S di cui vogliamo dimostrare l'esistenza (nella ipotesi che le (18) siano soddisfatte), consideriamo in ogni punto (u, v) un triedro trirettangolo, che diremo il *triedro principale*, formato dalle tre direzioni positive: 1° della tangente alla linea v, 2° della tangente alla linea u, 3° della normale alla superficie. Indicandone con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) i rispettivi coseni, avremo

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad X_3 = X, \tag{19}$$

colle analoghe per gli altri due assi. Dalle formole (I), (II) §. 65 (pag. 170), osservando le (17) (oppure dal calcolo diretto) si deduce subito per le tre incognite X_1, X_2, X_3 il sistema differenziale seguente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \dfrac{D}{\sqrt{E}}X_3, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \dfrac{D''}{\sqrt{G}}X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}}X_1, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{D''}{\sqrt{E}}X_2. \end{cases} \tag{20}$$

che è un sistema di equazioni ai differenziali totali (lineare omogeneo), a cui soddisfano egualmente le due terne (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3).

(1) Del resto in questo caso la superficie sarebbe una sfera o un piano (V. più oltre §. 71).

Ora questo sistema (20) gode di queste due proprietà: *a)* è completamente integrabile, perchè le sue condizioni d'integrabilità, in virtù delle (18), sono identicamente soddisfatte.

b) il sistema (20) è *ortogonale*, cioè dette (X_1, X_2, X_3) (X'_1, X'_2, X'_3) due terne qualunque di integrali, distinte ovvero coincidenti, l'espressione

$$\Omega = X_1 X'_1 + X_2 X'_2 + X_3 X'_3$$

è una costante. Difatti osservando le (20), e le analoghe per X'_1, X'_2, X'_3 si trova subito

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0, \text{ da cui } \Omega = \text{cost.}^{te}$$

Ciò premesso [1], prendiamo nove costanti

$$\begin{vmatrix} X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & X_3^{(0)} \\ Y_1^{(0)} & Y_2^{(0)} & Y_3^{(0)} \\ Z_1^{(0)} & Z_2^{(0)} & Z_3^{(0)} \end{vmatrix}$$

che siano i nove coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa (det.$^{te} = +1$), e siano (X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3) le tre terne integrali delle (20) che si riducono p. e. per $u = v = 0$ rispettivamente alle tre terne iniziali date $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)})$, $(Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, Y_3^{(0)})$, $(Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, Z_3^{(0)})$. Risulta dall'osservazione precedente che, per tutti i valori in considerazione di (u, v), il determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

sarà sempre un determinante ortogonale. Di più, per le (20) stesse, le tre espressioni

$$\int E X_1 \, du + \int G X_2 \, dv, \int E Y_1 \, du + \int G Y_2 \, dv, \int E Z_1 \, du + \int G Z_2 \, dv,$$

saranno tre differenziali esatti. Se indichiamo con

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v) \tag{21}$$

[1] Da questo punto il lettore osserverà la stretta analogia del ragionamento con quello svolto al §. 9 per le equazioni intrinseche delle curve.

i tre loro integrali, avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \int E X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \int G X_2, \text{ ecc.},$$

indi

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \; S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \; S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Le equazioni (21) sono dunque le equazioni parametriche di una superficie S, che ha intanto per prima forma fondamentale la data $E\,du^2 + G\,dv^2$. Poichè inoltre

$$S X_3 \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \; S X_3 \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

si vede che X_3, Y_3, Z_3 sono i coseni di direzione della sua normale. In fine dalle equazioni

$$S\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -D, \; S\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \; S\frac{\partial X_3}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -D'',$$

risulta che la sua seconda forma fondamentale è data da

$$D\,du^2 + D''\,dv^2.$$

L'esistenza della superficie richiesta è nuovamente dimostrata; ma anche ne è provata l'unicità, perchè l'arbitrarietà che resta nei valori iniziali di (x, y, z) e dei nove coseni di direzione (X, Y, Z) corrisponde soltanto a situare il punto iniziale $u = 0, v = 0$ della superficie dove si voglia nello spazio, e a dare ivi al triedro principale un'orientazione arbitraria.

Osservazione. La parte del teorema fondamentale che si riferisce all'unicità può anche esprimersi dicendo che: due superficie aventi a comune le due forme fondamentali sono direttamente congruenti, cioè con un movimento si possono sovrapporre pei loro punti corrispondenti (agli stessi valori di u, v).

Date adunque due superficie S, S_1 colle loro rispettive forme quadratiche fondamentali

$$\left\{\begin{array}{ll} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 & E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 & D_1 du_1^2 + 2D_1' du_1 dv_1 + D_1'' dv_1^2 \end{array}\right.$$

riferite a coordinate qualunque (u, v) per S, (u_1, v_1) per S_1, la questione di riconoscere se le due superficie sono sovrapponibili (identiche) si riconduce immediatamente all'altra di esaminare se, con un cangiamento di variabili, si possono cangiare *simultaneamente* le due prime forme nelle due seconde.

§. 70.

Linee di curvatura.

Se si traccia sopra una superficie S una linea qualunque L, le normali alla superficie lungo la linea L formano, in generale, una *rigata non sviluppabile*. Se accade che questa rigata sia sviluppabile, cioè che le normali alla superficie S lungo la linea L siano tangenti ad una curva dello spazio (ovvero passino tutte per un punto), allora si dice che la linea L è *linea di curvatura* per la superficie.

Osserviamo subito che, secondo questa definizione, qualunque linea tracciata sopra una sfera o sopra un piano è linea di curvatura, perchè la corrispondente rigata delle normali è un cono nel caso della sfera, un cilindro nel caso del piano. È dovuta a *Monge* la scoperta fondamentale che sopra ogni altra superficie (non sferica nè piana) esiste soltanto una semplice infinità di linee di curvatura, formanti un doppio sistema *ortogonale* di linee sempre reali, ciò che fra breve dimostreremo. Ma prima osserviamo alcune proprietà delle linee di curvatura che discendono immediatamente dalla loro definizione e dai teoremi sulle evolute delle curve dati al §. 20 (teorema A) e B).

I) *Se due superficie* S, S′ *si tagliano lungo una linea* L *che sia linea di curvatura per ambedue, l' angolo sotto cui si tagliano è costante. Viceversa se* S, S′ *si tagliano sotto un angolo costante, lungo una linea* L *che sia linea di curvatura per* S, *la* L *sarà linea di curvatura anche per* S′.

Siccome poi se una delle due superficie, p. e. S′, è una sfera o un piano, qualunque sua linea è linea di curvatura, abbiamo come corollario:

II) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea sferica o piana di una superficie* S *sia una linea di curvatura per* S *è che la sfera od il piano taglino la superficie sotto angolo costante.*

Così p. e. sopra una qualunque superficie di rotazione sono linee

di curvatura i meridiani ed i paralleli, perchè i loro piani tagliano la superficie sotto angolo costante (ortogonalmente i primi).

Supposto che la linea L sia una linea di curvatura per la superficie S, cerchiamo quale è la condizione *analitica* caratteristica che deve verificarsi lungo L. Se il punto $M \equiv (u, v)$ si muove sopra L, le coordinate u, v e quindi anche le cartesiane x, y, z e i coseni della normale X, Y, Z, sono funzioni di una sola variabile p. e. dell'arco s di L. Ora le normali alla S lungo L sono per ipotesi tangenti ad una curva Γ_1 dello spazio; poniamo che la normale in $M \equiv (x, y, z)$ tocchi Γ_1 in $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e indichiamo con $r = \overline{M_1 M}$ il valore algebrico di questo segmento (dove dunque r è computato positivo o negativo secondo che la direzione da M_1 verso M è quella positiva della normale o l' opposta) Per le coordinate x_1, y_1, z_1 di M_1 abbiamo

$$(22) \qquad x_1 = x - rX \ , \ y_1 = y - rY \ , \ z_1 = z - rZ \ (^1) .$$

Se queste si derivano rapporto ad s, si debbono ottenere per ipotesi quantità proporzionali ad X, Y, Z, ed avremo quindi

$$\frac{dx}{ds} - r\frac{dX}{ds} - \frac{dr}{ds}X = \lambda X$$

$$\frac{dy}{ds} - r\frac{dY}{ds} - \frac{dr}{ds}Y = \lambda Y$$

$$\frac{dz}{ds} - r\frac{dZ}{ds} - \frac{dr}{ds}Z = \lambda Z,$$

essendo λ un fattore di proporzionalità. Ma moltiplicando le equazioni superiori per X, Y, Z e sommando segue subito $\lambda = -\frac{dr}{ds}$, e resta quindi

$$(23) \qquad \frac{dx}{ds} = r\frac{dX}{ds} \ , \ \frac{dy}{ds} = r\frac{dY}{ds} \ , \ \frac{dz}{ds} = r\frac{dZ}{ds} .$$

Viceversa se, spostandosi lungo L, si ha

(1) Propriamente con queste formole resta escluso il caso che le normali lungo L sieno parallele (formino un cilindro) chè allora r e x_1, y_1, z_1 sarebbero infinite. Ma in tal caso sarebbero nulli lungo L i differenziali dX, dY, dZ e sussisterebbero sempre le proporzioni caratteristiche (24) seguenti nel testo, con $\frac{1}{r} = 0$.

$$(24) \qquad dx = r\,dX\,, \quad dy = r\,dY\,, \quad dz = r\,dZ\,,$$

con r conveniente fattore di proporzionalità, le formole (22) definiscono una curva Γ_1 (che può anche ridursi ad un punto) a cui le normali lungo L sono tangenti e però L è linea di curvatura. Come si è ora avvertito, può anche darsi che Γ_1 si riduca ad un punto (x_1, y_1, z_1 siano costanti) e la rigata delle normali sia un cono. Ciò avviene allora ed allora soltanto quando risulta $\lambda = -\dfrac{dr}{du} = 0$ cioè quando r è costante.

Concludiamo quindi: ***Condizione necessaria e sufficiente affinchè la linea L sia di curvatura è che lungo di essa sussistano le proporzioni***

$$(24^*) \qquad dx : dy : dz = dX : dY : dZ\,.$$

Osserviamo ancora che dalle formole (24) discende di nuovo facilmente il teorema 1), sopra dedotto dalle proprietà delle evolute. Se infatti due superficie S, S′ si tagliano lungo una linea L comune di curvatura, per le (24) avremo lungo L

$$r\,dX = r'\,dX'\,, \quad r\,dY = r'\,dY'\,, \quad r\,dZ = r'\,dZ'$$

(le quantità coll'accento riferendosi a S′). Ne segue $r\,S\,X\,dX = r'\,S\,X\,dX'$, e poichè la prima quantità $S\,X\,dX$ è nulla, avremo $S\,X\,dX' = 0$, indi anche $S\,X'\,dX = 0$ e perciò $d\,S\,X\,X' = 0$, vale a dire

$$X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z' = \text{cost}^{te} \text{ (lungo L)},$$

il che prova appunto che S, S′ si tagliano lungo L sotto angolo costante. Viceversa se $S\,X\,X' = \text{cost}^{te}$ e sussistono le (24), si ha insieme lungo L

$$S\,X'\,dX = 0\,, \quad S\,X'\,dX + S\,X\,dX' = 0\,,$$

e dalle coppie di equazioni

$$\begin{cases} S\,X\,dX = 0 \\ S\,X'\,dX = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S\,X\,dX' = 0 \\ S\,X'\,dX' = 0 \end{cases}$$

seguono le proporzioni

$$dX : dY : dZ = dX' : dY' : dZ'\,.$$

§. 71.

Linee di curvatura in coordinate curvilinee.

Le condizioni (24), caratteristiche per le linee di curvatura, si scrivono in coordinate curvilinee

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv = r\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial X}{\partial v}\,dv\right) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv = r\left(\dfrac{\partial Y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial Y}{\partial v}\,dv\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,dv = r\left(\dfrac{\partial Z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial Z}{\partial v}\,dv\right); \end{cases}$$

ma si riducono in realtà a due sole indipendenti, perchè moltiplicandole ordinatamente per X, Y, Z e sommando, si ottiene un'identità. A questo sistema possiamo per ciò sostituire le due che si ottengono moltiplicando una prima volta per $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$, una seconda volta per $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ ed ogni volta sommando, ciò che dà, per le posizioni fondamentali (4) §. 44 (pag. 111) e (3) §. 64 (pag. 166):

$$(25) \qquad \begin{cases} E\,du + F\,dv = -r\,(D\,du + D'\,dv) \\ F\,du + G\,dv = -r\,(D'\,du + D''\,dv)\,. \end{cases}$$

Dunque: ***Affinchè una linea sia linea di curvatura è necessario e sufficiente che i differenziali du, dv presi spostandosi lungo la linea verifichino queste equazioni (25), dove r è un fattore di proporzionalità (col significato geometrico dato nel paragrafo precedente).***

Se eliminiamo r fra le (25) otteniamo: ***l'equazione differenziale delle linee di curvatura***

$$(V) \qquad \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv\,, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv\,, & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

data dall'eguagliare a zero il Jacobiano delle due forme fondamentali, o sotto forma sviluppata

$$(V^*) \quad (E\,D' - F\,D)\,du^2 + (E\,D'' - G\,D)\,du\,dv + (F\,D'' - G\,D')\,dv^2 = 0,$$

Salvo dunque il caso che il Jacobiano identicamente si annulli, cioè sussistano le proporzioni

$$D : D' : D'' = E : F : G , \tag{26}$$

nel qual caso ogni linea è linea di curvatura, per ogni altra superficie S esiste uno ed un solo sistema doppio ortogonale di linee di curvatura (sempre reali). (Cf. §. 42). Per quanto già si è detto, il caso eccezionale in cui si verificano le proporzioni (26) ha luogo certamente per la sfera e per il piano; ma è anche facile vedere, sia analiticamente, sia geometricamente, che non si presenta per alcun'altra superficie. Difatti [1] se sussistono le (26), poniamo

$$D = \lambda E , \quad D' = \lambda F , \quad D'' = \lambda G$$

con λ fattore di proporzionalità. Se $\lambda = 0$, cioè $D = D' = D'' = 0$, le formole fondamentali (II) §. 65 (pag. 170) dimostrano che X, Y, Z sono costanti, la normale ha una direzione fissa nello spazio e la superficie è un piano [2]. Se $\lambda \neq 0$, sarà però una costante [3] perchè sostituendo i valori $\lambda E, \lambda F, \lambda G$ per D, D', D'' nelle equazioni (IV) di Codazzi, a cui soddisfano pure E, F, G troviamo

$$\left\{ \begin{aligned} E\frac{\partial\lambda}{\partial v} - F\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= 0 \\ F\frac{\partial\lambda}{\partial v} - G\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= 0 , \end{aligned} \right.$$

(1) Alla dimostrazione analitica del testo aggiungiamo qui la seguente geometrica assai semplice, fondata sul fatto che, sussistendo le (26), ogni linea sarebbe di curvatura. Se consideriamo due punti qualunque M, M' (di una regione regolare) della superficie e per la normale in M e per M' facciamo passare un piano questo produce in S per ipotesi una sezione L (normale) che è linea di curvatura. Per conseguenza le normali lungo la linea piana L formano una sviluppabile e giacendo la prima normale nel piano della curva, anche tutte le altre vi giacciono in particolare quella per M'. Dunque due qualunque normali della superficie sono complanari e non potendo giacere tutte in un piano, passano tutte per un punto. Se questo è proprio la S è una sfera, se improprio un piano.

(2) Facciasi p. e. $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$, da cui $\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dv} = 0$ o $x = \text{cost.}^{te}$

(3) Invece di procedere come nel testo, si può osservare che le (II) §. 65 diventano $\frac{\partial X}{\partial u} = -\lambda\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v} = -\lambda\frac{\partial x}{\partial v}$, e dalle condizioni d'integrabilità $\frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right)$ si deduce subito $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0$.

da cui $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0$. Poniamo dunque $\lambda = -\frac{1}{R}$ con R costante (non nulla) e dalle citate (II) §. 65 avremo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= R\frac{\partial X}{\partial u} , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = R\frac{\partial Y}{\partial u} , \quad \frac{\partial z}{\partial u} = R\frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= R\frac{\partial X}{\partial v} , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = R\frac{\partial Y}{\partial v} , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = R\frac{\partial Z}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

e integrando

$$x = RX + a , \quad y = RY + b , \quad z = RZ + c \quad (a, b, c \text{ costanti}),$$

da cui $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, equazione di una sfera di raggio R.

Concludiamo dunque: *Su qualunque superficie* S *le linee di curvatura esistono in un doppio sistema ortogonale, che è indeterminato solo nel caso della sfera o del piano, dove ogni linea è linea di curvatura.*

Ritornando al caso generale, per ogni punto M di S passano due linee di curvatura L_1, L_2 che ivi s'incrociano ad angolo retto. La normale in M tocca lo spigolo di regresso della sviluppabile delle normali lungo L_1 in un punto M_1, che dicesi il *centro di curvatura* della superficie in M, relativo alla linea di curvatura L_1. Similmente abbiamo, sulla normale in M, un secondo centro di curvatura M_2 relativo alla seconda linea L_2. I valori algebrici dei segmenti

$$r_1 = \overline{M_1 M} , \quad r_2 = \overline{M_2 M} \ (^1)$$

portano, per una ragione che ora vedremo, il nome di *raggi principali di curvatura* della superficie in M e le loro inverse $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ quello di *curvature principali*.

Ora se dalle (25) eliminiamo *du, dv* resta per r l'equazione

$$\begin{vmatrix} E + rD , & F + rD' \\ F + rD' , & G + rD'' \end{vmatrix} = 0 ,$$

(1) Va ricordato che, per le nostre convenzioni, ciascun raggio principale di curvatura è computato positivo o negativo secondo che la direzione che va *dal relativo centro di curvatura al piede* M *della normale* procede nel verso positivo o negativo di questa.

cioè: I raggi principali di curvatura della superficie sono le radici r_1, r_2 della equazione di secondo grado

$$(VI)\quad (D\,D'' - D'^2)\,r^2 + (E\,D'' + G\,D - 2\,F\,D')\,r + E\,G - F^2 = 0\,.$$

§. 72.

Le curvature delle linee uscenti da un punto sulla superficie.

Per esaminare come è *incurvata* una superficie nell'intorno di un suo punto regolare M noi consideriamo naturalmente le infinite linee tracciate sulla superficie per il punto ed esaminiamo la legge di distribuzione delle (prime) curvature di queste linee.

Sia Γ una qualunque di esse, lungo la quale u, v; x, y, z sono funzioni dell'arco s di Γ (Cf. §. 45). Pei coseni α, β, γ della sua tangente abbiamo

$$(27)\quad \alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds},\quad \beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds},\quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Indichiamo con σ l'angolo fra o e π che la direzione positiva (ξ, η, ζ) della sua normale principale forma colla direzione positiva (X, Y, Z) della normale alla superficie, onde

$$\cos\sigma = S\,X\,\xi.$$

Dalle formole di Frenet segue

$$S\,X\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\sigma}{\rho},$$

ed osservando le (27) si ha subito

$$(28)\quad \frac{\cos\sigma}{\rho} = \frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{ds^2} = \frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Questa formola dimostra intanto che la prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ della curva Γ uscente da M sulla superficie dipende da questi due soli elementi: 1° dalla direzione secondo cui Γ esce da M (dal rapporto $\frac{dv}{du}$), 2° dall'angolo σ, complemento dell'angolo d'inclinazione del suo piano osculatore sul piano tangente alla superficie (1). Ora per la normale in M alla superficie e per la tangente in M alla Γ facciamo passare un piano che produrrà in S una sezione C: *la sezione normale tangente a* Γ. La prima curvatura $\frac{1}{\rho'}$ (2) di questa sezione normale sarà data dalla formola (28) stessa, ove però sarà da farsi $\sigma = 0$, $\cos\sigma = 1$ se la concavità di C è rivolta verso la direzione positiva della normale, e invece $\sigma = \pi$, $\cos\sigma = -1$ nel caso contrario. In *ogni* caso avremo

$$\rho = \rho'\,|\cos\sigma|\quad (3),$$

formola che, enunciata in parole, dà il teorema di Meusnier: *Il raggio di prima curvatura di una qualunque curva* Γ *per* M *eguaglia il raggio di curvatura della relativa sezione normale tangente in M a* Γ *moltiplicato pel coseno dell'angolo che il piano della sezione fa col piano osculatore di* Γ.

Sotto altra forma si può anche enunciare così:

Il centro di curvatura di Γ *è la proiezione (ortogonale) sul piano osculatore del centro di curvatura della sezione normale tangente a* Γ.

Con questi risultati lo studio che ci siamo proposti si riduce ad esaminare come variano le curvature delle sezioni normali $\frac{1}{\rho'}$ date dalla formola

$$\frac{1}{\rho'} = \pm\frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

valendo il segno superiore per $\sigma = 0$, l'inferiore per $\sigma = \pi$. In ogni caso questo valore di $\frac{1}{\rho'}$ è positivo, e perciò

(1) La curva Γ ha quindi la stessa curvatura della sezione piana prodotta in S dal suo piano osculatore.

(2) Ricordiamo che fino ad ora (secondo le convenzioni del Cap. I) le prime curvature delle curve si contano in valore assoluto e quindi $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}$ sono positive.

(3) Col segno $|A|$ indichiamo il valore assoluto di una quantità reale (o il suo modulo se è complessa).

$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 > 0$ se $\vartheta = 0$, e invece

$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 < 0$ se $\vartheta = \pi$.

Ma siccome nel caso attuale i varii raggi di curvatura delle sezioni normali sono misurati tutti sulla normale in M ed i relativi centri M' di curvatura possono trovarsi dall'una o dall'altra parte di M, conviene meglio attribuire loro un valore assoluto ed un segno e noi indicheremo con $R = \overline{M'M}$ il valore algebrico di questo segmento, che sarà dunque positivo se la direzione da M' verso M è quella positiva della normale (cioè per $\vartheta = \pi$), negativo nel caso contrario ($\vartheta = 0$). In ogni caso adunque, siccome $D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ è negativo nel primo caso, positivo nel secondo, avremo pel valore algebrico di R

$$\frac{1}{R} = -\frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{29}$$

§. 73.

Formola di Eulero per le curvature delle sezioni normali.

La formola (29) assegna il valore della curvatura $\frac{1}{R}$ della sezione normale, nella giacitura fissata dal rapporto $\frac{dv}{du}$, come quoziente delle due forme quadratiche fondamentali delle quali la prima (al denominatore) è definita. L'esame della legge di variazione di $\frac{1}{R}$ al variare del rapporto $\frac{dv}{du}$ si compie quindi nel modo più semplice cogli stessi mezzi usati ai §§. 52, 53 nel problema analogo delle rappresentazioni. Prendiamo a linee coordinate (u, v) le linee di curvatura, riducendo così simultaneamente le due forme a forma ortogonale. Indichiamo con r_1 il raggio principale di curvatura relativo alla linea $u = \text{cost.}^{te}$, con r_2 quello della $v = \text{cost.}^{te}$. Avremo quindi, a causa delle (24)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = r_2\frac{\partial X}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u} = r_2\frac{\partial Y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial u} = r_2\frac{\partial Z}{\partial u} \\ &\qquad\qquad (F = 0) \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = r_1\frac{\partial X}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = r_1\frac{\partial Y}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = r_1\frac{\partial Z}{\partial v}\ (^1), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

e quindi pei valori di

$$D = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},\ D' = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\ D'' = -S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

abbiamo

$$D = -\frac{E}{r_2},\ D' = 0,\ D'' = -\frac{G}{r_1}. \tag{31}$$

La (29) diventa così

$$\frac{1}{R} = \frac{E}{r_2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{G}{r_1}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

e indicando con θ l'angolo che la traccia del piano della sezione normale fa colla direzione della $v = \text{cost.}^{te}$ (Cf. §. 53) ci dà la *formola d'Eulero*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1}. \tag{32}$$

Intanto si vede di qui che r_1, r_2 *sono i raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti alle linee di curvatura.* Queste si dicono *sezioni principali* e piani principali i loro piani. Così, come già abbiamo detto al §. 71, r_1, r_2 sono chiamati raggi principali di curvatura, e i due punti M_1, M_2 sulla normale, centri di curvatura delle sezioni principali, i centri di curvatura della superficie in M.

Lasciamo dapprima da parte il caso che una delle due curvature principali sia nulla nel punto M (che allora dicesi parabolico) ed esaminiamo come varia la curvatura $\frac{1}{R}$ della sezione normale quando

(1) Queste formole sono citate comunemente come formole di *Rodriguez*.

si fa rotare il piano della sezione. Separiamo i due casi che $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ abbiano egual segno ovvero segno contrario.

1° *caso*. Possiamo supporre che il segno comune di r_1, r_2 sia il positivo. Nel piano tangente in M alla superficie stabiliamo un sistema ξ, η di assi cartesiani ortogonali nelle direzioni principali $u = \text{cost.}^{te}$ e $v = \text{cost.}^{te}$ ed ivi tracciamo l'ellisse d'equazione (Cf. §. 53).

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1 \tag{33}$$

Un semidiametro di questa ellisse, inclinato dell'angolo θ sull'asse η (sulla tangente alla v) ha una lunghezza ρ data dalla formola

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{r_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_2},$$

la quale formola s'identifica colla (32) d'Eulero se si pone $R = \rho^2$. Dunque: *Il quadrato di ogni semidiametro della ellisse* (33) *eguaglia il raggio di curvatura della sezione normale il cui piano è condotto pel diametro stesso.* Per questa ragione l'ellisse (33) si dice *l'ellisse indicatrice* delle curvature. È da notarsi che se $r_1 = r_2$ l'ellisse indicatrice diventa un circolo e tutte le sezioni normali per M hanno lo stesso raggio di curvatura; in questo caso il punto dicesi un *punto circolare* o *ombelico*. Si dimostra subito che:

L'unica superficie (reale) a punti tutti circolari è la sfera. Difatti in un punto circolare la seconda forma quadratica è proporzionale alla prima, e se tutti i punti sono circolari, allora

$$D : D' : D'' = E : F : G$$

ciò che ha luogo solo per la sfera (§. 71).

2° *caso*. Se r_1, r_2 hanno segno contrario, p. e. r_1 positivo, r_2 negativo poniamo $r_1 = a^2$, $r_2 = -b^2$ e consideriamo nel piano tangente l'insieme delle due iperbole coniugate

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \pm 1, \tag{34}$$

e col sistema di queste due iperbole sarà conseguita la rappresentazione geometrica stessa, come prima colla ellisse (33), cioè sarà

$R = \pm \rho^2$, secondo che il semidiametro ρ ha una effettiva lunghezza per una delle iperbole o per la coniugata.

L'ellisse (33) nel primo caso, o l'insieme delle due iperbole coniugate (34) nel secondo, costituiscono la così detta *indicatrice di Dupin*, dal nome del geometra che primo diede questa interpretazione geometrica alla formola (32) d'Eulero.

Osserviamo che nel primo caso, volgendo tutte le sezioni normali da una stessa parte della normale la loro concavità, la superficie nell'intorno di M giace tutte da una parte del piano tangente (1). Nel secondo caso invece, le sezioni normali si scindono (corrispondentemente alle due iperbole indicatrici), in due serie che volgono le loro concavità in verso contrario e la superficie (nell'intorno del punto M) si divide in quattro settori, due dei quali (opposti al vertice) stanno da una parte, gli altri due dalla parte opposta del piano tangente. L'attraversamento del piano tangente ha luogo quando il piano normale passa per l'uno o per l'altro asintoto dell'iperbola ed allora per la corrispondente sezione, avendosi $\frac{1}{R} = 0$, si ha ge-

(1) Ai risultati nel testo si giunge anche brevemente nel modo seguente che riconduce, sotto un altro aspetto, all'indicatrice di Dupin. Si calcoli perciò la distanza δ di un punto $(u+h,\ v+k)$ nell'intorno di M, dove h, k si riguarderanno come infinitesimi del 1.° ordine, dal piano tangente in $M \equiv (u, v)$. Abbiamo $\delta = S \times \Delta x$, e siccome

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} h + \frac{\partial x}{\partial v} k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} h k + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} k^2\right),$$

(trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al secondo), risulta

$$\delta = \frac{1}{2}(D h^2 + 2 D' h k + D'' k^2)$$

e il segno di δ dipende da quello della forma quadratica nel secondo membro. Se $D D'' - D'^2 > 0$ la forma è definita (punto ellittico) e δ conserva sempre lo stesso segno; se invece $D D'' - D'^2 < 0$ (punto iperbolico) la forma prende valori positivi e negativi quindi anche δ.

Se in questa formola fissiamo δ, veniamo a considerare nella superficie la sezione prodotta da un piano parallelo al piano tangente e infinitamente vicino. Allora l'equazione

$$D h^2 + 2 D' h k + D'' k^2 = 2\delta$$

viene a rappresentare nel primo caso, e per un conveniente segno di δ, l'ellisse indicatrice, nel secondo caso, dando i due segni a δ, le due iperbole. Se infine $D D'' - D'^2 = 0$ (punto parabolico) l'indicatrice si scinde in due rette parallele.

neralmente un *flesso*. Queste due direzioni nel piano tangente dicon si perciò *direzioni asintotiche*.

In questa discussione abbiamo lasciato da parte il caso in cui una delle due curvature principali si annulli, p. e. $\frac{1}{r_2}$. Vale sempre del resto anche in questo caso la formola d' Eulero che diventa

$$\frac{1}{R} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r_1},$$

e le sezioni normali volgono ancora tutte da una parte la loro concavità, salvo una, corrispondente a $\theta = 0$, per la quale $\frac{1}{R} = 0$ e la sezione attraversa (generalmente) il piano tangente.

In questo caso il punto M dicesi *parabolico* e l' indicatrice di Dupin si scinde in due rette parallele (Cf. nota). I punti parabolici di una superficie (se esistono) formano in generale una linea, le superficie a punti tutti parabolici essendo, come fra poco dimostreremo, esclusivamente le sviluppabili.

§. 74.

Curvatura media e curvatura totale.

Nella discussione precedente si è visto che il modo d' incurvamento di una superficie S in un punto M dipende dai valori dei *due* raggi principali r_1, r_2 di curvatura nel punto; e viceversa dando questi due valori, ossia quelli delle due curvature principali $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ si conosce come la superficie è incurvata. Naturalmente, in luogo di dare $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$, si possono dare due loro combinazioni indipendenti da cui valori quelli di $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ risultino determinati. Le più importanti di tali combinazioni sono il prodotto e la somma delle due curvature principali, che indicheremo costantemente con

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}, \quad H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

La prima porta il nome di *curvatura totale* o assoluta (di Gauss) ed ha la massima importanza nelle questioni di geometria; la seconda si chiama la *curvatura media* della superficie e si presenta particolarmente nelle applicazioni di fisica matematica (1). Se ricordiamo che, in coordinate curvilinee qualunque, i raggi principali di curvatura sono le radici della equazione di secondo grado (VI) §. 71 (pag. 190), ne deduciamo pei valori generali delle due curvature K, H le espressioni seguenti

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} K = \dfrac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \\ H = \dfrac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}, \end{cases}$$

ove i secondi membri sono appunto i due *invarianti assoluti* del sistema delle due forme fondamentali (§. 42).

Per la curvatura totale K, dalla equazione (III), di Gauss §. 67 (pag. 174) si deduce il teorema di fondamentale importanza: *La curvatura totale di una superficie eguaglia l' invariante differenziale K (la curvatura) della sua prima forma fondamentale.*

Questa proprietà della curvatura di Gauss *di dipendere soltanto dai coefficienti del suo* ds^2 è quella che dà alla curvatura stessa l'importanza preponderante in tutte le applicazioni geometriche.

Essa si designa per ciò semplicemente col nome di *curvatura*. La curvatura K è positiva nei punti a indicatrice ellittica (punti ellit-

(1) Un' altra combinazione delle curvature principali che si può osservare è la somma, o la semisomma C dei loro quadrati,

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{1}{2}(H^2 - 2K),$$

la curvatura di Casorati (Acta Mathem. T. 14). Questo autore la propone come preferibile alla Gaussiana pel fatto che si annulla soltanto per il piano, conformandosi così di più al linguaggio comune, ed è suscettibile anch' essa di una semplice interpretazione geometrica. Ma non sembra che le ricerche di geometria infinitesimale istituite fin qui possano giustificare una tale preferenza. La proprietà di non annullarsi che per il piano conviene ad infinite altre combinazioni come $\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}$ ecc. e d' altronde resta sempre il disaccordo col linguaggio comune, ove si riguardano p. e. come di ben diversa natura le curvature in un punto P ellittico di una superficie S e in un altro P' iperbolico di un' altra superficie S', mentre le curvature di Casorati nei due punti possono benissimo riuscire eguali.

tici), negativa in quelli a indicatrice iperbolica (punti iperbolici). In generale K è una funzione continua di u, v sulla superficie e può essere positiva in una regione, negativa in un'altra, sicchè le due regioni confinano ad una linea di punti *parabolici* nei quali $K = 0$.

Ed ora dimostriamo il teorema già accennato alla fine del paragrafo precedente:

Le superficie a curvatura Gaussiana nulla (a punti tutti parabolici) sono tutte e sole le superficie sviluppabili.

Che per ogni sviluppabile sia $K = 0$ risulta subito dall'osservare che, pei teoremi sulle evolute delle curve (§. 20), le linee di curvatura di una sviluppabile sono le generatrici e le loro trajettorie ortogonali (evolventi dello spigolo di regresso) e quindi delle due curvature principali, quella relativa ad una generatrice (lungo la quale tutte le normali sono parallele), è sempre nulla.

Per dimostrare l'inversa supponiamo che per la superficie S sia sempre $K = 0$, indi

$$D D'' - D'^2 = 0,$$

e prendiamo a linee coordinate le linee di curvatura (u, v), che formano sempre un sistema unico e determinato (salvo quando la superficie è un piano).

Sarà quindi anche $D' = 0$, e per la precedente $DD'' = 0$, onde D o D'' sarà nullo. Poniamo che si abbia

$$D = 0, \quad D' = 0,$$

e dalle formole fondamentali (II) §. 65 (pag. 170) risulterà

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

cioè i coseni di direzione della normale sono funzioni di v soltanto, ossia geometricamente: ***Lungo una linea di curvatura $v = cost.^{te}$ le normali alla superficie sono parallele.*** Proviamo ora facilmente che le $v = cost.^{te}$ sono linee rette, osservando che i coseni di direzione della loro tangente

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

soddisfano alle due equazioni

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}X + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}Y + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}Z = 0 \quad (\text{o } S X \frac{\partial x}{\partial u} = 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dX}{dv} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{dY}{dv} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{dZ}{dv} = 0 \quad (\text{o } D' = 0),$$

onde sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{dX}{dv} & \frac{dY}{dv} & \frac{dZ}{dv} \end{vmatrix},$$

e per ciò essi stessi funzioni di v soltanto. Dunque per ogni linea $v = cost.^{te}$ la tangente ha una direzione invariabile e la linea è quindi una retta. Così adunque la nostra superficie S è una rigata, ed ha per linee di curvatura le generatrici $v = cost.^{te}$ Il teorema finale B) del §. 20 sulle evolute (pag. 47) dimostra ora immediatamente che la S è sviluppabile.

§. 75.

Tangenti coniugate secondo Dupin.

Consideriamo una superficie S, non sviluppabile, nella quale dunque $DD'' - D'^2 \neq 0$, cioè la seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

è a discriminante non nullo. Per quanto si è visto in generale al §. 47, a questa forma quadratica (irriducibile) sarà subordinata in ogni punto $M \equiv (u, v)$ di S un'involuzione di elementi lineari, o di tangenti nel punto M secondo la formola

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0 \tag{35}$$

e caratterizzata dalla proprietà che i raggi doppi della involuzione (reali ed immaginarii) sono quelli determinati dalla equazione quadratica

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Ora queste ultime direzioni corrispondono alle direzioni *asintotiche* della conica indicatrice di Dupin (§. 73), e per ciò: *L'involuzione di tangenti subordinata in ogni punto (u, v) della superficie alla seconda forma fondamentale coincide colla involuzione dei diametri coniugati della indicatrice di Dupin* (1).

Diremo che due tangenti in un punto M della superficie sono *tangenti coniugate* nel senso di Dupin, quando formano una coppia dell'involuzione (35), ossia segnano una coppia di diametri coniugati nell'indicatrice.

Un'altra definizione equivalente delle tangenti coniugate, nella quale non occorre la nozione d'indicatrice, e che ha molta importanza nelle applicazioni, si ottiene dalle considerazioni seguenti (Dupin).

Consideriamo una linea qualunque L tracciata sulla superficie S e la semplice infinità di piani tangenti alla superficie S nei punti di L. Questi piani inviluppano una sviluppabile Σ di cui andiamo a cercare le generatrici g. Lungo L x, y, z, X, Y, Z sono funzioni di un parametro p. e. dell'arco s di L, e scrivendo l'equazione del piano tangente in (x, y, z)

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0, \tag{36}$$

(dove qui ξ, η, ζ indicano coordinate correnti) ne determineremo la caratteristica, cioè la generatrice g, associando (§. 12) alla (36) l'equazione ottenuta derivando rapporto ad s, il che (essendo $SX\frac{dx}{ds} = 0$) dà

$$(\xi - x)\frac{dX}{ds} + (\eta - y)\frac{dY}{ds} + (\zeta - z)\frac{dZ}{ds} = 0. \tag{36*}$$

Questa equazione dà un secondo piano che passa ancora pel punto $M \equiv (x, y, z)$, onde si vede che la generatrice g esce dal punto M, e per ciò: *la sviluppabile* Σ *è circoscritta alla superficie* S *lungo la linea* L. Se indichiamo con $\delta x, \delta y, \delta z$ gli accrescimenti delle coordinate spostandosi sulla superficie nel senso della tangente g, questi sono proporzionali da una parte ai coseni della direzione g e d'altra parte, per le (36), (36*), ai minori della matrice $\begin{matrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{matrix}$, cioè

$$\delta x : \delta y : \delta z = \begin{vmatrix} Y & Z \\ dY & dZ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z & X \\ dZ & dX \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix}.$$

Di qui si ricava

$$\delta x\, dX + \delta y\, dY + \delta z\, dZ = 0, \tag{37}$$

e da questa, unita alla equazione

$$\delta x\, X + \delta y\, Y + \delta z\, Z = 0,$$

seguono di nuovo le proporzioni precedenti. Nella (37) i simboli d sono differenziali presi nel senso della curva L e i δ differenziali nel senso della tangente g. Scrivendo la (37) in coordinate curvilinee

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right) = 0,$$

essa diventa

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0,$$

e coincide precisamente colla (35). Dunque: *Nella sviluppabile* Σ *circoscritta ad una superficie* S, *lungo una qualunque linea* L, *le generatrici uscenti da ogni punto* M *di* L *sono le tangenti coniugate alle tangenti di* L (1) Questa proprietà dà evidentemente una nuova definizione delle tangenti coniugate; e che le coppie di tangenti coniugate uscenti da un punto M formino *un'involuzione* risulta dall'essere la relazione caratteristica (35) bilineare simmetrica in (du, dv) $(\delta u, \delta v)$.

Un doppio sistema di linee tracciato sulla superficie si dirà un *sistema coniugato* di questa, se in ogni punto del reticolato le direzioni delle due linee dei due sistemi che vi passano sono coniugate. Dalla condizione generale (35) per due elementi coniugati (ponendovi

(1) Oppure riferendosi alla linea di curvatura (u, v) si scriva la (35) sotto la forma normale

$$\frac{E}{r_2}du\,\delta u + \frac{G}{r_1}dv\,\delta v = 0$$

e si osservi che i due elementi lineari ds, δs segnano per ciò le direzioni di due diametri coniugati nell'indicatrice (33) o (34).

(1) In particolare se la linea L è di curvatura (e solo in questo caso) essa è traiettoria ortogonale delle generatrici sulla sviluppabile circoscritta. Ciò segue del resto anche subito dalla definizione stessa delle linee di curvatura (§. 70) e dalle proprietà delle evolute delle curve (Teorema B) §. 20).

$du = 0$, $\delta v = 0$) segue subito; *Condizione necessaria e sufficiente affin chè il sistema coordinato (u, v) sia coniugato è che si abbia* $D' = 0$. E si osservi che il doppio sistema delle linee di curvatura è l'unico che sia insieme ortogonale e coniugato.

In fine, come caso particolare del risultato al §. 47, si ha che: *un qualunque sistema* ∞^1 *di linee* $\varphi(u, v) = \text{cost.}^{to}$ *tracciato sulla superficie fa parte di un doppio sistema coniugato, quelle del secondo sistema essendo le linee integrali della equazione differenziale*

$$(38) \qquad \left(D\frac{\partial\varphi}{\partial v} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial v} - D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0.$$

§. 76.

Linee asintotiche.

Una linea A tracciata sulla superficie S dicesi *linea asintotica* se in ogni suo punto la tangente della linea coincide colla propria coniugata, cioè la linea è asintotica quando segue in ogni suo punto la direzione di uno degli asintoti della indicatrice di Dupin. Siccome le direzioni asintotiche in ogni punto corrispondono alle radici in $\frac{dv}{du}$ della equazione

$$(VIII) \qquad D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0,$$

vediamo che: *Le linee asintotiche sono le linee integrali della equazione differenziale* (VIII), *ottenuta eguagliando a zero la seconda forma fondamentale.* Come le linee di curvatura, le linee asintotiche formano un doppio sistema (in generale non ortogonale); però mentre le prime sono sempre reali, le asintotiche invece sono reali soltanto nella regione dei punti iperbolici ($K < 0$ o $D\,D'' - D'^2 < 0$), immaginarie in quella dei punti ellittici ($K > 0$, o $D\,D'' - D'^2 > 0$). Soltanto per le sviluppabili ($D\,D'' - D'^2 = 0$) avviene che i due sistemi di linee asintotiche coincidono (nelle generatrici della sviluppabile) (4).

Si osservi che la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo un' asintotica A (supposta non rettilinea) è quella appunto delle tangenti alla linea A e per conseguenza il piano osculatore di A in ogni punto coincide col piano tangente della superficie. Viceversa se in ogni punto di una curva A della superficie il piano tangente coincide col piano osculatore della linea, la sviluppabile circoscritta è quella delle tangenti alla A, la quale è per ciò una linea asintotica. Dunque: *Le linee asintotiche di una superficie sono caratterizzate dalla proprietà di avere in ogni punto per piano osculatore il piano tangente alla superficie.*

(4) Una linea asintotica, arrivando alla linea parabolica limite delle due regioni, si riflette, ivi formando una cuspide ovvero toccando la linea parabolica.

In quanto precede abbiamo ammesso che l'asintotica A non fosse una linea retta, ed allora le proprietà segnalate nell'ultimo teorema seguono anche subito dalla formola generale (28) §. 72

$$\frac{\cos\sigma}{\rho} = \frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

perchè, essendo $\frac{1}{\rho} = 0$, se si annulla $D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$, si annulla anche $\cos\sigma$, cioè $\sigma = \frac{\pi}{2}$, e viceversa, il che significa che la normale principale della linea è nel piano tangente, il quale coincide col piano osculatore.

Ed ora a complemento di queste proprietà osserviamo che: *Se la superficie S possiede una retta r* (non singolare), *questa retta è in effetto una sua linea asintotica; essendo soddisfatta lungo di essa l'equazione differenziale* (VIII) *delle asintotiche.* Per vedere questo nel modo più semplice prendiamo la retta r per asse delle z e al tempo stesso per una delle linee coordinate, p. e. per la $v = 0$. Allora abbiamo

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad Z = 0\,, \quad \text{per } v = 0\,,$$

indi anche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{per } r = 0,$$

e però

$$D = X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0 \quad \text{per } v = 0.$$

Lungo la retta r essendo dunque $dv = 0$, $D = 0$ l'equazione differenziale (VIII) è soddisfatta.

Ed ora, se si osserva che il piano osculatore della retta è per sè indeterminato, basterà considerare quale piano osculatore di r in ogni suo punto il piano tangente della superficie per avere ristabilita, anche per le asintotiche rettilinee, la proprietà caratteristica delle altre asintotiche.

È bene osservare che attribuendo così alla retta, in ogni suo punto, un determinato piano come piano osculatore *si possono ancora applicare le formole di Frenet.* Se assumiamo p. e. per asse delle z la retta stessa potremo porre

$$\begin{cases} x = 0\ , & y = 0\ , & z = s \\ \alpha = 0\ , & \beta = 0\ , & \gamma = 1 \\ \xi = \cos\sigma\ , & \eta = \operatorname{sen}\sigma\ , & \zeta = 0 \\ \lambda = -\operatorname{sen}\sigma\ , & \mu = \cos\sigma\ , & \nu = 0\ , \end{cases}$$

dove $\sigma = \sigma(s)$ è la funzione che fissa in ogni punto il piano da considerarsi come osculatore, e le equazioni di Frenet saranno soddisfatte se poniamo

$$\frac{1}{\rho} = 0\ , \quad \frac{1}{T} = -\frac{d\sigma}{ds}\ .$$

Ora la torsione così calcolata sarà positiva se σ decresce al crescere di s e negativa se invece σ cresce con s. Si noti che nel primo caso, spostando il punto sulla retta, il piano osculatore gira da sinistra verso destra, nel secondo in verso contrario.

§. 77.

Teorema di Beltrami-Enneper per la torsione delle asintotiche.

Le linee asintotiche di una superficie, supposte reali, hanno la proprietà molto notevole espressa dalla formola

$$\frac{1}{T^2} = -K\ , \tag{39}$$

dove con $\frac{1}{T}$ si indica la torsione della linea asintotica, e K è la curvatura (assoluta) della superficie: *Il quadrato della torsione di una linea asintotica eguaglia la curvatura presa con segno contrario.* Questo teorema si cita comunemente col nome di *Enneper* che lo diede nel 1870 (1); però il teorema trovasi già in una memoria anteriore del *Beltrami* (2). Colla dimostrazione che ora ne daremo, si vedrà di più che in ogni punto della superficie le due asintotiche hanno bensì torsioni eguali in valore assoluto ($= \sqrt{-K}$), però sempre di segno contrario.

Nella regione della superficie che si considera (a punti iperbolici) è K negativa, poniamo

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\ ,$$

intendendo con ρ il valore *positivo* di $\sqrt{-\frac{1}{K}}$.

Per la formola di Gauss abbiamo

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2}\ ,$$

cioè,

$$D'^2 - D D'' = \frac{E G - F^2}{\rho^2}\ .$$

Ora dall'equazione differenziale delle asintotiche

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0\ ,$$

che possiamo anche scrivere

$$(D\,du + D'\,dv)\,du + (D'\,du + D''\,dv)\,dv = 0 \tag{40}$$

abbiamo

$$(D\,du + D'\,dv)^2 = (D'^2 - D\,D'')\,dv^2 = \frac{E G - F^2}{\rho^2}\,dv^2\ ,$$

e perciò

$$D\,du + D'\,dv = \pm\frac{\sqrt{E G - F^2}}{\rho}\,dv\ ,$$

per cui dalla (40)

$$D'\,du + D''\,dv = \mp\frac{\sqrt{E G - F^2}}{\rho}\,du\ .$$

(1) Göttinger Nachrichten 1870, p. 493.
(2) Giornale di matematiche T. IV (1867).

i segni corrispondendosi. Indicando dunque con s l'arco di asintotica, sussistono lungo di essa le equazioni

$$(41)\qquad \begin{cases} D\dfrac{du}{ds}+D'\dfrac{dv}{ds}=\pm\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{dv}{ds} \\ D'\dfrac{du}{ds}+D''\dfrac{dv}{ds}=\mp\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{du}{ds} \end{cases},$$

ed è manifesto che avranno luogo i segni superiori o gli inferiori secondo che l'asintotica appartiene all'uno o all'altro dei due sistemi.

Per la nostra curva Γ che supponiamo asintotica, e quindi soddisfacente alle (41) (in una delle due determinazioni dei segni), riteniamo le solite notazioni e calcoliamone la torsione $\frac{1}{T}$ dalla formola, che risulta da quelle di Frenet:

$$(42)\qquad \frac{1}{T}=S\frac{d\lambda}{ds}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{d\lambda}{ds} & \dfrac{d\mu}{ds} & \dfrac{d\nu}{ds} \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Siccome la binormale di Γ coincide colla normale alla superficie, si ha

$$\lambda=\varepsilon X,\quad \mu=\varepsilon Y,\quad \nu=\varepsilon Z,$$

con $\varepsilon=\pm 1$ secondo che il verso positivo dell'una coincide od è opposto a quello dell'altra. In ogni caso sostituendo in (42) resta

$$\frac{1}{T}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{dX}{ds} & \dfrac{dY}{ds} & \dfrac{dZ}{ds} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

od anche

$$\frac{1}{T}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}, & \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}, & \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} \\ \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}, & \dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}, & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{\partial Z}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix}.$$

D'altra parte dalla (1*) §. 64

$$+\sqrt{EG-F^2}=\begin{vmatrix} \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial u & \partial u & \partial u \\ \partial x & \partial x & \partial z \\ \partial v & \partial v & \partial v \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando le due formole fra loro, coll'eseguire la moltiplicazione dei due determinanti per linee, viene

$$\frac{\sqrt{EG-F^2}}{T}=\begin{vmatrix} E\dfrac{du}{ds}+F\dfrac{dv}{ds}, & F\dfrac{du}{ds}+G\dfrac{dv}{ds} & 0 \\ -\left(D\dfrac{du}{ds}+D'\dfrac{dv}{ds}\right), & -\left(D'\dfrac{du}{ds}+D''\dfrac{dv}{ds}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

cioè per le (41)

$$\frac{\sqrt{EG-F^2}}{T}=\pm\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds}+\left(F\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}.$$

Siccome $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$, resta in fine la formola semplicissima

$$(42^*)\qquad \frac{1}{T}=\pm\frac{1}{\rho},$$

i segni essendo sempre in corrispondenza a quelli nelle formole (41). Intanto ne risulta

$$\frac{1}{T^2}=\frac{1}{\rho^2}=-K,$$

che è appunto la (39) esprimente il teorema di Beltrami Enneper.

Di più, siccome nella (42*) vale il segno $+$ o il segno $-$ secondo che l'asintotica appartiene all'uno o all'altro sistema, e d'altra parte questo segno non può variare, finchè l'asintotica varia con continuità nel proprio sistema, ne deduciamo che: *Nella regione dei punti*

iperbolici le asintotiche di un sistema sono tutte sinistrorse $\left(\frac{1}{T}>0\right)$, *quelle dell'altro sistema tutte destrorse* $\left(\frac{1}{T}<0\right)$.

La distinzione dei segni nelle equazioni differenziali (41) si precisa dunque nel modo seguente:

$$(43)\quad \begin{cases} D\dfrac{du}{ds}+D'\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{dv}{ds} & \text{(per le asintotiche} \\ D'\dfrac{du}{ds}+D''\dfrac{dv}{ds}=-\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{du}{ds} & \text{sinistrorse)}\ \frac{1}{T}>0 \end{cases}$$

$$(43^*)\quad \begin{cases} D\dfrac{du}{ds}+D'\dfrac{dv}{ds}=-\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{dv}{ds} & \text{(asintotiche destrorse)} \\ D'\dfrac{du}{ds}+D''\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\dfrac{du}{ds}. & \frac{1}{T}<0 \end{cases}$$

Per le osservazioni alla fine del paragrafo precedente, questi risultati valgono anche per una eventuale asintotica rettilinea, alla quale verrà attribuita una torsione positiva o negativa secondo che, spostandosi un punto lungo la retta, il piano tangente alla superficie gira (attorno alla retta) da sinistra verso destra, o in senso opposto.

In particolare se la superficie è rigata (non sviluppabile), oltre alle generatrici rettilinee che sono le asintotiche di un sistema, avremo un secondo sistema di asintotiche *curvilinee* (che nel caso delle quadriche saranno però nuovamente rette). La rigata si dice *destrorsa* se il piano tangente gira da sinistra verso destra, spostando il punto di contatto lungo una generatrice, e *sinistrorsa* nel caso opposto. Nel primo caso le asintotiche rettilinee hanno torsione positiva, e quindi le curvilinee negativa, nel secondo accade il contrario. Dunque: *Le asintotiche curvilinee di una rigata destrorsa sono destrorse, per una rigata sinistrorsa sono sinistrorse.*

§. 78.

Proprietà fondamentali dei sistemi coniugati.

Si è già osservato (§. 75) che esistono su qualunque superficie S infiniti sistemi coniugati di linee.

Se prendiamo uno qualunque di questi sistemi (u, v) per sistema coordinato (u, v), avremo $D'=0$, e allora la formola media delle fondamentali (1), §. 65 (pag. 170), pone subito in evidenza il seguente teorema (Darboux):

Le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla superficie, espresse pei parametri u, v di un sistema coniugato, sono soluzioni di una medesima equazione del secondo ordine della forma (di Laplace).

$$(IX)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}\quad\left(a=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},\ b=\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right).$$

Inversamente prendiamo una qualunque equazione di Laplace (IX) dove $a=a\ (u,v)$, $b=b\ (u,v)$ sono funzioni date di u, v, e siano $x=x\ (u,v)$, $y=y\ (u,v)$, $z=z\ (u,v)$ tre sue soluzioni, allora: *le equazioni*

$$x=x\,(u,v),\ y=y\,(u,v),\ z=z\,(u,v)$$

rappresenteranno parametricamente una superficie S [1] *sulla quale le linee (u, v) traccieranno un sistema coniugato.* E infatti, valendo la (IX) per $\theta=x$, $\theta=y$, $\theta=z$, il determinante D' identicamente si annulla. Si aggiunga che per tutte le superficie S, così coordinate alla (IX), i simboli $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ di Christoffel avranno rispettivamente i valori a e b.

È ora notevole che, mentre sopra una superficie qualunque non si sanno trovare sistemi ortogonali *senza integrazioni*, si possono invece trovare infiniti sistemi coniugati in termini finiti colla seguente semplice proposizione dovuta a Koenigs:

Per una superficie qualunque S *le linee a tangenti coniugate delle sezioni piane prodotte in* S *dai piani di un fascio sono le curve di contatto dei coni circoscritti dai punti dell'asse r del fascio alla superficie.* E infatti le tangenti alle dette sezioni piane si ordinano appunto in sviluppabili secondo le generatrici [2] dei coni circoscritti dai punti

---

[1] Naturalmente qui si suppone che le tre soluzioni scelte x, y, z non risultino funzioni di una soltanto di essa (chè allora la S si ridurrebbe ad una linea), e ancora che non sussista fra le tre un'identità lineare, nel qual caso la S si ridurrebbe ad un piano. Quest'ultimo caso però non è veramente eccezionale, qualunque sistema piano potendo riguardarsi come coniugato.

[2] Ad esempio, in una quadrica le linee a tangenti coniugate delle sezioni piane di un fascio di asse r sono le altre sezioni piane del fascio che ha per asse la retta coniugata r'.

dell'asse r. In particolare se l'asse r del fascio di piani si trasporta all'infinito, le sezioni piane diventano le *linee di livello* corrispondenti alla data giacitura, e le loro linee a tangenti coniugate sono le curve di contatto di cilindri con generatrici paralleli alla giacitura o, come si dice, le *linee d'ombra* per raggi paralleli alla giacitura.

Le relazioni fondamentali fra i sistemi coniugati (u, v) e le equazioni di Laplace sono state utilizzate dal Darboux per dare una dimostrazione analitica della seguente proposizione geometricamente evidente: *Le trasformazioni proiettive dello spazio cangiano i sistemi coniugati di una superficie* S *nei sistemi coniugati della trasformata* S' [1]. Una trasformazione proiettiva dello spazio, indicando con x', y', z' le coordinate del punto trasformato, è data da formole del tipo

$$x' = \frac{\alpha}{\delta}, \quad y' = \frac{\beta}{\delta}, \quad z' = \frac{\gamma}{\delta},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono funzioni lineari intere di x, y, z e però altrettante soluzioni della (VIII). Ora, facendo nella (VIII) il cangiamento di funzione incognita

$$\theta' = \frac{\theta}{\delta}, \qquad \theta = \delta\,\theta',$$

la (IX) si trasforma per θ' (perchè δ è una soluzione della (IX)) in un'altra equazione di Laplace per θ'. Siccome alla (IX) soddisfano α, β, γ, così alla trasformata soddisfano x', y', z', e perciò il punto (x', y', z') descrive una superficie S' sulla quale il sistema (u, v) è ancora coniugato.

§. 79.

Sistemi isotermo-coniugati e linee asintotiche.

a) Come fra i sistemi ortogonali con $F = 0$ si distinguono gli isotermi con $E = G$, così fra i sistemi coniugati (u, v) sono da notarsi quelli che, oltre rendere $D' = 0$, dànno anche $D = D''$.

[1] Basta considerare che la sviluppabile circoscritta alla superficie S lungo una qualunque linea L, si cangia per la proiettività, nella sviluppabile circoscritta alla trasformata S' lungo la linea trasformata L'.

Questo è manifestamente possibile ed in infiniti modi (dipendenti da una funzione arbitraria di variabile complessa) solo per le superficie (o loro regioni) a curvatura K positiva.

Per quelle invece a curvatura K negativa potremo rendere insieme

$$D' = 0 \qquad D = -D''.$$

Daremo il nome di sistemi *isotermo-coniugati* a quei sistemi (u, v) pei quali insieme a $D' = 0$, si ha, per una conveniente scelta dei parametri u, v (parametri isometrici):

$$D = \pm D''. \quad (K \gtrless 0).$$

Ricorrendo di nuovo alle equazioni fondamentali (I) §. 65, abbiamo subito il teorema:

Le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra una superficie S, *riferita ad un sistema (u, v) isotermo coniugato, espresse pei parametri isometrici u, v, sono soluzioni comuni del sistema lineare omogeneo di equazioni a derivate parziali della forma*

$$(X) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \mp \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \alpha \dfrac{\partial\theta}{\partial u} - \beta \dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = a \dfrac{\partial\theta}{\partial u} + b \dfrac{\partial\theta}{\partial v}. \end{cases}$$

Si osservi che di questo sistema oltre x, y, z si ha la quarta soluzione $\theta = 1$ (0 cost^te) e quindi anche la $\theta = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4$, colle c_i costanti arbitrarie. E siccome un sistema della forma (IX) non può presentare il caso d'involuzione [1] (con soluzioni dipendenti da una funzione arbitraria), il numero 4 di costanti arbitrarie nella soluzione generale è il massimo possibile, onde il sistema (X) presenta il caso *d'illimitata integrabilità*. Viceversa, se un sistema (X) è illimitatamente integrabile, e ne prendiamo tre soluzioni linearmente indipendenti $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$: *le equazioni parametriche*

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

definiscono una superficie S, *sulla quale il sistema (u, v) è isotermo-coniugato*. Difatti x, y, z soddisfano, da una parte alla prima delle (X)

[1] Cf. Goursat — Équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

ed anche alle (I) §. 65, onde risulta

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\beta\frac{\partial x}{\partial v}=\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\mp\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\mp\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\quad\cdot\quad(D\mp D'')\,X\,,$$

colle analoghe per gli altri due assi, e per ciò necessariamente

$$\alpha=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\mp\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},\quad\beta=\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\mp\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix},\qquad D\mp D''=0\,,$$

l'ultima delle quali dice appunto che il sistema (u, v) è isotermo coniugato. Se ora riprendiamo la dimostrazione del Darboux al paragrafo precedente per provare che le projettività conservano i sistemi coniugati, vediamo che la sostituzione ivi eseguita $\theta=\delta\theta'$ trasforma non soltanto la seconda delle (IX), ma anche la prima in un'altra equazione della stessa forma. Dunque: *Le projettività dello spazio cangiano i sistemi isotermo-coniugati di una superficie nei sistemi isotermo coniugati della trasformata* (1). Insomma la proprietà d'isotermia in un sistema coniugato è una proprietà invariante per trasformazioni projettive.

b) Supponiamo ora la S a curvature opposte ($K>0$) e prendiamo a linee coordinate (u, v) le sue linee asintotiche; dovendo l'equazione differenziale (VIII) delle asintotiche

$$D\,du^2+2\,D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0$$

avere per linee integrali le $u=\text{cost}^{te}$, $v=\text{cost}^{te}$ sarà necessariamente $D=D''=0$ (e viceversa).

Allora le solite equazioni fondamentali (I) §. 65 ci dànno il teorema: *Le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra una superficie, espresse pei parametri u, v delle linee asintotiche, soddisfano ad un si-*

(1) O in altro modo così. Riferita la S ad un sistema qualunque coordinato (u, v), sia

$$D\,du^2+2\,D'\,du\,dv+D''\,dv^2$$

la sua seconda forma fondamentale, e per una qualunque trasformata projettiva S_1 di S sia

$$D_1\,du^2+2\,D_1'\,du\,dv+D_1''\,dv^2$$

la seconda forma fondamentale di S_1. Siccome ogni sistema coniugato di S si cangia sopra S_1 in un sistema coniugato, queste due forme sono proporzionali, e qualunque trasformazione che renda l'una a forma isoterma ha lo stesso effetto sull'altra.

stema lineare omogeneo del tipo

$$\text{(XI)}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=a\dfrac{\partial\theta}{\partial u}+b\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\quad\left(a=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix},\ b=\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial u}+\beta\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\quad\left(\alpha=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},\ \beta=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right).\end{cases}$$

E ripetendo le considerazioni fatte pel sistema (X) vediamo che anche qui abbiamo in (XI) un sistema illimitatamente integrabile. Viceversa se di un sistema (XI) illimitatamente integrabile prendiamo tre soluzioni x, y, z linearmente indipendenti, le equazioni parametriche

$$x=x(u, v)\,,\quad y=y(u, v)\,,\quad z=z(u, v)$$

dànno una superficie riferita alle sue linee asintotiche. Si noti ancora che: *Ogni trasformazione projettiva cangia le asintotiche in asintotiche.* È questa già una conseguenza della conservazione dei sistemi coniugati; oppure si eseguisca la trasformazione di prima $\theta=\delta\theta'$ sul sistema (VI), che viene cangiato in un altro della stessa forma.

§. 80.

Alcune applicazioni.

1) Come esempio delle relazioni fra i sistemi coniugati e le equazioni (IX) di Laplace prendiamo la semplicissima equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0\,,$$

il cui integrale generale è dato dalla somma di due funzioni arbitrarie, una della u, l'altra della v. Se si pone adunque

$$(44)\quad x=f_1(u)+\varphi_1(v)\,,\quad y=f_2(u)+\varphi_2(v)\,,\quad z=f_3(u)+\varphi_3(v)\,,$$

essendo f_1, f_2, f_3 funzioni arbitrarie (che supponiamo derivabili) della u, e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ della sola v, sulla superficie S così definita, il sistema (u, v) è coniugato. Le superficie di questa classe (44) sono, come è ben noto, le *superficie di traslazione*, nelle quali possono darsi ad arbitrio due curve Γ, C di contrario sistema incrociantisi in un punto e la superficie nasce dando a Γ un moto continuo di traslazione lungo C,

come pure a C un moto di traslazione lungo Γ. Scrivendo le equazioni (44) sotto la forma

$$x = \frac{1}{2}(2f_1(u) + 2\varphi_1(v)),\ y = \frac{1}{2}(2f_2(u) + 2\varphi_2(v)),\ z = \frac{1}{2}(2f_3(u) + 2\varphi_3(v))$$

si può anche considerare la superficie generata in quest'altro modo equivalente (Lie): Prese due curve arbitrarie Γ_1, C_1 nello spazio

$$\Gamma_1) \qquad x_1 = 2f_1(u), \quad y_1 = 2f_2(u), \quad z_1 = 2f_3(u)$$

$$C_1) \qquad x_2 = 2\varphi_1(v), \quad y_2 = 2\varphi_2(v), \quad z_2 = 2\varphi_3(v);$$

la superficie è il luogo dei punti medii di tutti i segmenti che congiungono un punto qualunque della prima curva Γ_1 con un punto qualunque della seconda C_1. Anche è da osservarsi che nel caso attuale, essendo $a = b = 0$ nella (IX), si ha $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$, cioè sulla superficie di traslazione le curve generatrici formano una rete di Tchebychef (§. 60) (1). Viceversa se sopra una superficie esiste una rete di Tchebychef le cui linee (u, v) formino un sistema coniugato si ha $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$ e la superficie è di traslazione. Possiamo dunque dire: *Le superficie di traslazione sono caratterizzate dal possedere una rete coniugata di Tchebychef.*

2) Sulla sfera ogni sistema ortogonale è coniugato ed inversamente; quindi sulla sfera un sistema isotermo-coniugato è un sistema isotermo nel senso ordinario.

Ogni doppio fascio ortogonale di circoli sulla sfera (§. 57) è dunque un sistema isotermo-coniugato (2), ed applicando una proiettività abbiamo: *In ogni quadrica le sezioni piane in due fasci aventi per assi due rette coniugate dànno sulla quadrica un sistema isotermo-coniugato.*

(1) Le due proprietà segnalate sono anche d'immediata evidenza geometrica, la prima da che le tangenti alle linee $r = \text{cost.}^{te}$ nei punti d'incontro con una stessa linea (u) sono parallele e formano quindi un cilindro (una sviluppabile), onde (u, v) è un sistema coniugato; la seconda da che in ogni quadrilatero ABCD formato da due coppie di curve una di ciascun sistema, gli archi opposti (AB, CD), (BC, AD) sono di eguale lunghezza, come congruenti, e la rete è quindi di Tchebychef.

(2) Esso è un sistema isotermo perchè con proiezione stereografica sul piano si può cangiare o nel reticolo cartesiano o in quello polare, ambedue isotermi.

Così p. e. se prendiamo un sistema (X) della forma

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

esso ha le quattro soluzioni $1, u, v, u^2 + v^2$, e la generale è quindi una combinazione lineare di queste. Le formole

$$x = a(u^2 + v^2) + bu + cv$$
$$y = a'(u^2 + v^2) + b'u + c'v$$
$$z = a''(u^2 + v^2) + b''u + c''v,$$

col determinante delle nove costanti $a, b, \ldots c''$ diverso da zero (altrimenti la superficie sarebbe piana), ci rappresentano un paraboloide ellittico come superficie di traslazione, le curve generatrici essendo due parabole che si incontrano in un punto in due direzioni coniugate; *il sistema (u, v) è isotermo-coniugato.*

3) In fine, come esempio di un sistema (XI) completamente integrabile, prendiamo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0,$$

colle quattro soluzioni $1, u, v, uv$, e la generale combinazione lineare di queste quattro. Se poniamo

$$x = auv + bu + cv, \quad y = a'uv + b'u + c'v, \quad z = a''uv + b''u + c''v,$$

con $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$ queste formole rappresentano il paraboloide iperbolico riferito alle sue generatrici (asintotiche). Trasformando proiettivamente avremo le formole per l'iperboloide ad una falda in coordinate asintotiche.

§. 81.

Inversione per raggi vettori reciproci.

Ritorniamo al risultato del §. 78 relativo ai sistemi coniugati (u, v). Fra i sistemi coniugati vi è quello delle linee di curvatura e noi possiamo domandare quale proprietà speciale apparterrà in questo caso alla relativa equazione di Laplace (IX), cui soddisfano

x, y, z. La risposta è data dal teorema di Darboux: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema coniugato (u, v) sia quello delle linee di curvatura è che, insieme ad x, y, z, l'equazione di Laplace* (IX) *ammetta come soluzione la somma dei loro quadrati $x^2+y^2+z^2$.*

Pongasi infatti

$$2\rho = x^2 + y^2 + z^2,$$

da cui

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \mathrm{S}\, x \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = \mathrm{S}\, x \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{S}\, x \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \mathrm{F}$$

e per ciò

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \rho}{\partial v} = \mathrm{S}\, x \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} \right] + \mathrm{F}.$$

Ma siccome x, y, z soddisfano, per ipotesi all'equazione di Laplace (IX) con $a = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, $b = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, resta

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial r} + \mathrm{F},$$

sicchè appunto $\mathrm{F} = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè anche ρ sia una soluzione.

Di qui il Darboux ha tratto una semplice dimostrazione del teorema (che per solito si dimostra ricorrendo al teorema di Dupin sui sistemi tripli di superficie ortogonali): *Le inversioni per raggi vettori reciproci nello spazio conservano le linee di curvatura delle superficie.*

Assumendo la sfera d'inversione, di raggio R, col centro nella origine, le formole dell'inversione sono

$$x' = \mathrm{R}^2 \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad y' = \mathrm{R}^2 \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad z' = \mathrm{R}^2 \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Prendasi una superficie S riferita alle sue linee di curvatura (u, v), e la relativa equazione di Laplace (IX), di cui saranno soluzioni x, y, z e $x^2+y^2+z^2 = 2\rho$. Colla trasformazione

$$\theta' = \frac{\mathrm{R}^2 \theta}{2\rho},$$

l'equazione di Laplace si trasforma in un'altra di cui sono soluzioni x', y', z', ma anche

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{\mathrm{R}^4}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathrm{R}^4}{2\rho},$$

poichè $\theta = \mathrm{R}^2$ è una soluzione della primitiva.

Dunque sulla superficie trasformata S' le linee (u, v) sono nuovamente di curvatura, *c. d. d.*

Dalla proprietà così stabilita si possono nuovamente dedurre le proposizioni ben note dalla geometria elementare che l'inversione cangia sfere (o piani) in sfere (o piani) e che essa è una trasformazione *conforme* di tutto lo spazio. Difatti siccome le sfere e i piani sono le uniche superficie a linee di curvatura indeterminate, debbono essere cangiate dalla inversione in sfere e piani; di più qualunque loro doppio sistema ortogonale in un altro ortogonale. Per ciò tutti gli angoli retti sono conservati e per conseguenza ogni altro angolo; *la trasformazione è conforme.*

§. 82.

Calcolo di parametri differenziali.

Diamo in questo paragrafo le importanti espressioni di parametri differenziali costruiti per le funzioni x, y, z; X, Y, Z o delle due loro combinazioni.

$$\rho = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2), \quad \mathrm{W} = x\,\mathrm{X} + y\,\mathrm{Y} + z\,\mathrm{Z},$$

la prima delle quali, già sopra considerata, rappresenta il semiquadrato della distanza del punto (u, v) della superficie dall'origine, la seconda la distanza (algebrica) dell'origine stessa dal piano tangente.

Per questo calcolo, giovandoci delle proprietà invariantive dei parametri differenziali, ci riferiremo, ove più convenga, alle linee di curvatura come a linee coordinate, ricordando che il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \mathrm{X}, & \mathrm{Y}, & \mathrm{Z} \end{vmatrix} = +1$$

è il determinante di una sostituzione ortogonale.

In tal caso ci serviremo delle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X}{\partial v}$$

e delle espressioni

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2, \quad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{1}{E}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v}$$

dei parametri differenziali primi. Così troviamo subito

$$(45) \qquad \Delta_1 x = 1 - X^2, \quad \Delta_1 y = 1 - Y^2, \quad \Delta_1 z = 1 - Z^2$$

$$(45^*) \qquad \nabla(x, y) = -XY, \quad \nabla(y, z) = -YZ, \quad \nabla(x, z) = -XZ.$$

Poi ancora da

$$\Delta_1 X = \frac{1}{r_2^2}\frac{1}{E}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\frac{1}{G}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

e dalle due analoghe sommando deduciamo

$$(46) \qquad \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \Delta_1 X + \Delta_1 Y + \Delta_1 Z,$$

formola che esprime la curvatura di Casorati (§. 74) per parametri differenziali.

Ed ancora, riferendoci per semplicità alle linee di curvatura, da

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \rho}{\partial u} = S\,x\,\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \rho}{\partial v} = S\,x\,\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

quadrando e sommando troviamo la formola

$$(47) \qquad \Delta_1 \rho = 2\rho - W^2.$$

Per calcolare i parametri differenziali secondi $\Delta_2 x, \Delta_{22} x$ serviamoci delle formole generali §. 65

$$(48) \qquad x_{11} = DX, \quad x_{12} = D'X, \quad x_{22} = D''X,$$

e delle formole (22), (24) §. 35 pei parametri differenziali secondi

$$\Delta_2 U = \frac{G U_{11} + E U_{22} - 2F U_{12}}{EG - F^2}$$

$$\Delta_{22} U = \frac{U_{11} U_{22} - U_{12}^2}{EG - F^2}.$$

Troviamo anzitutto per le (48)

$$\Delta_2 x = \frac{GD - 2ED'' - 2FD'}{EG - F^2} X,$$

ossia (§. 74)

$$\Delta_2 X = -2HX,$$

indicando H la curvatura media; così abbiamo

$$(XII) \qquad \Delta_2 x = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) X,$$

formola molto notevole dovuta a Beltrami, che per le (45) può anche scriversi

$$\Delta_2 x = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sqrt{1 - \Delta_1 x}\ (^1).$$

Dalla (XII) segue subito, come ha osservato il Beltrami, che: *In ogni superficie a curvatura media nulla (superficie d' area minima) le sezioni fatte con piani paralleli (linee di livello) e le loro traiettorie ortogonali (linee di pendenza) formano un sistema isotermo; di più la distanza di un piano variabile nel sistema da un piano fisso è parametro d' isometria* (soddisfacendo al $\Delta_2 \theta = 0$).

Calcolando ora il $\Delta_{22} x = \frac{x_{11} x_{22} - x_{12}^2}{EG - F^2}$ mediante le (48), abbiamo

$$A_{22} x = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} X^2,$$

che per le (48) possiamo scrivere

$$(XIII) \qquad \Delta_{22} x = K(1 - \Delta_1 x).$$

Questa è una formola di fondamentale importanza (nella teoria dell'applicabilità); appena data la prima forma fondamentale (il ds^2),

(1) Si osservi che, con questa formola, dato il ds^2 della superficie e la distanza x del punto (u, v) mobile sulla superficie da un piano fisso nello spazio ($z = 0$), si calcola subito la curvatura media, e quindi (siccome la totale $\frac{1}{r_1 r_2}$ è nota dal ds^2) anche i raggi principali di curvatura.

essa dimostra che la distanza del punto (u, v) della superficie da un piano fisso è una soluzione dell' equazione del secondo ordine

$$\Delta_{11}\theta = K(1 - \Delta_1\theta);$$

questa diremo in seguito la *prima equazione dell' applicabilità.*

Dimostriamo ora che ad una equazione della stessa natura soddisfa $\rho = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Per ciò formiamo le derivate seconde covarianti di ρ dalle formole (§. 81).

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = Sx\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial v} = Sx\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} = Sx\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + E, \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = Sx\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + F, \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} = Sx\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + G,$$

e sostituendo per le derivate seconde delle x i valori dati dalle formole fondamentali (I) §. 65, avremo

$$(49)\qquad \begin{cases} \rho_{11} = E + DW \\ \rho_{12} = F + D'W \\ \rho_{22} = G + D''W \end{cases}$$

Costruendo ora i parametri differenziali secondi

$$\Delta_1\rho = \frac{G\rho_{11} + E\rho_{22} - 2F\rho_{12}}{EG - F^2}$$

$$\Delta_{11}\rho = \frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{EG - F^2},$$

troviamo

$$\Delta_1\rho = 2 - HW \qquad \left(H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Delta_{22}\rho = 1 - HW + KW^2,$$

indi $$\Delta_{22}\rho + 1 = \Delta_1\rho + KW^2,$$

o in fine per la (47):

$$(XIV)\qquad \Delta_{22}\rho + 1 = \Delta_1\rho + K(2\rho - \Delta_1\rho).$$

Questa formola, come la (XIII), non contiene altri elementi che quelli della prima forma fondamentale, e prova che la quantità

$\rho = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ soddisfa ad un' equazione del secondo ordine dipendente solo dal ds^2. Diremo la (XIV) la *seconda equazione dell' applicabilità.*

§. 83.

Elementi delle superficie in coordinate cartesiane.

Nel presente Capitolo abbiamo sviluppato le formole fondamentali della teoria delle superficie in coordinate curvilinee (u, v) qualunque. Qui da ultimo notiamo come si presentano queste formole quando l'equazione della superficie si scriva nella consueta forma cartesiana

$$z = z(x, y),$$

e facciamo uso delle notazioni di Monge

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Ponendo per questo caso $x = u$, $y = v$, verremo ad assumere per linee coordinate le sezioni piane $x = \text{cost.}^{te}$, $y = \text{cost.}^{te}$ Avremo in primo luogo pei coefficienti della prima forma fondamentale

$$(50)\quad E = 1 + p^2, \; F = pq, \; G = 1 + q^2; \; EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2$$

e per quelli della seconda dalle (3*) §. 64

$$(51)\quad D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; D' = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; D'' = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

La curvatura totale K e la media H saranno quindi date dalle formole

$$(52)\qquad \begin{cases} K = \dfrac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \\ H = \dfrac{2pqs - (1 + q^2)r - (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Ancora è da osservarsi che (per le nostre convenzioni dei segni) i coseni di direzione della normale sono

$$(53)\qquad X=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Y=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Z=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ (^1)$$

e sono da notarsi i valori che qui assumono i simboli di Christoffel:

$$(54)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}=\dfrac{p}{1+p^2+q^2}\,r,\quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=\dfrac{p}{1+p^2+q^2}\,s,\quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}=\dfrac{p}{1+p^2+q^2}\,t \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}=\dfrac{q}{1+p^2+q^2}\,r,\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=\dfrac{q}{1+p^2+q^2}\,s,\quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}=\dfrac{q}{1+p^2+q^2}\,t\ (^2). \end{cases}$$

L' equazione differenziale delle linee di curvatura si scrive

$$(55)\qquad [(1+p^2)s-pq\,r]dx^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]dx\,dy+$$
$$+[pqt-(1+q^2)s]dy^2=0\quad\text{(linee di curvatura)},$$

e in fine quelle delle linee asintotiche

$$(56)\qquad r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2=0\,.$$

La condizione perchè i due elementi lineari ds, δs siano in direzione coniugata prende la forma

$$(r\,dx+s\,dy)\,\delta x+(s\,dx+t\,dy)\,\delta y=0$$

ovvero

$$(57)\qquad dp\,\delta x+dq\,\delta y=0\,.$$

P. e. se domandiamo le linee a tangenti coniugate delle $x=\text{cost.}^{te}$, per le quali abbiamo $\delta x=0$, si ha per la loro equazione differenziale $dq=0$, il cui integrale $q=\text{cost.}^{te}$ esprime che le tangenti alle $x=\text{cost.}^{te}$, coi coseni di direzione $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{1+q^2}},\ \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}\right)$, lungo una tale linea $q=\text{cost.}^{te}$ sono tutte parallele, onde le $q=\text{cost.}^{te}$ sono le relative linee d'ombra (Cf. §. 78). Medesimamente se domandiamo le linee a tangenti coniugate delle sezioni fatte con piani per l'asse z, siccome lungo una di queste si ha

(1) La direzione positiva della normale è dunque quella della z crescente.

(2) Si possono calcolare direttamente dalle (50), oppure dalle (I) §. 66, che dànno

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}=-\,D\,X\,,\quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=-\,D'\,X\,,\quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}=-\,D''\,X$$

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}=-\,D\,Y\,,\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=-\,D'\,Y\,,\quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}=-\,D''\,Y\,.$$

$$\frac{y}{x}=\text{cost}^{te}\qquad\text{ovvero}\qquad\frac{\delta x}{x}=\frac{\delta y}{y}\,,$$

l' equazione differenziale (57) diviene

$$x\,dp+y\,dq=0$$

che si può scrivere: $d(z-p\,x-q\,dy)=0$.

L' integrale è: $z-p\,x-q\,y=\text{cost.}^{te}$; e siccome il primo membro è l' ordinata ξ del punto ove il piano tangente in (x,y,z) incontra l' asse $0z$, le linee cercate sono quelle di contatto dei coni circoscritti dai punti dell' asse $0z$ alla superficie. Così è confermato analiticamente il teorema di Koenigs (§. 78),

Capitolo V.

Rappresentazione sferica di Gauss — Coordinate tangenziali.

Rappresentazione sferica di Gauss e sue proprietà. — Formole di Weingarten pei simboli di Christoffel delle forme fondamentali. — Formole generali di rappresentazione sferica. — Immagini sferiche delle asintotiche. — Asintotiche sulle superficie minime e sulle superficie pseudosferiche. — Formole di Lelieuvre. — Superficie con assegnata immagine sferica di un sistema coniugato.

§. 84.

Rappresentazione sferica di Gauss.

Per lo studio di una qualunque superficie S *non sviluppabile* è molto utile una rappresentazione geografica della superficie sulla sfera, che si chiama la *rappresentazione di Gauss*, o per normali parallele. Descriviamo p. e. col centro nell'origine una sfera il cui raggio prendiamo per semplicità $=1$, e ad ogni punto M della superficie, o di una sua regione convenientemente limitata, facciamo corrispondere quel punto M′ della sfera in cui il raggio pel centro O parallelo alla direzione positiva della normale in M incontra la superficie sferica. Le coordinate x', y', z' del punto M′ sulla sfera corrispondente al punto $M \equiv (u, v)$ della superficie saranno

$$(1) \qquad x' = X(u, v), \quad y' = Y(u, v), \quad z' = Z(u, v),$$

e siccome la superficie è supposta non sviluppabile, la matrice funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1)$$

(1) Dalle formole fondamentali (II) §. 65 pag. 170 risulta p. e. che il determinante $\frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)}$ si risolve nel prodotto $\frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$ e il suo annullarsi, essendo diverso da zero $D D'' - D'^2$ (superficie non sviluppabile), porterebbe l'annullarsi dell'altro $\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$. Se dunque fossero nulli i tre minori della matrice considerata nel testo, lo stesso accadrebbe per l'altra $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$, ciò che è escluso (§. 43).

(1) Allora
$$F = 0, \quad D' = 0$$
$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}$$
$$e = \frac{E}{r_2^2}, \quad f = 0, \quad g = \frac{G}{r_1^2}.$$

è di caratteristica 2, quindi movendosi M nelle due dimensioni, lo stesso accade di M′ sulla sfera. Risulta inoltre (dalla teoria delle funzioni implicite) che, mantenendosi M dentro un'area sufficientemente piccola ma finita su S, la corrispondenza coll'area sferica descritta da M′ sarà univoca anche in senso inverso (biunivoca).

Introduciamo ora l'elemento lineare ds', della immagine sferica, e poniamo

$$(2) \qquad ds'^2 = S\,dX^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2;$$

questa forma quadratica si dirà la *terza forma fondamentale* della superficie S. Osserviamo subito che questa terza forma è una combinazione lineare delle due prime forme fondamentali

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Si ha invero

$$(3)\ ds'^2 = -K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - H(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

ossia

$$(3^*) \quad e = -(KE + HD), \quad f = -(KF + HD'), \quad g = -(KG + HD''),$$

dove K e H indicano al solito le due curvature totale, e media. Queste formole (3) o (3*) risultano subito dalle fondamentali (II) §. 65 (pag. 170), e si verificano p. e. nel modo più semplice riferendosi alle linee di curvatura come a linee coordinate (1).

Se ricordiamo le proprietà generali delle rappresentazioni di una superficie sopra un'altra (§§. 52, 53) possiamo qui domandare: quali

sono le linee principali della rappresentazione? Se supponiamo insieme $F = 0$, $f = 0$, dovremo avere per la media delle (3*)

$$H D' = 0 ,$$

quindi $D' = 0$ se la superficie è generale, ovvero $H = 0$, nel qual caso sarà sempre $f = 0$ con $F = 0$, cioè la rappresentazione sarà conforme. Le superficie con $H = 0$ o a curvatura media nulla diconsi anche superficie *d' area minima* o superficie *minime* (1). Di questa notevolissima classe di superficie ci occuperemo diffusamente più oltre e qui intanto abbiamo riconosciuta questa loro proprietà che hanno a comune solo colle sfere: *La rappresentazione sferica di una superficie d' area minima è una rappresentazione conforme.* Per ogni altra superficie che *non* sia ad area minima, nè una sfera, per le linee principali deve essere insieme $F = 0$, $D' = 0$, cioè: *Le linee principali nella rappresentazione sferica di Gauss di una superficie* S *sono, sulla superficie* S *le linee di curvatura, e sulla sfera le loro immagini.* È pure da osservarsi che in virtù delle formole di Rodrigues

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X}{\partial u} , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = r_2 \frac{\partial Y}{\partial u} , \quad \frac{\partial z}{\partial u} = r_2 \frac{\partial Z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X}{\partial v} , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = r_1 \frac{\partial Y}{\partial v} , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = r_1 \frac{\partial Z}{\partial v} ,$$

si ha questa altra proprietà caratteristica delle linee di curvatura: *La tangente in ogni punto ad una linea di curvatura è parallela alla tangente nel punto corrispondente alla sua immagine sferica*; ossia una linea di curvatura e la sua immagine sferica sono trasformate di Combescure (§. 22). In modo più preciso le formole di Rodrigues $dx = r\,dX$, $dy = r\,dY$, $dz = r\,dZ$ dimostrano che, se il corrispondente raggio r di curvatura è positivo, le tangenti alla linea di curvatura ed alla sua immagine sono parallele e concordanti in verso, se invece r è negativo sono opposte.

È da osservarsi che, mentre le tangenti alle linee di curvatura non soffrono deviazione nell'immagine, quelle invece delle linee asintotiche (quando esistono) soffrono la deviazione massima, di un angolo retto. Difatti il coseno dell' angolo θ fra una direzione qualunque sulla superficie e quella della sua immagine è manifestamente

(1) Per la seconda delle formole (52) §. 83 le superficie *d' area minima* sono le superficie integrali dell' equazione del secondo ordine:

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0 .$$

$$\cos\theta = S \frac{dx}{ds} \frac{dX}{ds'} = - \frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{ds\,ds'} ,$$

e si annulla appunto per le linee asintotiche.

Se ci riferiamo alle linee di curvatura, come a linee coordinate $(u\,v)$, abbiamo

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

$$ds'^2 = \frac{E}{r_2^2}\,du^2 + \frac{G}{r_1^2}\,dv^2 ,$$

sicchè il modulo di dilatazione (§. 53), nella rappresentazione di Gauss è dato da

$$\mu = \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{\frac{E}{r_2^2}\,du^2 + \frac{G}{r_1^2}\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}} ,$$

e per ciò: *I moduli principali di dilatazione sono i valori assoluti delle curvature principali.*

Paragoniamo ancora i due elementi d'area della superficie e della sua immagine

$$d\sigma = \int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv , \quad d\sigma' = \int \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv .$$

Siccome dalle formole generali (3*), o dalle particolari prendendo per u, v le linee di curvatura, si ricava subito

$$eg - f^2 = K(EG - F^2)$$

$$\sqrt{eg - f^2} = |K| \sqrt{EG - F^2} ,$$

così abbiamo $\frac{d\sigma'}{d\sigma} = |K|$. In questa formola, come Gauss osserva, la curvatura totale (il suo valore assoluto) in un punto M appare come il rapporto fra l' area immagine e l' area obiettiva di un contorno elementare di M (di forma qualunque) ed è palese l' analogia colla definizione della curvatura per una curva piana. Volendo aver riguardo anche al segno di K, si osserverà che per $K > 0$ sulle due pagine positive, della superficie S e della sfera, la circolazione lungo

le piccole curve chiuse che circondano M, M' ha luogo in egual senso. per $K<0$ invece in senso contrario (1).

In fine osserviamo la relazione che passa fra l'angolo ω di due direzioni positive coniugate sulla superficie e l'angolo Ω delle due direzioni corrispondenti nell'immagine. Prendiamo il sistema coordinato (u, v) coniugato per modo che le due tangenti alle linee coordinate u, v siano nel punto M quelle coniugate assegnate. Essendo $D'=0$, risulta

$$K=\frac{D D''}{EG-F^2}, \quad H=-\frac{GD+ED''}{EG-F^2}$$

indi dalle (3*)

$$e=\frac{G D^2}{EG-F^2}, \quad f=-\frac{F D D''}{EG-F^2}, \quad g=\frac{E D''^2}{EG-F^2}.$$

D'altronde si ha (§. 44)

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\Omega=\frac{f}{\sqrt{eg}},$$

i radicali assunti positivamente, da cui

$$\sqrt{eg}=\frac{\sqrt{EG}}{\sqrt{EG-F^2}}\,|DD''|,$$

e per ciò

$$\cos\Omega=-\cos\omega \quad \text{se } DD''>0 \ (K>0)$$
$$\cos\Omega=+\cos\omega \quad \text{se } DD''<0 \ (K<0).$$

Dunque: *Nella rappresentazione sferica l'angolo di due direzioni coniugate sulla superficie viene conservato in grandezza, o cangiato nel suo supplemento, secondo che nel vertice dell'angolo la curvatura* K *è negativa o positiva.*

§. 85.

Le formole di Weingarten pei simboli di Christoffel delle forme fondamentali.

Accanto alle due forme fondamentali di una superficie S (non sviluppabile):

(1) Per vedere questo basta considerare che se r_1, r_2 hanno lo stesso segno p. e. il positivo, le direzioni positive delle tangenti positive alle immagini delle linee di curvatura sono concordanti con quelle delle obiettive; se invece r_1, r_2 hanno segno contrario, una è concordante l'altra opposta.

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \quad D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$$

ne abbiamo ora introdotta una terza la:

$$e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2,$$

che dà il ds'^2 della immagine sferica ed appartiene, secondo la formola (3), al fascio delle prime due. Questa terza forma è definita positiva, come la prima, e di più la sua curvatura k è $=+1$, perchè dà il ds'^2 della sfera unitaria. Consideriamo i simboli di Christoffel di *seconda* specie costruiti per la prima e per la terza forma, che indicheremo rispettivamente con

$$\begin{Bmatrix} ik_l \\ l \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} ik_l' \\ l \end{Bmatrix}.$$

Fra i loro valori e quelli di D, D', D'' e delle derivate di questi hanno luogo delle notevoli relazioni, trovate in generale da Weingarten, e che ora andiamo a stabilire. Per eseguire il calcolo in modo più simmetrico, conviene qui ricorrere nuovamente alla notazione dei doppi indici, e così porremo $u=u_1$, $v=u_2$ e designeremo rispettivamente le tre forme fondamentali con

$$\begin{cases} a_{11}\,du_1^2+2a_{12}\,du_1\,du_2+a_{22}\,du_2^2=S\,dx^2=f \\ b_{11}\,du_1^2+2b_{12}\,du_1\,du_2+b_{22}\,du_2^2=-S\,dx\,dX=\varphi \\ a'_{11}\,du_1^2+2a'_{12}\,du_1\,du_2+a'_{22}\,du_2^2=S\,dX^2=\psi \end{cases}$$

Avremo allora

$$b_{ik}=-S\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial X}{\partial u_k} \tag{4}$$

e derivando rispetto ad una qualunque u_l

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l}=-S\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_l}\frac{\partial X}{\partial u_k}-S\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial^2 X}{\partial u_k\,\partial u_l} \tag{5}$$

Ma per le formole fondamentali (6) §. 65 pag. 169

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_l}=\sum_\lambda \begin{Bmatrix} il \\ \lambda \end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u_\lambda}+b_{il}X, \tag{6}$$

e se le stesse formole si applicano alla sfera, la cui prima forma fondamentale è la terza di S:

$$a'_{11}\,du_1^2 + 2\,a'_{12}\,du_1\,du_2 + a'_{22}\,du_2^2$$

mentre la seconda, coincidendo X, Y, Z coi coseni di direzione della normale, è la $-\mathrm{S}\,dX^2$, cioè questa stessa forma cangiata di segno, risulta

$$(6^*) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u_k\,\partial u_l} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' - a'_{k\,l}\,X,$$

Sostituendo questi valori (6), (6*) nella (5) osservando le (4) stesse e le identità

$$\mathrm{S}X\,\frac{\partial X}{\partial u_k} = 0\,,$$

risultano subito le formole seguenti

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial b_{i\,k}}{\partial u_l} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda k} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{i\,\lambda},$$

e queste sono appunto le richieste *formole di Weingarten.*

Se in questa formola (I) scambiamo k con l otteniamo

$$\frac{\partial b_{i\,l}}{\partial u_k} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda\,l} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{i\,\lambda}$$

e sottraendo spariscono i simboli di Christoffel relativi alla terza forma e si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial b_{i\,k}}{\partial u_l} - \frac{\partial b_{i\,l}}{\partial u_k} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda\,l} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda k} = 0,$$

le quali non sono altro che le *equazioni di Codazzi* (9) §. 66, costruite per la seconda forma fondamentale rispetto alla prima. Ma ora dalle (I), eliminando invece i simboli di Christoffel della prima forma, possiamo trarre quest'altra importante conseguenza che: *I coefficienti della seconda forma fondamentale soddisfano le equazioni stesse di Codazzi costruite rispetto alla terza forma fondamentale* (1). Per questo si scambino invece nella (I) gli indici i, l e si sottragga; i simboli $\begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}$ si eliminano e resta

(1) In altre parole è nulla anche la forma trilineare (ψ, φ) come la (f, φ).

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\partial b_{i\,k}}{\partial u_l} - \frac{\partial b_{l\,k}}{\partial u_i} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{l\lambda} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} l\,k \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{i\lambda} = 0,$$

che sono appunto le indicate nuove formole di Codazzi.

Osserviamo poi che le formole (I) di Weingarten dànno luogo ancora a relazioni in *termini finiti* fra i simboli $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}', \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ e i coefficienti $b_{i\,k}$ stessi. Difatti se nella (I) scambiamo i con k, il primo membro resta lo stesso e, paragonando i secondi membri, restano le formole richieste

$$\sum_\lambda \left(\begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' \right) b_{k\lambda} = \sum_\lambda \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' \right) b_{i\lambda}$$

che sono in effetto due distinte, corrispondenti p. e. a $i = 1, k = 2$; $l = 1, 2$.

A queste formole di Weingarten pei simboli di Christoffel della prima e terza forma fondamentale aggiungiamo ancora le seguenti relative ai simboli di Christoffel costruiti per la *seconda forma* $\sum b_{r,s}\,du_r\,du_s$, simboli che indicheremo con $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$. Costruiamo prima i simboli di prima specie per questa forma

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{i\,l}}{\partial u_k} + \frac{\partial b_{k\,l}}{\partial u_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} \right),$$

osservando la (I) e le conseguenti

$$\frac{\partial b_{i\,l}}{\partial u_k} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda l} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} k\,l \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{\lambda i}$$

$$\frac{\partial b_{k\,l}}{\partial u_i} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,l \\ \lambda \end{Bmatrix} b_{\lambda k} + \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix}' b_{\lambda\,l},$$

troviamo

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \sum_\lambda \left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix}' \right) b_{\lambda l}$$

Di qui formando

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \sum_l \mathrm{B}_{l\,l} \left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right],$$

avendo indicato al solito con $B_{t\,t}$ il complemento algebrico di $b_{t\,t}$ nel determinante $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$, diviso per B stesso, risulta

$$\overline{\begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,k' \\ \lambda \end{Bmatrix} \right) \sum_{t} b_{\lambda\,t}\, B_{t\,t} \ ,$$

cioè:

$$\overline{\begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix}} = \frac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,k' \\ t \end{Bmatrix} \right)$$

Dunque: *I simboli di Christoffel (di 2ª specie) per la seconda forma fondamentale sono le rispettive semisomme di quelli corrispondenti delle altre due.*

§. 86.

Formole generali di rappresentazione sferica.

Secondo il teorema A) §. 67, le due prime forme fondamentali

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \\ \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 . \end{cases}$$

definiscono pienamente *una* superficie S (purchè siano soddisfatte le equazioni di Gauss e Codazzi). Possiamo egualmente definire una superficie dando invece la sua terza e seconda forma fondamentale:

$$e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \ ?$$

Le condizioni seguenti sono intanto certamente necessarie:

a) La forma $e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$ deve essere definita positiva e di curvatura $k = +1$.

b) I coefficienti D, D′, D″ della seconda debbono soddisfare, come si è visto al paragrafo precedente, alle equazioni di Codazzi rispetto alla terza forma, cioè alle due equazioni analoghe alle (IV) §. 67:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathrm{D}'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \mathrm{D} + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \right) \mathrm{D}' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \mathrm{D}'' = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{D}'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \mathrm{D} + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \right) \mathrm{D}' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \mathrm{D}'' = 0 \ , \end{cases}$$

dove i simboli $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}'$ sono costruiti per la terza forma. Come al paragrafo 67 queste si possono anche scrivere sotto la forma equivalente:

$$\text{(III*)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{eg - f^2}} \right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{eg - f^2}} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} + \\ \qquad + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{eg - f^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{eg - f^2}} \right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{eg - f^2}} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{K}'}{\sqrt{eg - f^2}} + \\ \qquad + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{eg - f^2}} = 0 \ . \end{cases}$$

Ora andiamo a dimostrare che queste condizioni *a)* e *b)* necessarie sono anche sufficienti, e precisamente: *Se delle due forme differenziali*

$$\begin{cases} e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + dv^2 \end{cases}$$

la prima è definita ed ha curvatura $k = +1$, e per la seconda (che supponiamo a discriminante non nullo) sono soddisfatte le equazioni (III) *di Codazzi, esiste una ed una sola superficie che le ammette rispettivamente come terza e come seconda forma fondamentale.*

Intanto la $e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$, avendo curvatura $k = +1$, appartiene certo, come quadrato dell'elemento lineare, alla sfera unitaria (1). Siano allora

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(u, v) \ , \quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(u, v) \ , \quad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}(u, v)$$

le coordinate di un punto della sfera unitaria espresse pei parametri u, v.

Le (6*) del paragrafo precedente dànno, scritte per disteso, le equazioni

(1) Questo discende dai teoremi generali sulle forme a curvatura costante (§ 39), come anche quale caso particolare dal teorema A) §. 67, ove si ponga

$$\mathrm{D} = -e \ , \quad \mathrm{D}' = -f \ , \quad \mathrm{D}'' = -g \ .$$

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial v} - e\,X \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial v} - f\,X \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' \dfrac{\partial X}{\partial v} - g\,X\,. \end{cases}$$

Se ora con $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ indichiamo le coordinate del punto (u,v) sulla superficie S (supposta dapprima esistente), potremo scrivere formole del tipo (Cf. §. 65).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \gamma \dfrac{\partial X}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, solo che si determinino convenientemente i quattro coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Troviamo così

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{f\,D' - g\,D}{e\,g - f^2} \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{f\,D - e\,D'}{e\,g - f^2} \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{f\,D'' - g\,D'}{e\,g - f^2} \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{f\,D' - e\,D''}{e\,g - f^2} \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

che possiamo anche scrivere come al §. 65, colla notazione dei doppi indici

$$\text{(V*)}\qquad \frac{\partial x}{\partial u_r} = -\sum_{\lambda,s} A'_{\lambda s}\, b_{rs} \frac{\partial X}{\partial u_\lambda}.$$

Se noi ora constatiamo che le condizioni d'integrabilità per le (V)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

sono soddisfatte, ne risulterà che le (V) determinano effettivamente, con una quadratura ciascuna, x, y, z, a meno di una costante additiva. Ma appunto il calcolo stesso eseguito al §. 66 prova che le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte. Per concludere dunque che le (V) definiscono, a meno di una traslazione, una superficie S, basterà assicurarsi che non si annullano insieme i tre minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ma ciascuno di questi è eguale al corrispondente minore della matrice $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$ (di caratteristica 2) moltiplicato per $\dfrac{DD'' - D'^2}{e\,g - f^2}$ (Cf. nota §. 84), e quindi nell'ipotesi (espressamente fatta) che sia $D'^2 - DD'' \neq 0$, le (V) definiranno un'effettiva superficie S, come è asserito nell'enunciato del teorema.

Si osserverà per altro che le deduzioni analitiche precedenti conservano la loro validità anche nel caso

$$DD'' - D'^2 = 0,$$

ma allora le (V) definiscono non più una superficie sibbene una curva Γ (1), e le direzioni (X, Y, Z) uscenti da un suo punto sono tutte le normali di Γ.

Inversamente se prendiamo una qualunque curva Γ e la pensiamo come inviluppo dei suoi ∞^2 piani tangenti è lecito riguardarla come un caso limite di una superficie colla sua doppia infinità di piani tangenti, precisamente come il limite di una superficie canale di asse curvilineo Γ il cui raggio tenda a zero. A un tale caso limite sono dunque ancora applicabili le formole generali di rappresentazione sferica sopra sviluppate.

§. 87.

Complementi alle formole generali.

Ritorniamo al caso generale $DD'' - D'^2 \neq 0$, ove la superficie S è così definita dalle due forme fondamentali

$$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \quad \begin{matrix} e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \end{matrix}$$

(1) Si può anche pensare al caso ulteriore in cui, annullandosi D, D', D'' i secondi membri delle (V) si annullano, in tal caso x, y, z si riducono a costanti e la superficie S si restringe (ad una sfera di raggio nullo).

e cerchiamo di esprimere per mezzo di e, f, g; D, D' D'' i principali elementi della superficie S.

Cercando in primo luogo le linee di curvatura, caratterizzate dalle formole di Rodriguez

$$dx = r\,dX\,,\quad dy = r\,dY\,,\quad dz = r\,dZ\,,$$

che scriviamo in coordinate curvilinee

$$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = r\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right) \text{ ecc.}$$

procedendo come al §. 71, le sostituiamo col sistema equivalente

$$(7)\qquad \begin{cases} (D + re)\,du + (D' + rf)\,dv = 0 \\ (D' + rf)\,du + (D'' + rg)\,dv = 0\,, \end{cases}$$

da cui, eliminando r, abbiamo l'equazione differenziale delle linee di curvatura

$$\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv\,,\ f\,du + g\,dv \\ D\,du + D'\,dv\,,\ D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

data ancora dall'eguagliare a zero il Jacobiano delle due forme (1). E se invece eliminiamo dalle (7) i differenziali du, dv, otteniamo l'equazione di secondo grado in r:

$$(8)\qquad (eg - f^2)\,r^2 + (eD'' + gD - 2fD')\,r + DD'' - D'^2 = 0\,,$$

le cui radici in r sono appunto i due valori r_1, r_2 dei raggi principali di curvatura. In particolare per la somma e per il prodotto di questi due raggi abbiamo

$$(9)\qquad \begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{2fD' - eD'' - gD}{eg - f^2} \\ r_1 r_2 = \dfrac{DD'' - D'^2}{eg - f^2}\,. \end{cases}$$

Se dalle (V) si formano $S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E$, $S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = F$, $S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G$ si trova

(1) Questo era evidente a priori, perchè la terza forma è una combinazione lineare delle altre due.

$$(10)\qquad E = -(r_1 + r_2)D - r_1 r_2 e,\ F = -(r_1 + r_2)D' - r_1 r_2 f,$$
$$G = -(r_1 + r_2)D'' - r_1 r_2 g,$$

formole che seguono anche subito dalle (3*), supposto però che si tratti di una effettiva superficie S.

Si osserverà che, pel modo stesso di deduzione, queste formole valgono anche nel caso eccezionale in cui la superficie S si restringe ad una curva (o ulteriormente ad un punto); ma in tal caso essendo $DD'' - D'^2 = 0$, per la seconda delle (9) uno dei raggi principali di curvatura si annulla il che corrisponde geometricamente all'annullarsi del raggio nella superficie canale (1).

Però anche in questo caso le immagini sferiche delle linee di curvatura formano un sistema ortogonale unico e determinato, come già risulta da quanto si è visto in generale al §. 42. Geometricamente è chiaro che esse sono le immagini sferiche delle linee di curvatura di tutte le superficie canali aventi per asse la curva Γ e constano dei circoli massimi nei piani paralleli ai piani normali di Γ e delle loro traiettorie ortogonali. Le formole attuali si riducono in tal caso a quelle dei §. 20 che dànno le evolute della curva Γ, e reciprocamente. Per verificarlo prendiamo le citate formole (42*) del §. 20, ove l'arco s della curva Γ si indicherà ora con v, mentre chiameremo u la costante c delle formole (42*).

Così i coseni di direzione X, Y, Z della normale generica alla curva Γ saranno

$$X = \cos(\tau + u)\,\xi + \operatorname{sen}(\tau + u)\,\lambda\,,\ \tau = \int \frac{dv}{T}$$

colle analoghe per Y, Z, e per le loro derivate risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\operatorname{sen}(\tau + u)\,\xi + \cos(\tau + u)\,\lambda\,. \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{\cos(\tau + u)}{\rho}\,\alpha\,. \end{cases}$$

D'altra parte abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial v} = \alpha,$$

(1) Se ulteriormente $D = D' = D'' = 0$, allora $r_1 = r_2 = 0$, avendosi una sfera di raggio nullo.

e quindi

$$e = 1 \qquad f = 0 \qquad g = \frac{\cos^2(\tau + u)}{\rho^2}$$

$$D = 0\ , \quad D' = 0\ , \quad D'' = \frac{\cos(\tau + u)}{\rho} = \sqrt{g}\ ,$$

formole che corrispondono precisamente alle circostanze sopra accennate.

§. 88.

Immagini sferiche delle asintotiche. Condizione del Dini.

Delle formole generali per la rappresentazione sferica delle superficie cominciamo dal fare un'importante applicazione al caso in cui, essendo la superficie S a punti iperbolici (almeno nella regione che si studia), le sue linee asintotiche siano reali e queste assumiamo a linee coordinate u, v. Indichiamo con

$$K = -\frac{1}{\rho^2}$$

la curvatura, ove ρ si assumerà positivo, ed avremo

$$r_1 r_2 = -\rho^2.$$

Le linee coordinate essendo le asintotiche, avremo

$$D = D'' = 0$$

e dalla seconda delle (9)

$$\frac{D'^2}{eg - f^2} = \rho^2, \qquad \frac{D'}{\sqrt{eg - f^2}} = \pm\rho\ .$$

Per togliere l'incertezza del segno ricordiamo (§. 77), che le asintotiche di un sistema sono sinistrorse, quelle dell'altro destrorse, e supponiamo p. e. che siano sinistrorse le $u = \text{cost.}^{\text{te}}$. Allora, dovendo valere la prima delle (43) §. 77 (pag. 208) ove si faccia $du = 0$, ne risulta che D' è *positivo*; dobbiamo dunque prendere nella nostra ipotesi

$$\frac{D'}{\sqrt{eg - f^2}} = \rho \tag{11}$$

Ponendo questo valore di $\frac{D'}{\sqrt{eg - f^2}}$ nelle formole (III*) di Codazzi, insieme a $D = D'' = 0$, ne risulta

$$\frac{\partial \log\rho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \tag{12}$$

onde segue che si ha *necessariamente*

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{13}$$

Viceversa se questa condizione (13) è soddisfatta, le (12) dànno ρ con una quadratura, a meno di un fattore costante, e prendendo

$$D = 0\ , D'' = 0\ , \quad D' = \rho\sqrt{eg - f^2}$$

si soddisfano le equazioni di Codazzi; perciò esiste una superficie S che ha per immagine delle sue asintotiche il sistema sferico prescritto (u, v). Abbiamo dunque l'importante risultato trovato la prima volta dal Dini:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema sferico (u, v), che dà al ds^2 la forma

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

sia l'immagine delle asintotiche di una superficie è che sia soddisfatta la (13), *ossia* (pag. 122)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u}}{eg - f^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial e}{\partial v}}{eg - f^2}\right). \tag{a}$$

Supposta soddisfatta questa condizione, e calcolato ρ dalle (12), avremo dalle (V)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\rho}{\sqrt{eg - f^2}}\left(f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\rho}{\sqrt{eg - f^2}}\left(-g\dfrac{\partial X}{\partial u} + f\dfrac{\partial X}{\partial v}\right); \end{cases} \tag{14}$$

così la superficie S è definita per quadrature a meno di un'omotetia e di una traslazione.

Le formole (9), diventano in questo caso

$$(14^*) \qquad r_1 + r_2 = \frac{2f\rho}{eg - f^2}, \quad r_1 r_2 = -\rho^2,$$

e le (10) dànno le altre semplici

$$(15) \qquad E = \rho^2 e, \quad F = -\rho^2 f, \quad G = \rho^2 g,$$

cioè: *il ds^2 della superficie è dato da*

$$(15^*) \qquad ds^2 = \rho^2 (e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2)$$

Sono anche da segnalarsi le relazioni che qui intercedono fra i valori dei simboli di Christoffel della prima e terza forma fondamentale, relazioni che seguono subito dalle formole (I) di Weingarten (§. 85) ponendovi $b_{11} = b_{22} = 0$; così si ottiene:

$$(16) \quad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}' - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}', \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}' - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' \\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}', \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}', \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}', \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}' \end{cases}$$

Dopo ciò è manifesto che le formole (12) possono anche scriversi

$$(17) \qquad \frac{\partial \log\rho}{\partial u} = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \quad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},$$

essendo $K = -\frac{1}{\rho^2}$ la curvatura della superficie S d'elemento lineare

$$(18) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

È importante osservare che inversamente: *se una forma quadratica definita positiva.*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ha la curvatura negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$ *soddisfacente alle* (17), *esiste una ed una sola superficie (a meno di una simmetria) il cui ds^2 dato dalla* (18) *e che ha le linee (u, v) per linee asintotiche.*

E infatti ponendo

$$D = D'' = 0, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \pm\frac{1}{\rho},$$

è manifestamente soddisfatta l'equazione di Gauss (III) §. 67, ma anche, per le (18), sono verificate le due equazioni (IV*) (ibid), di Codazzi.

§. 89.

Le linee asintotiche sulle superficie d'area minima.

Abbiamo già detto chiamarsi superficie d'area minima quelle che hanno nulla in ogni punto la curvatura media $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, cioè quelle per le quali *i due raggi principali di curvatura sono eguali e di segno contrario.* Ciò equivale a dire che in ogni punto di una superficie minima l'indicatrice è l'insieme di due iperbole (coniugate) equilatere, ossia le linee asintotiche di una superficie minima formano un sistema doppio ortogonale, come le linee di curvatura. E siccome la rappresentazione sferica per queste superficie è conforme, anche le immagini sferiche delle asintotiche sono ortogonali, od anche perchè nell'immagine sferica la direzione di un'asintotica devia di un angolo retto (§. 84). E da questa ultima osservazione segue altresì che, inversamente, se le immagini sferiche delle asintotiche formano un sistema ortogonale la superficie è ad area minima. Tutto ciò risulta nuovamente dalle formole superiori, giacchè se $r_1 + r_2 = 0$, la (14*) dà $f = 0$ e la (15) $F = 0$, e viceversa. Ma non tutti i sistemi ortogonali sferici sono immagini di asintotiche di una superficie minima. Per vedere quale è la condizione a ciò necessaria e sufficiente basta porre $f = 0$ nella condizione (a) del Dini

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(g\frac{\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u}}{eg - f^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(e\frac{\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial e}{\partial v}}{eg - f^2}\right)$$

onde la condizione richiesta è

$$\frac{\partial^2 \log e}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log g}{\partial u\,\partial v}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2 \log\left(\frac{e}{g}\right)}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Ora, secondo la formola (22*) §. 50 (pag. 130), questa esprime che il sistema ortogonale (u, v) è isotermo, onde il risultato: *Tutti e soli i sistemi sferici ortogonali ed isotermi sono immagini di asintotiche di superficie minime.*

Per avere dunque tutte le superficie d'area minima basta prendere il più generale sistema ortogonale isotermo sulla sfera, e se per semplicità lo supponiamo già ridotto ai parametri isometrici u, v, col porre

$$ds'^2 = \lambda (du^2 + dv^2) \quad e = g = \lambda,$$

le formole (12) dànno

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = -\frac{\partial \log \lambda}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = -\frac{\partial \log \lambda}{\partial v},$$

da cui

$$\rho = \frac{a}{\lambda} \qquad (a \text{ costante})$$

e sostituendo nelle (14) (e cangiando i segni) avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a}{\lambda}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{a}{\lambda}\frac{\partial X}{\partial u},$$

formole che determinano per quadrature la superficie minima corrispondente (a meno di un'omotetia). E siccome tutti i sistemi isotermi sulla sfera sono noti, si può dire che le formole precedenti assegnano per quadrature tutte le superficie minime. Conformemente alla formola generale (15), il ds^2 della superficie minima sarà dato da

$$ds^2 = \frac{a^2}{\lambda}(du^2 + dv^2),$$

il che conferma che sulla superficie minima stessa le linee asintotiche formano un sistema (ortogonale) isotermo. Ritorneremo del resto in apposito Capitolo sulle interessanti proprietà delle superficie minime, di cui qui abbiamo dato un primo saggio.

§. 90.

Le asintotiche sulle superficie pseudosferiche.

Diconsi superficie *pseudosferiche* le superficie a curvatura costante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$ e la costante R dicesi il loro raggio. Ponendo $\rho = R$ (costante) nelle formole fondamentali (12), otteniamo subito

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0,$$

e queste esprimono che le linee sferiche (u, v) formano una rete di Tchebychef (§. 60). Viceversa se si prende sulla sfera una rete (u, v) di Tchebychef, sono nulli i simboli $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}', \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'$ ed esiste quindi una superficie pseudosferica, di raggio comunque assegnato R, di cui quella rete è l'immagine delle asintotiche. Si vede quindi che: *Ogni rete di Tchebychef sulla sfera è l'immagine delle asintotiche di una superficie pseudosferica, e viceversa.*

Abbiamo dimostrato (§. 62) che su qualunque superficie, in particolare sulla sfera, esistono infinite reti di Tchebychef (dipendenti da due funzioni arbitrarie), potendosi assegnare ad arbitrio due curve di sistema opposto della rete, e così è anche provata l'esistenza di infinite superficie pseudosferiche. La loro ricerca si riduce a quella delle reti di Tchebychef sulla sfera, ossia (§. 63) all'integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \operatorname{sen} \omega = 0$, o anche cangiando ω in $\pi - \omega$ alla

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \operatorname{sen} \omega,$$

di cui tratteremo distesamente in seguito.

Ma veniamo ora alle asintotiche sulla superficie pseudosferica stessa. Le formole (16) o (17) provano che anche su questa superficie le linee (u, v) formano una rete di Tchebychef, poichè

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

E viceversa, se le asintotiche di una superficie formano una rete

di Tchebychef, essendo $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$, le (17) dànno $\rho = \text{cost.}$, onde la superficie è pseudosferica. Ma di un'altra notevole proprietà godono le linee asintotiche delle superficie pseudosferiche di raggio R; esse sono (§. 77) tutte curve di torsione costante $\pm \frac{1}{R}$, sinistrorse in uno dei sistemi, destrorse nell'altro: *Le linee asintotiche di una superficie pseudosferica di raggio* R *formano una rete di Tchebychef di curve a torsione costante* $+\frac{1}{R}$ *in un sistema,* $-\frac{1}{R}$ *nell'altro.*

In fine osserviamo che il teorema d'esistenza delle reti di Tchebychef sopra una data superficie (qui sulla sfera) con due curve assegnate della rete (§. 62) si traduce per le superficie pseudosferiche nel seguente: *Date ad arbitrio due curve con torsioni costanti e contrarie* $+\frac{1}{R}$, $-\frac{1}{R}$ C, Γ *che s'incrociano in un punto* O *dello spazio (senza toccarsi) ed aventi ivi a comune il piano osculatore, esiste una ed una sola superficie pseudosferica di raggio* R *che contiene* C *e* Γ *come linee asintotiche.*

Poniamo per semplicità R = 1 e, scegliendo convenientemente le direzioni positive delle tangenti in O a C e Γ, facciamo che coincidano in O, anche in verso positivo, le due binormali. Le due indicatrici sferiche C', Γ' delle *binormali* di C, Γ avranno così in comune un punto O' della sfera dove si incrocieranno senza toccarsi (perchè le loro tangenti sono rispettivamente parallele alle normali principali di C, Γ che in O non coincidono). Inoltre C' corrisponderà a C e Γ' a Γ per eguaglianza d'archi. Prendiamo ora la rete di Tchebychef sulla sfera individuata da (C', Γ') e consideriamo la superficie pseudosferica S di raggio R = 1 che ammette questa rete come immagine delle asintotiche. Le due asintotiche C, Γ di S corrispondenti a C', Γ' sono rispettivamente congruenti a C, Γ e s'incrociano nel punto comune sotto l'angolo prescritto.

§. 91.

Le formole di Lelieuvre per le asintotiche.

Ritorniamo alle formole generali (14) §. 88 per la rappresentazione sferica delle asintotiche di una qualunque superficie S. Esse possono trasformarsi in altre formole date da *Lelieuvre,* che, oltre all'interesse analitico, hanno una speciale importanza nella teoria delle *deformazioni infinitesime* delle superficie.

Per compiere la trasformazione in vista, partiamo da alcune identità generali, valevoli per un sistema coordinato qualsiasi (*u, v*). Nel determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2}$$

consideriamo i minori ottenuti sopprimendo dapprima la seconda linea:

$$Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u},\quad Z\frac{\partial x}{\partial u} - X\frac{\partial z}{\partial u},\quad X\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Siccome moltiplicandoli rispettivamente per X, Y, Z e sommando si ottiene lo zero, potremo porli (§. 65) rispettivamente sotto la forma

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v},\quad A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v},\quad A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}$$

determinando convenientemente A, B. Ora basta moltiplicare ordinatamente per $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, poi per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e sommare, onde segue

$$E A + F B = 0$$
$$F A + G B = \sqrt{EG - F^2}$$

da cui $$A = -\frac{F}{\sqrt{EG - F^2}},\ B = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Abbiamo dunque l'identità

$$(\alpha)\qquad Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{F}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

colle due analoghe circolando, ed affatto similmente le altre

$$(2^*)\quad Y\frac{\partial z}{\partial r}-Z\frac{\partial y}{\partial r}=-\frac{G}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

Se applichiamo in particolare queste identità alla sfera per la trasformazione delle formole (14), queste si scrivono

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\rho\begin{vmatrix} Y & Z\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\rho\begin{vmatrix} Y & Z\\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix},$$

od anche

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\begin{vmatrix} \sqrt{\rho}\,Y & \sqrt{\rho}\,Z\\ \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{\rho}\,Y) & \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{\rho}\,Z)\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\begin{vmatrix} \sqrt{\rho}\,Y & \sqrt{\rho}\,Z\\ \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{\rho}\,Y) & \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{\rho}\,Z)\end{vmatrix}$$

colle analoghe circolando sulle lettere. In luogo di X, Y, Z introduciamo ora le quantità proporzionali

$$(19)\qquad \xi=\sqrt{\rho}\,X,\ \eta=\sqrt{\rho}\,Y,\ \zeta=\sqrt{\rho}\,Z,$$

che diremo i coseni *normalizzati* della normale, e le formole si scriveranno sotto la forma *di Lelieuvre*

$$(VI)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=-\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\ \dfrac{\partial y}{\partial u}=-\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial\zeta}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial u}\end{vmatrix},\ \dfrac{\partial z}{\partial u}=-\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u}\end{vmatrix}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}=\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial\zeta}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial v}\end{vmatrix},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v}\end{vmatrix}.\end{cases}$$

Questi coseni normalizzati ξ, η, ζ godono di un'importante proprietà, che risulta dall'osservare la seconda delle (IV) §. 86 e le formole (12) §. 88, le quali dimostrano che X, Y, Z sono tre soluzioni della equazione di Laplace (ad invarianti eguali)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}+f\theta=0,$$

Ora eseguendo, secondo le (19), il cangiamento di funzione incognita

$$\sqrt{\rho}\,\theta=\varphi,$$

questa assume, nella nuova incognita φ, la forma normale di *Moutard*

$$(VI^*)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=M\varphi,\ \text{con}\ M=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v}-f,$$

e di questa sono tre soluzioni linearmente indipendenti ξ, η, ζ. Dunque: *Nelle formole* (VI) *di Lelieuvre i coseni normalizzati* ξ, η, ζ *sono tre soluzioni, linearmente indipendenti, di una equazione di Moutard* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=M\varphi$. *Inoltre per la curvatura* K *della superficie si ha*

$$(20)\qquad K=-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}.$$

Ora importa osservare che sussiste il teorema inverso: *Presa una qualunque equazione di Moutard*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=M\varphi\quad M=M(u,v),$$

e scelte tre sue soluzioni linearmente indipendenti ξ, η, ζ, *le formole* (VI) *di Lelieuvre danno per quadrature una superficie* S *di cui le linee* u, v *sono le asintotiche,* ξ, η, ζ *i coseni normalizzati della normale e la cui curvatura* K *sarà quindi data dalla* (20).

E infatti le condizioni d'integrabilità per le (VI) saranno soddisfatte, perchè

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix}+\frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ M\eta & M\zeta\end{vmatrix}=0$$

Inoltre da $S\,\xi\frac{\partial x}{\partial u}=0$, $S\,\xi\frac{\partial x}{\partial v}=0$ segue che ξ, η, ζ sono proporzionali ai coseni X, Y, Z della normale, precisamente

$$\xi=\sqrt{\rho}\,X,\ \eta=\sqrt{\rho}\,Y,\ \zeta=\sqrt{\rho}\,Z\ (\rho=\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

e dalle formole

$$S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=0,\ S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

seguono le altre

$$S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=0,\ S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}=0\ ,$$

le quali provano che le u, v sono le asintotiche della superficie. In fine siccome ora dalle (19) seguono inversamente le (14), la quantità ρ ha il significato di prima, cioè sussiste la (20).

§. 92.

Applicazioni delle formole di Lelieuvre.

a) Il risultato conseguito da Lelieuvre colle formole (VI) è notevole intanto per questo che ad ogni superficie S (a curvature opposte) associa un'equazione di Moutard

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=M\varphi$$

perfettamente determinata, a meno soltanto di un cangiamento dei singoli parametri u, v delle linee asintotiche. Ad ogni equazione di Moutard invece corrispondono infinite superficie dipendentemente dalle tre soluzioni scelte (ξ, η, ζ).

Prendiamo come primo esempio l'equazione

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}=0$$

e le sue tre soluzioni

$$\xi=v\quad \eta=\psi(v)\quad \zeta=u\ ,$$

dove $\psi(v)$ è una funzione arbitraria di v. Le formole (VI) di Lelieuvre, eseguendo le quadrature, dànno

$$x=-u\,\psi(v)\ ,\ y=u\,v\ ,\ z=\int(v\,\psi'(v)-\psi(v))\,dv.$$

Qui le asintotiche $v=$ cost.te sono rette appoggiate normalmente all'asse Oz, le superficie sono cioè conoidi rette, e la presenza della funzione arbitraria $\psi(v)$ permette di identificare la rigata con qualunque conoide retta. Dunque: *L'equazione di Moutard associata alle superficie conoidali rette è la* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=0$.

b) Consideriamo in secondo luogo l'equazione di Moutard associata ad una qualunque superficie minima. Siccome il valore del coefficiente M nell'equazione (VI*) è dato da

$$M=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v}-f\ ,$$

e le superficie *minime* sono caratterizzate dall'essere $f=0$, ne segue che in questo caso, ed in questo soltanto, l'equazione di Moutard possiede, oltre ξ, η, ζ la quarta soluzione

$$\theta=\sqrt{\rho}=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\ ,$$

Si vede quindi che: *le equazioni di Moutard*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=M\varphi$$

associate alle superficie d'area minima sono caratterizzate dall'avere quattro soluzioni ξ, η, ζ, θ *legate dall'identità omogenea quadratica*

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\theta^2=0$$

Conosciamo in termini finiti tutte le superficie minime, come legate ai sistemi isotermi sulla sfera (§. 89), e conosciamo quindi anche tutte queste equazioni di Moutard. Se poniamo il ds'^2 sferico sotto la forma

$$ds'^2=e^{2\omega}\,(du^2+dv^2),$$

la funzione $\omega(u, v)$ deve essere una soluzione della equazione (di Liouville)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+e^{2\omega}=0 \tag{21}$$

e potendosi prendere (§. 89)

$$\sqrt{\rho}=e^{-\omega},$$

vediamo che le equazioni di Moutard di questa classe sono date da

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = e^{\omega}\,\frac{\partial^2 e^{-\omega}}{\partial u\,\partial v}\,\varphi .$$

indicando con ω una qualunque soluzione della equazione (21) di Liouville. P. e. se prendiamo ω funzione di u soltanto, l'equazione di Moutard diventa $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = 0$, e per quattro soluzioni nelle condizioni richieste possiamo prendere

$$\xi = \cos v,\ \eta = \operatorname{sen} v,\ \zeta = \cot u,\ \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} u},$$

dopo di che le formole di Lelieuvre dànno

$$x = -\operatorname{sen} v \cot u \quad y = -\cos v \cot u \quad z = v,$$

equazioni dell'elicoide rigata ad area minima

$$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)^{(1)}.$$

c) In terzo luogo se applichiamo le formole di Lelieuvre alle superficie pseudosferiche per le quali

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho = \text{cost.}^{\text{te}},$$

vediamo così che: *la ricerca delle superficie pseudosferiche equivale a quella delle equazioni di Moutard che posseggono tre soluzioni* ξ, η, ζ *(non costanti) legate dalla identità quadratica*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{cost.}^{\text{te}}$$

Quale è il valore del coefficiente M in queste equazioni di Moutard? Il ds'^2 dell'immagine sferica ha la forma (§. 63)

$$ds'^2 = du^2 + 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2$$

con ω soluzione non costante della equazione

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \operatorname{sen}\omega = 0, \tag{22}$$

(1) O anche moltiplicando x, y, z per un fattore costante

$$z = \operatorname{marctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

(superficie delle normali principali dell'elica Cf. §. 27 in fine).

e d'altra parte, essendo $\rho = \text{cost.}^{\text{te}}$, il valore di M si riduce a $M = -f = -\cos\omega$, dunque:

Le equazioni di Moutard con tre soluzioni (non costanti) ξ, η, ζ *legate dall'identità* $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{cost.}^{\text{te}}$ *sono tutte e sole le equazioni della forma*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \cos\omega\,\varphi = 0, \tag{23}$$

con ω *soluzione non costante della* (22).

§. 93.

Superficie con assegnata immagine sferica di un sistema coniugato.

Un secondo caso in cui importa scrivere particolarmente le formole di rappresentazione sferica è quello in cui il sistema coordinato (u, v) sia *coniugato* sulla superficie.

Dobbiamo allora porre, nelle formole generali del §. 86, $D' = 0$ e le (III) diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' D - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' D'' \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}' D + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' D'', \end{cases} \tag{24}$$

alle quali possiamo anche dare la forma equivalente (III*):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{eg - f^2}}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}' \dfrac{D}{\sqrt{eg - f^2}} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' \dfrac{D''}{\sqrt{eg - f^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{eg - f^2}}\right) + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}' \dfrac{D}{\sqrt{eg - f^2}} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}' \dfrac{D''}{\sqrt{eg - f^2}} = 0. \end{cases} \tag{24*}$$

Scelta una qualunque coppia di funzioni D, D'' di u, v che soddisfino le (24) (o (24*)), ne risulterà individuata una superficie S che, rappresentata al modo di Gauss sulla sfera, avrà il sistema sferico (u, v) per immagine di un sistema coniugato, e la superficie si avrà per quadrature, secondo le (V) §. 86, dalle formole:

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{D}{eg-f^2}\left(-g\dfrac{\partial X}{\partial u} + f\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{D''}{eg-f^2}\left(f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Siccome un sistema differenziale come il (24) ammette soluzioni dipendenti da due funzioni arbitrarie una della u, l'altra della v, (1), così le superficie S con assegnata immagine sferica di un sistema coniugato dipendono da due funzioni arbitrarie. Osserviamo anche la forma semplice che prendono le formole generali nel caso attuale $D' = 0$; esse diventano

$$(26)\qquad r_1 + r_2 = -\frac{eD'' + gD}{eg-f^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{DD''}{eg-f^2}$$

$$(27)\qquad E = \frac{gD^2}{eg-f^2}, \quad F = -\frac{fDD''}{eg-f^2}, \quad G = \frac{eD''^2}{eg-f^2}.$$

È importante osservare anche in questo caso le relazioni fra i valori dei simboli di Christoffel per la superficie e quelli per la sfera. Basta porre per ciò $D' = 0$ (o $b_{12} = 0$) nelle formole generali (I) di Weingarten e si trova così facilmente

$$(28)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{\partial \log D}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} = -\dfrac{D''}{D}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\} = -\dfrac{D''}{D}\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}' \\ \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} = -\dfrac{D}{D''}\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\} = -\dfrac{D}{D''}\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}', \quad \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\partial \log D''}{\partial v} - \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}'. \end{cases}$$

Se facciamo ora il caso particolare che il sistema sferico (u, v) sia ortogonale, indi $f = 0$, il problema diventa quello di: *trovare le superficie con assegnata immagine sferica delle linee di curvatura.* Ma allora, avendosi

$$D = -e r_2, \quad D'' = -g r_1,$$

(1) Si sa dai teoremi generali d'esistenza che esiste una ed una sola coppia (D, D'') di soluzioni delle (24), tali che sia

$$D = \varphi(u) \quad \text{per } v = 0$$
$$D'' = \psi(v) \quad \text{per } u = 0,$$

essendo $\varphi(u)$, $\psi(v)$ funzioni arbitrariamente date, la prima della u, la seconda della v.

sostituendo nelle (25) e ponendovi per i simboli di Christoffel i loro valori si trova

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2)\dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1)\dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, \end{cases}$$

e da questo sistema differenziale viene così a dipendere il problema enunciato, in questo primo modo di trattazione.

§. 94.

Sistemi isotermo-coniugati — Nuove formole di Lelieuvre.

Abbiamo già definito al §. 79 i sistemi isotermo-coniugati e qui ci interessa il caso delle superficie a curvatura positiva specialmente per dare anche in questo caso, ove le asintotiche sono immaginarie, una forma reale alle formole di Lelieuvre. Supponiamo dunque nelle formole del paragrafo precedente $D = D''$ e poniamo

$$\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}} = \frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}} = \rho,$$

per modo che il valore della curvatura sarà

$$K = \frac{1}{\rho^2}.$$

Le (24*) diventano ora:

$$(30)\qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial u} = -\left(\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}'\right), \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = -\left(\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}'\right),$$

e supposto che ρ soddisfi a queste condizioni, la corrispondente superficie sarà data per quadrature dalle corrispondenti (25)

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\rho}{\sqrt{eg-f^2}}\left(-g\dfrac{\partial X}{\partial u} + f\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\rho}{\sqrt{eg-f^2}}\left(+f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \end{cases}$$

da cui pel suo ds^2

$$ds^2 = \rho^2 (g\,du^2 - 2f\,du\,dv + e\,dv^2). \tag{32}$$

Ora per la compatibilità delle (30) è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[{}^{11}_{1}{}^{\prime} + {}^{22}_{1}{}^{\prime}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[{}^{22}_{2}{}^{\prime} + {}^{11}_{2}{}^{\prime}\right], \tag{33}$$

che tiene qui il luogo della condizione del Dini (§. 88): ***Un sistema sferico (u, v) è immagine di un sistema isotermo coniugato di una superficie (definita per quadrature a meno di un'omotetia) solo quando è soddisfatta la*** (33).

Ed ora trasformiamo nuovamente le formole (31) per mezzo delle identità (α), (α*) §. 91.

$$\begin{cases} -\dfrac{g}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v} = Y\dfrac{\partial Z}{\partial v} - Z\dfrac{\partial Y}{\partial v} \\ \dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{e}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v} = Z\dfrac{\partial Y}{\partial u} - Y\dfrac{\partial Z}{\partial u}, \end{cases}$$

e troveremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \rho\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\rho\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix},$$

colle analoghe circolando sulle lettere. Ora introduciamo anche qui i coseni *normalizzati* di direzione della normale (Cf. §. 91).

$$\xi = \sqrt{\rho}\,X, \quad \eta = \sqrt{\rho}\,Y, \quad \zeta = \sqrt{\rho}\,Z \tag{34}$$

e le formole prenderanno l'aspetto seguente:

$$\text{(VI*)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial u} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

affatto analogo alle (VI) di Lelieuvre

Di più siccome X, Y, Z soddisfano alle (IV) §. 86, se sommiamo la prima e terza di queste coll'osservare le (30), risulta che X, Y, Z sono tre soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial \log\rho}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v} + (e+g)\,\theta = 0,$$

e se, osservando le (34), cangiamo la funzione incognita θ in

$$\varphi = \theta\sqrt{\rho},$$

troviamo per φ l'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = M\varphi, \quad \text{con } M = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial v^2}\right) - (e+g). \tag{35}$$

Dunque ξ, η, ζ sono tre soluzioni (linearmente indipendenti) di questa equazione (35). Nello stesso modo come al §. 91 si vede che inversamente: ***Se ξ, η, ζ sono tre soluzioni (linearmente indipendenti) di una medesima equazione*** (35), ***le formole*** (VI*), ***danno per quadrature una superficie S su cui le linee u, v tracciano un sistema isotermo-coniugato e la sua curvatura K è data da***

$$K = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}.$$

§. 95.

Le formole di Weingarten in coordinate tangenziali.

Un altro modo, spesso molto utile, di presentare le formole relative alla rappresentazione sferica è di considerare una superficie (non sviluppabile) secondo i concetti della dualità in geometria, come inviluppo dei suoi ∞^2 piani tangenti. Per questo converrà dare le ***coordinate*** del piano tangente mobile quali funzioni di due parametri *u, v* e cercare le coordinate del punto di contatto. E siccome lo studio nostro è essenzialmente volto alle proprietà metriche, sarà opportuno assumere coordinate metriche pel piano tangente, e noi ci serviremo dei coefficienti della sua equazione normale. Prenderemo adunque come coordinate del piano mobile i tre coseni di direzione X, Y, Z della sua normale (positiva) e la distanza (algebrica) della

origine dal piano, che si indicherà con W; supporremo quindi dati

$$X, Y, Z; W$$

in funzione di u, v. Le coordinate incognite x, y, z del punto di contatto si potranno intanto porre sotto la forma (§. 65)

$$x = \alpha \frac{\partial X}{\partial u} + \beta \frac{\partial X}{\partial v} + \gamma X, \tag{36}$$

colle analoghe per y, z purchè si determinino convenientemente α, β, γ. Ma, essendo appunto

$$S x X = W, \tag{37}$$

ne viene già $\gamma = W$. Derivando la (37) rapporto ad u e v, siccome deve aversi

$$S X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad S X \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \tag{38}$$

ne risulta

$$S x \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad S x \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v} \tag{38*}$$

e quindi dalla (36)

$$\begin{cases} \alpha e + \beta f = \dfrac{\partial W}{\partial u} \\ \alpha f + \beta g = \dfrac{\partial W}{\partial v}, \end{cases}$$

ovvero

$$\alpha = \frac{g \dfrac{\partial W}{\partial u} - f \dfrac{\partial W}{\partial v}}{eg - f^2}, \quad \beta = \frac{-f \dfrac{\partial W}{\partial u} + e \dfrac{\partial W}{\partial v}}{eg - f^2}.$$

Indicando adunque con $\nabla(W, X)$ il parametro differenziale misto di W, X, *costruito rispetto alla sfera*, le (36) diventano

$$x = \nabla(W, X) + W X, \; y = \nabla(W, Y) + W Y, \; z = \nabla(W, Z) + W Z, \tag{39}$$

e queste sono le formole domandate sotto forma invariantiva. Che esse diano in effetto le coordinate del punto mobile di contatto della superficie S, data per coordinate tangenziali, si verifica subito, poichè pel modo stesso come le (39) sono state dedotte, ne risultano verificate la (37) e la (38*), onde seguono le (38).

Quindi, se le (39) rappresentano una effettiva superficie (se la matrice $\begin{vmatrix} \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial u & \partial u & \partial u \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial v & \partial v & \partial v \end{vmatrix}$ sarà di caratteristica 2, questa sarà la superficie domandata inviluppo del piano (X, Y, Z; W); altrimenti essa si contrarrà in una curva di cui gli ∞^2 piani dati saranno i piani tangenti, ovvero infine si ridurrà ad un punto pel quale passeranno tutti i piani (Cf. §. 86).

Questi ultimi casi eccezionali si presenteranno quando W soddisfi a particolari condizioni che ora subito ritroveremo.

Cominciamo dal derivare le (39) rapporto ad u, v ricorrendo alle formole (E) alla fine del §. 40 (pag. 100), che applicate al caso nostro dànno

$$\frac{\partial \nabla(W, X)}{\partial u} = \frac{g W_{11} - f W_{12}}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{e W_{12} - f W_{11}}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial v} +$$

$$+ \frac{g X_{11} - f X_{12}}{eg - f^2} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{e X_{12} - f X_{11}}{eg - f^2} \frac{\partial W}{\partial v},$$

e l'analoga per $\dfrac{\partial \nabla(W, X)}{\partial v}$. Ma per le formole (IV) §. 86

$$X_{11} = -eX, \; X_{12} = -fX, \; X_{22} = -gX,$$

onde resta

$$\frac{\partial \nabla(W, X)}{\partial u} = \frac{g W_{11} - f W_{12}}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{e W_{12} - f W_{11}}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial W}{\partial u} X.$$

Dalle (39) abbiamo quindi

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{g W_{11} - f W_{12}}{eg - f^2} + W \right) \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{e W_{12} - f W_{11}}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial v},$$

coll'analoga per $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, che conviene ora scrivere sotto la forma

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{g(W_{11}+eW)-f(W_{12}+fW)}{eg-f^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{e(W_{12}+fW)-f(W_{11}+eW)}{eg-f^2}\dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{g(W_{12}+fW)-f(W_{22}+gW)}{eg-f^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{e(W_{22}+gW)-(W_{12}+fW)}{eg-f^2}\dfrac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Come si vede, queste formole combinano colle fondamentali (V) §. 86, ove per le tre quantità

$$-D-D', -D''$$

si ponga rispettivamente

$$W_{11}+eW,\ W_{12}+fW,\ W_{22}+gW.$$

Possiamo di qui riconoscere subito quando accadrà che la superficie S inviluppo si contragga in una curva C, o ulteriormente in un punto. Avverrà il primo caso, quando, senza essere nulle insieme le tre quantità sopra scritte, sia nullo il loro determinante

$$(W_{11}+eW)(W_{22}+gW)-(W_{12}+fW)^2,$$

cioè, sviluppando e dividendo per $eg-f^2$, quando $W=Sx\,X$ sia una soluzione dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$(41)\qquad \Delta_{22}W+W\Delta_1 W+W^2=0.$$

Ne segue che possiamo subito assegnare l'integrale generale di questa equazione come dato da

$$W=xX+yY+zZ$$

assumendo x, y, z quali funzioni arbitrarie di un parametro t funzione di u, v. L'ulteriore caso che la superficie S si contragga in un punto si presenta quando W sia una soluzione del sistema

$$W_{11}+eW=0,\ W_{12}+fW=0,\ W_{22}+gW=0,$$

del quale sono tre soluzioni, per le (IV), X, Y, Z, e però la generale è

$$W=aX+bY+cZ$$

con a, b, c costanti. Ed è ben geometricamente evidente che in tal caso la superficie S si contrae nel punto (a, b, c) pel quale passano tutti i nostri piani.

Lasciando da parte questi casi eccezionali, avremo un'effettiva superficie S i cui coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale saranno

$$(42)\quad -D=W_{11}+eW,\ -D'=W_{12}+fW,\ -D''=W_{22}+gW$$

Di qui, formando colle (91) la somma r_1+r_2 e il prodotto $r_1 r_2$ dei due raggi principali di curvatura, troviamo le due formole notevoli

$$(43)\quad \begin{cases} r_1+r_2=\Delta_1 W+2W & \text{(formola di Weingarten)} \\ r_1 r_2=\Delta_{22}W+W\Delta_2 W+W^2, \end{cases}$$

che esprimono queste due quantità per parametri differenziali di W. Dalla seconda risulta nuovamente che se W soddisfa alla (41) la superficie S si riduce ad una linea, perchè uno dei raggi principali di curvatura si annulla (§. 87). E la prima dimostra che: *l'equazione tangenziale delle superficie d'area minima è*

$$\Delta_2 W+2W=0.$$

§. 96.

Conferma analitica e ulteriori proprietà.

Dall'analisi sopra sviluppata risulta implicitamente che, indicando con W una qualunque funzione di u, v, le tre quantità b_{11}, b_{12}, b_{22} date da

$$(44)\qquad W_{11}+eW=b_{11},\ W_{12}+fW=b_{12},\ W_{22}+gW=b_{22}$$

soddisfano alle due equazioni di Codazzi, ma anche inversamente se b_{11}, b_{12}, b_{22} sono tre funzioni di u, v soddisfacenti alle equazioni di Codazzi, riguardando le (44) come sistema simultaneo del secondo ordine per la funzione incognita W, questo sistema è completamente integrabile, e se W_1 ne è una soluzione particolare la generale è data da

$$W=W_1+c_1X+c_2Y+c_3Z$$
$$(c_1, c_2, c_3 \text{ costanti}).$$

Ora vogliamo confermare analiticamente questi risultati, che dipendono essenzialmente dall'essere la forma $e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2$ a curvatura costante $=+1$, ed anzi li estenderemo senz'altro alle forme differenziali in un numero qualunque n di variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, quando siano a curvatura Riemanniana costante, riserbando a future ricerche la loro interpretazione geometrica. Dimostriamo pertanto il

teorema seguente:

Se la forma differenziale in n variabili

$$f = \sum_{i,k}^{1..n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura Riemanniana costante c, presa una funzione arbitraria $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, (1) *e posto*

(VIII) $$\ldots_{ik} + c\, a_{ik}\, \Phi = b_{ik},$$

per la forma differenziale

$$\varphi = \sum_{i,k}^{1..n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è nulla identicamente la forma trilineare còvariante (f, φ) (§. 40), *cioè le* b_{ik} *soddisfano le relazioni*

$$(45)\qquad \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_k} = \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ \lambda \end{matrix} \right\} b_{\lambda k} - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} b_{\lambda l}\ (2).$$

Viceversa se le b_{ik} *sono tali funzioni delle x da soddisfare le* (45), *il sistema simultaneo* (VII) *per la funzione incognita* Φ *è completamente integrabile.*

Per dimostrare la prima parte di questa proposizione ricorriamo alle identità generali (D*) §. 40 (pag. 99)

$$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Phi_{il}}{\partial x_k} = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\,(i\mu, lk)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ \lambda \end{matrix} \right\} \Phi_{k\lambda} - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} \Phi_{l\lambda},$$

le quali si semplificano ora per l'ipotesi che la forma f sia a curvatura Riemanniana costante e quindi si abbia (§. 39 pag. 94)

$$(i\mu, lk) = c\,(a_{il}\, a_{k\lambda} - a_{ik}\, a_{l\mu}),$$

da cui

(1) Finita e continua colle derivate almeno fino al quarto ordine.

(2) I simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ si intendono costruiti per la prima forma f coi coefficienti $a_{\lambda k}$.

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\,(i\mu, lh)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} = c \sum_{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu} A_{\lambda\mu}\,(a_{il}\, a_{k\mu} - a_{ik}\, a_{l\mu})$$

$$= c \left(a_{il}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - a_{ik}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right),$$

onde le identità

$$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Phi_{il}}{\partial x_k} = c \left(a_{il}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - a_{ik}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \right) + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ \lambda \end{matrix} \right\} \Phi_{k\lambda} - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} \Phi_{l\lambda}.$$

Se, avendo riguardo a queste identità, formiamo dalle (VII) la differenza $\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_k}$ troviamo per le (VII) stesse

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_k} = c \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} \right) \Phi + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ \lambda \end{matrix} \right\} (b_{k\lambda} - c\, a_{k\lambda}\, \Phi) -$$

$$- \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} (b_{l\lambda} - c\, a_{l\lambda}\, \Phi).$$

Il coefficiente di $c\Phi$ nel secondo membro

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} a_{l\lambda} - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ \lambda \end{matrix} \right\} a_{\lambda k}$$

è evidentemente nullo (§. 40) e le (45) risultano in effetto verificate. La prima parte della proposizione risulta così stabilita; ma insieme anche la seconda poichè, supposte verificate le (45), il calcolo stesso prova che le condizioni d'integrabilità per le (VII) sono soddisfatte.

Non lascieremo di osservare, ritornando al caso binario, che, comunque si prenda la funzione Φ, le tre quantità b_{11}, b_{12}, b_{22} calcolate dalle (VII), soddisfano alle equazioni di Codazzi. Se ulteriormente determiniamo Φ in modo che venga soddisfatta anche l'equazione di Gauss.

$$\frac{b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2} = c,$$

ne risulterà individuata nello spazio una superficie a curvatura costante. La relazione superiore si traduce per Φ nell'equazione del secondo ordine

$$\Delta_{22}\Phi + c\,\Phi\,\Delta_2\Phi + c^2\,\Phi^2 = c,$$

la cui risoluzione equivale dunque alla ricerca delle superficie a curvatura costante c.

§. 97.

Applicazioni delle formole in coordinate tangenziali.

Riprendiamo colle formole in coordinate tangenziali il problema del §. 93: *determinare le superficie con assegnata immagine sferica (u, v) di un sistema coniugato.*

Dovendo allora aversi $D' = 0$, la media delle (42) dimostra che W dovrà soddisfare alla equazione $W_{12} + fW = 0$, che sviluppata scriviamo

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial W}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial W}{\partial v} - fW . \tag{46}$$

Di questa equazione sono tre soluzioni particolari X, Y, Z ed ogni altra sua soluzione W, linearmente indipendente da X, Y, Z, (1) dà una superficie S corrispondente al problema. Si vede quindi che per ogni sistema coniugato (u, v) scelto sulla superficie le quattro coordinate tangenziali X, Y, Z, W sono soluzioni di una stessa equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \gamma \varphi ,$$

come anche inversamente, se questo avviene, il sistema (u, v) sulla superficie è coniugato.

Dalla semplice osservazione che l'equazione (46) è lineare omogenea, ed anche le formole (39) sono lineari omogenee in W e nelle sue derivate, si trae subito una conseguenza che importa notare. Siano θ_1, θ_2 due particolari soluzioni della (46) ed S_1, S_2 le due superficie corrispondenti, e indichino (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) le coordinate di due loro punti M_1, M_2 corrispondenti. Prendiamo la terza soluzione

$$\theta = a\theta_1 + b\theta_2 \ (a, b \text{ costanti})$$

composta linearmente da θ_1, θ_2, e consideriamo la superficie S corrispondente di cui sia $M \equiv (x, y, z)$ il punto generico; avremo

(1) Se $W = aX + bY + cZ$ la superfice S si contrae in un punto.

$$x = a x_1 + b x_2, \quad y = a y_1 + b y_2, \quad z = a z_1 + b z_2 .$$

Prendendo per semplicità $a + b = 1$ risulta: *Se due superficie S_1, S_2 dànno due soluzioni del problema c, considerati i segmenti $M_1 M_2$ che ne uniscono i punti corrispondenti, si divide ciascuno di essi in un rapporto costante $\frac{a}{b}$, il punto M di divisione descrive una terza superficie S soluzione del problema.*

Queste osservazioni generali possono applicarsi in particolare al caso che il sistema sferico (u, v) si supponga ortogonale $(f = 0)$; il problema diventa allora quello di *trovare le superficie con data immagine sferica delle linee di curvatura*. Sostituendo pei simboli $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}', \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'$ i loro valori effettivi, si vede che il problema equivale all'integrazione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} . \tag{46*}$$

Giova talora introdurre in questo caso, insieme alla distanza W dell'origine dal piano tangente, le due distanze dai due piani *principali*, distanze che indicheremo con

$$W_1 = S_x \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad W_2 = S_x \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v} .$$

Allora, siccome dalle (38*) segue

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{e}\, W_1, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \sqrt{g}\, W_2,$$

se a queste si aggrega la (46*) si forma il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_2, & \dfrac{\partial W_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1 \\ \dfrac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{e}\, W_1, & \dfrac{\partial W}{\partial v} = \sqrt{g}\, W_2, \end{cases} \tag{47}$$

e ad ogni terna (W_1, W_2, W) integrale corrisponde una superficie della classe richiesta.

Capitolo VI.

Curvatura tangenziale o geodetica — Linee geodetiche.

Curvatura tangenziale o geodetica. — Formola del Bonnet. — Nuova espressione per la curvatura K (Liouville). — Linee geodetiche. — Varie forme della loro equazione differenziale. — Linee geodeticamente parallele. — Ellissi e iperbole geodetiche. — Torsione geodetica. — Teoremi sull' integrazione dell' equazione delle geodetiche. — Geodetiche sulle superficie di Liouville. — Curvatura totale di un triangolo geodetico. — Sistemi doppi ortogonali di linee a curvatura geodetica costante. — Rappresentazione geodetica di una superficie sopra un' altra. — Teoremi del Beltrami e del Dini. — Caso particolare delle quadriche in corrispondenza omografica e geodetica.

§. 98.

Curvatura tangenziale o geodetica.

Nei due Capitoli precedenti ci siamo occupati delle prime e fondamentali proprietà relative alla configurazione effettiva di una superficie nello spazio. Ora andiamo a riprendere lo studio delle proprietà intrinseche delle figure esistenti sulla superficie, iniziato al Cap. III, e in primo luogo introduciamo l'importante nozione di *curvatura tangenziale* di una qualunque linea tracciata sulla superficie, in un suo punto M, nozione che, per la geometria sulla superficie, tiene il luogo dell'ordinaria curvatura di una linea nella *geometria piana*.

Consideriamo sopra una superficie S una linea L qualsiasi uscente da un punto M (ordinario) e proiettiamo ortogonalmente L sul piano tangente in M; sia L' questa curva piana proiezione di L, che avrà in M comune la tangente con L. L'ordinaria curvatura di questa proiezione L' nel punto M si dirà la *curvatura tangenziale* di L in M, ed il centro M' di curvatura di L' si chiamerà il centro di *curvatura tangenziale*.

Si osservi che le normali calate dai punti di L sul piano tangente in M formano un cilindro di cui L' è la sezione retta, sicchè sulla superficie cilindrica la L' è precisamente la sezione normale

tangente in M alla L. Quindi per la seconda forma del teorema di Meusnier (§. 72 pag. 191) si può dire anche: *Il centro di curvatura tangenziale in M della linea* L *è il punto* M' *ove l' asse del circolo osculatore in* M *alla* L *incontra il piano tangente.*

Alla curvatura tangenziale ed al relativo centro si darà più spesso il nome di curvatura *geodetica* e di centro di *curvatura geodetica*, denominazioni che giustificheremo fra breve (V. §. 103).

Diciamo subito che alla curvatura tangenziale ed alla sua inversa (raggio di curvatura tangenziale) si darà non solo un valore assoluto ma anche un segno, in base all' osservazione seguente.

Il segmento M M' che dal punto M va al centro di curvatura M' della L' è misurato, nel piano tangente, sulla retta normale alla tangente di M, e siccome su questa normale sarà fissato il più delle volte un determinato verso come positivo

competerà un valore algebrico, che indicheremo con

$$\rho_g = \overline{M\,M'},$$

$v =$ cost.te, che indicheremo con $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$, i segni essendo già fissati dalle convenzioni precedenti e da quelle già ammesse sui versi positivi delle linee coordinate. Prendiamo per es. una linea $u =$ cost.te, per la quale riteniamo le solite notazioni del Cap. I, ed abbiamo anzi tutto pel suo elemento d'arco $ds_u = \sqrt{G}\, dv$ e pei coseni di direzione (positiva) della sua tangente (§. 44)

$$\alpha_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \beta_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

e differenziando lungo la linea colle formole di Frenet, risulta:

$$(2)\quad \frac{\xi_u}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \frac{\eta_u}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}\right), \frac{\zeta_u}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Ora i coseni di direzione positiva della tangente alla linea $v =$ cost.te, sono

$$\alpha_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \beta_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

indi

$$\cos\varepsilon = S\,\alpha_v\,\xi_u, \quad \frac{\cos\varepsilon}{\rho} = S\,\alpha_v\frac{\xi_u}{\rho},$$

onde risulta per le (2)

$$(3)\quad \frac{1}{\rho_u} = \frac{\cos\varepsilon}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{E\,G}}\,S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Ma si ha

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

e derivando rapporto a v

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

per cui

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

e la (3) ci dà in definitiva

$$(4)\quad \frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Così avremo anche la formola analoga

$$(4^*)\quad \frac{1}{\rho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Si vede da queste formole che le curvature geodetiche delle linee coordinate dipendono solo *dai coefficienti* E, G *della prima forma fondamentale;* inoltre, per la loro definizione stessa, comunque si cangino le variabili, esse serbano per le stesse linee gli stessi valori. Queste proprietà indicano già che le curvature tangenziali delle linee tracciate sulla superficie sono *parametri differenziali* rispetto alla prima forma fondamentale ed è questa ragione appunto che ne rende tanto importante la considerazione.

§. 99.

Formola del Bonnet per la curvatura tangenziale.

Sviluppando ora l'ultima osservazione, trasformiamo le formole (4), e (4*) sopra ottenute in guisa da cangiarle in espressioni contenenti soltanto parametri differenziali. Per questo osserviamo che si ha

$$\Delta_1 u = \frac{1}{E}, \quad \Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{G}{E}}$$

$$\nabla(u, \sqrt{E}) = \frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u},$$

onde la (4) può scriversi

$$(5)\quad -\frac{1}{\rho_u} = \frac{\Delta_2 u}{\sqrt{\Delta_1 u}} + \nabla\left(u, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}}\right),$$

formola in cui il secondo membro è effettivamente un parametro differenziale.

Dopo ciò possiamo facilmente risolvere il problema: *Sulla superficie S, riferita ad un qualunque sistema coordinato* (u, v), *che dia al* ds^2 *la forma*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

considerando un qualunque sistema ∞^1 *di linee di equazione* $\varphi(u, v) =$ cost.te, *calcolare la curvatura geodetica* $\frac{1}{\rho_\varphi}$ *di queste linee.* Diciamo subito che a questa curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ noi attribuiamo anche un segno, fissando che il senso positivo delle traiettorie ortogonali delle $\varphi =$ cost.te *sia quello secondo cui cresce il parametro* φ. Cangiando allora le linee coordinate nelle $\varphi =$ cost.te e nelle loro traiettorie ortogonali $\psi =$ cost.te, abbiasi:

$$ds^2 = E_1\,d\varphi^2 + G_1\,d\psi^2.$$

Secondo la formola (5), avremo

$$-\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{\Delta_2\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} + \Delta\left(\psi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right),$$

e siccome appunto nel secondo membro figurano solo parametri differenziali, sarà indifferente calcolarli nelle nuove coordinate (φ, ψ) o nelle antiche u, v. Ora si ha

$$\Delta_1\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\nu(\psi, \omega) = \frac{1}{EG - F^2}\left\{\left(E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v} + \left(G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}\right\}$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\},$$

e quindi

$$-\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{\Delta_1\varphi}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right) + \frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\rho}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{\Delta_1\varphi}\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{\Delta_1\psi}\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\},$$

che possiamo scrivere in modo definitivo:

$$(I)\quad \frac{1}{\rho_\psi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\frac{\partial\psi}{\partial u} - E\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}}\right)\right\}.$$

È questa la formola del Bonnet che dà l'espressione generale richiesta per la curvatura geodetica.

Si osservi che la formola è omogenea (di grado zero) nelle derivate $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$ e si presta quindi al calcolo della curvatura geodetica di un sistema di linee definito soltanto da un'equazione differenziale del 1° ordine

$$M\,du + N\,dv = 0.$$

Se $\varphi =$ cost.te è l'integrale si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} : \frac{\partial\varphi}{\partial v} = M : N$$

e la (I) dà quindi senz'altro:

$$(I^*)\qquad \frac{1}{\rho_\varphi}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FN-GM}{\sqrt{EN^2-2FMN+GM^2}}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{FM-EN}{\sqrt{EN^2-2FMF+GM^2}}\right)\right\}.$$

Si osservi in particolare che la (I), prendendo $\varphi=u$ ovvero $\varphi=v$ dà per le curvature geodetiche delle linee coordinate $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}$ in un sistema obliquo qualunque:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_u}=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{F}{\sqrt{G}}\right)-\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\} \\ \dfrac{1}{\rho_v}=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{F}{\sqrt{E}}\right)-\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right\}, \end{cases}$$

le quali formole naturalmente, per $F=0$, tornano a dare le (4), (4*) da cui siamo partiti.

Se in fine, in queste ultime formole, alle derivate dei coefficienti sostituiamo le loro espressioni pei simboli di Christoffel, possiamo presentarle sotto questa nuova forma

$$(6^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_u}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{1}{\rho_v}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

§. 100.

Formola del Liouville per la curvatura K.

La formola (V) del §. 41 (pag. 102) per la curvatura K

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}\right)\right\}$$

si può ora scrivere introducendovi colle (6*) i valori di $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}$.

Abbiamo in primo luogo

$$(7)\qquad K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\right)\right\},$$

e dalle formole

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \operatorname{sen}\omega=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

per l'angolo ω delle linee coordinate, derivando la prima rapporto a v e dividendo per la seconda risulta

$$-\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{F}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\right\}$$

e sostituendo per le derivate dei coefficienti nel secondo membro i loro valori espressi pei simboli di Christoffel (formole (A) §. 34 pag. 82) si trova

$$-\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}+\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}.$$

Questa, osservando la prima delle (6*), si può scrivere

$$-\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\sqrt{G}}{\rho_u},$$

e sostituendo nella (7) risulta la formola elegante e simmetrica

$$(II)\qquad K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)\right\},$$

che è la *formola di Liouville.*

Supponiamo in particolare che *sia costante l'angolo* ω *delle linee coordinate,* onde la (V) resta

$$(8)\ K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_u}\right)+\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_v}\right)+\frac{1}{\rho_v}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{1}{\rho_u}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right\}.$$

Ma avendosi

$$\sqrt{EG - F^2} = \operatorname{sen}\omega \sqrt{EG}, \quad \frac{F}{\sqrt{G}} = \cos\omega \sqrt{E}, \quad \frac{F}{\sqrt{E}} = \cos\omega \sqrt{G},$$

le formole (6) dànno

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\omega \sqrt{EG}}{\rho_u} = \cos\omega \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \\ \dfrac{\operatorname{sen}\omega \sqrt{EG}}{\rho_v} = \cos\omega \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \end{cases}$$

da cui

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}\omega}\left(\frac{\cos\omega}{\rho_u} + \frac{1}{\rho_v}\right), \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}\omega}\left(\frac{1}{\rho_u} + \frac{\cos\omega}{\rho_v}\right),$$

e sostituendo nella (8) risulta

$$(9)\quad K = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\right\} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left[\frac{1}{\rho_u^2} + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{2\cos\omega}{\rho_u \rho_v}\right],$$

dove è da osservarsi che nell'ultimo termine il fattore $\frac{1}{\rho_u^2} + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{2\cos\omega}{\rho_u \rho_v}$ è sempre essenzialmente positivo, e nullo soltanto quando siano nulle insieme $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}$. Se supponiamo poi in particolare che sia costante $\frac{1}{\rho_u} = a$, e medesimamente $\frac{1}{\rho_v} = b$, la formola (9) resta

$$K = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}(a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\omega),$$

il che dimostra che la curvatura K è costante negativa, o nulla (per $a = b = 0$). Dunque: *Se una superficie possiede un doppio sistema di linee che si taglino sotto angolo costante, ed in ciascun sistema tutte le linee hanno la stessa curvatura geodetica costante, la superficie è a curvatura costante negativa (è pseudosferica), ovvero a curvatura nulla (è sviluppabile) quando le dette curvature geodetiche siano nulle.*

§. 101.

Linee geodetiche e prima forma della loro equazione differenziale.

Chiameremo *linee geodetiche* della superficie le linee a *curvatura tangenziale* $\frac{1}{\rho_g}$ eguale a zero.

Siccome, secondo la (1) §. 98

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos\varepsilon}{\rho},$$

la condizione $\frac{1}{\rho_g} = 0$ porta che si abbia $\cos\varepsilon = 0$, ovvero eccezionalmente $\frac{1}{\rho} = 0$. Nel primo caso si ha $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, cioè la normale principale della linea coincide colla normale alla superficie, e, nel secondo $\frac{1}{\rho} = 0$, la linea in questione è una retta ed avendo, come tale, indeterminata la normale principale, si può bene assumere per questa la normale alla superficie; così la definizione posta equivale a dire: *sono linee geodetiche della superficie quelle linee lungo le quali la normale alla superficie coincide colla normale principale alla curva*, ovvero: una linea è geodetica sulla superficie quando il suo piano osculatore in ogni punto è normale alla superficie.

Dal modo stesso come abbiamo definito le linee geodetiche ricaviamo subito l'equazione differenziale caratteristica del *secondo ordine* a cui debbono soddisfare esprimendo, colla formola (I) del Bonnet, che è nulla la loro curvatura tangenziale. Sia infatti

$$v = \psi(u)$$

l'equazione in termini finiti di una linea geodetica, supposta dapprima non coincidente con una linea $u = \text{cost.}^{te}$. Ponendo nella formola (II) di Bonnet

$$\varphi = v - \psi(u),$$

dobbiamo fare $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\psi'(u)$, e poichè *lungo la linea stessa*

deve essere $\frac{1}{\rho_g} = 0$, ne risulta che sarà soddisfatta lungo la linea l'equazione differenziale caratteristica del secondo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F + G\psi'(u)}{\sqrt{E + 2F\psi'(u) + G\psi'^2(u)}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E + F\psi'(u)}{\sqrt{E + 2F\psi'(u) + G\psi'^2(u)}}\right) = 0.$$

Se in luogo della derivazione parziale rispetto ad u nel primo termine introduciamo la derivazione *totale* rapporto ad u denotata col simbolo $\frac{d}{du}$, siccome

$$\frac{d}{du} = \frac{\partial}{\partial u} + \psi'(u)\frac{\partial}{\partial v},$$

la precedente si scrive

$$\frac{d}{du}\left(\frac{F + G\psi'}{\sqrt{E + 2F\psi' + G\psi'^2}}\right) - \psi'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F + G\psi'}{\sqrt{E + 2F\psi' + G\psi'^2}}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E + F\psi'}{\sqrt{E + 2F\psi' + G\psi'^2}}\right) = 0$$

od anche

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} = 0.$$

Questa è, per la funzione incognita $v = v(u)$, un' equazione differenziale del secondo ordine e ne sarà determinato in modo univoco un integrale se noi prescriviamo ad arbitrio, per un valore iniziale $u = u_0$ della variabile indipendente, il valore $v = v_0$ che prende v e quello della sua derivata prima $v_0' = \left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0}$ nello stesso punto, ciò che si interpreta geometricamente così:

Per ogni punto $P_0 \equiv (u_0 v_0)$ ***della superficie, in assegnata direzione, passa una ed una sola linea geodetica.***

Questa prima forma (III), che abbiamo trovato per l'equazione differenziale delle linee geodetiche, corrisponde precisamente, pei principi del calcolo delle variazioni, alla ***equazione d'Eulero*** per le curve minimizzanti sulla superficie l'integrale

$$J = \int_{(u_0, v_0)}^{(u_1, v_1)} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du \ (^1)$$

preso fra limiti fissi (u_0, v_0), (u_1, v_1) integrale che rappresenta la lunghezza dell'arco di curva $v = v(u)$ congiungente i due punti fissi. Se ne conclude che la linea ACB di più breve lunghezza (sulla superficie) che congiunge due dati punti A, B dovendo soddisfare alla (III), ha certamente in ogni punto la normale principale coincidente colla normale alla superficie, cioè è una geodetica nel senso sopra definito. Sussiste anche la proprietà inversa che se sulla linea geodetica (a curvatura tangenziale nulla) si segna un primo punto A poi un secondo punto B ***sufficientemente vicino ad*** A, l'arco AB di geodetica segna sulla superficie il più breve cammino per andare da A a B, almeno finchè si rimanga in un intorno superficiale sufficientemente ristretto dell'arco AB (²). Questo risulta dai teoremi generali del calcolo delle variazioni e sarà fra breve dimostrato direttamente (Vedi §. 105); ma appunto la proprietà di minimizzare la lunghezza d'arco AB fra due punti ha luogo in generale soltanto entro certi limiti. Quella invece da cui siamo partiti per la definizione permane lungo tutto il corso della linea, per quanto si prolunghi, sempre soddisfacendo all'equazione differenziale (III), ed è per questo che l'abbiamo preferita fin da principio come quella che regola tutto il corso della linea geodetica.

§. 102.

Altre forme per l'equazione differenziale delle geodetiche.

Consideriamo una linea geodetica g, e siano

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

le equazioni parametriche di g per l'arco s, talchè avremo

(¹) Posta infatti $\Phi(u, v, v') = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}$, l'equazione d'Eulero per le curve minimizzanti si scrive: $\frac{d}{du}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v'}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$, che è appunto la (III).

(²) La ricerca dei limiti entro i quali un arco di geodetica corrisponde effettivamente al problema di minimo è una questione interessantissima del calcolo delle variazioni che esce dai limiti del presente trattato, e per la quale rimandiamo il lettore particolarmente al Tomo III delle *Leçons sur la théorie des surfaces* del DARBOUX (Livre VI Chap. V). Vedi anche BOLZA *Variationsrechnung* Leipzig Teubner 1900.

$$(10)\qquad E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1\,.$$

Mantenendo le solite notazioni per la curva g, i coseni α, β, γ della sua tangente sono

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}\,, \text{ ecc.}$$

e queste, derivate rapporto ad s colle formole di Frenet, e ricordando che i coseni di direzione della normale principale di g sono per ipotesi

$$\pm X\,,\ \pm Y\,,\ \pm Z\,,$$

dànno, per le formole fondamentali (I) §. 65 pag. 170

$$\pm\frac{X}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2} + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + D\,X\right]\left(\frac{du}{ds}\right)^2 +$$

$$+ 2\left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + D'\,X\right]\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left[\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + D''\,X\right]\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

colle due analoghe per y, z. Debbono dunque essere identici dall'una e dall'altra parte i coefficienti di $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, X. Paragonando i primi, risulta che debbono sussistere, lungo la g, le due equazioni differenziali seguenti

$$(IV)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \end{cases}$$

e viceversa, se queste si verificano lungo g, la linea è geodetica (1).

(1) Il paragone dei termini in X dà luogo di nuovo alla formola (§. 72)

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

che esprime la curvatura assoluta (o normale) della linea geodetica nella direzione segnata dal rapporto $\frac{dv}{du}$.

Alle (IV) possiamo anche sostituire il sistema equivalente ottenuto moltiplicandole ordinatamente per E, F, poi per F, G ed ogni volta sommando, il che dà:

$$\begin{cases} E\dfrac{d^2u}{ds^2} + F\dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \\ F\dfrac{d^2u}{ds^2} + G\dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \end{cases}$$

e queste possono scriversi sotto la forma semplice

$$(IV^*)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{d}{ds}\left(E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds}\right) = \dfrac{\partial E}{\partial u}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 \\ 2\dfrac{d}{ds}\left(F\dfrac{du}{ds} + G\dfrac{dv}{ds}\right) = \dfrac{\partial E}{\partial v}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2. \end{cases}$$

In tutte queste formole è preso l'arco s per variabile indipendente; ma dalle (IV) deduciamo subito la seguente

$$(11)\qquad du\,d^2v - dv\,d^2u + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}du^3 + \left[2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right]du^2\,dv$$

$$+ \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]du\,dv^2 - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}dv^3 = 0$$

che, pel modo come è formata, vale per qualunque variabile indipendente. In particolare se prendiamo u come variabile indipendente e scriviamo l'equazione della supposta geodetica g, come sopra

$$v = v\,(u)$$

ponendo $v' = \frac{dv}{du}$, $v'' = \frac{d^2v}{du^2}$, abbiamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$(III^*)\qquad v'' - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}v'^3 + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]v'^2 - \left[2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right]v' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0,$$

la quale non è altro che la (III) sviluppata e sostituite alle derivate dei coefficienti le loro espressioni pei simboli di Christoffel.

Ritornando alle (IV), o alle (IV*) equivalenti, è da osservare che in realtà si riducono ad una sola, se si tien conto della equazione

del primo ordine (10), che dà il significato di s, poichè infatti derivando la (10) si ottiene una combinazione lineare delle (IV*) o (IV). Precisamente se si pone

$$\alpha = 2\frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) - \frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\beta = 2\frac{d}{ds}\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right) - \frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

si trova, derivando la (10), l'identità

$$\alpha\frac{du}{ds} + \beta\frac{dv}{ds} = 0$$

che per ogni linea, non coincidente con una delle linee coordinate, rende una delle due equazioni $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (cioè delle (IV*)) conseguenza dell'altra. Se si tratta però di esprimere che una delle linee coordinate p. e. una $v = \text{cos.}^{te}$ è geodetica bisogna ricorrere alla seconda equazione $\beta = 0$ perchè la prima (per $dv = 0$, $ds = \sqrt{E}\,du$) è già per sè un'identità.

§. 103.

La curvatura tangenziale come curvatura geodetica.

Applichiamo le equazioni differenziali (IV) delle linee geodetiche a giustificare il nome di curvatura geodetica dato alla curvatura tangenziale di una linea qualunque L della superficie. Si è già osservato che questo elemento è un parametro differenziale dipendente solo dai coefficienti del ds^2 e non dalla configurazione della superficie nello spazio. Deve essere quindi possibile darne una definizione geometrica intrinseca, senza uscire dalla superficie, come si definisce la curvatura di una linea piana senza uscire dal piano. Per questo basterà sostituire alle rette del piano (geodetiche) le geodetiche della superficie e ricorrere a quella proprietà dell'ordinaria curvatura che abbiamo esposto alla fine del §. 2 (pag. 5). Considerata la linea L, ed un suo punto M_0, tiriamo ivi la geodetica tangente g ed, a partire da M_0, portiamo sopra L e sopra g due archetti $M_0 M$, $M_0 \overline{M}$ di eguale lunghezza h, che riguarderemo come un infinitesimo di primo ordine, e indichiamo con d la distanza, misurata sulla superficie, dei due estremi $M, \overline{M}$ degli archi. Dimostreremo che il rapporto

$$\Omega = \frac{2d}{h^2},$$

al tendere di h a zero, converge verso un limite determinato e finito; questo limite può prendersi come misura in M_0 della deviazione della linea L dalla geodetica e vedremo poi subito che esso combina (salvo il segno) col valore prima definito della curvatura tangenziale. Per le coordinate u, v del punto M, trascurando gli infinitesimi in h, d'ordine superiore al secondo, abbiamo

$$\begin{cases} u = u_0 + h\left(\frac{du}{ds}\right)_0 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_0 \\ v = v_0 + h\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)_0, \end{cases}$$

l'indice o denotando che i valori in considerazione sono calcolati in M_0 (per $u = u_0$, $v = v_0$ o $s = 0$).

Per la geodetica g, avremo formole analoghe per il calcolo delle coordinate $\bar{u}, \bar{v}$ di $\overline{M}$, ma siccome la g tocca in M_0 la L, i valori delle derivate prime $\left(\frac{du}{ds}\right)_0, \left(\frac{dv}{ds}\right)_0$ saranno gli stessi, e quanto a quelli delle derivate seconde si calcoleranno dalle (IV); così avremo

$$\bar{u} = u_0 + h\left(\frac{du}{ds}\right)_0 - \frac{h^2}{2}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2\right]$$

$$\bar{v} = v_0 + h\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 - \frac{h^2}{2}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2\right].$$

Per gli accrescimenti $\delta u, \delta v$ delle coordinate curvilinee nel passaggio da $\overline{M}$ a M, cioè per

$$\delta u = u - \bar{u}, \quad \delta v = v - \bar{v}$$

risulta dalle formole precedenti che ponendo

$$(12)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{d^2u}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 \\ \eta = \dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2, \end{cases}$$

dove le quantità s' intendono calcolate per la linea data L nel punto M_0, si avrà

$$\delta u = \frac{h^2}{2}\xi,\ \delta v = \frac{h^2}{2}\eta.$$

La lunghezza d dell' elemento lineare $M\overline{M}$ sulla superficie è dunque

$$d = \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2} = \frac{h^2}{2}\sqrt{E\,\xi^2 + 2F\,\xi\eta + G\,\eta^2},$$

si ha quindi

$$\frac{2d}{h^2} = \sqrt{E\,\xi^2 + 2F\,\xi\eta + G\,\eta^2},$$

la quale formola però, avendo trascurati gli infinitesimi d' ordine superiore, deve piuttosto scriversi

$$(13)\qquad \lim_{h=0}\frac{2d}{h^2} = \sqrt{E\,\xi^2 + 2F\,\xi\eta + G\,\eta^2}.$$

Ed ora facciamo vedere che questo limite, a cui diamo il nome di curvatura *geodetica*, combina precisamente, salvo il segno, con quella prima definita come curvatura tangenziale e si avrà così questa nuova formola per il calcolo del valore assoluto della curvatura geodetica

$$(14)\qquad \frac{1}{\rho_g} = \sqrt{E\,\xi^2 + 2F\,\xi\eta + G\,\eta^2},$$

dove ξ, η si calcolano dalle (12) (1).

(1) Per es. se l' elemento lineare è quello del piano in coordinate cartesiane ortogonali $ds^2 = du^2 + dv^2$ si ritorna all'ordinaria formola $\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)^2}$.

Per dimostrare questo, data la natura invariante degli elementi in considerazione, basterà riferirsi a coordinate speciali. Prendiamo il sistema (u, v) ortogonale e la linea L sia p. e. una $v = \text{cost.}^{te}$, sicchè $dv = 0$, $ds = \sqrt{E}\,du$, da cui

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) - \frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}$$

$$\eta = \frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$$

Ma si ha, §. 48 formole (A) pag. 122

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v},$$

onde risulta $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2EG}\frac{\partial E}{\partial v}$, e il secondo membro della (14) diventa $\sqrt{G}\,\eta = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E}$, e combina precisamente (con questa determinazione di segno) col valore $\frac{1}{\rho_v}$ della curvatura tangenziale *secondo* la (4*) pag. 267.

Dimostrata così l' identità della curvatura tangenziale colla curvatura geodetica, diciamo ancora di una terza proprietà che le fa anche dare il nome di *curvatura di sviluppo*. Osserviamo prima che se due superficie si toccano lungo una linea L, questa ha manifestamente la stessa curvatura tangenziale (geodetica) per le due superficie. Ciò vale in particolare della superficie S e della sviluppabile Σ circoscritta alla S lungo L.

Se ora distendiamo la sviluppabile in un piano, la L si trasforma in una curva piana C che ha in ogni punto per curvatura ordinaria la curvatura geodetica di L, poichè nello sviluppo non cangiano gli elementi lineari, e le geodetiche di Σ si mutano nelle rette del piano. Dunque: *la curvatura geodetica di una linea* L *di* S *eguaglia la curvatura ordinaria della sua trasformata piana, ottenuta sviluppando in un piano la sviluppabile circoscritta a* S *lungo* L.

Se si applica p. e. questo teorema alla determinazione geodetica di un parallelo sopra una superficie di rotazione, essendo in questo caso la sviluppabile circoscritta un cono di rotazione attorno all'asse, vediamo che: *Il raggio di curvatura geodetica di un parallelo è egua-*

le alla porzione di tangente al meridiano compresa fra il punto di contatto e l' asse di rotazione.

§. 104.

Equazione differenziale di Gauss per le geodetiche.

Alle diverse forme che abbiamo dato all' equazione differenziale delle geodetiche (§§. 101, 102) aggiungiamone ora un'altra notevole, dovuta a Gauss, nella quale si fa comparire l' angolo θ d' inclinazione della geodetica g in considerazione sulle linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$, supponendo dapprima che la linea stessa non sia una $v = \text{cost.}^{te}$.

Allora, a caratterizzare la linea g come geodetica, basterà la prima delle (IV*), alla quale diamo un' altra forma introducendo l' angolo θ misurato nel senso preciso di cui al (§. 45 pag. 115) secondo le formole (7), (7*) ibid.

$$(15) \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right), \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}.$$

Allora la citata formola (IV*), moltiplicata per ds^2, si scrive

$$2\,ds\,d(\sqrt{E}\cos\theta) = \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2,$$

ossia per le (15) stesse

$$\frac{1}{E}(E\,du + F\,dv)\,dE - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,d\theta = \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2,$$

che equivale alla

$$2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,d\theta = dE\,du + \frac{F}{E}dE\,dv - \frac{\partial E}{\partial u}du^2 - 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv - \frac{\partial G}{\partial u}dv^2$$

$$= \left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right)du + \frac{F}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - \frac{\partial E}{\partial u}du^2 - 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv - \frac{\partial G}{\partial u}dv^2.$$

A destra i due termini in du^2 si distruggono, e resta a sinistra e a destra il fattore comune $2\,dv$ che possiamo sopprimere, perchè

lungo la nostra linea g, per ipotesi $dv = 0$, così risulta la forma definitiva

$$(V)\quad \sqrt{EG - F^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

che è appunto quella data da Gauss e si può scrivere anche ordinata nel secondo membro così:

$$(V^*)\quad d\theta = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\right\}du + \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right\}dv.$$

Essa caratterizza il modo come, movendosi lungo una linea geodetica g, varia l'angolo θ (azimuth della geodetica) in corrispondenza agli incrementi du, dv delle variabili.

Ed ora osserviamo che, sebbene questa forma (V) o (V*) sia stata dedotta nell' ipotesi che la geodetica non sia una $v = \text{cost.}^{te}$, essa vale però anche in questo caso. E infatti, per le formole (6*) §. 99, abbiamo il risultato che conviene esplicitamente notare:

Una linea $v = \text{cost.}^{te}$ è una geodetica se lungo di essa $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$;

similmente una $u = \text{cost.}^{te}$ è geodetica se lungo di essa $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$.

Ora, secondo le formole sviluppate nel quadro (A) §. 48, la $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$ equivale alla seguente

$$\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

alla quale si riduce appunto la (V*) quando si applichi ad una linea $v = \text{cost.}^{te}$ (essendo allora $dv = 0$, $d\theta = 0$).

Un' altra osservazione importante da farsi sulla (V*) è questa che *se la forma differenziale $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ è a curvatura nulla il secondo membro della (V*) è un differenziale esatto.* Difatti se si scrive la condizione $K = 0$ colla formola (E) §. 48 (pag. 123) si vede appunto che questa esprime essere il secondo membro della (V*) un differenziale esatto. In questa ipotesi $K = 0$, avremo dalla (V*) con una quadratura

$$\theta = \psi(u, v) + C \qquad (C \text{ costante arbitraria})$$

e siccome per la (9) §. 45 è $\operatorname{tg}\theta$ una funzione lineare del rapporto $\frac{dv}{du}$, si conclude: *quando la superficie è a curvatura nulla basta una quadratura per ottenere della equazione differenziale delle geodetiche un integrale primo*:

$$\frac{dv}{du} = f(u, v, C)$$

contenente una costante arbitraria. Come dopo ciò basta un'altra quadratura per avere *in termini finiti* l'equazione generale delle geodetiche sarà spiegato fra breve (V.^{i} §. 144).

Osserviamo in fine che nel caso particolare di linee coordinate ortogonali ($F = 0$), l'equazione di Gauss prende la forma semplice

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} du - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv. \tag{16}$$

§. 105.

Proprietà generali delle linee geodetiche.

L'equazione differenziale delle geodetiche non si sa integrare esplicitamente che in pochi casi particolari (V.^{i} più avanti §. 112). Ciò non ostante, partendo dalla equazione differenziale stessa, si possono dimostrare alcune proprietà generali ed importanti delle linee geodetiche, di cui ora ci andiamo ad occupare. Entro la doppia infinità di linee geodetiche, consideriamo una qualunque semplice infinità ed assumiamole a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$, insieme alle loro trajettorie ortogonali $u = \text{cost.}^{te}$. Avremo intanto pel ds^2 la forma ortogonale

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

la quale varrà almeno in una regione convenientemente limitata entro la quale il reticolo coordinato sarà regolare. Ora, siccome le linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ sono geodetiche, la loro curvatura geodetica, data dalla (4) §. 98 (pag. 267), dovrà essere zero, indi $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$, ossia $\sqrt{E} = U$ essendo U una funzione della sola u. Ma allora cangiando il parametro u in $\int U\,du$ si rende $E = 1$ e il ds^2 prende la così detta *forma geodetica*

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \tag{16}$$

dalla quale si deducono conseguenze di grande importanza. In primo luogo consideriamo l'arco di una qualunque geodetica $r = \text{cost.}^{te}$ del sistema, compreso fra due trajettorie ortogonali fisse $u = u_0, u = u_1$. Siccome $ds_0 = du$, il detto arco sarà

$$\int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0,$$

valore che è lo stesso per tutte le geodetiche del sistema r. Si ha dunque questo primo e fondamentale teorema:

A) *Gli archi intercetti sopra le geodetiche di un qualunque sistema ∞^1 da due loro trajettorie ortogonali hanno tutti eguale lunghezza.*

Possiamo dare a questo teorema anche l'altra forma equivalente:

B) *Se ad una linea qualunque* L *della superficie si conducono in tutti i punti le geodetiche g ortogonali, e sopra ciascuna di queste, a partire da* L, *si staccano archi di eguale lunghezza, il luogo degli estremi di questi archi è un'altra trajettoria ortogonale* L′ *delle geodetiche g.*

Per queste proprietà le trajettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di linee geodetiche diconsi fra loro *geodeticamente parallele.*

È bene osservare che le proprietà trovate sono caratteristiche delle linee geodetiche, cioè:

A′) *Se in un doppio sistema ortogonale (u, v) l'arco delle $v = \text{cost.}^{te}$, compreso fra due loro trajettorie ortogonali qualunque $u = u_0$, $u = u_1$, è lo stesso per tutte le v, queste sono linee geodetiche (indi le u geodeticamente parallele)*

Difatti se $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, si ha $ds_v = \sqrt{E}\,du$, quindi essendo per ipotesi il detto arco $\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E}\,du$ indipendente da r, deve essere $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$ (oppure prendasi a parametro u l'arco delle v contato da $u = u_0$ e ne verrà $\sqrt{E} = 1$).

Dalla forma geodetica (16) dell'elemento lineare possiamo ora facilmente dedurre la proprietà di *minimo* per ogni arco di geodetica $v = \text{cost.}^{te}$ *finchè si rimane nell'interno della regione per la quale vale* (16), Dimostriamo cioè:

Presi sopra una qualunque delle geodetiche $v =$ cost.te due punti qualunque $P_0 \equiv (u_0\, v_0)$, $P_1 \equiv (u_1, v_1)$ della regione, ogni altra linea L che, restando entro la regione, unisca P_0 con P_1 ha lunghezza maggiore della geodetica. Difatti l'arco della geodetica è dato da $\int_{u_0}^{u_1} du$, e quello della L invece $\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}$, il cui valore, non essendo sempre $dv = 0$, è certamente maggiore.

In fine ricordiamo la forma semplice, già segnalata in (6) §. 48, che prende la curvatura K per la forma geodetica del ds^2, e cioè

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{17}$$

§. 106.

Linee geodeticamente parallele.

Abbiamo detto sopra chiamarsi geodeticamente parallele un sistema ∞^1 di linee quando le loro trajettorie ortogonali sono linee geodetiche. Domandiamo ora come si riconosce, dato dapprima un sistema ∞^1 di linee in termini finiti

$$\varphi(u, v) = \text{cost.te},$$

se queste sono geodeticamente parallele?

Se questo accade, cangiando le linee coordinate nelle $\varphi =$ cost.te e nelle trajettorie ortogonali $\psi =$ cost.te, nella corrispondente forma del ds^2:

$$ds^2 = E_1\, d\varphi^2 + G_1\, d\psi^2$$

deve essere E_1 funzione della sola φ. Ma si ha $E_1 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}$ e quindi il criterio richiesto è semplicemente il seguente: *Le linee $\varphi =$ cost.te sono geodeticamente parallele allora ed allora soltanto che $\Delta_1 \varphi$ è funzione della sola φ.*

In questa ipotesi, se cangiamo il parametro φ in

$$\theta = \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}},$$

sarà precisamente θ l'arco delle geodetiche ortogonali contato da una $\varphi =$ cost.te fissa, ed allora avremo $\Delta_1 \theta = 1$. Viceversa se $\Delta_1 \theta = 1$ le $\theta =$ cost.te sono geodeticamente parallele e θ è l'arco delle geodetiche ortogonali. Risulta di qui l'importante teorema:

Se la funzione $\theta = \theta(u, v)$ soddisfa all'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$E\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2$$

$$(\text{o } \Delta_1 \theta = 1),$$

le linee $\theta =$ cost.te sono geodeticamente parallele, e θ è l'arco delle geodetiche ortogonali, contato da una linea fissa $\theta = \theta_0$.

Ma supponiamo ora di più che le linee $\varphi =$ cost.te, in luogo di essere date in termini finiti, siano definite come le linee integrali di un'equazione differenziale del primo ordine

$$A\,du + B\,dv = 0, \tag{18}$$

essendo A, B funzioni date di u, v. Come riconosceremo se le linee integrali sono geodeticamente parallele? L'equazione differenziale delle loro trajettorie ortogonali è (§. 46, (14))

$$(EB - FA)\,du + (FB - GA)\,dv = 0, \tag{19}$$

e la questione è di vedere se le linee integrali di quest'ultima sono geodetiche. Per questo basta esprimere colla formola (I*) §. 99 (pag. 270) del Bonnet che la loro curvatura geodetica è nulla. Ora qui abbiamo

$$M = EB - FA, \quad N = FB - GA, \text{ indi}$$

$$FN - GM = -(EG - F^2)B, \quad FM - EN = (EG - F^2)A$$

$$EN^2 - 2FMN + GM^2 = (EG - F^2)(EB^2 - 2FAB + GA^2),$$

per cui la citata (I*) diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG - F^2}\,B}{\sqrt{EB^2 - 2FAB + GA^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG - F^2}\,A}{\sqrt{EB^2 - 2FAB + GA^2}}\right)$$

ed esprime che il primo membro della (18) ammette il fattore integrante $\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EB^2 - 2FAB + GA^2}}$. Dunque: *La condizione necessaria e*

sufficiente affinchè le linee integrali della (18) *siano geodeticamente parallele è che il primo membro della* (18) *ammetta il fattore integrante*

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EB^2 - 2FAB + GA^2}}.$$

Soddisfatta questa, le linee stesse si hanno in termini finiti con una quadratura; precisamente se si pone

$$\theta = \int \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(A\,du + B\,dv)}{\sqrt{EB^2 - 2FAB + GA^2}},$$

si ha $\Delta_1 \theta = 1$ *e* θ *è l'arco delle geodetiche ortogonali contate da una* $\theta = \theta_0$ *fissa.*

§. 107.

Forma geodetica polare del ds^2.

Il teorema B) del paragrafo precedente vale qualunque sia la curva L, quindi anche se, fissato un punto (ordinario) O della superficie, si prende per L una piccola curva chiusa σ che giri una volta attorno ad O. Se restringiamo σ attorno ad O, sino a ridurla al punto stesso, il teorema B) si converte, *al limite*, nel seguente: *Se da un punto O (ordinario) della superficie si spiccano geodetiche in tutte le direzioni e su queste si staccano, a partire da O, archi di lunghezza eguale, il luogo degli estremi è una curva ortogonale a tutte le geodetiche del fascio.*

Qui però si rende necessaria una dimostrazione più rigorosa e diretta del teorema, dalla quale dedurremo inoltre le speciali proprietà che appartengono in questo caso alla funzione $\sqrt{G}$ nella corrispondente forma geodetica (16) del ds^2. Consideriamo dunque il fascio di geodetiche uscenti da un punto (ordinario) O della superficie, e sopra di esse stacchiamo, a partire da O, archi di eguale lunghezza u, variabile da $u = 0$ fino ad un certo limite (finito). Prendiamo per linee coordinate del primo sistema queste linee $u = \text{cost.}^{te}$ e per le $v = \text{cost.}^{te}$ le geodetiche stesse precisando che il parametro v sia l'angolo che una geodetica variabile del fascio forma in O con una iniziale $v = 0$. Il ds^2 assuma la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

dove però, dovendo aversi $ds_v = du$, sarà necessariamente $E = 1$. Ma allora la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ delle $v = \text{cost.}^{te}$, secondo la (6_2) pag. 270, sarà

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{G - F^2}} \frac{\partial F}{\partial u};$$

e poichè per ipotesi $\frac{1}{\rho_v} = 0$, avremo $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, cioè

$$F = \varphi(v),$$

dove $\varphi(v)$ è una funzione della sola v. Ora se x_0, y_0, z_0 sono le coordinate di O, le tre funzioni

$$x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)$$

debbono ridursi per $u = 0$, *qualunque sia* v, alle tre costanti x_0, y_0, z_0, e quindi le tre derivate

$$\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}$$

debbono annullarsi *per* $u = 0$. Dunque anche

$$F = S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

si annulla *per* $u = 0$, ed essendo F funzione della sola v, sarà F *identicamente* nullo, cioè le linee coordinate (u, v) sono ortogonali c. d. d. Il ds^2 prende dunque anche qui la forma geodetica (che diremo polare)

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2;$$

ma in questo caso competono alla funzione $\sqrt{G}$ proprietà speciali che riconosciamo facilmente, svolgendo, in un intorno sufficientemente piccolo di O ($u = 0$), le $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ per potenze di u, nella qual cosa, riguardando u come infinitesimo di primo ordine, trascureremo le potenze di u superiori alla seconda. Per semplicità, situiamo in O l'origine degli assi, facendo coincidere l'asse Oz colla normale, e l'asse Ox colla tangente alla geodetica iniziale $v = 0$; avremo

$$x = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 u + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_0 \frac{u^2}{2} + \dots$$

$$y = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 u + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0 \frac{u^2}{2} + \dots$$

$$z = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 u + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)_0 \frac{u^2}{2} + \dots$$

Ma i valori $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0, \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0, \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0$, per $u = 0$, coincidono coi coseni di direzione della tangente alla geodetica v, cioè con $\cos v$, $\operatorname{sen} v$, 0 e quelli delle derivate seconde per $u = 0$ coi coseni di direzione della normale principale, divisi pel raggio ρ di prima curvatura della geodetica; e siccome la detta normale principale coincide in O, per tutte le geodetiche, coll'asse Oz, le tre derivate seconde per $u = 0$ si ridurranno rispettivamente a:

$$0,\ 0,\ \pm\frac{1}{\rho},$$

e quindi abbiamo

$$x = u\cos v + \dots$$

$$y = u \operatorname{sen} v + \dots$$

$$z = \pm\frac{u^2}{2\rho} + \dots,$$

i termini non scritti essendo d'ordine superiore al secondo in u. Se ne deduce subito:

$$G = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = u^2 + \dots,$$

e per ciò $\lim_{u=0} \frac{G}{u^2} = 1$, ossia $\lim_{u=0} \frac{\sqrt{G}}{u} = 1$. Abbiamo dunque

$$(a) \qquad \left(\sqrt{G}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_0 = 1 \ (\text{per } u = 0).$$

Dopo ciò possiamo anche calcolare i valori, per $u = 0$, delle due successive derivate di $\sqrt{G}$ dalla formola

$$K\sqrt{G} = -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

che ci dà, tenendo conto della (a)

$$(b) \qquad \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial u^3}\right)_0 = -K_0,$$

avendo indicato con K_0 la curvatura in O. E così, tenendo conto nello sviluppo di $\sqrt{G}$ per potenze di u dei termini fino al terzo ordine, abbiamo

$$(c) \qquad \sqrt{G} = u - \frac{K_0}{6} u^3 + \dots$$

Nel caso attuale le linee $u = \text{cost.}^{te}$, luogo dei punti che si trovano alla medesima distanza geodetica u dal punto fisso, diconsi *circoli geodetici* di centro O. Però è bene avvertire che se queste linee sono assimilabili, per la loro generazione meccanica, agli ordinarii circoli della geometria piana, *non dividono* però con questi l'altra importante proprietà di essere linee *a curvatura geodetica costante* (1), salvo nel caso delle superficie a curvatura costante.

Osserviamo che se prendiamo un circolo geodetico di raggio r infinitesimo la sua periferia C, trascurando infinitesimi d'ordine superiore al terzo, si calcola dalla (c) in

$$(d) \qquad C = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dv = 2\pi r - \frac{\pi K_0}{3} r^3,$$

e secondo che $K_0 < 0$ o $K_0 > 0$ questa periferia supera od è inferiore a quella di un circolo piano d'egual raggio.

Similmente se con $A = \iint \sqrt{G}\, du\, dv$ si indica l'area del circolo geodetico, si ha subito dalla (c)

$$(e) \qquad A = \pi r^2 - \frac{\pi K_0}{12} r^4,$$

trascurando le potenze di r oltre la quarta.

---

(1) Alcuni autori, come il Darboux, dànno invece il nome di circoli (geodetici) a queste curve.

§. 108.

Ellissi ed iperbole geodetiche.

Consideriamo, sulla superficie S, due curve qualunque C, C', che non siano però geodeticamente parallele, le quali assumeremo come curve *basi*.

Prendiamo poi le curve geodeticamente parallele a C, e quelle geodeticamente parallele a C', le quali formeranno un doppio sistema, che assumeremo a linee coordinate $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ (1) rispettivamente. Precisiamo anzi i parametri u, v, prendendo a parametro u la distanza geodetica dalla curva base C, similmente a parametro v la distanza geodetica dall'altra curva base C'.

Supposto che l'espressione del ds^2 sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

dovremo avere (§. 106)

$$\Delta_1 u = 1, \quad \Delta_1 v = 1,$$

ossia

$$\frac{G}{E\,G - F^2} = 1, \quad \frac{E}{E\,G - F^2} = 1,$$

dunque

$$E = G, \quad F = \pm\sqrt{E\,(E-1)}.$$

Indicando con ω l'angolo delle linee coordinate, avremo per ciò

$$E = G = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}, \quad F = \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega},$$

e il ds^2 prende la forma già per sè notevole

$$ds^2 = \frac{du^2 - 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2}{\operatorname{sen}^2\omega}, \tag{20}$$

che *conviene (in infiniti modi) a qualunque superficie*. Ma più importante è la forma che si ottiene cangiando le linee coordinate nelle loro bisettrici, che diremo (α, β). L'equazione differenziale di queste bisettrici è (§. 47 pag. 119)

(1) *Ben inteso, bisognerà limitarsi a considerare una regione della superficie in cui le* (u, v) formino un reticolo regolare.

$$du^2 - dv^2 = (du + dv)\,(du - dv) = 0,$$

e le *loro equazioni in termini finiti*

$$u + v = \text{cost.}^{te}, \quad u - v = \text{cost.}^{te}.$$

Possiamo dunque porre

$$u + v = 2\alpha, \quad u - v = 2\beta, \tag{21}$$

e trasformando la (20) in coordinate α, β, col porre inoltre $\frac{\omega}{2} = \theta$ si ottiene

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{d\beta^2}{\cos^2\theta} \quad (\omega = 2\theta). \tag{22}$$

Abbiamo dunque il teorema: *Sopra una superficie qualunque le curve luogo dei punti pei quali è costante la somma o la differenza delle distanze geodetiche da due curve basi fisse formano un sistema ortogonale che dà al* ds^2 *la forma* (22), *e sono le bisettrici dell'angolo fra le curve geodeticamente parallele alle curve basi.*

Il teorema, nella sua generalità, è stato dato da Weingarten, dopo che Betti lo aveva già stabilito nel caso speciale che le curve C, C' si restringano a due punti (fuochi). Viceversa se l'elemento lineare ha la forma (22), risalendo colle (21), si ritorna alla (20), sicchè questa forma è *caratteristica* per tali sistemi ortogonali (α, β) che si dicono, per queste loro proprietà, costituiti da ellissi $(\alpha = \text{cost.}^{te})$ ed *iperbole* $(\beta = \text{cost.}^{te})$ geodetiche (1).

Manifestamente se conosciamo sulla superficie S in termini finiti le linee geodetiche ed il loro arco, sapremo anche ridurne il ds^2, negli infiniti modi, alla forma (22). Questo è per es. il caso nella geometria piana e sferica, e possiamo quindi assegnare sul piano e sulla sfera tutti i doppî sistemi ortogonali di ellissi ed iperbole geodetiche (2).

(1) Se in particolare C si riduce ad un punto F e la C' ad una geodetica g, la curva *luogo dei punti equidistanti geodeticamente da F e da* g si dirà una *parabola geodetica* di fuoco F e di direttrice g.

(2) Per le forme corrispondenti del ds^2 piano o sferico Vedi DARBOUX Leçons T. II pag. 422 della prima edizione.

§. 109.

La torsione delle linee geodetiche.

Nel presente e seguente paragrafo, deviando dal piano generale del Capitolo, introdurremo un elemento delle curve che ha preso il nome di *torsione geodetica* e dipende essenzialmente dalla forma della superficie nello spazio.

Immaginiamo la geodetica g uscente dal punto $M \equiv (u, v)$ della superficie, in direzione assegnata dal rapporto $\frac{dv}{du}$, e proponiamoci di calcolarne in *grandezza e segno* la torsione, che indicheremo con $\frac{1}{T_g}$. Colle solite notazioni per la curva g, abbiamo

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$\xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z \ (\varepsilon = \mp 1)$$

$$\lambda = \varepsilon \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \mu = \varepsilon \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \nu = \varepsilon \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ X & Y \end{vmatrix}$$

e per le formole di Frenet avendosi

$$\frac{1}{T_g} = -S\lambda \frac{d\xi}{ds} = -SX \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Y & Z \end{vmatrix},$$

risulta

$$\frac{1}{T_g} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dX}{ds} & \frac{dY}{ds} & \frac{dZ}{ds} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando per

$$\sqrt{EG - F^2} = \begin{vmatrix} \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial u & \partial u & \partial u \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial v & \partial v & \partial v \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

risulta

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{T_g} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds} & \partial x & \partial y & \partial z \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{dv}{ds} & \times \partial u & \partial u & \partial u \\ X & Y & Z & \partial v & \partial v & \partial v \\ & & & X & Y & Z \end{vmatrix},$$

Eseguendo il prodotto dei due determinanti per linee [1] risulta

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{T_g} = - \begin{vmatrix} E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}, & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}, & 0 \\ D\frac{du}{ds} + D'\frac{dv}{ds}, & D'\frac{du}{ds} + D''\frac{dv}{ds}, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

o in fine la formola definitiva

$$(23) \begin{cases} \frac{1}{T_g} = \frac{\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv, & D'\,du + D''\,dv \\ E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)} \\ \frac{1}{T_g} = \frac{(FD - ED')\,du^3 + (GD - ED'')\,du\,dv + (GD' - FD'')\,dv^2}{\sqrt{EG - F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)} \end{cases}$$

in parole: *La torsione di una geodetica nella direzione* $\frac{dv}{du}$ *eguaglia il covariante* Θ *delle due forme fondamentali* (§. 42) *diviso per la prima forma.*

---

[1] Si confronti il calcolo analogo eseguito al §. 77 per la torsione delle asintotiche.

Se prendiamo per linee coordinate quelle di curvatura, si ha

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad D = -\frac{E}{r_2}, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}$$

e risulta dalle (23)

$$\frac{1}{T_g} = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds},$$

ossia

$$(24) \qquad \frac{1}{T_g} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\operatorname{sen} 2\theta,$$

dove θ è l'angolo d'inclinazione della geodetica g sulla direzione principale $v = \text{cost.}^{te}$. Questa formola mostra chiaramente come varia la torsione della geodetica colla direzione: le direzioni delle linee di curvatura scindono il fascio delle geodetiche in due metà; le geodetiche dell'una sono tutte destrorse quelle dell'altra tutte sinistrorse. Due geodetiche ortogonali hanno torsioni eguali e di segno contrario, e le geodetiche bisettrici delle direzioni principali raggiungono il massimo valore assoluto della torsione $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right|$. (1)

Osserviamo che dalla (23) seguono subito i teoremi:

α) *Se una linea di curvatura è geodetica, essa è piana.*

β) *Ogni linea geodetica piana è linea di curvatura.*

Questi teoremi sono del resto d'immediata evidenza geometrica (2).

Salvo il piano e la sfera, nessun'altra superficie può avere più di un sistema ∞^1 di geodetiche piane.

---

(1) Naturalmente si esclude qui il caso della sfera $r_1 = r_2$, ove sempre $\frac{1}{T_g} = 0$, cioè le geodetiche sono curve piane (e viceversa).

(2) Nel caso α) le normali principali della linea coincidendo colle normali alla superficie, e dovendo formare una sviluppabile, la linea è piana.

Nel caso β) il piano della curva, essendo normale alla superficie, sega questa in una linea di curvatura.

§. 110.

Torsione geodetica e sua relazione coll'assoluta.

Per una linea qualunque L tracciata sulla superficie chiamasi, secondo Bonnet, *torsione geodetica* (1) in un punto la torsione $\frac{1}{T_g}$ della geodetica g ivi tangente. Questa torsione geodetica è data dalla formola (23), i differenziali essendo presi lungo la linea. Ne segue quest'altra definizione per le linee di curvatura: *Le linee di curvatura sono quelle che hanno nulla in ogni punto la torsione geodetica.*

Indicando con $\frac{1}{T_u}$, $\frac{1}{T_v}$ le torsioni geodetiche delle linee coordinate, si ha dalla (23)

$$\frac{1}{T_u} = \frac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{1}{T_v} = \frac{FD - ED'}{E\sqrt{EG - F^2}},$$

e in particolare, se $F = 0$:

$$(25) \qquad \frac{1}{T_u} = -\frac{1}{T_v} = \frac{D'}{\sqrt{EG}},$$

onde ritroviamo da capo che due geodetiche ortogonali in un punto hanno quivi torsioni eguali e di segno contrario.

Per trovare la relazione fra la torsione geodetica $\frac{1}{T_g}$ di una curva e la sua torsione assoluta, prendiamo per semplicità un sistema coordinato (u, v) ortogonale e la nostra linea L sia p. e. una linea $v = \text{cost.}^{te}$, i cui coseni di direzione della tangente sono

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

e l'elemento d'arco $ds_v = \sqrt{E}\,du$. Siccome i due triedri di direzio-

---

(1) Il nome non è scelto troppo felicemente, essendo in opposizione con quello di curvatura geodetica per la quale non s'intende già la curvatura della geodetica tangente (che sarebbe invece la curvatura normale).

ni $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, X\right)$, (α, ξ, λ) sono direttamente congruenti col triedro coordinato possiamo porre

$$\begin{cases} \xi = \cos\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma X \\ \lambda = \operatorname{sen}\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \cos\sigma X, \text{ ecc} \end{cases}$$

avendo indicato con σ l'ampiezza della rotazione che porta, sulla pagina positiva del piano normale, a coincidere la tangente alla $u = \text{cost.}^{te}$ colla normale principale alla curva. Ora, per le formole di Frenet, abbiamo in grandezza e segno

$$\frac{1}{T} = S\frac{d\lambda}{ds_r} = \frac{1}{\sqrt{E}} S\frac{\partial\lambda}{\partial u},$$

e sostituendo i valori precedenti si trova subito

$$\frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{\sqrt{E}\,du} - \frac{D'}{\sqrt{EG}},$$

ossia per la (25):

$$\frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{\sqrt{E}\,du} + \frac{1}{T_v} = \frac{d\sigma}{ds_r} + \frac{1}{T_v}, \tag{26}$$

che è la formola domandata.

Come si vede, la torsione geodetica coincide coll'assoluta per tutte e sole quelle curve lungo le quali è costante l'angolo σ della normale principale colla normale alla superficie (il cui piano osculatore è inclinato d'un angolo costante sulla superficie). Per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ abbiamo le linee asintotiche che formano solo una semplice infinità (reale o immaginaria); per ogni altro valore fisso di σ le linee corrispondenti formano una doppia infinità, come nel caso particolare $\sigma = 0$ che corrisponde alle linee geodetiche. Manifestamente le linee in considerazione possono anche definirsi come quelle *lungo le quali il rapporto della curvatura geodetica alla curvatura normale è una costante k finita $= tg\sigma$.*

Di qui, applicando la formola del Bonnet e quella d'Eulero, si forma subito l'equazione differenziale *del secondo ordine* di cui le linee in discorso dànno gli integrali.

§. 111.

Teoremi sull'integrazione dell'equazione differenziale delle linee geodetiche.

Ritornando alla equazione differenziale delle linee geodetiche, andiamo ora a dare alcuni teoremi generali che ne riguardano l'integrazione, per la qual cosa ci riferiamo particolarmente ai risultati conseguiti al §. 106, che collegano la ricerca delle geodetiche colla integrazione dell'equazione a derivate parziali del primo ordine.

$$\Delta_1\theta = 1,$$

ossia

$$E\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2. \tag{27}$$

Ad ogni soluzione particolare di questa corrisponde un sistema di linee sulla superficie $\theta = \text{cost.}^{te}$ che sono geodeticamente parallele e θ è l'arco delle geodetiche ortogonali. È manifesto che se θ è soluzione della (27) tale è anche $\theta + c$ (con c costante arbitraria); però tale costante che figura in θ ma non nelle derivate si riguarderà come *non essenziale*.

Supponiamo ora di conoscere della (27) una soluzione

$$\theta = \theta(u, v, a) \tag{28}$$

contenente una costante *essenziale* a (non additiva) e supponiamo altresì che θ, riguardata come funzione del parametro a, sia derivabile, insieme alle derivate $\frac{\partial\theta}{\partial u}, \frac{\partial\theta}{\partial v}$. Se diamo ad a nella (28) un qualunque valore particolare a_0, le linee

$$\theta(u, v, a_0) = \text{cost.}^{te}$$

sono geodeticamente parallele e le loro traiettorie ortogonali sono quindi geodetiche. Ma ora, nelle ipotesi fatte, siamo in grado di assegnare subito in termini finiti queste geodetiche ortogonali. Derivando infatti l'identità (27) rispetto al parametro a, che non è contenuto in E, F, G, otteniamo

$$\left(E\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\left(G\frac{\partial\theta}{\partial u}-F\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0,$$

ossia

$$\nabla\left(\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0.$$

Ma questa esprime (§. 49) che le linee

$$\theta(u, v, a_0)=\text{cost.}^{te}$$

hanno per traiettorie ortogonali le

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)_{a_0}=\text{cost.}^{te},$$

le quali sono adunque le geodetiche ortogonali cercate. Dunque: *se della equazione* $\Delta_1\theta=1$ *si conosce una soluzione* $\theta(u, v, a)$ *con una costante essenziale (non additiva), l'equazione*

$$\frac{\partial\theta}{\partial a}=b, \tag{28}$$

ove a *si tenga fissa e si faccia variare* b *darà un sistema* ∞^1 di geodetiche ortogonali *alle linee* $\theta(u, v, a)=\text{cost.}^{te}$, *e* θ *sarà precisamente l'arco delle dette geodetiche compreso fra due loro traiettorie ortogonali.*

È facile ora vedere che, facendo variare nella (28) anche la costante a, si avranno così tutte le geodetiche della superficie (o di una conveniente regione), sicchè la (28) viene a rappresentare la equazione in termini finiti delle geodetiche colle due costanti arbitrarie a, b. Per vedere questo con chiarezza bisogna mostrare che, disponendo convenientemente di a, b, si può fare uscire la geodetica (28) da un punto arbitrario (u_0, v_0) della superficie in direzione arbitraria fissata dal rapporto $\frac{dv}{du}$. La questione si riporta immediatamente dalle geodetiche alle traiettorie ortogonali $\theta(u, v, a)=0$. Ora per fare uscire una tale linea dal punto (u_0, v_0) basta prendere $c=\theta(u_0, v_0, a)$, e quanto alla direzione segnata da $\left(\frac{dv}{du}\right)_0=-\left(\frac{\frac{\partial\theta}{\partial u}}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\right)_0$ basta considerare che nel rapporto delle derivate $\frac{\partial\theta}{\partial u}, \frac{\partial\theta}{\partial v}$ la costante

a entra effettivamente, altrimenti per la (27) ne sarebbero prive le due derivate ed a sarebbe additiva in θ, contro l'ipotesi. Ma allora per dare a $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ il valore assegnato k, non resta che a determinare a da un'equazione della forma

$$\psi(u_0, v_0, a)=k,$$

dove $\frac{\partial\psi}{\partial a}\neq 0$.

Appoggiandosi su questi risultati e sulla proposizione alla fine del §. 106, possiamo ora dimostrare l'importante teorema di Jacobi:

Basta conoscere un integrale primo, con una costante arbitraria a, ***dell'equazione differenziale delle geodetiche per avere con una quadratura in termini finiti l'equazione di queste linee.***

Sia infatti

$$\frac{dv}{du}=\varphi(u, v, a)$$

un tale integrale primo. Se si dà alla costante a un valore fisso, le linee integrali di questa equazione sono geodetiche, e le loro traiettorie ortogonali, colla equazione differenziale

$$(E+F\varphi)\,du+(F+G\varphi)\,dv=0,$$

sono quindi geodeticamente parallele. Ponendo nel risultato finale del §. 106 $A=E+F\varphi$, $B=F+G\varphi$, con che $EB^2-2FAB+GA^2=(EG-F^2)(E+2\varphi+G\varphi^2)$, si vede che l'espressione

$$\frac{(E+F\varphi)\,du+(F+G\varphi)\,dv}{\sqrt{E+2F\varphi+G\varphi^2}}$$

è un differenziale esatto. Con una quadratura si ha quindi la funzione

$$0=\int\frac{(E+F\varphi)\,du+(F+G\varphi)\,dv}{\sqrt{E+2F\varphi+G\varphi^2}}$$

che è una soluzione di $\Delta_1\theta=1$ contenente la costante essenziale a, quindi l'equazione

$$\frac{\partial\theta}{\partial a}=b$$

dà in termini finiti le linee geodetiche.

Se applichiamo questo teorema di Jacobi al caso delle superficie a curvatura nulla, nel quale caso si è visto al §. 104 bastare una quadratura per avere un integrale primo con una costante arbitraria, vediamo che: *sopra ogni superficie a curvatura nulla (sviluppabile) l'equazione differenziale delle geodetiche s'integra con due quadrature.*

È questo un risultato già stabilito nella teoria delle curve (§. 16). Esso ci dice in sostanza che se la forma differenziale quadratica $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ è a curvatura nulla bastano due quadrature per ridurla alla forma normale $dx^2 + dy^2$.

§. 112.

Geodetiche sulle superficie di Liouville.

L'esempio più generale ed importante nel quale i teoremi precedenti portano all'integrazione completa dell'equazione delle geodetiche è quello considerato da Liouville colle superficie (o meglio coi ds^2) che portano il suo nome. Sono queste le superficie sulle quali esistono *particolari* sistemi ortogonali isotermi che dànno al ds^2 la forma

$$ds^2 = [\alpha(u) + \beta(v)]\,(du^2 + dv^2), \tag{29}$$

dove il fattore λ esterno è la somma di due funzioni, una $\alpha(u)$ della sola u, l'altra $\beta(v)$ della sola v.

Prima di tutto caratterizziamo *geometricamente* questi particolari sistemi isotermi colle osservazioni seguenti dovute al Dini [1]. Cangiamo nella (29) i parametri u, v in

$$u = u(u_1),\quad v = v(v_1),$$

per modo che si abbia

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2 = \alpha(u) + \beta(v),$$

e ponendo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\dfrac{du_1}{du}}{\sqrt{\alpha(u) + \beta(v)}},\quad \cos\theta = \frac{\dfrac{dv_1}{dv}}{\sqrt{\alpha(u) + \beta(v)}},$$

[1]) *Sopra un problema della rappresentazione geografica di una superficie sopra un'altra* (Annali di matematica t. III 1869).

la (29) diventa

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{dv_1^2}{\cos^2\theta} \tag{30}$$

che è forma caratteristica per ellissi ed iperbole geodetiche ortogonali (§. 108). Viceversa se un sistema (30) di ellissi ed iperbole geodetiche ortogonali è inoltre *isotermo*, un cangiamento di parametri lo riduce alla forma (29) di Liouville. Difatti avremo allora $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{U}{V}$, con U funzione di u_1 e V di v_1, onde potremo scrivere

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{U}{\sqrt{\lambda}},\quad \cos\theta = \frac{V}{\sqrt{\lambda}}\quad (\lambda = U + V),$$

ed avendosi

$$ds^2 = \lambda\,(U^2\,du_1^2 + V^2\,dv_1^2),$$

basterà introdurre i nuovi parametri

$$u = \int U\,du_1,\quad v = \int V\,dv_1$$

per avere la forma di Liouville. Possiamo dunque dire: *Le superficie di Liouville sono quelle che posseggono qualche doppio sistema ortogonale di ellissi ed iperbole geodetiche, che sia inoltre isotermo* [1].

Ed ora proviamo facilmente che per le superficie di Liouville (ridotto il ds^2 alla forma (29)) le geodetiche si hanno con quadrature. Basterà trovare una soluzione θ con una costante essenziale a della equazione (27), cioè qui della

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = \alpha(u) + \beta(v)$$

Per ciò cerchiamo una soluzione della forma

$$\theta = U + V$$

con U funzione di u, e V di v. Dovremo avere

$$U'^2 + V'^2 = \alpha(u) + \beta(v),$$

[1]) Si posseggono dei criteri che permettono di decidere *senza integrazioni* se un dato ds^2 è riducibile alla forma di Lieuville (Cf. particolarmente Ricci Lezioni sulla teoria delle Superficie (Litografia Drucker Padova 1898) Cap. VII).

ossia

$$U'^2 - \alpha(u) = \beta(v) - V'^2$$

e siccome a sinistra abbiamo una funzione della sola u, a destra una funzione della sola v, l'una e l'altra eguaglieranno una costante a del resto arbitraria.

Soddisfacciamo dunque alle condizioni imposte prendendo

$$U' = \sqrt{\alpha(u) + a}\,, \quad V' = \sqrt{\beta(v) - a}$$

ossia

$$\theta = \int \frac{\sqrt{\alpha(u) + a}\,du}{\sqrt{\alpha(u) + a}} \pm \int \frac{\sqrt{\beta(v) - a}\,dv}{\sqrt{\beta(v) - a}}. \tag{31}$$

Dopo ciò, pei teoremi al paragrafo precedente, sarà

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.}^{te}$$

l'equazione in termini finiti delle geodetiche, ossia

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha(u) + a}} \mp \int \frac{dv}{\sqrt{\beta(v) - a}} = b, \tag{32}$$

e la (31) ci darà l'arco θ delle geodetiche stesse.

È da osservarsi che, indicando con ψ l'angolo d'inclinazione delle geodetiche sulle v, dalla formola

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dv}{du} = \pm \frac{\sqrt{\beta(v) - a}}{\sqrt{\alpha(u) + a}},$$

risulta che un integrale primo con una costante arbitraria a dell'equazione delle geodetiche è

$$\beta(v)\cos^2\psi - \alpha(u)\operatorname{sen}^2\psi = a. \tag{33}$$

§. 113.

Le geodetiche sulle superficie di rotazione.

Gli esempi più notevoli di superficie di Liouville sono 1° le superficie di rotazione, 2.° le superficie di secondo grado, o quadriche.

Trattiamo nel presente paragrafo il primo caso, riserbandoci fra breve l'esame del secondo (V.[1] §. 118).

Per una superficie di rotazione l'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2, \quad r = \varphi(u),$$

che ridotto ai parametri isometrici $u_1 = \int \frac{du}{r}$, v, scriviamo

$$ds^2 = r^2 (du_1^2 + dv^2).$$

Questo è un caso particolare della forma (29) di Liouville, corrispondente p. e. a prendere

$$\alpha(u_1) = r^2, \quad \beta(v) = 0.$$

La costante a nella formola (31), dovrà avere, per restare nel campo reale, un valore negativo poniamo

$$a = -k^2,$$

e l'equazione (32) in termini finiti delle geodetiche, sostituendovi $\frac{du}{r}$ per du, diventa

$$v = \pm k \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - k^2}} + C, \tag{34}$$

e la (31) che dà l'arco s della geodetica

$$s = \pm k v + \int \frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{r}\,du = \int \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - k^2}}. \tag{35}$$

Se nella (34) teniamo fissa la costante k (costante di Clairaut) e facciamo variare la costante C additiva nella longitudine, si ha manifestamente un sistema ∞^1 di geodetiche tutte congruenti fra loro per rotazione attorno all'asse se si mantiene fisso il segno nella (34), ovvero le loro simmetriche (rispetto ad un piano meridiano) se si cangia nel contrario.

Il significato della costante k si riconosce nel miglior modo ricorrendo all'integrale primo (33) che qui si scrive

$$r \operatorname{sen}\psi = k,$$

ed esprime il teorema di Clairaut: *Lungo una linea geodetica della superficie di rotazione è costante il prodotto del raggio del parallelo pel seno dell'angolo d'inclinazione sui meridiani.* Al valore $k = 0$ della costante di Clairaut corrispondono evidentemente i meridiani stessi; per ogni valore di k il corso effettivo della geodetica rimane limi-

tato a quella regione ove il raggio r del parallelo supera k. Se vi sono due paralleli di questo minimo raggio k, la geodetica resta nella zona compresa fra questi due, ed il suo corso consta in generale di infiniti archi che toccano alternatamente i due paralleli (1).

§. 114.

Il teorema di Gauss sulla curvatura totale di un triangolo geodetico.

Ritorniamo alla teoria delle linee geodetiche sopra una superficie qualunque S e consideriamo, con Gauss, un *triangolo geodetico* ABC, i cui lati AB, BC, CA siano cioè tre archi geodetici, e supponiamo che esso delimiti una regione semplicemente connessa di punti regolari, compresi i vertici.

In generale chiamiamo *curvatura totale* di un'area Σ della superficie l'integrale doppio d'area

$$\iint_{\Sigma} K(u, v)\, d\sigma = \iint K(u, v)\, \sqrt{E G - F^2}\, du\, dv$$

esteso a tutta l'area Σ (2).

Prendiamo a linee coordinate v le geodetiche uscenti dal vertice A, e per parametro v l'angolo loro d'inclinazione sulla geodetica fissa AB ($v = 0$); a linee coordinate u prendiamo le loro traiettorie ortogonali, cioè i circoli geodetici di centro A, contando inoltre l'arco u delle geodetiche a partire da A. Il ds^2 prenderà qui la forma geodetica polare

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2,$$

e la funzione $\sqrt{G}$ soddisferà alle condizioni (§. 107)

$$(36) \qquad (\sqrt{G})_{u=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1 .$$

Per la curvatura K nel punto (u, v) abbiamo

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(1) V. per più ampie considerazioni DARBOUX T. III. Livre VI Chap. I.

(2) Se si fa la rappresentazione sferica di Σ (che si suppone ricoprire la sfera con un solo strato) la curvatura totale di Σ non è altro che l'area effettiva della immagine sferica.

e per l'elemento d'area

$$d\sigma = \sqrt{G}\, du\, dv.$$

Se indichiamo dunque con Ω la curvatura totale del triangolo geodetico ABC, sarà

$$\Omega = -\iint \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\, du\, dv = \int_0^{\hat{A}} dv \int_u^{u} -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\, du ,$$

dove $\hat{A}$ significa l'angolo in A del triangolo.

Risulta quindi

$$(36^*) \qquad \Omega = \int_0^{\hat{A}} dv \left| \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right| ,$$

dove per la (36) $\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1$, mentre il valore del secondo termine $-\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$ è calcolato nel punto generico dell'arco geodetico BC lungo il quale è verificata l'equazione di Gauss (16) §. 104

$$d\theta = -\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}\, dv .$$

La (36*) diventa quindi

$$\Omega = \int_0^{\hat{A}} (dv + d\theta),$$

e integrando

$$\Omega = \hat{A} + \theta_C - \theta_B ,$$

dove θ_B, θ_C indicano in valori di θ in B e C. Il verso positivo dell'arco geodetico BC si può prendere da B verso C (crescente con v), ed allora (1)

$$\theta_B = \pi - \hat{B} , \quad \theta_C = \hat{C} ,$$

(1) Se si prendesse per verso positivo quello di CB, tenendo conto del senso degli angoli avremmo

$$\theta_B = 2\pi - \hat{B} , \quad \theta_C = \pi + \hat{C}$$

e ritornerebbe alla stessa formola per Ω.

onde risulta

$$\mathfrak{A} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Questa notevole formola esprime il teorema di Gauss: *La curvatura totale di un triangolo geodetico, su qualunque superficie, eguaglia l'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.*

Si noti che, se costantemente $K > 0$, anche $\mathfrak{A} > 0$, se invece è sempre $K < 0$, anche $\mathfrak{A} < 0$; per ciò se l'area limitata dal triangolo geodetico è tutta a punti ellittici, la somma dei tre angoli supera due retti, ed è invece inferiore a due retti se i punti sono tutti iperbolici. In particolare se K è una costante c non nulla si ha $\mathfrak{A} = \iint c\, d\sigma = c\,\Sigma$, essendo Σ l'area del triangolo: *Sopra ogni superficie a curvatura costante (non nulla) l'area del triangolo è proporzionale all'eccesso* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$.

In fine nel caso $K = 0$ delle sviluppabili si ha sempre $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, come in geometria piana, ciò che è ben naturale essendo le dette superficie distendibili sul piano.

§. 115.

Sistemi doppi ortogonali di linee a curvatura geodetica costante.

Sul piano e sulla sfera esistono doppi sistemi ortogonali di circoli, cioè di linee ciascuna delle quali è a curvatura geodetica costante (§. 57).

Le superficie sulle quali esistono doppi sistemi ortogonali di linee tutte a curvatura geodetica costante sono superficie *speciali*, per le quali andiamo ora a ricercare la corrispondente forma del ds^2.

Abbiasi sulla superficie S un doppio sistema ortogonale

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

le cui linee $u = \text{cost.}^{te}$ abbiano la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$ funzione della sola u, e così quelle $v = \text{cost.}^{te}$ la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$ funzione della sola v, poniamo

$$(37) \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = V\,.$$

Ne risulta

$$V\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

e però l'espressione

$$U\sqrt{E}\,du + V\sqrt{G}\,dv$$

è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione φ tale che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = U\sqrt{E}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = V\sqrt{G}\,,$$

ossia

$$\sqrt{E} = \frac{1}{U}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,, \qquad \sqrt{G} = \frac{1}{V}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,.$$

Sostituendo nell'una o nell'altra delle (37), ne viene per φ l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,,$$

il cui integrale generale è

$$\varphi = \log \frac{1}{\alpha(u) + \beta(v)}\,,$$

essendo $\alpha(u), \beta(v)$ funzioni arbitrarie la prima di u la seconda di v. Ma allora abbiamo

$$(37^*) \qquad ds^2 = \frac{1}{[\alpha(u) + \beta(v)]^2}\left(\frac{\alpha'^2(u)}{U^2}\,du^2 + \frac{\beta'^2(v)}{V^2}\,dv^2\right),$$

e basta cangiare i parametri u, v per ridurlo alla forma caratteristica

$$(38) \qquad ds^2 = \frac{du_1^2 + dv_1^2}{(U_1 + V_1)^2}\,.$$

Dunque intanto: *Ogni doppio sistema ortogonale di linee a curvatura geodetica costante è necessariamente isotermo, e corrisponde alla forma speciale caratteristica* (38) *del* ds^2.

Inversamente dimostriamo che: *Se in un doppio sistema ortogonale ed isotermo le linee dell' un sistema sono a curvatura geodetica costante, lo stesso accade per quelle dell' altro.*

E infatti, scegliendo parametri isometrici, abbiasi

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2),$$

indi

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_v}\right).$$

Se dunque $\frac{1}{\rho_u}$ non contiene v, l'altra $\frac{1}{\rho_v}$ non contiene u, ciò che dà il teorema.

Nel caso poi che tutte le linee di un sistema abbiano la *stessa* curvatura geodetica costante, la superficie ha curvatura costante negativa o nulla, come già abbiamo dimostrato al §. 100, anzi nel caso più generale che le linee del doppio sistema si taglino sotto angolo costante qualunque.

§. 116.

Superficie rappresentabili geodeticamente sul piano Teorema di Beltrami.

Chiuderemo il presente Capitolo coll'esame di un importante problema, il problema della *rappresentazione geodetica* di una superficie sopra un' altra, per far conoscere gli interessanti risultati ottenuti dal Beltrami e successivamente dal Dini.

Diremo che una superficie S' è rappresentata geodeticamente sopra un'altra (una regione di S' sopra una regione di S) se vi è una corrispondenza *dei loro punti* che conservi le linee geodetiche, cioè tale che quando un punto su S (su S') descrive una geodetica, il corrispondente di S' (di S) descriva egualmente una geodetica.

E prima di tutto domandiamoci col Beltrami (1): Esistono superficie rappresentabili geodeticamente sul piano? Intanto è chiaro geo-

(1) Annali di matematica. Serie I^a C. VII (1865) Opere complete T. I^o Mem. XIV (pag. 262-280).

metricamente che ogni piano è rappresentabile geodeticamente sopra un altro piano, mediante una qualunque *omografia* fra i due piani: e che queste siano le uniche rappresentazioni geodetiche, anche di regioni piane limitate l' una sull'altra, sarà fra breve precisato. Ma anche una sfera è rappresentabile geodeticamente sul piano, nel modo più semplice con projezione centrale della sfera sul piano (che cangia i circoli massimi in rette), alla quale projezione centrale si può poi far seguire una qualunque omografia nel piano. Dunque tutte le superficie *a curvatura costante* nulla o positiva (avendo lo stesso ds^2 del piano o della sfera) saranno rappresentabili geodeticamente sul piano. Ma la stessa proprietà appartiene anche alle superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche), come più tardi spiegheremo diffusamente (V.^{i} Cap. XIV). Ora l'importante risultato conseguito dal Beltrami nella memoria citata consiste nel teorema:

Le sole superficie a curvatura costante sono rappresentabili geodeticamente sul piano.

Per dimostrarlo, supponiamo di avere una superficie S rappresentata geodeticamente sopra un piano π, e scelto sopra π un sistema coordinato cartesiano (u, v), ortogonale od obliquo, supponiamo che il ds^2 della S riferito alle linee corrispondenti u, v sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{39}$$

Siccome l' equazione differenziale delle geodetiche sopra S è data dalla (III*) pag. 277

$$v'' = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} v'^3 + \left[2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right] v'^2 + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right] v' - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} \tag{40}$$

e per le nostre ipotesi deve coincidere coll'equazione differenziale

$$v'' = 0$$

delle geodetiche sul piano (coll' integrale generale $v = au + b$, a, b essendo costanti), i coefficienti E, F, G nella (39) dovranno soddisfare alle seguenti quattro condizioni (necessarie e sufficienti):

$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0 \\ \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}, \end{cases} \tag{41}$$

Da queste noi andiamo ora facilmente a dedurre che *la superficie* S

ha necessariamente la curvatura K *costante*. Per questo ricorriamo alle quattro formole (IV) §. 41 (pag. 101) per la curvatura K, le quali, tenendo presente le (41), diventano

$$(42)\quad \begin{cases} K\,E = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}^2 - \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \quad K\,F = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} \\ K\,G = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}^2 - \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}, \quad K\,F = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

D'altra parte ricordiamo che E, F, G soddisfano in ogni caso identicamente alle equazioni di Codazzi

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} E + \left[\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right] F - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} G$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} E + \left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right] F + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} G,$$

le quali per le (41) si riducono alle

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{\partial F}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} E - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} F \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} G - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} F. \end{cases}$$

Formando allora dalle (42) della prima linea il binomio $\frac{\partial}{\partial v}(KE) - \frac{\partial}{\partial u}(KF)$, e similmente dalla seconda linea $\frac{\partial}{\partial v}(KF) - \frac{\partial}{\partial u}(KG)$, osservando le (42) e (44) stesse, otteniamo

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial K}{\partial v} - F\dfrac{\partial K}{\partial u} = 0 \\ F\dfrac{\partial K}{\partial v} - G\dfrac{\partial K}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0,$$

cioè $K = \text{cost.}^{te}$ c. d. d.

Che inversamente ogni superficie a curvatura costante sia rappresentabile in ∞^4 modi geodeticamente sul piano abbiamo già sopra constatato geometricamente per $K = 0$ e per K positiva, riservandoci di trattare a suo tempo il caso di K negativa.

Qui completiamo questi risultati col dimostrare che: *le uniche rappresentazioni geodetiche di un' area piana* Ω *sopra un' altra area piana* Ω' *sono le omografie*. Prendiamo un punto qualunque A di Ω ed il corrispondente A' di Ω'; al fascio di rette per A corrisponde per ipotesi il fascio di rette per A' e i due fasci sono *certamente proiettivi*, perchè questa è una proprietà generale dei fasci di direzioni corrispondenti in una rappresentazione qualunque (§. 52, pag. 134). Ma allora ogni altra coppia B, B' di punti corrispondenti darà egualmente due fasci proiettivi; quindi preso un qualunque punto C in Ω, il corrispondente C' in Ω' si avrà appunto come intersezione dei due raggi A' C', B' C' corrispondenti, nelle rispettive proiettività, ad AC, BC. La costruzione dà dunque un' omografia che si estende senz' altro, oltre le regioni Ω, Ω' supposte, ai piani completi.

§. 117.

Problema generale della rappresentazione geodetica. Teorema del Dini.

Dal caso particolare del Beltrami passiamo ora a quello generale trattato e risoluto dal Dini, (1) domandando di trovare tutte le coppie S, S' di superficie rappresentabili geodeticamente l' una sull' altra. Avvertiamo esplicitamente che le superficie S, S' (o le loro regioni in considerazione) *si suppongono* reali e reale la rappresentazione. Intanto osserviamo subito il caso ovvio che le due superficie S, S' siano simili, o meglio i loro ds^2 siano in rapporto costante, nel qual caso è evidente che la relazione di similitudine darà anche una rappresentazione geodetica di S, S'. Questo caso troppo ovvio s' intenderà nel seguito sempre escluso.

Siano

$$(45)\quad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ ds'^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2 \end{cases}$$

(1) Sopra un problema che si presenta nella teoria generale della rappresentazione geografica di una superficie sopra un' altra (Annali di matematica Serie I t. III 1869.

i rispettivi ds^2 di S, S', riferite ad un qualunque sistema (u, v) di linee corrispondenti. La rappresentazione essendo per ipotesi geodetica, avremo, come condizione necessaria e sufficiente, che l'equazione differenziale (40) delle geodetiche della S dovrà coincidere coll'analoga per S'. Dunque intanto: *Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè fra i due elementi lineari dati dalle* (45) *vi sia rappresentazione geodetica sono espresse dalle quattro equazioni*

$$(A)\quad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} \\ 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}' = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}, \quad 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}' = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

È manifesto, pel loro significato geometrico stesso, che queste quattro relazioni sono di natura *invariantiva*, cioè serbano la stessa forma cangiando comunque le linee coordinate. Ed allora semplifichiamo la ricerca prendendo a linee coordinate (u, v) le linee *principali* della rappresentazione (§. 53), onde avremo insieme $F = 0$, $F' = 0$, e le equazioni di condizione (A) diventeranno le seguenti:

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{G'}\dfrac{\partial E'}{\partial v} = \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial E}{\partial v}, \quad \dfrac{1}{E'}\dfrac{\partial G'}{\partial u} = \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial G}{\partial u} \\ \dfrac{2}{E'}\dfrac{\partial E'}{\partial v} - \dfrac{1}{G'}\dfrac{\partial G'}{\partial v} = \dfrac{2}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G'}{\partial v}, \quad \dfrac{2}{G'}\dfrac{\partial G'}{\partial u} - \dfrac{1}{E'}\dfrac{\partial E'}{\partial u} = \dfrac{2}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u} - \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial u} \end{cases}$$

Dalle due ultime si ricava subito che il rapporto $\dfrac{E'}{G'^2} : \dfrac{E}{G^2}$ è indipendente da u, e l'altro $\dfrac{G'}{E'^2} : \dfrac{G}{E^2}$ indipendente da v; possiamo quindi porre

$$\frac{E'}{G'^2} = V^2\frac{E}{G^2}, \quad \frac{G'}{E'^2} = U^2\frac{G}{E^2},$$

dove U è funzione della sola u e V della sola v (ambedue positive). Ne deduciamo

$$(47)\qquad E' = \frac{E}{U^2 V}, \quad G' = \frac{G}{U V^2}$$

e introducendo questi valori nelle due prime (46) ne viene

$$(V - U)\frac{\partial E}{\partial v} = E V', \quad (U - V)\frac{\partial G}{\partial u} = G U'.$$

Ma siccome il caso di $U = V = \text{cost.}^{te}$ si esclude, perchè allora i due elementi lineari differirebbero solo per un fattore costante, dalle precedenti integrando avremo

$$(48)\qquad E = U_1^2(U - V), \quad G = V_1^2(U - V)$$

dove U_1, V_1 sono due nuove funzioni arbitrarie, la prima della u, la seconda della v. Le (47) dànno quindi

$$E' = \frac{U_1^2}{U}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right), \quad G' = \frac{V_1^2}{V}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right).$$

Le due espressioni (45) dei ds^2 presentano dopo ciò la forma

$$(49)\quad \begin{cases} ds^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2) \\ ds'^2 = \left(\dfrac{1}{V} - \dfrac{1}{U}\right)\left(\dfrac{U_1^2\,du^2}{U} + \dfrac{V_1^2\,dv^2}{V}\right), \end{cases}$$

che manifestamente è, per l'una e per l'altra superficie, la forma di Liouville (§. 112). Di qui il notevole ed importante risultato del Dini: ***Se due superficie*** S, S' ***sono rappresentate geodeticamente l'una sull'altra*** (***e si esclude il caso ovvio omotetico***), ***ambedue appartengono alla classe di Liouville, le linee principali della rappresentazione formando sull'una e sull'altra superficie un sistema ortogonale ed isotermo di ellissi ed iperbole geodetiche.***

Così adunque soltanto le superficie S di Liouville ammettono rappresentazioni geodetiche su altre superficie (non simili), che sono a loro volta nuove superficie di Liouville. Anzi è da osservare che, nelle formole (49), il primo ds^2 non cangia se si aumentano U, V di una medesima costante h, mentre invece il secondo diventa

$$(50)\qquad ds'^2 = \left(\frac{1}{V + h} - \frac{1}{U + h}\right)\left(\frac{U_1^2\,du^2}{U} + \frac{V_1^2\,dv^2}{V}\right)$$

e qui la costante h è essenziale. Dunque:

Ogni superficie S ***di Liouville è rappresentabile geodeticamente sopra*** ∞^1 ***altre superficie di Liouville distinte.***

§. 118.

Quadriche in corrispondenza omografica geodetica.

Un esempio assai notevole di coppie di superficie rappresentate geodeticamente l'una sull'altra si ha nelle quadriche (superficie di secondo grado) in relazione colle omografie dello spazio.

Consideriamo una qualunque omografia Ω dello spazio (diversa da una similitudine). Esiste uno ed un solo sistema di quadriche omofocali che dalla omografia Ω viene trasformato in un altro sistema di quadriche omofocali. E infatti si sa che un sistema omofocale di quadriche non è altro che *una schiera* di quadriche inscritte in una medesima sviluppabile (isotropa) di quarta classe circoscritta al circolo assoluto C_∞. Ora l'omografia Ω porti C_∞ in una conica A, e la sua inversa Ω^{-1} porti C_∞ nella conica B; allora la schiera di quadriche inscritta nella sviluppabile isotropa determinata da (B, C_∞) è trasformata dall'omografia Ω nell'altra schiera di quadriche determinata da (C_∞, A). Per ogni punto P dello spazio passano, come si sa, tre quadriche della schiera che ivi si intersecano ad angolo retto, e le tre normali nel punto P formano il triedro trirettangolo delle direzioni principali, rispetto ad una quadrica qualunque della schiera. In particolare per ciascuna delle tre quadriche uscenti da P, una delle tre direzioni principali è quella della normale, e le altre due segnano due tangenti coniugate ed ortogonali, vale a dire le direzioni delle linee di curvatura.

Ne segue il teorema (caso particolare del celebre teorema di Dupin): *Nel sistema triplo ortogonale delle quadriche omofocali le quadriche di due diverse serie si segano mutuamente (ad angolo retto) lungo le loro linee di curvatura.*

Ciò premesso, prendasi una quadrica qualunque Q della prima schiera e la quadrica Q′ corrispondente nell'altra schiera per l'omografia Ω. La rappresentazione di Q sopra Q′ conserva i sistemi coniugati (poichè è un'omografia); ma di più è facile vedere che *conserva anche le linee geodetiche.* Per questo basta riflettere che, se A, A′ sono due punti qualunque corrispondenti di Q, Q′, alla normale in A alla Q corrisponde, per l'omografia, la normale in A′ alla Q′, quindi ad ogni piano normale in A a Q corrisponde un piano normale in A′ a Q′. E allora se prendiamo una qualunque linea geodetica g di Q, siccome il piano osculatore in ogni punto di g è normale a Q, la linea g sarà trasformata dalla omografia Ω in una linea g' di Q′, che avrà similmente il piano osculatore in ogni punto normale a Q′, e sarà perciò una linea geodetica.

D'altronde le linee principali della rappresentazione di Q sopra Q′ sono, per quanto si è detto, le linee di curvatura, e se supponiamo quindi che l'omografia Ω non sia una similitudine, basta applicare il risultato del Dini stabilito sopra per ottenere l'altro importante teorema: *Le linee di curvatura della quadrica formano un sistema isotermo di ellissi ed iperbole geodetiche.* Come ora dimostreremo, ogni quadrica generale a centro è in effetto rappresentabile omograficamente e geodeticamente sopra un'altra quadrica (non simile), cosicchè ogni quadrica a centro è una superficie di Liouville, come già si era enunciato al §. 113. Ma è facile intendere che anche i paraboloidi godono della medesima proprietà, ciò che si può confermare direttamente. Così adunque: *sopra ogni quadrica l'equazione differenziale delle geodetiche si sa integrare per quadrature.*

La determinazione delle linee geodetiche sull'ellissoide a tre assi è stata ottenuta la prima volta da Jacobi.

§. 119.

Le coppie di quadriche a centro in rappresentazione geodetica.

Andiamo ora a ricercare effettivamente, per ogni quadrica (generale) a centro Q, una seconda quadrica Q′ trasformata omografica di Q e in rappresentazione geodetica sopra Q. Bisogna per questo cercare un'omografia Ω che trasformi il sistema confocale (Q) determinato da Q in un'altro sistema confocale.

Scriviamo l'equazione del sistema confocale (Q) sotto la consueta forma

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1, \tag{51}$$

con

$$a^2>b^2>c^2.$$

Nella schiera di quadriche (Q) si hanno quattro quadriche limiti date dal circolo assoluto (corrispondente a $\rho=\infty$) le tre coniche focali.

$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}+1$, nel piano $z=0$ (ellisse reale) $\rho=-c^2$

$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}+1$, nel piano $y=0$ (iperbola) $\rho=-b^2$

$\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}+1=0$, nel piano $x=0$ (ellisse immaginaria $\rho=-a^2$.

L'omografia (reale) cercata deve, per quanto si è visto sopra, cangiare la terza conica immaginaria nel circolo assoluto, e per ciò intanto il piano $x=0$ nel piano all'infinito. Indicando dunque con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del punto ove l'omografia Ω trasporta il punto (x, y, z), le formole dell'omografia saranno

$$\bar{x}=\frac{U}{x}, \bar{y}=\frac{V}{x}, \bar{z}=\frac{W}{x},$$

dove U, V, W dovranno essere tali polinomii lineari interi in x, y, z che l'equazione

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2=0$$

dell'assoluto equivalga a quella della terza conica focale

$$(a^2-c^2)y^2+(a^2-b^2)z^2+(a^2-b^2)(a^2-c^2)=0.$$

Trascurando un fattore costante d'omotetia, dovremo dunque avere

$$U^2+V^2+W^2=(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(a^2-c^2)y^2+(a^2-b^2)z^2,$$

onde segue che U, V, W non conterranno la x, e potremo porre *a meno di una sostituzione ortogonale*, sopra U, V, W, cioè su $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$,

$$U=\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\ V=\sqrt{a^2-b^2}\,z,\ W=\sqrt{a^2-c^2}\,y.$$

Dunque l'omografia cercata Ω è data, a meno di movimenti e omotetie, dalle formole:

$$(52)\qquad \bar{x}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{x}, \bar{y}=\sqrt{a^2-b^2}\frac{z}{x}, \bar{z}=\sqrt{a^2-c^2}\frac{y}{x}.$$

Questa cangia effettivamente il sistema confocale (51) nell'altro

$$\frac{\bar{x}^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{\bar{y}^2}{(a^2-b^2)(a^2+\rho)}-\frac{\bar{z}^2}{(a^2-c^2)(b^2+\rho)}$$
$$\frac{}{a^2+\rho}\qquad\frac{}{a^2+\rho}\qquad\frac{}{a^2+\rho}$$

che è ancora confocale, anzi coincide col sistema (53) stesso perchè posto

$$(53)\qquad \bar{\rho}=\frac{b^2c^2-a^2(b^2+c^2+\rho)}{a^2+\rho},$$

l'equazione del sistema si scrive

$$(51^*)\qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1.$$

Si vede che ai quattro valori singolari di ρ corrispondenti alle quattro coniche focali

$$\rho=\infty,\ -c^2,\ -b^2,\ -a^2$$

corrispondono per la (53) i quattro valori stessi permutati per $\bar{\rho}$, precisamente

$$\bar{\rho}=-a^2,\ -b^2,\ -c^2,\ \infty,$$

onde l'omografia Ω scambia il circolo assoluto coll'ellisse focale immaginaria e le due coniche focali reali fra loro; la Ω cangia la serie degli ellissoidi in quella degli iperboloidi a due falde, e quella degli iperboloidi rigati (ad una falda) in sè medesima.

Se ora prendiamo un ellissoide della schiera ρ, e.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

corrispondente a $\rho=0$, vediamo che esso è cangiato dall'omografia Ω nell'iperboloide a due falde

$$\frac{\bar{x}^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{\bar{y}^2}{(a^2-b^2)c^2}-\frac{\bar{z}^2}{(a^2-c^2)b^2}=1,$$
$$\frac{}{a^2}\qquad\frac{}{a^2}\qquad\frac{}{a^2}$$

sicchè le due quadriche si corrispondono per sistemi coniugati e per linee geodetiche. In particolare se l'ellissoide diventa di rivoluzione *allungato*, per essere $a^2>b^2=c^2$, l'iperboloide si ridnce alla sua volta rotondo.

Consideriamo in fine nella schiera confocale (51) un qualunque iperboloide ad una falda:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1\ (A^2>B)\ ;$$

esso è cangiato dall' omografia (52), o ciò che è lo stesso dall' altra

$$(54)\qquad x=k\frac{(A^2-B^2)(A^2+C^2)}{x'},\ y=k\frac{A^2-B^2}{x'}z',\ z=k\frac{A^2+C^2}{x'}y'$$

nel secondo iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{\frac{(A^2-B^2)(A^2-C^2)}{A^2}}+\frac{y^2}{\frac{(A^2+C^2)C^2}{A^2}}-\frac{z^2}{\frac{(A^2+C^2)B^2}{A^2}}=1,$$

e le due quadriche si corrispondono nuovamente per sistemi coniugati e per linee geodetiche.

Si osservi che in generale questi due iperboloidi sono distinti e non simili; ma se si suppone

$$\frac{1}{B^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{C^2},$$

l'iperboloide, che allora dicesi *ortogonale,* coincide col trasformato e l' omografia (54) che lo muta allora in sè medesimo, ne permuta le geodetiche fra loro.

Ritorneremo più tardi su queste proprietà delle quadriche che acquisteranno un nuovo significato nella teoria della deformazione.

Capitolo VII.

Superficie applicabili e teoremi generali sulla deformazione

Superficie flessibili. — Invariabilità della curvatura per flessione. — Criteri d'applicabilità — Caso delle superficie a curvatura costante. — Superficie che ammettono deformazioni continue in sè. — Elicoidi e teorema di Bour. — L'equazione dell' applicabilità. — Teoremi generali relativi alla deformazione. — Le asintotiche virtuali sulle superficie a curvatura negativa e le equazioni di Darboux. — Le asintotiche come linee di piegamento.

§. 120.

Superficie applicabili.

Come nella geometria piana e nella sferica si studiano le proprietà delle figure tracciate sul piano o sulla sfera, prescindendo dalle loro relazioni con altre figure nello spazio, così può farsi uno studio analogo per qualsiasi superficie. E quelle proprietà che concernono soltanto le relazioni di grandezza e posizione delle figure descritte sulla superficie, in quanto esistono sopra di essa, costituiscono la geometria *della superficie.* Sotto questo punto di vista, superficie assai differenti per la forma possono avere la stessa geometria. Così è chiaro che i teoremi della geometria piana non cessano di essere validi (almeno per regioni convenientemente ristrette) se il piano, su cui le figure sono descritte, s'immagina avvolto sopra un cilindro, un cono, o un' altra qualunque sviluppabile.

Per ben concepire la natura delle proprietà che costituiscono la geometria di una superficie, conviene immaginare la superficie come formata da un velo infinitamente sottile, perfettamente *flessibile ed inestendibile.* Quelle proprietà che non si alterano flettendo comunque la superficie appartengono alla sua geometria, le altre sono inerenti alla forma e posizione attuale della superficie nello spazio.

Due superficie S, S' fra i cui punti P, P' possa stabilirsi una tale corrispondenza che gli elementi lineari corrispondenti risultino eguali, hanno la medesima geometria, perchè allora anche gli archi

finiti, gli angoli e le aree delle figure sopra S sono eguali ai corrispondenti sopra S'.

In tal caso le due superficie S, S' diconsi *isometriche* od anche *applicabili*, col quale ultimo vocabolo si vuole significare che, flettendo l'una superficie (o una sua regione convenientemente limitata) si può darle la configurazione dell'altra (di una regione), distendendovela, senza rottura nè duplicatura. Per altro, affinchè tale spiegamento possa riguardarsi come realizzabile, occorre dimostrare l'esistenza di una serie *continua* di configurazioni che porti la superficie dalla forma iniziale S alla finale S'. Ed in effetto ciò è sempre possibile, come ha dimostrato *E. E. Levi* (1), per due superficie isometriche S, S' a curvatura negativa, mentre quando la curvatura è positiva può anche darsi che S sia applicabile soltanto sulla *simmetrica* di S'.

Quando di due superficie S, S' siano dati i rispettivi ds^2,

$$\begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2, \end{cases}$$

riferiti a coordinate curvilinee qualunque (u, v), (u', v'), per riconoscere se sono applicabili, converrà dunque esaminare se si può stabilire una tale corrispondenza fra i punti (u, v) della prima e quelli (u', v') della seconda che ne risulti l'eguaglianza degli elementi lineari.

Per l'applicabilità delle due superficie è quindi necessario e sufficiente che siano *equivalenti* le due forme differenziali

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2.$$

Dalle considerazioni precedenti risulta che la geometria sopra la superficie è già perfettamente definita dall'espressione del suo ds^2, ossia dalla sua prima forma fondamentale

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

In altre parole le infinite configurazioni, che una superficie S può assumere per flessione, hanno tutte a comune la prima forma fondamentale; ciascuna di queste risulta poi individuata quando a questa prima forma si associ la seconda forma fondamentale (soddisfacente alle equazioni di Gauss e Codazzi).

(1) Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili — Atti dell'Accademia di Torino, 1908.

Quando si studia la geometria di una superficie come definita dal suo ds^2, conviene prescindere da ogni forma speciale di superficie che lo realizzi.

Analiticamente abbiamo una *molteplicità* a due dimensioni, generata dalle variabili u, v, i cui elementi (punti) saranno forniti da ogni coppia speciale (u_0, v_0) di valori per u, v, e fra i punti della detta molteplicità e le coppie (u, v) di valori delle variabili ha luogo così una corrispondenza da riguardarsi come biunivoca. La formola (1) dà la legge elementare come si misura la distanza ds fra due punti infinitamente vicini (u, v), $(u + du, v + dv)$ e integrando lungo un qualunque arco di curva si ha la lunghezza dell'arco. Quanto alla metrica *angolare*, essa risulta definita dalla formola (11) §. 45 (pag. 117)

$$(1^*) \qquad \cos\vartheta = E\frac{du}{ds}\frac{\partial u}{\partial s} + F\left(\frac{du}{ds}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{dv}{ds}\frac{\partial u}{\partial s}\right) + G\frac{dv}{ds}\frac{\partial v}{\partial s},$$

che assegna la legge secondo cui si misura l'angolo ϑ (fra 0 e π) formato dai due elementi lineari $ds\,\partial s$ spiccati dal punto (u, v) ai due infinitamente vicini $(u + du, v + dv)$, $(u + \partial u, v + \partial v)$.

In fine l'elemento $d\sigma$ d'area sarà dato da

$$d\sigma = \sqrt{E\,G - F^2}\,du\,dv.$$

Il campo di variabilità che considereremo per u, v sarà sempre tale che in esso le funzioni E, F, G si mantengano finite e continue insieme alle loro derivate parziali, almeno fino al secondo ordine; inoltre le funzioni E, G, $EG - F^2$ debbono restare nel campo sempre positive. L'angolo ω delle linee coordinate u, v, definito secondo la (1*) dalle formole

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

(coi valori positivi dei radicali), nel campo in considerazione varierà quindi con continuità fra o e π, senza mai assumere i valori estremi (1).

(1) Volendo, potremo anche interpretare u, v come coordinate cartesiane p. e. ortogonali sopra un piano (od una sua regione). Su questo piano abbiamo così una *rappresentazione* della molteplicità a due dimensioni, per la cui metrica le ordinarie definizioni di lunghezze e di angoli sono sostituite da quelle che risultano dalle formole (1), (1*).

§. 121.

Elementi invariabili per flessione.

Negli studi generali indicati trovano un'immediata ed importante applicazione i concetti di invarianti differenziali, e parametri differenziali introdotti nel Cap. II. Così la curvatura totale della superficie (della molteplicità) è un invariante differenziale della forma (1); il suo valore in ogni punto dipende unicamente dai coefficienti di questa forma e rimane quindi lo stesso flettendo comunque una superficie che realizzi (in tutto od in parte) quel ds^2. Di qui risulta il teorema fondamentale scoperto da Gauss: *La curvatura totale di una superficie in ogni punto non cangia per qualsiasi flessione della superficie stessa.*

È utile enunciare questo risultato sotto l'altra forma: *Quando due superficie sono applicabili, esse hanno necessariamente in punti corrispondenti eguale curvatura.*

È questa la proprietà che dà alla curvatura di Gauss l'importanza preponderante nelle applicazioni geometriche (*Cf.* §. 74 pag. 196).

Consideriamo ora un parametro differenziale della forma fondamentale (1), contenente una o più funzioni arbitrarie $\varphi, \psi \ldots$ Il valore che questo parametro differenziale assume in ogni punto della superficie è indipendente dalle coordinate che si adoprano per calcolarlo, e rimane lo stesso *comunque la superficie si fletta.* Eguagliando φ, ψ a costanti, si hanno sulla superficie altrettanti sistemi di linee, e il parametro differenziale rappresenta un'espressione inerente a queste linee, che non varia deformando la superficie.

Ad esempio che cosa rappresenta il parametro differenziale primo $\Delta_1 \varphi$ di una funzione φ?

Se si assumono a linee coordinate sulla superficie le linee $\varphi = \text{cost.}^{te}$ e le loro traiettorie ortogonali $\psi = \text{cost.}^{te}$ il ds^2 assume la forma (§. 49)

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\Delta_1 \varphi} + \frac{d\psi^2}{\Delta_1 \psi};$$

in particolare l'elemento d'arco ds_ψ delle traiettorie ortogonali $\psi = \text{cost.}^{te}$ è quindi

$$ds_\psi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}.$$

La conseguente formola

$$\sqrt{\Delta_1 \varphi} = \frac{d\varphi}{ds_\varphi}$$

dimostra che $\sqrt{\Delta_1 \varphi}$ è la derivata di φ nel senso normale alla linea $\varphi = \text{cost.}^{te}$, ciò che rende evidente trattarsi di un'espressione invariabile.

Ancora consideriamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ delle linee $\varphi = \text{cost.}^{te}$, che sappiamo essere data dal parametro differenziale (§. 99)

$$-\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{\Delta_1 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} + \Gamma\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right).$$

Ne segue che: *la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie conserva in ogni punto lo stesso valore quando la superficie si deforma per flessione.* Mentre adunque la curva cangia di forma, in generale, quando la superficie si flette, e cangiano quindi le due curvature della curva, invece la curvatura geodetica resta inalterata.

In particolare le geodetiche, cioè le linee a curvatura geodetica nulla, restano geodetiche deformando la superficie, ciò che del resto è anche evidente per la loro proprietà caratteristica di minimizzare l'arco. E di qui segue nuovamente, ricorrendo alla definizione intrinseca della curvatura geodetica (§. 103), che questa è un elemento invariabile per flessione.

Non lasceremo di osservare che da queste ultime considerazioni risulta una prova più intuitiva dell'invariabilità per flessione della curvatura di Gauss, ricorrendo alle formole (*d*), (*e*) §. 107 (pag. 291) per la misura della circonferenza e dell'area di un circolo geodetico di raggio r infinitesimo, col centro in un punto O della superficie. Siccome questi elementi sono manifestamente invariabili per flessione, le formole citate dimostrano che anche la curvatura K_0 nel punto resta invariata.

§. 122.

Risoluzione del primo problema dell'applicabilità nel caso generale.

Il primo e più semplice problema che si presenta nella teoria dell'applicabilità è il seguente:

Date due superficie S, S', *riconoscere se esse sono applicabili l'una sull'altra e, nell'ipotesi affermativa, trovare le formole dell'applicabilità.*

Analiticamente il problema equivale a riconoscere se le due forme quadratiche, che ne dànno i rispettivi ds^2:

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2 \end{cases}$$

sono trasformabili l'una nell'altra e a trovare le formole per la trasformazione. Come si vede, è questo un caso particolare del problema generale che riguarda l'equivalenza di due date forme differenziali in un numero qualunque di variabili (Cf. Cap. II, §. 33 e §. 36), che già abbiamo visto risolversi per soli calcoli di derivazione e di eliminazione. Ma qui, nel caso binario, possiamo facilmente eseguire questi calcoli servendoci dei parametri (ed invarianti) differenziali.

Supponiamo che le due forme siano equivalenti, e le formole che stabiliscono la relazione di applicabilità delle due superficie siano

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(u, v) = \varphi'(u', v') \\ \psi(u, v) = \psi'(u', v'). \end{cases}$$

dove le funzioni di u, v a sinistra e quelle di u', v' a destra si suppongono finite e continue colle derivate fino all'ordine che occorrerà considerare. Supponiamo inoltre che le due relazioni (2) siano indipendenti, e per ciò siano diversi da zero i due determinanti Jacobiani $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(\varphi', \psi')}{\partial(u', v')}$ (1). In ordine ai teoremi sulle funzioni implicite, basta allora che per due coppie iniziali (u_0, v_0), (u'_0, v'_0) valgano le (2) e le (2) stesse potranno risolversi sia rispetto ad u, v sia rispetto ad u', v' e daranno p. e. u', v' come funzioni (a determinazione univoca) di u, v in un certo intorno di u_0, v_0, coi valori iniziali u'_0, v'_0.

(1) Se uno dei due Jacobiani p. e. il primo fosse (identicamente) nullo, sarebbe ψ una funzione di φ, ed allora le equazioni (2) darebbero un sistema *incompatibile* quando non fosse ψ' la stessa funzione di φ' come ψ di φ; invece un sistema *indeterminato* quando (annullandosi i due Jacobiani) si avesse insieme $\psi = F(\varphi)$, $\psi' = F(\varphi')$; e alle (2) si soddisfi con un conveniente sistema di valori iniziali.

Nell'ipotesi che le (2) diano le relazioni di applicabilità, insieme alle eguaglianze (2), dovranno verificarsi le tre seguenti ottenute prendendo i parametri differenziali primi

$$(3)\qquad \Delta_1\varphi = \Delta_1'\varphi', \quad \nabla(\varphi, \psi) = \nabla'(\varphi', \psi'), \quad \Delta_1\psi = \Delta_1'\psi',$$

gli accenti a destra indicando che i relativi parametri differenziali sono costruiti per la seconda forma.

Così adunque, quali condizioni *dapprima necessarie*, abbiamo queste che le (3) siano conseguenze delle (2), ciò che si accerta con calcoli d'eliminazione (2). Ma ora vediamo subito che queste condizioni sono al tempo stesso sufficienti, poichè secondo i risultati del § 49, avremo

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \dfrac{\Delta_1\psi\,d\varphi^2 - 2\nabla(\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi + \Delta_1\varphi\,d\psi^2}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)} \\ E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2 = \dfrac{\Delta_1'\psi'\,d\varphi'^2 - 2\nabla'(\varphi',\psi')\,d\varphi'\,d\psi' + \Delta'\varphi'\,d\psi'^2}{\Delta_1'\varphi'\,\Delta_1'\psi' - \Delta'^2(\varphi',\psi')} \end{cases}$$

ed i secondi membri sono identici, a causa delle (2), (3).

Dunque: *Affinchè le relazioni indipendenti* (2) *diano una relazione d'applicabilità fra le due superficie è necessario e sufficiente che le* (2) *traggano seco come conseguenze le* (3).

Per risolvere il problema, tutto sta adunque a procurarsi due relazioni come le (2), che debbano necessariamente verificarsi nell'ipotesi dell'applicabilità.

Ora *escludiamo dapprima il caso che la curvatura* K *della prima superficie, o quella* K' *della seconda, sia una costante*, e allora sarà $K = K(u, v)$ un'effettiva funzione di u, v, medesimamente $K' = K'(u', v')$ un'effettiva funzione di u', v'. Ma, pel teorema di Gauss (§. 122), se le due superficie sono applicabili in punti corrispondenti (u, v), (u', v') si deve necessariamente avere

$$K(u, v) = K'(u', v').$$

(2) Basta p. e. trarre u', v' dalle (2) in funzione di u, v e sostituire nelle (3) che debbono ridursi ad identità.

e questa è già una prima relazione della forma (2) richiesta. Per ottenerne una seconda, basterà eguagliare un secondo invariante differenziale della prima forma al corrispondente invariante differenziale della seconda. Ora ogni parametro differenziale di un invariante differenziale è un nuovo invariante differenziale, e così p. e. tali sono $\Delta_1 K$, $\Delta_2 K$ come invarianti differenziali del 3° e del 4° ordine rispettivamente. Ciò posto, alla $K = K'$ aggreghiamo la nuova relazione (necessaria) $\Delta_1 K = \Delta_1' K'$ e formiamo così il sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} K(u, v) = K'(u', v') \\ \Delta_1 K(u, v) = \Delta_1' K'(u', v'), \end{cases}$$

pel quale possono presentarsi, in ordine a quanto si è detto nella nota precedente, i tre casi seguenti:

a) *Le relazioni* (4) *sono contradditorie.* Ciò accade quando p. e. $\Delta_1 K$ è una funzione di K, ma Δ'_1, K' non è la stessa funzione di K'. In tal caso le due superficie non sono applicabili e la questione è risoluta.

b) *Le relazioni* (4) *sono compatibili e distinte* (indipendenti). In questo caso basterà esaminare, come sopra si è visto, se dalle (4) seguono le altre due

$$\nu(K, \Delta_1 K) = \nu'(K', \Delta'. K'). \ \Delta_1(\Delta_1 K) = \Delta_1'(\Delta_1' K');$$

nel caso negativo le due superficie non sono applicabili, applicabili invece nel caso affermativo e le relazioni d'applicabilità saranno appunto le (4).

c) *Le relazioni* (4) *rientrano l'una nell'altra* perchè $\Delta_1 K$ è una funzione di K, e $\Delta_1' K'$ la stessa funzione di K'. In tal caso la seconda delle (4) nulla aggiunge alla prima, e conviene allora ricorrere ad un altro invariante differenziale p. e. al $\Delta_2 K$, con che sostituiremo al sistema (4) l'altro

$$(4^*) \qquad \begin{cases} K(u, v) = K'(u', v') \\ \Delta_2 K(u, v) = \Delta_2' K'(u', v') \end{cases}$$

e ripetendo per questo sistema quanto si è detto del sistema (4) perverremo, con soli calcoli di eliminazione, a decidere dell'applicabilità delle due superficie ed a trovare le formole relative, *a meno che non si presenti nuovamente il caso che* $\Delta_2 K$ *sia una funzione di* K *e* $\Delta_2' K'$ *la stessa funzione di* K'.

Dunque intanto: *Eccettuato il caso in cui si abbia insieme:*

$$(A) \qquad \begin{cases} \Delta_1 K = f(K), \quad \Delta_1' K' = f(K') \\ \Delta_2 K = F(K), \quad \Delta_2' K' = F(K'), \end{cases}$$

bastano calcoli d'eliminazione per decidere dell'applicabilità delle due superficie e per trovare le formole d'applicabilità; l'applicabilità ha luogo in un sol modo, o in un numero discreto di modi (finito o infinito).

§. 123.

Esame del caso singolare (A).

Ci resta a trattare, nella discussione generale, il caso in cui sussistono insieme le (A), nel qual caso facilmente dimostriamo che: *le due superficie sono sempre applicabili l'una sull'altra in una semplice infinità di modi, perchè sono ambedue applicabili sulla stessa superficie di rotazione.* Ed allora ben s'intende che non è possibile in questo caso trovare due relazioni (2) indipendenti per l'applicabilità, perchè nelle formole d'applicabilità resta un parametro arbitrario.

Dimostreremo il teorema enunciato provando che una superficie S, per cui si verifichino le condizioni

$$(5) \qquad \Delta_1 K = f(K), \quad \Delta_2 K = F(K),$$

è applicabile sopra una superficie di rotazione la cui forma (della curva meridiana) dipende unicamente dalle funzioni $f(K)$, $F(K)$.

Consideriamo sulla superficie S colla curvatura K *non costante* le linee $K = \text{cost.}^{te}$, che diconsi le *linee di egual curvatura*. La prima delle (5) $\Delta_1 K = f(K)$ dice (§. 106) che queste linee sono geodeticamente parallele, e siccome per la seconda (5)

$$\frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} = \frac{F(K)}{f(K)} = \varphi(K),$$

si vede che, oltre a ciò, le linee di egual curvatura appartengono colle (geodetiche) traiettorie ortogonali, che diremo le $\psi = \text{cost.}^{te}$ ad un sistema isotermo (§. 50). Di più, pel teorema di Lie (§. 51), si avrà ψ con quadrature dalle formole

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \mu(K)\,\dfrac{F\dfrac{\partial K}{\partial u} - E\dfrac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad -\int\dfrac{F(K)}{f(K)}\,dK \\ \qquad\qquad \mu(K) = e \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \mu(K)\,\dfrac{G\dfrac{\partial K}{\partial u} - F\dfrac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{array}\right.$$

onde risulta

$$\Delta_1\psi = \mu^2(K)\,\Delta_1 K.$$

Ma allora se trasformiamo il ds^2 in coordinate (K, ψ) abbiamo:

$$ds^2 = \frac{dK^2}{\Delta_1 K} + \frac{d\varphi^2}{\Delta_1\psi} = \frac{dK^2}{f(K)} + \frac{d\psi^2}{\mu^2 f(K)};$$

e se si pone

$$u = \int^{\cdot}\frac{dK}{\sqrt{f(K)}},$$

risulta

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)\,d\psi^2,$$

dove la forma della funzione $r(u)$ della sola u dipende soltanto dalla forma delle funzioni $f(K)$, $F(K)$, come si era asserito.

Si osserverà che, in questo caso ove l'applicabilità delle due superficie S, S' ha luogo in una *serie* ∞^1 *continua* di modi, per trovare le formole effettive di applicabilità non bastano più calcoli in termini finiti, ma occorrono due quadrature.

§. 124.

Caso delle superficie a curvatura costante.

Nella risoluzione data nei due ultimi paragrafi pel primo problema d'applicabilità, restava escluso il caso che una delle due superficie avesse curvatura costante. In questo caso condizione manifestamente necessaria per l'applicabilità è (pel teorema di Gauss) che l'altra superficie abbia la stessa curvatura costante. Ma qui la condizione è nello stesso tempo sufficiente, sussistendo il teorema:

Due superficie colla medesima curvatura costante sono sempre applicabili l'una sull'altra, ed anzi in una tripla infinità di modi.

Questo non è che un caso particolare della proposizione stabilita al §. 39, ove si vide che due forme differenziali quadratiche in n variabili colla stessa curvatura Riemanniana costante (e col medesimo indice d'inerzia) sono trasformabili l'una nell'altra in $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ modi.

Ma qui, per il caso binario delle superficie, ci conviene stabilire per via più diretta e geometrica il teorema, includendovi anche il caso della curvatura nulla già risoluto al §. 74, ove si dimostrò che le superficie a curvatura nulla sono soltanto le sviluppabili (applicabili sul piano).

Sulla superficie S, supposta a curvatura costante K, prendiamo una qualunque linea geodetica g e a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ assumiamo le geodetiche ortogonali alla g, a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le loro traiettorie ortogonali fra le quali la g sia la $u = 0$; il parametro u sarà l'arco delle dette geodetiche ortogonali alla g contato a partire dalla g stessa ($u = 0$), il parametro v sarà l'arco di g contato a partire da un suo punto fisso $O \equiv (o, o)$. L'elemento lineare avrà la forma geodetica

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

e siccome l'elemento d'arco della $u = 0$ è per ipotesi dv, sarà

$$(\alpha) \qquad (\sqrt{G})_{u=0} = 1.$$

Ma di più, la curvatura geodetica delle linee $u = \text{cost.}^{te}$ essendo $\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$, e la $u = 0$ essendo geodetica avremo

$$(\beta) \qquad \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0.$$

Tutto ciò vale ancora per una superficie qualunque, ma ora teniamo conto che per la nostra superficie S la curvatura K data da

$$(\gamma) \qquad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

è una *costante* e distinguiamo secondo che questa costante è nulla, positiva o negativa.

a) Se $K = 0$ risulta dalla (γ) integrando

$$\begin{cases} \gamma' G = v\,\varphi(v) + \psi(v) \\ \dfrac{\partial \gamma' G}{\partial u} = \varphi(v) \end{cases}$$

con $\varphi(v)$, $\psi(v)$ funzioni della sola v. Ma dalle condizioni (α), (β) risulta immediatamente

$$\psi(v) = 1, \quad \varphi(v) = 0, \text{ da cui } \gamma' G = 1 .$$

Dunque $ds^2 = du^2 + dv^2$, che è l'elemento lineare del piano (in coordinate cartesiane ortogonali).

b) Sia ora $K > 0$, poniamo

$$K = \frac{1}{R^2},$$

con R costante reale (positiva): Dalla (γ) integrando abbiamo ora

$$\gamma' G = \varphi(v)\cos\left(\frac{u}{R}\right) + \psi(v)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right)$$

$$\frac{\partial \gamma' G}{\partial u} = -\frac{1}{R}\varphi(v)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{1}{R}\psi(v)\cos\left(\frac{u}{R}\right)$$

e a causa delle (α) (β)

$$\psi(v) = 0, \quad \varphi(v) = 1 ,$$

indi

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2 .$$

Ma questo è l'elemento lineare della sfera di raggio R, onde vediamo che: *Tutte le superficie colla curvatura costante positiva* $\frac{1}{R}$ *sono applicabili sulla sfera di raggio* R (*indi l'una sull'altra in* ∞^3 *modi*).

c) Sia infine $K < 0$, e poniamo

$$K = -\frac{1}{R^2} \qquad (R \text{ reale}).$$

Dalla (γ) integrando si ha

$$\begin{cases} \gamma' G = \varphi(v)\cosh\left(\dfrac{u}{R}\right) + \psi(v)\operatorname{senh}\left(\dfrac{u}{R}\right) \\ \dfrac{\partial \gamma' G}{\partial u} = \dfrac{1}{R}\varphi(v)\operatorname{senh}\left(\dfrac{u}{R}\right) + \psi(v)\cosh\left(\dfrac{u}{R}\right) \end{cases}$$

e dalle (α) (β) nuovamente

$$\psi(v) = 0 , \quad \varphi(v) = 1 ,$$

onde

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2 . \tag{6}$$

Questa forma del ds^2 è comune a tutte le superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$, o pseudosferiche di raggio R. Dunque: *tutte le superficie pseudosferiche di raggio* R *sono applicabili l'una sull'altra.* E che anche qui l'applicabilità abbia luogo in ∞^3 modi diversi sarà ora subito precisato.

§. 125.

Le ∞^3 applicabilità in sè di una superficie a curvatura costante.

I risultati sopra ottenuti possono applicarsi, anzichè a due diverse superficie colla stessa curvatura costante, a due regioni di una medesima superficie a curvatura costante. Siano O, O′ due punti qualunque, presi rispettivamente nelle due regioni, e fissiamo inoltre una direzione qualunque t uscente da O, ed una pure arbitraria t' uscente da O′. Dimostriamo allora che: *la regione circostante ad* O *si può applicare, per semplice flessione, alla regione circostante ad* O′, *in guisa che la direzione* t *si sovrapponga alla direzione* t'.

Per le superficie a curvatura nulla, o costante positiva la proprietà è evidente poichè per il piano o per la sfera, su cui le dette superficie sono applicabili, vale manifestamente la proprietà enunciata; anzi la indicata flessione si riduce qui ad un puro movimento.

Per dimostrare il teorema anche per le superficie pseudosferiche riferiamo la regione circostante ad 0 ad un sistema coordinato (u, v) come quello della formola (6), ove la geodetica $u = 0$ sia quella g che esce da O nella direzione t ed il punto $O \equiv (u, v)$ sia l'origine.

Similmente operiamo per la regione circostante $0'$, assumendo questo punto come origine e la geodetica $u' = 0$ sia quella nella direzione t'; avremo

$$(6') \qquad ds'^2 = du'^2 + \cosh^2\left(\frac{u'}{R}\right) dv'^2 .$$

Ora questi due elementi lineari si identificano ponendo semplicemente

$$u' = u , \quad v' = v ;$$

così al punto $O \equiv (0, 0)$ corrisponde nell' applicabilità $O' \equiv (0, 0)$ e alla geodetica $u = 0$ nella direzione t la geodetica $u' = 0$ nella direzione t', come appunto è asserito nell'enunciato.

La proposizione dimostrata insegna che ogni figura tracciata sopra una superficie a curvatura costante può trasportarsi, per via di semplice flessione, sopra un'altra regione qualunque della superficie senza che gli angoli e le grandezze lineari e superficiali subiscano alterazione veruna; in altre parole: la geometria sulle superficie a curvatura costante è identica in tutte le regioni. Vale dunque per la loro geometria in generale, come per il piano e per la sfera, il *principio di sovrapponibilità delle figure*, ed in questo risiede il fondamento delle analogie fra le geometrie delle tre specie di superficie, come vedremo in seguito più da vicino. Il teorema di Gauss dimostra poi immediatamente che per nessuna altra superficie (non a curvatura costante) può valere lo stesso principio in tutta la sua estensione. Anzi basta supporre che si possa, per flessione delle sue parti, trasportare un punto arbitrario O in un altro arbitrario O' per concluderne che la curvatura è la stessa in tutti i punti e quindi si può anche rotare liberamente attorno ad ogni punto. Adottando la terminologia di Lie per i gruppi continui, si può enunciare questo risultato così: *Se una superficie ammette un gruppo transitivo di applicabilità in sè, la superficie è a curvatura costante, ed il gruppo ha tre parametri.*

Discende da queste considerazioni che due superficie colla medesima curvatura costante sono applicabili l' una sull' altra *in una tripla infinità di modi.*

Date però le due superficie (i due ds^2), per trovare queste applicabilità occorre prima integrare *l'equazione delle geodetiche.* Se la curvatura è nulla, sappiamo già che il problema si risolve per quadrature; quando $K = 0$ il problema si riduce, come sarà più tardi dimostrato, *all'integrazione di un'equazione differenziale del primo ordine del tipo di Riccati.*

§. 126.

Le tre forme tipiche del ds^2 per una superficie pseudosferica.

Ritorniamo ora alla forma (6) dell'elemento lineare, che abbiamo visto convenire a tutte le superficie pseudosferiche di raggio R. Accanto a questa forma del loro ds^2, che diremo del *tipo iperbolico,* vi ha luogo di considerarne altre due egualmente importanti, che diremo del tipo *ellittico e parabolico.*

Quella del tipo ellittico sarà la forma geodetica polare (§. 107), col polo O in un punto ordinario della superficie. Avremo

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2 ,$$

con

$$(7) \qquad \left(\sqrt{G}\right)_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1 ,$$

essendo, come in *c)* al paragrafo precedente

$$\begin{cases} \sqrt{G} = \varphi(v)\cosh\left(\dfrac{u}{R}\right) + \psi(v)\operatorname{senh}\left(\dfrac{u}{R}\right) \\ \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \dfrac{1}{R}\left\{\varphi(v)\operatorname{senh}\left(\dfrac{u}{R}\right) + \psi(v)\cosh\left(\dfrac{u}{R}\right)\right\}; \end{cases}$$

ma questa volta le condizioni (7) daranno

$$\varphi(v) = 0 \quad \psi(v) = R$$

e per ciò

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2 .$$

Questa forma del ds^2, che conviene nuovamente ad ogni superficie pseudosferica di raggio R, dicesi appunto del *tipo ellittico.*

Da ultimo prendiamo sulla superficie pseudosferica una linea L che sia a *curvatura geodetica costante* $= -\dfrac{1}{R}$. Di tali linee ne esisto-

no ∞^1 sulla superficie [1] e si dà loro il nome di *oricicli*. Come al §. 124, assumiamo a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ le geodetiche ortogonali alla L_0 e a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le loro traiettorie ortogonali fra le quali la L_0 sia la $u = 0$, e i parametri u, v siano fissati nello stesso modo. Nella forma geodetica del ds^2

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

avremo, con leggiero cambiamento nelle notazioni:

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\,e^{\frac{u}{R}} + \psi(v)\,e^{-\frac{u}{R}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{R}\left\{\varphi(v)\,e^{\frac{u}{R}} - \psi(v)\,e^{-\frac{u}{R}}\right\},$$

e sarà nuovamente

$$(\sqrt{G})_{u=0} = 1;$$

inoltre

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{R}, \text{ cioè } \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{R}.$$

Dunque $\varphi(v) + \psi(v) = 1$, $\varphi(v) - \psi(v) = 1$, e perciò $\varphi(v) = 1$, $\psi(v) = 0$, onde

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\,dv^2.$$

Questa è la forma del ds^2 delle superficie pseudosferiche che si dirà del tipo *parabolico*. È da notarsi che non soltanto la $u = 0$ ha la curvatura geodetica $= \frac{1}{R}$, ma anche ogni altra linea $u = \text{cost.}^{te}$, cioè:

Tutte le linee geodeticamente parallele ad un oriciclo sono altrettanti oricicli.

Così per il ds^2 delle superficie pseudosferiche di raggio R abbiamo ottenuto le seguenti tre forme tipiche distinte:

---

[1] Scrivendo che la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ eguaglia $\frac{1}{R}$, si ha l'equazione differenziale del secondo ordine $\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{R}$, della quale gli oricicli sono le linee integrali.

A) $ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\,dv^2$ (tipo parabolico)

B) $ds^2 = du^2 + R^2\,\operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2$ (tipo ellittico)

C) $ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2$ (tipo iperbolico)

§. 127.

Le superficie pseudosferiche di rotazione.

Colle tre forme ora trovate A), B), C) pel ds^2 pseudosferico si collegano le più semplici forme di superficie pseudosferiche, *quelle di rotazione*.

Se per una tale superficie è

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2,\quad r = \varphi(u),$$

si ha

$$r = C\,e^{\frac{u}{R}} - C'\,e^{-\frac{u}{R}},$$

con C, C' costanti arbitrarie. Se una delle due costanti non è nulla, si possono supporre eguali in valore assoluto (cangiando u in $u + \text{cost.}^{te}$, e cangiando poi v in cv_1 (c costante), si hanno le tre forme dei rispettivi tipi A) B) C)

$$\text{A')}\quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\,dv_1^2$$

$$\text{B')}\quad ds^2 = du^2 + \lambda^2\operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv_1^2 \quad (\lambda \text{ costante})$$

$$\text{C')}\quad ds^2 = du^2 + \lambda^2\cosh^2\left(\frac{u}{R}\right)dv_1^2,$$

che realizzeremo con tre superficie di rotazione sopra le quali u sia l'arco di meridiano e v_1 la longitudine. Indicando con r il raggio e con $z = \varphi(v)$ l'equazione della curva meridiana, avremo rispettivamente nei tre casi:

$$\text{A')}\ r = e^{\frac{u}{R}},\qquad z = \int\sqrt{1 - e^{\frac{2u}{R}}\frac{1}{R^2}}\,du$$

$$\text{B')}\ r = \lambda\operatorname{senh}\left(\frac{u}{R}\right),\ z = \int\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2}\cosh^2\left(\frac{u}{R}\right)}\,du$$

$$(3') \quad r = \lambda \cosh\left(\frac{u}{R}\right), \; z = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)}\, du .$$

Delle tre curve meridiane si ottengono le equazioni nel primo caso per funzioni ordinarie, negli altri due per funzioni ellittiche, come segue.

A') Siccome in ogni caso $\frac{dr}{du}$ è il seno dell'angolo φ d'inclinazione della tangente alla curva meridiana sull'asse di rotazione, è da porsi nel primo caso

$$e^{\frac{u}{R}} = R \operatorname{sen} \varphi,$$

indi

$$(8) \quad r = R \operatorname{sen} \varphi, \; z = R \int \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}\, d\varphi = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right\}.$$

Queste sono le equazioni parametriche della *trattrice* o curva delle tangenti costanti, avente l'asse Oz per asintoto, ed appunto costante $= R$ il tratto di tangente fra il punto di contatto e l'asintoto.

Tale proprietà si riscontra subito dalle equazioni parametriche (8), ma risulta anche dal fatto che la curvatura geodetica dei paralleli è costante $= \frac{1}{R}$.

La corrispondente superficie generata dalla rotazione della trattrice attorno all'asintoto dicesi la *pseudosfera* ed è la più semplice forma di superficie pseudosferiche (1).

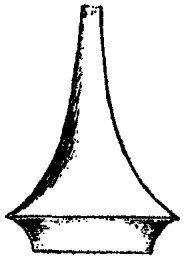


Fig. 1.ª — Pseudosfera.

(1) Questa e le due seguenti figure sono tolte dal catalogo dei modelli costruiti da L. Brill a Darmstadt.

B') Siccome qui $\frac{dr}{du} = \operatorname{sen} \varphi = \frac{\lambda}{R} \cosh\left(\frac{u}{R}\right)$, per avere una curva reale bisogna supporre $\frac{\lambda}{R} < 1$, e se poniamo $\lambda = R \operatorname{sen} \alpha$, il massimo valore per $\cosh\left(\frac{u}{R}\right)$ sarà $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, per cui il raggio r del parallelo giace fra i limiti $r = 0$, $r = R \cos \alpha$, e corrispondentemente si ha $\varphi = \alpha$ o $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Tutti i meridiani incontrano per $u = 0$ l'asse di rotazione sotto l'angolo α, ed il punto è un punto *conico* della superficie.

Le equazioni parametriche della curva meridiana si ottengono, nel modo più semplice, per funzioni ellittiche di Jacobi di un parametro τ, col modulo $k = \cos \alpha$ ($k' = \operatorname{sen} \alpha$). Posto infatti

$$\operatorname{senh}\left(\frac{u}{R}\right) = \frac{k}{k'} \, cn\, \tau = \cot \alpha \, cn \, \tau,$$

si ha per le equazioni parametriche domandate

$$(9) \quad r = R\, k \, cn\, \tau, \; z = R \int_0^\tau k^2 \, sn^2 \tau \, d\tau = R \left\{ \frac{H\tau}{K} - Z(\tau) \right\},$$

essendo

$$Z(\tau) = \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)}$$

la Z di Jacobi, e H, K le note costanti della teoria delle funzioni ellittiche.

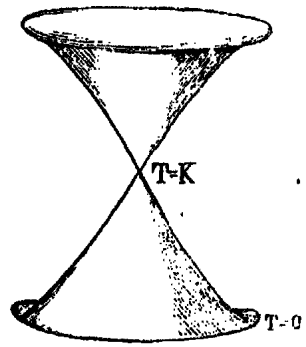


Fig. 2.ª — Superficie pseudosferica di rotazione a tipo ellittico.

Il tratto della curva da $\tau = 0$ a $\tau = 2K$ è rappresentato nella figura 2ª ; quando τ aumenta di $4K$ la curva si riproduce periodi-

camente. La superficie di rotazione consta di infinite parti congruenti per traslazione (di ampiezza $2RH$) lungo l'asse; i paralleli massimi di raggio $R\cos\alpha$ sono paralleli di regresso (cuspidali) per la superficie, poichè ai valori di τ multipli di $2K$ corrispondono cuspidi dalla curva meridiana

C') In questo caso abbiamo

$$r = \lambda \cosh\frac{u}{R}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{\lambda}{R}\operatorname{senh}\frac{u}{R} = \operatorname{sen}\varphi,$$

e il massimo valore che assume u nel tratto reale della curva corrisponde a $\operatorname{senh}\frac{u}{R} = \frac{R}{\lambda}$ $\left(\text{o } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ onde il raggio del parallelo varia fra il minimo λ $(\varphi = 0)$ e il massimo $\sqrt{R^2+\lambda^2}$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Qui introduciamo le funzioni ellittiche col modulo $k = \frac{R}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}$ e poniamo

$$\cosh\left(\frac{u}{R}\right) = \frac{dn\,\tau}{k'};$$

le equazioni parametriche della curva si scrivono

$$(10) \qquad r = \frac{R}{k}\,dn\,\tau, \quad z = \frac{R}{k}\left(\frac{H\tau}{K} - Z(\tau)\right)$$

La forma della curva da $\tau = 0$ o $\tau = 2K$ è rappresentata nella figura 3ª; quando τ aumenta di $2K$ la curva si riproduce periodicamente. I paralleli massimi corrispondenti ai valori di τ multipli pari di K sono cuspidali; quelli minimi corrispondono a τ multiplo dispari di K e sono linee geodetiche.



Fig. 3.ª — Superficie pseudosferica di rotazione del tipo iperbolico.

§. 128.

Regioni di superficie pseudosferiche applicabili sui tre tipi di rotazione.

Le tre forme di superficie pseudosferiche dei tre tipi A') B') C') si distinguono per questo che nel tipo A') i paralleli hanno curvatura geodetica $= \frac{1}{R}$ (sono oricicli), nel tipo B') hanno (ciascuno) curvatura geodetica costante

$$\frac{1}{R}\coth\left(\frac{u}{R}\right) > \frac{1}{R},$$

nel tipo C') la curvatura geodetica dei paralleli è

$$\frac{1}{R}\operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right) < \frac{1}{R}.$$

Per ciò, benchè queste superficie siano applicabili l'una sull'altra, non è possibile distendere i paralleli di un tipo sui paralleli di un altro tipo.

È interessante esaminare come conviene delimitare sopra una superficie pseudosferica qualunque S di raggio R, una regione che possa poi, per flessione, cangiarsi in uno dei tre tipi di rotazione.

1° *Tipo parabolico.* Sulla S si tracci ad arbitrio un oriciclo, sulla quale linea L si taglierà un arco AB di lunghezza $= 2\pi R$, e negli estremi A, B si condurranno (da una medesima parte) le due geodetiche indefinite AA', BB' normali alla AB. La regione di S compresa fra l'arco AB e le due geodetiche AA', BB', tagliata dalla superficie, si potrà flettere in guisa da conformare l'arco AB a circolo di raggio R e le due geodetiche AA', BB' si riuniranno in una trattrice meridiano della pseudosfera di cui il detto circolo sarà diventato il parallelo massimo (cuspidale).

2° *Tipo ellittico.* Sulla S si segni un punto P (ordinario) come polo di un sistema geodetico polare, che darà al ds^2 la forma B) §. 126 pag. 337

$$ds^2 = du^2 + R^2\operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2,$$

e questa si confronti colla B')

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv_1^2 .$$

Per identificarle basta porre

$$\frac{\lambda v_1}{R} = r_1 \operatorname{sen}\alpha = r ,$$

onde si vede che mentre la longitudine v_1 compie un intero giro da $v_1 = 0$ a $v_1 = 2\pi$, l'azimuth v della geodetica cresce soltanto da $v = 0$ a $v = 2\pi \operatorname{sen}\alpha < 2\pi$.

Per ciò è soltanto un settore di ampiezza angolare $2\pi \operatorname{sen}\alpha$ attorno a P, che va a ricoprire una falda della superficie rotonda. Ma vi ha di più: la parte di S al di là del circolo geodetico di raggio

$$u = \operatorname{sett}\cosh\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$$

non ha corrispondente sulla superficie di rotazione, e la parte di S che si conforma a questa falda è quindi limitata dal settore racchiuso dalle due geodetiche $v = 0$, $v = 2\pi \operatorname{sen}\alpha$ e dal circolo geodetico di raggio $r = \operatorname{settght}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$. Si osserverà che, quanto maggiore è l'ampiezza angolare del settore, tanto più piccolo deve essere il raggio r del circolo geodetico.

3° *Tipo iperbolico.* Nelle superficie di rotazione di questo tipo il parallelo minimo è una geodetica e, qualunque superficie pseudosferica S potrà applicarvisi in guisa da conformare una sua geodetica arbitraria g a quel parallelo minimo.

La regione di S che si distenderà effettivamente sopra una falda della superficie rotonda è racchiusa da una striscia limitata da due geodetiche normali negli estremi A, B di un arco A B della g eguale in lunghezza alla periferia del parallelo minimo e da due linee geodeticamente parallele a g ed equidistanti da essa, le quali, dopo la deformazione, diventano i paralleli massimi (cuspidali), mentre le due dette geodetiche normali si riuniscono in un meridiano. La lunghezza e la larghezza della striscia dipendono solo dal raggio che si vuol dare al parallelo minimo.

È manifesto che queste circostanze corrispondono a quelle più semplici che si presentano per le superficie a curvatura nulla (sviluppabili) quando si vuole conformarle a coni o a cilindri di rotazione (¹).

(¹) Qui i due tipi parabolico ed iperbolico si riuniscono in quello dei cilindri, e il tipo ellittico dà i coni.

§. 129.

Superficie con un gruppo continuo di applicabilità in sè. Elicoidi.

Si è già osservato, al §. 125, che una superficie non può ammettere un gruppo continuo transitivo d'applicabilità in sè, se non nel caso che la curvatura sia costante, ed allora il gruppo possiede *tre* parametri (è triplamente infinito).

Una superficie a curvatura variabile $K = R(u, v)$ può ammettere al massimo un gruppo continuo *ad un parametro* di flessioni in sè, come è geometricamente intuitivo dall'osservare che in una tale flessione continua ciascuna linea di egual curvatura $K = \text{cost.}^{te}$ deve scorrere in sè medesima, e la flessione è perfettamente determinata quando è fissato per una di queste linee l'ampiezza dello scorrimento.

È chiaro che qualunque superficie applicabile sopra una superficie di rotazione ammette una flessione continua in sè medesima, poichè la superficie di rotazione scorre in sè stessa per rotazione attorno all'asse. Ma sussiste anche il teorema inverso: *Ogni superficie* S *che ammette una flessione continua in sè medesima è applicabile sopra una superficie di rotazione.*

Questo abbiamo già dimostrato al §. 123, provando che nelle formole d'applicabilità di due superficie S, S′ entrano parametri arbitrarii solo quando sono applicabili sulla stessa superficie di rotazione, e il teorema vale anche manifestamente per le superficie a curvatura costante, le quali sono tutte applicabili l'una sull'altra e sopra superficie di rotazione.

Un altro modo semplice di stabilire il teorema, nel caso di superficie a curvatura variabile, risulta dalle osservazioni seguenti. Nella flessione continua supposta ogni linea L di egual curvatura $K = \text{cost.}^{te}$ striscia in sè medesima, e potendo ciascun suo punto trasportarsi in qualunque altro (di un intorno finito) la linea L è a curvatura geodetica costante.

Inoltre, mentre la L scorre in sè stessa, altrettanto accade di ogni altra linea geodeticamente parallela alla L, e perciò le linee $K = \text{cost.}^{te}$ sono a curvatura geodetica costante e geodeticamente parallele. Ora sussiste il teorema:

Se una superficie S *possiede un sistema di linee* L *geodeticamente*

parallele e a curvatura geodetica costante, essa è applicabile sopra una superficie di rotazione, i cui paralleli sono le deformate delle linee L.

Prendasi infatti a sistema coordinato quello formato dalle linee L ($u =$ cost.te) e dalle geodetiche ortogonali ($v =$ cost.te); l'elemento lineare prenderà la forma geodetica

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Ma poichè, per ipotesi, le $u =$ cost.te sono a curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u} = -\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}$ costante, sarà

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(u)$$

e integrando

$$\sqrt{G} = U\,V,$$

con U funzione di u, e V di v. Ma cangiando il parametro v in $\int V\,dv$, si può rendere $V = 1$ e si ha così la forma tipica

$$ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2$$

del ds^2 di una superficie di rotazione.

Il teorema così nuovamente dimostrato consente un'immediata applicazione ad un'importante classe di superficie che diconsi *elicoidi*. Sono queste le superficie generate da una curva piana o a doppia curvatura, dotata attorno ad un asse e parallelamente a questo di un doppio movimento rotatorio e traslatorio, il rapporto delle cui velocità sia costante. I varii punti della curva generatrice descrivono altrettante eliche circolari, aventi per asse comune l'asse dell'elicoide e tutte del medesimo passo. È evidente che il moto elicoidale, col quale la superficie è stata generata, applicato all'intera superficie, la fa strisciare sopra sè medesima, onde abbiamo, come corollario del teorema generale, l'elegante risultato dovuto a Bour: *Ogni superficie elicoidale è applicabile sopra una superficie di rotazione, le eliche si distendono sui paralleli.* Si osservi che la superficie di rotazione è ricoperta infinite volte dall'elicoide, ogni elica avvolgendo infinite volte il rispettivo parallelo.

È manifesto che le superficie di rotazione, come pure i cilindri, sono casi particolari delle elicoidi e corrispondono rispettivamente ad un puro movimento rotatorio, ovvero traslatorio.

Viceversa: *Se una superficie ammette un movimento continuo in sè, essa è elicoidale, ovvero di rotazione o un cilindro.* E infatti le linee che scorrono in sè, durante un tale movimento ad un parametro, sono necessariamente eliche, o circoli, o rette, ed il movimento è elicoidale, o rotatorio o traslatorio (1).

§. 130.

Superficie di rotazione applicabili.

Se due superficie di rotazione S, S_1 sono applicabili, e la loro curvatura non è costante, i paralleli di S debbono distendersi sui paralleli di S_1 e quindi i meridiani sui meridiani; le considerazioni seguenti valgono del resto anche per superficie a curvatura costante se qui si aggiunge la condizione che i paralleli si corrispondano nell'applicabilità.

Se l'elemento lineare di S è dato da

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2,$$

e quello di S_1 da

$$ds_1^2 = du_1^2 + r_1^2\,dv_1^2,$$

potremo fare senz'altro $u_1 = u$, contando gli archi meridiani da due paralleli corrispondenti.

Per identificare i due elementi lineari, converrà porre $r_1 = v_1(v)$ e determinare questa funzione dalla condizione

$$r_1(u)\frac{dv_1}{dv} = r(u),$$

(1) Come si riconosce se una superficie definita dalle sue due forme differenziali $\left\{\begin{matrix} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \end{matrix}\right.$ è un elicoide (o un caso limite)? Occorre e basta per questo che le due forme ammettano un gruppo continuo comune di trasformazioni in sè. Se si esclude il caso della proporzionalità delle due forme (sfera o piano), ciò avviene soltanto quando la prima è riducibile al tipo

$$du^2 + r^2\,dv^2 \quad (r = \varphi(u))$$

e allora anche la seconda deve trasformarsi in sè aumentando v di una costante arbitraria cioè D, D', D'' debbono essere funzioni della sola u.

onde risulta

$$r_1 = kr\,, \qquad v_1 = \frac{v}{k} \quad (k \text{ costante arbitraria})$$

Se adunque $r = \varphi(u)$ è l'equazione del meridiano di S le coordinate del meridiano di S_1 saranno date da

$$r = k\varphi(u)\,, \quad z = \int \sqrt{1 - k^2\varphi'^2(u)}\,du\,.$$

Ne segue: ***Ogni superficie di rotazione può deformarsi in ∞^1 modi, conservandosi di rotazione.***

Se si considera più da vicino il modo d'applicarsi delle due superficie, si può supporre p. e. $k < 1$, l'ipotesi contraria equivalendo a scambiare S con S_1. In tal caso la formola $v = k v_1$ dimostra che, quando la longitudine v_1 ha compiuto un intero giro crescendo da 0 a 2π, la longitudine v ha raggiunto soltanto il valore $2k\pi < 2\pi$, e d'altra parte il meridiano di S_1 rimane certamente reale finchè tale rimane quello di S (essendo sempre $k^2\varphi'^2(u) < 1$). Si vede quindi che, applicando S_1 sopra S, quest'ultima non ne resta interamente coperta, ma viene a mancarne una regione (fuso) compresa fra due meridiani i cui piani formano un angolo di ampiezza eguale a $2\pi(1-k)$.

Per distendere S_1 sopra S conviene quindi tagliare la superficie S_1 lungo un meridiano ed aprirla deformandola in guisa che gli orli del taglio diventino sopra S due meridiani distinti. In questo passaggio da S_1 a S la curvatura del meridiano aumenta in ogni punto (1).

All'altra ipotesi $k > 1$ corrisponde evidentemente la deformazione inversa di S in S_1, nella quale è da togliersi da S un fuso, ristabilendo poi la continuità della superficie col riunire per deformazione in un solo i due meridiani del fuso tolto. Ora però la nuova curva meridiana rimane reale soltanto per $k\dfrac{dr}{du} < 1$, o sen $\alpha < \dfrac{1}{k}$,

(1) Per il meridiano $r = \varphi(u)$ la curvatura $\dfrac{1}{R}$ è data da

$$\frac{1}{R} = \sqrt{r'^2 + z'^2} = \frac{\varphi''}{\sqrt{1 - \varphi'^2}}\,,$$

e questa diminuisce se si cangia φ in $k\varphi$, con $k < 1$.

cioè nella zona lungo la quale α non supera $\alpha_0 = \text{arc sen}\left(\dfrac{1}{k}\right)$; tale zona sarà in generale limitata da due paralleli, che dopo la deformazione diventano paralleli di regresso sopra S_1.

a) Come primo esempio consideriamo le deformate di rotazione della sfera di raggio $= 1$, ove si può porre

$$r = \cos u\,,$$

onde le coordinate dei meridiani deformati sono date dalle formole

$$r = k\cos u\,, \quad z = \int \sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2 u}\,du\,.$$

e potranno esprimersi per funzioni ellittiche di un parametro τ. Per ciò se $k < 1$ poniamo

$$\cos u = \text{cn}(\tau, k),$$

ed avremo

$$r = k\,\text{cn}\,\tau\,, \quad z = \left(1 - \frac{\Pi}{K}\right)\tau + Z(\tau)\,.$$

Quando poi $k > 1$ cangiamo k in $\dfrac{1}{k}$ e poniamo

$$\cos u = \text{dn}(\tau, k);$$

così avremo

$$r = \frac{\text{dn}\,\tau}{k}\,, \quad z = \left(k - \frac{\Pi}{K\,k}\right)\tau + \frac{1}{k}Z(\tau)\,.$$

Nel primo caso ($k > 1$) la superficie ha la forma di un fuso, i cui meridiani incontrano l'asse in un punto (conico per la superficie) sotto l'angolo $\alpha = \text{arc sen}\,k$. Nel secondo caso si ha una zona limitata a due paralleli minimi di regresso. Le tre figure seguenti rappresentano appunto le superficie di rotazione a curvatura costante positiva corrispondenti ai tre casi $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$. Sulla intermedia (sfera) è segnata la zona che si applica sulla superficie della fig. 6.ª

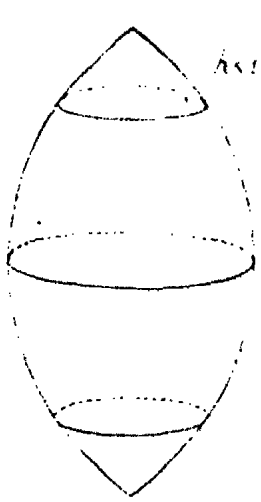


Fig. 4.ª

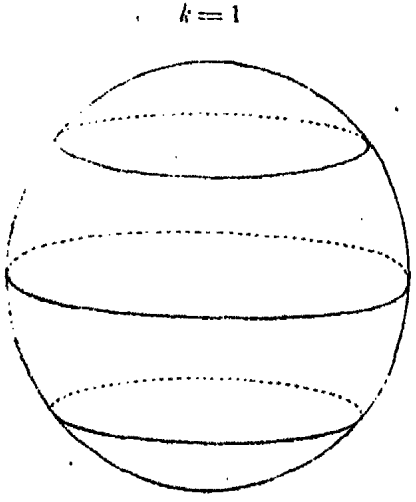


Fig. 5.ª — (Sfera)

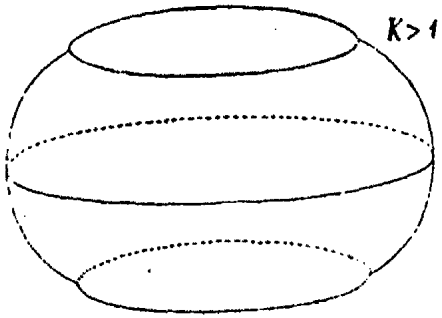


Fig. 6.ª

Le tre forme delle curve meridiane stanno in una notevole relazione con quelle delle superficie pseudosferiche di rotazione esaminate al §. 127. Se ad una di queste curve meridiane si dà un moto continuo di traslazione lungo l'asse, il sistema ∞^1 di curve congruenti ottenute ha per trajettorie ortogonali le curve meridiane delle dette superficie pseudosferiche di rotazione (1).

b) La pseudosfera gode della singolare proprietà che tutte le sue deformate di rotazione coincidono colla pseudosfera stessa, come

(1) Vedi Beltrami — *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione.* Annali di matematica. Serie I, tomo VI (1864) - Opere Tomo I p, 199.

risulta dall'osservare che la curvatura geodetica dei paralleli è una costante assoluta $\frac{1}{R}$. Nel caso del restringimento ($k < 1$) il parallelo massimo (di regresso) diventa un parallelo minore e resta così scoperta la zona compresa fra questo parallelo e quello massimo. Nella deformazione inversa un parallelo minore diventa quello di regresso; ma per effettuare questa trasformazione occorre prima tagliare dalla pseudosfera la zona compresa fra questo parallelo ed il parallelo attuale di regresso.

La deformazione delle altre due classi di superficie pseudosferiche di rotazione conduce a superficie del medesimo tipo, e solo varia, nel caso delle superficie del tipo ellittico, l'angolo d'apertura al vertice (punto conico), e nel tipo iperbolico il raggio del parallelo minimo.

§. 131.

Esempi di elicoidi applicabili sopra superficie di rotazione.

Confermiamo ora il teorema di Bour (§. 129) ricercando direttamente il ds^2 di una qualunque superficie elicoidale, che resterà definita dando l'asse, il parametro m del moto elicoidale ed il *profilo meridiano*, cioè la sezione fatta nell'elicoide da un piano per l'asse, sezione che nel moto elicoidale genera appunto la superficie.

Prendiamo per asse delle z l'asse dell'elicoide, e indicando con ρ la distanza di un punto mobile sul profilo meridiano dall'asse, scriviamo l'equazione del profilo meridiano.

$$z = \varphi(\rho).$$

Denotando poi con v l'angolo di cui ha rotato, dopo un tempo qualunque, il profilo meridiano e con m il rapporto costante della velocità di traslazione a quella di rotazione (parametro del moto), le equazioni parametriche dell'elicoide saranno

$$(11). \qquad x = \rho \cos v\ ,\quad y = \rho \operatorname{sen} v\ ,\quad z = \varphi(\rho) + m v\ .$$

Di qui deduciamo

$$(12) \qquad ds^2 = [1 + \varphi'^2(\rho)]\, d\rho^2 + 2 m \varphi'(\rho)\, d\rho\, dv + (\rho^2 + m^2)\, dv^2$$

e cangiando le linee coordinate v col porre

$$c = kv_1 - m \int \frac{\varphi'(\rho)\, d\rho}{\rho^2 + m^2} \quad (k \text{ costante}),$$

ne risulterà

$$(13) \qquad ds^2 = \left\{ 1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2} \right\} d\rho^2 + k^2 (\rho^2 + m^2)\, dv_1^2 .$$

Paragonando questo elemento lineare con quello di una superficie di rotazione, posto sotto la forma

$$ds_1^2 = [1 + \psi'^2(r)]\, dr^2 + r^2\, dv_1^2 ,$$

dove $z = \psi(r)$

è l'equazione della curva meridiana, li possiamo identificare ponendo fra $r, \psi(r)$; $\rho, \varphi(\rho)$ le relazioni

$$(14) \qquad \begin{cases} r^2 = k^2 (\rho^2 + m^2) \\ [1 + \psi'^2(r)] \left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2 = 1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2} . \end{cases}$$

Da queste formole risulta nuovamente il teorema di Bour; di più si vede che, presa ad arbitrio un'elicoide od una superficie di rotazione, si possono trovare *con sole quadrature* le ∞^1 superficie di rotazione, o le ∞^2 superficie elicoidali su cui sono applicabili. Nel primo caso, eliminando ρ, si ha infatti $\psi'(r)$, nel secondo, eliminando r, si ottiene $\varphi'(\rho)$.

a) *Elicoide rigata ad area minima e catenoide.*

Come primo esempio prendiamo *l'elicoide rigata ad area minima* (Cf. §. 27) o superficie delle normali principali dell'elica circolare, che ha per profilo meridiano una retta appoggiata normalmente all'asse, onde avremo nelle (14) $\varphi'(\rho) = 0$.

Ne risulta

$$1 + \psi'^2(r) = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{k^2 (r^2 - m^2 k^2)} ,$$

e prendendo $k = 1$ si ha

$$z = \psi(r) = m \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - m^2}} = m \operatorname{sett.cosh}\left(\frac{r}{m}\right),$$

da cui per equazione della curva meridiana

$$(15) \qquad r = m \cosh\left(\frac{z}{m}\right).$$

Questa è una *catenaria comune*, avente l'asse di rotazione per direttrice, e la superficie di rotazione corrispondente dicesi *catenoide*. Si osserverà che le generatrici dell'elicoide si distendono sopra i *meridiani*, e l'asse $\rho = 0$ diventa il *circolo di gola* $r = m$ del catenoide.

b) *Iperboloide rotondo ad una falda e catenoide allungato.*

Il profilo meridiano dell'elicoide sia ancora una retta appoggiata all'asse, ma obliquamente sotto un angolo $\alpha < \frac{\pi}{2}$; la sua equazione sarà

$$z = \rho \cot \alpha$$

e ponendo nelle (14) $\varphi'(\rho) = \cot \alpha$, risulta

$$(16) \qquad 1 + \psi'^2(r) = \left\{ 1 + \frac{(r - k^2 m^2) \cot^2 \alpha}{r} \right\} \frac{r^2}{k^2 (r^2 - k^2 m^2)} =$$

$$= \frac{\frac{r^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - k^2 m^2 \cot^2 \alpha}{k^2 (r^2 - k^2 m^2)}$$

Se prendiamo una prima volta

$$k = \cot \alpha$$

ne viene

$$\psi'(r) = \frac{\operatorname{tg} \alpha\, r}{\sqrt{r^2 - m^2 \cot^2 \alpha}}, \quad \psi(r) = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{r^2 - m^2 \cot^2 \alpha},$$

e il meridiano della superficie di rotazione è l'iperbola

$$\frac{r^2}{m^2 \cot^2 \alpha} - \frac{z^2}{m^2} = 1 .$$

onde la superficie stessa è l'iperboloide rotondo ad una falda. Facilmente si osserva che l'asse $\rho = 0$ dell'elicoide si distende sul circolo di gola e le generatrici dell'elicoide sulle generatrici di un sistema dell'iperboloide.

Ma prendiamo ora una seconda volta nelle (16)

$$k = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} ,$$

e verrà

$$\varphi'(r) = \frac{m}{\sqrt{r^2 - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha}}}$$

da cui integrando

$$r = \frac{m}{\operatorname{sen} \alpha} \cosh\left(\frac{z}{m}\right). \tag{17}$$

Questa curva meridiana proviene dalla catenaria comune (15) *allungando* tutte le ordinate r rispetto alla direttrice nel rapporto 1 : sen α e si dirà per ciò la catenaria allungata (1); alla superficie di rotazione corrispondente daremo il nome di *catenoide allungato*. Questa è dunque una delle deformate di rotazione dell' iperboloide.

c) *catenoide accorciato ed elicoide logaritmica.*

Insieme al catenoide comune ed a quello allungato, si consideri anche il *catenoide accorciato*, avente per curva meridiana la catenaria accorciata

$$r = a \operatorname{sen} \alpha \cosh\left(\frac{z}{a}\right). \quad (a, \alpha \text{ costanti}) \tag{17*}$$

per asse la direttrice (2). Qui si ha

$$\varphi'(r) = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}},$$

e, se mediante le formole (14), cerchiamo una superficie elicoidale applicabile, troviamo che per profilo meridiano si può prendere la curva logaritmica

$$z = \varphi(\rho) = a \cos \alpha . \log \rho$$

assumendo per parametro m del moto elicoidale

$$m = a \operatorname{sen} \alpha .$$

Questa si dirà *l' elicoide logaritmica*, ed abbiamo quindi il teorema: ***Il catenoide accorciato è applicabile sopra un' elicoide logaritmica ; e viceversa ogni elicoide logaritmica è applicabile sul catenoide accorciato.***

(1) Si consideri un cilindro la cui sezione retta sia una catenaria comune ; una sezione obliqua del cilindro dà la catenaria allungata.

(2) La catenaria accorciata è la proiezione ortogonale della comune sopra un piano per la direttrice.

§. 132.

Elicoidi pseudosferiche del Dini.

Consideriamo da ultimo le notevoli superficie elicoidali che si ottengono cercando per quali elicoidi avviene che : *i profili meridiani siano linee di curvatura.*

Per ciò alle formole (11), che dànno le equazioni parametriche di una qualunque elicoide, aggiungiamo le espressioni dei coseni di direzione della normale :

$$X = \frac{m \operatorname{sen} v - \rho \varphi'(\rho) \cos v}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}, \quad Y = -\frac{m \cos v + \rho \varphi'(\rho) \operatorname{sen} v}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}, \quad Z = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}$$

I profili meridiani saranno linee di curvatura se i loro piani tagliano sotto un angolo σ costante l'elicoide. Ora i coseni di direzione della normale al piano di un profilo sono manifestamente

$$\operatorname{sen} v , \quad -\cos v , \quad 0$$

e per ciò

$$\cos \sigma = X \operatorname{sen} v - Y \cos v = \frac{m}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}.$$

Il profilo meridiano delle superficie elicoidali cercate è dunque determinato dall' equazione differenziale

$$[\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)] \cos^2 \sigma = m^2$$

ossia

$$\rho^2 [1 + \varphi'^2(\rho)] = m^2 \operatorname{tg}^2 \sigma.$$

Ora $\rho \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}$ rappresenta il segmento di tangente al profilo meridiano, compreso fra il punto di contatto e l' asse, onde si vede che il profilo è in questo caso una trattrice avente per asse l' asintoto, e per lunghezza costante della tangente $t = m \operatorname{tg} \sigma$.

Ma una seconda notevole proprietà di queste elicoidi risulta cercando le superficie di rotazione su cui sono applicabili. La formola (13) ci dà pel loro ds^2

$$ds^2 = \frac{m^2}{\cos^2 \sigma (\rho^2 + m^2)} d\rho^2 + h^2 (\rho^2 + m^2) dv^2,$$

e se poniamo

$$\rho = m \operatorname{senh}\left(\frac{u\cos\tau}{m}\right), \quad R = \frac{m}{\cos\tau}$$

risulta

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2,$$

che è la forma iperbolica del ds^2 delle superficie pseudosferiche di raggio R. Queste elicoidi sono dunque superficie pseudosferiche di raggio $R = \frac{m}{\cos\tau}$; esse furono considerate la prima volta dal Dini.

Da quanto precede risulta per la loro costruzione geometrica: *Alla trattrice colle tangenti costanti $= t$ si dia un movimento elicoidale di parametro arbitrario m; l'elicoide generata è pseudosferica di raggio $R = \sqrt{t^2 + m^2}$ e le trattrici meridiane sono le linee di curvatura di un sistema.*

È facile anche determinare le linee di curvatura del secondo sistema, per il che basta considerare che le dette trattrici meridiane tagliano ad angolo retto tutte le sfere di raggio $= t$ coi centri sull'asse. Queste sfere segano quindi ortogonalmente l'elicoide lungo linee, che sono per ciò le linee di curvatura del secondo sistema. Inoltre si osserverà che la tangente ad una di queste linee di curvatura del secondo sistema sta in un piano colla normale alla superficie e colla normale al piano del profilo, colla quale fa dunque l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \tau$.

Ciascuna di queste linee è così una traiettoria isogonale del fascio di piani per l'asse ed è quindi una *lossodromica* della sfera su cui è tracciata (Cf. l'osservazione al §. 55, pag. 141) Dunque:

Le elicoidi pseudosferiche del Dini hanno per linee di curvatura del secondo sistema altrettante lossodromiche delle sfere di raggio t su cui sono tracciate.

Da ultimo è da osservare che queste singolari elicoidi del Dini sono soltanto una classe di elicoidi pseudosferiche. Le generali si ottengono dalla corrispondente equazione differenziale

$$\frac{\rho^2\varphi'\varphi'' - m^2}{\{\rho^2(1+\varphi'^2) + m^2\}^2} = -\frac{1}{R^2},$$

che si ottiene eguagliando la curvatura alla costante $-\frac{1}{R^2}$. L'integrazione si compie per funzioni ellittiche, che degenerano in circolari nel caso delle elicoidi del Dini (V. §. 250).

§. 133.

Il secondo problema dell'applicabilità e la relativa prima equazione.

Volgiamoci ora alla trattazione del secondo e più importante problema dell'applicabilità: trovare tutte le superficie applicabili sopra una superficie data, od anche sotto forma più completa: *Data una forma differenziale quadratica definita positiva*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

trovare tutte le superficie che l'ammettono come prima forma fondamentale (come espressione del ds^2).

Sebbene questo difficile problema non si sappia risolvere *completamente* che in pochi casi particolari (di cui ci occuperemo in seguito), sappiamo però formare un'equazione a derivate parziali del secondo ordine in una funzione incognita, e della forma di Ampère, da cui il problema stesso essenzialmente dipende; e i teoremi generali dell'analisi sull'esistenza degli integrali permettono di stabilire importanti risultati fondamentali per la teoria della deformazione (1). Noi abbiamo già formato, al §. 82, l'indicata equazione del secondo ordine per l'applicabilità e sotto le due forme diverse (XIII) e (XIV), che abbiamo indicato come prima e seconda equazione della applicabilità. Dobbiamo ora esaminare più da vicino queste equazioni e sviluppare le conseguenze geometriche dei teoremi generali forniti dall'analisi.

Intanto si può cominciare dall'osservare che un primo modo di trattare il problema fondamentale si ha dal riguardare come funzioni incognite i tre coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale. Le equazioni del problema sono allora l'equazione di Gauss, in termini finiti fra D, D', D'', e le due equazioni di Codazzi, che sono equazioni differenziali del primo ordine. Ad ogni terna (D, D', D'') di soluzioni di questo sistema differenziale corrisponde una superficie col dato ds^2. Così p. e. se il ds^2 dato è quello di una superficie di rotazione sotto la forma normale:

(1) Le infinite forme che una superficie flessibile ed inestendibile può assumere per flessione sono così subordinate ad un'unica equazione del secondo ordine, alle cui soluzioni singolarmente corrispondono. È questo già per sè un notevole risultato (stabilito la prima volta da Bour).

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \ (r = \varphi(u)),$$

è chiaro che si può soddisfare al detto sistema assumendo D, D′, D″ funzioni di u soltanto e le corrispondenti superficie non sono altro che le elicoidi (Cf. §. 129 nota).

Ma, colla formazione della prima o seconda equazione dell'applicabilità, noi veniamo in sostanza a sostituire al sistema differenziale nelle tre incognite D, D′, D″ un'unica equazione del secondo ordine in una sola funzione incognita, come ora andiamo a precisare.

Cominciamo dalla prima equazione (XIII′) pag. 219, che in simboli invariantivi si scrive

$$\Delta_{11} z = K(1 - \Delta_1 z), \tag{I}$$

e sviluppando coll'adottare le notazioni di Monge per le derivate prime e seconde di z

$$\left| r - \left\{ \begin{matrix} 1 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} p - \left\{ \begin{matrix} 1 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} q \right| \cdot \left| t - \left\{ \begin{matrix} 2 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} p - \left\{ \begin{matrix} 2 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} q \right| - \left| s - \left\{ \begin{matrix} 1 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} p - \left\{ \begin{matrix} 1 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} q \right|^2 = K\left[E G - F^2 - (E q^2 - 2 F pq + G p^2) \right], \tag{I*}$$

equazione lineare rapporto a

$$rt - s^2, r, s, t,$$

cioè della forma di *Ampère*.

Una semplice ed interessante osservazione, dovuta a Darboux, fa subito riconoscere quale è il significato della equazione (I). Dimostriamo che: *se z è una soluzione della* (I), *la forma differenziale quadratica*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - ds^2 =$$

$$= \left| E - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right| du^2 + 2\left| F - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right| du\,dv + \left| G - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right| dv^2$$

ha la curvatura nulla; e viceversa se ciò accade, z è soluzione della (I).

Nel modo più semplice proviamo questo riferendoci ad un particolare sistema coordinato pel quale si abbia

$$z = u, \quad F = 0,$$

come è lecito pel carattere invariantivo della nostra equazione. Ma allora la (I*) diventa

$$\left\{ \begin{matrix} 1 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 = G(E - 1)K,$$

e sostituendo ai simboli di Christoffel i loro valori viene

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 - 4E^2 G(E-1)K = 0. \tag{18}$$

Ora si ha in coordinate ortogonali (Cf. formola (E) §. 48 pag. 123

$$4E^2 G^2 K = E\left|\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}\right| + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G\left|\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}\right| + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 - 2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right), \tag{19}$$

onde la (18), moltiplicata per G, si scrive

$$G\left|\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}\right| + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 + E(E-1)\left|\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}\right| + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G(E-1)\left|\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}\right| + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 - 2EG(E-1)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right) = 0,$$

ovvero sopprimendo i termini che si distruggono e dividendo per E:

$$(E-1)\left|\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}\right| + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G\left|\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}\right| + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 - 2(E-1)G\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right) = 0.$$

Ma questa, per la (19) stessa, esprime appunto che la forma differenziale

$$(E-1)\,du^2 + G\,dv^2,$$

ha la curvatura nulla, ciò che dimostra la proposizione enunciata.

Ciò premesso, supponiamo di conoscere una soluzione $z(u, v)$ della (I), e vediamo se esisterà una superficie *reale* corrispondente coll'asseguato ds^2, per la qual cosa occorre e basta che si possano associare alla z due altre funzioni reali $x(u, v)$, $y(u, v)$, [1] tali che si abbia

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - dz^2 = dx^2 + dy^2.$$

La forma differenziale a sinistra essendo a curvatura nulla, bisogna per questo che essa sia inoltre definita positiva. Intanto pel suo discriminante si dovrà avere

[1] Queste saranno poi altre due soluzioni della (I).

$$(20)\qquad \left| E - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right| \left| G - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right| - \left| F - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right|^2 > 0$$

ossia la soluzione z dovrà inoltre soddisfare alla disuguaglianza

$$(20^*)\qquad \Delta_1 z < 1.$$

Ma tale condizione è anche sufficiente, come si vede nel modo più semplice supponendo, come è lecito, $F = 0$, chè allora, essendo la quantità

$$EG - E\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - G\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E\left[G - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] - G\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = G\left[E - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] - E\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

positiva, sono necessariamente positive anche

$$E - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Supponendo adunque che sia z una soluzione della (I), per la quale la diseguaglianza (20*) sia inoltre soddisfatta, le altre due coordinate x, y si otterranno per quadrature (§. 111 in fine), e saranno determinate a meno di una sostituzione ortogonale.

Abbiamo dunque il risultato finale:

Ad ogni soluzione $z(u, v)$ della prima equazione (I) *dell' applicabilità, che verifichi inoltre la diseguaglianza $\Delta_1 z < 1$, corrisponde una ed una sola superficie coll' assegnato ds^2. Nota la detta soluzione, la superficie si avrà con quadrature.*

§. 134.

Seconda dimostrazione e seconda equazione dell' applicabilità.

Dell' importante risultato ora conseguito è opportuno dare una nuova dimostrazione che procede più direttamente, colle formole fondamentali della teoria delle superficie:

$$Z_{11} = DZ, \quad z_{12} = D'Z, \quad z_{22} = D''Z$$

che possiamo anche scrivere, a causa della formola (§. 82)

$$\Delta_1 z = 1 - Z^2,$$

sotto la forma seguente

$$(21)\qquad D = \frac{z_{11}}{\sqrt{1-\Delta_1 z}}, \quad D' = \frac{z_{12}}{\sqrt{1-\Delta_1 z}}, \quad D'' = \frac{z_{22}}{\sqrt{1-\Delta_1 z}}$$

Queste formole, nota una soluzione z della (I) che renda $\Delta_1 z < 1$, assegnano i corrispondenti valori reali per D, D', D'' e determinano quindi completamente la configurazione della corrispondente superficie S di assegnato ds^2.

Se ora dimostriamo direttamente che i valori (21) per D, D', D'' soddisfano in effetto tanto alla equazione di Gauss come alle equazioni di Codazzi, il risultato finale del paragrafo precedente ne verrà nuovamente stabilito.

Ma per l' equazione di Gauss

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K$$

ciò è evidente, poichè appunto da questa considerazione abbiamo tratto, al §. 82, l' equazione (I) dell' applicabilità.

Per verificare poi che i valori (21) soddisfano anche alle equazioni di Codazzi basterà tener conto delle identità seguenti che valgano per qualunque funzione Φ di u, v (Cf. §. 40 Formole (D*), (E*)):

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_{11}}{\partial v} - \dfrac{\partial \Phi_{12}}{\partial u} = K\left(F\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - E\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\Phi_{11} + \left|\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right|\Phi_{12} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\Phi_{22} \\ \dfrac{\partial \Phi_{12}}{\partial u} - \dfrac{\partial \Phi_{22}}{\partial v} = K\left(F\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - G\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right) - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\Phi_{11} + \left|\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right|\Phi_{12} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\Phi_{22} \end{cases}$$

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u} = \dfrac{G\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - F\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{EG - F^2}\Phi_{11} + \dfrac{E\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - F\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{EG - F^2}\Phi_{12} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial v} = \dfrac{G\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - F\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{EG - F^2}\Phi_{12} + \dfrac{E\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - F\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{EG - F^2}\Phi_{22}. \end{cases}$$

Dalle (21) formiamo allora p. e. la differenza

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-\Delta_1 z}}\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial v} - \frac{\partial z_{12}}{\partial u}\right) - \frac{1}{(\sqrt{1-\Delta_1 z})^3}\left(z_{11}\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta_1 z}{\partial v} - z_{12}\frac{\partial \Delta_1 z}{\partial u}\right),$$

nella quale sostituiamo i valori dati dalle (22), 23); e tenendo conto delle (21) stesse *e della equazione* (I) cui soddisfa s, rimane

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \left| \begin{matrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} & - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} & - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \end{matrix} \right| D' - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' ,$$

che è appunto la prima equazione di Codazzi. In modo analogo si prova la seconda.

Si osserverà che la verifica analitica conserva il suo valore anche se $\Delta_1 z > 1$; soltanto che in questo caso D, D', D'' risultano *puramente immaginarii*.

Si vedrà più tardi, nella teoria dei sistemi ciclici, (Vol. II §. 307) che anche a queste soluzioni z dell' equazione dell' applicabilità per le quali $\Delta_1 z > 1$ compete un significato geometrico reale.

Il procedimento che abbiamo ora tenuto per dimostrare come ad ogni soluzione z della prima equazione (I) dell'applicabilità (con $\Delta_1 z < 1$) corrisponda un' effettiva superficie S reale col dato ds^2, può egualmente applicarsi alla seconda (XIV) §. 82 (pag. 220)

$$\text{(II)} \qquad \Delta_2 \rho + 1 = \Delta_2 \rho + K (2\rho - \Delta_1 \rho) ,$$

a cui soddisfa il semiquadrato $\rho = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ della distanza di un punto fisso dello spazio (origine) da un punto mobile sulla superficie. Qui però, siccome per la formola (47) §. 82 (pag. 218)

$$W = \sqrt{2\rho - \Delta_1 \rho} ,$$

deve essere

$$\Delta_1 \rho < 2\rho ,$$

quando si tratti di una deformata reale S. Dalle formole (49) ibid. (pag. 220) risulta d' altra parte

$$\text{(24)} \qquad D = \frac{\rho_{11} - E}{\sqrt{2\rho - \Delta_1 \rho}} , \quad D' = \frac{\rho_{12} - F}{\sqrt{2\rho - \Delta_1 \rho}} , \quad D'' = \frac{\rho_{22} - G}{\sqrt{2\rho - \Delta_1 \rho}} ,$$

formole che corrispondono alle (21).

Ed ora, supposto che sia ρ una soluzione (positiva) della seconda equazione (II) dell'applicabilità, che soddisfi inoltre alla diseguaglianza $\Delta_1 \rho < 2\rho$, si proverà come sopra, facendo uso delle identità (22), (23), che i valori reali (24) di D, D' D'' soddisfano insieme alla equazione di Gauss e alle due equazioni di Codazzi.

Si può del resto, anche per questa seconda equazione dell' applicabilità trovare un significato analogo a quello stabilito per la prima coll' osservazione di Darboux (§. 133). Se si pone $R = \sqrt{2\rho}$ e si riferisce la superficie S ad un sistema polare col polo nel punto fisso, si ha pel ds^2

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\sigma^2 ,$$

dove $d\sigma^2$ è il quadrato dell'elemento lineare dalla sfera di raggio $= 1$. In effetto: *la seconda equazione* (II) *dell' applicabilità esprime che la forma differenziale quadratica*

$$\frac{1}{R^2} (E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - dR^2)$$

ha la curvatura costante $= +1$.

§. 135.

Indeformabilità di una superficie con una linea rigida (non asintotica).

Servendoci della prima equazione (I) dell'applicabilità, ed applicando i teoremi generali di unicità e di esistenza delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali, passiamo ora a far conoscere alcuni risultati fondamentali relativi alla deformazione delle superficie. Avvertiamo per altro che, nello stato attuale dell' analisi, gli accennati teoremi generali essendo assicurati soltanto nel campo analitico, converrà dapprima supporre che le funzioni E, F, G di u, v siano funzioni analitiche regolari di u, v, nel campo di variabilità che si considera [1].

La prima questione che vogliamo risolvere è la seguente: *può una superficie S, flessibile ed inestendibile, deformarsi, mantenendo rigida una sua curva* Γ? Dimostreremo che se la curva Γ non è una linea asintotica per la superficie, la deformazione è impossibile; o in altre parole, quando la superficie si flette, tutte le sue curve cangiano di forma, le asintotiche al più escluse.

[1] Queste condizioni più restrittive delle ordinarie (che non presuppongono l' analiticità) si manterranno soltanto per i teoremi di questo e dei due seguenti paragrafi.

Supponiamo al contrario che la superficie S possa flettersi con continuità mantenendo rigida la curva Γ, e sia S_1 una delle configurazioni assunte da S. Potremo supporre che S_1 sia così prossima alla S che le normali ad S_1, S lungo Γ siano fra loro vicine in ogni punto quanto si vuole. Ma allora, se si osserva che Γ ha la stessa curvatura geodetica per S_1 come per S, ne segue che lungo Γ la S_1 ha le stesse normali della S.

Ora prendiamo per semplicità sopra S, S_1 un sistema coordinato ortogonale (u, v) di cui faccia parte, come linea $v = 0$, la curva Γ. Indicando coll'apposizione dell'indice 1 le quantità relative alla S_1, avremo evidentemente.

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x\,, \qquad y_1 = y\,, \qquad z_1 = z \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = \dfrac{\partial y}{\partial v}\,, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ X_1 = X\,, \qquad Y_1 = Y\,, \qquad Z_1 = Z \end{array}\right\} \text{per } v = 0.$$

Ma $(z_1\, z)$ p. e. sono due soluzioni della equazione (I) dell'applicabilità che coincidono già per $v = 0$ nei loro valori e in quello delle derivate prime.

Se ora proviamo che *coincidono con quelli delle derivate seconde*, i teoremi generali (1) ci assicureranno della coincidenza delle due soluzioni z_1, z per tutti i valori di u, v, e lo stesso potendosi ripetere per le coppie (x_1, x), (y_1, y), le due superficie S_1, S coincideranno.

Intanto dalle condizioni iniziali

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{per } v = 0\,,$$

derivando rapporto ad u segue

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \quad \text{per } v = 0\,.$$

Dalle formole fondamentali (I) §. 65 (pag. 167) deduciamo

(1) V. p. e. Goursat — *Équations aux dérivées partielles, du premier ordre* pag. 22.

$$DZ = D_1 Z\,, \quad D'Z = D_1' Z \text{ per } v = 0\,,$$

quindi

$$D = D_1\,, \quad D' = D_1' \text{ per } v = 0.$$

D'altra parte l'equazione di Gauss

$$D\,D'' - D'^2 = D_1\,D_1'' - D_1'^2\,,$$

ponendovi $v = 0$, ci dà per le precedenti

$$D\,(D'' - D_1'') = 0 \quad \text{per } v = 0$$

e quindi, se

$$(D)_{v=0} \neq 0,$$

avremo anche

$$D'' = D_1'', \text{ per } v = 0\,.$$

Ma allora la terza delle citate equazioni (I) pag. 170 dimostra che anche

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2}\,, \text{ per } v = 0\,,$$

e quindi le due superficie S, S_1, come sopra si è osservato, necessariamente coincidono.

Resta così escluso il caso

$$(D)_{v=0} = 0,$$

che si presenta soltanto quando la linea $v = 0$ è asintotica. Concludiamo quindi:

Se di una superficie S *flessibile ed inestendibile si mantiene rigida una curva* Γ, *la superficie non può deformarsi, a meno che la linea* Γ *non sia una linea asintotica di* S (2).

Che invece attorno ad una linea asintotica, mantenuta rigida, possa flettersi la superficie sarà dimostrato più oltre (V. §. 140).

(1) Se fosse $Z = 0$ lungo Γ basterebbe ricorrere alle altre equazioni analoghe per gli assi $0x$, $0y$.

(2) Non è fuor di luogo osservare che il teorema così stabilito è di immediata evidenza nel caso di una superficie sviluppabile, poichè se una linea Γ (che non sia una generatrice) resta rigida, i piani tangenti lungo Γ restano gli stessi e la sviluppabile non cangia.

§. 136.

Deformazione di una superficie, assegnata la deformata di una curva Γ.

Dopo il risultato sopra stabilito, si presenta naturale la domanda: *È possibile deformare una superficie S' in guisa che una sua curva C assuma una forma prestabilita* Γ?

Osserviamo in primo luogo che, se la deformazione cercata è possibile, la curvatura assoluta di Γ dovrebbe in ogni punto superare, o tutto al più eguagliare la curvatura geodetica di C nel punto corrispondente.

Supponiamo tale condizione soddisfatta, anzi escludiamo il caso che la curvatura assoluta di Γ eguagli in ogni punto la curvatura geodetica, che allora Γ dovrà essere asintotica sulla superficie deformata, ed è questo un caso che tratteremo fra breve in modo completo (V. §. 140).

Nell'ipotesi che esista la deformazione richiesta, sia S la superficie deformata, sulla quale prenderemo un sistema coordinato ortogonale (u, v), come al paragrafo precedente, supponendo che la curva Γ sia la $v = 0$. Per maggiore chiarezza, fisseremo che *il parametro u sia l'arco di* Γ *contato da un punto fisso*, onde avremo

$$E = 1 \text{ per } v = 0 .$$

Conservando per la curva Γ le solite notazioni del Cap. I, potremo scrivere come al §. 110 (pag. 298) le formole:

$$\text{per } v = 0 \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial x}{\partial u}, \quad \beta = \dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \gamma = \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \xi = \cos\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma\, X, \ \eta = \cos\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial y}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma\, Y, \ \zeta = \cos\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial z}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma Z \\ \lambda = \operatorname{sen}\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \cos\sigma\, X, \ \mu = \operatorname{sen}\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial y}{\partial v} + \cos\sigma\, Y, \ \nu = \operatorname{sen}\sigma \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial z}{\partial v} + \cos\sigma Z \end{cases}$$

l'angolo σ (fra 0 e 2π) avendo il significato ivi stabilito.

Ora abbiamo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\xi}{\rho}, \text{ per } v = 0$$

ed anche

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + DX,$$

da cui

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + DX = \frac{1}{\rho} \left| \cos\sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma\, X \right|, \text{ per } v = 0 .$$

Ma si ha

$$(25) \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_{v=0} = \left(\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} \right)_{v=0} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}_{v=0} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{1}{\rho_v} \right)_{v=0} .$$

e dalla precedente risulta quindi

$$(25^*) \qquad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\cos\sigma}{\rho}, \quad D = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}, \text{ per } v = 0.$$

Dalla prima di queste, essendo note in funzione dell'arco u la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ e l'assoluta $\frac{1}{\rho}$ della $v = 0$ si hanno due valori possibili σ, $2\pi - \sigma$ per σ. Intendiamo preso per σ uno ad arbitrio di questi due valori, ciascuno dei quali condurrà ad una corrispondente deformata S (4). Notiamo che, in virtù delle formole precedenti per i valori iniziali (per $v = 0$) di

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}; \ X, Y, Z,$$

si hanno le formole

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\cos\sigma\,\xi + \operatorname{sen}\sigma\,\lambda) \\ \qquad\qquad \text{per } v = 0 \\ X = -\operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma\,\lambda, \text{ ecc.} \end{cases}$$

(4) Che per tal modo il problema proposto abbia due diverse soluzioni non contraddice al teorema del §. 135. Le due superficie S, che così si ottengono, sono bensì applicabili l'una sull'altra, e la curva Γ, nella deformazione continua dell'una superficie nell'altra, riprende bensì da ultimo la configurazione iniziale, ma cangia di forma negli stati intermedi.

Di qui segue intanto che, per le tre soluzioni x, y, z della equazione (I) dell'applicabilità, conosceremo i valori iniziali (per $v=0$) delle funzioni e delle loro derivate prime, non che delle seguenti derivate seconde

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\ ;\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\ .$$

Ma allora, dalla equazione (I) a cui soddisfano, si avranno, *per almeno una di esse*, anche quelli delle altre derivate seconde

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ ,$$

poichè altrimenti dovrebbero annullarsi i valori iniziali dell'espressione

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 \frac{\partial x}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_2 \frac{\partial x}{\partial v}$$

e delle due analoghe. Ma questi valori iniziali, tenendo conto delle (25), (25*), si calcolano subito in

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}(\operatorname{sen}\sigma\xi - \cos\sigma\lambda),\ \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}(\operatorname{sen}\sigma\eta - \cos\sigma\mu),\ \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}(\operatorname{sen}\sigma\zeta - \cos\sigma\nu),$$

e non possono simultaneamente annullarsi, essendo escluso che sia zero il fattore esterno $\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}$ (altrimenti la Γ dovrebbe riuscire asintotica).

Supponiamo dunque, per fissare le idee, che sia

$$\operatorname{sen}\sigma\zeta - \cos\sigma\nu \neq 0, \text{ per } v=0 \tag{27}$$

ed allora di quella soluzione $z_1 = z_1(u, v)$ della (I) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$z_1 = z(u),\ \frac{\partial z_1}{\partial u} = \gamma,\ \frac{\partial z_1}{\partial v} = \beta\, G(\cos\sigma\xi + \operatorname{sen}\sigma\nu), \text{ per } v=0 \tag{28}$$

verranno così perfettamente fissati i valori iniziali anche delle tre derivate seconde, e in ordine ai citati teoremi d'esistenza, tale soluzione z_1 esisterà effettivamente e sarà univocamente determinata.

D'altra parte se calcoliamo il valore di $\Delta_1 z_1$ per $v=0$, troviamo

$$\Delta_1 z_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2 = \gamma^2 + (\cos\sigma\xi - \operatorname{sen}\sigma\nu)^2 =$$

$$= 1 - (\operatorname{sen}\sigma\xi - \cos\sigma\nu)^2 \text{ per } v=0.$$

Dalla disuguaglianza (27) si vede che $\Delta_1 z_1 < 1$ per $v=0$, e a causa della continuità, questa disuguaglianza si mantiene in un campo a due dimensioni per u, v.

Dunque, per quanto si è visto al §. 133, a questa soluzione z_1 della equazione (I) d'applicabilità corrisponderà una superficie S_1 col dato ds^2, e resterà soltanto da verificare che la curva Γ_1 di equazione $v=0$ sulla S_1 prende veramente la forma assegnata Γ.

§. 137.

Verifiche relative alla superficie deformata.

Per ottenere la verifica ora indicata basterà provare che la curva Γ_1 (o $v=0$) di S_1 ha, ad eguale arco u, la stessa flessione $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho}$ e la stessa torsione $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T}$ della curva Γ. Intanto dalle (28) risulta che si ha

$$z_1 = z(u),\ \gamma_1 = \gamma,\ \frac{\partial z_1}{\partial v} = \beta\, G(\cos\sigma\xi - \operatorname{sen}\sigma\nu), \text{ per } v=0 \tag{29}$$

e quindi per le (26)

$$Z_1 = -\operatorname{sen}\sigma\xi - \cos\sigma\nu, \text{ per } v=0. \tag{30}$$

Ora se nella equazione

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 \frac{\partial z_1}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 \frac{\partial z_1}{\partial v} + D_1 Z_1$$

poniamo $v=0$, il primo membro, per la prima della (29), è $\frac{\zeta}{\rho}$, e sostituendo nel secondo i valori iniziali (25), coll'osservare la terza delle (29) e la (30), otteniamo

$$\frac{\zeta}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}(\cos\sigma\xi - \operatorname{sen}\sigma\nu) - D_1(\operatorname{sen}\sigma\xi + \cos\sigma\nu),$$

cioè per la prima delle (25*)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} + D_1\right)(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu) = 0 .$$

Ma il secondo fattore, per la (27) è diverso da zero, e per ciò

$$D_1 = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}, \text{ per } v = 0.$$

Siccome D_1 (per $v = 0$) rappresenta la curvatura normale della $v = 0$, mentre $\frac{1}{\rho_v} = \frac{\cos\sigma}{\rho}$ è quella geodetica, il quadrato della flessione $\frac{1}{\rho_1}$ di Γ_1 sarà

$$\frac{1}{\rho_1^2} = D_1^2 + \frac{1}{\rho_v^2} = \frac{1}{\rho^2} ,$$

da cui intanto $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho}$ (perchè le due flessioni sono ambedue positive).

Resta a dimostrare che anche le due torsioni $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T}$ si eguagliano, e per questo deriviamo rapporto ad u la terza delle (29), il che dà (per le formole di Frenet)

$$(31)\quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(\cos\sigma\zeta + \operatorname{sen}\sigma\nu) + \sqrt{G}\,(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu)\frac{d\sigma}{du}$$

$$+ \sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\frac{\zeta}{T} - \sqrt{G}\cos\sigma\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{\nu}{T}\right), \text{ per } v = 0 .$$

D'altra parte, facendo $v = 0$ nella formola generale

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial z_1}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial z_1}{\partial v} + D_1 Z_1 ,$$

ed osservando la (29), (30) non che i valori iniziali (per $v = 0$) di $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$, dati da

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{\rho} = -\frac{\sqrt{G}\cos\sigma}{\rho}, \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} = -\frac{\sqrt{G}\cos\sigma}{\rho}\gamma + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(\cos\sigma\zeta + \operatorname{sen}\sigma\nu) - D_1'(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu),$$

e paragonando colla (31), ne viene

$$\sqrt{G}\frac{d\sigma}{du}(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\gamma) = \frac{\sqrt{G}}{T}(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu) = D_1'(-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu) .$$

Sopprimendo il fattore (non nullo per le (27)

$$-\operatorname{sen}\sigma\zeta + \cos\sigma\nu ,$$

e dividendo per $\sqrt{G}$, resta

$$\frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{du} - \frac{D_1'}{\sqrt{G}} .$$

Ma, per quanto si è dimostrato al §. 110 (pag. 298), il secondo membro rappresenta, in grandezza e segno, la torsione $\frac{1}{T_1}$ della curva Γ_1, e quindi in effetto

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} , \quad \text{c. d. d.}$$

Abbiamo così dimostrato il teorema:

È possibile (in due modi differenti) deformare una superficie S *in guisa che una sua curva* C *assuma una forma prestabilita* Γ, *purchè la prima curvatura di* Γ *sia in ogni punto maggiore della curvatura geodetica di* C *nel punto corrispondente* (1).

Come corollario di questo teorema osserviamo l'altro: *Si può deformare in infiniti modi una superficie* S *in guisa che una sua curva assegnata diventi linea di curvatura sulla superficie deformata.*

(1) Anche qui si osserverà (Cf. nota §. 135) che il teorema è quasi d'immediata evidenza nel caso di superficie sviluppabili. In tal caso infatti, fissata Γ, esistono due sviluppabili. S_1 contenenti Γ e tali che la curvatura geodetica di Γ eguaglia quella di C su S. E allora, distendendo S e S_1 sopra un piano, le trasformate piane di C, Γ (avendo ad eguale arco eguale flessione) sono curve congruenti. Per ciò si può applicare S su S_1 in guisa che C si distenda su Γ.

E invero basterà scegliere la deformata Γ di C in modo che lungo di essa sussistano le proporzioni

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ ,$$

cioè

$$\alpha : \beta : \gamma : = \frac{dX}{du} : \frac{dY}{du} : \frac{dZ}{du} ,$$

il che, avendo riguardo alle (26), dà semplicemente

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{1}{T} .$$

Si prenda dunque per $\sigma = \sigma(u)$ una funzione arbitraria di u e si determini poi la curva Γ dalle equazioni intrinseche

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 \cos\sigma} , \quad \frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{du} .$$

Deformando la S in guisa da far assumere alla C la forma Γ, questa sarà linea di curvatura della deformata. In particolare se a σ si dà un valore costante qualunque fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (gli estremi esclusi) la trasformata Γ di C sarà una linea di curvatura piana.

§. 138.

Equazioni di Darboux per le asintotiche virtuali.

Dai teoremi generali sulla deformazione, stabiliti ai paragrafi precedenti, noi abbiamo dovuto escludere per quello finale al §. 135 il caso che la curva Γ, mantenuta rigida, sia una linea asintotica, e da quello generale al paragrafo superiore quello in cui la flessione di Γ eguagli in ogni punto la curvatura geodetica di C. Ci proponiamo di esaminare ora questi casi eccezionali per dimostrare che allora le deformazioni richieste possono compiersi in infiniti modi, dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile. E siccome questi casi possono presentarsi soltanto per superficie con asintotiche reali, supporremo ora che la superficie S in considerazione (almeno nella regione di cui si tratta) abbia curvatura negativa. Di più avvertiamo esplicitamente che, nelle ricerche seguenti, abbandoniamo le ipotesi più restrittive della *analiticità* per ritornare alle consuete che siano finite e continue, insieme alle derivate parziali che occorre considerare, le funzioni che entrano nei calcoli. Queste ipotesi sono infatti sufficienti, per la natura delle equazioni a derivate parziali che incontreremo (appartenenti al tipo *iperbolico*), a stabilire in tutto rigore i teoremi fondamentali.

Sopra una superficie S, a curvatura K negativa

$$K = -\frac{1}{\rho^2} ,$$

consideriamo, insieme alle asintotiche attuali, gli infiniti sistemi (α, β) di *asintotiche virtuali*, designando con tal nome qualunque doppio sistema (α, β) di linee suscettibili, per una conveniente deformazione di S, di diventare le effettive asintotiche sulla superficie deformata. Se il ds^2 della superficie riferito alle linee (α, β) come coordinate è dato da

$$ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2 F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2 , \tag{32}$$

si sa dal §. 88 (pag. 239) che le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè le (α, β) siano asintotiche virtuali sono date dalle due equazioni

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial \alpha} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 , \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial \beta} = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 , \tag{33}$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 , \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1$ riferendosi alla forma differenziale (32).

Partendo da questo risultato noi andiamo a trovare per le asintotiche virtuali un sistema di equazioni a derivate parziali caratteristiche, dovute a Darboux, affatto analoghe a quello di Servant formato al §. 61 per le reti di Tchebychef.

La superficie S sia prima riferita ad un qualunque sistema curvilineo (u, v), ed abbiasi

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 .$$

Riguardando u, v come funzioni di α, β scriviamo, come al §. 61, le due equazioni di Christoffel

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_2 \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}_2 \dfrac{\partial u}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial v}{\partial\beta} \end{cases}$$

Ora abbiamo per ipotesi, a causa delle (33)

$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} - \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right) \\ \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\dfrac{du}{d\alpha} + \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\dfrac{dv}{d\alpha}\right), \end{cases}$$

e sostituendo nelle precedenti si hanno le formole definitive:

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left(\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 - \dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left(\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}_2 \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left(\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left(\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}_1 - \dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}\right)\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

che sono appunto le indicate *equazioni di Darboux* per le asintotiche virtuali. Queste sono costruite in modo perfettamente analogo come le equazioni (S) di Servant §. 61 (pag. 157) per la determinazione delle reti di Tchebychef sopra una data superficie, e le stesse considerazioni analitiche svolte ai §§. 61, 62 valgono manifestamente nel caso attuale; solo varia l'interpretazione geometrica.

Qui importa anzi tutto osservare che inversamente: *Se* $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ *sono due funzioni indipendenti di* α, β, *soluzioni delle equazioni* (D) *di Darboux, le linee* (α, β) *formano sopra* S *un sistema di asintotiche virtuali.* E infatti sussistendo, insieme alle (D), le equazioni (34) di Christoffel, ne seguiranno nei due binomii

$$\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\beta} \qquad \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\alpha}$$

le due equazioni lineari omogenee

$$\begin{vmatrix} \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\beta} & \frac{\partial u}{\partial\alpha} \\ \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\alpha} & \frac{\partial u}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\beta} & \frac{\partial v}{\partial\alpha} \\ \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial\alpha} & \frac{\partial v}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0,$$

con determinante $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$ *diverso da zero*; per ciò si annulleranno i due binomii, cioè sussisteranno le equazioni (33), che caratterizzano le (α, β) come linee asintotiche virtuali.

Ritornando al confronto fra le equazioni (D) di Darboux e le (S) di Servant, si osservi che esse coincidono allora ed allora soltanto quando ρ è una costante, onde ritroviamo nuovamente il risultato (§. 90): ***Sulle superficie pseudosferiche (e su queste soltanto) i sistemi di asintotiche virtuali coincidono colle reti di Tchebychef.***

§. 139.

Applicazione ai problemi di deformazione.

Per le equazioni (D) di Darboux, che appartengono, come quelle (S) di Servant, al tipo iperbolico (con caratteristiche reali e distinte), si possono ora ripetere le considerazioni del §. 62, dalle quali segue il teorema fondamentale per la deformazione delle superficie a curvature opposte:

A) ***Date ad arbitrio sopra una superficie S, a curvature opposte, due curve C, Γ che si incrociano in un punto O della superficie senza ivi toccarsi, esiste una ed una sola deformazione della superficie che rende insieme C e Γ linee asintotiche della superficie deformata.***

È bene da osservarsi che, valendo i teoremi di esistenza solo in campi sufficientemente piccoli, noi possiamo assicurare l'esistenza della deformata solo per una regione attorno ad O sufficientemente limitata, ma finita.

Da questo teorema fondamentale E. E. Levi ha dedotto, nella nota già citata al §. 120, che due superficie S, S′ a curvature opposte *isometriche* sono sempre applicabili (1).

Il teorema fondamentale così dimostrato pone in evidenza che l'integrale generale del problema della deformazione dipende da due

(1) Il concetto fondamentale della dimostrazione consiste nell'osservare che se O, O′ sono due punti ordinarii corrispondenti di S, S′ e con C, Γ si indicano le asintotiche attuali di S per O, con C_1, Γ_1 le linee di S corrispondenti alle due asintotiche attuali per O′ di S′, si può passare con continuità dalla coppia (C, Γ) alla coppia C_1, Γ_1. Applicando il teorema fondamentale ad una coppia variabile di curve, che assuma queste due configurazioni estreme, la superficie S si deforma da ultimo nella S′.

funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna, rappresentate geometricamente dall'arbitrarietà delle due curve C, Γ per O.

Supponiamo ora in particolare di trovarci nel caso analitico e siano cioè E, F, G funzioni analitiche di u, v e siano anche analitiche le due curve C, Γ, prescritte come asintotiche virtuali. In tal caso dimostriamo: *La deformata* S *sulla quale le curve* C, Γ *sono diventate asintotiche effettive è una superficie analitica.*

Riprendendo per ciò le notazioni del §. 62, supponiamo che le funzioni ivi indicate con

$$\begin{cases} f(\alpha), \varphi(\alpha) \\ f_1(\beta), \varphi_1(\beta) \end{cases}$$

siano funzioni analitiche olomorfe dei rispettivi parametri α, β e medesimamente E, F, G siano funzioni olomorfe di u, v nell'intorno di (u_0, v_0), essendo u_0, v_0 i valori iniziali di u, v per $\alpha = 0, \beta = 0$ (in O). I coefficienti delle equazioni (D) saranno quindi medesimamente serie convergenti di potenze dei binomii $u - u_0$, $v - v_0$. Allora noi potremo soddisfare, dapprima formalmente alle (D), ed alle condizioni iniziali prescritte, con sviluppi in serie di potenze di α, β

$$(35) \qquad u = \sum_{m,n} a_{m,n} \alpha^m \beta^n, \quad v = \sum_{m,n} b_{m,n} \alpha^m \beta^n,$$

e i coefficienti $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ saranno tutti determinati dalle (D) e dalle condizioni iniziali, le quali permettono di calcolare, in $\alpha = 0$, $\beta = 0$, i valori di tutte le derivate di u, v. Tutto si riduce a provare che gli sviluppi (35), così ottenuti, effettivamente convergono. Ma per questo basta applicare il procedimento stesso usato da Goursat [1] nel caso di una sola equazione del tipo iperbolico

$$s = F(x, y, z, p, q).$$

Esiste dunque in questo caso una soluzione analitica del problema, che coincide quindi coll'unica esistente.

[1] Équations aux dérivées partielles du deuxième ordre Tome I p. 184.

§. 140.

Le linee asintotiche come linee di piegamento.

Dal teorema fondamentale A) sopra stabilito possiamo ora dedurre come corollario la proposizione seguente, colla quale resta completata la ricerca del §. 135 nel caso singolare ivi escluso:

B) *Attorno ad una linea asintotica* C, *mantenuta rigida, si può ancora flettere in infiniti modi (dipendenti da una funzione arbitraria) la superficie* S *flessibile ed inestendibile.*

Da un punto O di C si faccia uscire, sulla superficie S, una curva arbitraria Γ, non tangente a C. Esiste per A) una ed una sola deformazione di S nella quale C *si mantiene asintotica* e Γ diventa sulla deformata S' la seconda asintotica per O. Ma è facile vedere che in tale deformazione la curva C rimane rigida, poichè invero la sua prima curvatura in ogni punto, eguagliando la curvatura geodetica, resta invariabile, ma lo stesso accade della torsione, a causa del teorema di Beltrami-Enneper (§. 77).

La singolare proprietà, appartenente esclusivamente alle linee asintotiche, contenuta nel teorema B), è quella che ha fatto dar loro il nome di *linee di piegamento.* È chiaro che in queste deformazioni, vincolate alla rigidità di una linea asintotica, un'altra curva arbitraria C' tracciata sulla superficie non può più assumere qualunque forma come nelle deformazioni completamente libere (§. 137), ma gli elementi che definiscono la forma di C' resteranno vincolati da relazioni. Non si conoscono in generale tali relazioni; salvo nel caso delle deformazioni delle superficie rigate con generatrici rigide di cui tratta il Capitolo seguente (V. §. 148).

Il teorema A) ci permette anche di riprendere la ricerca dei §§. 136, 137: se è possibile deformare la superficie S in guisa che una sua curva C assuma una forma prestabilita Γ, quando si verifichi il caso ivi escluso che la curvatura assoluta di Γ eguagli la geodetica di C. In tal caso intanto, se la deformazione esiste, la Γ risulterà asintotica sulla superficie deformata, e non potrà affatto darsi ad arbitrio, ma anzi essa sarà pienamente determinata con C, poichè la sua prima curvatura ed insieme la seconda saranno determinate in funzione dell'arco. E nel caso che la Γ abbia appunto questa forma, una qualunque delle infinite deformazioni che rendono C linea asintotica avrà l'effetto voluto.

In fine osserveremo che il singolare ufficio compiuto dalle asintotiche, come linee di piegamento nei problemi di deformazione, è essenzialmente legato al fatto che: le linee asintotiche sono le caratteristiche dell'equazione differenziale del secondo ordine dell'applicabilità (1).

(1) Per la forma (I*) §. 133 di questa equazione, l'equazione differenziale delle caratteristiche

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,du^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial s}\,du\,dv + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dv^2 = 0$$

coincide appunto con quella delle asintotiche

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

e lo stesso vale per la seconda equazione (II) §. 134 dell'applicabilità.

CAPITOLO VIII.

Deformazione delle superficie rigate

Teoremi di Bonnet sulla deformazione delle rigate. — Elemento lineare e linea di stringimento. — Paraboloide delle normali e formola di Chasles. — Teorema di P. Serret sulle asintotiche curvilinee. — Deformazione delle rigate secondo Minding. — Metodo di Beltrami e applicazioni. — Rigate applicabili sopra superficie di rotazione. — Teoremi di Laguerre e Bioche. — Teorema di Chieffi, per le superficie applicabili sulle rigate.

§. 141.

Teoremi di Bonnet e di Beltrami per le deformazioni delle rigate.

Ai teoremi generali sulla deformazione, ultimamente stabiliti, si collega la questione seguente trattata e risoluta dal Bonnet:

Può una superficie S deformarsi mantenendo asintotiche (e quindi rigide) le linee asintotiche di un sistema?

Le linee (u, v) siano le asintotiche *attuali* di S, onde avremo

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}.$$

Supposto che la S sia deformabile mantenendo asintotiche le u, esisterà un sistema (α, β) di asintotiche virtuali in cui le linee α p. e. coincideranno colle u, e nelle equazioni (D) di Darboux potremo fare senz'altro $u = \alpha$. Ma allora la prima di queste diventa

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial r}{\partial \alpha}\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0,$$

Ora non può essere $\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0$, perchè r sarebbe allora funzione di u, e nemmeno può aversi $\frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0$, altrimenti anche le $r = \text{cost}^{te}$

resterebbero asintotiche, e la superficie non cangierebbe di forma. Dunque la nostra ipotesi porta che si abbia

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0 ,$$

che cioè le linee $u =$ cost.te siano anche insieme geodetiche (§. 104) e per ciò linee rette.

Ma nel caso che questo avvenga, cioè la superficie S sia rigata, la deformazione può veramente effettuarsi in infiniti modi, perchè la prima equazione di Darboux è allora identicamente soddisfatta prendendo $u = \alpha$ (o $u = f(\alpha)$), e basta prendere per $v = v(\alpha, \beta)$ una soluzione della seconda che contenga effettivamente β. Abbiamo così il teorema di Bonnet:

È impossibile deformare una superficie S *in guisa che le linee asintotiche di un sistema si conservino asintotiche, a meno che la* S *non sia una rigata di cui quelle asintotiche siano le generatrici rettilinee.*

Questo risultato può anche subito stabilirsi ricorrendo alle equazioni di Codazzi. Sia S la forma iniziale della superficie, riferita alle sue asintotiche (u, v), indi

$$D = 0 , \quad D'' = 0 \quad D' = \pm \sqrt{EG - F^2} ,$$

e sia S_1 la deformata su cui le u sono ancora asintotiche, avremo per ciò $D_1'' = 0$, e dall'equazione di Gauss $D_1' = \pm D'$. Ma allora dalla seconda equazione di Codazzi (IV) §. 67 (pag. 175) si ha $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} D_1 = 0$, e siccome l'ipotesi $D_1 = 0$ renderebbe S_1 identica alla S, non resta che l'altra $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$, onde il teorema di Bonnet. Nel caso poi di una superficie rigata la deformazione a generatrici rigide è possibile in infiniti modi, perchè resta solo da soddisfare alla prima equazione di Codazzi

$$\frac{\partial D_1}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_1 D_1 ,$$

la quale, detta D una soluzione particolare, ha manifestamente per soluzione generale

$$D_1 = D\,\varphi(u) ,$$

con $\varphi(u)$ funzione arbitraria di u. E siccome il segno di D' differenzia (§. 77) le rigate destrorse da quelle sinistrorse, è manifesto che, nella deformazione continua, il segno di D' resterà inalterato, così se i coefficienti della seconda forma fondamentale per la prima rigata R sono

$$D,\ D',\ 0$$

quelli per la seconda R_1 saranno

$$D\,\varphi(u),\ D',\ 0\ (^1) .$$

Da queste osservazioni si può subito trarre l'importante teorema di Beltrami:

Si può in uno ed in un sol modo deformare una rigata, mantenendo rigide le generatrici, in guisa che una linea arbitraria L *tracciata sulla rigata* R *diventi asintotica sulla deformata* R_1.

Sia infatti $v = \psi(u)$ l'equazione della linea L (che non è una generatrice $u =$ cost.te); siccome l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee su R_1 è

$$D\,\varphi(u)\,du + 2\,D'\,dv = 0 ,$$

sarà necessario e sufficiente che questa sia soddisfatta da $v = \psi(u)$, il che dà per la funzione $\varphi(u)$ il valore unico e determinato

$$\varphi(u) = -\frac{2\,D'}{D}\,\psi'(u).$$

Da questo teorema di Beltrami, confrontato col teorema generale A) §. 139 (pag. 373), si può trarre questa conseguenza notevole: *Se una superficie flessibile ed inestendibile è rigata, basta mantenere rigida una generatrice e tutte le altre restano necessariamente rigide.*

Sia infatti R una rigata, S una sua deformata sulla quale una generatrice g di R è rimasta rettilinea, e sia d'altra parte α una qualunque asintotica di S dell'altra serie uscente da un punto O di g, e sia a la linea corrispondente sopra R. Pel teorema A) esiste una sola deformata di R sulla quale g, α diventano asintotiche e questa deformata è dunque la nostra S. D'altra parte, pel teorema di Beltrami, possiamo deformare R, *mantenendo rigide tutte le generatrici*, in una rigata R_1 per modo che α diventi asintotica; dunque R_1 coincide con S, c. d. d.

(1) Dalla R si passa alla R_1 per una serie continua di rigate dipendenti da un parametro t variabile nell'intervallo $[0 \ldots 1]$, coi valori intermedii

$$D\,[t\,\varphi(u) + (1 - t)],\ D',\ 0 .$$

§. 142.

Secondo teorema di Bonnet sulle rigate applicabili.

Ci proponiamo, nel presente Capitolo, lo studio di queste particolari deformazioni delle rigate a generatrici rigide, studio che si compie con mezzi ben semplici.

Per quanto si è dimostrato sopra, la rigidità di una generatrice assicura quella di tutte le altre, e la ricerca può quindi riguardarsi come il primo e più semplice esempio del problema di determinare tutte le flessioni di una superficie con una linea asintotica rigida (§. 140).

Dimostriamo in primo luogo, con Bonnet, che collo studio di queste deformazioni resta risoluto il problema generale di *trovare tutte le rigate applicabili sopra una rigata fissa*. Sussiste infatti il seguente teorema:

Se due superficie rigate R, R_1 *(non sviluppabili) sono applicabili, le generatrici dell' una si distendono necessariamente sulle generatrici dell' altra, a meno che le due rigate siano applicabili sulla stessa quadrica* Q, *nel qual caso può anche darsi che le generatrici di* R *corrispondano alle generatrici di un sistema di* Q *e quelle di* R_1 *alle generatrici dell' altro.*

Il teorema si dimostra semplicemente così. Supponiamo al contrario che, nell'applicabilità delle due rigate R, R_1, le generatrici $u = \text{cost.}^{te}$ di R non corrispondano alle generatrici $v = \text{cost.}^{te}$ di R_1, e prendiamo a linee coordinate sopra R, R_1 appunto questo doppio sistema (u, v). Le due superficie R, R_1 avranno a comune la prima forma fondamentale e per le due rispettive seconde

$$\begin{cases} D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \\ D_1\,du^2 + 2D_1'\,du\,dv + D''\,dv^2 , \end{cases}$$

siccome le $u = \text{cost.}^{te}$ sono asintotiche sopra R, e le $v = \text{cost.}^{te}$ sopra R_1, avremo

$$D'' = 0 , \quad D_1 = 0 ,$$

e dall' equazione di Gauss risulterà

$$D_1 = \pm D'$$

Se ora esprimiamo che sono soddisfatte, per ciascuna delle (1), le equazioni di Codazzi, tenendo conto che, per essere le linee coordinate u, v geodetiche, si ha

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 , \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 ,$$

ne risultano le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 . \end{cases}$$

Ma allora soddisfacciamo ancora alle equazioni di Gauss e di Codazzi, lasciando a D' il valore precedente e facendo simultaneamente

$$D = 0 , \quad D'' = 0 .$$

Esiste dunque una terza deformata Q, sulla quale tanto le geodetiche u quanto le v sono asintotiche, indi rette, e la Q è quindi una quadrica, nelle condizioni appunto del teorema (1).

Nel teorema di Bonnet dimostrato si può supporre in particolare che una delle due rigate R, R per es. la R_1 sia una quadrica Q_1 e allora essa è congruente colla quadrica Q (2). Ne segue: *Se una rigata* R *è applicabile sopra una quadrica* Q, *le generatrici di* R *corrispondono necessariamente alle generatrici dell' uno o dell' altro sistema di* Q.

§. 143.

Elemento lineare di una rigata.

Sopra una superficie rigata qualunque, che indicheremo con R, immaginiamo tracciata una curva arbitraria Γ, che riguarderemo come *direttrice*, e assoggetteremo alla sola condizione d'incontrare tutte le

(1) Nel caso escluso di due rigate R, R_1 sviluppabili vale ancora la deduzione del testo; ma soltanto, avendosi per la terza rigata Q insieme $D = D' = D'' = 0$, questo è un piano. Tale caso ricentra in sostanza in quello eccezionale segnalato nel teorema.

(2) Dai criterii generali d' applicabilità e dalla forma del ds^2 per una quadrica si deduce facilmente che due quadriche (non sviluppabili) non sono mai applicabili, se non sono identiche.

generatrici (almeno nella regione di R che entra in considerazione). Per definire la rigata R basterà dare la direttrice Γ, e in ogni punto di questa la direzione della generatrice che vi passa.

Indichiamo con v l'arco della direttrice Γ, contato da un suo punto fisso, con p, q, r le coordinate, funzioni di v, di un punto mobile su Γ, con l, m, n i coseni di direzione della generatrice che passa pel punto (p, q, r) di Γ, e che saranno medesimamente funzioni di v [1]. Le equazioni parametriche della rigata R saranno

$$(1) \qquad x = p + l\,u\,, \quad y = q + m\,u\,, \quad z = r + n\,u\,,$$

dove u indica il valore algebrico del tratto di generatrice, contato a partire dal punto iniziale (p, q, r) sopra Γ.

Per calcolare il ds^2 della rigata, indichiamo con apici le derivate rapporto a v di p, q, r; l, m, n e poniamo

$$(2) \qquad \begin{cases} l'^2 + m'^2 + n'^2 = \mathrm{M}^2 \\ l'\,p' + m'\,q' + n'\,r' = \mathrm{N} \\ l\,p' + m\,q' + n\,r' = \cos\theta\,. \end{cases}$$

Saranno M, N, θ funzioni di v, delle quali la prima, escluso il caso ovvio di una rigata R cilindrica, sarà diversa da zero, e l'ultima θ rappresenta l'angolo d'inclinazione della generatrice sulla direttrice. A queste formole (2) occorre aggiungere le identità

$$(3) \qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1 \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1 \\ l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0\,. \end{cases}$$

Derivando le (1) abbiamo

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = l\,, \quad \dfrac{\partial y}{\partial u} = m\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = n \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = p' + l'\,u, \quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = q' + m'\,u\,, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = r' + n'\,u \end{cases}$$

e quindi

$$(5) \qquad ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + (\mathrm{M}^2\,u^2 + 2\,\mathrm{N}\,u + 1)\,dv^2\,.$$

[1] Notazioni di Beltrami: *Sulla flessione delle superficie rigate*. Annali di matematica t. VII (1865); - Opere Vol.° I.

Una prima osservazione da farsi è che l'equazione differenziale delle trajettorie ortogonali delle generatrici $v = \text{cost.}^{te}$ è

$$du + \cos\theta\,dv = 0\,,$$

e queste traiettorie ortogonali si hanno colla quadratura

$$u + \int \cos\theta\,dv = \text{cost.}^{te}\ (1).$$

Ora osserviamo che, avendosi per la (3)

$$\mathrm{E} = 1\,, \quad \mathrm{F} = \cos\theta\,, \quad \mathrm{G} = \mathrm{M}^2\,u^2 + 2\,\mathrm{N}\,u + 1\,,$$

indi

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{M}^2\,u^2 + 2\,\mathrm{N}\,u + \operatorname{sen}^2\theta\,,$$

i valori dei simboli $\left\{ {1 \atop 2} {1 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 1} \right\}$ di Christoffel sono

$$\left\{ {1 \atop 2} {1 \atop 1} \right\} = 0\,, \quad \left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 1} \right\} = \frac{\mathrm{M}^2\,u + \mathrm{N}}{\mathrm{M}^2\,u^2 + 2\,\mathrm{N}\,u + \operatorname{sen}^2\theta}\,.$$

Se calcoliamo la curvatura K della rigata dalla formola (V) §. 41 (pag. 102), troviamo

$$(6) \qquad \mathrm{K} = -\frac{\mathrm{M}^2 \operatorname{sen}^2\theta - \mathrm{N}^2}{[\mathrm{M}^2\,u^2 + 2\,\mathrm{N}\,u + \operatorname{sen}^2\theta]^2}\,,$$

dove è da osservarsi che la quantità al numeratore

$$\mathrm{M}^2 \operatorname{sen}^2\theta - \mathrm{N}^2$$

è essenzialmente positiva o nulla, come risulta da che

$$(7) \qquad \mathrm{M}^2 \operatorname{sen}^2\theta - \mathrm{N}^2 = \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2\,.$$

La curvatura K è dunque per la (6) sempre negativa, come è evidente a priori per essere reali le asintotiche, ed è nulla soltanto quando

$$\mathrm{M}^2 \operatorname{sen}^2\theta - \mathrm{N}^2$$

si annulla, *caso che contrassegna dunque le sviluppabili.*

(1) Questo è un caso particolare dei risultati al §. 106.

Lungo ogni singola generatrice $v = \text{cost.}^{te}$ (non singolare) (1), siccome

$$M^2 u^2 + 2 N u + \operatorname{sen}^2\theta = M^2\left(u + \frac{N}{M^2}\right)^2 + \frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}{M^2},$$

il valore assoluto della curvatura raggiunge il suo valor *massimo* nel punto $u = -\frac{N}{M^2}$ che ora diremo il *punto centrale* della generatrice e allontanandosi da questo punto K va decrescendo (simmetricamente dall' una e dall'altra parte) in valore assoluto tendendo a zero.

Alla nozione di punto centrale per una generatrice arriviamo in altro modo calcolando, colle formole della geometria analitica, il *momento* θ della generatrice (v) e della infinitamente vicina, corrispondente a $(v + dv)$, nonchè l'ascissa U sulla prima generatrice del piede della loro minima distanza (2).

---

(1) Per la quale cioè $M^2 \operatorname{sen}^2\theta] - N^2$ non si annulli.

(2) Riportiamo qui, per comodo del lettore, le formole di geometria analitica che si applicano nel testo.

Se
$$x = p + l u,\ y = q + m u,\ z = r + n u$$
$$x = \bar{p} + \bar{l} u,\ y = \bar{q} + \bar{m} u,\ z = \bar{r} + \bar{n} u$$

sono le equazioni parametriche normali di due rette $g, \bar{g}$, pel loro momento Θ si ha la formola

$$(a) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \bar{p} - p, & \bar{q} - q, & \bar{r} - r \\ l & m & n \\ \bar{l} & \bar{m} & \bar{n} \end{vmatrix}$$

ed è $\Theta > 0$ per una coppia destrorsa, $\Theta < 0$ per una coppia sinistrorsa di rette (nella solita ipotesi sull' orientazione sinistrorsa del triedro coordinato).

Posto poi

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ \bar{m} & \bar{n} \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} n & l \\ \bar{n} & \bar{l} \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} l & m \\ \bar{l} & \bar{m} \end{vmatrix}$$

la formola

$$(b) \qquad U = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{vmatrix} \bar{p} - p & \bar{q} - q & \bar{r} - r \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

dà il valore dell' ascissa u al piede della minima distanza.

Ponendo nella formola (a), della nota

$$\bar{p} = p + p' dv,\ \bar{q} = q + q' dv,\ \bar{r} = r + r' dv$$
$$\bar{l} = l + l' dv,\ \bar{m} = m + m' dv,\ \bar{n} = n + n' dv,$$

si ottiene

$$\Theta = dv^2 \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix},$$

onde risulta: *la rigata è destrorsa o sinistrorsa secondo che il determinante*

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \varepsilon\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}\ (\varepsilon = \pm 1)$$

è positivo o negativo. E dall'altra formola (b) abbiamo dapprima

$$U = \frac{1}{\left\| \begin{matrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{matrix} \right\|^2} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l + l' dv, & m + m' dv, & n + n' dv \\ \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

e trascurando nella seconda linea i termini infinitesimi, si trova subito per le (2), (3):

$$(8) \qquad U = -\frac{N}{M^2}$$

che è appunto l'ascissa del punto centrale. Dunque: *il punto centrale sopra una generatrice è il piede della sua minima distanza dalla successiva.*

§. 144.

Linea di stringimento e teoremi di Bonnet.

Il luogo dei punti centrali delle generatrici è una linea molto importante per lo studio della rigata, che prende il nome di *linea di stringimento*; la sua equazione è per la (8)

$$M^2 u + N = 0.$$

Essa è sempre unica e determinata, salvo il caso

$$M = 0, N = 0$$

delle superficie cilindriche, e segna il luogo dei punti ove ciascuna generatrice è più ravvicinata alla successiva. Nel caso delle sviluppabili

$$M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2 = 0$$

la linea di stringimento coincide collo spigolo di regresso. In generale la linea di stringimento coincide colla direttrice $u = 0$ nel solo caso che si abbia $N = 0$.

Se calcoliamo la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_0}$ della direttrice dalla formola (6) §. 99 (pag. 270)

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0}$$

troviamo

$$-\frac{1}{\rho_0} = \frac{N}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{d\theta}{dv},$$

onde vediamo che se delle tre quantità:

$$\frac{1}{\rho_0}, \quad N, \quad \frac{d\theta}{dv}$$

due si annullano, si annulla anche la terza.

Interpretando questo risultato geometricamente, ne risulta il teorema di Bonnet:

Se ad una linea tracciata sopra una rigata appartengono due delle tre seguenti proprietà: 1° *di essere linea geodetica,* 2° *di essere linea di stringimento,* 3° *di tagliare le generatrici sotto angolo costante, ad essa appartiene anche la terza.*

Le superficie rigate dotate di tale proprietà sono rigate speciali e si ottengono come luogo di una retta appoggiata ad una curva (linea di stringimento) normalmente alla normale principale ed inclinata di un angolo costante sulla curva.

In particolare solo per le rigate luogo delle binormali di una curva accade che la linea di stringimento è traiettoria ortogonale delle generatrici.

Un'altra definizione della linea di stringimento risulta dall'osservare che, assumendo per direttrice una traiettoria ortogonale delle

generatrici, si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$, $F = 0$ e la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee $u = \text{cost.}^{te}$ essendo data da

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{M^2 u + N}{M^2 u^2 + 2Nu + 1};$$

si annulla precisamente lungo la linea di stringimento. Dunque: *la linea di stringimento può anche definirsi come il luogo dei punti della superficie rigata, nei quali è nulla la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle generatrici.*

È manifesto che quando la rigata si flette, restando rigide le generatrici, la linea di stringimento resta sempre linea di stringimento: *cioè: se due rigate sono applicabili le loro linee di stringimento si corrispondono.*

Come forma tipica di una qualunque rigata si può riguardare quella nella quale, secondo il teorema di Beltrami (§. 141), la linea di stringimento è resa asintotica. In questa forma asintotica Γ della linea di stringimento, la generatrice deve giacere nel piano osculatore di Γ e la sua inclinazione θ sopra Γ deve essere tale che ne risulti $N = 0$. Ma, nelle solite notazioni per Γ, abbiamo

$$l = \alpha\cos\theta + \xi\operatorname{sen}\theta$$

colle altre due analoghe ed avendosi

$$l' = (-\alpha\operatorname{sen}\theta + \xi\cos\theta)\theta' + \frac{\xi}{\rho}\cos\theta - \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{T}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$p' = \alpha$$

risulta

$$N = S\,l'p' = -\operatorname{sen}\theta\left(\theta' + \frac{1}{\rho}\right),$$

e, siccome escludiamo il caso delle sviluppabili $\operatorname{sen}\theta$ non è nullo, e dovrà essere

$$\theta' = -\frac{1}{\rho}.$$

Dunque, *per costruire una rigata di cui una data curva Γ sia linea asintotica di stringimento, si conduca per ogni punto di Γ nel piano osculatore, una retta inclinata sopra Γ di un angolo θ tale che sia*

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}, \quad \theta = C - \int\frac{ds}{\rho}.$$

Se si confrontano queste formole con quelle del §. 16, relative alla determinazione delle geodetiche di una sviluppabile, si può dare al risultato la seguente forma geometrica: *Sulla sviluppabile delle tangenti di* Γ *si tracci una qualunque geodetica* g, *e per ogni punto* P *di* Γ *si tiri la parallela alla tangente di* g *nel punto corrispondente* P′ *(sulla stessa generatrice); la rigata così formata sarà la più generale che abbia* Γ *per linea asintotica di stringimento.*

In fine si osservi che in questo caso, avendosi

$$l' = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\lambda, \text{ ecc.}$$

risulta

$$M^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{T^2}, \tag{9}$$

indi dalla (6)

$$K = -\frac{\dfrac{1}{T^2}}{\left(\dfrac{u^2}{T^2}+1\right)^2}.$$

§. 145.

Paraboloide delle normali e formola di Chasles.

Dalle formole (4) calcoliamo i coseni di direzione X, Y, Z della normale alla rigata colle formole

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & n \\ q'+m'u & r'+n'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\operatorname{sen}^2\theta}}, \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} n & l \\ r'+n'u & p'+l'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\operatorname{sen}^2\theta}}, \tag{10}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} l & m \\ p'+l'u & q'+m'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Lungo una generatrice $v =$ cost.te le normali formano una superficie colle equazioni parametriche

$$\bar{x} = p + lu + t\begin{vmatrix} m & n \\ q'+m'u & r'+n'u \end{vmatrix}, \quad \bar{y} = q + mu + t\begin{vmatrix} n & l \\ r'+n'u & p'+l'u \end{vmatrix},$$

$$\bar{z} = r + nu + t\begin{vmatrix} l & m \\ p'+l'u & q'+m'u \end{vmatrix},$$

dove t, u sono i due parametri. Siccome i secondi membri sono funzioni bilineari di t, u, questa superficie è un paraboloide iperbolico, manifestamente equilatero, di cui la generatrice $v =$ cost.te è una generatrice principale. Per trovare l'altra generatrice principale, indi il vertice, si consideri che le generatrici del secondo sistema $t =$ cost.te hanno coseni di direzione proporzionali alle derivate di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ rapporto ad u, cioè alle espressioni

$$l + t\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad m + t\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}, \quad n + t\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}.$$

L'altra generatrice principale $u =$ cost.te sarà quindi quella che corrisponde al valore di u pel quale si ha

$$S\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m & n \\ q'+m'u & r'+m'u \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l & m & n \\ p'+l'u & q'+m'u & r'+n'u \end{vmatrix} = 0.$$

Eseguendo la moltiplicazione della matrice, colle (2) (3), risulta

$$M^2u + N = 0, \quad u = -\frac{N}{M^2},$$

che dà l'ascissa del punto centrale. Vediamo dunque che: *Le normali ad una superficie rigata lungo una generatrice costituiscono un paraboloide iperbolico equilatero, col vertice nel punto centrale della generatrice.*

Di qui risulta che il modo come varia attorno ad una generatrice della rigata il piano tangente allo spostarsi del punto di contatto è

lo stesso come pel paraboloide delle normali (¹), e dipende soltanto dal punto centrale e dal parametro k di questo paraboloide.

Ciò è posto in evidenza dalla formola seguente.

Cerchiamo l'angolo Ω che la normale generica (X, Y, Z) alla rigata fa con quella nel punto centrale (X_0, Y_0, Z). Dalla formola

$$\cos\Omega = X X_0 + Y Y_0 + Z Z_0$$

e dalle (10) troviamo

$$\cos\Omega = \frac{\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}}{M\sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \operatorname{sen}^2\theta}}. \quad (^2)$$

(¹) Se si fa rotare d'un angolo retto attorno alla generatrice (v) il paraboloide delle normali, nella nuova posizione viene a toccare lungo tutta la generatrice la rigata.

(²) In generale cerchiamo l'angolo τ fra i due piani tangenti in due punti qualunque P_1, P_2 della generatrice, le cui ascisse siano u_1, u_2. Prendiamo per semplicità a direttrice la linea di stringimento, onde avremo $N = 0$ e dalle (10)

$$\cos\tau = \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ p' + l' u_1 & q' + m' u_1 & r' + n' u_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l & m & n \\ p' + l' u_2 & q' + m' u_2 & r' + n' u_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2 u_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\ \sqrt{M^2 u_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta}},$$

che calcoliamo in

$$\cos\tau = \frac{M^2 u_1 u_2 + \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{M^2 u_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\ \sqrt{M^2 u_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Ne deduciamo

$$\operatorname{sen}^2\tau = \frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(u_1 - u_2)^2}{(M^2 u_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2 (M^2 u_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2},$$

e siccome per la 6) le curvature K_1, K_2 nei punti P_1, P_2 sono date

$$K_1 = -\frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(M^2 u_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2}, \quad K_2 = -\frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(M^2 u_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2},$$

possiamo scrivere la precedente così:

$$K_1 K_2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{u_1 - u_2}\right)^4.$$

Il prodotto delle due curvature della rigata in due punti di una generatrice eguaglia la quarta potenza del rapporto fra il seno dell'angolo dei due piani tangenti e la distanza dei due punti.

dove i radicali ed M stesso sono da assumersi positivi. Di qui si trae

$$\operatorname{sen}\Omega = \frac{M^2 u + N}{M\sqrt{M^2 u^2 + 2Nu + \operatorname{sen}^2\theta}},$$

indi

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{M^2 u - N}{\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}},$$

dove Ω è ora da prendersi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Ponendo

$$u + \frac{N}{M^2} = \tau,$$

τ indicherà, sulla generatrice (v), l'ascissa del punto misurata a partire dal punto centrale, e ponendo ancora

$$k = \frac{\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}}{M^2}, \quad (11)$$

avremo la formola di Chasles

$$\tau = k \operatorname{tg}\Omega, \quad (12)$$

che dà la legge di distribuzione dei piani tangenti attorno alla generatrice. La costante k dicesi il *parametro di distribuzione* dei piani tangenti e coincide appunto col parametro del paraboloide delle normali, la cui equazione normale risulta subito dalla (12) nella forma $\xi^2 - \eta^2 - 2k\zeta$. Dalla (12), essendo τ proporzionale a $\operatorname{tg}\Omega$, è posto in evidenza il teorema di Chasles:

Il piano tangente descrive un fascio proiettivo alla punteggiata descritta dal punto di contatto.

Risulta anche dalla (12) che il piano tangente nel punto τ riesce normale nel punto τ' dato da

$$\tau' = -k\cot\Omega$$

e per ciò $\tau\tau' = -k^2$. Le coppie τ, τ' descrivono un'involuzione (ellittica) il cui punto centrale è il centro, sicchè il punto centrale è anche il punto ove il piano tangente nel punto all'infinito della generatrice riesce normale alla superficie.

Si osserverà che, in tutte queste formole, compariscono solo elementi invariabili al flettersi della rigata, sicchè in particolare il paraboloide delle normali resta fisso al flettersi della superficie. Dopo ciò è facile risolvere la questione seguente: quali sono le ri-

gate il cui paraboloide delle normali è lo stesso per tutte le generatrici? Flettiamo la superficie sì da rendere asintotica la sua linea di stringimento e applichiamo la formola (11), nella quale sarà da fare $N = 0$, e risulterà per la (9)

$$k = T .$$

Dunque: *Le superficie rigate con paraboloide delle normali invariabile sono quelle che hanno la linea di stringimento asintotica ed a torsione costante, e tutte le loro deformate rigate.*

§. 146.

Asintotiche curvilinee. — Teorema di P. Serret.

Dalle formole (10) calcoliamo ora i coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale della rigata R, secondo le formole

$$D = S X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} , \quad D' = S X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} , \quad D'' = S X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} .$$

Abbiamo quindi per le (4)

$$D = 0 , \quad D' = S l' X , \quad D'' = S (p'' + l'' u) X ,$$

ossia

$$(13) \qquad D = 0 , \quad D' = \frac{1}{\sqrt{M^2 u^2 + 2 N u + \operatorname{sen}^2 \theta}} \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} ,$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{M^2 u^2 + 2 N u + \operatorname{sen}^2 \theta}} \begin{vmatrix} p'' + l'' u , & q'' + m'' u , & r'' + n'' u \\ p & m & n \\ p' + l' u , & q' + m' u , & r' + n' u \end{vmatrix} .$$

La prima di queste $D = 0$ esprime la circostanza evidente che le generatrici (v) sono le asintotiche di un sistema; la seconda, ponendo mente alla (7), torna a dare per la curvatura

$$K = - \frac{D'^2}{E G - F^2}$$

la formola (6). Ma, nella determinazione precisa dei segni nelle nostre formole, anche il segno di D' ha un significato che occorre osservare. Esso è opposto a quello del determinante $\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}$ e quindi (§. 143): *Per rigate sinistrorse D' è positivo, negativo per rigate destrorse.* Si osservi che il criterio qui enunciato pel senso della rigata combina con quello stabilito al §. 77 colle formole (43), (43*), giacchè per le rette $v = \text{cost.}^{te}$ se $D' > 0$ sono le (43*) che bisogna applicare e alle rette venendo attribuita una torsione negativa, la rigata è sinistrorsa; al contrario se $D' < 0$ destrorsa.

Sulla rigata, oltre le asintotiche rettilinee, abbiamo un secondo sistema di asintotiche che sono curvilinee, salvo nel caso delle quadriche ove le nuove asintotiche sono le generatrici del secondo sistema. In generale l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee è data da

$$2 D' du + D'' dv = 0 ,$$

cioè

$$\frac{du}{dv} = - \frac{D''}{2 D'}$$

A causa dei valori (13) di D', D'', questa ha la forma

$$\frac{du}{dv} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma ,$$

con α, β, γ funzioni della sola v: essa è dunque un'equazione del tipo di Riccati. Una prima conseguenza da osservarsi è che: *se una delle asintotiche curvilinee è nota, le altre si hanno con quadrature.*

Ora l'altra proprietà, ben nota e caratteristica delle equazioni del tipo di Riccati, che il *birapporto* di quattro qualunque soluzioni particolari $(u_1 u_2 u_3 u_4)$ è una costante, osservando che questo birapporto coincide con quello dei quattro punti corrispondenti P_1, P_2, P_3, P_4 sopra una qualunque generatrice (v), ci dà il notevole teorema di Paul Serret: *Il birapporto dei quattro punti ove una generatrice variabile interseca quattro asintotiche fisse del secondo sistema è costante.*

Il teorema si può manifestamente enunciare sotto quest'altra forma: *Le asintotiche curvilinee segnano sulle generatrici della rigata punteggiate projettive.* Ne segue che se due generatrici g, g' sono segate nei rispettivi punti

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3\ldots$$
$$P_1',\quad P_2',\quad P_3'\ldots$$

dalle asintotiche curvilinee, le rette (corde) congiungenti le coppie di punti corrispondenti

$$P_1P_1',\quad P_2P_2',\quad P_3P_3'\ldots$$

generano una quadrica. Ciò vale comunque prossima si prenda g' a g ed al limite abbiamo il teorema (1): *Le tangenti alle asintotiche curvilinee nei loro punti d' incontro con una medesima generatrice g formano una quadrica* Q (iperboloide).

Questa quadrica Q tocca la rigata R lungo la generatrice g, anzi lungo g ha le stesse direzioni asintotiche e per conseguenza anche le stesse direzioni delle linee di curvatura (come bisettrici delle precedenti). Ma di più è facile vedere che la rigata R e la quadrica Q hanno in ogni punto di g gli stessi raggi principali di curvatura. Difatti il rapporto di questi due raggi è il medesimo per R come per Q, le direzioni asintotiche essendo comuni; ed anche il loro prodotto, o la curvatura totale è la medesima, questa eguagliando, presa con segno contrario, il quadrato $\frac{1}{T^2}$ della torsione da attribuirsi a g pensando come suo piano osculatore il piano tangente comune a R e Q. Per questa proprietà si dirà la quadrica Q: *l' iperboloide osculatore della rigata* K *lungo la generatrice g.* Questo suol dirsi anche l' iperboloide di tre generatrici *successive* g, g', g''.

§. 147.

Deformazione della rigata secondo il metodo di Minding.

Veniamo ora all' oggetto proprio del presente Capitolo, alla determinazione di tutte le superficie rigate con assegnato ds^2, che assumeremo sotto la forma generale (5) §. 143, ove

$$\theta,\ M,\ N$$

saranno funzioni *date* di v. Il problema consiste nel determinare le *sei* funzioni incognite

(1) È facile dimostrare direttamente la stessa cosa scrivendo le equazioni delle tangenti alle asintotiche curvilinee lungo g.

$$p,\ q,\ r;\quad l,\ m,\ n$$

della variabile v, in guisa da soddisfare alle *cinque* equazioni fondamentali

$$(A)\quad \begin{cases} l^2+m^2+n^2=1 \\ l'^2+m'^2+n'^2=M^2 \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} p'^2+q'^2+r'^2=1 \\ lp'+mq'+nr'=\cos\theta \\ l'p'+m'q'+n'r'=N. \end{cases}$$

Un primo metodo di trattare il problema (metodo di Minding) si ha dal riguardare dapprima come noti in funzione di v i coseni di direzione l, m, n della generatrice variabile, e calcolarne p, q, r per quadrature ricavando p', q', r' dalle (B). Ora per soddisfare con l, m, n le (A), poniamo

$$14)\qquad l=\operatorname{sen}\omega\cos\psi,\quad m=\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\psi,\quad n=\cos\omega$$

e prendiamo per ω, ψ due tali funzioni di v da soddisfare anche la seconda delle (A), che diventa

$$\omega'^2+\psi'^2\operatorname{sen}^2\omega=M^2.$$

Restando dunque ω funzione arbitraria di v (purchè $\omega'^2<M^2$), basterà calcolare ψ con una quadratura da

$$(15)\qquad \psi=\int\frac{dv\sqrt{M^2-\omega'^2}}{\operatorname{sen}\omega}.$$

L' arbitrarietà che rimane nella soluzione colla presenza della funzione arbitraria $\omega(v)$ s' interpreta geometricamente osservando che resta arbitraria sulla sfera unitaria la curva descritta dal punto (l, m, n) curva che si dirà *l' immagine sferica delle generatrici*, ossia resta arbitrario il *cono direttore* della rigata (1).

Per risolvere ora le (B) rispetto a p', q', r' si osservi che, posto

$$a=\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix},\quad b=\begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix},\quad c=\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix},$$

(1) Si può anche dire che il metodo di Minding consiste nell'assegnare la forma della sezione piana all' infinito della rigata.

ne risulta (§. 143)

$$ap' + bq' + cr' = \varepsilon\, p\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

e quindi risolvendo ora il sistema lineare formato da questa e dalle due ultime (B), risulta

$$\begin{cases} p' = l\cos\theta + \dfrac{l'N + \varepsilon\, a\, p\sqrt{M^2\operatorname{sen}^2\theta - N^2}}{M^2} \\ q' = m\cos\theta + \dfrac{m'N + \varepsilon\, b\, p\sqrt{M^2\operatorname{sen}^2\theta - N^2}}{M^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \\ r' = n\cos\theta + \dfrac{n'N + \varepsilon\, c\, p\sqrt{M^2\operatorname{sen}^2\theta - N^2}}{M^2}. \end{cases}$$

Le due rigate corrispondenti ai due segni di ε sono essenzialmente differenti, onde abbiamo:

Assegnata la forma del cono direttore, esistono due diverse rigate col dato ds^2.

Bisogna però bene osservare che di queste due rigate una è destrorsa, l'altra sinistrorsa (1), e non si può quindi flettere l'una con continuità (mantenendo rigide le generatrici), si da farle acquistare la forma dell'altra.

In particolare se si pone nelle formole precedenti $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, indi $\psi = \int M\, dv$

$$\begin{cases} l = \cos\psi, & m = \operatorname{sen}\psi & n = 0 \\ l' = -M\operatorname{sen}\psi, & m' = M\cos\psi & n' = 0 \\ a = 0 & b = 0 & c = M \end{cases}$$

si avranno due rigate *a piano direttore* coll'assegnato elemento lineare.

---

(1) Secondo il criterio stabilito al §. 143 è destrorsa quella che corrisponde ad $\varepsilon = +1$, sinistrorsa l'altra.

§. 148.

Metodo di Beltrami.

Col metodo di Minding si determinano effettivamente, con quadrature, *tutte* le rigate con assegnato elemento lineare. Però quando, nelle applicazioni, si volesse determinare la funzione arbitraria $\omega(v)$ in guisa da soddisfare a date condizioni geometriche, s'incontrerebbero il più delle volte gravi difficoltà. Sarà allora preferibile applicare il metodo di Beltrami che passiamo ad esporre. Questo metodo consiste nel ricercare prima quali forme può assumere per flessione delle rigate la curva scelta sopra di essa come direttrice. Per ciascuna di queste forme resta poi determinata completamente la rigata, rimanendo invariabili l'angolo θ e la curvatura geodetica della direttrice. Già dal metodo precedente, che lascia una sola funzione arbitraria, è chiaro che le infinite configurazioni della direttrice sono legate ad una condizione, che si tratta appunto di ricercare. Così per la flessione delle rigate si viene a risolvere, col metodo di Beltrami, la questione sollevata al §. 140 a proposito delle deformazioni di una superficie con un'asintotica rigida.

Consideriamo una qualunque di queste forme possibili per la direttrice Γ, ritenendo le consuete notazioni del Cap. I. Indicando con σ l'angolo d'inclinazione del piano osculatore di Γ sul piano tangente alla superficie, potremo porre

$$(15^*) \qquad l = \alpha\cos\theta + (\xi\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma)\operatorname{sen}\theta,$$

colle altre due analoghe per m, n e derivando rispetto all'arco v di Γ colle formole di Frenet, avremo

$$l' = -\operatorname{sen}\theta\left(\theta' + \frac{\cos\sigma}{\rho}\right)\alpha + \left(\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\right)'\xi + \frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\xi$$

$$+ \left(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\right)' - \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\lambda,$$

dove per abbreviare, le derivate rapporto a v di $\cos\sigma\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta$ si indicano con apici: Siccome poi

$$p' = \alpha, \quad q' = \beta, \quad r' = \gamma,$$

sostituendo questi valori nelle equazioni di condizione (A) e (B),

queste si riducono alle due seguenti:

$$\theta' + \frac{\cos\sigma}{\rho} = -\frac{N}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta\left(\theta' + \frac{\cos\sigma}{\rho}\right)^2 + \left\{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta)' + \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\right\}^2 +$$

$$+\left\{(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta)' - \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\right\}^2 = M^2 ,$$

che possiamo scrivere

$$\frac{\cos\sigma}{\rho} = -\left(\frac{N}{\operatorname{sen}\theta} + \theta'\right) \tag{16}$$

$$\left\{(\cos\sigma\operatorname{sen}\theta)' + \frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\right\}^2 + \tag{17}$$

$$+\left\{(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta)' - \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\theta}{T}\right\}^2 = M^2 - N^2 ,$$

la prima delle quali esprime soltanto la nota proprietà che la curvatura geodetica della direttrice non varia per flessione (§. 144).

Ora le quantità di cui disponiamo sono le tre funzioni $\sigma, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ di v ed è chiaro che se dalla (16) si trae σ e si sostituisce nella (17) resta soltanto un'equazione della forma

$$F\left(v, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}, \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = 0 , \tag{18}$$

che vincola la prima e seconda curvatura della trasformata. È questa la condizione necessaria e sufficiente richiesta, e ad ogni forma Γ della direttrice soddisfacente corrisponderà una rigata col dato ds^2. Il problema attuale viene così collegato all'altro di determinare una curva dalle sue equazioni intrinseche (Cap. I).

Si osservi che la relazione caratteristica (18) implica in generale anche la derivata rispetto all'arco v della prima curvatura; ma se la direttrice è una linea geodetica, allora avendosi

$$\theta = \frac{\pi}{2} , \quad N = -\theta' \operatorname{sen}\theta ,$$

la (17) diventa semplicemente

$$\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T} = \sqrt{M^2 - \theta'^2} \tag{19}$$

e lega soltanto linearmente (con coefficienti funzioni di v) le due curvature di Γ.

§. 149.

Deformazione che cangia la direttrice in asintotica.

Abbiamo già dimostrato, al §. 141, che esiste una deformazione della rigata per la quale la direttrice (una curva arbitraria) si cangia in linea asintotica. Per trovare ora le formole relative colle (16) o (17), basta porvi $\sigma = 0$ o $\sigma = \pi$, onde risulterà dalla (16)

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{N}{\operatorname{sen}\theta} + \theta' . \right| \tag{α}$$

e la (17) si riduce a

$$\frac{1}{T} = \varepsilon \sqrt{\frac{M^2\operatorname{sen}^2\theta - N^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} , \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{β}$$

la quale risulta anche subito dal teorema di Beltrami-Enneper sulla torsione delle asintotiche e dalla formola (6) per $u = 0$. Quanto al segno di ε, ciò dipende dal senso sinistrorso o destrorso che si vuol dare alla rigata, e se si tratta di deformazione continua bisognerà assumerlo concordante col senso iniziale. Il problema è così ridotto a determinare la curva trasformata dalle equazioni intrinseche (α), (β).

Se si applica questo risultato al caso particolare in cui la direttrice è una geodetica, questa, diventando asintotica, si trasforma in linea retta e la rigata si avrà subito con una quadratura. Per scrivere le semplici formole relative a questo caso assumiamo la direttrice trasformata per asse delle z, sicchè

$$p = 0, q = 0, r = r, n = \cos\theta$$

e ponendo

$$l = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad m = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi,$$

avremo come nella formola (15) §. 147

$$\psi = \int \frac{\sqrt{M^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta}\, dr .$$

La superficie deformata sarà data in questo caso dalle formole

$$(20) \qquad x = u \operatorname{sen}\theta \cos\psi,\ y = u \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi,\ z = v + u\cos\theta$$

In particolare se $\theta = \frac{\pi}{2}$, la superficie è il luogo delle binormali della direttrice e la trasformata sarà una conoide retta. Flettendo comunque una tale rigata, la formola (19) che diventa

$$\frac{1}{T} = \pm M,$$

dimostra che la direttrice conserva sempre la stessa torsione, mentre la sua flessione cangia arbitrariamente. Dunque: *Se si vuole deformare una curva senza alterarne la torsione basta flettere arbitrariamente la rigata delle sue binormali* (1).

Ancora più in particolare, se prendiamo M costante, allora la conoide retta è l'elicoide rigata d'area minima di parametro $m = \frac{1}{M}$ (2) e si ha quindi il teorema:

Le superficie rigate applicabili sull' elicoide rigata ad area minima di parametro m sono tutte e sole le rigate delle binormali alle curve di torsione costante $= \frac{1}{m}$.

In fine se applichiamo il teorema generale al caso in cui la direttrice sia una traiettoria ortogonale delle generatrici $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, vediamo che quando diventa asintotica, le generatrici coincidono colle sue normali principali e per ciò: *Ogni rigata si può flettere in guisa che le generatrici diventino le normali principali di una assegnata loro traiettoria ortogonale.*

---

(1) Per deformare invece una curva senza alterarne la flessione basta flettere la sviluppabile delle sue tangenti (mantenendo rigide le generatrici).

(2) Basta porre nelle (20) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{v}{m}$, onde

$$x = u\cos\left(\frac{v}{m}\right),\ y = u\operatorname{sen}\left(\frac{v}{m}\right),\ z = v$$

$$z = m \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

§. 150.

Deformazioni diverse.

Proponiamoci di deformare la rigata in guisa da rendere piana la direttrice $u = 0$. Basterà per ciò soddisfare alle equazioni (16), (17) con $\frac{1}{T} = 0$, ed eliminando σ fra queste, ciò che si potrà fare se la direttrice non è geodetica (altrimenti sarebbe nullo il secondo membro della (16)), si avrà un'equazione differenziale del 1° ordine per $\frac{1}{\rho}$, onde si vede:

È possibile in ∞^1 modi flettere una rigata in guisa che una sua curva arbitraria (non geodetica) *diventi piana.*

In particolare se la curva è traiettoria ortogonale delle generatrici, essendo

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{T} = 0,$$

la (17) diventa

$$\sigma'^2 = M^2 - N^2,$$

onde

$$\sigma = \int \sqrt{M^2 - N^2}\, du$$

e dalla (16)

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{N}{\cos\sigma},$$

sicchè con altre quadrature si ha la deformata piana della curva e la superficie.

Ma se la direttrice è una linea geodetica, non si può fare l'indicata eliminazione, e si ha necessariamente

$$\frac{1}{\rho} = 0,\ \text{ovvero}\ \cos\sigma = 0.$$

Il primo caso corrisponde a rettificare la linea geodetica, ciò che si fa nel modo del paragrafo precedente. Nel secondo caso, avendosi

$$N = -\theta' \operatorname{sen}\theta, \quad \cos\sigma = 0, \quad \frac{1}{T} = 0,$$

la (17) diventa

$$\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} = M^2 - \theta'^2,$$

ossia

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\sqrt{M^2 - \theta'^2}}{\cos\theta}, \tag{21}$$

e determina completamente la forma della trasformata piana. In questo caso adunque il problema ammette due sole soluzioni.

Ricerchiamo ancora se è possibile flettere la rigata in guisa che la direttrice $u = 0$ diventi *linea di curvatura* sulla superficie deformata. Bisogna per ciò che si abbia per $u = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} : \frac{\partial Y}{\partial v} : \frac{\partial Z}{\partial v},$$

essendo X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

Ma questi sono dati, nelle notazioni precedenti, da

$$X = \xi \operatorname{sen}\sigma - \nu\cos\sigma, \quad Y = \eta \operatorname{sen}\sigma - \mu\cos\sigma, \quad Z = \zeta \operatorname{sen}\sigma - \nu\cos\sigma,$$

ed avendosi d'altronde

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \gamma,$$

le proporzioni precedenti dànno

$$\frac{1}{T} = \sigma'.$$

Eliminando allora con questa dalle (16), (17) le due curvature $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$, resta per σ un'equazione differenziale del 1° ordine, purchè non sia $\theta = \frac{\pi}{2}$, altrimenti il primo membro della (17) sarebbe nullo. Dunque: *È possibile, in generale in ∞^1 modi, deformare una rigata in guisa che una sua linea arbitraria diventi linea di curvatura della deformata purchè la linea non sia una traiettoria ortogonale della generatrice* (1).

In quest'ultimo caso la superficie dovrebbe essere sviluppabile, e allora, per qualunque deformazione della rigata, la curva si manterrebbe linea di curvatura.

Anche è da osservare che, se la curva proposta fosse una geodetica, diventando linea di curvatura, si trasformerebbe in una curva piana e si avrebbe una sola soluzione del problema data dalla formola (21).

In fine, generalizzando il problema del §. 149, domandiamo di deformare la rigata in guisa che: *l'angolo σ del piano osculatore della direttrice col piano tangente diventi costante (non retto).* Allora la prima equazione (16) dà subito la prima curvatura che deve assumere la direttrice

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\cos\sigma}\left(\frac{N}{\operatorname{sen}\theta} + \theta'\right)$$

e la seconda diventa un'equazione quadratica in $\frac{1}{T}$ che risoluta dà

$$\frac{1}{T} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\cot\theta}{\rho} + \varepsilon\sqrt{\frac{M^2\operatorname{sen}^2\theta - N^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

La direttrice deformata è nuovamente determinata dalle sue equazioni intrinseche, che per $\sigma = 0$, o $\sigma = \pi$ si riducono naturalmente a quelle del problema fondamentale del §. 149.

§. 151.

Rigate (reali) applicabili sopra superficie di rotazione.

Domandiamo ora di risolvere il problema:

Trovare tutte le rigate R *reali, applicabili sopra superficie di rotazione.*

In tal caso la rigata R ammetterà una deformazione *continua* in sè durante la quale, a causa del teorema di Bonnet al §. 142, l'intero sistema di generatrici dovrà cangiarsi in sè medesimo e la linea di stringimento dovrà scorrere in sè medesima; per ciò essa taglie-

(1) Si confronti questo risultato con quello del §. 137 relativo alle deformazioni libere, dove rimaneva nella soluzione una funzione arbitraria.

rà le generatrici sotto angolo θ costante e sarà quindi (§. 144) linea geodetica, inoltre lungo di essa sarà costante la curvatura K_0 della superficie.

Assumendo a direttrice la linea di stringimento avremo dunque $N = 0$, $\theta = \text{cost.}^{te}$, e siccome per la (6)

$$K_0 = -\frac{M^2}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

sarà anche M una costante, poniamo $M = \frac{1}{m}$. Così l'elemento lineare (σ) prenderà la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + \left(\frac{u^2}{m^2} + 1\right)dv^2$$

con θ costante, che appartiene in effetto ad una superficie di rotazione. Per vedere a quale, si distingua il caso $\theta = \frac{\pi}{2}$ dal generale. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ il ds^2 appartiene al catenoide $r = m\cosh\frac{z}{m}$, ossia all'elicoide rigata ad area minima. Se $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, si deformi la rigata sì da rendere piana la sua linea di stringimento (§. 150). A causa della (19), la trasformata piana è un circolo di raggio

$$\rho = m\cos\theta$$

e la rigata diventa manifestamente l'iperboloide rotondo ad una falda. Concludiamo quindi:

Esistono due sole classi di rigate reali applicabili sopra superficie di rotazione e sono le deformate dell'elicoide rigata ad area minima e quelle dell'iperboloide rotondo ad una falda.

Al medesimo risultato possiamo arrivare per quest'altra via, cercando direttamente quali sono le superficie di rotazione che posseggono un sistema ∞^1 di geodetiche rettificabili per deformazione della superficie.

a) Supponiamo dapprima che il detto sistema di geodetiche simultaneamente rettificabili sia quello dei meridiani. Scritto il ds^2 sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 \quad (r = \varphi(u)),$$

abbiamo

$$\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{r'}{r}, \quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -rr'$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel sono nulli.

Nella deformazione supposta, che rettifica i meridiani, abbiamo $D = 0$ o $\Delta = 0$, e se nelle equazioni di Gauss e Codazzi sotto la forma (III*), (IV*) §. 67 (pag. 176) poniamo $\Delta = 0$, risulta

$$\Delta'^2 = \frac{r''}{r}$$

$$\frac{\partial \log \Delta'}{\partial u} = -\frac{2r'}{r},$$

la quale ultima integrata dà

$$\Delta' = \frac{m}{r^2} \quad (m \text{ costante}).$$

Ne segue per la prima

$$r'' = \frac{m^2}{r^3}$$

e integrando nuovamente

$$r'^2 = a^2 - \frac{m^2}{r^2}, \quad \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 r^2 - m^2}} = du.$$

Senza alterare la generalità si può fare la costante $a = 1$, da cui $r = \sqrt{u^2 + m^2}$, forma caratteristica del catenoide.

b) Il sistema di geodetiche rettificabili non coincida coi meridiani e consti quindi di geodetiche congruenti per rotazione intorno all'asse (1). Ma in tal caso anche il sistema di geodetiche simmetrico del primo rispetto ad un piano meridiano è rettificabile, ed esiste (§. 142) una deformazione che rettifica insieme i due sistemi. La superficie deformata è dunque una quadrica, precisamente un'iperboloide rotondo ad una falda, c. d. d.

§. 152.

Determinazione completa di tutte queste rigate. Teoremi di Laguerre e Bioche.

La prima classe di rigate applicabili sul catenoide, o sull'elicoide rigata ad area minima, è già stata caratterizzata completamente

(1) Questo accade necessariamente perchè la deformazione continua della rigata in sè deve scambiare le generatrici.

al §. 149, come quella delle *rigate luogo delle binormali alle curve di torsione costante*.

La seconda classe di rigate, applicabili sull' iperboloide rotondo ad una falda, si collega a sua volta, in modo molto notevole, colle curve di Bertrand (§§. 27, 28). Questo risulta immediatamente dalla formola (19), la quale nel caso di θ, ed $M = \frac{1}{m}$ ci dà

$$\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T} = \frac{1}{m} \tag{22}$$

ed esprime il teorema di Laguerre:

Le curve in cui si trasforma il circolo di gola dell' iperboloide rotondo ad una falda, per flessione della rigata con un sistema di generatrici rigide, sono tutte curve di Bertrand della medesima famiglia (22).

Per far concordare queste formole con quelle del §. 27 per le coppie di curve associate del Bertrand pongasi

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \sigma \quad , \quad k = m\cos\theta$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\sigma \quad , \quad \operatorname{sen}\theta = -\cos\sigma$$

e la (22) prenderà così la forma (58*) §. 27 (pag. 64)

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} - \frac{\cos\sigma}{T} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{k}.$$

Ora i coseni di direzione della generatrice della rigata sono dati dalla (15*) §. 148, nella quale però si deve mettere $\frac{\pi}{2}$ al posto di σ e cangiare θ in $\frac{\pi}{2} + \sigma$; così abbiamo

$$l = -\alpha\operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma,\ m = -\beta\operatorname{sen}\sigma + \mu\cos\sigma,\ n = -\gamma\operatorname{sen}\sigma + \nu\cos\sigma$$

e questi combinano, secondo le (57*) §. 27 (pag. 63), coi coseni di direzione λ_1, μ_1, ν_1 della curva associata Γ_1 di Bertrand, Di qui risulta l' elegante costruzione di Bioche, che fornisce *tutte* le deformate rigate dell' iperboloide rotondo ad una falda:

Presa una qualunque coppia di curve associate di Bertrand Γ, Γ_1 *(aventi a comune le normali principali), si conducano pei punti di* Γ *le parallele alle binormali di* Γ_1 *nei punti corrispondenti, la rigata così ottenuta è applicabile sull' iperboloide rotondo ad una falda e la curva* Γ *di Bertrand è la trasformata del circolo di gola.*

Naturalmente, scambiando le due curve Γ, Γ_1, si ottiene subito una seconda deformata rigata dell' iperboloide, e le due superficie sono fra loro in una particolare relazione (di superficie complementari) di cui parleremo nel prossimo capitolo (V.[1] §. 169) Anche è da osservarsi che queste due rigate sono di egual senso (1) e per ciò deformabili con *continuità* l' una nell' altra.

Si osserverà che queste rigate applicabili sopra superficie di rotazione appartengono tutte alla classe di quelle con paraboloide delle normali invariabile (§. 145) e la forma tipica per la prima classe (ibid.) è quella dell' elicoide rigata ad area minima, per la seconda quella dell' elicoide rigata con generatrice incidente obliquamente all' asse. In generale un' elicoide qualunque rigata è della prima classe se costituita dalle binormali di un'elica circolare, della seconda in ogni altro caso.

§. 153.

Il teorema di Chieffi.

Chiuderemo questo breve studio sulla flessione delle superficie rigate, considerando ora quelle deformazioni generali di queste superficie nelle quali le generatrici cessano di essere rettilinee e diventano curve. Sia Σ una superficie applicabile sopra una rigata R. e indichiamo con g le linee geodetiche di Σ che corrispondono alle generatrici. Prendiamo poi sopra Σ una qualunque linea asintotica a, dell' uno o dell' altro sistema, e deformiamo la superficie Σ mantenendo rigida l' asintotica. sì da rettificare una delle geodetiche g (§. 140 teorema B). Allora pel teorema finale al §. 141, anche tutte le altre geodetiche g si rettificano, e la deformata è dunque la rigata R' che si forma tirando nei punti dell' asintotica a le tangenti alle geodetiche g. Si ha dunque il seguente notevole teorema dovuto nella sua generalità al Chieffi (2):

(1) Questo si constata facilmente, colle formole del §. 27, calcolando i momenti di due coppie di generatrici infinitamente vicine nelle due rigate, che si trovano di egual segno.

(2) *Sulle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda* - Giornale di matematica Vol.e 43° (1905). — Pel caso particolare delle deformate del catenoide il teorema era già noto dal 1894 (V.i una mia nota: *Applicazioni geometriche del metodo di Picard* - Rendiconti dei Lincei febbraio 1894).

Se nei punti di un' asintotica qualunque a di una superficie Σ applicabile sopra una rigata R si conducono le tangenti alle geodetiche g di Σ trasformate delle generatrici di R, la rigata R_1 che si forma è applicabile sopra Σ, e nella deformazione l' asintotica a rimane rigida.

Si osservi poi che la rigata R_1 sarà applicabile per deformazione continua (a generatrici rigide) sulla rigata R, ovvero sulla sua simmetrica, a seconda che l' asintotica a appartiene all' uno o all' altro sistema, poichè in un caso la R_1 riesce destrorsa, nell'altro sinistrorsa.

Il problema di deformare la superficie Σ in una rigata, lasciando rigida un' asintotica a, viene così risoluto dal teorema di Chieffi senza alcuna integrazione.

Alla dimostrazione geometrica del teorema, fondata sui teoremi generali della deformazione, ne facciamo seguire una seconda analitica diretta.

Prendiamo l' elemento lineare di Σ, che è quello stesso della rigata R, sotto la forma (5) §. 143 e supponiamo che la direttrice $u = 0$ sia sopra Σ un' asintotica attuale e si abbia dunque

$$D'' = 0 \quad \text{per } u = 0,$$

indi per l' equazione di Gauss e a causa del valore (6)

$$K_0 = \frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}{\operatorname{sen}^4\theta}$$

della curvatura per $u = 0$, avremo

$$D'^2_0 = \frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta - N^2}{\operatorname{sen}^4\theta}. \tag{23}$$

Calcolando inoltre i valori $\left\{ {1 \atop 1} {2 \atop 1} \right\}_0$, $\left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 1} \right\}_0$ dei simboli di Christoffel per $u = 0$, troviamo

$$\left\{ {1 \atop 1} {2 \atop 1} \right\}_0 = -\frac{N\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 1} \right\}_0 = \frac{N}{\operatorname{sen}^2\theta}. \tag{24}$$

Ciò posto costruiamo la rigata R_1 indicata nel teorema, e indicando con t il tratto di tangente alle geodetiche $v = \text{cost.}^{te}$ a partire da $u = 0$, per le equazioni parametriche di R_1 avremo

$$x = x_0 + t\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0, \quad y = y_0 + t\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0, \quad z = z_0 + t\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0$$

i parametri essendo t, v e l' apposizione dell'indice zero indicando che è fatto $u = 0$. Ora, derivando rapporto a t e v, abbiamo

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 + t\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right), \text{ ecc.}$$

Calcolando

$$\bar{E} = S\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right)^2, \quad \bar{F} = S\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, \quad \bar{G} = S\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)^2,$$

coll' osservare che

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \; S\,\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \cos\theta, \; S\,\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0$$

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)_0 = N, \; S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2_0 = 1, \tag{25}$$

abbiamo subito

$$\bar{E} = 1, \; \bar{F} = \cos\theta, \; \bar{G} = t^2\, S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2_0 + 2Nt + 1.$$

Ma si ha

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)_0 = \left\{ {1 \atop 1} {2 \atop 1} \right\}_0 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 + \left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 1} \right\}_0 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2_0 + D'_0\, X$$

e dalle (23), (24), (25) risulta

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2_0 = M^2,$$

e quindi pel ds_1^2 della R_1

$$ds_1^2 = dt^2 + 2\cos\theta\, dt\, dv + (M^2 t^2 + 2Nt)\, dv^2$$

che coincide con (5), ove si faccia ora $t = u$.

Colla costruzione del teorema di Chieffi si ottengono manifestamente dalla superficie Σ due serie di rigate applicabili sulla Σ (sulla R) circoscrivendo le rigate R_1 lungo le singole asintotiche del primo, ovvero del secondo sistema. In ciascuna delle due serie le rigate sono applicabili per deformazione continua (a generatrici rigide) l' una sull'altra, mentre da una rigata della prima serie non si passa per deformazione continua ad una rigata della seconda, sibbene alla

sua simmetrica. È notevole poi che le rigate di ciascuna serie hanno per inviluppo la superficie primitiva su cui sono applicabili, e la toccano lungo le asintotiche di un sistema.

Nel caso particolare di una superficie Σ applicabile sopra una quadrica Q, essendo questa *doppiamente* rigata, la proposizione di Chieffi si può applicare in quattro diverse maniere, ed ancora in due se la Σ è semplicemente rigata. Così per le deformate rigate dell' iperboloide rotondo, partendo da una coppia di curve associate di Bertrand secondo la costruzione di Bioche (§. 152), se ne otterranno infinite altre integrando l' equazione differenziale (del tipo di Riccati) delle asintotiche curvilinee sulle corrispondenti deformate rigate dell'iperboloide.

Capitolo IX.

Superficie evolute e teoremi di Weingarten

Proprietà generali delle evolute e delle evolventi. — Evoluta media. — Le superficie W e le loro due falde dell' evoluta — Teoremi di Ribaucour e di Lie. — I due teoremi di Weingarten — Forme particolari dell' elemento lineare sferico rappresentativo per una superficie W. — Due classi complete di superficie W. — Superficie complementari — Deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda. Complementari, evolute ed evolventi delle superficie a curvatura costante.

§. 154.

Le due falde dell' evoluta di una superficie.

Riprendiamo nella prima parte del presente Capitolo lo studio delle proprietà generali delle superficie per applicare poi i risultati ottenuti ad una classe particolarmente importante di superficie, le così dette superficie W (di Weingarten).

Abbiamo veduto che sopra ogni normale in un punto M ad una superficie S esistono due punti speciali M_1, M_2 che sono i centri principali di curvatura di S, cioè i centri di curvatura delle due sezioni normali principali uscenti da M.

Quando il punto M descrive la superficie S, i due punti M_1, M_2 descrivono (in generale) una superficie composta di due rispettive falde S_1, S_2, che dicesi *l' evoluta* di S, mentre questa dicesi *l' evolvente*.

Possiamo generare le due falde S_1, S_2 dell' evoluta anche nel modo seguente. Consideriamo una linea di curvatura C di S; le normali alla superficie S lungo C generano una sviluppabile, il cui spigolo di regresso Γ (supposto dapprima non ridursi ad un punto) è precisamente il luogo dei centri di curvatura delle sezioni normali tangenti a C. Facendo ora variare la linea di curvatura C nel suo sistema, la sua evoluta Γ descriverà la relativa falda S_1 (o S_2) dell' evoluta.

Stabiliamo ora, dapprima con semplici considerazioni geometriche, alcune proprietà fondamentali delle evolute e in primo luogo dimostriamo il teorema:

a) *Gli spigoli di regresso delle sviluppabili luogo delle normali alla superficie lungo le singole linee di curvatura di un sistema sono geodetiche della superficie evoluta.*

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che ogni normale all'evolvente è tangente in due punti all'evoluta, precisamente alla prima falda S_1 nel primo centro M_1, alla seconda nel secondo centro M_2. Consideriamo ora un elemento MM' di una linea di curvatura del *secondo* sistema. Le normali in M, M' s'incontrano (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) nel secondo centro M_2 e toccano la prima falda S_1 nei rispettivi primi centri di curvatura M_1, M_1' su queste normali. Il piano MM_2M' (cioè il piano per la normale e per la tangente alla seconda linea di curvatura) contiene dunque due direzioni distinte M_1M_2, M_1M_1' uscenti da M_1 e ivi tangenti ad S_1, ed è per ciò il piano tangente in M_1 alla prima falda. Ne segue intanto: *La normale in* M_1 *alla prima falda* S_1 *dell'evoluta è parallela alla tangente nel punto corrispondente* M *dell'evolvente* S *della prima linea di curvatura; similmente dicasi per l'altra falda* (1).

Di qui segue subito il teorema a) considerando che se C_1 è una linea di curvatura del primo sistema e Γ_1 il relativo spigolo di regresso per la sviluppabile delle normali, la tangente a C_1 in M è parallela alla normale principale in M_1 della curva evoluta Γ_1, e questa ultima coincide dunque colla normale di S_1.

Stabiliamo lo stesso teorema a) in un secondo modo indipendente col quale determiniamo dapprima quali sono sulla falda S_1 le trajettorie ortogonali degli spigoli di regresso Γ_1. Sia t_1 una di queste trajettorie ortogonali delle Γ_1, e t la corrispondente linea di S; le normali alla S lungo t generano una rigata sulla quale le curve t, t_1 sono trajettorie ortogonali delle generatrici. Quindi il segmento MM_1 di generatrice compreso fra t e t_1 è costante (§. 27 nota o §. 105 A)), cioè lungo la linea t di S è costante il raggio di prima curvatura r_1. Dunque abbiamo:

b) *Le trajettorie ortogonali degli spigoli di regresso* Γ_1 *sulla prima falda dell'evoluta sono quelle linee che corrispondono alle linee* $r_1 = \text{cost.}^{te}$ *sull'evolvente.*

(1) Sotto altra forma: *Le due falde dell'evoluta sono i rispettivi inviluppi dei due piani principali della superficie evolvente.*

Qui si suppone naturalmente che r_1 non sia una costante assoluta a, nel qual caso però la superficie S sarebbe una superficie canale di raggio a (1) ed allora la relativa falda S_1 si ridurrebbe ad una curva (all'asse curvilineo di S).

Da questo teorema b) considerando che, per le proprietà delle curve evolute, due trajettorie ortogonali staccano archi eguali su tutte le curve Γ_1, dalla proposizione A') al §. 105 segue nuovamente che le Γ_1 sono linee geodetiche di S_1, cioè il teorema a).

§. 155.

Evolventi di una data superficie.

Colle considerazioni precedenti si lega naturalmente la questione: Può una superficie qualunque S_1 considerarsi come una falda dell'evoluta di una conveniente evolvente S?

Intanto le linee Γ_1 inviluppate sopra S_1 dalle normali di S debbono essere geodetiche. Ma inversamente prendiamo sopra S_1 un sistema ∞^1 *arbitrario* di linee geodetiche Γ_1 (che non siano eventualmente linee rette) e dimostriamo che le ∞^2 loro tangenti sono sempre le normali di una serie ∞^1 di superficie evolventi (parallele). Difatti si consideri una trajettoria ortogonale fissa t_0 delle Γ_1 e avvolto sopra *ciascuna* Γ_1 un filo (flessibile ed inestendibile) si svolga dalla curva a partire dal punto M_0 d'incontro con t_0, sicchè l'estremità libera M del tratto M_1M di filo teso descriverà un'evolvente C di Γ_1. *Il luogo di questa evolvente* C *sarà una superficie* S *normale a tutte le rette* M_1M. Difatti M_1M è intanto normale alla curva C di S uscente da M; ma di più se spostiamo ora M_1 lungo una seconda trajettoria ortogonale t_1 delle Γ_1, il tratto M_1M resta costante come eguale all'arco delle geodetiche Γ_1 compreso fra t_0 e t_1. Dunque M descrive in questo caso una seconda curva Γ sopra S, a cui M_1M è ancora normale; e per ciò M_1M è la normale di S, c. d. d. Facendo ora variare t_0 la superficie descrive una serie di superficie colle stesse normali, ed il tratto di normale fra due superficie della serie è costante, eguale all'arco delle Γ_1 compreso fra le due relative trajettorie ortogonali t_0, t_0'.

Concludiamo: *Qualunque superficie* S_1 *ammette infinite superficie evolventi (dipendenti da una funzione arbitraria), che si ottengono nel*

(1) V. §. seguente.

modo seguente. Si tracci sopra S_1 *un qualunque sistema* ∞^1 *di geodetiche* Γ_1*; le loro tangenti sono le normali di una serie* ∞^1 *di superficie evolventi parallele.*

Il problema ora risoluto si può enunciare anche così: *entro il complesso delle tangenti alla superficie* S_1 *trovare le congruenze normali* (1).

§. 156.

Superficie di cui una falda dell' evoluta si riduce ad una curva.

Trattando nel §. 154 delle due falde S_1, S_2 dell' evoluta di una superficie, S noi abbiamo escluso il caso che le sviluppabili delle normali lungo le linee di curvatura di un sistema si riducessero a coni, nel qual caso la relativa falda dell' evoluta si restringe ad una curva Γ. Vogliamo ora completare la ricerca e caratterizzare queste superficie, risolvendo dunque il problema: *Quali sono le superficie le cui normali si appoggiano ad una data curva* Γ *dello spazio?* (2) Indichiamo con u l' arco della Γ, per la quale riteniamo le consuete notazioni (Cap. I). I coseni X, Y, Z delle ∞^1 normali di S uscenti da un punto $M \equiv (x, y, z)$ di Γ saranno funzioni di u e di un secondo parametro v, e se diciamo $\overline{M} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ il piede della normale, ponendo $t = M\overline{M}$, avremo

$$\overline{x} = x + t\,X, \quad \overline{y} = y + t\,Y, \quad \overline{z} = z + t\,Z.$$

Ora t dovrà essere una tale funzione di u, v da soddisfare le due condizioni

$$S\,X\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0, \quad S\,X\,\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0,$$

(1) In generale il problema di trovare entro un dato complesso qualunque di rette le congruenze normali equivale all' integrazione di un' equazione a derivate parziali $F(x, y, z, p, q) = 0$. Nel caso attuale questa è l' equazione $\Delta_1 \theta = 1$ che abbiamo visto equivalere alla ricerca delle geodetiche sulla superficie (§. 106).

(2) Anche qui si tratta della ricerca delle congruenze normali entro un complesso, il complesso delle rette appoggiate a Γ.

ossia

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\,S\,X\,\alpha = \cos\theta, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = 0,$$

dove θ è l' angolo della generatrice del cono colla tangente a Γ. Ma la condizione d' integrabilità per le equazioni scritte è manifestamente $\frac{\partial \cos\theta}{\partial v} = 0$, ed è quindi necessario e sufficiente che sia θ funzione di u soltanto, ossia geometricamente: *Le normali di* S *che concorrono in un punto* M *di* Γ *debbono formare un cono di rotazione attorno alla tangente* Mt *di* Γ*, con apertura* θ*, variabile del resto in modo arbitrario lungo* Γ. È chiaro poi che le corrispondenti linee di curvatura di S sono circoli C, sicchè la superficie S ha un sistema di linee di curvatura circolari.

Viceversa se una superficie S ha un sistema di linee di curvatura circolari, le normali alla superficie lungo ogni circolo C formano un cono rotondo il cui vertice descrive una curva Γ a cui si riduce la relativa falda dell' evoluta, e ci troviamo quindi necessariamente nel caso precedente. Notiamo poi che le sfere descritte coi centri nei punti di Γ e contenenti i circoli C toccano S lungo questi circoli, e la S è quindi l' inviluppo di una semplice infinità di sfere. Possiamo dunque concludere: *Le superficie di cui una falda dell' evoluta si riduce ad una curva* Γ *sono tutte e sole le superficie con un sistema di linee di curvatura circolari, cioè gli inviluppi di una semplice infinità di sfere coi centri distribuiti sopra* Γ (3).

È naturale dopo ciò la domanda: esistono superficie con ambedue i sistemi di linee di curvatura circolari? È necessario per ciò e sufficiente che le due falde dell' evoluta si riducano ad una coppia di curve Γ, Γ' tali che ciascuna di esse venga proiettata da qualunque punto dell' altra secondo un cono di rotazione attorno alla tangente nel punto. Questa proprietà appartiene esclusivamente, come si sa dalla geometria, ad una coppia di coniche focali l' una dell' altra. Dunque: *Le uniche superficie coi due sistemi di linee di curvatura circolari sono quelle che hanno per normali le rette appoggiate a due*

(3) La stessa cosa risulta dalla nota relazione fra l' integrale completo e l' integrale generale (secondo Lagrange) della equazione a derivate parziali del 1° ordine a cui si riduce il problema. Poichè qui l' integrale completo si ha subito nelle ∞^3 sfere aventi i centri su Γ, basta legare con una relazione arbitraria i due parametri per avere nelle superficie inviluppo l' integrale generale.

coniche focali. La superficie in discorso è la così detta *ciclide di Dupin*, ed è una superficie algebrica del 4° ordine se la coppia (Γ, Γ') consta di un'ellisse e della sua iperbola focale, del 3° ordine invece se (Γ, Γ') è una coppia di parabole focali. In particolare nel primo caso, se l'ellisse diventa un circolo, indi l'iperbola focale si riduce alla retta normale nel centro al piano del circolo, si ha la ciclide di rotazione (toro).

§. 157.

Calcolo degli elementi fondamentali dell'evoluta.

Le proprietà elementari dell'evoluta, dimostrate geometricamente al §. 154, possono ora confermarsi col calcolo degli elementi delle due falde dell'evoluta, ciò che ci permetterà di stabilire ulteriori proprietà di fondamentale importanza.

Come al §. 69, riferiamo la superficie (evolvente) S alle sue linee di curvatura u, v, indicando con r_1, r_2 i rispettivi raggi principali di curvatura, onde avremo

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}.$$

L'equazione di Gauss diventa

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\} \tag{1}$$

e le due di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{du} \tag{2}$$

ovvero

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2}\right)=0\\ \left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1}\right)=0.\end{cases} \tag{2*}$$

Mantenendo le notazioni del citato paragrafo 69, trascriviamo inoltre le equazioni fondamentali del quadro seguente:

$$(A)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,X_1, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u}=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2-\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial u}=\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_1\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v}=-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1-\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_3,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial v}=\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_2.\end{cases}$$

Se x_1, y_1, z_1 denotano le coordinate del primo centro M_1 di curvatura, avremo

$$x_1 = x - r_1 X_3, \quad y_1 = y - r_1 Y_3, \quad z_1 = z - r_1 Z_3 \tag{3}$$

come equazioni parametriche della prima falda S_1 della evoluta. Derivando le (3) rapporto ad u, e con riguardo alle (A), risulta

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}=\sqrt{E}\left(1-\dfrac{r_1}{r_2}\right)X_1-\dfrac{\partial r_1}{\partial u}X_3\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}=-\dfrac{\partial r_1}{\partial v}X_3,\end{cases} \tag{4}$$

colle altre due analoghe. Queste dimostrano intanto che i coseni di direzione della normale a S_1 sono X_3, Y_3, Z_3, cioè la normale a S_1 è parallela alla tangente alla relativa linea di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$ dell'evolvente S, come già si è visto al §. 154. Indicando coll'apposizione dell'indice 1 gli elementi relativi alla S_1, calcoliamo dalle (4) dapprima i coefficienti del relativo ds_1^2.

$$E_1 = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad G_1 = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2,$$

il che dà

$$E_1 = E\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)^2+\left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 \tag{5}$$

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2. \tag{5*}$$

Conseguentemente possiamo scrivere

$$ds_1^2 = dr_1^2 + E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2 \tag{6}$$

e questa dimostra che sulla S_1 le linee $u = \text{cost.}^{te}$ sono geodetiche e le loro trajettorie ortogonali sono le $r_1 = \text{cost.}^{te}$, ciò che conferma già i teoremi a) e b) §. 154.

La (5*) dimostra poi che (se la S non è una sfera) $E_1 G_1 - F_1^2$ si annulla soltanto quando $\frac{\partial r_1}{\partial v} = 0$ o $r_1 = \varphi(u)$, cioè solo quando $r_1 = \varphi(u)$ la prima falda S_1 si riduce ad una curva (§. 155).

Ma ora otteniamo risultati nuovi se proseguiamo nel calcolo dei coefficienti D_1, D_1', D_1'' della seconda forma fondamentale di S_1.

$$D_1 = -S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_2}{\partial u}, \quad D_1' = -S\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial u}, \quad D_1'' = -S\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_2}{\partial v},$$

onde risulta

$$D_1 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v},$$

ed eliminando, mediante la prima delle (2*), $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$

$$D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}}\frac{r_1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v}. \tag{9}$$

La media di queste $D_1' = 0$ esprime che: *sulla prima (come sulla seconda) falda dell' evoluta le linee (u, v) corrispondenti alle linee di curvatura dell' evolvente, formano un sistema coniugato*, proprietà questa geometricamente evidente se si riflette che le tangenti alle linee $u = \text{cost.}^{te}$ sopra S_1 lungo una linea $v = \text{cost.}^{te}$ generano una sviluppabile il cui spigolo di regresso è la corrispondente linea $v = \text{cost.}^{te}$ sopra S_2.

Dalle (9) e dalla (5*) calcoliamo ancora la curvatura K_1 della prima falda S_1

$$K_1 = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

ed avremo

$$K_1 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_1}{\partial u} \end{vmatrix}. \tag{10}$$ (1)

Scriviamo anche la formola corrispondente per la curvatura K_2 della seconda falda S_2, che sarà

$$K_2 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_1}{\partial u} \\ \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \end{vmatrix}. \tag{10*}$$

§. 158.

Costruzione di Beltrami pel raggio di curvatura geodetica.

Consideriamo sopra una superficie S qualunque un sistema ∞^1 di linee geodetiche (*g*) e sia L una linea a tangenti coniugate colle geodetiche *g* nei punti ove le incontra. Le tangenti lungo L alle *g* generano una sviluppabile il cui spigolo di regresso indichiamo con Γ. Se *t* è una qualunque di queste tangenti, M il suo punto di contatto con S ed M′ quello di contatto col detto spigolo di regresso Γ, sussiste l'importante teorema di Beltrami: *Il punto* M′ *è il centro di curvatura geodetica in* M *di quella trajettoria ortogonale delle geodetiche g che esce da* M.

Per dimostrarlo prendiamo sopra S a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ le geodetiche (*g*) e a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le loro trajettorie ortogonali, e diamo al ds^2 la forma geodetica

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Pel raggio ρ_u di curvatura geodetica delle $u = \text{cost.}^{te}$ avremo *in grandezza e segno* (§. 98, pag. 267)

(1) Naturalmente qui si suppone $\frac{\partial r_1}{\partial v} \neq 0$, chè altrimenti la S_1 si ridurrebbe ad una curva.

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Se x, y, z sono le coordinate di M, e x', y', z' quelle di M', abbiamo

$$x' = x + r\frac{\partial x}{\partial u},\quad y' = y + r\frac{\partial y}{\partial u},\quad z' = z + r\frac{\partial z}{\partial u},$$

avendo indicato con r il valore *algebrico* del segmento MM', che dovremo dimostrare coincidere con ρ_u. Lungo L tutte le nostre quantità sono funzioni di un parametro, p. e. dell'arco s di L, e derivando rapporto ad s le precedenti abbiamo:

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{dr}{ds}\frac{\partial x}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{ds}\right)$$

colle analoghe per $\frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds}$. Ora questi tre valori debbono essere proporzionali, per la nostra ipotesi, alle tre quantità $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, onde moltiplicandoli ordinatamente per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e sommando si dovrà ottenere lo zero (a causa di $F = 0$). Eseguendo, si ottiene

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{dr}{ds} + r\left(S\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{du}{ds} + S\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) = 0,$$

e siccome

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = 0,$$

resta

$$\frac{dv}{ds}\left(G + \frac{r}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0.$$

Ma $\frac{dv}{ds} \neq 0$, perchè la L non coincide con una geodetica $v = \text{cost.}^{te}$, e quindi

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u},$$

cioè $r = \rho_u$, c. d. d.

Dimostrato il teorema di Beltrami, prendiamo di nuovo la prima falda S_1 dell'evoluta di una superficie S. Sopra S_1 le linee $u = \text{cost.}^{te}$ *sono geodetiche*, le $v = \text{cost.}^{te}$ le loro linee a tangenti coniugate, le $r_1 = \text{cost.}^{te}$ le loro traiettorie ortogonali. Applicando la costruzione di Beltrami vediamo che: *il centro di curvatura geodetica di una linea* $r_1 = \text{cost.}^{te}$ *sopra* S_1 *in un suo punto* M_1 *è precisamente il secondo centro* M_2, *cioè il punto corrispondente sulla seconda falda* S_2.

Ne segue che: *il raggio di curvatura geodetica delle* $r_1 = \text{cost.}^{te}$ *sopra* S_1 (*o delle* $r_2 = \text{cost.}^{te}$ *sopra* S_2) *è dato, salvo il segno, dalla differenza* $r_1 - r_2$ *dei raggi principali di curvatura della evolvente.*

§. 159.

Evoluta media secondo Ribaucour.

Insieme all'ordinaria evoluta di una superficie S, composta delle due falde S_1, S_2, capita talora di considerare un'altra superficie Σ, determinata colla S, che venne introdotta da Ribaucour col nome di *evoluta media* di S; essa è la superficie inviluppata dal piano normale nel punto medio M_0 fra i due centri di curvatura M_1, M_2 alla normale di S (parallelo al suo piano tangente). Siccome le coordinate del punto medio M_0 sono evidentemente

$$x_0 = x - \frac{r_1 + r_2}{2}X_3,\quad y_0 = y - \frac{r_1 + r_2}{2}Y_3,\quad z_0 = z - \frac{r_1 + r_2}{2}Z_3,$$

se con ω indichiamo la distanza algebrica del piano medio dalla origine

$$\omega = S\,x_0 X_3,$$

avremo

$$\omega = W - \frac{r_1 + r_2}{2}, \tag{11}$$

essendo W la distanza dell'origine dal piano tangente di S. Per le formule di Weingarten in coordinate tangenziali (43) §. 95 (pag. 259) abbiamo

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = W + \frac{1}{2}\Delta'_2 W ,$$

dove il parametro differenziale $\Delta'_2 W$ s'intende calcolato rispetto all'elemento lineare sferico rappresentativo della S, ovvero di Σ, ciò che è lo stesso corrispondendosi S e Σ per parallelismo di normali.

La (11) diventa per ciò

$$\omega = -\frac{1}{2}\Delta'_2 W \tag{11*}$$

e risolve completamente il problema: *data l'evolvente trovare l'evoluta media.* Essendo infatti nota W in funzione di u, v, dalla (11*) si avrà ω e colle formole di Weingarten §. 95 si determinerà l'evolvente media Σ.

La formola stessa (11*) serve anche a trattare il problema inverso: Data una superficie Σ trovare una superficie S di cui Σ sia evoluta media.

In questo caso, scelto un sistema coordinato (u, v) arbitrario, conosceremo ω in funzione di u, v, e l'incognita W non avrà che a soddisfare alla ben nota equazione d'analisi

$$\Delta'_2 W = -2\omega = f(u, v). \tag{12}$$

Questo risultato vale evidentemente (§. 95) anche nel caso in cui l'evoluta media si contragga in una curva Γ, ovvero ulteriormente in un punto.

Quest'ultimo caso corrispondente ad $\omega = 0$ è particolarmente notevole; allora l'equazione da integrarsi è l'ordinaria

$$\Delta'_2 W = 0 ,$$

e le superficie corrispondenti, integrali della equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$r_1 + r_2 = 2W,$$

sono caratterizzate dalla proprietà che il piede della perpendicolare abbassata dall'origine sopra ogni normale della superficie cade nel punto medio fra i due centri di curvatura. Sono queste le *superficie di Appell* (1). Goursat ha considerato più in generale (ibid) le superficie per le quali

(1) American Journal T. X, 1888.

$$r_1 + r_2 = kW \quad (k \text{ cost.te})$$

la cui ricerca dipende dall'equazione

$$\Delta'_2 W = (k - 2) W.$$

Per queste superficie di *Goursat*, si ha dalla (11*)

$$\omega = \frac{2 - k}{2} W ,$$

cioè ω è proporzionale per un fattore costante a W, proprietà manifestamente caratteristica. Dunque: *l'evoluta media di una superficie di Goursat è omotetica alla primitiva, e ciò accade soltanto per queste superficie.*

§. 160.

Le superficie W e le loro due falde dell'evoluta.

La classe di superficie i cui raggi principali di curvatura r_1, r_2 sono legati da una relazione

$$\varphi(r_1, r_2) = 0$$

godono di notevoli proprietà, di cui le principali furono scoperte da Weingarten coi teoremi di cui fra breve ci occuperemo; esse diconsi per abbreviare *superficie* W. Appartengono a questa classe tutte le superficie elicoidali, le superficie a curvatura media H costante, quelle a curvatura K costante, in generale tutte quelle per le quali le due curvature H, K sono legate da una relazione

$$\psi(H, K) = 0.$$

Si vede subito che: *le superficie* W *sono le superficie integrali di un'equazione a derivate parziali del terzo ordine.* E invero se si prende p. e. l'equazione della superficie sotto l'ordinaria forma cartesiana $z = z(x, y)$ e calcolate H e K mediante le formole (52) §. 83 (pag. 221) si esprime che la superficie è una W, basta scrivere che è nullo il Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

il che dà appunto l'indicata equazione del terzo ordine.

Si trova una proprietà caratteristica delle superficie W proponendosi con Ribaucour la questione seguente. Sulle due falde S_1, S_2 dell' evoluta di una qualunque superficie S riguardiamo come punti corrispondenti le coppie M_1, M_2 di centri di curvatura relativi ad un medesimo punto M della evolvente S e domandiamo: *quando accade che sulle due falde dell' evoluta si corrispondono le asintotiche (reali od immaginarie)?*

Dalle (9) si ha per S_1

$$D_1 : D'_1 : D''_1 = E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial v} : 0 : - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial v}$$

e quindi per S_2

$$D_2 : D'_2 : D''_2 = E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial u} : 0 : - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u} ,$$

e la condizione imposta si traduce nelle proporzioni

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D_2 : D'_2 : D''_2 :$$

ossia nella relazione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial (r_1 , r_2)}{\partial (u , v)} = 0 .$$

Dunque r_1, r_2 debbono essere legati da una relazione ed abbiamo il teorema di Ribaucour:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sulle due falde dell'evoluta si corrispondano le linee asintotiche è che la superficie evolvente appartenga alla classe W.

Invece di parlare della corrispondenza delle asintotiche, si può anche parlare della corrispondenza dei sistemi coniugati, ciò che ha il vantaggio di dare forma reale all'enunciato anche quando le asintotiche sono immaginarie.

A questo riguardo è bene osservare che siccome il sistema (u , v) corrispondente alle linee di curvatura della evolvente è già coniugato su ambedue le falde, basta aggiungere la condizione che ad *un altro* sistema coniugato di S_1 corrisponda un sistema coniugato di S_2 perchè la proprietà abbia luogo per *tutti* i sistemi coniugati [1].

[1] Basta p. e. che alle asintotiche di un sistema di S_1 corrispondano asintotiche su S_2 perchè ciò abbia luogo anche per l' altro sistema.

E questa la ragione perchè le *due condizioni* si riducono alla sola $\frac{\partial (r_1, r_2)}{\partial (u , v)} = 0$.

Una questione analoga a quella sopra risoluta e che ha condotto alla superficie W, è la seguente: *Quando accade che alle asintotiche della evolvente* S *corrispondano le asintotiche sopra una delle falde dell' evoluta, p. e. su* S_1 *?*

Dovrà allora sussistere la proporzione

$$D : D'' = D_1 : D_1''$$

ossia

$$\frac{E}{r_2} : \frac{G}{r_1} = E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial v} : - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial v} ,$$

che equivale a

$$\frac{\partial (r_1 r_2)}{\partial v} = 0 .$$

Dunque: *la proprietà richiesta ha luogo solo per quelle superficie evolventi le cui linee* $K = \text{cost.}^{te}$ *di egual curvatura sono linee di curvatura.*

E se supponiamo che ciò abbia luogo tanto per la prima che per la seconda falda avremo il teorema: *Solo per le superficie a curvatura costante avviene che alle asintotiche dell' evolvente corrispondono le asintotiche sopra ambedue le falde dell' evoluta.*

Ritornando alle generali superficie W, osserviamo ancora che le formole (10), (10*), essendo ora r_2 funzione di r_1, diventano

$$(13) \qquad \begin{cases} K_1 = - \dfrac{1}{(r_1 - r_2)^2} \dfrac{dr_1}{dr_2} \\ K_2 = - \dfrac{1}{(r_1 - r_2)^2} \dfrac{dr_1}{dr_2} \end{cases} ,$$

che moltiplicate dànno la notevole formola

$$(14) \qquad K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4} .$$

Questa esprime una proprietà, segnalata da Halphen, che è caratteristica per la superficie W.

Le formole (13) applicate al caso particolare che la relazione fra i raggi principali di curvatura della superficie sia

$$(15) \qquad r_1 - r_2 = R \text{ (costante)}$$

dànno il teorema: *Le due falde dell' evoluta di una superficie i cui raggi principali di curvatura abbiano una differenza* R *costante sono superficie pseudosferiche di raggio* R.

§. 161.

Caso in cui sulle due falde si corrispondono le linee di curvatura

Alle stesse notevoli superficie della classe (15) è stato condotto Ribaucour dall' esame della questione seguente: Possono sulle due falde dell' evoluta di una superficie S corrispondersi le linee di curvatura? Per l' osservazione già fatta al paragrafo precedente, siccome sopra S_1, S_2 si corrispondono due coppie di sistemi coniugati, si corrispondono tutti e la S sarà certamente una superficie W. Ma ora dimostriamo che essa è della classe speciale (15). Per questo scriviamo l' equazione differenziale delle linee di curvatura di S_1.

$$\begin{vmatrix} E_1\,du + F_1\,dv & F_1\,du + G_1\,dv \\ D_1\,du + D'_1\,dv & D'_1\,du + D''_1\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

che, calcolata colle formole (5), (9), diventa:

$$Er_1^2\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v}\,du^2 + \left|\begin{matrix} EG(r_2-r_1)^2 + Gr_2^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2 + Er_1^2\frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial v} \\ Gr_2^2\frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v} \end{matrix}\right| du\,dv + Gr_2^2\frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}\,dv^2 = 0.$$

Scambiando ora (u, v), (E, G), (r_1, r_2), si avrà l' equazione differenziale delle linee di curvatura sulla seconda falda S_2:

$$Er_2^2\frac{\partial r_2}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial u}\,du^2 + \left|\begin{matrix} EG(r_2-r_1)^2 + Er_1^2\left(\frac{\partial r_2}{\partial v}\right)^2 + Gr_1^2\frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial u} \\ Gr_1^2\frac{\partial r_2}{\partial v}\frac{\partial r_1}{\partial u} \end{matrix}\right| du\,dv + Gr_2^2\frac{\partial r_2}{\partial v}\frac{\partial r_1}{\partial u}\,dv^2 = 0.$$

Per la nostra ipotesi le due equazioni differenziali debbono coincidere, il che si traduce nelle due condizioni necessarie e sufficienti:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial r_2}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial r_1}{\partial v} = \frac{\partial r_2}{\partial v}\,.$$

ed abbiamo il teorema: *Soltanto per le due falde (pseudosferiche) dell' evoluta delle superficie della classe* (15) *accade che le linee di curvatura si corrispondono.*

Ma un' altra notevole proprietà, osservata da Lie, ha luogo in questo caso nella corrispondenza fra le linee asintotiche (a torsione costante) delle due falde: *la corrispondenza fra le asintotiche ha luogo per archi eguali.* E infatti pel ds_1 della prima falda abbiamo dalla (6)

$$ds_1^2 = dr_1^2 + \frac{E}{r_2^2}(r_1 - r_2)^2\,du^2\,,$$

e similmente pel ds_2 della seconda falda

$$ds_2^2 = dr_2^2 + \frac{G}{r_1^2}(r_1 - r_2)^2\,dv^2\,.$$

Ma lungo le asintotiche delle due falde S_1, S_2 si ha

$$\frac{E}{r_2^2}\,du^2 = \frac{G}{r_1^2}\,dv^2\,,$$

e perciò

$$ds_1^2 - ds_2^2 = dr_1^2 - dr_2^2\,,$$

indi $ds_1 = ds_2$ perchè $r_1 - r_2 = \text{cost.}^{te}$. Risulta di più dalla dimostrazione stessa che la corrispondenza delle asintotiche *per archi eguali* sulle due falde dell' evoluta di una superficie W è caratteristica per le superficie $r_1 - r_2 = \text{cost.}^{te}$.

§. 162.

Teorema di Lie per le linee di curvatura di una superficie W.

Un' altra osservazione, dovuta a Lie, porta al teorema: *Sopra ogni superficie* W *le linee di curvatura si trovano con quadrature.* La dimostrazione di Lie sarà data più oltre (§. seg.^{to}); qui riportiamo la dimostrazione analitica di Weingarten che fa conoscere un' importante proprietà caratteristica delle superficie W.

Sappiamo che l' equazione differenziale delle linee di curvatura di una superficie S si ottiene eguagliando a zero il covariante irrazionale quadratico

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix}$$

Di questa forma differenziale ψ calcoliamo la curvatura K_ψ, che

avrà manifestamente un valore indipendente dalle coordinate u, v adoperate. Riferiamoci dunque alle linee di curvatura u, v, per le quali si ha

$$F = 0, \; D = -\frac{E}{r_2}, \; D' = 0, \; D'' = -\frac{G}{r_1},$$

e quindi

$$\psi = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) du\, dv.$$

La curvatura K_ψ si calcola dalla formola (VI §. 41 (pag. 102), nella quale è da porre

$$x_1 = u, \; x_2 = v, \; a_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right);$$

così

$$K_\psi = \frac{2}{\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{G}}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \log\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{\partial u\, \partial v}\right\}$$

Dalle formole (2*) §. 157 abbiamo

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}\right], \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{G}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}\right],$$

e inoltre

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}\right]$$

Sommando, si elidono le derivate seconde delle curvature principali $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ e resta per K_ψ la notevole formola

$$K_\psi = \frac{2}{\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2}\right), & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right), & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1}\right) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Di qui segue che K_ψ si annulla soltanto quando $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ sono funzioni l' una dell' altra, cioè:

Le superficie W *godono della proprietà caratteristica che per esse si annulla la curvatura del covariante irrazionale quadratico* ψ *delle due forme quadratiche fondamentali* (1). Ma allora, pel teorema alla fine del §. 41, la forma ψ si riduce con quadrature alla forma normale col solo rettangolo $du\, dv$, il che dimostra appunto la proposizione di Lie.

Non si conosce un teorema analogo per la determinazione delle asintotiche di una superficie W, salvo nei due casi particolari delle superficie d' area minima ($H = 0$) e delle superficie a curvatura costante. Nel primo caso è già la seconda forma fondamentale

$$D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2$$

che ha la curvatura nulla, e nel secondo caso acquista curvatura nulla quando si moltiplichi per $r_1 - r_2$. Così: *Le linee asintotiche sulle superficie d' area minima e sulle superficie a curvatura costante si hanno con quadrature.*

§. 163.

Il primo teorema di Weingarten.

Arriviamo ora alle più importanti proprietà delle superficie W contenute in due teoremi scoperti da Weingarten, che sono fra i più notevoli e fecondi di tutta la geometria infinitesimale.

Il primo teorema si enuncia:

A) *Ciascuna falda dell' evoluta di una superficie* W *è applicabile sopra una superficie di rotazione, la cui forma dipende unicamente*

(1) Se si scrive l' equazione della superficie in coordinate cartesiane $z = z(x, y)$ (§. 83), si ha pel covariante ψ

$$\psi = \frac{1}{1 + p^2 + q^2}\begin{vmatrix} (1 + p^2)\, dx + pq\, dy, & pq\, dx + (1 + q^2)\, dy \\ r\, dx + s\, dy, & s\, dx + t\, dy \end{vmatrix}.$$

La sua curvatura K_ψ contiene solo apparentemente le derivate *quarte* di z, che in realtà si elidono, ed eguagliando K_ψ a zero si ha l' equazione a derivate parziali del terzo ordine per le superficie W (§. 160).

dalla relazione che lega i raggi principali di curvatura r_1, r_2 della evolvente W.

La dimostrazione segue immediatamente dalle proprietà che ci sono note dal §. 158. Prendasi ad es. la prima falda S_1 dell'evoluta di una superficie W; su questa le $r_1 = \text{cost.}^{te}$ sono geodeticamente parallele e il loro raggio di curvatura geodetica $r_1 - r_2$ è una funzione di r_1 dipendente soltanto dalla relazione che lega r_1, r_2. Dopo ciò il teorema segue subito dall'altro dimostrato al §. 129.

Un'altra dimostrazione dello stesso teorema si trae dalla formola (6) §. 157

$$ds_1^2 = dr_1^2 + \mathrm{E}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2 ,$$

ove sono prese per variabili indipendenti r_1, u. Calcoliamo per ciò la derivata logaritmica, rapporto ad r_1, di $\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \log\left\{\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right\} = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} \frac{1}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} + \frac{1 - \frac{r_1}{r_2}\frac{dr_2}{dr_1}}{r_1 - r_2} ,$$

e sostituendo per $\frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial r}$ il valore tratto dalla prima delle (2*) si troverà subito

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \log\left\{\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right\} = \frac{1}{r_1 - r_2} ,$$

da cui integrando

$$\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} \varphi(u) .$$

Ora, cangiando il parametro u, si può fare $\varphi(u) = 1$ e si ha quindi il risultato:

L'elemento lineare ds_1 della prima falda S_1 dell'evoluta di una superficie W *è dato dalla formola*

$$(\mathrm{I}) \qquad ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}} du^2 .$$

Questa forma appartiene ad una superficie di rotazione che dipende soltanto dalla relazione che lega r_1, r_2. Manifestamente per la seconda falda S_2 varrà la formola analoga

$$(\mathrm{I}^*) \qquad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}} dv^2 .$$

È da osservarsi che le due falde dell'evoluta di una W sono bensì applicabili ciascuna sopra una superficie di rotazione, ma non in generale sopra una medesima. Però in particolare, se la relazione fra r_1, r_2 è *simmetrica* (come p. e. $r_1 + r_2 = \text{cost.}^{te}$, $r_1 r_2 = \text{cost.}^{te}$), allora le due falde saranno applicabili l'una sull'altra.

Da questo teorema di Weingarten segue nuovamente il teorema al §. precedente, nel modo tenuto da Lie stesso. Se una superficie è W, sulle due falde dell'evoluta noi conosciamo le linee $r_1 = \text{cost.}^{te}$ o $r_2 = \text{cost.}^{te}$, che appartengono colle loro traiettorie ortogonali ad un sistema isotermo. Con quadrature si hanno dunque queste traiettorie ortogonali (§. 51, alle quali corrispondono appunto sulla evolvente W le linee di curvatura.

§. 164.

Il teorema reciproco di Weingarten.

Domandiamo ora se inversamente qualunque superficie S_1 applicabile sopra una superficie di rotazione può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie W.

Intanto le geodetiche g inviluppate sopra S_1 dalle normali della evolvente S dovranno essere le trasformate dei meridiani della superficie di rotazione, e poichè queste geodetiche g sono certamente curvilinee, bisogna escludere il caso delle superficie applicabili sopra una superficie di rotazione in guisa che le trasformate dei meridiani siano linee rette. Questo caso ci è ben noto dal §. 151, e si presenta per le deformate rigate del catenoide, luogo delle binormali alle curve di torsione costante; ma esso è l'unico caso d'eccezione al teorema inverso di Weingarten che si enuncia:

B) *Escluse le rigate luogo delle binormali alle curve di torsione costante (applicabili sul catenoide) ogni altra superficie applicabile sopra una superficie di rotazione può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie* W.

La dimostrazione si ottiene facilmente dalle considerazioni geometriche del §. 155 come segue.

Supponiamo che la S_1 ivi considerata sia deformata di una superficie di rotazione e le geodetiche Γ_1 (non rettilinee) siano le defor-

mate dei meridiani. Dimostriamo che una qualunque delle evolventi Σ_1 normali alle tangenti delle Γ_1, è una superficie W. Prendendo sulla S_1 a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ le geodetiche Γ_1 e a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le loro traiettorie ortogonali, il ds_1^2 prenderà la forma tipica

$$ds_1^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2.$$

Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura dell'evolvente, si ha

$$r_1 = u + \text{cost.}^{te}, \quad \frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

onde risulta appunto che r_1, r_2 sono legati da una relazione dipendente unicamente dalla forma della funzione $\varphi(u)$, cioè dalla forma della superficie di rotazione.

I due teoremi di Weingarten dimostrano che (salvo il caso delle deformate rigate del catenoide), il problema di determinare tutte le superficie applicabili sopra superficie di rotazione equivale perfettamente all'altro di trovare tutte le superficie W.

Non sarà inutile osservare che questi teoremi di Weingarten valgono anche se una delle due falde si riduce ad una linea, nel qual caso naturalmente saranno da applicarsi soltanto all'altra falda. Dalle considerazioni del §. 156 si vede facilmente che queste superficie W, con una falda focale ridotta ad una linea, sono 1° le superficie di rotazione, 2° le superficie canali con asse curvilineo qualunque. Per le prime una falda dell'evoluta è ridotta all'asse di rotazione, e la seconda falda è un'altra superficie di rotazione, avente per meridiano l'evoluta piana del meridiano della evolvente. Per le superficie canali un raggio di curvatura è costante; una falda dell'evoluta è rappresentata dall'asse curvilineo Γ e l'altra dalla sua sviluppabile polare, sulla quale le linee inviluppate dalle normali di Γ (della superficie canale) sono le evolute di Γ concorrenti in un punto, sicchè per deformazione della sviluppabile polare possono cangiarsi nelle generatrici di un cono di rotazione. Del resto la formola (I) di Weingarten, supposto $r_2 = \text{cost.}^{te}$, dà

$$ds_1^2 = dr_1^2 + (r_1 - c)^2\, du^2,$$

che è appunto l'elemento lineare del piano in coordinate polari.

§. 165.

Elemento lineare sferico rappresentativo di una superficie W.

Il problema della determinazione delle superficie W, che equivale come si è visto a quello delle deformate delle superficie di rotazione, venne posto da Weingarten stesso sotto una nuova forma ricercando: *quali sono i doppi sistemi ortogonali sulla sfera di Gauss immagini delle linee di curvatura di una superficie* W ?

Se con ds' indichiamo l'elemento lineare sferico rappresentativo, riferito alle immagini (u, v) delle linee di curvatura

$$ds'^2 = E'\, du^2 + G'\, dv^2,$$

avremo, secondo le (29) §. 93

$$\frac{\partial \lg \sqrt{E'}}{\partial v} = \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial \lg \sqrt{G'}}{\partial u} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{\partial r_1}{\partial u}$$

che nel caso attuale, essendo r_1 funzione di r_2, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \lg \sqrt{E'}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}, \quad \frac{\partial \lg \sqrt{G'}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}.$$

Integrando e disponendo dei parametri u, v, possiamo prendere

$$\sqrt{E'} = e^{\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}}, \quad \sqrt{G'} = e^{\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}}, \tag{17}$$

onde si vede che E', G' *sono funzioni l'uno dell'altro.* Ma è utile scrivere le formole precedenti liberate dai segni di quadrature. Per ciò supposto che non sia r_2 costante (1), nemmeno $\sqrt{E'}$ sarà una costante e noi potremo porre

$$\sqrt{E'} = \frac{1}{\alpha},$$

(1) Se $r_2 = \text{cost.}^{te}$, si consideri invece r_1 che non sarà costante, salvo nel caso ovvio di una superficie sferica.

dove α sarà una certa funzione di u, v, mentre $\sqrt{G'}$, r_1, r_2 saranno pure funzioni di α.

La prima delle (17) dà

$$r_1 = r_2 - \alpha \frac{dr_2}{d\alpha}, \quad \frac{dr_1}{d\alpha} = -\alpha \frac{d^2 r_2}{d\alpha^2},$$

e la seconda

$$\sqrt{G'} = \frac{1}{\frac{dr_2}{d\alpha}}.$$

Se poniamo

$$r_2 = \theta(\alpha),$$

ne risulterà

$$r_1 = \theta(\alpha) - \alpha\,\theta'(\alpha), \quad \sqrt{g} = \frac{1}{\theta'(\alpha)},$$

e possiamo enunciare il risultato sotto la forma seguente:

C) *Se di una superficie* W *si fa la rappresentazione sferica di Gauss, scegliendo convenientemente i parametri* u, v, *l'elemento lineare sferico prenderà la forma*

$$(II) \qquad ds'^2 = \frac{du^2}{\alpha^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\alpha)},$$

dove α *è funzione di* u, v, *e i raggi principali di curvatura* r_1, r_2 *della superficie* W *saranno dati dalle formole*

$$(II^*) \qquad r_2 = \theta(\alpha), \quad r_1 = \theta(\alpha) - \alpha\,\theta'(\alpha).$$

Il teorema s'inverte subito coll'altro:

C*) *Se l'elemento lineare* (II) *appartiene alla sfera di raggio* $= 1$, *esiste una corrispondente superficie* W (1) *che rappresentata sulla sfera ha per immagine delle linee di curvatura il sistema sferico* (u, v) *e i raggi principali di curvatura dati dalle* (II*).

E infatti, in queste ipotesi, sono soddisfatte le due equazioni di Codazzi. Si aggiunga che noti X, Y, Z in funzione di u, v, si avrà la superficie W per quadrature dalla formola

(1) Propriamente ne esistono ∞^1 parallele che si ottengono aumentando $\theta(\alpha)$ di una costante cioè r_1, r_2 di una medesima costante.

$$x = \int\left(r_2 \frac{\partial X}{\partial u}\,du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v}\,dv\right),$$

e dalle due analoghe.

Così il problema di determinare le superficie W, o le deformate delle superficie di rotazione, ha subito una nuova trasformazione, che lo riduce all'altro di trovare i sistemi sferici ortogonali con E', G' legati da una relazione. E quando poi sia fissata la funzione $\theta(\alpha)$, e con essa la relazione che lega r_1, r_2, ossia la forma della superficie di rotazione, il problema viene ricondotto all'altro di integrare l'equazione del secondo ordine per $\alpha = \alpha(u, v)$, che si ottiene scrivendo essere $= +1$ la curvatura della forma differenziale (11).

Osserviamo infine che le trasformazioni compiute sopra per le (29) §. 93 possono compiersi nel medesimo modo sulle (2*) §. 157, sostituendo a

$$\sqrt{E'}, \quad \sqrt{G'}, \quad r_1, \quad r_2$$

rispettivamente

$$\sqrt{E}, \quad \sqrt{G}, \quad \frac{1}{r_1}, \quad \frac{1}{r_2},$$

onde avremo gli altri due teoremi:

D) *L'elemento lineare di una superficie* W, *riferito alle sue linee di curvatura* u, v, *può porsi sotto la forma*

$$(III) \qquad ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\beta)},$$

dove β *è funzione di* u, v *e le curvature principali sono date dalle formole:*

$$(III^*) \qquad \frac{1}{r_2} = \theta(\beta), \quad \frac{1}{r_1} = \theta(\beta) - \beta\,\theta'(\beta),$$

D*) *Se l'elemento lineare* (III) *è tale che calcolandone la curvatura* K *si abbia*

$$K = \theta(\beta)\,[\theta(\beta) - \beta\,\theta'(\beta)],$$

esso apparterrà ad una superficie W *di cui* u, v *saranno le linee di curvatura e colle curvature principali date dalle* (III*).

E difatti in tali ipotesi sono soddisfatte l'equazione di Gauss e le equazioni di Codazzi.

§. 166.

Classi complete di superficie W.

I notevoli risultati sopra esposti, in particolare i teoremi C) C*) hanno permesso a Weingarten di determinare due classi complete di superficie applicabili da aggiungersi a quella prima nota delle applicabili sul piano (sviluppabili).

Fra i sistemi sferici (u, v), che dànno al ds'^2 la forma caratteristica con $E' = \varphi(G')$, abbiamo in primo luogo i sistemi isotermi (tutti noti). Per ottenerli dalla (II) basta porre p. e.

$$\theta'(\alpha) = \alpha\,, \quad \theta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\,,$$

con che

$$r_2 = \frac{\alpha^2}{2}\,, \quad r_1 = -\frac{\alpha^2}{2}\,.$$

Le corrispondenti superficie W sono tutte le superficie ad area minima (e le loro parallele).

Siccome la superficie di rotazione ad area minima è il catenoide, ambedue le falde dell'evoluta di una superficie minima sono applicabili sull'evoluta del catenoide, cioè sulla superficie di rotazione che ha per meridiano l'evoluta della catenaria e per asse la direttrice. Il corrispondente ds^2 si ha subito p. e. dalla formola (I*) §. 163 sotto la forma

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2.$$

Dunque: *sappiamo trovare con quadrature tutte le superficie con questo ds^2.*

Un secondo caso interessante si ha ricorrendo ai sistemi di ellissi e iperbole geodetiche ortogonali sulla sfera che si sanno tutti determinare (§. 108) e dànno al ds'^2 sferico la forma caratteristica

$$ds'^2 = \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2\omega} + \frac{dv^2}{\cos^2\omega}\ \left(\text{con } \frac{1}{E'} + \frac{1}{G'} = 1\right).$$

Confrontando colla (I) potremo fare

$$\alpha = \operatorname{sen}\omega\,, \quad \theta'(\alpha) = \cos\omega\,.$$

da cui

$$\theta'(\alpha)\,d\alpha = \cos^2\omega\,d\omega$$

e integrando

$$\theta(\alpha) = \frac{\omega + \operatorname{sen}\omega\cos\omega}{2}\,.$$

Le (II*) dànno ora

$$r_2 = \frac{\omega + \operatorname{sen}\omega\cos\omega}{2}\,, \quad r_1 = \frac{\omega - \operatorname{sen}\omega\cos\omega}{2}\,,$$

ma converrà meglio scrivere, moltiplicando per un fattore costante k (sostituendo una superficie omotetica):

$$r_2 = k\,\frac{2\omega + \operatorname{sen} 2\omega}{4}\,, \quad r_1 = k\,\frac{2\omega - \operatorname{sen} 2\omega}{4}\,, \tag{18}$$

onde per la relazione che lega i raggi principali di curvatura

$$r_2 - r_1 = \frac{k}{2}\,\operatorname{sen}\left\{\frac{2}{k}(r_2 + r_1)\right\}. \tag{19}$$

Sappiamo dunque trovare, con quadrature, la classe completa di superficie W i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione trascendente (19), e conseguentemente anche tutte le deformate della superficie di rotazione su cui sono applicabili le due falde della evoluta, poichè si vedrà subito che questa superficie di rotazione è la medesima per le due falde. Per dimostrarlo calcoliamo dalle (18)

$$\frac{dr_2}{d\omega} = k\cos^2\omega, \quad \frac{dr_1}{d\omega} = k\operatorname{sen}^2\omega,$$

ed essendo

$$r_2 - r_1 = k\operatorname{sen}\omega\cos\omega\,,$$

avremo

$$\int\frac{dr_1}{r_1 - r_2} = -\int\frac{\operatorname{sen}\omega\,d\omega}{\cos\omega} = \log\cos\omega$$

$$\int\frac{dr_2}{r_2 - r_1} = \int\frac{\cos\omega\,d\omega}{\operatorname{sen}\omega} = \log\operatorname{sen}\omega\,,$$

per cui le formole (I), (I*) di Weingarten ci daranno

$$(20)\qquad \begin{cases} ds_1^2 = k^2(\operatorname{sen}^2\omega\, d\omega^2 + \cos^2\omega\, du^2) \\ ds_1^2 = k^2(\cos^2\omega\, d\omega^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2). \end{cases}$$

Questi sono gli elementi lineari delle due falde dell'evoluta manifestamente equivalenti, come risulta scambiando u con v e cangiando ω in $\frac{\pi}{2} - \omega$.

Per vedere quale è la superficie di rotazione corrispondente scriviamo l'elemento lineare di questa

$$ds^2 = (1 + \psi'^2(r))\, dr^2 + r^2\, dv_1^2$$

e paragoniamo p. e. colla seconda delle (20) ponendo

$$r = \lambda \operatorname{sen}\omega \quad (\lambda \text{ cost.}^{te}), \quad kv = \lambda v_1,$$

e per determinare $\psi'(r)$ avremo

$$[1 + \psi'^2(r)]\,\lambda^2\cos^2\omega = k^2\cos^2\omega,$$

indi

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{k^2}{\lambda^2}\cos^2\omega = \frac{k^2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{r^2}{\lambda^2}\right).$$

La curva meridiana della superficie di rotazione avrà quindi la equazione

$$z = \psi(r) = \frac{1}{\lambda^2}\int \sqrt{\lambda^2(k^2 - \lambda^2) - k^2 r^2}\, dr,$$

dove, se si vuole una superficie reale, converrà supporre $\lambda^2 < k^2$ e l'integrazione si compierà per funzioni ordinarie. Ma nulla ci vieta di prendere come superficie tipica la superficie immaginaria corrispondente a $\lambda = k$ e questo ci dà

$$z = \frac{i}{k}\int r\, dr = \frac{ir^2}{2k},$$

da cui

$$r^2 = 2\frac{k}{i}z,$$

che rappresenta una parabola avente per asse l'asse Oz di rotazione e il parametro *puramente immaginario* $\frac{k}{i}$. Queste ultime considerazioni sono dovute a Darboux, il quale ha così riconosciuto che: *La seconda classe completa di superficie applicabili determinata da Weingarten, come evoluta delle* (19), *è quella delle deformate del paraboloide rotondo a parametro puramente immaginario.*

Riserbiamo ad un futuro Capitolo, che tratterà delle deformazioni infinitesime (Vol. II), l'esposizione delle ulteriori ricerche di Darboux (che troveranno ivi posto più opportuno) per la costruzione geometrica effettiva delle deformate di questo paraboloide, ed insieme del paraboloide rotondo *reale*.

§. 167.

Le superficie complementari.

Le ricerche sopra esposte esauriscono i casi nei quali i teoremi di Weingarten conducono alla determinazione di classi *complete* di superficie applicabili. Ma anche in altri casi, senza giungere a risultati così completi, conducono a conseguenze di grande interesse per la geometria.

Questi casi saranno esaminati in seguito nella teoria delle trasformazioni; qui cominciamo dal porne le basi colla nozione di *superficie complementari*.

Si è visto, al §. 155, che scegliendo sopra una superficie qualunque S un sistema ∞^1 arbitrario di linee geodetiche g (non rettilinee) le loro ∞^2 tangenti sono le normali di una serie ∞^1 di superficie (evolventi) Σ, di cui la S è una falda dell'evoluta; questa viene completata ad evoluta completa da una seconda falda $\bar{S}$ che si dirà appunto la *superficie complementare di* S rispetto alle geodetiche g. Per la costruzione di Beltrami del centro di curvatura geodetica (§. 158) possiamo anche dire:

La superficie $\bar{S}$ *complementare di* S *rispetto ad un sistema di geodetiche* g, *è il luogo dei centri* M *di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle* g.

Supposta dapprima la S qualunque (però non sviluppabile) riferiamola alle geodetiche g come linee $v = \text{cost.}^{te}$ e alle loro trajettorie ortogonali $u = \text{cost.}^{te}$, sì che l'elemento lineare di S prenda la forma geodetica

$$(21)\qquad ds^2 = du^2 + G\, dv^2.$$

Ponendo

$$(22)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\,G}\frac{\partial G}{\partial u},$$

sarà $-\rho$ il raggio di curvatura geodetica delle $u = \text{cost.}^{te}$ e indicando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del centro $\bar{M}$ di curvatura geodetica, avremo

$$(23)\qquad \bar{x} = x - \rho\frac{\partial x}{\partial u},\quad \bar{y} = y - \rho\frac{\partial y}{\partial u},\quad \bar{z} = z - \rho\frac{\partial z}{\partial u},$$

e queste saranno le equazioni parametriche della complementare $\bar{S}$.

Andiamo ora a calcolare gli elementi di questa superficie $\bar{S}$, che indicheremo coi soliti simboli affetti da un soprassegno. Per questo notiamo che i valori dei simboli di Christoffel per la (21) sono

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = 0,\quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0,\quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0,\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\,G}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\,G}\frac{\partial G}{\partial v},$$

e quindi per le derivate seconde delle x, y, z abbiamo dalle formole fondamentali

$$(24)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = D\,X,\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2\,G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + D'\,X,\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2\,G}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + D''X.$$

Derivando ora le (23) rapporto ad u, v coll' osservare la (22), otteniamo

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} - \rho\,D\,X \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \rho\,D'X. \end{cases}$$

Queste ci mostrano intanto che i coseni di direzione della normale in $\bar{M}$ alla superficie $\bar{S}$ sono

$$(26)\qquad \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

e per ciò il segmento $M\bar{M}$ tocca in $\bar{M}$ la superficie $\bar{S}$ come in M la S, ciò che è ben noto.

Dalle (25) abbiamo pei coefficienti $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ del $\overline{ds^2}$ di $\bar{S}$

$$(27)\quad \bar{E} = \left(1 - \frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + \rho^2 D^2,\quad \bar{F} = -\frac{\partial \rho}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) + \rho^2 DD',\quad \bar{G} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)^2 + \rho^2 D'^2.$$

Ma ora calcoliamo anche i coefficienti $\bar{D}, \bar{D}', \bar{D}''$ della seconda forma fondamentale di $\bar{S}$

$$\bar{D} = -S\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial \bar{X}}{\partial u},\quad \bar{D}' = -S\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial \bar{X}}{\partial u},\quad \bar{D}'' = -S\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial \bar{X}}{\partial v},$$

mediante le (24), (25) e (26), e troveremo

$$(28)\quad \bar{D} = \rho\frac{D\,D'}{\sqrt{G}},\quad \bar{D}' = \frac{\rho D'^2}{\sqrt{G}},\quad D'' = \frac{\rho\,D'\,D''}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}$$

Con queste formole possiamo nuovamente risolvere la questione (§. 160): quando è che sulle due superficie complementari S, $\bar{S}$ si corrispondono le linee asintotiche (i sistemi coniugati)? È necessario e basta per questo che sussistano le proporzioni

$$\bar{D} : \bar{D}' : \bar{D}'' = D : D' : D'',$$

il che dà per le (28) l' unica condizione

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0;$$

ma il primo fattore non può annullarsi, altrimenti la S sarebbe sviluppabile e $\rho = \infty$, dunque $\dfrac{\partial \rho}{\partial v} = 0$, ossia

$$\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} = f(u),$$

che è il caso caratteristico di una S applicabile sopra una superficie di rotazione di cui le $v = \text{cost.}^{te}$ siano le deformate dei meridiani.

§. 168.

Caso di superficie applicabili sopra superficie di rotazione.

Proseguiamo la discussione di questo caso, che ci riconduce ai teoremi di Weingarten con qualche nuova osservazione. Quando la S sia una deformata di una superficie di rotazione intenderemo senz' altro che la complementare $\bar{S}$ sia presa rispetto alle deformate dei meridiani, ciò che individua il sistema stesso se la superficie S non è a curvatura costante, mentre in quest' ultimo caso lascierà ancora luogo ad infinite possibilità (V.[1] §. 170). Ciò posto, per il risultato ultimamente conseguito, anche la complementare $\bar{S}$ sarà alla sua volta applicabile sopra una superficie di rotazione; anzi quest'ultima resterà sempre la stessa deformando la S, come risulta dai teoremi di Weingarten, e come ora constateremo direttamente.

Prendiamo l' elemento lineare di S sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2, \tag{29}$$

e dalla (22), avremo

$$\rho = \frac{r}{r'}, \quad 1 - \frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{r\,r''}{r'^2}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial v} = 0,$$

indi dalle (27)

$$\bar{E} = \left(\frac{r\,r''}{r'^2}\right)^2 + \frac{r^2}{r'^2}\,D^2, \quad \bar{F} = \frac{r^2}{r'^2}\,D\,D', \quad \bar{G} = \frac{r^2}{r'^2}\,D'^2,$$

cioè

$$\overline{ds^2} = \left(\frac{r\,r''}{r'^2}\right)^2 du^2 + \frac{1}{r'^2}(r\,D\,du + r\,D'\,dv)^2.$$

Ma, a causa della prima equazione di Codazzi (IV) §. 67 (pag. 175) l' espressione

$$r\,D\,du + r\,D'\,dv$$

è un differenziale esatto, e ponendo adunque

$$v_1 = \int (r\,D\,du + r\,D'\,dv),$$

risulta

$$\overline{ds^2} = \left(\frac{r\,r''}{r'^2}\right)^2 du^2 + \frac{dv_1^2}{r'^2}, \tag{30}$$

che appartiene ancora ad una superficie di rotazione, *dipendente soltanto dalla forma della primitiva* definita da $r = \varphi(u)$. Alla formola (30), ponendo

$$R = \frac{1}{r} \tag{31}$$

si può dare anche la forma equivalente

$$\overline{ds^2} = r^2\,dR^2 + R^2\,dv_1^2, \tag{30*}$$

che spesso riuscirà più utile nei calcoli e scriveremo anche la (29) sotto la forma

$$ds^2 = R^2\,dr^2 + r^2\,dv^2, \tag{29*}$$

simmetrica della precedente scambiando r con R.

Questi calcoli ci hanno dato in sostanza una nuova dimostrazione dei teoremi di Weingarten, provando che le deformate delle superficie di rotazione si presentano sempre a coppie di superficie complementari, per modo che il problema della deformazione è il medesimo per l'elemento lineare (29) o per il (30), sebbene questi elementi lineari non siano in generale equivalenti. In quest'ultimo caso del resto la conoscenza di una deformata della superficie di rotazione ne procura subito, in termini finiti, una seconda nella sua complementare.

§. 169.

Applicazioni alle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda.

Come prima applicazione prendiamo il caso dell' iperboloide rotondo ad una falda, dove l' iperbola ha per equazione

$$z = \psi(r) = \frac{b}{a}\sqrt{r^2 - a^2},$$

indi

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{(a^2 + b^2)\,r^2 - a^4}{a^2(r^2 - a^2)}$$

$$(32) \qquad ds^2 = \frac{(a^2+b^2)\,r^2 - a^4}{a^2(r^2-a^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2\,.$$

Nella (29*) è dunque da farsi

$$R = \frac{(a^2+b^2)\,r^2 - a^4}{a^2(r^2-a^2)},$$

da cui

$$r^2 = \frac{a^4(R^2-1)}{a^2R^2-(a^2+b^2)}$$

e per la complementare la (30*) dà

$$\overline{ds^2} = \frac{a^4(R^2-1)}{a^2R^2-(a^2+b^2)}\,dR^2 + R^2\,dv_1^2.$$

Ma se in questa poniamo

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\,r_1,$$

troviamo

$$\overline{ds^2} = \frac{(a^2+b^2)\,\bar{r}^2 - a^4}{a^2(\bar{r}^2-a^2)}\,d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,dv'^2 \qquad v' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\,v_1\,,$$

che è manifestamente identica alla (32). Se di più osserviamo che essendo $r^2 > a^2$ è anche $\bar{r}^2 > a^2$, vediamo che: *Le complementari delle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda sono applicabili sullo iperboloide stesso.*

Questo si può confermare geometricamente colle considerazioni geometriche seguenti, dalle quali vengono inoltre resi intuitivi i teoremi di Laguerre e di Bioche al §. 152.

Prendiamo una qualunque *rigata* R deformata dell' iperboloide rotondo ad una falda Q, e sia R_1 la superficie complementare, che vedremo subito essere una seconda rigata (applicabile sull' iperboloide stesso). Consideriamo tutti i segmenti FF_1 che toccano in F la R, secondo la direzione della trasformata dell' iperbola meridiana e in F_1 la complementare e sia g una generatrice di R sulla quale applichiamo la corrispondente dell' iperboloide Q pei punti corrispondenti ed in guisa che Q tocchi R lungo la g. I segmenti FF_1, uscenti dai punti di g, *senza cangiare la loro posizione relativa* vengono ora a terminare in F_1 all' asse dell' iperboloide; dunque quando F percorre la generatrice g, il punto F_1 descrive una seconda retta g_1, che è la posizione acquistata dall' asse dell' iperboloide Q, collocato in guisa da toccare R lungo g.

Se ora facciamo variare g sopra R l' iperboloide Q *rotola* sulla rigata applicabile R, onde intanto vediamo:

La superficie complementare della rigata R, *deformata dell' iperboloide, è una seconda rigata* R_1, *generata dall' asse dell' iperboloide quando questa quadrica si fa rotolare sopra* R.

Ma ora di più consideriamo due generatrici corrispondenti g, g_1 di R, R_1 e la loro minima distanza PP_1, di cui siano P, P_1 i rispettivi piedi.

Quando R si applica sopra Q la g diventa una generatrice di Q e la g_1 si colloca, come si è visto, sull' asse; per ciò P si colloca sul circolo di gola (e P_1 nel centro). Dunque la linea γ luogo del punto P sopra R non è altro che la trasformata del circolo di gola (linea di stringimento); e per la stessa ragione la γ_1 luogo di P_1 sopra R_1 è la linea di stringimento di questa seconda rigata. D' altra parte la detta minima distanza è manifestamente normale ad ambedue le rigate R, R_1 ed è dunque la normale principale comune delle due rispettive geodetiche γ, γ_1. Si conclude che queste due curve, avendo a comune le normali principali, sono curve associate di Bertrand.

Così è dimostrato per via geometrica il teorema di Laguerre, ed una parte della proposizione di Bioche, che completiamo ora nel modo seguente. Le binormali di γ, γ_1, hanno rispettivamente le direzioni di g_1, g (perchè applicando R sopra Q la γ tocca in P il circolo di gola e g_1 si sovrappone all' asse); queste due direzioni formano un angolo costante eguale a quello delle generatrici di Q coll' asse ed è pur costante il tratto PP_1 di normale principale comune, eguale al raggio del circolo di gola. Tuttociò corrisponde esattamente alle circostanze della costruzione di Bioche (§. 152), la quale trovasi dunque nuovamente stabilita. Di più abbiamo il risultato: *Le due rigate applicabili sull' iperboloide rotondo che si formano da una coppia di curve associate di Bertrand conducendo pei punti dell' una le parallele alle binormali dell' altra sono complementari.*

§. 170.

Complementari delle superficie a curvatura costante.

Una superficie a curvatura costante possiede infiniti sistemi di geodetiche che possono riguardarsi come deformate dei meridiani di

una superficie di rotazione, e per conseguenza infinite superficie complementari, applicabili l'una sopra l'altra e sopra una medesima superficie di rotazione, la cui forma si tratta ora di esaminare. Distinguiamo per ciò i due casi delle superficie a curvatura costante positiva o negativa (1).

1.° caso. Deformate della sfera di raggio a.

Qui possiamo prendere per elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{a}\right) dv^2 , \quad r = \operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right)$$

ovvero sotto la forma (29*)

$$ds^2 = \frac{a^2}{1 - r^2} dr^2 + r^2 dv^2 ,$$

e dobbiamo fare nella (30*)

$$R^2 = \frac{a^2}{1 - r^2} , \quad r^2 = \frac{R^2 - a^2}{R^2} ,$$

quindi si ha per l'elemento lineare della complementare

$$ds^2 = \frac{R^2 - a^2}{R^2} dR^2 + R^2 dv_1^2 . \tag{33}$$

Per trovare la superficie di rotazione su cui queste complementari sono applicabili si ponga

$$R = k\rho \quad (k \text{ cost.te})$$

e si determini la corrispondente forma della curva meridiana $z = \psi(\rho)$ da

$$1 + \psi'^2(\rho) = \frac{k^2\rho^2 - a^2}{\rho^2}$$

$$z = \psi(\rho) = \int \frac{\sqrt{(k^2 - 1)\rho^2 - a^2}}{\rho} d\rho ,$$

(1) Il caso delle superficie a curvatura nulla non ha interesse. Per la forma $ds^2 = du^2 + dv^2$ ($r = 1$) la complementare è rigettata a distanza infinita; per l'altra $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$ ($r = u$) la complementare si riduce ad una curva di cui la sviluppabile data è la sviluppabile polare §. 164).

integrazione che si compie per funzioni ordinarie, ρ e, sotto la forma parametrica

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}} \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} , \quad z = a\left\{\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \cos\varphi\right\}.$$

Si può osservare che l'elemento lineare (33) di queste complementari delle deformate della sfera appartiene ad *una quadrica immaginaria a centro che iperoscula l'assoluto.* Posto infatti $\xi = Rv_1$ la (33) si scrive

$$ds^2 - d\xi^2 = dR\left\{\frac{R^2 - a^2}{R^2} dR - d(v_1^2 R)\right\}$$

ed il secondo membro è il prodotto di due differenziali esatti. Ne segue che la superficie definita in coordinate ξ, η, ζ, dalle equazioni

$$\xi = Rv_1 , \quad \eta + i\zeta = R , \quad \eta - i\zeta = R + \frac{a^2}{R} - v_1^2 R$$

ha l'elemento lineare (33), ed eliminando R, v, si vede che è la quadrica immaginaria a centro:

$$\xi^2 + 2\zeta^2 - 2i\eta\zeta = a^2 \tag{34}$$

che iperoscula il circolo assoluto (1). Dunque: *Nota una deformata della sfera di raggio a, colle sue linee geodetiche, nelle sue complementari si hanno ∞^2 superficie reali applicabili sulla quadrica immaginaria* (34).

2.° caso. Deformate della pseudosfera di raggio a.

Per una superficie pseudosferica di raggio $-a$ noi distinguiamo le tre forme tipiche parabolica, ellittica ed iperbolica del ds^2 (§. 126):

A) $$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2$$

B) $$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen} h^2\left(\frac{u}{a}\right) dv^2$$

(1) La conica all'infinito della quadrica (34)

$$\xi^2 + 2\zeta^2 - 2i\eta\zeta = 0$$

e il circolo assoluto

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

hanno a comune il solo punto ove la retta isotropa $\eta + i\zeta = 0$ tocca il circolo.

C) $$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right) dv^2 ,$$

e poniamo ordinatamente nei tre casi

$$r = e^{\frac{u}{a}}, \quad r = \operatorname{senh}\left(\frac{u}{a}\right), \quad r = \cosh\left(\frac{u}{a}\right),$$

da cui

A') $$ds^2 = \frac{a^2\,dr^2}{r^2} + r^2\,dv^2$$

B) $$ds^2 = \frac{r^2\,dr^2}{r^2+1} + r^2\,dv^2$$

C') $$ds^2 = \frac{a^2\,dr^2}{r^2-1} + r^2\,dv^2 .$$

Nella (29*) dobbiamo porre in conseguenza

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}, \text{ o } R^2 = \frac{a^2}{r^2+1}, \; R^2 = \frac{a^2}{r^2-1},$$

sicchè la (30*) ci dà per il $\overline{ds^2}$ della rispettiva complementare

a) $$\overline{ds^2} = \frac{a^2}{R^2}\,dR^2 + R^2\,dv_1^2$$

b) $$\overline{ds^2} = \frac{a^2 - R^2}{R^2}\,dR^2 + R^2\,dv_1^2$$

c) $$\overline{ds^2} = \frac{a^2 + R^2}{R^2}\,dR^2 + R^2\,dv_1^2 .$$

Nel primo caso *a*) l'elemento lineare combina con A') ed appartiene quindi ad una seconda superficie pseudosferica dello stesso raggio. Enunciamo in parole questo risultato d'importanza fondamentale nella teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche (Cap. XV):

Per ogni superficie pseudosferica il luogo dei centri di curvatura geodetica di un sistema di oricicli paralleli è una nuova superficie pseudosferica dello stesso raggio.

In questo caso il meridiano della corrispondente superficie di rotazione è la trattrice coll'asse per asintoto.

Nel caso *b*), procedendo come sopra, troviamo per il meridiano della superficie di rotazione

$$z = \int \frac{\sqrt{a^2 - (k^2+1)\rho^2}}{\rho}\,d\rho ,$$

che rappresentiamo parametricamente colle formole

(35) $$\rho = \frac{a}{\sqrt{k^2+1}} \operatorname{sen}\varphi , \quad z = a\left(\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right).$$

Paragonando colle equazioni parametriche (8) §. 127 (pag. 338) della trattrice ordinaria, vediamo che le ordinate ρ sono accorciate in rapporto costante, e diremo perciò la curva (35) la *trattrice accorciata* (1).

Nel caso *c*) sarà invece

$$z = \int \frac{\sqrt{a^2 - (1-k^2)\rho^2}}{\rho}\,d\rho ;$$

e se supponiamo ora $k^2 < 1$, potremo sostituirvi le equazioni parametriche

(35*) $$\rho = \frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{sen}\varphi , \quad z = a\left(\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right),$$

che rappresentano ora manifestamente una trattrice *allungata*. Ma si osservi che nel caso attuale si può fare più semplicemente $k = 1$ ed allora la curva meridiana

$$z = a\int \frac{d\rho}{\rho} = a\log\rho$$

è la curva logaritmica. (2) Concludiamo che:

Le superficie complementari delle superficie pseudosferiche, nei rispettivi casi A), B), C), sono applicabili sulle superficie di rotazione che

(1) È la proiezione ortogonale sopra un piano per l'asintoto della trattrice ordinaria.

(2) Si può considerare anche la serie di deformate di rotazione corrispondenti a $k > 1$, colle curve meridiane

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{senh}\varphi , \quad z = a\left(\cosh\varphi - \log \operatorname{tg}\operatorname{h}\frac{\varphi}{2}\right).$$

hanno per meridiano ordinatamente la trattrice ordinaria, l' accorciata o l' allungata e per asse l' asintoto.

Nell' ultimo caso la trattrice allungata è sostituibile colla curva logaritmica.

In fine osserveremo che anche qui per superficie tipica, su cui le complementari sono applicabili, si può prendere una quadrica immaginaria che iperosculi l' assoluto. Nel caso *a*) anzi è la sfera immaginaria

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + a^2 = 0 ;$$

negli altri due la quadrica immaginaria (34) ove a si cangi in ia.

§. 171.

Evolute ed evolventi delle superficie a curvatura costante.

Le superficie a curvatura costante $r_1 r_2 = 0$ sono esse stesse superficie W e quindi, pel teorema di Weingarten, le loro due falde dell' evoluta sono applicabili sopra una superficie di rotazione, l' evoluta della loro forma di rotazione.

Se la superficie è a curvatura costante positiva

$$r_1 r_2 = a^2$$

e consideriamo p. e. la prima falda dell' evoluta S_1 applicando la formola (I) §. 163 abbiamo

$$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{\int \frac{2 r_1 dr_1}{r_1^2 - a^2}} du^2 .$$

Dei due raggi principali di curvatura uno è maggiore di a l' altro minore, poniamo p. e. $r_1 > a$, e integrando la precedente avremo

$$ds_1^2 = dr_1^2 + (r_1^2 - a^2)\, du^2 .$$

Per la seconda falda invece dalla (I*) risulta):

$$ds_2^2 = dr_2^2 + (a^2 - r_2^2)\, dv^2 ,$$

come del resto si deduce anche dalle formole del §. 68 relative alle superficie complementari.

Per le superficie a curvatura costante negativa

$$r_1 r_2 = -a^2 ,$$

siccome l' evoluta della trattrice non è altro che la catenaria avente per direttrice l' asintoto della prima curva, si deduce:

Ciascuna falda dell' evoluta di una superficie pseudosferica è applicabile sul catenoide.

La stessa cosa segue dalla formola (I) di Weingarten, la quale dà ora.

$$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{\int \frac{2 r_1 dr_1}{r_1^2 + a^2}} du^2 ,$$

o

$$ds_1^2 = dr_1^2 + (r_1^2 + a^2)\, du^2 ,$$

che appartiene al catenoide di parametro a.

Siccome poi inversamente qualunque superficie (non rigata) applicabile sul catenoide ha fra le sue evolventi (rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani del catenoide) una superficie pseudosferica si vede che: *la determinazione di tutte le superficie pseudosferiche è un problema perfettamente equivalente a quello di trovare tutte le deformate non rigate del catenoide.*

La stessa cosa può dedursi analiticamente dalle equazioni di Darboux per le asintotiche virtuali sul catenoide (1). Prendendo l' elemento lineare del catenoide sotto la forma

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2 ,$$

siccome qui tutti i simboli di Christoffel sono nulli tranne (cf. §. 167),

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{u}{u^2 + a^2} , \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -u ,$$

e d'altra parte $K = \frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$, $p = \frac{u^2 + a^2}{a}$, le equazioni (D) §. 138 (pag. 372) per le asintotiche virtuali diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \dfrac{2u}{u^2 + a^2} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + u \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0 \end{cases}$$

(1) Darboux. Leçons III n.° 726.

La seconda dimostra che v è la somma di due funzioni una di α, l'altra di β; ma noi qui, escludendo il caso delle deformate rigate, dobbiamo supporre che nessuna di queste due funzioni si riduca ad una costante, ed allora possiamo porre, senza alterare la generalità

$$v = \alpha + \beta .$$

Così resta solo da soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{2u}{u^2 + a^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + u .$$

Questa, col cambiamento di funzione incognita

$$u = a \operatorname{tg}\omega ,$$

si riduce alla forma

$$\frac{\partial^2 (2\omega)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen}(2\omega) ,$$

che è l'equazione da cui dipende la ricerca delle superficie pseudosferiche (§. 90).

Da ultimo ricerchiamo quale è la relazione che lega i raggi principali di curvatura r_1, r_2 delle evolventi delle superficie a curvatura costante rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani della superficie di rotazione. Per questo basta ricordare che, nella forma tipica del ds^2:

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2 ,$$

il raggio di curvatura geodetica dei paralleli $u = \text{cost.}^{\text{te}}$ è dato da $\frac{r}{r'}$ ed esso eguaglia altresì la differenza dei raggi principali di curvatura della evolvente. Così troviamo per le evolventi delle deformate della sfera

$$r_1 - r_2 = a \operatorname{tg}\left(\frac{r_1 + c}{a}\right),$$

la costante c variando da una evolvente a un'altra parallela. E per le evolventi delle superficie pseudosferiche, a seconda dei tre tipi A), B), C), troviamo:

Tipo A) $\qquad r_1 - r_2 = a$

Tipo B) $\qquad r_1 - r_2 = a \operatorname{tgh}\dfrac{r_1 + c}{a}$

Tipo B) $\qquad r_1 - r_2 = a \operatorname{coth}\dfrac{r_1 + c}{a}$

Nel primo tipo, come è geometricamente evidente, la relazione è la stessa per tutta la serie parallela delle evolventi (cf. §. 160).

Capitolo X.

Sistemi ∞^2 di raggi o congruenze rettilinee

Le congruenze rettilinee e le due forme di Kummer. — Momento e parametro distributore. — Punti limiti e rigate principali. — Congruenze isotrope di Ribaucour. — Fuochi e sviluppabili della congruenza — Caso dei fuochi coincidenti — Congruenze normali. — Teoremi di Beltrami e di Malus-Dupin. — Congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate principali. — Congruenze riferite alle sviluppabili ed elementi delle due falde focali. — Congruenze W e pseudosferiche. — Congruenze di Guichard. — Formole generali del Sannia.

§. 172.

Le due forme di Kummer per le congruenze.

La teoria che andiamo a svolgere nel presente Capitolo appartiene alla geometria differenziale dello spazio rigato e studia i sistemi doppiamente infiniti di rette distribuite con continuità nello spazio, per modo che per ogni punto dello spazio, o di una conveniente sua regione, passi una retta o un numero finito di rette del sistema. Tali sistemi ∞^2 di rette (raggi) diconsi anche *congruenze rettilinee* o semplicemente congruenze; il sistema delle normali ad una superficie (congruenze normali) ne offre un primo esempio.

Questa teoria, nata da questioni di ottica geometrica, ha acquistato un'importanza fondamentale in geometria; noi ne stabiliremo qui i fondamenti attenendoci specialmente alla classica memoria di Kummer (1), colle opportune modificazioni introdottevi dal Sannia (2).

Per definire analiticamente una congruenza tagliamo l'intero sistema di rette con una superficie S, che riguarderemo come superficie di partenza, assumendo come punto iniziale su ciascun raggio il punto (uno dei punti) in cui incontra S (1).

Riferita la superficie S ad un sistema di coordinate curvilinee (u, v) definiremo analiticamente la congruenza esprimendo in funzione di u, v le coordinate x, y, z del punto di partenza ed i coseni di direzione del raggio, che indicheremo con

$$l, m, n.$$

Rispetto alle funzioni x, y, z; l, m, n di u, v, supporremo che esse siano finite e continue insieme a quelle loro derivate parziali che occorrerà considerare. Il punto (l, m, n), sulla sfera unitaria

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

si dirà il punto immagine del raggio (u, v) della congruenza, e noi supporremo sempre nel seguito che: *il punto* (l, m, n) *descriva, al variare di* u, v, *un'effettiva area sferica, che cioè la matrice*

$$\begin{matrix} \frac{\partial l}{\partial u}, & \frac{\partial m}{\partial u}, & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial l}{\partial v}, & \frac{\partial m}{\partial v}, & \frac{\partial n}{\partial v} \end{matrix}$$

sia di caratteristica 2. Supponiamo insomma che le *direzioni* dei raggi della congruenza formino una doppia infinità. Del resto, in questo caso che escludiamo, i raggi si ordinano in una semplice infinità di superficie cilindriche, e le proprietà generali delle congruenze rettilinee si mantengono particolarizzandosi in un modo facilmente osservabile. Quanto alla superficie S di partenza, non è escluso nei calcoli seguenti che si riduca anche ad una linea Γ, cioè la congruenza sia estratta dal complesso delle rette appoggiate a Γ.

Osserviamo ora che le coordinate ξ, η, ζ di un punto qualunque P sul raggio (u, v) saranno date dalle formole

$$(1) \qquad \xi = x + t\,l, \quad \eta = y + t\,m, \quad \zeta = z + t\,n$$

dove t indica *l'ascissa* del punto P sul raggio, misurata a partire dal punto di partenza $P_0 \equiv (x, y, z)$ come origine. Se nelle (1) pensiamo

(1) *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Crelle's Journal B. 57).

(2) *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (Annali di matematica Serie III^a T. XV, 1908).

(1) Da principio la superficie di partenza S resta così un ente estraneo alla congruenza; ma in seguito potremo specializzarla sì da porla in relazione intima col sistema di raggi, assumendola p. e. come superficie *media* o superficie *focale* ecc.

le u, v legate da una relazione $v = \varphi(u)$ verremo ad estrarre dalla congruenza una rigata, di cui le (1) saranno le equazioni parametriche. Dovremo ora calcolare, colle formole del Cap. VIII, i principali elementi relativi ad una tale rigata generica della congruenza e per questo cominciamo dall' introdurre con Kummer le seguenti funzioni fondamentali

$$(2) \qquad E = S\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2,\ F = S\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v},\ G = S\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2$$

$$(3) \quad e = S\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},\ f = S\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\ f' = S\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\ g = S\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},$$

per le quali si esprimono le due forme differenziali quadratiche:

$$(A) \qquad ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(B) \qquad S\,dl\,dx = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$

che diremo le *forme fondamentali* di Kummer.

Di queste la prima ha un significato intrinseco, rappresentando il quadrato ds'^2 dell' elemento lineare della rappresentazione sferica; o insomma ds' misura l' angolo infinitesimo che fa col raggio (u, v) il raggio infinitamente prossimo $(u + du,\ v + dv)$. E dobbiamo tener presente che: *nella nostra ipotesi la forma* (A) *è definita positiva, cioè costantemente* $EG - F^2 > 0$.

Quanto alla seconda forma (B), essa dipende, oltre che dalla congruenza, dalla superficie di partenza scelta S, e di più dei quattro coefficienti e, f, f', g definiti dalle (3) contiene i medii solo nella somma $f + f'$. Nel seguito essa verrà opportunamente sostituita da un'altra di significato intrinseco (Sannia).

§. 173.

Momento e parametro distributore delle rigate della congruenza.

Se consideriamo una qualunque rigata

$$(4) \qquad f(u, v) = 0$$

della congruenza uscente dal raggio (u, v), potremo calcolarne colle formole del §. 143 le quantità fondamentali. Per questo indicando

con ds l' elemento d' arco, sulla superficie S di partenza della curva (1) (che sarà la linea stessa l, se la S si riduce ad una tale linea) dovremo porre manifestamente nel caso attuale

$$(5) \qquad p' = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds},\quad l' = \frac{\partial l}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial l}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

colle altre formole analoghe per gli altri due assi. Per ciò avremo

$$(6) \qquad \begin{cases} M^2 = S\,l'^2 = \dfrac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{ds^2} \\ N = S\,l'\,p' = \dfrac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{ds^2}, \end{cases}$$

con che si introducono appunto, a destra, le due forme di Kummer. La formola $t = -\dfrac{N}{M^2}$ che dà l' ascissa del punto centrale sul raggio (u, v) (§. 143) diventa qui

$$(I) \qquad t = -\frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Questa formola (I), *applicata a qualunque rigata* (4) *della congruenza, ci dà adunque l' ascissa t del corrispondente punto centrale sul raggio* (u, v), *cioè del piede della minima distanza di questo raggio dal successivo* $(u + du,\ v + dv)$.

Calcoliamo ora il momento Θ dei due raggi successivi, dato (ibid.) da

$$\Theta = ds^3 \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}.$$

Per questo, ricordando che si ha

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \dfrac{\partial l}{\partial u} & \dfrac{\partial m}{\partial u} & \dfrac{\partial n}{\partial u} \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} & \dfrac{\partial m}{\partial v} & \dfrac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix} = +\sqrt{EG - F^2},$$

scriviamo per le (5)

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds} \\ l, & m, & n \\ \frac{\partial l}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial l}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial m}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial m}{\partial v}\frac{dv}{ds}, & \frac{\partial n}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial m}{\partial v} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Eseguendo il prodotto dei due determinati, osservando le (2), (3) e le identità

$$S\, l\frac{\partial l}{\partial u} = 0\,, \quad S\, l\frac{\partial l}{\partial v} = 0$$

si trova subito

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^2\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv\,, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv\,, & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix},$$

e quindi semplicemente

$$(II) \qquad \Theta = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv\,, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv\,, & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix}.$$

Indicando con P il parametro distributore k secondo la formola di Chasles §. 145, dei piani tangenti alla rigata lungo la generatrice (u, v), abbiamo

$$P = \frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l' & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix},$$

dove ora il segno di P significa che la rigata è destrorsa o sinistrorsa secondo che $P > 0$ o $P < 0$.

Il parametro distributore è dunque dato in grandezza e segno dalla formola:

$$(III) \qquad P = \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}$$

e la scriveremo anche

$$(III^*) \qquad P = \frac{\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

avendo posto

$$(7) \quad \delta = \frac{Ef - Fe}{\sqrt{EG-F^2}}\,, \quad 2\delta' = \frac{Eg - Ge + F(f'-f)}{\sqrt{EG-F^2}}\,, \quad \delta'' = \frac{Fg - Gf}{\sqrt{EG-F^2}}\,.$$

La forma differenziale

$$(C) \qquad \delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2$$

che figura al numeratore della (III*) è quella che il Sannia introduce (m, c) come seconda forma fondamentale della congruenza insieme alla prima (A). Essa ha un significato intrinseco, indipendente dalla superficie di partenza, come risulta dalla sua definizione stessa (1).

A queste formole fondamentali (I), (II), (III), conviene ora aggiungere le altre che dànno: 1° i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla rigata nel punto centrale, 2° i coseni di direzione $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ della minima distanza fra i due raggi infinitamente vicini (u, v), $(u + du, v + dv)$. Questi ultimi sono proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial l}{\partial v}\frac{dv}{ds'}, & \frac{\partial m}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial m}{\partial v}\frac{dv}{ds'}, & \frac{\partial n}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{dv}{ds'} \\ l, & m, & n \end{vmatrix},$$

(1) Lo stesso segue dall' osservare che se x, y, z si cangiano in $x + t\,l$, $y + t\,m$, $z + t\,n$, con t funzione arbitraria di u, v, i coefficienti e, f, f', g si mutano in

$$e + t\,E\,,\ f + t\,F\,,\ f' + t\,F\,,\ g + t\,G$$

e i coefficienti $\delta, \delta', \delta''$ non cambiano.

i cui elementi della prima linea saranno appunto i valori di X_0, Y_0, Z_0. Così abbiamo

$$(8)\quad X_0 = \frac{\partial l}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial l}{\partial v}\frac{dv}{ds'},\quad Y_0 = \frac{\partial m}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial m}{\partial v}\frac{dv}{ds'},\quad Z_0 = \frac{\partial n}{\partial u}\frac{du}{ds'} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{dv}{ds'}.$$

Osserviamo che questi valori di X_0, Y_0, Z_0 sono altresì i coseni di direzione della tangente alla curva sferica (4) immagine della rigata, cioè: *La tangente alla immagine sferica della rigata è parallela alla normale nel punto centrale.*

Come corollario abbiamo: *Per due diverse rigate uscenti dal raggio l angolo fra le due normali nei rispettivi punti centrali è eguale all'angolo delle due curve sferiche immagini.*

Per scrivere ora i valori di $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ converrà porli sotto la forma

$$\cos a = \alpha\frac{\partial l}{\partial u} + \beta\frac{\partial l}{\partial v} + \gamma l$$

colle analoghe per $\cos b$, $\cos c$, determinando α, β, γ dalle condizioni

$$S\, l\cos a = 0\ ,\quad S\, X_0\cos a = 0\ ,\quad S\cos^2 a = 1\ .$$

La prima dà $\gamma = 0$, e la seconda

$$\alpha\left(E\frac{du}{ds'} + F\frac{dv}{ds'}\right) + \beta\left(F\frac{du}{ds'} + G\frac{dv}{ds'}\right) = 0,$$

da cui in fine per le formole richieste:

$$(9)\qquad \cos a = \frac{\left(E\frac{\partial l}{\partial v} - F\frac{\partial l}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial l}{\partial v} - G\frac{\partial l}{\partial u}\right)dv}{\sqrt{EG - F^2}\ \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},$$

colle altre due analoghe per $\cos b$, $\cos c$.

§. 174.

Punti limiti. — Formola di Hamilton.

Cominciamo ora sulla formola (I) lo studio della distribuzione dei punti centrali sul raggio (u, v) al variare della rigata per il raggio. Siccome t è data dal quoziente di due forme differenziali quadratiche, delle quali quella al denominatore è definita positiva, potremo applicare l'analisi stessa già usata prima al §. 53 per lo studio dei moduli di dilatazione, poi al §. 73 per la formola d'Eulero. Così adunque cangiamo le variabili u, v in guisa da ridurre simultaneamente a forma ortogonale le due forme di Kummer, in guisa cioè che risulti:

$$f + f' = 0\ ,\quad F = 0\ ,$$

il che potrà farsi in un solo modo se la seconda forma non è proporzionale alla prima, invece in infiniti modi se ha luogo una tale proporzionalità

$$e : \frac{f + f''}{2} : g = E : F : G\ .$$

La formola (I) diventa così

$$t = -\frac{e\,du^2 + g\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}$$

e se indichiamo con t_1 il valore di t corrispondente a $dv = 0$, con t_2 quello corrispondente a $du = 0$, avremo

$$t_1 = -\frac{e}{E}\ ,\quad t_2 = -\frac{g}{G}\ ,$$

indi

$$(10)\qquad t = \frac{E\,t_1\,du^2 + G\,t_2\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}\ .$$

Se supponiamo p. e.

$$t_2 \geq t_1$$

ne risulta che t è sempre compreso fra i due limiti finiti t_1, t_2.

$$t_1 \leq t \leq t_2\ .$$

Indichiamo con L_1, L_2 le posizioni estreme dei due punti centrali corrispondenti a t_1, t_2; ogni altro punto centrale del raggio u, v giacerà dunque entro il segmento finito fra i due punti L_1, L_2, che diconsi per ciò i due *punti limiti* del raggio. Le rigate $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ corrispondenti a queste particolari variabili u, v diconsi le rigate *principali* della congruenza e i loro piani tangenti nei rispettivi

punti centrali i *piani principali*. Siccome le linee sferiche u, v immagini delle rigate principali sono ortogonali risulta subito dal paragrafo precedente che: *I due piani principali per ogni raggio sono fra loro ortogonali.*

È manifesto poi che la formola (10)

$$t = \mathrm{E}\left(\frac{du}{ds'}\right)^2 t_1 + \mathrm{G}\left(\frac{dv}{ds'}\right)^2 t_2$$

si può scrivere

$$t = t_1 \cos^2\vartheta + t_2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,, \tag{11}$$

avendo indicato con ϑ l'angolo che la curva sferica immagine della rigata generica $f(u, v) = 0$ forma colla curva $v = \text{cost.}^{te}$, ossia l'angolo dei due piani tangenti nei rispettivi punti centrali alla rigata $f(u, v)$ ed alla $v = \text{cost.}^{te}$. Sotto la forma (11) è la *formola di Hamilton.*

§. 175.

Congruenze isotrope di Ribaucour.

La discussione precedente conserva il suo valore anche se ha luogo la proporzionalità

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = \mathrm{E} : \mathrm{F} : \mathrm{G}\,,$$

ma allora t ha un valore indipendente dal rapporto $\frac{dv}{du}$

$$t = t_1 = t_2\,,$$

ossia i due punti limiti coincidono in un unico punto nel quale cadono tutti i piedi delle minime distanze del raggio (u, v) da qualsiasi raggio infinitamente vicino. Queste singolari congruenze furono considerate la prima volta da Ribaucour e da lui dette *congruenze isotrope* (a sviluppabili isotrope). La superficie S_0 luogo dell'unico punto centrale su ogni raggio dicesi anche la *superficie media* della congruenza e sopra di essa cadono tutte le linee di stringimento delle rigate della congruenza, le quali sono tutte rigate principali.

Scelta la superficie media S_0 di una congruenza isotropa come superficie di partenza, si avrà identicamente $t = 0$, cioè

$$e = 0\,,\quad f + f' = 0\,,\quad g = 0\,,$$

ossia

$$dx\,d\,l + dy\,d\,m + dz\,d\,n = 0\,. \tag{12}$$

Questa formola dimostra che se si rappresenta la superficie media S_0 sulla sfera facendo corrispondere ad ogni punto di S_0 il punto (l, m, n) della sfera ove questa è incontrata dalla direzione del raggio, ogni elemento lineare di S_0 è perpendicolare al corrispondente della sfera e si ha il teorema di Ribaucour: *La superficie media S_0 di una congruenza isotropa corrisponde per ortogonalità d'elementi alla sfera.* Inversamente risulta dalla (12) che se una superficie S_0 corrisponde per ortogonalità d'elementi alla sfera, si forma una congruenza isotropa, di cui S_0 è superficie media, tirando per ogni punto di S_0 il raggio parallelo alla normale nel punto corrispondente alla sfera.

Un'altra notevole proprietà delle congruenze isotrope segue dalla formola (III) o (III*) pel parametro distributore P. Sussistendo in questo caso le proporzioni

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = \mathrm{E} : \mathrm{F} : \mathrm{G}\,,$$

ne seguono anche le altre

$$\delta : \delta' : \delta'' = \mathrm{E} : \mathrm{F} : \mathrm{G}\,,$$

come inversamente da queste ultime proporzioni seguono le superiori. Dunque: *nelle congruenze isotrope, ed in queste soltanto, il parametro distributore* P *ha, per ogni raggio, un medesimo valore per tutte le rigate che lo contengono.* Vale a dire che per due tali rigate aventi un raggio g a comune, i due paraboloidi delle normali sono congruenti per rotazione attorno a g. E siccome anche il punto centrale è il medesimo segue immediatamente dalla formola di Chasles il corollario: *In una congruenza isotropa due rigate aventi un raggio g a comune si tagliano lungo questo raggio sotto angolo costante.* In particolare vediamo di qui che: *Scelta ad arbitrio, entro la congruenza isotropa, una serie ∞^1 di rigate, ne esiste una seconda le cui rigate tagliano ortogonalmente quelle della prima serie lungo i raggi comuni* (1).

(1) Basta prendere il sistema di curve sferiche immagini delle rigate della prima serie e determinarne le trajettorie ortogonali che saranno le immagini delle rigate della seconda serie.

Queste proprietà di possedere infiniti doppi sistemi ortogonali di rigate è del resto caratteristica delle congruenze isotrope, poichè in tal caso il parametro distributore P deve essere indipendente dal rapporto $\frac{dv}{du}$.

Le congruenze isotrope godono inoltre di un'altra importante proprietà osservata da Ribaucour, che segue subito dalla formola (12). Sopra ogni raggio riportiamo a partire dal punto medio, dall'una e dall'altra parte un segmento *costante* t e consideriamo le due superficie S_1, S_2 luogo degli estremi e di rispettive equazioni parametriche

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1 = x + t\,l\,, & y_1 = y + t\,m\,, & z_1 = z + t\,n \\ x_2 = x - t\,l\,, & y_2 = y - t\,m\,, & z_2 = z - t\,n\,. \end{cases}$$

A causa della (12), si ha

$$S\,dx_1^2 = S\,dx_2^2\,,$$

cioè le due superficie sono applicabili, corrispondendosi i punti sullo stesso raggio. Viceversa se le due superficie (13) sono applicabili, corrispondendosi i punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) a distanza costante $2t$, e se le congiungenti le coppie di punti corrispondenti dànno ∞^2 direzioni, esse formano una congruenza isotropa.

§. 176.

Ascisse dei punti limiti.

Ritorniamo alle congruenze generali ed ai risultati ottenuti al §. 174 coll'introduzione di un particolare sistema di variabili, quelle che eguagliate a costanti dànno le rigate principali della congruenza. Vogliamo ora trovare in coordinate generali u, v la formola che dà le ascisse t_1, t_2 dei punti limiti.

L'equazione differenziale delle rigate principali si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme di Kummer, si scrive cioè

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv, & \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv, \\ e\,du + \frac{f+f'}{2}\,dv\,, & \frac{f+f'}{2}\,du + g\,dv \end{vmatrix} = 0\,,$$

o sviluppata

$$(\mathrm{A})\qquad \left(\frac{f+f'}{2}\,\mathrm{E} - e\,\mathrm{F}\right)du^2 + (g\,\mathrm{E} - e\,\mathrm{G})\,du\,dv + \left(g\,\mathrm{F} - \frac{f+f'}{2}\,\mathrm{G}\right)dv^2 = 0.$$

Scrivendo la (1) sotto la forma

$$t = -\,\frac{\left(e\,du + \frac{f+f'}{2}\,dv\right)du + \left(\frac{f+f'}{2}\,du + g\,dv\right)dv}{(\mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv)\,du + (\mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv)\,dv}\,,$$

si vede che quando il valore di $\frac{dv}{du}$ è tratto dalla (23), si può scrivere

$$t = -\,\frac{e\,du + \frac{f+f'}{2}\,dv}{\mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv} = -\,\frac{\frac{f+f'}{2}\,du + g\,dv}{\mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv}\,,$$

onde segue

$$(\mathrm{E}\,t + e)\,du + \left(\mathrm{F}\,t + \frac{f+f'}{2}\right)dv = 0\,,$$

$$\left(\mathrm{F}\,t + \frac{f+f'}{2}\right)du + (\mathrm{G}\,t + g)\,dv = 0\,.$$

Eliminando il rapporto $\frac{dv}{du}$ fra queste due, ne segue per t l'equazione di secondo grado

$$(\mathrm{B})\qquad (\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2)\,t^2 + [g\,\mathrm{E} - (f+f')\,\mathrm{F} + e\,\mathrm{G}]\,t + e\,g - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0\,,$$

le cui radici t_1, t_2 *sono appunto le ascisse dei punti limiti* L_1, L_2.

Si osservi in particolare la formola che dà *l'ascissa* t_0 *del punto medio* del raggio (u, v), cioè del punto medio fra i punti limiti t_1, t_2; abbiamo

$$(14)\qquad t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{(f+f')\,\mathrm{F} - g\,\mathrm{E} - e\,\mathrm{G}}{2\,(\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2)}\,.$$

Scriviamo ancora la formola che dà il prodotto delle ascisse dei punti limiti

$$t_1 t_2 = \frac{e g - \left(\frac{f + f'}{2}\right)^2}{E G - F^2} . \tag{15}$$

§. 177.

Legge di variazione del parametro distributore.

Per una congruenza non isotropa il parametro distributore P dipende, oltre che dalle coordinate u, v del raggio, dal rapporto $\frac{dv}{du}$ della speciale rigata che si considera per il raggio. Siccome la formola (III) o (III*) dà P nuovamente come quoziente di due forme differenziali quadratiche, di cui quella al denominatore definita (positiva), lo studio della legge di variazione di P col rapporto $\frac{dv}{du}$ si compie coi soliti mezzi dianzi invocati (§. 174). Il parametro P varierà tra un minimo P_1 ed un massimo P_2 corrispondenti ai due valori (reali) di $\frac{dv}{du}$ che sono le radici del Jacobiano delle due forme

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$\delta\,du^2 + 2\,\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2$$

eguagliato a zero, cioè della equazione

$$(C)\quad (E\,\delta' - F\,\delta)\,du^2 + (E\,\delta'' - G\,\delta)\,du\,dv + (F\,\delta'' - G\,\delta')\,dv^2 = 0 .$$

Il doppio sistema di rigate integrali della (C) si dirà quello delle rigate *distributrici* e i parametri estremi P_1, P_2 saranno quelli di queste rigate. Il parametro generico P si esprimerà per P_1, P_2 colla solita formola (Eulero-Hamilton)

$$P = P_1 \cos^2\omega + P_2 \operatorname{sen}^2\omega , \tag{16}$$

dove ω è l'angolo che la curva sferica immagine della rigata generica forma con quella immagine di una rigata distributrice, ossia l'angolo che i rispettivi piani centrali (piani tangenti nei punti centrali) fanno fra di loro (§. 173). Geometricamente la legge di variazione del parametro P contenuta nella (16) si rappresenterà mediante una *conica indicatrice* che sarà un'ellisse o un sistema d'iperbole

coniugate secondo che P_1, P_2 hanno egual segno o segno contrario; escludendo per ora il caso che P_1 o P_2 si annullino (raggi parabolici). Nel primo caso il segno di P sarà costante, cioè tutte le rigate pel raggio (ellittico) avranno senso concordante; nel secondo caso le rigate pel raggio (iperbolico) saranno parte destrorse e parte sinistrorse. In generale nella congruenza avremo due parti, una composta di raggi ellittici ed una di raggi iperbolici, confinanti ad una rigata di raggi parabolici.

Per studiare nel modo più semplice le relazioni fra le rigate principali e quelle distributrici, ovvero fra i loro piani tangenti nei rispettivi punti centrali che diciamo rispettivamente piani principali i primi (§. 174) e *piani distributori* i secondi, assumiamo a variabili u, v quelle principali che rendono $F = 0, f + f' = 0$ (§. 174) e prendiamo inoltre a superficie di partenza la superficie media (luogo dei punti medii) della congruenza, talchè dovendo aversi nella (14) $t_0 = 0$ risulterà insieme

$$F = 0 , \quad f + f' = 0 , \quad g\,E + e\,G = 0$$

Le formole (7) per $\delta, \delta', \delta''$ danno quindi

$$\delta = \frac{E\,f'}{\sqrt{E\,G}} , \quad \delta' = \frac{G\,e}{\sqrt{E\,G}} = -\frac{E\,g}{\sqrt{E\,G}} , \quad \delta'' = \frac{-G\,f}{\sqrt{E\,G}} ,$$

e l'equazione differenziale (C) delle rigate distributrici diventa

$$\delta'\,(E\,du^2 - G\,dv^2) = 0 ,$$

ossia (essendo $\delta' \neq 0$ perchè la congruenza si suppone non isotropa)

$$E\,du^2 - G\,dv^2 = 0 , \tag{17}$$

e questa può anche scriversi sotto la forma

$$e\,du^2 + g\,dv^2 = 0 . \tag{17*}$$

Sulla sfera immagine l'equazione (17) è quella delle bisettrici delle linee coordinate (ortogonali) u, v, onde segue:

I piani distributori sono quelli che biseccano i due piani principali.

Sotto la forma (17*) vediamo dalla formola (I) §. 173) che il corrispondente valore di t si annulla, cioè: *Il punto centrale per l'una e per l'altra superficie distributrice coincide col punto medio del raggio.* Le superficie principali invece che hanno i rispettivi punti centrali nei punti limiti hanno lo stesso parametro distributore

$$\text{(18)} \qquad P = \frac{\delta}{E} = \frac{\delta''}{G} = \frac{f'}{\sqrt{EG}}.$$

Dalla formola (16) risulta del resto la stessa cosa ove si diano ad ω i due valori corrispondenti

$$\omega = \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \frac{3\pi}{4},$$

e si vede inoltre che

$$P_1 + P_2 = 2\overline{P}.$$

Questa espressione $2\overline{P}$ dicesi anche il *parametro medio* della congruenza.

§. 178.

Fuochi e sviluppabili della congruenza.

Cerchiamo ora se fra le rigate della congruenza vi sono delle sviluppabili. Per una sviluppabile è nullo il parametro distributore e viceversa, onde vediamo: ***Esistono in una congruenza due serie (reali od immaginarie) di sviluppabili ed hanno l' equazione differenziale***

$$\text{(D)} \qquad \delta\, du^2 + 2\delta'\, du\, dv + \delta''\, dv^2 = 0,$$

cioè per le (7)

$$\text{(D*)} \quad (Ef' - Fe)\, du^2 + \{Eg + F(f' - f) - Ge\}\, du\, dv + (Fg - Gf)\, dv^2 = 0.$$

I punti centrali relativi a queste sviluppabili diconsi anche i *fuochi* del raggio e sono i punti (reali od immaginarii) ove il raggio tocca i corrispondenti spigoli di regresso delle due sviluppabili pel raggio.

Diconsi poi *piani focali* i due rispettivi piani tangenti delle sviluppabili, ossia i piani osculatori dei relativi spigoli di regresso. Dalla (16), eguagliando P a zero, si vede che le sviluppabili corrispondono ai valori di $\operatorname{tg}\omega$ dati da

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tg} = \pm\sqrt{-\frac{P_1}{P_2}}$$

e quindi i fuochi (le sviluppabili) sono reali nella regione dei raggi iperbolici, immaginarii in quella dei raggi ellittici (1). Siccome poi per la (18) i due valori di $\operatorname{tg}\omega$ sono eguali e di segno contrario, si vede che: *I piani bisettori dei due piani focali sono quelli stessi dei due piani principali e cioè i due piani distributori* (2).

Alla stessa equazione differenziale (D*) perveniamo anche in quest'altro modo, che ci fornisce nello stesso tempo le ascisse dei due fuochi. Supposto che sia $f(u, v) = 0$ l' equazione di una sviluppabile, indichiamo con ρ l' ascissa del punto F (fuoco) ove il raggio (u, v) tocca il corrispondente spigolo di regresso, e saranno

$$x_1 = x + \rho l, \quad y_1 = y + \rho m, \quad z_1 = z + \rho n$$

le coordinate di F. Differenziando queste formole, essendo u, v legate dalla supposta equazione $f(u, v) = 0$, i differenziali dx_1, dy_1, dz_1 dovranno riuscire proporzionali a l, m, n, e per ciò, indicando con λ un fattore infinitesimo di proporzionalità, avremo

$$dx + \rho\, dl = \lambda l, \quad dy + \rho\, dm = \lambda m, \quad dz + \rho\, dn = \lambda n.$$

Moltiplicando ordinatamente queste tre equazioni una prima volta per $\frac{\partial l}{\partial u}, \frac{\partial m}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial u}$ una seconda per $\frac{\partial l}{\partial v}, \frac{\partial m}{\partial v}, \frac{\partial n}{\partial v}$ e sommando si ottengono le due equazioni (3)

$$\begin{cases} e\, du + f\, dv + \rho(E\, du + F\, dv) = 0 \\ f'\, du + g\, dv + \rho(F\, du + G\, dv) = 0. \end{cases}$$

Da queste eliminando ρ si ottiene nuovamente l' equazione diffe-

(1) In particolare per una congruenza isotropa, essendo $P_1 = P_2$ la (19) dà $\operatorname{tg}\omega = \pm i$ e dimostra che: *in una congruenza isotropa le sviluppabili sono isotrope, cioè circoscritte al circolo assoluto (e viceversa)*. La stessa cosa segue dalla (D*) che si riduce alla $E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = 0$, appartenente alle linee di lunghezza della sfera (generatrici).

(2) Lo stesso risulta direttamente formando dalla (18) l' equazione differenziale delle bisettrici delle linee sferiche integrali della (18), che è data dall' eguagliare a zero il Jacobiano (§. 47)

$$\begin{vmatrix} E\, du + F\, dv & F\, du + G\, dv \\ \delta\, du + \delta'\, dv & \delta'\, du + \delta''\, dv \end{vmatrix},$$

e coincide quindi con quella delle rigate distributrici.

(3) Moltiplicando per l, m, n e sommando si ottiene il valore di $\lambda = -\delta / d\sigma$.

renziale (D) delle sviluppabili. Ove si elimini invece il rapporto $\frac{dv}{du}$, si ha per ρ l'equazione di secondo grado

$$\begin{vmatrix} E\rho + e, & F\rho + f \\ F\rho + f', & G\rho + g \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(E) \qquad (EG - F^2)\rho^2 + [gE - (f + f')F + eG]\rho + eg - ff' = 0.$$

Le due radici ρ_1, ρ_2 di questa equazione sono manifestamente le ascisse dei fuochi, e siccome essa coincide, nei due primi coefficienti, colla (B) che dà le ascisse dei punti limiti, vediamo che

$$\rho_1 + \rho_2 = t_1 + t_2,$$

cioè: *Il punto medio fra i fuochi coincide con quello fra i punti limiti, cioè col punto medio del raggio.*

Inoltre dal confronto delle (B) e (E) risulta

$$\rho_1 \rho_2 = t_1 t_2 + \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)},$$

quindi

$$(t_1 - t_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{(f - f')^2}{EG - F^2}.$$

Se con $2d$ si indica la distanza dei punti limiti, con 2δ quella dei due fuochi, questa si scrive

$$(F) \qquad d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Prendendo nuovamente a variabili u, v le principali e a superficie di partenza la superficie media risulta dalla (18) pel valore comune P del parametro delle rigate principali

$$P = \sqrt{d^2 - \delta^2},$$

o

$$(19) \qquad 2P = \sqrt{4d^2 - 4\delta^2}:$$

Il parametro medio di una congruenza è la radice quadrata della differenza fra i quadrati delle distanze dei punti limiti e dei fuochi.

Ponendo nella formola (11) di Hamilton

$$t_1 = -d, \quad t_2 = du,$$

questa diventa

$$t = -d\cos 2\theta$$

e dimostra che, mentre θ cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, il punto centrale percorre il segmento fra i punti limiti da L_1 a L_2, e cade nel punto medio quando $\theta = \frac{\pi}{4}$. In generale per valori complementari di θ l'ascissa t assume valori eguali e di segno contrario, cioè i due punti centrali corrispondenti sono simmetrici rispetto al punto medio. In particolare pei due fuochi

$$\rho_1 = -\delta, \quad \rho_2 = \delta,$$

indicando con θ_1, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ i corrispondenti valori di θ, si ha

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\delta}{d}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1.$$

Ma l'angolo σ dei due piani focali è dato da $\sigma = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - 2\theta_1$,

ed abbiamo quindi:

Le formole

$$(21) \qquad \operatorname{sen}\sigma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\sigma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}$$

definiscono l'angolo σ fra i due piani focali.

§. 179.

Superficie focali. — Caso in cui coincidono.

In relazione con una data congruenza di raggi vi sono da considerare cinque superficie intimamente legate con essa e sono:

1.° la *superficie media* (luogo dei punti medii)
2.° le due *superficie limiti*, luogo dei punti limiti
3.° le due *superficie focali*, luogo dei fuochi.

Le prime tre sono sempre reali, le due ultime soltanto per le congruenze a sviluppabili reali (nella regione dei raggi iperbolici) (1).

Supposto dapprima le due superficie focali S_1, S_2 distinte, la congruenza è formata dalle loro tangenti comuni, ed ogni raggio della congruenza tocca la prima falda S_1 nel fuoco F_1, la seconda nel secondo fuoco F_2. Sulla prima falda S_1 le linee Γ_1 inviluppate dai raggi della congruenza sono gli spigoli di regresso del primo sistema di sviluppabili e diconsi le *caustiche* di questa falda focale; similmente sulla seconda falda S_2 le caustiche Γ_2 sono gli spigoli di regresso del secondo sistema di sviluppabili: *I piani focali per ogni raggio sono i due piani tangenti in* F_1, F_2 *alle due superficie focali* S_1, S_2 *od anche i piani osculatori delle caustiche sull' altra falda focale.*

È anche da osservare che, in ogni caso, le sviluppabili della congruenza tagliano ciascuna delle superficie focali secondo un sistema coniugato.

Ed ora prendiamo in considerazione il caso delle congruenze a superficie focali coincidenti (a sviluppabili coincidenti) ossia delle *congruenze a raggi tutti parabolici.* In tal caso le linee caustiche dell' unica superficie focale coincidono con quelle a tangenti coniugate, cioè sono le asintotiche di un sistema. E siccome sussiste manifestamente la proprietà inversa si ha: *Le congruenze a raggi parabolici sono quelle che si formano conducendo le tangenti alle asintotiche di un sistema di una qualunque superficie.*

In queste congruenze sopra ogni raggio i due fuochi coincidono nel punto medio, ed ora andiamo a dimostrare che: *Per la distanza* $2d$ *dei punti limiti sussiste la notevole formola*

$$2d = \frac{1}{\sqrt{-K}}, \quad (2) \tag{22}$$

indicando con K *la curvatura della superficie focale.*

Prendasi a superficie di partenza la detta superficie focale, e a linee coordinate $v =$ cost.te le asintotiche in considerazione, a linee $u =$ cost.te le trajettorie ortogonali. Pel ds^2 della superficie abbiasi

$$ds^2 = E' du^2 + G' dv^2 ,$$

(1) Una sesta superficie, considerata da Ribaucour, è l' *inviluppata media* della congruenza, cioè l' inviluppo dei piani normali ai raggi nei rispettivi punti medi.

(2) Si può anche scrivere, pel teorema di Beltrami Enneper: $2d = iT$, essendo T il raggio di torsione dell' asintotica.

indi siccome le $v =$ cost.te sono asintotiche

$$D = 0 , \quad \frac{D'^2}{E' G'} = -K .$$

Poniamo

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial x}{\partial u} , \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial y}{\partial u} , \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial x}{\partial v} , \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial y}{\partial v} , \quad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

e dalle formole fondamentali (I) §. 65 avremo

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} X_2 , \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E'}} X .$$

e oseni di direzione l, m, n del raggio essendo appunto X_1, Y_1, Z_1, per le quantità fondamentali di Kummer (§. 172) troviamo

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} \right)^2 , \quad F = -\frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u} , \quad G = \left(\frac{1}{\sqrt{E'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u} \right)^2 + \frac{D'^2}{E'}$$

$$E G - F^2 = \frac{D'^2}{E' G'} \left(\frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} \right)^2 ,$$

e inoltre

$$e = 0 , \quad f = -\frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} , \quad f' = 0 , \quad g = \sqrt{\frac{G'}{E'}} \frac{\partial \sqrt{G'}}{\partial u}$$

$$e g - \left(\frac{f + f'}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} \right)^2 .$$

Ed ora la (B) §. 176, essendo nullo il coefficiente medio, dà

$$\frac{1}{t^2} = 4 \frac{D'^2}{E' G'} ,$$

cioè

$$\frac{1}{(2d)^2} = \frac{D'^2}{E' G'} = -K ,$$

che è appunto la relazione (22).

§. 180.

Congruenze normali. — Teorema di Beltrami. Teorema di Malus-Dupin.

Un sistema di raggi si dirà un sistema o una *congruenza normale* se esso è costituito dalle normali di una e quindi di ∞^1 superficie (parallele). Se la congruenza è normale, le due falde focali sono le due falde dell'evoluta delle superficie ortogonali ai raggi (evolventi) e i due piani focali coincidono coi piani principali, e sono ortogonali fra loro. Viceversa se i due piani focali sono ortogonali, le caustiche sopra ciascuna falda focale sono linee geodetiche, perchè il loro piano osculatore in ogni punto è normale alla superficie, e quindi (§. 155) la congruenza è normale: *La condizione necessaria e sufficiente per la normalità della congruenza è che i piani focali siano fra loro ortogonali (che i fuochi coincidano coi punti limiti).*

Tutto ciò si conferma analiticamente come segue. La congruenza è normale se è possibile scegliere nelle formole (1) per t una tale funzione di u, v che si abbia

$$l\,d\xi + m\,d\eta + n\,d\zeta = 0\,,$$

il che dà

$$dt = -(l\,dx + m\,dy + n\,dz)\,,$$

ossia

$$dt = -(U\,du + V\,dv)\,, \tag{23}$$

avendo posto

$$U = S\,l\frac{\partial x}{\partial u}, \quad V = S\,l\frac{\partial x}{\partial v}\,. \tag{23*}$$

Occorre adunque e basta che il secondo membro della (23) sia un differenziale esatto, cioè che si abbia

$$\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} = f' - f = 0\,.$$

La congruenza è adunque normale allora ed allora soltanto quando si ha $f' = f$.

Questa condizione esprime appunto per la (F) che i fuochi coincidono coi punti limiti:

$$d = \delta \qquad \sigma = \frac{\pi}{2}\,,$$

e viceversa da una qualunque di queste segue $f' = f$. Supposta questa condizione soddisfatta, dalla (23) avremo

$$t = U - \int (U\,du + V\,dv)\,, \ (C \text{ costante}) \tag{24}$$

e con questo valore di t le (1) daranno le superficie ortogonali ai raggi della congruenza.

La condizione di normalità della congruenza

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}$$

si può porre sotto un'altra forma che dà luogo ad interessanti conseguenze segnalate dal Beltrami.

Riferiamo la superficie S di partenza ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee ed abbiasi pel suo ds^2

$$ds^2 = E'\,du^2 + 2\,F'\,du\,dv + G'\,dv^2\,.$$

Indicando con α, β gli angoli che il raggio (u, v) forma colle rispettive linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$, $u = \text{cost.}^{te}$, abbiamo

$$\cos\alpha = S\,\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial x}{\partial u}\,l = \frac{U}{\sqrt{E'}},$$

$$\cos\beta = S\,\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial x}{\partial v}\,l = \frac{V}{\sqrt{G'}},$$

e la condizione di normalità si scrive

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E'}\cos\alpha) = \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G'}\cos\beta)\,, \tag{25}$$

mentre la (24) diventa

$$t = U - \int (\sqrt{E'}\cos\alpha\,du + \sqrt{G'}\cos\beta\,dv)\,. \tag{26}$$

Queste formole contengono soltanto i coefficienti E', G' dell'elemento lineare e gli angoli α e β, e perciò se la superficie si deforma per flessione e gli angoli α e β restano fissi, la condizione di norma-

lità resta sempre soddisfatta e il valore (26) di t resta pure invariato. Ne risulta l'importante teorema di Beltrami:

Se i raggi di una congruenza normale, uscenti dai punti di una superficie S, *s'immaginano terminati ad una delle superficie ortogonali* Σ, *deformando comunque per flessione la superficie* S, *la quale trasporti seco, invariabilmente legati agli elementi del piano tangente i raggi stessi, il luogo dei medesimi estremi sarà sempre una superficie ortogonale ai raggi.*

Dalla condizione di normalità per una congruenza, posta sotto la forma (25), si deduce facilmente il teorema di Malus-Dupin:

Se una congruenza normale di raggi luminosi subisce un numero qualunque di riflessioni o di rifrazioni, essa rimane sempre una congruenza normale.

Basta dimostrare il teorema per una sola riflessione o rifrazione sopra una superficie incidente S. Prendiamo su S a linee $v = \text{cost.}^{te}$ quelle che sono normali ai raggi della congruenza, a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le loro trajettorie ortogonali (inviluppate dalle projezioni ortogonali dei raggi sui piani tangenti). Avremo

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

essendo γ l'angolo del raggio colla normale alla S. La condizione di normalità diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\,\operatorname{sen}\gamma) = 0$$

e se è soddisfatta, continua ad esserlo cangiando γ in γ' secondo la legge di rifrazione

$$\operatorname{sen}\gamma' = n \operatorname{sen}\gamma \quad (n \text{ costante});$$

per $n = -1$ si ha il caso della riflessione.

§. 181.

Congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate principali.

Ritorniamo alle congruenze generali per trattare due problemi che possono considerarsi come generalizzazione di quello delle superficie con assegnata immagine sferica delle linee di curvatura, ossia delle congruenze normali con assegnata immagine sferica delle sviluppabili. Per una congruenza normale le sviluppabili della congruenza coincidono colle rigate principali, mentre nel caso di una congruenza generale i due sistemi di rigate sono distinti. Qui avremo adunque da trattare due diversi problemi:

1.° *Determinare le congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate principali.*

2.° *Determinare le congruenze con assegnata immagine sferica delle sviluppabili.*

Trattiamo nel presente paragrafo il primo problema.

Il sistema di linee (u, v) che sulla sfera sono le immagini delle superficie principali è un sistema ortogonale, e sia

$$ds'^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

il corrispondente elemento lineare sferico. Prendiamo a superficie di partenza la superficie media S_0, talchè le incognite del nostro problema sono le coordinate x, y, z del punto medio sul raggio (u, v), mentre supponiamo note in funzione di u, v le coordinate X, Y, Z dal punto (u, v) sulla sfera, cioè i coseni di direzione l, m, n del raggio.

Per ipotesi abbiamo

$$F = 0, \quad f + f' = 0, \quad G\,e + E\,g = 0,$$

e indicando con $2r$ la distanza dei punti limiti dalla (B) §. 176 risulta

$$e\,g = -r^2 E\,G,$$

indi

$$e = r\,E, \quad g = -r\,G. \tag{27}$$

Dalle formole generali (A) §. 157 per una superficie riferita alle linee di curvatura, applicate al caso particolare della sfera (col porvi $r_1 = r_2 = 1$) abbiamo:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1, \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial r}X_1 - \sqrt{E}X, \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}X_1 \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_2, \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_2, \qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_1 - \sqrt{G}\,X \end{cases}$$

e dalle (27)

$$(29)\qquad S\frac{\partial x}{\partial u}X_1 = r\sqrt{E}\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}X_2 = -r\sqrt{G}\,.$$

Introduciamo ora oltre r una nuova funzione incognita φ ponendo

$$(29^*)\qquad f = S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = \varphi\sqrt{EG}\,,\quad f' = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\varphi\sqrt{EG}\,;$$

il significato geometrico di φ risulta subito dalla (B) §. 178 che dà

$$\rho^2 = r^2 - \rho^2\,,$$

dove ρ (reale o puramente immaginaria) è la semidistanza dei fuochi. Così abbiamo dalle (29*)

$$(30)\qquad S\frac{\partial x}{\partial u}X_2 = -\varphi\sqrt{E}\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}X_1 = \varphi\sqrt{G}\,,$$

e da queste combinate colle (29), si vede che possiamo porre

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u} = r\sqrt{E}\,X_1 - \varphi\sqrt{E}\,X_2 + AX\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \varphi\sqrt{G}\,X_1 - r\sqrt{G}\,X_2 + BX\end{cases}$$

colle analoghe per y, z, essendo A, B due convenienti coefficienti. Ma scrivendo le condizioni d'integrabilità delle due equazioni precedenti si trova subito

$$B = \frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial \log E}{\partial v}r - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$-A = \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \log G}{\partial v}r - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = 2\varphi\sqrt{EG}\,,$$

la quale ultima per le due prime e badando alla formola

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = \sqrt{EG}\,.\,\Delta_2\varphi$$

dà come unica condizione a cui debbono soddisfare le due funzioni r e φ di u, v la seguente

$$(G)\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}r = \frac{1}{2}\sqrt{EG}\,(\Delta_2 r + 2\varphi)\,.$$

Soddisfatta questa, le formole

$$(31)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,(r\,X_1 - \varphi\,X_2) - \left\{\dfrac{\partial r}{\partial u} + \dfrac{\partial \log G}{\partial u}r - \sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}X\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\varphi\,X_1 - r\,X_2) + \left\{\dfrac{\partial r}{\partial v} + \dfrac{\partial \log E}{\partial v}r - \sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right\}X\end{cases}$$

dànno per quadrature la superficie media della congruenza, che risulta così determinata.

Si vede che il problema proposto ammette una grande arbitrarietà di soluzioni, potendosi prendere ad arbitrio una delle due funzioni r, φ, purchè si prenda per l'altra una soluzione della corrispondente equazione del secondo ordine (G). È anche da osservare che, essendo le formole superiori lineari ed omogenee in r, φ, la conoscenza di due particolari congruenze soluzioni del problema ne procura subito infinite altre. Basta infatti congiungere tutte le coppie di punti corrispondenti delle due superficie medie (a raggi paralleli) e dividere *questi* ∞^2 *segmenti in un rapporto costante*; il punto di divisione descrive un'altra superficie media rispondente al problema.

§. 182.

Applicazione alle congruenze isotrope ed alle congruenze pseudosferiche.

a) Le formole sopra stabilite, applicate alle congruenze isotrope caratterizzate da $r = 0$, fanno dipendere la ricerca di queste congruenze dall'equazione del secondo ordine

$$(32)\qquad \Delta_2\varphi + 2\varphi = 0\,.$$

Ad ogni soluzione di questa corrisponde una congruenza isotropa definita mediante la sua superficie media dalle formole

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\sqrt{E}\,\varphi\,X_2 + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\,X \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,\varphi\,X_1 - \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\,X, \end{cases}$$

le quali definiscono dunque, mediante le soluzioni φ delle (32), le superficie che corrispondono per ortogonalità d'elementi alla sfera (§. 175),

Sappiamo d'altronde, dal §. 95, che la (32) è l'equazione tangenziale delle superficie d'area minima; la relazione che intercede così fra le congruenze isotrope e le superficie minime viene espressa geometricamente dal teorema di Ribaucour: *L'inviluppata media* (1) *di una congruenza isotropa è una superficie d'area minima.*

Per dimostrarlo indichiamo con

$$W = S\,x\,X$$

la distanza del piano medio dall'origine, e introduciamo altresì le altre due distanze dall'origine dei piani condotti pel raggio normalmente alle direzioni delle linee sferiche coordinate:

$$W_1 = S x X_1,\quad W_2 = S x X_2$$

Formando le derivate di W, W_1, W_2 colle (33) e le (28) si trova il sistema

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{E}\,W_1 + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \dfrac{\partial W_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,W_2 - \sqrt{E}\,W, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial W_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,W_1 - \sqrt{E}\,\varphi \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \sqrt{G}\,W_2 - \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u},\quad \dfrac{\partial W_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\,\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,W_2 + \sqrt{G}\,\varphi, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial W_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\,\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,W_1 - \sqrt{G}\,W, \end{cases}$$

(1) Per la definizione d'inviluppata media Cf. nota §. 179 (pag. 472).

e di qui costruendo

$$\Delta_2 W = \frac{1}{\sqrt{E}\,G}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\partial W}{\partial v}\right)\right\}$$

si trova subito

$$\Delta_2 W = -2W,$$

ciò che dimostra il teorema di Ribaucour.

Inversamente se supponiamo data W, soluzione della: $\Delta_2 W + 2W = 0$, e riguardiamo nella (34) come incognite le funzioni φ, W_1, W_2 queste formano un sistema completamente integrabile e ne risulta che φ soddisfa alla (32). Dunque: *Ogni superficie d'area minima è inviluppata media di* ∞^3 *congruenze isotrope.*

Un'altra questione che ci riporta alle congruenze isotrope (o alle normali) è la seguente: *Quando è che nella congruenza esistono due serie di rigate intersecantisi ad angolo retto lungo i raggi comuni?* Assumendole come rigate di riferimento (u, v) dovrà essere soddisfatta, *per qualunque* t, la condizione d'ortogonalità

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} + t\dfrac{\partial X}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} + t\dfrac{\partial Y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial u} + t\dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} + t\dfrac{\partial X}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial v} + t\dfrac{\partial Y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} + t\dfrac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0,$$

ed eseguendo

$$F t^2 + (f + f')\,t + S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} - S\,X\,\frac{\partial x}{\partial u}\,.\,S\,X\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

da cui

$$F = 0,\quad f + f' = 0,\quad S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = S\,X\,\frac{\partial x}{\partial u}\,.\,S\,X\,\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Le due prime dicono che le rigate u, v sono le principali e la terza, assumendo a superficie di partenza la superficie media ed applicando la formola (31), ci dà $r\varphi = 0$. Nel caso $\varphi = 0$ la congruenza è normale e le u, v sono le sue sviluppabili; nell'altro $r = 0$ la congruenza è isotropa, ed allora una delle due serie di rigate può assumersi affatto ad arbitrio (§. 175).

b) Una seconda classe di congruenze, di cui ci occuperemo in seguito più da vicino, è quella delle congruenze che hanno costanti

insieme la distanza dei punti limiti e quella dei fuochi (reali od immaginarii), o ciò che è lo stesso la distanza dei fuochi e l'angolo dei piani focali: le diciamo *congruenze pseudosferiche* (V[1] più oltre §. 185). Applicando le formole del paragrafo precedente, basta supporre r e φ due costanti

$$r = a, \quad \varphi = b,$$

e la (G) diventa

$$\frac{\partial^2 \lg \sqrt{EG}}{\partial u\, \partial v} = \frac{b}{a}\sqrt{EG},$$

che pel prodotto $\sqrt{EG}$ è la nota equazione integrata da Liouville. Dunque: *Le immagini sferiche delle rigate principali in una congruenza pseudosferica dànno al ds'^2 la forma*

$$ds'^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

dove $\sqrt{EG}$ è una soluzione dell' equazione di Liouville

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{EG}}{\partial u\, \partial v} = k\sqrt{EG}\left(k = \frac{b}{a}\right).$$

In particolare le congruenze pseudosferiche *normali* sono quelle delle normali alle superficie che hanno costante la differenza dei raggi principali di curvatura; esse corrispondono a supporre nelle formole precedenti $b = 0$, o $k = 0$, onde

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{EG}}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Senza alterare la generalità si può prendere

$$\sqrt{EG} = 1,$$

ossia

$$ds'^2 = \frac{du^2}{x^2} + x^2\,dv^2, \tag{35}$$

il che corrisponde appunto (§, 165, teorema C)) alle immagini delle linee di curvatura delle superficie $r_2 - r_1 = \text{cost.}^{te}$. Osserveremo da ultimo che in questo caso di $\sqrt{EG} = \text{cost.}^{te}$ si soddisfa alla (G) prendendo per r una costante qualunque e per φ una soluzione della equazione tangenziale delle superficie minime

$$\Delta_2 \varphi + 2\varphi = 0.$$

Così le superficie d'area minima dànno luogo ad infinite congruenze che hanno costante la distanza dei punti limiti e per immagine sferica delle rigate principali un sistema (u, v) della forma caratteristica (35).

§. 183.

Congruenze riferite alle sviluppabili.

Veniamo ora al secondo problema proposto al §. 181 per esporne la trattazione data da Guichard (1).

Sia

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l' assegnato elemento lineare sferico, essendo le linee (u, v) le immagini delle sviluppabili distinte (reali od immaginarie) delle congruenze.

Prendiamo anche qui a superficie di partenza la superficie media della congruenza, assumendo per incognite le coordinate x, y, z del punto medio del raggio e la distanza dei due fuochi che indicheremo con 2ρ. Le coordinate dei due fuochi F_1, F_2 saranno

F_1) $\qquad x_1 = x + \rho X, \quad y_1 = y + \rho Y, \quad z_1 = z + \rho Z$

F_2) $\qquad x_2 = x - \rho X, \quad y_2 = y - \rho Y, \quad z_2 = z - \rho Z,$

avendo di nuovo indicato coi soliti simboli X, Y, Z i coseni di direzione l, m, n del raggio. Se supponiamo che il primo fuoco F_1 corrisponda alle linee $v = \text{cost.}^{te}$ ed il secondo F_2 alle linee $u = \text{cost.}^{te}$, dovremo avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (x + \rho X)}{\partial u} = h X, & \dfrac{\partial (y + \rho Y)}{\partial u} = h Y, & \dfrac{\partial (z + \rho Z)}{\partial u} = h Z \\ \dfrac{\partial (x - \rho X)}{\partial v} = l X, & \dfrac{\partial (y - \rho Y)}{\partial v} = l Y, & \dfrac{\partial (z - \rho Z)}{\partial v} = l Z, \end{cases}$$

(1) *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées a leurs développables* (Annales de l' Ecole Normale Supérieure t. VI 3e série).

dove h, l sono convenienti fattori di proporzionalità. Se diamo a queste formole la forma

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(h - \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\right) X - \rho \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \left(l + \dfrac{\partial \rho}{\partial v}\right) X + \rho \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, indi costruiamo la condizione d' integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,$$

ricordando che si ha

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v} - F X,$$

dove per brevità abbiamo posto

$$(37)\qquad a = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

troviamo

$$l = -2\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + a\rho\right), \quad h = 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial l}{\partial u} - 2\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + 2F = 0.$$

Quest' ultima colla sostituzione dei valori h, l dati dalle due prime diventa

$$(IV)\qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + F\right)\rho = 0,$$

mentre le (36) si mutano nelle seguenti

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + 2b\rho\right) X - \rho \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + 2a\rho\right) X + \rho \dfrac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Viceversa, se ρ è una soluzione della equazione del secondo ordine (IV) della forma di Laplace, le (37) dànno per quadrature una corrispondente congruenza che ha l'assegnata immagine sferica delle sviluppabili. Ricordiamo che al §. 97, trattando della determinazione in coordinate tangenziali di una superficie con assegnata immagine sferica di un sistema coniugato, abbiamo visto che il problema dipende dall' altra equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\, \partial v} - a\frac{\partial W}{\partial u} - b\frac{\partial W}{\partial v} + F W = 0,$$

la quale non è altro che l' *aggiunta* della (IV). E siccome l' integrazione di un' equazione di Laplace o della sua aggiunta sono problemi analiticamente equivalenti, così sono anche equivalenti i due problemi geometrici corrispondenti.

§. 184.

Elementi delle due falde S_1, S_2 della superficie focale.

Andiamo ora a calcolare i coefficienti delle due forme fondamentali per le due falde focali, che indicheremo rispettivamente con

$$E_1,\ F_1,\ G_1;\quad D_1,\ D_1',\ D_1''$$

per la prima falda e con

$$E_2,\ F_2,\ G_2;\quad D_2,\ D_2',\ D_2''$$

per la seconda. Ma basterà calcolare i primi valori, chè i secondi se ne dedurranno scambiando u con v.

Dalle formole

$$x_1 = x + \rho X, \text{ ecc.}$$

derivando coll' osservare le (37) abbiamo subito

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = 2\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho\right) X \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -2a\rho X + 2\rho \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

da cui formando

$$E_1 = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2,\quad F_1 = S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad G_1 = S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2$$

risulta

$$(39)\quad \begin{cases} E_1 = 4\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)^2,\ F_1 = -4a\rho\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right),\ G_1 = 4a^2\rho^2 + 4\rho^2 G \\ E_1 G_1 - F_1^2 = 16\rho^3 G\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)^2. \text{ (1)} \end{cases}$$

Se ora indichiamo con X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione della normale a S_1, abbiamo dalle (38)

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{G}\sqrt{EG - F^2}}\left(G\frac{\partial X}{\partial u} - F\frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

e di qui possiamo ora calcolare

$$(40)\quad \begin{cases} D_1 = -S\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{2\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)}{\sqrt{G}\sqrt{EG - F^2}} S X\dfrac{\partial}{\partial u}\left(F\dfrac{\partial X}{\partial v} - G\dfrac{\partial X}{\partial u}\right) \\ D_1' = -S\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{2\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho\right)}{\sqrt{G}\sqrt{EG - F^2}} S X\dfrac{\partial}{\partial v}\left(F\dfrac{\partial X}{\partial v} - G\dfrac{\partial X}{\partial u}\right) \\ D_1'' = -S\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{2\rho}{\sqrt{G}\sqrt{EG - F^2}} S\left(\dfrac{\partial X}{\partial v} - aX\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(F\dfrac{\partial X}{\partial v} - G\dfrac{\partial X}{\partial u}\right) \end{cases}$$

---

(1) Quest' ultima formola dimostra che la prima falda focale si riduce ad una curva solo quando

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho = 0$$

e perciò anche per la (IV)

$$\frac{\partial a}{\partial u} + F = a b$$

Se ambedue le falde focali si riducono a curve Γ, Γ_1 avremo insieme

$$(a)\quad \frac{\partial\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}}{\partial u} + F = \frac{\partial\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}{\partial v} + F = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$$

e viceversa ogni coppia Γ, Γ_1 di curve, prese ad arbitrio nello spazio, dà luogo ad

nel modo seguente, tenendo presenti le formole (IV) §. 186:

$$(40^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial v} - E X \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial v} - F X \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial X}{\partial v} - G X. \end{cases}$$

Ne segue

$$S X\frac{\partial}{\partial u}\left(F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}\right) = EG - F^2$$

$$S X\frac{\partial}{\partial v}\left(F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}\right) = 0,$$

ed abbiamo inoltre

$$S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}\right) = G\frac{\partial F}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial v} + \left[\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right]F - \left[\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right]G =$$

$$= G\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u},$$

la quale ultima, osservando la formola (6) §. 99 (pag. 270) per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee sferiche $u = \text{cost.}^{te}$, può anche scriversi

---

un sistema sferico (u, v) pel quale valgono le (a). Confrontando questo risultato coi teoremi generali al §. 88 per la rappresentazione sferica delle asintotiche di una superficie, si ha la proposizione seguente: *Prese due curve arbitrarie Γ, Γ_1 nello spazio, si considerino i coni che dai punti di ciascuna curva projettano l'altra ed i coni paralleli condotti pel centro della sfera rappresentativa. Questi tagliano la sfera in un sistema di linee che sono le immagini delle asintotiche di una superficie Σ, la cui curvatura K, cangiata di segno, eguaglia in ogni punto la quarta potenza della distanza fra i due punti corrispondenti di Γ, Γ_1.*

$$S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(F\frac{\partial X}{\partial v}-G\frac{\partial X}{\partial u}\right)=\frac{G\sqrt{G}\sqrt{EG-F^2}}{\rho_u}.$$

Dopo di ciò le formole (40) ci dànno

$$D_1=\frac{2\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right),\quad D_1'=0,\quad D_1''=\frac{2G\rho}{\rho_u},$$

od anche, introducendo l'angolo ω delle linee coordinate, che misura altresì l'angolo dei due piani focali (1) e ricordando (§. 100) che si ha

$$-\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}=\frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}b,$$

potremo scrivere le formole definitive:

$$(41)\quad D_1=2\sqrt{E}\operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right),\quad D_1'=0,\quad D_1''=-\sqrt{G}\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+b\sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{sen}\omega\right)$$

Affatto analogamente a queste ed alle (39), avremo per la seconda falda:

$$(39^*)\quad \begin{cases} E_2=4b^2\rho^2+4E\rho^2,\quad F_2=-4b\rho\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right),\quad G_2=4\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)^2 \\ E_2G_2-F_2^2=16\rho^2E\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)^2 \end{cases}$$

$$(41^*)\quad D_2=-2\sqrt{E}\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+a\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{sen}\omega\right),\quad D_2'=0,\quad D_2''=2\sqrt{G}\operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)$$

Si osservi che le formole $D_1'=0$, $D_2'=0$ esprimono il fatto evidente che sulle due falde focali il sistema (u, v) è un sistema coniugato

Indicando infine con K_1, K_2 le curvature delle due falde focali

$$K_1=\frac{D_1D_1''-D_1'^2}{E_1G_1-F_1^2},\quad K_2=\frac{D_2D_2''-D_2'^2}{E_2G_2-F_2^2},$$

(1) Cf. il teorema generale alla fine del §. 173.

abbiamo immediatamente dalle precedenti le formole:

$$(42)\quad \begin{cases} K_1=-\dfrac{\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+b\sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{sen}\omega\right)}{4\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)} \\ K_2=-\dfrac{\sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+a\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{sen}\omega\right)}{4\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)} \end{cases}$$

e a causa delle (41), (41*), il prodotto delle due curvature si può scrivere

$$(42^*)\quad K_1K_2=\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{2\rho}\right)^4\frac{D_2D_2''}{D_1D_1''}.$$

§. 185.

Applicazione alle congruenze W ed alle congruenze pseudosferiche.

In generale, come nel caso delle congruenze normali, chiameremo *congruenze* W quelle sulle cui falde focali si corrispondono le linee asintotiche (1). Affinchè ciò accada è necessario e basta che si abbia

$$D_1\ D_1':D_1''=D_2:D_2':D_2'',$$

cioè per le (41), (41*)

$$D_1D_2''=D_2D_1'',$$

onde risulta per la (42*)

$$K_1K_2=\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{2\rho}\right)^4;$$

e siccome, per la formola (21) §. 179, indicando con $2d$ la distanza

(1) Naturalmente come punti corrispondenti sulle due falde si riguardano i due fuochi F_1, F_2 sopra un medesimo raggio.

dei punti limiti si ha

$$2d = \frac{2\rho}{\operatorname{sen}\omega};$$

la formola precedente ci dà l'importante teorema di Ribaucour:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sulle due falde focali di una congruenza rettilinea si corrispondano le linee asintotiche (affinchè sia una congruenza W*) è che il prodotto delle curvature delle due falde in punti corrispondenti eguagli l'inversa della quarta potenza della distanza fra i punti limiti* (1).

Questo teorema, nel caso particolare delle congruenze normali, ci è già noto e coincide colla proposizione di Halphen al §. 160 per le due falde dell'evoluta di una superficie W. E si osserverà ancora che, sebbene le formole del paragrafo precedente presuppongano distinte le sviluppabili della congruenza, il teorema vale però anche nel caso di una congruenza parabolica secondo la formola (22) §. 179, mentre d'altronde coincidendo per una tale congruenza le due falde focali, essa è da riguardarsi come una congruenza W.

Se ritorniamo ora alle congruenze pseudosferiche (§ 182), per le quali sono insieme costanti ρ ed ω, le (42) ci dimostrano che si ha

$$K_1 = K_2 = -\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{4\rho^2} = -\frac{1}{(2d)^2}.$$

Abbiamo dunque il teorema: *In ogni congruenza pseudosferica le due falde focali sono superficie pseudosferiche, di raggio eguale alla distanza dei punti limiti.*

---

(1) La stessa formola (42*) si può applicare ad un'altra classe di congruenze (Waelsch) caratterizzate dalla proprietà che alle asintotiche dell'una falda focale corrisponda un sistema coniugato sull'altra.

Questo si traduce nella relazione

$$D_1 D_2'' + D_2 D_1'' = 0$$

e la (42*) dà come proprietà *caratteristica* di queste congruenze la relazione

$$K_1 K_2 = -\left(\frac{1}{2d}\right)^2.$$

È notevole che mentre questa formola, come l'altra di Ribaucour sono di natura *metrica*, la definizione invece della congruenza W, come delle attuali di Waelsch è di natura projettiva.

E siccome la condizione di Ribaucour

$$K_1 K_2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^4$$

è qui manifestamente soddisfatta, vediamo che le congruenze pseudosferiche sono tutte congruenze W. Ma di più, se dalla (39), (39*) calcoliamo la differenza fra i quadrati degli elementi lineari delle due falde, troviamo

$$ds_1^2 - ds_2^2 = \rho^2 (G\,dv^2 - E\,du^2)$$

e questa differenza si annulla lungo le linee di equazione differenziale

$$G\,dv^2 - E\,du^2 = 0,$$

che sono precisamente le asintotiche. In fine formando l'equazione differenziale delle linee di curvatura sulle due falde, si trova che essa è data per ambedue da

$$E\,ab\,du^2 - (E\,G + a^2 E + b^2 G)\,du\,dv + G\,ab\,dv^2 = 0.$$

Da tutto ciò si conclude: *In ogni congruenza pseudosferica si corrispondono sulle due falde tanto le linee di curvatura quanto le linee asintotiche, queste ultime inoltre per archi eguali.*

Per congruenze pseudosferiche normali queste proprietà ci sono già note dal §. 161.

§. 186.

Congruenze e superficie di Guichard.

Applichiamo in secondo luogo le formole generali alla risoluzione del problema seguente: *Quali sono le congruenze sulle cui falde focali le sviluppabili tagliano queste falde lungo le linee di curvatura?*

Dovremo allora avere insieme

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0$$

e le (39), (39*), escludendo il caso che le due falde focali si riducano a curve (cf. nota §. 184), dimostrano che queste equivalgono alle due

$$a = b = 0$$

ossia le condizioni necessarie e sufficienti sono date da

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 , \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 ,$$

le quali esprimono che le linee sferiche (u, v) formano una rete di Tchebychef (§. 62), ovvero anche che esse sono le immagini delle asintotiche di una superficie pseudosferica (§. 90). Dunque: *Le congruenze richieste sono tutte e sole quelle che hanno per immagine delle sviluppabili le immagini delle asintotiche di una superficie pseudosferica.*

In questo caso possiamo porre (§. 63)

$$E = 1 , \quad G = 1 , \quad F = \cos\omega ,$$

dove ω è una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \operatorname{sen}\omega = 0 .$$

L'equazione (IV) di Laplace diventa ora

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \rho\cos\omega = 0 . \quad (^1)$$

e ad ogni sua soluzione ρ corrisponde una congruenza della specie considerata. Queste speciali congruenze si diranno *congruenze di Guichard*, e alle loro falde focali daremo il nome di *superficie di Guichard*. Per i loro elementi lineari ds_1, ds_2 abbiamo

$$S_1) \quad ds_1^2 = 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 du^2 + 4\,\rho^2\,dv^2$$

$$S_2) \quad ds_2^2 = 4\,\rho^2\,du^2 + 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2 dv^2 ;$$

le caustiche sopra S_1 sono le linee di curvatura $v = \text{cost.}^{te}$ e sopra S_2 le linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$.

(¹) Questa è l'*equazione alle variazioni* della precedente; ed in effetto si incontrerà più tardi nel problema delle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche. Si osservi con Guichard che si hanno due particolari soluzioni prendendo

$$\rho = \frac{\partial\omega}{\partial u} , \quad \rho = \frac{\partial\omega}{\partial v}$$

e in questo caso una delle due falde focali è una sfera.

Consideriamo ora della superficie S_1 la falda dell'evoluta Σ_1 rispetto alle $v = \text{cost.}^{te}$. La normale in un punto (u, v) a Σ_1 è parallela al raggio (u, v) della congruenza di Guichard, e siccome sopra Σ_1 il sistema (u, v) è un sistema coniugato, vediamo che: *l'immagine sferica di Gauss del sistema coniugato (u, v) sopra Σ_1 è una rete di Tchebychef.*

Ma allora, se indichiamo coll'apposizione dell'indice 1 i simboli di Christoffel relativi alla Σ_1, dalle formole (16) §. 88 (pag. 240) risulta

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = 0 , \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 = 0 ,$$

le quali equazioni significano che il sistema coniugato (u, v) sopra Σ_1 è formato di linee geodetiche.

Le superficie con un doppio sistema coniugato di linee geodetiche furono studiate la prima volta da *Voss* e si diranno *superficie di Voss*. Vediamo quindi che: *Ogni superficie di Guichard ha per una delle falde dell'evoluta una superficie di Voss.*

Inversamente si prova subito che: *Le evolventi di una superficie di Voss, rispetto all'uno o all'altro sistema di geodetiche del sistema coniugato, sono superficie di Guichard.*

Le superficie di Voss e la loro evolventi di Guichard sono così strettamente collegate alle superficie pseudosferiche, risultato sul quale avremo occasione di ritornare più tardi.

§. 187.

Formole generali del Sannia per le due forme fondamentali di una congruenza rettilinea.

Le formole del §. 180 per la ricerca delle congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate principali, come quelle del §. 183 pel caso che sia assegnata invece l'immagine sferica delle sviluppabili, non sono che casi particolari delle generali dovute al Sannia (l. c.) che ora andiamo a sviluppare.

Per una congruenza rettilinea si hanno le due forme quadratiche fondamentali (§§. 172, 173)

$$(A) \qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(C) \qquad \delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2$$

delle quali la prima assegna il ds'^2 dell'immagine sferica, e la seconda (divisa per la prima) dà il parametro distributore. Queste due forme, di cui la prima definita positiva, e a curvatura $+1$, individuano, come ora si vedrà, la congruenza; però i loro coefficienti E, F, G; $\partial, \partial', \partial''$ debbono soddisfare ad una equazione differenziale caratteristica (la seguente (S)), che dà la condizione necessaria e sufficiente per l'appartenenza di queste due forme ad una congruenza.

Stabiliamo il risultato in questione supponendo date le due forme (A) e (U) e cercando quando esiste una corrispondente congruenza. Prendiamo al solito come superficie di partenza la superficie media, onde avremo

$$\text{(43)} \qquad E\,g + G\,e = F(f + f')$$

Per le coordinate x, y, z del punto medio potremo scrivere formole del tipo:

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial X}{\partial v} + \gamma X \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \alpha' \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta' \dfrac{\partial X}{\partial v} + \gamma' X, \end{cases}$$

colle analoghe per y, z e saranno da determinarsi i coefficienti

$$\alpha, \beta, \gamma\,;\ \alpha', \beta', \gamma'.$$

Intanto dalle formole

$$S \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = e,\ S \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = f';\ S \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = f,\ S \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = g$$

ricaviamo

$$\begin{cases} \alpha E + \beta F = e \\ \alpha F + \beta G = f' \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha' E + \beta' F = f \\ \alpha' F + \beta' G = g \end{cases}$$

indi

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{G\,e - F\,f'}{EG - F^2}, & \beta = \dfrac{E\,f' - F\,e}{EG - F^2} \\ \alpha' = \dfrac{G\,f - F\,g}{EG - F^2}, & \beta' = \dfrac{E\,g - F\,f}{EG - F^2} \end{cases}$$

Ora se si osservano le formole (7) §. 173 (pag. 459) che definiscono $\partial, \partial', \partial''$ delle quali la media, a causa della (43), può scriversi sotto la doppia forma

$$\partial' = \frac{E\,g - F\,f}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{F\,f' - G\,e}{\sqrt{EG - F^2}}$$

le precedenti dànno

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\partial'}{\sqrt{EG - F^2}}, & \beta = \dfrac{\partial}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \alpha' = -\dfrac{\partial''}{\sqrt{EG - F^2}}, & \beta' = \dfrac{\partial'}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{cases}$$

Pei calcoli seguenti conviene meglio adottare la notazione dei doppi indici e porre

$$\text{(45)} \qquad \partial = b_{11}.\quad \partial' = b_{12}.\quad \partial'' = b_{22},$$

sicchè le (44) diventano

$$\text{(46)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{b_{11}}{\sqrt{EG - F^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \gamma X \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{b_{22}}{\sqrt{EG - F^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \gamma' X. \end{cases}$$

I coefficienti γ, γ' si determinano ora facilmente dalle condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{22}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial X}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial X}{\partial u}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}(\gamma X) - \frac{\partial}{\partial u}(\gamma' X) = 0,$$

ovvero, eseguendo le derivazioni col fare uso delle solite formole (40*) §. 184:

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}}-\right.$$

$$-2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{b_{22}}{\sqrt{EG-F^2}}-\gamma'\left.\right]\frac{\partial X}{\partial u}+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}}-\right.$$

$$-2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{b_{22}}{\sqrt{EG-F^2}}-\gamma\left.\right]\frac{\partial X}{\partial v}+$$

$$+\left[\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\frac{\partial\gamma'}{\partial u}-\frac{E\,b_{22}+G\,b_{11}-2F\,b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]X=0\,.$$

Siccome debbono sussistere anche le due analoghe in Y, Z, dovranno annullarsi separatamente nella equazione superiore i coefficienti di $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, X, il che si traduce nelle tre relazioni.

$$(47)\quad \left|\begin{array}{l} \gamma=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \qquad\qquad -2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{22}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \gamma'=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{b_{22}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{11}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \qquad\qquad -2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{22}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \dfrac{\partial\gamma'}{\partial u}-\dfrac{\partial\gamma}{\partial v}+\dfrac{E\,b_{22}+G\,b_{11}-2F_{12}}{\sqrt{EG-F^2}}=0 \end{array}\right.$$

Ora moltiplichiamo le due prime per $\sqrt{EG-F^2}$, facendo uso delle relazioni

$$\frac{\partial\log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}=\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},\quad \frac{\partial\log\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},$$

ed avremo così

$$-\gamma\sqrt{EG-F^2}=\frac{\partial b_{11}}{\partial v}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}b_{11}+\left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]b_{12}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}b_{22}$$

$$\gamma'\sqrt{EG-F^2}=\frac{\partial b_{22}}{\partial u}-\frac{\partial b_{12}}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}b_{11}+\left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]b_{12}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}b_{22}.$$

I secondi membri sono precisamente le formazioni a tre indici

$$b_{112},\quad b_{221}$$

del §. 42, onde abbiamo

$$\gamma=-\frac{b_{112}}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \gamma'=\frac{b_{221}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

e l'unica condizione che rimane a soddisfare è la terza delle (47), cioè

$$(S)\quad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\sqrt{EG-G^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]=\frac{2F\,b_{12}-E\,b_{22}-G\,b_{11}}{EG-F^2}.$$

Concludiamo quindi: *Affinchè due forme differenziali quadratiche*

$$\left\{\begin{array}{l} E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \\ b_{11}\,du^2+2b_{12}\,du\,dv+b_{22}\,dv^2, \end{array}\right.$$

di cui la prima definita positiva e di curvatura $+1$ appartengano come forme fondamentali ad una congruenza rettilinea, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione (S), *avendo posto*

$$\left\{\begin{array}{l} b_{112}=\dfrac{\partial b_{11}}{\partial v}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}b_{11}+\left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]b_{12}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}b_{22} \\ b_{221}=\dfrac{\partial b_{22}}{\partial u}-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}b_{11}+\left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]b_{12}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}b_{22}. \end{array}\right.$$

Le due forme definiscono allora (intrinsecamente) una congruenza rettilinea che si ottiene determinando per quadrature la superficie media dalle formole

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|-b_{12}\dfrac{\partial X}{\partial u}+b_{11}\dfrac{\partial X}{\partial v}-b_{112}X\right| \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|-b_{22}\dfrac{\partial X}{\partial u}+b_{12}\dfrac{\partial X}{\partial v}+b_{221}X\right|. \end{array}\right.$$

Infine è da osservare che i coefficienti e, f, f' g di Kummer saranno dati dalle formole

$$(49)\quad \begin{cases} e = \dfrac{F b_{11} - E b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \dfrac{F b_{12} - E b_{22}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f' = \dfrac{G b_{11} - F b_{12}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \dfrac{G b_{12} - F b_{22}}{\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}.$$

Se in queste formole generali si suppone in particolare

$$F = 0, \quad G b_{11} = E b_{22}$$

si ritorna alle formole del §. 181, e supponendo invece

$$b_{11} = b_{22} = 0$$

si avrebbero le formole di Guichard al §. 183.

§. 188.

Applicazione alle congruenze rettilinee di Appell (generalizzate).

Per un'applicazione di queste formole del Sannia partiamo dall'osservazione seguente: Se con Φ si indica una funzione arbitraria di u, v e si pone

$$b_{11} = \Phi_{11}, \quad b_{12} = \Phi_{12}, \quad b_{22} = \Phi_{22}$$

l'equazione (8) è identicamente soddisfatta. E infatti dalle identità (22) §. 134 risulta (poichè qui $K = 1$)

$$\Phi_{122} = F \frac{\partial \rho}{\partial u} - G \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \Phi_{221} = F \frac{\partial \rho}{\partial v} - G \frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

e sostituendo nella (S) si ottiene un'identità (1). Ma di più le for-

(1) Si abbia riguardo alla doppia espressione del $\Delta_2 \Phi$

$$\Delta_2 \Phi = \frac{E\Phi_{22} + G\Phi_{11} - 2F\Phi_{12}}{EG - F^2} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - F \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \dfrac{\partial \rho}{\partial v} - F \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\}.$$

mole (48) si integrano in questo caso immediatamente e, disponendo delle costanti additive, si possono scrivere

$$(50)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\dfrac{\partial}{\partial u} \dfrac{\partial X}{\partial r} - \dfrac{\partial}{\partial r} \dfrac{\partial X}{\partial u} \right) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \dfrac{\partial Y}{\partial r} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \dfrac{\partial Y}{\partial u} \right) \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \dfrac{\partial Z}{\partial r} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \dfrac{\partial Z}{\partial u} \right). \end{cases}$$

Queste semplici formole dànno, in termini finiti, per una funzione arbitraria, tutte le congruenze rettilinee, *la cui seconda forma fondamentale è un differenziale secondo covariante*

$$\Phi_{11} du^2 + 2 \Phi_{12} du\, dv + \Phi_{22} dv^2.$$

A questa proprietà analitica caratteristica corrisponde una proprietà geometrica che riconosciamo subito osservando che segue dalle (50):

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$

cioè il piano medio (normale nel punto medio al raggio) passa per l'origine. Viceversa se tutti i piani medii in una congruenza passano per l'origine, valgono le formole (50), come si vede facilmente scrivendo dapprima le coordinate del punto medio sotto la forma

$$(51)\quad x = A \frac{\partial X}{\partial u} + B \frac{\partial X}{\partial r}, \quad y = A \frac{\partial Y}{\partial u} + B \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad z = A \frac{\partial Z}{\partial u} + B \frac{\partial Z}{\partial r}$$

e tenendo conto della condizione

$$(52)\qquad Ge + Eg - F(f + f') = 0 \ (1)$$

(1) Dalle (51) si deduce

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial X}{\partial r} - (EA + FB) X \\ \dfrac{\partial x}{\partial r} = \gamma \dfrac{\partial X}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial X}{\partial v} - (FA + GB) X, \end{cases}$$

Le congruenze in questione sono dunque caratterizzate dalla proprietà che *la loro inviluppata media si riduce ad un punto*: si diranno *congruenze di Appell* (generalizzate), perchè quando in particolare la congruenza è normale le superficie ortogonali ai raggi sono superficie d' Appell (§. 159). Così adunque: *Le formole* (50) *dànno in termini finiti tutte le congruenze di Appell.*

Calcolando ora i coefficienti di Kummer e, f, f', g per queste congruenze, abbiamo dalle (49)

$$\frac{f'-f}{\sqrt{EG-F^2}} = \Delta_{12}\Phi\,, \qquad \frac{eg-ff'}{EG-F^2} = \Delta_{22}\Phi\,,$$

e per ciò indicando, come al solito con 2δ la distanza dei due fuochi, con $2d$ quella dei punti limiti troviamo dalla equazione (E) §. 178 e dalla (F) ibid

$$\delta^2 = -\Delta_{22}\Phi\,, \quad 4d^2 = (\Delta_{12}\Phi)^2 - 4\Delta_{22}\Phi\,. \tag{53}$$

In particolare la congruenza è normale ($d=\delta$) quando è $\Delta_{12}\Phi = 0$, ed allora le superficie ortogonali ai raggi sono superficie d' Appell. Un altro caso notevole si ha per le congruenze paraboliche di que

---

dove

$$\alpha = \frac{\partial A}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} A + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} B\,, \quad \beta = \frac{\partial B}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} A + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} B$$

$$\gamma = \frac{\partial A}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} A + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} B\,, \quad \delta = \frac{\partial B}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} A + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} B\,,$$

ed avendosi

$$e = E\alpha + F\beta\,, \quad f = E\gamma + F\delta$$
$$f' = F\alpha + G\beta\,, \quad g = F\gamma + G\delta$$

la (52) dà $\alpha + \delta = 0$. Questa moltiplicata per $\sqrt{EG-F^2}$, si scrive

$$\frac{\partial}{\partial u}(A\sqrt{EG-F^2}) + \frac{\partial}{\partial v}(B\sqrt{EG-F^2}) = 0\,,$$

onde possiamo porre

$$B = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,, \quad A = -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

e si ritorna alle (50).

sta specie ($\delta = 0$) che si ottengono quando Φ è soluzione della equazione

$$\Delta_{22}\Phi = 0\,.$$

In tal caso, e corrispondentemente ad ogni soluzione di questa equazione, le (50) dànno le superficie che dalle sfere col centro nell' origine sono tagliate in un sistema di asintotiche.

Da ultimo rileviamo questa proprietà comune a tutte le congruenze d' Appell: *Sopra ogni sfera col centro nell' origine i raggi della congruenza segnano (all' entrata ed all'uscita) una coppia di punti* M, M' *che descrivono figure sferiche d' eguale area.*

Lasciando la verifica al lettore, avvertiamo però che tale proprietà non è caratteristica delle congruenze di Appell; essa appartiene anche ad una seconda classe di congruenze.

Capitolo XI.

Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane o sferiche

Elemento lineare della sfera riferito ad un doppio sistema ortogonale di circoli. — Superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane. — Superficie con un solo sistema di linee di curvatura piane. — Classi particolari: superficie modanate, superficie di Joachimsthal, superficie con un sistema di linee di curvatura circolari. — Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane e teorema di Ribaucour. — Superficie a linee di curvatura sferiche in un sistema. Loro deduzione da quelle con linee di curvatura piane.

§. 189.

Elemento lineare sferico riferito ad un doppio sistema ortogonale di circoli.

La classe di superficie di cui tratta il presente Capitolo ha formato l'oggetto delle ricerche di un grande numero di geometri; noi ci proponiamo qui di far conoscere i principali risultati della teoria, che permettono di riguardare queste superficie come perfettamente note. Cominciamo le nostre ricerche dal caso più semplice, quello delle superficie *con tutte le linee di curvatura piane.* Intanto osserviamo che *le sviluppabili* di questa classe sono subito determinate, poichè dalle proprietà delle curve evolute risulta subito che: *esse sono tutte e sole le sviluppabili aventi un' elica per spigolo di regresso.* Lasciando dunque da parte questo caso ovvio, potremo servirci, per determinare le nostre superficie, delle formole di rappresentazione sferica (Cap. V). Siccome in questa rappresentazione di una superficie le linee di curvatura sono caratterizzate dalla proprietà di avere le tangenti parallele a quelle dell' immagine sferica, vediamo che: ogni linea di curvatura piana ha per immagine un circolo (minore) della sfera di Gauss; e viceversa se l'immagine della linea di curvatura

è un circolo, la linea è piana e il suo piano è parallelo a quello del circolo. Dunque le superficie della classe richiesta sono caratterizzate dall' avere per immagine delle linee di curvatura un doppio sistema ortogonale di circoli. Ma sappiamo (§. 57) che un tale sistema si ottiene nel modo più generale intersecando la sfera con due fasci di piani i cui assi siano rette coniugate rispetto alla sfera, e per ciò abbiamo intanto: *Nelle superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, i piani di queste linee in ciascun sistema, sono paralleli ad una retta, e le due rette sono perpendicolari fra loro.*

La prima ricerca da farsi è quella della forma dell' elemento lineare sferico, riferito a un tale doppio sistema ortogonale di circoli, nella qualcosa due casi sono da distinguersi 1° le due rette coniugate sono tangenti coniugate, 2° le due rette coniugate sono l' una segante, l' altra non segante.

1.° caso. Considerando la sfera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

prendiamo per le due tangenti coniugate r, r' quelle condotte pel punto $(0, 0, 1)$ parallelamente agli assi $0y$, $0x$, onde le equazioni dei due fasci di piani si scriveranno

$$x + u(z-1) = 0$$
$$y + v(z-1) = 0,$$

avendo indicato con u, v i parametri che individuano ciascun piano nel fascio. Dalle tre equazioni

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad X + u(Z-1) = 0, \quad Y + v(Z-1) = 0,$$

otteniamo subito le formole

$$(1) \quad X = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad Y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad Z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},$$

che esprimono le coordinate X, Y, Z di un punto della sfera pei parametri u, v del doppio sistema di circoli. Se si introduce la variabile complessa $\tau = u + iv$ sulla sfera e la sua coniugata $\tau_0 = u - iv$, queste non sono altro che le equazioni (46) §. 56

$$(2) \quad X = \frac{\tau+\tau_0}{\tau\tau_0+1}, \quad Y = \frac{1}{i}\frac{\tau-\tau_0}{\tau\tau_0+1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0-1}{\tau\tau_0+1}.$$

e dànno la sfera riferita alle sue generatrici $\tau = \text{cost.}^{te}$, $\tau_0 = \text{cost.}^{te}$. Per il ds^2 della sfera risulta

$$ds^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2},$$

ossia

$$ds^2 = \frac{4\,(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}. \tag{3}$$

2.° *caso.* Delle due rette r, r' coniugate sia p. e. la r la non segante, la r' la segante; prendiamo per asse $0z$ la perpendicolare comune, e gli assi $0x$, $0y$ nelle direzioni di r, r'. Se diciamo a la distanza di r' dal centro, talchè $a < 1$ e supponiamo anche $a > 0$, escludendo dapprima il caso ben noto di meridiani e paralleli, saranno

$$x - \lambda(z - a) = 0, \quad y - \mu\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0$$

le equazioni dei due fasci, indicando λ, μ parametri. Se introduciamo due nuovi parametri u, v ponendo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{tg} u, \quad \mu = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{tgh} v, \ (^1)$$

ne deduciamo subito

$$\text{(4)} \quad X = \frac{\sqrt{1 - a^2}\,\operatorname{sen} u}{\cosh v + a\cos u}, \quad Y = -\frac{\sqrt{1 - a^2}\,\operatorname{senh} v}{\cosh v + a\cos u}, \quad Z = \frac{\cos u + a\cosh v}{\cosh v + a\cos u},$$

e qui si osserverà che queste formole finali continuano ancora a valere nel caso prima escluso di $a = 0$. Dalle (4) segue che il ds^2 ha la forma

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\cosh v + a\cos u)^2}. \tag{5}$$

---

(1) Si osservi che il piano $y - \mu\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0$ taglia la sfera in un circolo reale solo quando

$$|\mu| < \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Conformemente al teorema generale del §. 115, tanto la (3) che la (5) rientrano nella formola

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2}.$$

§. 190.

Costruzione geometrica di Darboux delle superficie a linee di curvature piane.

La ricerca delle superficie coi due sistemi di linee di curvature piane è così ridotta a quella delle superficie la cui immagine sferica delle linee di curvatura è data dai circoli (u, v) della sfera del tipo (3), ovvero del tipo (5). Ricorrendo alle coordinate tangenziali $(X, Y, Z; W)$ secondo il metodo generale al §. 97, il problema dipende dalla relativa equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} = 0, \quad (\lambda = U + V)$$

la cui integrazione è qui immediata perchè

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Col cangiamento di funzione incognita

$$W = \frac{W_1}{\lambda},$$

la precedente diventa infatti $\frac{\partial^2 W_1}{\partial u\,\partial v} = 0$, e per ciò la soluzione più generale del problema proposto si ottiene ponendo

$$W = \frac{U + V}{\lambda},$$

con U funzione arbitraria di u e V di v; e la più generale superficie richiesta sarà dunque l'inviluppo del piano

$$Xx + Yy + Zz = W,$$

dove per W si ponga il valore precedente e per X, Y, Z i valori (1) o (4), con $\lambda = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 1)$ nel primo caso, $\lambda = \cosh v + a \cos u$ nel secondo.

Così nel caso (3) la superficie sarà l'inviluppo del piano

$$2ux + 2vy + (u^2 + v^2 - 1)z = 2(U + V), \tag{6}$$

e nel secondo dell'altro

$$\sqrt{1-a^2}\,\text{sen}\,u\,.\,x - \sqrt{1-a^2}\,\text{senh}\,v\,.\,y + (\cos u + a\cosh v)z = U + V. \tag{6*}$$

Eseguiamo i calcoli nel primo caso, valendo nel secondo osservazioni perfettamente analoghe.

Il piano (6) è il piano radicale delle due sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right)z = 2U \tag{7}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2vy - \left(v^2 - \frac{1}{2}\right)z = -2V; \tag{8}$$

la prima sfera, al variare del parametro u, descrive una semplice infinità di sfere coi centri distribuiti sulla curva del piano xz

$$x = -u, \quad z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - u^2\right),$$

cioè sulla parabola

$$x^2 = 2\left(\frac{1}{4} - z\right), \tag{9}$$

mentre il raggio, dipendentemente dall'arbitrarietà di U, varia in modo affatto arbitrario.

Similmente le sfere della seconda famiglia (8) hanno i centri distribuiti nel piano xy sulla curva

$$y = v, \quad z = \frac{1}{2}\left(v^2 - \frac{1}{2}\right),$$

cioè sulla parabola

$$y = 2\left(\frac{1}{4} + z\right), \tag{10}$$

e raggio variabile con legge arbitraria. Le due parabole (9), (10) giacciono in piani perpendicolari ed hanno ciascuna per vertice e per fuoco rispettivamente il fuoco ed il vertice dell'altra, formano cioè una coppia di *parabole focali*. In questo caso adunque la superficie cercata si ottiene come inviluppo del piano radicale di una sfera qualunque della famiglia (7) associata ad un'altra qualunque nella famiglia (8). Applicando le formole in coordinate tangenziali si potrebbero ora scrivere le equazioni parametriche della superficie. Ma val meglio proseguire nella interpretazione geometrica, osservando che il punto di contatto del piano radicale inviluppante si ottiene associando alla (6) le due equazioni che ne risultano derivando rapporto ad u, v, cioè

$$x + uz = U', \quad y + vz = V'$$

Ma queste possono anche considerarsi come ottenute rispettivamente dalle (7), (8) per derivazione, onde la prima è l'equazione del piano radicale della sfera (7) e della successiva nella serie (u), analogamente per la seconda. Dunque il punto di contatto è il centro radicale delle due sfere (u) (v) e delle loro successive nella rispettiva serie (1). È chiaro poi che, tenendo fisso u e facendo variare v, questo punto descriverà una linea di curvatura u, giacente nel piano radicale della sfera (u) e delle successive; similmente per le linee di curvatura v.

Considerazioni analoghe valgono nel secondo caso pel piano inviluppante (6*); ma allora le due serie di sfere (7), (8) sono sostituite dalle altre due

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1-a^2}\,\text{sen}\,u\,.\,x + \cos u\,z = U$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1-a^2}\,\text{senh}\,v\,.\,y - a\cosh v\,z = -V$$

e i loro centri sono distribuiti sulle due curve

(1) Si può anche dire così: Le sfere della prima serie inviluppano una superficie con un sistema di linee C di curvatura circolari (reale o immaginaria), e le altre sfere una seconda tale superficie a linee C′ di curvatura circolari. Se si considera un qualunque cerchio C ed un qualunque cerchio C′ il loro centro radicale descrive la superficie richiesta.

[Centro radicale di due cerchi nello spazio dicesi quel punto, della retta d'intersezione dei loro piani, che ha eguale potenza rispetto ai due cerchi: esso è unico salvo quando i due circoli giacciono sopra una stessa sfera, nel qual caso è un punto qualunque della detta retta].

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\,\operatorname{sen} u\,, \quad z = -\frac{1}{2}\cos u\,, \quad y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\,\operatorname{senh} v\,, \quad z = -\frac{1}{2}\,a\cosh v\,, \quad x = 0\,,$$

che sono un' ellisse ed un' iperbola focali l'una dell'altra. Per ottenere la più generale superficie con linee di curvatura tutte piane si ha così la seguente elegante costruzione geometrica data dal Darboux:

Si considerino due coniche focali l'una dell'altra e due serie di sfere aventi i centri sulle rispettive coniche e di raggio variabile con legge arbitraria in ciascuna famiglia. Il piano di due sfere scelte ad arbitrio, l'una nella prima l'altra nella seconda serie, inviluppa la più generale superficie Σ richiesta. Come luogo di punti, Σ si genera assumendo il centro radicale delle due sfere e delle due loro successive nelle serie, ed i piani radicali di due sfere successive saranno i piani delle linee di curvatura.

A riguardo di questa superficie è ancora da osservarsi il teorema: *Se una superficie possiede un sistema di linee di curvature piane, basta che nel secondo sistema vi siano due linee di curvature piane perchè siano piane anche tutte le altre.*

E infatti le immagini sferiche di queste due linee del secondo sistema saranno due circoli della sfera, ai quali saranno ortogonali tutti i circoli immagini delle linee di curvatura del primo sistema; dunque questi ultimi circoli formano un fascio e le loro trajettorie ortogonali sono tutte circoli, c. d. d.

§. 191.

Superficie con un sistema di linee di curvatura piane

Se un solo sistema di linee di curvatura è di linee piane le loro immagini sferiche daranno un sistema ∞^1 di circoli sulla sfera, del resto arbitrario. Se prendiamo questi circoli per linee coordinate $u =$ cost.^{te} insieme colle trajettorie ortogonali, nella corrispondente forma del ds^2 sferico

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\,, \tag{11}$$

la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ sarà una funzione della sola u ed avremo

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(u) \tag{12}$$

Questo basta per concludere che la relativa equazione di Laplace (§. 97)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v}\,,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \varphi(u)\sqrt{E}\,\frac{\partial W}{\partial v}$$

è immediatamente integrabile. Difatti possiamo scriverla

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \varphi(u)\sqrt{E}\,W\right) = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \varphi(u)\sqrt{E}\,W\right),$$

da cui con una prima quadratura

$$\frac{\partial W}{\partial u} - \varphi(u)\sqrt{E}\,W = U\sqrt{E}\,,$$

con U funzione arbitraria di u, e con una seconda quadratura abbiamo l'integrale generale

$$W = e^{\int_0^u \varphi(u)\sqrt{E}\,du}\left\{V + \int_0^u U\sqrt{E}\,e^{-\int_0^u \varphi(u)\sqrt{E}\,du}\,du\right\}, \tag{13}$$

con V nuova funzione arbitraria di v.

Il problema è dunque ricondotto a riferire la sfera, nel modo più generale, ad un doppio sistema ortogonale (u, v) nel quale le $u =$ cost.^{te} siano circoli, dopo di che colla (13), applicando le formole in coordinate tangenziali, avremo le superficie richieste. Per ciò, scelto ad arbitrio sulla sfera un sistema ∞^1 di circoli, si deve determinarne le trajettorie ortogonali, ciò che richiede l'integrazione di un' equazione di Riccati. Questo vale del resto per una qualunque superficie *cerchiata* (luogo di ∞^1 circoli) quando si vogliano determinare le

trajettorie ortogonali, di questi circoli (1). E siccome il sistema di circoli sulla sfera deve essere il più generale possibile potremo dare *a priori* una delle trajettorie ortogonali, sicchè con sole quadrature si integrerà l'equazione di Riccati. Così è effettuata, con sole quadrature, la determinazione delle superficie più generali con un sistema di linee di curvatura piane. Rimane ora che studiamo le loro proprietà geometriche cominciando dalle classi particolari più notevoli.

§. 192.

Superficie modanate (moulures).

Una prima classe notevole delle nostre superficie si ha supponendo che i piani delle linee di curvatura siano ortogonali alla superficie, cioè che queste linee di curvatura siano geodetiche. Inversamente siccome ogni linea di curvatura geodetica è in un piano normale alla superficie (§. 109), possiamo dire che *le superficie attuali sono caratterizzate dal possedere un sistema di linee di curvatura geodetiche*. Analiticamente si ottengono dalle formole generali precedenti ponendovi $\varphi(u) = 0$, poichè le linee sferiche $u = \text{cost.}^{te}$ sono in tal caso circoli massimi.

La loro costruzione geometrica risulta subito dall'osservare che le loro linee di curvatura del secondo sistema $v = \text{cost.}^{te}$ sono trajettorie ortogonali dei piani delle linee $u = \text{cost.}^{te}$. Ma viceversa se si considera una qualunque serie ∞^1 di piani π e la doppia infinità (congruenza) delle loro trajettorie ortogonali, il luogo di una qualunque semplice infinità di queste trajettorie è una superficie della classe richiesta, perchè ogni piano π la taglia ortogonalmente. Si è visto, al §. 21, come si determinano per quadrature le trajettorie ortogonali di una semplice infinità di piani, le quali seguano d'altronde sui piani della serie figure eguali. Tutte le linee di curvatura piane della nostra superficie sono dunque congruenti e la superficie è determinata appena sia data la sviluppabile inviluppo dei piani (o il suo spigolo di regresso Γ) e sopra uno dei piani il *profilo* della superficie. La superficie che dicesi *modanata* (moulure) è dunque individuata dalla sua *sviluppabile direttrice* e dal profilo. Se si distende in un piano la sviluppabile direttrice, lo spigolo di regresso Γ acquisterà la sua forma piana C e per quanto si è visto al §. 21: la superficie modanata viene generata da un profilo piano segnato sul piano di C quando questa curva rotola sopra Γ. Si può anche dire: *Le superficie modanate si generano da un profilo piano, invariabile di forma, il cui piano rotoli, senza strisciare, sopra una superficie sviluppabile.*

In particolare se la sviluppabile è un cilindro, anche le seconde linee di curvatura del secondo sistema sono piane, anzi in piani paralleli alla sezione retta del cilindro. Viceversa se una superficie ha un sistema di linee di curvatura in piani paralleli, le loro immagini sferiche sono circoli in piani paralleli e le trajettorie ortogonali di questi sono i meridiani: *le uniche superficie con un sistema di linee di curvatura in piani paralleli sono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica.*

In generale si osserverà che le normali di una superficie modanata toccano la sviluppabile direttrice che è adunque una delle falde dell'evoluta; e la seconda falda è evidentemente una nuova superficie modanata colla medesima sviluppabile direttrice ed avente per profilo l'evoluta piana del profilo obiettivo. Viceversa è chiaro che: *Le evolventi di una sviluppabile Σ (rispetto ad un qualunque sistema di geodetiche) sono superficie modanate che ammettono Σ per sviluppabile direttrice.*

(1) Le equazioni parametriche delle superficie cerchiate possono scriversi

$$x = x_0 + R(\alpha_1 \cos v + \alpha_2 \operatorname{sen} v), \quad y = y_0 + R(\beta_1 \cos v + \beta_2 \operatorname{sen} v),$$
$$z = z_0 + R(\gamma_1 \cos v + \gamma_2 \operatorname{sen} v),$$

dove x_0 y_0, z_0 ed R sono funzioni di un parametro u come pure α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2 che supponiamo siano i coseni direttori di due diametri fra loro ortogonali nel circolo generico (u). Per trovare le trajettorie ortogonali bisogna determinare v in funzione di u, in guisa che si abbia:

$$S(\alpha_1 \operatorname{sen} v - \alpha_2 \cos v)\frac{dx}{du} = 0,$$

ossia

$$\frac{dv}{du} = S(\alpha_1 \operatorname{sen} v - \alpha_2 \cos v)\frac{dx_0}{du} + RS(\alpha_1 \operatorname{sen} v - \alpha_2 \cos) \times$$
$$\times\left(\frac{d\alpha_1}{du}\cos v + \frac{d\alpha_2}{du}\operatorname{sen} v\right)$$

Ma siccome $S\,\alpha_1\frac{d\alpha_1}{du} = S\,\alpha_2\frac{d\alpha_2}{du} = 0$, $S\,\alpha_1\frac{d\alpha_2}{du} + S\,\alpha_2\frac{d\alpha_1}{du} = 0$, resta un'equazione della forma

$$\frac{dv}{du} = A \operatorname{sen} v + \cos v + C,$$

con A, B, C funzioni di u. Nell'incognita $\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right)$ questa è un'equazione di Riccati onde segue il teorema: *In ogni superficie cerchiata i circoli sono incontrati in serie projettive di punti dalle loro trajettorie ortogonali.*

Fra le superficie modanate è da notarsi la classe di quelle a sviluppabile direttrice *conica*. Le linee di curvatura del secondo sistema hanno in tal caso i piani normali concorrenti nel vertice O del cono e sono per ciò tracciate sopra sfere col centro in O. Viceversa dimostriamo facilmente che: *Ogni superficie con un sistema di linee di curvatura sopra sfere concentriche è una superficie modanata la cui sviluppabile direttrice è un cono col vertice nel centro delle sfere.*

E infatti supponiamo che le linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$ siano sopra sfere col centro in O. Lungo una linea di curvatura $v = \text{cost.}^{te}$ il piano (principale) della tangente a questa linea e della normale alla superficie, come piano normale alla u, passa per il punto O. Dunque il detto piano o rimane fisso o inviluppa un cono col vertice in O; ma questo secondo caso si esclude subito perchè questo cono sarebbe formato dalle normali alla superficie lungo la $v = \text{cost.}^{te}$, e tutte le normali concorrendo in O la superficie sarebbe una sfera di centro O, caso ovvio che trascuriamo (1). Dunque ogni linea di curvatura $v = \text{cost.}^{te}$ è tracciata in un piano normale alla superficie e che passa per O, c. d. d.

Si osservi che le attuali superficie sono *caratterizzate* dalla proprietà che ogni sfera col centro in O taglia la superficie sotto angolo costante. In particolare appartengono a questa classe le superficie *egualmente illuminate* da una sorgente collocata in O; ed allora il profilo piano della modanata è una lemniscata di Bernoulli col nodo nel punto fisso e con cono direttore arbitrario.

§. 193.

Superficie di Joachimsthal

Fra le superficie con un sistema di linee di curvatura piane consideriamo ora quelle nelle quali i piani di queste linee passano per una retta fissa r. Siano le $v = \text{cost.}^{te}$ queste linee di curvatura in piani per r; le linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$, come linee a tangenti coniugate delle (v), sono le linee di contatto dei coni circoscritti dai punti di r alla superficie (§. 78), e siccome tagliano ad angolo retto le generatrici dei coni, sono tracciate sopra sfere col centro nel vertice del cono ortogonali alla superficie. Dunque: *In queste superficie (di Joachimsthal) le linee di curvatura del secondo sistema sono tracciate sopra sfere che tagliano ortogonalmente la superficie ed hanno i centri distribuiti sopra la retta r.*

È facile vedere che non esistono altre superficie con un sistema di linee di curvatura piane (1) e l'altro di linee sferiche tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie. Sia infatti Γ una linea di curvatura di questo secondo sistema; le tangenti alle C lungo Γ formano la sviluppabile circoscritta alla superficie, che è il cono proiettante Γ dal centro della sfera che la contiene e taglia ortogonalmente la superficie. Il centro della sfera è dunque su tutti i piani delle curve Γ, ed il luogo dei centri delle sfere, trovandosi su tutti questi piani, è una retta, c. d. d.

Per costruire le superficie di Joachimsthal basta prendere ad arbitrio una serie ∞^1 di sfere coi centri in linea retta e nella congruenza delle loro trajettorie ortogonali (che giacciono evidentemente nei piani per la retta dei centri) scegliere comunque una semplice infinità di queste trajettorie. La superficie loro luogo, tagliata ortogonalmente dalle sfere, avrà per un sistema di linee di curvatura le intersezioni colle sfere, e le linee di curvatura dell'altro sistema saranno le dette trajettorie ortogonali piane.

Ed ora per scrivere le formole relative alle superficie di Joachimsthal, riferite alle loro linee di curvatura u, v, si assuma la retta luogo dei centri delle sfere per asse Oz; e per la sfera col centro nel punto $z = u$ dell'asse Oz, indicando con $R = R(u)$ il raggio, avremo

$$x = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v, \quad y = R \operatorname{sen}\theta \cos v, \quad z = u + R\cos\theta.$$

Le trajettorie ortogonali di queste sfere si avranno determinando θ e v in funzione di u in guisa che $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ risultino proporzionali alle tre quantità (Cf. §. 24)

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v, \ \operatorname{sen}\theta\cos v, \ \cos\theta.$$

---

(1) Le stesse conclusioni seguono analiticamente dalle formole al §. 97. Supposte $x^2 + y^2 + z^2 = f(u)$, risulta $\mathrm{S}x\frac{\partial x}{\partial v} = 0$, cioè $W_2 = 0$, indi

$$\frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1 = 0.$$

Dunque, o si ha insieme $W_1 = 0$ e per ciò $W = \text{cost.}^{te}$ caso della sfera, ovvero $\frac{\partial\sqrt{e}}{dv} = 0$; le linee sferiche $v = \text{cost.}^{te}$ sono circoli massimi ecc.

Si trovano così semplicemente le due equazioni

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}\quad \frac{dv}{du} = 0,$$

la seconda della quali dà $v =$ cost.te e conferma che le trajettorie ortogonali sono in piani per l'asse Oz. La prima integrata dà

$$\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \int \frac{du}{R} + U \quad (U \text{ cost.te}),$$

onde avremo la più generale superficie di Joachimsthal ponendo per U una funzione arbitraria V della sola v. Dopo ciò, ponendo per brevità

$$\tau = \int \frac{du}{R} + V,$$

indi

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\cosh\tau},\quad \cos\theta = -\operatorname{tgh}\tau,$$

avremo per le formole domandate

$$(14)\qquad x = \frac{R\operatorname{sen} v}{\cosh\tau},\quad y = \frac{R\cos v}{\cosh\tau},\quad z = u - R\operatorname{tgh}\tau,$$

$$\left(\tau = \int \frac{du}{R} + V\right).$$

Pei coseni di direzione della normale alla superficie si trova subito

$$(15)\quad X = \frac{V'\cos v + \operatorname{tgh}\tau \operatorname{sen} v}{\sqrt{1+V'^2}},\quad Y = \frac{-V'\operatorname{sen} v + \operatorname{tgh}\tau\cos v}{\sqrt{1+V'^2}},\quad Z = \frac{1}{\cosh\tau\sqrt{1+V'^2}}$$

e le formole

$$X\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v + Y\operatorname{sen}\theta\cos v + Z\cos\theta = 0$$

$$X\cos v - Y\operatorname{sen} v = \frac{V'}{\sqrt{1+V'^2}}$$

confermano 1° che le sfere $u =$ cost.te tagliano ortogonalmente la superficie, 2° che i piani $v =$ cost.te tagliano la superficie sotto un angolo costante σ dato da $\cos\sigma = \dfrac{V'}{\sqrt{1+V'^2}}$, e per ciò le linee u, v sono in effetto le linee di curvatura.

§. 194.

Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari.

Di questa classe di superficie abbiamo già trattato al §. 156 caratterizzandole dalla proprietà che una delle loro falde dell'evoluta si riduce ad una curva Γ. Esse possono considerarsi come l'inviluppo di una semplice infinità di sfere coi centri distribuiti sulla curva Γ e raggio R variabile con legge arbitraria. Ritenendo per la curva Γ le consuete notazioni, l'equazione della sfera mobile si scrive

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2,$$

dove X, Y, Z indicano coordinate correnti. Il circolo *caratteristico* C si ottiene associando alla precedente l'equazione che risulta dal derivare rapporto all'arco s della curva Γ:

$$(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma = -R R';$$

il circolo C è reale soltanto se $R'^2 = \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2 < 1$. L'asse del circolo è la tangente alla curva, il suo raggio r è dato da

$$(16)\qquad r = R\sqrt{1 - R'^2},$$

e l'angolo σ sotto cui il suo piano taglia la superficie inviluppo da

$$(17)\qquad \cos\sigma = R'.$$

Quali sono le superficie con circoli di curvatura tutti eguali? Sia a il raggio di questi circoli e dalla (16) avremo l'equazione differenziale

$$R^2(1 - R'^2) = a^2$$

coll'integrale generale

$$R^2 = (s + c)^2 + a^2 \qquad (c \text{ costante})$$

e colla soluzione singolare $R = a$, la quale corrisponde alla soluzione

evidente delle superficie canali. Per l'*integrale generale* avendosi

$$R R' = s + c,$$

le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo sono date da

$$x_1 = x - (s + c)\alpha, \quad y_1 = y - (s + c)\beta, \quad z_1 = z - (s + c)\gamma,$$

e questo centro descrive dunque un'evolvente della curva Γ. La seconda classe di superficie a linee di curvatura circolari ed eguali si genera dunque nel modo seguente: *Sopra una curva qualunque* Γ *si avvolga un filo, e si svolga dalla curva sì che l'estremità libera* M *descriva un'evolvente di* Γ; *se la porzione rettilinea di filo svolta porta all'estremità libera* M *un circolo* C *col centro in* M, *tracciato nel piano normale al filo, il luogo del circolo* C *sarà la superficie richiesta.*

Ritorniamo al caso generale, e della nostra superficie S a linee di curvatura circolari facciamo l'immagine sferica di Gauss. I circoli C di curvatura di S avranno per immagini circoli C_1 della sfera, e se indichiamo con Γ_1 l'indicatrice sferica delle tangenti di Γ è chiaro che il centro sferico M_1 del circolo immagine C_1 sarà nel punto M_1 di Γ_1 immagine del punto M di Γ ove questa curva è toccata dall'asse del circolo C, mentre il raggio sferico di C_1 sarà misurato dall'angolo sopra indicato con σ. Da queste semplici considerazioni risulta subito che:

Data ad arbitrio una serie ∞^1 *di circoli sulla sfera, esistono infinite superficie a linee di curvatura circolari, che hanno per immagine sferica i circoli della serie data.*

Si consideri infatti la curva sferica Γ_1 luogo dei centri dei circoli C_1, e sia s_1 l'arco di Γ_1, σ il raggio sferico di C_1 ed α, β, γ le coordinate di un punto mobile sopra Γ_1. Prendasi ora una qualunque curva Γ che abbia Γ_1 per indicatrice sferica delle tangenti, *pongasi* cioè (§ 22)

$$x = \int \alpha f(s_1)\, ds_1, \quad y = \int \beta f(s_1)\, ds_1, \quad z = \int \gamma f(s_1)\, ds_1$$

$$ds = f(s_1)\, ds_1,$$

con $f(s_1)$ funzione arbitraria di s_1. Se consideriamo una serie ∞^1 di sfere coi centri distribuiti sopra Γ e di raggio

$$R = \int \cos\sigma\, ds = \int \cos\sigma\, f(s_1)\, ds_1,$$

la (17) ci dimostra che la superficie inviluppo di queste sfere avrà

per immagine sferica delle sue linee di curvatura circolari i circoli dati C_1.

Le superficie con un sistema di linee di curvatura C circolari *possono riguardarsi sotto quest'altro aspetto.* Per ogni circolo C si faccia passare la sfera ortogonale alla superficie, avente il centro nel vertice del cono rotondo formato dalle tangenti alle linee di curvatura Γ del secondo sistema lungo C. *Le* ∞^1 *curve* Γ *sono trajettorie ortogonali di queste sfere.* Viceversa, *prendasi una qualunque serie* ∞^1 di sfere Σ e sopra una iniziale di esse si segni ad arbitrio un circolo C_0; le trajettorie ortogonali Γ di queste sfere uscenti dai punti di C_0 segnano circoli su tutte le altre sfere (§ 25) e il loro luogo è una superficie che ha per linee di curvatura i circoli C e le trajettorie ortogonali Γ. Di qui vediamo che, per individuare una superficie a linee di curvatura circolari, si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi: 1° *una linea di curvatura non circolare* Γ, 2° *una serie* ∞^1 *di sfere ortogonali a* Γ, 3° *sopra una delle sfere un circolo* C_0 *uscente dal punto* P_0 *su* Γ.

Domandiamo in fine quali sono le superficie della nostra classe per le quali anche le linee di curvatura Γ sono piane. Per quanto si è visto al paragrafo precedente è necessario e sufficiente per ciò che il luogo dei centri delle sfere sia una linea retta.

§. 195.

Le serie di superficie a linee di curvatura circolari associate ad una superficie qualunque

Colle superficie a linee di curvatura circolari stanno in relazione alcune proprietà semplici e generali dalle linee di curvatura per una superficie qualunque S che ora vogliamo stabilire. Sulla superficie consideriamo le linee di curvatura (u) e (v) dei due sistemi e dimostriamo:

A) *Il luogo dei circoli osculatori delle linee* (u) *nei loro punti d'incontro con una medesima linea* $v = \text{cost.}^{te}$ *ammette questi circoli per linee di curvatura.*

Sia Γ una linea qualunque di curvatura (u). Le normali alla S lungo Γ sono le tangenti di un'evoluta Γ_1 di Γ tracciata sulla prima falda S_1 della evoluta di S, ed i piani normali di Γ toccano S_1 lungo Γ_1. Se da un punto M_1 di Γ_1 caliamo la perpendicolare al piano osculatore di Γ nel punto M corrispondente, questa perpendicolare coincide coll'asse del circolo oscu-

latore di Γ, e giace nel piano tangente alla S_1 in M_1. Dunque la sfera descritta col centro M_1 e con raggio $\overline{M_1 M}$, cioè la sfera che ha il centro nel primo centro di curvatura M_1 e raggio eguale al relativo raggio principale r_1 (sfera principale), passa pel circolo osculatore di Γ in M. Ora gli assi dei circoli osculatori di Γ sono tangenti alla S_1 lungo Γ_1; e poichè formano la sviluppabile polare di Γ hanno le direzioni coniugate alle tangenti di Γ_1; e siccome sulla S_1 alle linee (u) sono coniugate le (v), si vede intanto che: *gli assi dei circoli osculatori delle linee di curvatura (u) sono le tangenti a quelle linee (v) della prima falda dell' evoluta che corrispondono alle linee di curvatura dell' altro sistema sull' evolvente.*

Spostiamo ora il centro M_1 della sfera principale lungo una linea (v) di S_1 e proviamo che nella superficie inviluppo di queste sfere il detto circolo osculatore è precisamente il circolo caratteristico. Siccome infatti la sfera tocca in M la S, il detto circolo caratteristico passa per M e giace nel piano condotto per M normalmente alla direzione dello spostamento del centro, direzione che è segnata appunto dall' asse del circolo osculatore, sicchè il circolo osculatore coincide col circolo caratteristico, *c. d. d.*

Dimostrata la proposizione A), osserviamo che anche associando i detti circoli osculatori lungo la linea stessa (u) si forma una superficie a linee di curvatura circolari, poichè in generale: *il luogo dei circoli osculatori di una curva qualunque dello spazio ammette questi circoli per linee di curvatura.*

E infatti tale luogo non è altro che l'inviluppo delle sfere osculatrici. Così adunque vediamo che: *Per una superficie qualunque, nella congruenza dei circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema sono contenute due serie di superficie che hanno per linee di curvatura questi circoli; esse si ottengono associando i circoli lungo le linee di curvatura dell'uno o dell'altro sistema.* Le sfere inviluppate delle due serie sono le sfere principali relative alle linee di curvatura di cui sono osculatori i circoli, e le sfere osculatrici delle linee stesse.

§. 196.

Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

Ritorniamo ora alle generali superficie con un sistema di linee di curvatura piane. Sia S una tale superficie e C_0, Γ_0 una coppia

di sue linee di curvatura, di cui la prima piana, incrociantesi in un punto O ortogonalmente. I circoli osculatori delle linee di curvatura piane C lungo Γ_0 formano una superficie Σ che ha questi circoli per linee di curvatura e tocca (oscula) la S lungo Γ_0. Questa superficie Σ ha manifestamente a comune con S l' immagine sferica delle linee di curvatura. Ciò posto, dimostriamo che: *Per individuare una superficie S con un sistema di linee C di curvatura piane si possono assegnare ad arbitrio i seguenti elementi,* 1° *una coppia* (C_0, Γ_0) *di linee di curvatura di sistema opposto,* 2° *la superficie a linee di curvatura circolari Σ osculante S lungo Γ_0. Dati questi elementi la S si ha con quadrature.*

In primo luogo osserviamo che nel punto O ove si incrociano C_0, Γ_0 si conosce la normale alla S e sono quindi note le normali a S lungo C_0 e lungo Γ_0. Nell' immagine sferica, C_0 darà un circolo C_0' e la Γ_0 una curva Γ_0' ortogonale a C_0' e sarà perfettamente fissata la corrispondenza dei punti fra C_0, C_0' e Γ_0, Γ_0'. Ma poichè è data la superficie Σ a linee di curvatura circolari, conosceremo sulla sfera i circoli del sistema di C_0' e le loro trajettorie ortogonali del sistema di Γ_0', che assumiamo a linee coordinate u, v fissando per es. che i parametri u, v siano gli archi di Γ_0', C_0' a partire da O. La nostra superficie sarà determinata in coordinate tangenziali dalla formola (13) pag. 509, quando si prendano convenientemente le funzioni U, V. Ma ora noi conosciamo W lungo C_0 in funzione di v, e medesimamente W lungo Γ_0 in funzione di u, cioè rispettivamente W per $u = o$, il che fissa V e W per $v = o$, ciò che determina U. Così la superficie S, se esiste, sarà individuata. Ma viceversa scelte le funzioni U, V nel detto modo si vede che la superficie S così determinata per coordinate tangenziali sarà la superficie richiesta.

Di qui si vede in particolare che se la curva iniziale C_0 è un circolo, la S coincide necessariamente con Σ, onde il teorema d'Aoust:

Se una superficie ha un sistema di linee di curvatura piane ed una di queste è un circolo, tutti gli altri sono circoli.

§. 197.

Il teorema di Ribaucour.

La ricerca delle superficie con un sistema di linee C di curvatura piane si può fare con un altro metodo (Ribaucour), che consiste nel supporre assegnata la sviluppabile Σ inviluppo dei piani π

delle linee C e ricercare come è possibile segnare in ogni piano una curva C in modo che la superficie loro luogo le abbia per linee di curvatura, per la qual cosa occorre e basta che da ogni piano la superficie sia tagliata sotto angolo costante.

Trattiamo il caso generale in cui lo spigolo di regresso Γ della sviluppabile Σ è un' effettiva curva (non si riduce ad un punto) chè nel caso di una sviluppabile conica (o cilindrica) la ricerca è anche più facile.

Manteniamo per la curva Γ, di cui l' arco sarà indicato con u, le altre consuete notazioni. In ogni piano oscolatore di Γ è tracciata una delle nostre curve C che riferiamo alla tangente e normale principale di Γ come ad assi coordinati; e siano A, B le relative coordinate di un punto M mobile su C. Intenderemo che A, B siano funzioni, oltre che di u, di un parametro v che individua i punti della curva C scrivendo

$$A = A(u, v), \quad B = B(u, v).$$

Le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di un punto qualunque di C saranno:

$$\bar{x} = x + A\alpha + B\xi, \quad \bar{y} = y + A\beta + B\eta, \quad \bar{z} = z + A\gamma + B\zeta,$$

e queste sono le equazioni parametriche delle superficie S loro luogo. Derivando queste colle formole di Frenet otteniamo

$$(17^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(1 + \dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{B}{\rho}\right)\alpha + \left(\dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{A}{\rho}\right)\xi - \dfrac{B}{T}\lambda \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \dfrac{\partial A}{\partial v}\alpha + \dfrac{\partial B}{\partial v}\xi, \end{cases}$$

colle analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$. Ora indichiamo con $\sigma = \sigma(u)$ l' angolo d' inclinazione del piano π sopra S, e con X, Y, Z i coseni di direzione della normale a S; dalle condizioni

$$S\,X\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0, \quad S\,X\,\lambda = \cos\sigma$$

abbiamo

$$(18) \qquad X = \frac{\dfrac{\partial B}{\partial v}\alpha - \dfrac{\partial A}{\partial v}\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial v}\right)^2}}\operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma,$$

colle analoghe per Y, Z. Ma ora dalla ulteriore condizione

$$S\,X\frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

si trae

$$\frac{\dfrac{\partial B}{\partial v}\left(1 + \dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{B}{\rho}\right) - \dfrac{\partial A}{\partial v}\left(\dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{A}{\rho}\right)}{B\sqrt{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\operatorname{col}\sigma}{T}.$$

Il secondo membro è una funzione della sola u, che indichiamo con U, e scriviamo

$$(19) \qquad \frac{\dfrac{\partial B}{\partial v}\left(1 + \dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{B}{\rho}\right) - \dfrac{\partial A}{\partial v}\left(\dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{A}{\rho}\right)}{B\sqrt{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial v}\right)^2}} = U.$$

Viceversa se A, B sono tali funzioni di u, v da soddisfare la (19), ponendo

$$(20) \qquad \operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{UT},$$

le (18) daranno i coseni di direzione della normale alla superficie S luogo delle curve C, le quali saranno linee di curvatura di S, poichè il piano di ogni C taglia la superficie S sotto l' angolo σ costante.

Ora dalla circostanza che nel primo membro della (19) figura soltanto la prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ di Γ, non la torsione $\frac{1}{T}$, si vede che mantenendo fisse le funzioni A, B di u, v e la funzione U del secondo membro, la (19) resterà sempre soddisfatta se la curva Γ mantiene sempre la stessa flessione cangiando di torsione, cioè se la sviluppabile Σ si deforma comunque, mantenendo rigide le generatrici. Soltanto è da osservare che per ogni flessione di Σ cangierà, secondo la (20), l' angolo σ sotto il quale il piano della curva C taglia la superficie S.

Ma un' altra conseguenza importante si trae dalle formole (17*) le quali dimostrano che nell' espressione dell' elemento lineare di S

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

i coefficienti F e G sono affatto indipendenti dalla torsione $\frac{1}{T}$. Dunque l' equazione differenziale

$$F\,du + G\,dv = 0$$

delle trajettorie ortogonali delle $u = \text{cost.}^{te}$, cioè delle seconde linee di curvatura di S, non muta quando la sviluppabile Σ si flette. Questi risultati si riassumono nella notevole proposizione di Ribaucour: Se una superficie S ha un sistema di linee C di curvature piane, deformando comunque la sviluppabile Σ inviluppo di questi piani, in guisa che le generatrici restino rettilinee, ed ogni piano tangente di Σ trascini seco invariabilmente la relativa curva C:

1.° *in ogni configurazione di* Σ *il luogo delle curve* C *le ammetterà sempre per linee di curvatura,*

2.° *i punti delle varie curve* C *che si trovavano nella configurazione iniziale sopra una linea di curvatura del secondo sistema, vi rimarranno sempre in ogni altra configurazione.*

In particolare se distendiamo la sviluppabile Σ in un piano, avremo su questo un doppio sistema ortogonale di curve C, C', ad ogni curva C essendo inoltre coordinata una retta, la corrispondente tangente alla deformata dello spigolo di regresso di Σ. Interpretando geometricamente l' equazione a derivate parziali (19), potremmo stabilire le proprietà geometriche *caratteristiche* di questi sistemi ortogonali, e ridurre così la determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane ad una costruzione di geometria piana. Rimandiamo il lettore ad una elegante Memoria di Rouquet [1] ove si trovano ampiamente sviluppate queste conseguenze della proposizione di Ribaucour. Per quanto riguarda la determinazione delle nostre superficie esse equivalgono in sostanza agli sviluppi dati nel paragrafo precedente.

§. 198.

Superficie a linee di curvatura sferiche in un sistema

Vogliamo ora brevemente occuparci delle superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche, nella qual cosa ci limiteremo

[1] *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d' un système sont planes* (Toulouse-Doulodonre Privat).

all' esposizione di alcuni risultati fondamentali, che permettono di dedurre queste superficie da quelle già note con un sistema di linee di curvatura piane.

La prima ricerca che faremo a questo scopo sarà diretta a riconoscere, dato un doppio sistema ortogonale di linee (u, v) sulla sfera, quando è che fra le superficie con questa immagine delle linee di curvatura ne esiste qualcuna sulla quale le linee di un sistema p. e. le $v = \text{cost.}^{te}$ siano sferiche? La via che seguiamo è quella tenuta dal Dini in una sua memoria del 1869 [1]; le formole date dal Dini si prestano con facilità a stabilire anche gli ultimi risultati conseguiti dai geometri nell' esame di questo problema.

Sia

$$(21) \qquad ds^2 = dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare sferico, riferito al dato sistema ortogonale (u, v), dove X_3, Y_3, Z_3 sono le coordinate del punto (u, v) sulla sfera, e scriviamo le solite formole ((A) § 157)

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \sqrt{E}\,X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1, & \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \sqrt{G}\,X_3, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_2. \end{cases}$$

Supponiamo che esista una superficie S colla immagine sferica (u, v) delle linee di curvatura e di cui le linee $v = \text{cost.}^{te}$ siano sferiche. Consideriamo una qualunque di queste linee $v = \text{cost.}^{te}$ e sia $M \equiv (x, y, z)$, $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ il centro della sfera che contiene la linea. Il piano normale in M a questa linea passa pel centro M_0 della sfera e contiene le due direzioni (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3); per ciò le coordinate x_0, y_0, z_0 del centro possono scriversi

$$x_0 = x - AX_2 - BX_3, \quad y_0 = y - AY_2 - BY_3, \quad z_0 = z - AZ_2 - BZ_3,$$

essendo $-A$, $-B$ le coordinate Cartesiane ortogonali nel detto piano del centro M_0, riferito alle due direzioni considerate. Ma ora x_0, y_0, z_0 sono funzioni della sola v, che indicheremo con V_1, V_2, V_3, e di più *anche* A, B *sono funzioni di* v *soltanto*, perchè se indi-

[1] *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche.* Memorie della Società dei XL. Serie 3ª T. II P.e I.ª

chiamo con $R = R(v)$ il raggio della sfera e con σ l'angolo sotto cui la sfera taglia la superficie, angolo che è funzione di v soltanto, abbiamo

$$R^2 = S(x - x_0)^2 = A^2 + B^2, \qquad \cos\sigma = S\frac{x - x_0}{R} X_3 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

cioè

$$A = R \operatorname{sen} \sigma, \qquad B = R \cos \sigma.$$

Dunque: *le equazioni parametriche della superficie* S *possono scriversi*

$$(23) \qquad \begin{cases} x = AX_2 + BX_3 + V_1 \\ y = AY_2 + BY_3 + V_2 \\ z = AZ_2 + BZ_3 + V_3 \end{cases}$$

dove A, B, V_1, V_2, V_3 *sono funzioni della sola* v.

Bisogna ora ricercare le condizioni a cui debbono soddisfare il sistema sferico dato (u, v) e le funzioni A, B; V_1, V_2, V_3 di v affinchè le (23) rappresentino una superficie S della specie voluta.

Per questo basterà che la S abbia per coseni di direzione della normale X_3, Y_3, Z_3, che cioè sussistano le due relazioni

$$(24) \qquad S X_3 \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad S X_3 \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

poichè infatti in tale ipotesi le due formole

$$S(x - V_1)^2 = A^2 + B^2, \qquad S X_3 \frac{x - V_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

dimostrano che ogni linea $v =$ cost.^{te} è tracciata sopra una sfera che taglia la superficie sotto angolo costante. Le $v =$ cost.^{te} saranno dunque linee di curvatura di S, e medesimamente le $u =$ cost.^{te} come corrispondenti alle loro trajettorie ortogonali sulla sfera. Ora derivando le (23) colle (22) risulta

$$(24) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{A}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + B\sqrt{E} \right) X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{A}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + (A' + B\sqrt{G})\, X_2 + (B' - A\sqrt{G})\, X_3 + V_1' \end{cases}$$

dove gli accenti indicano derivazione rapporto a v.

La prima delle (24) è quindi identica e la seconda dà

$$(\alpha) \qquad B' + V_1' X_3 + V_2' Y_3 + V_3' Z_3 = A\sqrt{G}$$

e ne risulta come prima risposta alla questione:

Affinchè esista una superficie S *colla data immagine sferica* (u, v) *delle linee di curvatura e colle linee* $v =$ cost.^{te} *di curvatura sferiche è necessario e sufficiente che possano determinarsi cinque funzioni* A, B; V_1, V_2, V_3 *della sola* v, *tali da soddisfare l'equazione* (α).

Una prima osservazione da farsi sulla (α) è che contiene le funzioni B, V_1, V_2, V_3 solo per le derivate, onde, aumentando queste funzioni di costanti arbitrarie, la (α) resta sempre soddisfatta. L'aggiunta di costanti a V_1, V_2, V_3 non fa per le (23) che dare una traslazione alla S; l'aggiunta di una costante alla B fa passare dalla S ad una superficie parallela ed è ovvio geometricamente che superficie parallele hanno sferiche insieme le linee di curvatura di un sistema. Ma un'altra osservazione, analiticamente ovvia, dà luogo ad una conseguenza geometrica notevole: l'equazione (α) è omogenea in

$$B', V_1, V_2, V_3; A$$

e per ciò se è soddisfatta per un certo sistema di queste funzioni di v, resta ancora soddisfatta alterandole tutte per un fattore comune *funzione arbitraria* di v e la superficie cangia essenzialmente di forma. Ne risulta il teorema (di Bluteł):

Se una superficie S *ha sferiche le linee di curvatura di un sistema, esistono infinite altre superficie della medesima specie, aventi a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura.*

§. 199.

Altra forma della condizione (α).

La condizione trovata (α) può porsi sotto altra forma che conviene osservare. Supposta la (α) soddisfatta, le (23) ci dànno una superficie S con linee di curvatura v sferiche, e il paragone delle (24) colle formole di Rodrigues

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = r_2 \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = r_2 \sqrt{E}\, X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = r_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = r_1 \sqrt{G}\, X_2 \end{cases}$$

fornisce pei raggi principali r_2, r_1 di curvatura dalla S le formole

$$(25)\quad r_2 = A \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + B, \quad r_1 = \frac{A'}{\sqrt{G}} + B + \frac{1}{\sqrt{G}} (V_1' X_2 + V_2' Y_2 + V_3' Z_2),$$

coi quali valori sono soddisfatte le due equazioni di Codazzi

$$\begin{cases} (r_1 - r_2) \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \dfrac{\partial r_2}{\partial v} = 0 \\ (r_1 - r_2) \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Viceversa dimostriamo: *Se il ds^2 sferico è tale che si possano soddisfare le equazioni di Codazzi con un valore di r_2 della forma* (25)

$$(26)\qquad r_2 = A \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + B,$$

con A, B *funzioni di* v (*e con un conveniente valore di* r_1), *la corrispondente superficie* S, *data per quadrature dalle formole*

$$x = \int \left(r_2 \frac{\partial X_2}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} \partial v \right),$$

avrà le linee di curvatura v *sferiche.*

Difatti dalla (26) avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(A \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + B \sqrt{E} \right) X_1,$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (A X_2 + B X_3),$$

da cui integrando

$$x = A X_2 + B X_3 + V_1, \quad (V_1 = \varphi(v),$$

e analogamente per y, z, onde si ritorna alle formole (23). È bene osservare un' altra forma, utile per le applicazioni, sotto cui si può porre questo risultato col teorema:

Se una superficie S è riferita alle sue linee di curvatura (u, v), ***la condizione necessaria e sufficiente perchè le sue linee di curvatura*** v ***siano sferiche è che il relativo raggio principale di curvatura*** r_2 ***abbia un' espressione della forma***

$$r_2 = \frac{A}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + B,$$

dove E, G ***sono i coefficienti dell' elemento lineare sferico ed*** A, B ***sono funzioni della sola*** v.

§. 200.

Determinazione di tutte le superficie della classe.

Abbiamo già de lotto, alla fine del §. 198, dalla condizione (α) del Dini il teorema di Blutel, ed ora, invertendo queste considerazioni, dimostriamo come si possono trovare tutte le superficie della classe deducendole da quelle già note con un sistema di linee di curvatura piane.

Supponiamo *data* una superficie S colle linee v di curvatura sferiche e, per rendere più breve la discussione, escludiamo i due casi già studiati: 1.° che le sfere contenenti le linee v siano concentriche (§. 193), 2.° che le linee v siano circoli (sferiche e piane ad un tempo).

Potremo rappresentare la superficie S colle formole (23) e le funzioni A, B; V_1, V_2, V_3, soddisferanno alla condizione (α). Cerchiamo ora di determinare *tutte* le superficie $\bar{S}$ aventi a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura e le cui linee v di curvatura siano ancora sferiche. Indicando con

$$\bar{A}, \bar{B}; \bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$$

le funzioni di v, analoghe per la $\bar{S}$ a quelle sopra introdotte per la S, avremo insieme alla (α) l'altra

$$(\bar{\alpha}) \qquad \bar{B}' + \bar{V}_1' X_3 + \bar{V}_2' Y_3 + \bar{V}_3' Z_3 = \bar{A} \int G$$

e ponendo

$$\bar{A} = \lambda A ,$$

sarà λ una funzione della sola v. Paragonando le due equazioni (α), ($\bar{\alpha}$) avremo

$$(27) \quad \bar{B}' - \lambda B' + (\bar{V}_1' - \lambda V_1') X_3 + (\bar{V}_2' - \lambda V_2') Y_3 + (\bar{V}_3' - \lambda' V_3') = 0,$$

e questa, *se non è un'identità*, lega linearmente X_3, Y_3, Z_3 con coefficienti funzioni della sola v; per ciò sulla sfera le linee v = cost.te sarebbero circoli, indi anche sulla superficie contro l'ipotesi. Dunque la (27) è necessariamente un'identità e sussistono le proporzioni

$$(28) \qquad \frac{\bar{V}_1'}{V_1'} = \frac{\bar{V}_2'}{V_2'} = \frac{\bar{V}_3'}{V_3'} = \frac{\bar{A}}{A} = \frac{\bar{B}'}{B'} ,$$

il che prova che la soluzione più generale del problema proposto è quella già indicata al §. 198 per la dimostrazione del teorema di Bluteł. Osserviamo che l'eguaglianza dei tre primi rapporti nelle (28) ha il seguente significato geometrico:

Le due curve Γ, $\bar{\Gamma}$ *luogo dei centri delle sfere contenenti le linee di curvatura* v *per le rispettive superficie* S, $\bar{S}$ *sono trasformate di Combescure l'una dell'altra* (§. 22).

Viceversa, presa una trasformata di Combescure qualunque $\bar{\Gamma}$ della curva primitiva Γ, e dette $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$ le coordinate di un punto mobile su $\bar{\Gamma}$, si avrà

$$\bar{V}_1' = \lambda V_1', \quad \bar{V}_2' = \lambda V_2', \quad \bar{V}_3' = \lambda V_3' ,$$

essendo λ una funzione di v. Basterà allora prendere le funzioni $\bar{A}$, $\bar{B}$ di v dalle formole

$$\bar{A} = \lambda A , \quad \bar{B} \int \lambda B' \, dv ,$$

e le relative formole (23)

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{A} X_1 + B X_3 + \bar{V}_1 \\ \bar{y} = \bar{A} Y_1 + \bar{B} Y_3 + \bar{V}_2 \\ \bar{z} = A Z_1 + B Z_3 + \bar{V}_3 \end{cases}$$

definiranno una superficie $\bar{S}$ colle linee di curvatura v sferiche ed avente a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura.

In generale di due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ che abbiano a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura (che si corrispondano per parallelismo di normali e per linee di curvatura) diremo che sono *trasformate di Combescure* l'una dell'altra (1). Ed ora dimostriamo facilmente il teorema: *Fra le trasformate* $\bar{S}$ *di Combescure di una superficie* S *con linee* v *di curvatura sferiche ve ne sono infinite le cui linee di curvatura* v *sono tracciate sopra sfere che passano per un punto fisso dello spazio.*

E infatti se si vuole che per le superficie $\bar{S}$ le sfere contenenti le linee v passino per. es. per l'origine, siccome l'equazione di una di queste sfere è

$$(x - \bar{V}_1)^2 + (y - \bar{V}_2)^2 + (z - \bar{V}_3)^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 ,$$

basterà porre fra $\bar{A}$, $\bar{B}$; $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$ la relazione

$$\bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 + \bar{V}_3^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 ,$$

ossia assoggettare la funzione arbitraria λ (v) a soddisfare all'equazione

$$(\int \lambda V_1' \, dv)^2 + (\int \lambda V_2' \, dv)^2 + (\int \lambda V_3' \, dv)^2 = \lambda^2 A^2 + (\int \lambda B' \, dv)^2 ,$$

ciò che è manifesto potersi fare in infiniti modi (2).

Ma ridotta la superficie $\bar{S}$ ad avere le linee sferiche v sopra sfere per l'origine, basta un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questo centro per cangiare le linee di curvatura sferiche in

(1) Ciascuna linea di curvatura dell'una è trasformata di Combescure della corrispondente linea di curvatura dell'altra.

(2) Dalla (29) con successive derivazioni si possono eliminare gli integrali e costruire una corrispondente equazione differenziale per λ (Vi Darboux IVème Partie p. 250).

linee di curvatura piane. Abbiamo così stabilito il risultato finale in vista:

Per trovare tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche si prenda la più generale superficie con un sistema di linee di curvatura piane, e se ne costruisca la trasformata S *per inversione; fra le trasformate di Combescure della* S *si trovano tutte le superficie richieste.*

CAPITOLO XII.

Le superficie d'area minima

Cenno storico. — Le superficie minime come superficie di traslazione. — Formole di Weierstrass. — Le superficie minime algebriche. — Superficie minime doppie di Lie. — Superficie minime con linee di curvatura piane. — Superficie minime applicabili (Superficie associate). — Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione. — Le formule di Schwarz e il problema di Björling, Cauchy. — Criterio per la deformabilità di una superficie in superficie minima.

§. 201.

Cenno storico.

La teoria delle superficie d'area minima (a curvatura media nulla) forma oggidì uno dei Capitoli più completi ed estesi della geometria infinitesimale. Le sue molteplici relazioni colla teoria delle funzioni di variabile complessa, in particolare con quella delle equazioni differenziali lineari, e col calcolo delle variazioni dànno a questo studio un grande interesse. Noi dovremo limitarci ad esporre i risultati fondamentali e rimandiamo il lettore, che desideri approfondire l'argomento, alle classiche Lezioni del Darboux (T. I, 2ª Ediz. 1914), ove troverà un'esposizione completa della teoria; ivi pure, e nella memoria di Beltrami, (1) troverà ampie notizie storiche intorno all'argomento. Pel nostro scopo ci atterremo specialmente, nel presente Capitolo, alla breve esposizione che ne ha dato Schwarz (2).

I principii della teoria delle superficie minime rimontano alla celebre memoria ove Lagrange pose i fondamenti del Calcolo delle variazioni (3).

---

(1) *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* (Memorie dell'Acc. di Bologna t. VIII 1868) Opere complete T. II pag. 1-51.

(2) *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* SCHWARZ-WERKE Bd. I pp. 168-188.

(3) Miscellanea Taurinensia T. II (1760-61).

Consideriamo nello spazio un contorno chiuso C ed una superficie connessa S terminata a questo contorno; la superficie dicesi *ad area minima* se essa ha la più piccola area rispetto a tutte le superficie infinitamente vicine, terminate al medesimo contorno. Se l'equazione di S si scrive sotto la forma cartesiana ordinaria, si tratta di *minimizzare* l'integrale doppio

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

sotto le date condizioni ai limiti, e l'applicazione dei primi principii del calcolo delle variazioni ha condotto Lagrange a costruire per queste superficie l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,$$

che sviluppata si scrive

$$(\alpha)\qquad (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

L'interpretazione geometrica di questa equazione venne data da Meusnier (1776), il quale riconobbe che essa esprime la proprietà della superficie di avere, in ogni punto, i due raggi principali di curvatura eguali e di segno contrario (curvatura media nulla). A tutte queste superficie si dà il nome di superficie d'area minima o *superficie minime*, denominazione giustificata da ciò che ogni superficie a curvatura media nulla, per convenienti contorni tracciati sopra di essa, possiede in effetto la proprietà di minimo d'area da cui parte la definizione.

A Meusnier è pure dovuta la scoperta delle due prime superficie minime che si conobbero: il catenoide e l'elicoide rigata, che si ottengono subito cercando le soluzioni della (α) della forma

$$z=f(x^2+y^2) \qquad \text{(superficie di rotazione)}$$

e dell'altra

$$z=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(conoidi rette)}.$$

Monge fu il primo a dare (nel 1784) l'integrale completo delle (α); ma la forma poco appropriata alle applicazioni, sotto cui compariva l'integrale, non permise per lungo tempo di conoscere altre superficie minime *reali*, oltre le due scoperte da Meusnier. Nel 1834 Scherk trovò le superficie minime elicoidali e la superficie minima di traslazione

$$z=\frac{1}{a}\log\frac{\cos ax}{\cos ay}. \quad (^1)$$

I progressi più importanti della teoria datano di poi dalla pubblicazione dei lavori di O. Bonnet (1853-60), il quale riconobbe la proprietà fondamentale delle superficie minime che la loro rappresentazione sferica di Gauss, è una *rappresentazione conforme*, e diede le equazioni integrali sotto una forma che permetteva di ottenere tutte le superficie minime reali ed infinite superficie algebriche.

Nel 1866 comparvero le importanti memorie di Weierstrass, ove le formole di Monge vengono poste sotto una forma semplice ed elegante, che permette di risolvere varie questioni fondamentali. In queste memorie vengono pure enunciati importanti risultati relativi al così detto *problema di Plateau* (di cui tratta il Capitolo seguente). Questo celebre problema è pure trattato in una memoria postuma di Riemann, e in una serie di importantissimi lavori di Schwarz.

In un altro ordine di ricerche ci restano da menzionare, fra le più importanti pubblicazioni sull'argomento quelle di S. Lie (1877-78) che interpretò nel modo geometrico più semplice le formole di Monge, e volse principalmente le sue ricerche allo studio delle superficie minime algebriche.

§. 202.

La superficie minima come superficie di traslazione.

Cominciamo il nostro studio dalla accennata interpretazione geometrica di Lie delle formole di Monge. Per una superficie minima qualunque S, essendo nulla la curvatura media, dovremo avere nelle consuete notazioni

$$(1)\qquad ED''+GD-2FD'=0,$$

per qualunque sistema coordinato a cui la superficie sia riferita. Ora

(1) Questa è l'unica soluzione della (α) della forma $z=f(x)+\varphi(y)$.

assumiamo a linee coordinate (α, β) sulla superficie minima le linee di *lunghezza nulla* (1) caratterizzate dalla proprietà che loro tangenti si appoggiano al circolo immaginario all' infinito (§. 46), ed avendosi allora

$$E = G = 0, \tag{2}$$

la (1) dimostra che la superficie è minima solo quando $D' = 0$, cioè: *Le superficie d' area minima sono caratterizzate dalla proprietà che le loro linee di lunghezza nulla formano un sistema coniugato* (2).

Ma di più si ha, a causa delle (2),

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

e per ciò l' equazione di Laplace relativa al sistema coniugato (α, β) (§. 78) è semplicemente

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0.$$

Secondo quanto si è visto al §. 80, abbiamo dunque il risultato: *Le superficie d' area minima sono superficie di traslazione le cui curve generatrici sono le linee di lunghezza nulla (curve minime).*

Le equazioni parametriche di una superficie minima si scrivono quindi:

$$x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \quad y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \quad z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta) \tag{3}$$

colle condizioni

$$\begin{cases} f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0 \\ \varphi_1'^2(\beta) + \varphi_2'^2(\beta) + \varphi_3'^2(\beta) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Cangiando i parametri α, β, si possono anche porre sotto la forma:

(1) Si esclude qui il caso delle sviluppabili isotrope $1 + p^2 + q^2 = 0$ nelle quali le linee di lunghezza nulla sono coincidenti, esse soddisfano all' equazione

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0.$$

(2) Questo è geometricamente evidente perchè nella indicatrice di DUPIN i diametri che vanno ai punti ciclici sono coniugati solo quando la conica è un' iperbola equilatera.

$$x = \alpha + \beta, \quad y = f(\alpha) + \varphi(\beta), \quad z = i \int \sqrt{1 + f'^2(\alpha)}\, d\alpha + i \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}\, d\beta, \tag{3*}$$

che è appunto quella data da Monge.

Ricorrendo alla seconda generazione delle superficie di traslazione (§. 80), si ha la costruzione di Lie: *Si considerino due curve minime (di lunghezza nulla)* Γ, Γ_1 *definite dalle equazioni*

$$\Gamma) \quad x = 2 f_1(\alpha), \quad y = 2 f_2(\alpha), \quad z = 2 f_3(\alpha) \quad (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0)$$

$$\Gamma_1) \quad x = 2 \varphi_1(\beta), \quad y = 2 \varphi_2(\beta), \quad z = 2 \varphi_3(\beta) \quad (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2 = 0).$$

Il punto di mezzo del segmento che unisce un punto qualunque dell' una con un punto qualunque dell' altra curva descrive una superficie minima (la più generale).

Per avere una superficie minima *reale* basterà assumere le due curve minime Γ, Γ_1 coniugate immaginarie, ed allora il punto di mezzo del segmento che unisce un punto qualunque di Γ col coniugato di Γ_1 descriverà una superficie reale (1). La costruzione di Lie pone anche in evidenza l' esistenza di infinite superficie minime algebriche, bastando assumere le due curve Γ, Γ_1 algebriche; ed anzi in questo modo si ottengono *tutte* le superficie minime algebriche (2).

Alle formole di Monge si arriva anche subito utilizzando il teorema di Beltrami (§. 82) che le coordinate x, y, z di un punto della superficie minima S sono soluzioni del $\Delta^2 \theta = 0$ (costruito rispetto al ds^2 della superficie). Riferita la S (che ora supporremo *reale*) ad un sistema isotermo con

$$ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

saranno dunque x, y, z tre soluzioni dell' equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} = 0,$$

(1) Che tutte le superficie minime *reali* si ottengano in questo modo si dimostra subito più oltre.

(2) Se la superficie minima S è algebrica siano C, C_1 due curve minime dello stesso sistema. La traslazione che porta C in C_1 trasporta S in una nuova posizione S_1 e la C_1 è intersezione (completa o parziale) delle due superficie algebriche S, S_1.

le cui coniugate indichiamo con x_1, y_1, z, per cui avremo

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\,; \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}$$

e analogamente per (y, y_1), (z, z_1); inoltre

$$(5) \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2, \quad S\,\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0\,.$$

Ponendo

$$(6) \qquad u = x + i\,x_1, \quad v = y + i\,y_1, \quad w = z + i\,z_1$$

saranno u, v, w funzioni della variabile complessa $t = \alpha + i\,\beta$, legate per le (5) dalla relazione

$$(7) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0\,,$$

e indicando (con Weierstrass) *col simbolo*

$$\mathrm{R}\,(u)$$

la parte reale di una quantità complessa u, le formole (6) si scriveranno

$$(\mathrm{I}) \qquad x = \mathrm{R}\,(u)\,, \quad y = \mathrm{R}\,(v)\,, \quad z = \mathrm{R}\,(w)$$

Viceversa: *se u, v, w sono tre funzioni di variabile complessa t le cui derivate sono legate dalla relazione* (7), *le formole* (I) *definiscono parametricamente per α, β una superficie minima reale* S. E infatti, si ha

$$\Delta_2 x = \Delta_2 y = \Delta_2 z = 0\,.$$

Sotto questa forma (I), le equazioni delle superficie minime furono date da Weierstrass e scrivendole

$$x = \frac{1}{2}\,(u + u_0)\,, \quad y = \frac{1}{2}\,(v + v_0)\,, \quad z = \frac{1}{2}\,(w + w_0)\,,$$

dove u_0, v_0, w_0 sono le coniugate di u, v, w si ritorna alla generazione di Lie mediante la curva minima

$$(\Gamma) \qquad x = u\,(t)\,, \quad y = v\,(t)\,, \quad z = w\,(t)$$

e la sua coniugata

$$(\Gamma_0) \qquad x_0 = u_0\,(t_0)\,, \quad y_0 = v_0\,(t_0)\,, \quad z_0 = z_0\,(t_0)\,.$$

Questo dimostra che in effetto si ottengono tutte le superficie minime reali prendendo, nella costruzione di Lie, le curve minime fondamentali coniugate.

Si osservi ora che sopra ciascuno dei piani complessi u, v, w risulta una rappresentazione conforme della superficie minima, e dalla formola

$$ds^2 = \frac{1}{2}\,(du\,du_0 + dv\,dv_0 + dw\,dw_0)$$

si vede che il ds^2 della superficie è la semisomma dei ds^2 delle tre suddette rappresentazioni piane.

Riemann ne ha dedotto un' interessante conseguenza osservando che in ogni rappresentazione conforme le aree elementari stanno fra loro come i corrispondenti ds^2, onde il teorema:

L' area di una porzione di superficie minima rappresentata dalle (I) *è la semisomma delle aree corrispondenti nei piani complessi u, v, w.*

§. 203.

Formole di Weierstrass.

Ritorniamo ora a stabilire le formole fondamentali delle superficie minime ricorrendo alla proprietà caratteristica per siffatte superficie di ammettere una rappresentazione sferica di Gauss conforme, sicchè ad ogni sistema ortogonale isotermo (u, v) sulla sfera corrisponde una superficie minima, che si ha per quadrature (§. 166).

Scrivendo il ds'^2 della sfera sotto la forma

$$(8) \qquad ds'^2 = \frac{1}{r_2}\,(du^2 + dv^2)\,,$$

e supponendo noti X, Y, Z in funzione di u, v, la corrispondente superficie minima sarà data per quadrature dalle formole

$$(9)\qquad \begin{cases} dx = r_2\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\,du - \dfrac{\partial X}{\partial v}\,dv\right) \\ dy = r_2\left(\dfrac{\partial Y}{\partial u}\,du - \dfrac{\partial Y}{\partial v}\,dv\right) \\ dz = r_2\left(\dfrac{\partial Z}{\partial u}\,du - \dfrac{\partial Z}{\partial v}\,dv\right), \end{cases}$$

da cui per l'elemento lineare della S abbiamo

$$(10)\qquad ds^2 = r_2\,(du^2 + dv^2)\,,$$

e i raggi principali di curvatura di S saranno r_2 e $r_1 = -r_2$. Ora scriviamo nuovamente le equazioni parametriche della sfera, riferita alle generatrici come al §. 56 pag. 145 (Cf. anche §. 189):

$$(11)\qquad X = \frac{\tau+\tau_0}{\tau\tau_0+1}\,,\quad Y = \frac{1}{i}\,\frac{\tau-\tau_0}{\tau\tau_0+1}\,,\quad Z = \frac{\tau\tau_0-1}{\tau\tau_0+1}\,,$$

e la corrispondente espressione del ds'^2

$$(12)\qquad ds'^2 = \frac{4\,d\tau\,d\tau_0}{(\tau\tau_0+1)^2}\,.$$

Siccome tanto $\sigma = u + i\,v$ quanto τ sono variabili complesse sulla sfera, sarà σ funzione di τ, ovvero della coniugata τ_0; ma possiamo limitarci al primo caso (chè l'altro equivale a cangiare v in $-v$). Scrivendo ora la (8) sotto la forma

$$ds'^2 = \frac{1}{r_2}\,d\sigma\,d\sigma_0 = \frac{1}{r_2}\,\frac{d\sigma}{d\tau}\,\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,d\tau\,d\tau_0\,,$$

e confrontando colla (12) si ha

$$r_2 = \frac{(\tau\tau_0+1)^2}{4}\,\frac{d\sigma}{d\tau}\,\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,,$$

onde la (10) diventa

$$ds^2 = \frac{(\tau\tau_0+1)^2}{4}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau\,d\tau_0\,.$$

Ora esprimiamo le (9) per τ, τ_0, osservando che per una funzione

qualunque $\Phi(u, v)$ di u, v espressa per τ, τ_0 si ha

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,du - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\,dv = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} + i\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{d\sigma}{d\tau}\,d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - i\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,d\tau_0\,,$$

e d'altronde

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma}{d\tau}\,\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \dfrac{d\sigma}{d\tau}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau_0} \\ \dfrac{d\sigma}{d\tau}\,\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau}\,. \end{cases}$$

Sostituendo nelle (9) troviamo:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{1}{4}\,(1-\tau^2)\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \dfrac{1}{4}\,(1-\tau_0^2)\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0 \\ dy = \dfrac{i}{4}\,(1+\tau^2)\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau - \dfrac{i}{4}\,(1-\tau_0^2)\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0 \\ dz = \dfrac{1}{2}\,\tau\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \dfrac{1}{2}\,\tau_0\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2, \end{cases}$$

dove i secondi membri sono decomposti nella somma di due quantità complesse coniugate. Ed ora se poniamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \mathrm{F}(\tau)\,,$$

i valori di x, y, z risultano prendendo le parti reali degli integrali

$$(6)\qquad \int(1-\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad i\int(1+\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad \int 2\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau$$

calcolati lungo un medesimo cammino nel piano complesso τ. Si hanno così *le formole di Weierstrass*, che definiscono parametricamente una superficie minima:

$$(\mathrm{II})\qquad x = \mathrm{R}\int(1-\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad y = \mathrm{R}\int i\,(1+\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad z = \mathrm{R}\int 2\,\tau\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau,$$

essendo $\mathrm{F}(\tau)$ una funzione arbitraria della variabile complessa. Queste sono manifestamente un caso particolare delle (I), essendo nulla la somma dei quadrati delle funzioni sotto il segno nei tre integrali (*b*). L'elemento lineare della S ed il raggio (positivo) principale di

curvatura r_2 sono poi dati dalle formole

$$ds^2 = (\tau\tau_0 + 1)^2 F(\tau) F_0(\tau_0) d\tau d\tau_0 \tag{13}$$

$$r_2 = \frac{(\tau\tau_0 + 1)^2}{2} \sqrt{F(\tau) F_0(\tau_0)} . \tag{14}$$

Inoltre le linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ sono date dall'eguagliare a costanti la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di σ, cioè: *Le linee di curvatura della superficie minima* (II) *hanno per equazioni*

$$R \int \sqrt{F(\tau)}\, d\tau = \text{cost.}^{te} , \quad R \int i \sqrt{F(\tau)}\, d\tau = \text{cost.}^{te} . \tag{15}$$

§. 204.

Nuova forma delle formole (II). Superficie minime algebriche.

Le formole (II) di Weierstrass possono scriversi liberate dai segni di quadratura, solo che si riguardi $F(\tau)$ come la *derivata terza* $\varphi'''(\tau)$ di un'altra funzione $\varphi(\tau)$, essa stessa arbitraria. Le formole prendono allora l'aspetto seguente:

$$(II^*) \qquad \begin{cases} x = R\{(1-\tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau)\} \\ y = R\{i(1+\tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) + 2i\varphi(\tau)\} \\ z = R\{2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau)\} \end{cases}$$

e pongono in evidenza, che se $\varphi(\tau)$ è funzione *algebrica* di τ, la superficie minima sarà pure algebrica. Ora dimostriamo che: *Viceversa ogni superficie minima algebrica si ottiene dalle formole* (II*) *ponendovi per* $\varphi(\tau)$ *una funzione algebrica.*

Per provare questo Weierstrass premette il seguente lemma. Sia

$$w = u + iv = f(x + iy)$$

una funzione della variabile complessa $x + iy$; allora: *se in un determinato campo sussiste una relazione algebrica fra* x, y *e la parte reale* u *della* w, *è necessariamente* w *funzione algebrica di* $x + iy$ [1].

Nell'intorno di un punto, che per semplicità assumiamo nell'origine $x = 0$, $y = 0$, abbiasi w sviluppata in serie di Taylor:

$$w = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(x + iy) + (a_2 + ib_2)(x + iy)^2 + \dots ,$$

essendo le a, b costanti reali, e sia r il raggio del cerchio di convergenza; avremo nello stesso campo la parte reale u sviluppata per potenze di x, y colla formola

$$u = a_0 + \frac{1}{2}(a_1 + ib_1)(x + iy) + \frac{1}{2}(a_2 + ib_2)(x + yi)^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{2}(a_1 - ib_1)(x - iy) + \frac{1}{2}(a_2 - ib_2)(x - iy)^2 + \dots \tag{16}$$

Per ipotesi si ha

$$G(u, x, y) = 0 , \tag{17}$$

il primo membro essendo un polinomio razionale intero in u, x, y. Sviluppando questa relazione per potenze di x, y, i coefficienti di ogni singolo termine saranno nulli, e tali rimarranno se in luogo di x, y poniamo quantità complesse $\bar{x}, \bar{y}$, purchè dopo la sostituzione lo sviluppo rimanga convergente. Ma, pel modo di convergenza delle serie di potenze, ciò avviene certamente della serie (16) per u se i moduli di $\bar{x}$, $\bar{y}$ rimangono inferiori a $\frac{r}{2}$ [2]. Poniamo adunque

$$x = \frac{x + iy}{2} , \quad \bar{y} = \frac{x + iy}{2i} ,$$

dopo di che la (16) diventa

$$\bar{u} = a_0 + \frac{1}{2}(w - a_0 - ib_0) ,$$

e la (17) si cangia in una relazione algebrica fra w e $x + iy$, ciò che dimostra il lemma.

---

[1] In altri termini ogni funzione armonica di x, y che sia algebrica è la parte reale di una funzione algebrica di $x + iy$.

[2] Perchè allora $|\bar{x} + i\bar{y}| \leq |x| + |y| < r$.

Ciò posto, supponiasi che la superficie minima rappresentata dalle (II*) sia algebrica; fra le quantità

$$\frac{X}{1-Z}=\frac{\tau+\tau_0}{2},\quad \frac{Y}{1-Z}=\frac{\tau-\tau_0}{2i}$$

e ciascuna delle tre quantità x, y, z sussisterà una relazione algebrica. Il lemma dimostrato prova che ciascuna delle tre funzioni

$$\begin{cases} f_1(\tau)=(1-\tau^2)\varphi''(\tau)+2\tau\varphi'(\tau)-2\varphi(\tau) \\ f_2(\tau)=i(1+\tau^2)\varphi''(\tau)-2i\tau\varphi'(\tau)+2i\varphi(\tau) \\ f_3(\tau)=2\tau\varphi''(\tau)-2\varphi'(\tau) \end{cases}$$

sarà funzione algebrica di τ, e per ciò anche

$$\frac{1}{4}(\tau^2-1)f_1(\tau)-\frac{i}{4}(\tau^2+1)f_2(\tau)-\frac{1}{2}\tau f_3(\tau)=\varphi(\tau),$$

sarà funzione algebrica di τ, come si era asserito.

Le formole (II) di Weierstrass essendo lineari rispetto a $F(\tau)$, se in esse sostituiamo prima due funzioni $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$, poi la loro combinazione lineare

$$a F_1(\tau)+b F_2(\tau),$$

con a, b costanti e $a+b=1$, dànno una terza superficie minima e ne segue il teorema (Weierstrass):

Se fra i punti di due superficie minime S, S' *si stabilisce una corrispondenza per parallelismo di normali e su ciascun segmento* PP' *che riunisce una coppia di punti corrispondenti, si sceglie un punto* M *che lo divida in un rapporto costante* r, *il luogo del punto* M *è una nuova superficie minima corrispondente alle* S, S' *per parallelismo di normali.*

Ciò segue del resto anche subito dal fatto che l'equazione *tangenziale* delle superficie minime è l'equazione lineare omogenea:

$$\Delta_2 W+2W=0$$

e vale più in generale per le superficie di Goursat (§. 159)

$$\Delta_2 W=c\,W \qquad (c \text{ costante})$$

§. 205.

Superficie minime doppie.

Le formole (II) di Weierstrass stabiliscono, nel modo più semplice, il legame fra *le funzioni di variabile complessa* e le superficie minime; ad ogni tale funzione $F(\tau)$ corrispondendo una superficie minima, determinata a meno di una traslazione nello spazio. Ma ora si domanda: possono due diverse funzioni $F(\tau)$, $f(\tau)$ corrispondere ad una medesima superficie minima? Per rispondere a tale questione supponiamo che siano τ, τ' i rispettivi valori degli argomenti in F, f che corrispondono al medesimo punto della superficie. La direzione della normale corrispondente a τ coinciderà con quella corrispondente a τ', ovvero avrà la direzione opposta; nel primo caso sarà $\tau'=\tau$, nel secondo invece (§. 56)

$$\tau'=-\frac{1}{\tau_0}.$$

Se siamo nel primo caso, le formole (II) di Weierstrass dànno subito

$$F(\tau)=f(\tau)$$

e nel secondo invece

$$F(\tau)=-\frac{1}{\tau^4}f_0\left(-\frac{1}{\tau}\right),\ (^1)$$

ciò che possiamo anche scrivere

$$f(\tau)=-\frac{1}{\tau^4}F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Si vede adunque che: *alle due funzioni, generalmente diverse,*

(¹) Essendo $f(\tau)$ una funzione *analitica* di τ, definita inizialmente da una serie di potenze, col simbolo $f_0(\tau)$ si indica l'altra definita dalla serie di potenze ottenuta dalla prima col cangiare in questa i coefficienti nei loro coniugati (serie che ha lo stesso cerchio di convergenza). La relazione fra $f(\tau)$, $f_0(\tau)$ permane in ogni prolungamento analitico.

$$F(\tau), -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

le formole (II) *di Weierstrass fanno corrispondere la stessa superficie minima*, perchè i differenziali delle coordinate risultano eguali nei due casi.

Ma può anche accadere che le due funzioni indicate coincidano e questo conduce alla interessante nozione di Lie di superficie minime doppie.

Nella attuale ipotesi la regione della superficie nell' intorno del punto $-\frac{1}{\tau_0}$ o proviene per traslazione da quella nell' intorno di τ, o assolutamente coincide con questa. Se avviene la prima cosa, la superficie ammette una traslazione in sè medesima ed è quindi periodica, indi di necessità trascendente. Nella seconda ipotesi (che si verifica dunque certamente se la superficie è algebrica) si osservi che ad un cammino sulla sfera complessa che vada dal punto τ al diametralmente opposto $-\frac{1}{\tau_0}$ corrisponde un cammino chiuso sulla superficie; ma al ritorno la normale ha cangiato con continuità il proprio senso nell' opposto. Si può dunque passare con continuità sulla superficie da una faccia all' opposta; la superficie ha cioè una sola faccia e si dice con Lie una superficie minima *doppia*. Per es. è questo il caso per la superficie minima di Henneberg, corrispondente al valore

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4};$$

tale superficie è algebrica, della 5ª classe e del 15° ordine.

§. 206.

Le superficie minime con linee di curvatura piane.

Cominciamo dall' osservare che: *Se una superficie minima possiede un sistema di linee di curvatura piane, anche il secondo sistema è composto di linee piane.* Difatti, siccome in ogni caso le immagini sferiche delle linee di curvatura formano un sistema ortogonale isotermo, se le linee del primo sistema dànno circoli sulla sfera, lo stesso accade del secondo (§. 115).

Corrispondentemente alle due forme del ds'^2 sferico, riferito ad un doppio sistema ortogonale di circoli, che abbiamo determinato al §. 189, avremo dunque due specie di queste superficie minime, le prime corrispondenti alla forma (3) ibid.

$$(\alpha) \qquad ds'^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2},$$

la seconda alla (5) ibid.

$$(\beta) \qquad ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\cosh v + a\cos u)^2};$$

nel primo caso (α) la superficie minima corrispondente è unica (a meno di un' omotetia), nel secondo (β) contiene ancora la costante essenziale a.

α) La superficie minima corrispondente a questo caso deve avere per linee di curvatura i circoli

$$R(\tau) = \text{cost.}^{te} \qquad R(i\tau) = \text{cost.}^{te}$$

e si otterrà dunque per le (15) dalle formole (II) di Weierstrass ponendovi $F(\tau)$ eguale ad una costante reale. Facendo $F(\tau) = \frac{3}{4}$, avremo per le equazioni parametriche della superficie

$$(18) \quad x = \frac{1}{4}(u^3 - 3u - 3uv^2),\ y = \frac{1}{4}(3v + 3u^2 v - v^3),\ z = \frac{3}{4}(v^2 - u^2)$$

Questa è la notevole *superficie minima d' Enneper*; essa è algebrica (razionale), del 9° ordine e della 6ª classe, ed ha per linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ delle cubiche piane razionali e per linee asintotiche $u - v = \text{cost.}^{te}$ $u + v = \text{cost.}^{te}$ delle cubiche gobbe. Notevolissima è pure la sua generazione geometrica come inviluppo di piani, data da Darboux, come caso particolare della costruzione geometrica al §. 190.

Calcolando $W = Xx + Yy + Zz$ mediante le (1) §. 189 troviamo

$$W = \frac{v^4 + 3v^2 - u^4 - 3u^2}{4(u^2 + v^2 + 1)},$$

e siccome qui $\lambda = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2}$ possiamo porre nelle formole del

§. 190

$$-2U = \frac{u^4 + 3u^2}{4}, \quad 2V = \frac{v^4 + 3v^2}{4}.$$

Ora i quadrati dei raggi delle serie di sfere (7), (8) ibid., che hanno i centri distribuiti sulle due parabole focali, sono dati da

$$2U + \frac{1}{4}\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{16}$$

$$-2V + \frac{1}{4}\left(v^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{16}.$$

Nel caso attuale adunque le sfere si possono prendere di raggio costante $= \frac{1}{4}$, onde segue la costruzione geometrica richiesta: *La superficie minima d' Enneper è l' inviluppo dei piani normali nei punti medii delle congiungenti i punti di una parabola coi punti della parabola focale.*

E siccome queste congiungenti sono le normali della ciclide del 3° ordine di Dupin (§. 156) si può enunciare questo risultato sotto l' altra forma: *L' inviluppata media della ciclide del 3° ordine di Dupin è la superficie minima d' Enneper.*

β) Per questo secondo caso β) procediamo direttamente colle formole (9), ponendo secondo la (5) §. 189

$$r_2 = (\cosh v + a\cos u)^2.$$

Applicando le formole (9) e le (4) §. 189 e integrando troviamo per le equazioni parametriche delle superficie minime richieste (Bonnet):

$$x = au + \operatorname{sen} u \cosh v, \quad y = v + a\cos u \operatorname{senh} v, \tag{19}$$

$$z = \sqrt{1 - a^2}\cos u \cosh v.$$

Si osservi che il piano $z = 0$, ossia $u = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ sega la superficie in infinite catenarie tutte eguali e colle direttrici parallele all'asse $O\,y$; esse sono tutte linee di curvatura della superficie, la quale risulta già definita dalla proprietà di avere una catenaria per linea di curvatura, (v.ª più oltre §. 210). Si osservi poi che l' angolo σ sotto cui il piano $z = 0$ taglia la superficie è dato da $\cos\sigma = a$, e in particolare per $a = 0$ la superficie (19) diventa il catenoide.

Osserviamo che, conformemente alle formole (1) §. 202, i secondi membri della (19) sono le parti reali delle tre seguenti funzioni della variabile complessa $t = u + iv$:

$$at + \operatorname{sen} t, \quad -i(t + a\operatorname{sen} t), \quad \sqrt{1 - a^2}\cos t,$$

che hanno nulla la somma dei quadrati delle tre derivate. Paragonando colle formole (11) di Weierstrass facilmente si trova:

La superficie minima trascendente (19) *a linee di curvatura piane corrisponde a prendere nelle formole* (11) *di Weierstrass*

$$F(\tau) = \frac{2(\sqrt{1 - a^2})^2}{\{1 - a + (1 - a)\tau^2\}^2}$$

§. 207.

Superficie minime applicabili.

Le superficie minime, riguardate come flessibili ed inestendibili, godono della notevole proprietà che possono deformarsi con continuità sempre conservandosi ad area minima. Per ricercare queste deformazioni facciamo uso delle considerazioni seguenti (Schwarz l. c). Siano S, S' due superficie minime applicabili l' una sull' altra; la curvatura essendo la stessa nei punti corrispondenti anche i valori assoluti dei corrispondenti raggi principali di curvatura sono eguali. Ne segue che le loro immagini sferiche sono eguali direttamente o inversamente. Ma possiamo limitarci al primo caso, l' altro riconducendosi a questo col cangiare il senso positivo della normale ad una delle due superficie, e restando di più escluso se ammettiamo che la deformazione avvenga con continuità. Ciò posto, muoviamo una delle due superficie nello spazio per modo che le immagini sferiche si sovrappongano; così: *in due punti* P, P' *corrispondenti per l' applicabilità le normali saranno parallele,* e P, P' corrisponderanno ad uno stesso punto τ della sfera complessa. In queste condizioni siano $F(\tau)$, $f(\tau)$ i valori della funzione $F(\tau)$ di Weierstrass per le due superficie, onde dalla formola (13), per la supposta eguaglianza dei due elementi lineari, seguirà subito

$$F(\tau)\,F_0(\tau) = f(\tau)\,f_0(\tau_0),$$

ossia

$$\frac{f(\tau)}{F(\tau)} = 1.$$

Il rapporto $\frac{f(\tau)}{F(\tau)}$ sarà dunque una costante di modulo $= 1$, cioè avremo

$$f(\tau) = e^{i\alpha} F(\tau),$$

con α costante reale. Inversamente dalla (13) si vede che non varia l'elemento lineare cangiando $F(\tau)$ in $e^{i\alpha} F(\tau)$, qualunque valore si attribuisca alla costante reale α. Possiamo quindi enunciare il risultato:

La deformazione più generale di una superficie d'area minima, per la quale si conserva ad area minima si ottiene cangiando nelle formole (II) *di Weierstrass* $F(\tau)$ *in* $e^{i\alpha} F(\tau)$, *con* α *costante arbitraria reale.*

Così da una superficie minima si ottiene, per flessione continua, una serie ∞^1 di superficie minime; queste diconsi superficie minime *associate*. Esaminiamo più da vicino le singolari proprietà di queste deformazioni, osservando quali sono le nuove linee di curvatura sulle superficie deformate. Sulla primitiva S, posto

$$\sigma = u + iv = \int \sqrt{2 F(\tau)}\, d\tau$$

esse sono date, secondo le (15), da

$$u = \text{cost.}^{\text{te}}, \quad v = \text{cost.}^{\text{te}};$$

sulla associata S_α, corrispondente al valore α del parametro, le linee di curvatura si ottengono eguagliando a costanti la parte reale od immaginaria di $e^{\frac{i\alpha}{2}}\sigma$ ed hanno quindi le equazioni

$$\begin{cases} u\cos\frac{\alpha}{2} - v\,\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \text{cost.}^{\text{te}} \\ u\,\text{sen}\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2} = \text{cost.}^{\text{te}}. \end{cases}$$

Di qui vediamo: *Alle linee di curvatura della superficie minima* S_α, *associata alla* S, *corrispondono su questa le trajettorie isogonali sotto l'angolo* $\frac{\alpha}{2}$ *delle antiche linee di curvatura.*

Particolarmente interessante è il caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$; allora le linee di curvatura della S si cangiano sulla $S_{\frac{\pi}{2}}$ in asintotiche, e le asintotiche di S in linee di curvatura. Due tali superficie minime associate S, $S_{\frac{\pi}{2}}$ diconsi, secondo Bonnet, superficie minime *coniugate in applicabilità.*

Indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate dei punti di questa superficie minima coniugata in applicabilità della S, avremo dalle (II), cangiandovi $F(\tau)$ in $iF(\tau)$

$$(20) \qquad x_0 = \mathrm{R}\int i(1-\tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad y_0 = -\mathrm{R}\int (1+\tau^2) F(\tau)\, d\tau,$$

$$z_0 = \mathrm{R}\int 2i\tau F(\tau)\, d\tau,$$

cioè x_0, y_0, z_0 sono le parti immaginarie degli integrali nei secondi membri delle (II).

Facendo variare α con continuità, la superficie si deformerà con continuità, e indicando con x_α, y_α, z_α le coordinate di un suo punto generico avremo

$$(21) \qquad x_\alpha = x\cos\alpha + x_0\,\text{sen}\,\alpha, \quad y_\alpha = y\cos\alpha + y_0\,\text{sen}\,\alpha,$$

$$z_\alpha = z\cos\alpha + z_0\,\text{sen}\,\alpha.$$

Se si prendono gli integrali nelle (II) e nelle (20) per un medesimo cammino da 0 a τ, rimarrà fissa durante la deformazione l'origine situata sulla superficie ed ivi il piano tangente: le (21) dimostrano che le trajettorie descritte dai singoli punti nella deformazione continua sono altrettante ellissi col centro nel punto fisso.

In particolare per $\alpha = \pi$, le (21) dànno

$$x_\pi = -x, \quad y_\pi = -y, \quad z_\pi = -z$$

cioè la superficie si è deformata con continuità nella simmetrica rispetto all'origine. Così vediamo verificata in un caso concreto la proprietà generale osservata da E. E. Levi per superficie isometriche a curvature opposte (Cf. la nota al §. 139 pag. 373).

Esprimendo ora colle (21) che si ha

$$dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2 + dz_\alpha^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2,$$

ne risulta

$$dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \tag{22}$$

formola che si verifica anche subito direttamente.

Ha luogo dunque quest'altra notevole proprietà:

Due superficie minime coniugate in applicabilità si corrispondono altresì per ortogonalità d'elementi.

In generale: *per la superficie minima* S *e la sua associata* S_α *è costante ed eguale ad* α *l'angolo di due elementi lineari corrispondenti.*

Si può ancora osservare, in riguardo alla trasformazione che subisce una linea geodetica qualunque nella deformazione che la normale principale conserva la stessa direzione, e la tangente subendo la deviazione costante α, si tratta della trasformazione di curve studiata al §. 28, nella quale: *le due curvature della geodetica subiscono una sostituzione ortogonale.* In particolare, nel passaggio da una superficie minima alla sua coniugata in applicabilità, ogni geodetica scambia le sue due curvature.

In fine osserviamo che, scrivendo le equazioni di una superficie minima S sotto la forma generale (I) §. 202, si ottengono anche qui le superficie minime associate moltiplicando contemporaneamente u, v, w per e^{ic} (c costante reale), e potendosi qui porre in particolare

$$w = \alpha + i\beta, \quad z = \alpha, \quad z_1 = \beta\ (^1),$$

ne risulta

$$z_c = \alpha\cos c - \beta\,\mathrm{sen}\,c.$$

Ora le linee $z =$ cost.te sono le *linee di livello* della superficie minima S rispetto alla giacitura del piano $x\,y$, e le $z_1 =$ cost.te quelle *di pendenza.* Sulla superficie S_0 le linee di livello $z_0 =$ cost.te tagliano sotto l'angolo costante c le antiche linee di livello, onde abbiamo: *Deformando una superficie minima* S *in una sua associata* S_0 *le nuove linee di livello (rispetto a qualunque giacitura) sono le trajettorie isogonali sotto l'angolo costante* c *delle antiche linee di livello.* In particolare, nel passaggio da una superficie minima alla sua coniugata in applicabilità, tutte le linee di livello si cangiano in linee di pendenza e inversamente.

(1) Si tenga presente che nelle formole del §. 202 le x_1, y_1, z_1 sono le coordinate del punto mobile sulla superficie coniugata in applicabilità.

§. 208.

Proprietà caratteristiche delle superficie minime associate

Le proprietà descritte nel paragrafo precedente per l'applicabilità delle superficie minime associate sono tanto più notevoli in quanto che bastano in generale, anche prese isolatamente, a caratterizzare una coppia di superficie minime associate.

Questo dimostreremo stabilendo successivamente le proposizioni seguenti:

a) Se due superficie diverse applicabili possono collocarsi nello spazio in modo che in punti corrispondenti abbiano normali parallele, esse sono superficie minime associate.

Siano S, S_0 le due supposte superficie, che avranno a comune l'immagine sferica, e gli elementi della seconda superficie siano indicati coll'opposizione dell'indice o. Per la formola fondamentale (3) §. 84 relativa alla rappresentazione sferica avremo

$$H(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2) = H_0(D_0\,du^2 + 2D_0'\,du\,dv + D_0''\,dv^2).$$

Supponendo $H \neq 0$, ne seguirebbe che D, D', D'' sarebbero proporzionali a D_0, D_0', D_0'', e quindi per l'eguaglianza delle due curvature, (1) rispettivamente eguali, od eguali e di segno contrario, indi le superficie sarebbero congruenti per traslazione, o simmetriche. Dunque necessariamente $H = 0$, $H_0 = 0$ e S, S_0 sono dunque superficie minime associate c. d. d.

b) Se in due superficie applicabili S, S_0 *le coppie di elementi lineari corrispondenti fanno fra loro angolo costante* σ, *la* S, S_0 *sono superficie minime associate.*

Dimostriamo prima che, se $\sigma = \frac{\pi}{2}$, la S e la S_0 sono superficie minime coniugate in applicabilità.

(1) Propriamente escludiamo così il caso che le S, S_0 siano sviluppabili. Ma allora i due spigoli di regresso dovrebbero corrispondersi per eguaglianza d'arco e di flessione e parallelismo di binormali, onde sarebbero curve identiche.

Abbiamo dunque

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2$$

$$dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0\,, \tag{22*}$$

e prendasi per semplicità un sistema ortogonale (u, v) di riferimento, onde

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2 = E, \quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 = G \tag{23}$$

$$S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = S\,\frac{\partial x_0}{\partial u}\,\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0\,,$$

e dalla (22*)

$$S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, \quad S\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0, \quad S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_0}{\partial v} + S\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_0}{\partial u} = 0. \tag{24}$$

Possiamo scrivere, con moltiplicatori convenienti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \alpha\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + \beta\,\dfrac{\partial x}{\partial v} + \gamma\,X \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \alpha'\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + \beta'\,\dfrac{\partial x}{\partial v} + \gamma'\,X, \end{cases}$$

e dalle due prime (24) abbiamo subito

$$\alpha = 0\,, \quad \beta' = 0\,,$$

poi dalla terza

$$\alpha' E + \beta G = 0\,, \text{ o } \beta = \lambda E\,, \ \alpha' = -\lambda G$$

sicchè abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \lambda E\,\dfrac{\partial x}{\partial v} + \gamma\,X \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = -\lambda G\,\dfrac{\partial x}{\partial u} + \gamma'\,X\,. \end{cases}$$

Ed ora dalle (23)

$$\lambda^2 E^2 G + \gamma^2 = E\,, \quad \lambda^2 G^2 E + \gamma'^2 = G$$

$$\gamma\gamma' = 0\,,$$

onde segue

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{EG}}\,, \quad \gamma = \gamma' = 0\,,$$

ossia

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\sqrt{G}\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,. \tag{25}$$

Le normali a S, S_0 sono dunque parallele e rientriamo nella proposizione *a)*; ma poichè S, S_0 si corrispondono per ortogonalità d'elemento sono coniugate in applicabilità (1).

Assoluto questo primo caso, il generale in cui si supponga

$$S\,dx^2 = S\,dx_0^2, \quad S\,dx\,dx_0 = \cos\sigma\,S\,dx^2$$

si riconduce subito a questo, ponendo

$$\bar{x} = \frac{x_0 - x\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,, \quad \bar{y} = \frac{y_0 - y\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,, \quad \bar{z} = \frac{z_0 - z\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,,$$

chè allora

$$S\,dx^2 = S\,d\bar{x}^2\,, \quad S\,dx\,d\bar{x} = 0\,.$$

c) Se deformando S *in una superficie* S_0 *ogni geodetica di* S *si trova su* S_0 *colle due curvature permutate, la* S *e la* S_0 *sono superficie minime coniugate in applicabilità* (2).

Per dimostrare questo si osservi che per ogni linea geodetica la prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ coincide, salvo il segno, colla curvatura normale e la torsione $\frac{1}{T}$ colla torsione geodetica, cioè (§. 72 e §. 109)

$$\frac{1}{\rho} = \pm\,\frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{ds^2}\,,$$

$$\frac{1}{T} = \frac{(F\,D - E\,D')\,du^2 + (G\,D - E\,D'')\,du\,dv + (G\,D' - F\,D'')\,dv^2}{\sqrt{E\,G - F^2}\,ds^2}\,.$$

---

(1) Oppure, ottenute le (25), si prosegua così. Le linee (u, v) siano di curvatura su S; per le (25) sono le asintotiche su S_0, ed essendo ortogonali, la S_0 è ad area minima e la S la sua coniugata in applicabilità.

(2) Più in generale si può dimostrare che se le due curvature di ogni geodetica subiscono una medesima sostituzione ortogonale, S e S_0 sono superficie minime associate.

Per la nostra ipotesi

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{1}{T}, \tag{26}$$

indi

$$D_0 = \pm \frac{FD - ED'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad 2D_0' = \pm \frac{GD - ED''}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D_0'' = \pm \frac{GD' - FD''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e per ciò anche

$$\begin{cases} G D_0 - 2 F D_0' + E D_0'' = 0 \\ D'' D_0 - 2 D' D_0' + D D_0'' = 0. \end{cases} \tag{27}$$

La prima dice che la superficie S_0 è ad area minima, la seconda che le sue asintotiche (ortogonali) diventano sopra S linee di curvatura (1). Ed ora, invertendo S con S_0, segue che anche S è ad area minima, cioè si tratta di due superficie minime coniugate in applicabilità.

§. 209.

Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione.

Cerchiamo tutte le superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione. Sia S una tale superficie minima, che ammetterà quindi una flessione *continua* in sè, e per ciò anche una deformazione infinitesima che farà scorrere in sè medesime le linee L deformate dei paralleli. Per le considerazioni fondamentali al §. 207, l'immagine sferica della superficie subirà un movimento infinitesimo sulla sfera, che sarà una rotazione attorno ad un diametro della sfera, onde segue che le immagini sferiche delle linee L sono circoli in piani perpendicolari a questo diametro; di più anche per la flessione continua *finita* di S in sè medesima l'immagine sferica roterà attorno al detto asse (2). Prendiamo questo asse per asse delle z e la detta rotazione sarà rappresentata dal cangiamento di τ in $\tau e^{i\alpha}$, indicando con α l'ampiezza della rotazione. Siccome il ds^2 dato dalla (13) non deve cangiare per questo mutamento, sarà quindi

$$| F(\tau) | = | F(\tau e^{i\alpha}) |,$$

onde la funzione $\frac{F(\tau e^{i\alpha})}{F(\tau)}$, avendo modulo $= 1$, sarà una costante $e^{i\beta}$ con β costante reale, e avremo

$$F(\tau e^{i\alpha}) = e^{i\beta} F(\tau). \tag{28}$$

Di qui derivando logaritmicamente si deduce

$$\tau e^{i\alpha} \frac{F'(\tau e^{i\alpha})}{F(\tau e^{i\alpha})} = \tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}, \tag{28*}$$

e la funzione $\tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}$, lungo ogni circolo del piano τ col centro in $\tau = 0$ è costante, e per ciò eguale a una costante assoluta k. Dunque abbiamo

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = \frac{k}{\tau},$$

e integrando

$$F(\tau) = C \tau^k, \tag{29}$$

con C, k costanti, delle quali però la seconda è certamente reale dovendosi avere per la (28)

$$e^{i\alpha k} = e^{i\beta}, \quad \alpha k = \beta + 2n\pi.$$

Inversamente, con questa formola (29), le condizioni sono soddisfatte e concludiamo quindi:

---

(1) Se le u, v sono le asintotiche di S_0 si ha $D_0 = D_0'' = 0$ e quindi per la seconda (27) $D' = 0$.

(2) Alla flessione continua della S in sè corrisponde per l'immagine un *gruppo continuo* ad un parametro di movimenti della sfera, che è di necessità una rotazione continua attorno ad un diametro. Ma si può anche modificare il procedimento nel testo come segue. Si consideri una deformazione *finita* di S in sè medesima alla quale corrisponderà sulla sfera una rotazione d'ampiezza α che varierà in modo continuo al variare della deformazione e potremo quindi supporre *incommensurabile con* 2π. Valgono allora le deduzioni del testo per questa α fissa e la formola (28*). Ma allora, essendo α incommensurabile con 2π, la funzione $\tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}$ riprende, su ogni circolo col centro in $\tau = 0$, infinite volte il medesimo valore ed è per ciò una costante.

Le superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione si ottengono dalle formole (11) *di Weierstrass ponendo* $F(\tau) = C\tau^k$, *dove* k *è una costante reale e* C *una costante qualunque.*

Come si vede, queste superficie minime, prescindendo da una costante ovvia di omotetia, formano una doppia infinità.

Si osservi poi che, avendosi qui

$$u + iv = \mathfrak{o} = \int 2\tau^2 \, d\tau ,$$

se si esclude pel momento il caso $k = -2$, ne risulta

$$\mathfrak{o} = u + iv = \frac{2C}{k+2}\tau^{k+2}$$

e i moduli di $\mathfrak{o}$ e di τ sono insieme costanti. La formola (14) prova che r_2 è una funzione di $u^2 + v^2$, cioè

$$ds^2 = f(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2), \tag{30}$$

e questo dimostra nuovamente che la superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione, perchè per una qualunque sostituzione ortogonale:

$$\begin{cases} u' = u\cos\dfrac{\alpha}{2} - v\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha}{2} \\ v' = u\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha}{2} + v\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \qquad (\alpha \text{ costante})$$

non muta il ds^2 dato dalla (30). Queste sono anzi le formole per la flessione continua della superficie in sè; e poichè nel passaggio da una superficie minima ad una sua associata le nuove linee di curvatura sono appunto le $u' = \text{cost.}^{te}$, $v' = \text{cost.}^{te}$ si conclude che: *le superficie minime associate delle attuali (per* $k \neq -2$*) sono identiche di forma alla primitiva e se ne ottengono per rotazione di questa attorno all' asse.*

In particolare si osservi che per $k = 0$, o $F(\tau) = C$ si ottiene nuovamente *la superficie minima d' Enneper* (§. 206), *la quale è adunque applicabile sopra una superficie di rotazione e identica di forma alle sue associate.*

Veniamo in fine al caso escluso $k = -2$, e dalle formole di Weierstrass, integrando, avremo per le corrispondenti superficie minime

$$x = \mathrm{R}\left\{C\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)\right\}, \qquad y = \mathrm{R}\left\{iC\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)\right\}, \tag{31}$$

$$z = -\mathrm{R}\left\{2C\log\tau\right\}.$$

Attualmente, mutando τ in $\tau e^{i\alpha}$, la z aumenta di una costante e x, y si cangiano rispettivamente in

$$x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$$

e la superficie subisce un movimento elicoidale in sè attorno all' asse Oz: *le superficie minime* (31) *sono elicoidi coll'asse* Oz. Ma è anche facile vedere che queste sono *le più generali superficie minime elicoidali*, perchè un' elicoide è sempre applicabile sopra una superficie di rotazione, e deve essere quindi data dà $F(\tau) = C\tau^k$, ma non può essere $k \neq -2$, poichè le sue associate sarebbero l' elicoide stessa e le linee di curvatura non cangierebbero: *Le superficie minime elicoidali si ottengono tutte dalle formole di Weierstrass ponendovi* $F(\tau) = \dfrac{C}{\tau^2}$.

Per scrivere esplicitamente le formole relative alle superficie minime elicoidali, poniamo in evidenza i moduli e gli argomenti di C e di τ ponendo

$$C = \frac{m}{2}e^{i\beta}, \qquad \tau = e^{-v+i\omega}$$

e troveremo:

$$\begin{cases} x = m(\cos\beta\,\cosh v\cos\omega + \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{senh}\,v\,\mathrm{sen}\,\omega) \\ y = m(\cos\beta\,\cosh v\,\mathrm{sen}\,\omega - \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{senh}\,v\cos\omega \\ z = m(v\cos\beta + \omega\,\mathrm{sen}\,\beta) \end{cases} \tag{32}$$

La superficie corrispondente a $\beta = 0$ è il catenoide (che è l' unica superficie minima di rotazione), e per $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ abbiamo la sua coniugata in applicabilità che è l' elicoide rigata ad area minima (Cf. §. 131 *a)*).

$$z = m\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{33}$$

Aggiungiamo in fine il teorema di Catalan:

L' unica superficie rigata d' area minima è l' elicoide (33). — Questo si dimostra subito osservando che, per una rigata ad area minima, le trajettorie ortogonali delle generatrici sono asintotiche ed hanno tutte in comune, nelle generatrici, le loro normali principali, proprietà che già al §. 27 abbiamo riscontrata essere esclusiva dell' elicoide rigata (33). Al medesimo risultato arriviamo anche osservando che se (§. 143)

$$ds^2 = du^2 + (M^2 u^2 + 2 N u + 1)\, dv^2$$

è l' elemento lineare della supposta rigata R ad area minima, riferita alle generatrici $r =$ cost.te ed alle trajettorie ortogonali $u =$ cost.te, siccome il sistema (u, v) è isotermo, le funzioni M, N di v debbono ridursi a costanti [1]), di cui la prima (includendola in v) si può senz' altro porre $= 1$, indi

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + m^2)\, dv^2 \qquad (m \text{ cost.te}).$$

La coniugata in applicabilità di R, sulla quale le (u, v) sono diventate di curvatura, è adunque una superficie di rotazione, cioè il catenoide.

§. 210.

Le formole di Schwarz e il problema di Björling-Cauchy.

Trattiamo ora il problema: *Far passare una superficie minima per una curva data* C *in modo che essa abbia lungo* C *normali assegnate*, che si può anche enunciare così:

Costruire una superficie minima, conoscendone una striscia. Questo non è che un caso particolare del problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

[1]) Soltanto per M, N costanti resta soddisfatta la condizione d' isotermia

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log (M^2 u^2 + 2 N u + 1) = 0,$$

applicato al caso particolare della equazione per le superficie minime

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0 \quad (^1).$$

I teoremi generali assicurano che se la striscia assegnata è *analitica*, esiste una ed una sola superficie minima che la contiene. Per le superficie ad area minima il problema venne trattato da Björling e Bonnet e risoluto per quadrature. A tale scopo si adattano assai bene le formole seguenti che Schwarz ha dedotto dalle generali (1) di Weierstrass al §. 202. Posto secondo le (6) ibid.

$$u = x + i x_1, \quad v = y + i y_1, \quad w = z + i z_1,$$

si ha

$$dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = 0$$

e inoltre

$$X\, dx_1 + Y\, dy_1 + Z\, dz_1 = 0,$$

da cui

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = Z\, dy - Y\, dz : X\, dz - Z\, dx : Y\, dx - X\, dy.$$

Di più avendosi

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ne segue

$$dx_1 = \pm (Z\, dy - dz), \quad dy_1 = \pm (X\, dz - Z\, dx), \quad dz_1 = \pm (Y\, dx - X\, dy).$$

Ma l'incertezza del segno si toglie ricorrendo alle effettive espressioni di u, v, w per τ e alle formole (II) §. 203; si ha invero

$$du = (1 - \tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad dv = i (1 + \tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad dw = 2 \tau F(\tau)\, d\tau$$

$$dx = \frac{1}{2} (du_0 + du), \quad dy = \frac{i}{2} (dv_0 - dv), \quad dz_1 = \frac{1}{2} (dw_0 - dw)$$

$$dx_1 = \frac{i}{2} (du_0 - du), \quad dy_1 = \frac{i}{2} (dv_0 - dv), \quad dz_1 = \frac{i}{2} (dw_0 - dw),$$

[1]) Le caratteristiche di questa equazione a derivate parziali sono immaginarie e coincidono colle curve minime.

e di qui e dalle (16), formando per es. $Y\,dx - X\,dy$, si trova che coincide con dz_1. Dunque abbiamo le formole

$$dx_1 = Z\,dy - Y\,dz\,, \quad dy_1 = X\,dz - Z\,dx\,, \quad dz_1 = Y\,dx - X\,dy\ (^1),$$

per cui i valori definitivi di u, v, w si possono scrivere sotto la forma:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} u = x + i\int (Z\,dy - Y\,dz) \\ v = y + i\int (X\,dz - Z\,dx) \\ w = z + i\int (Y\,dx - X\,dy)\,, \end{cases}$$

e queste sono appunto le formole di Schwarz

Ciò posto, supponiamo che della superficie minima S sia assegnata una *striscia analitica*, lungo la quale

$$x, y, z; \quad X, Y, Z$$

saranno funzioni analitiche date della variabile reale t, estendibili quindi al piano complesso t. Eseguite le quadrature nelle (III), estendiamo le funzioni u, v, w al piano complesso, dove saranno costante-

(1) La stessa cosa segue anche subito dalle formole del §. 202 osservando che per es.

$$dz_1 = -\frac{\partial z}{\partial \beta}\,d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,d\beta$$

e d'altronde per essere il determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial z}{\partial \beta} \\ X\,, & Y\,, & Z \end{vmatrix} = +1,$$

si ha

$$Y\frac{\partial x}{\partial \alpha} - X\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial z}{\partial \beta}\,, \quad Y\frac{\partial z}{\partial \beta} - X\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\,, \text{ ecc.}$$

mente legate dalla relazione

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0\,,$$

che ha luogo lungo l'asse reale. Le formole (I) di Weierstrass

$$x = R(u)\,, \quad y = R(v)\,, \quad z = R(w)$$

definiranno una superficie minima S, che vediamo subito contenere la striscia assegnata, perchè per t reale $R(u)$, $R(v)$, $R(w)$ si riducono alle coordinate di un punto mobile di C, e i coefficienti dell'immaginario x_1, y_1, z_1 agli integrali

$$\int (Z\,dy - Y\,dz)\,, \int (X\,dz - Z\,dx)\,, \int (Y\,dx - X\,dy)\,,$$

e i coseni di direzione della normale lungo C, come proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 \end{vmatrix},$$

coincideranno appunto coi valori dati lungo C per X, Y, Z.

Inoltre è da osservare che non esiste altra superficie minima contenente la striscia. Poichè infatti, mentre il punto mobile percorre la curva C sostegno della striscia, la sua immagine sferica

$$\tau = \frac{X + iY}{1 - Z}$$

percorre sulla sfera una curva Γ perfettamente determinata. Lungo Γ le funzioni u, v, w, date dalle (III), sono determinate a meno di costanti additive e non possono continuarsi sulla sfera complessa che in un unico e determinato modo. Così dunque: *Una superficie minima è perfettamente individuata da una sua striscia.*

Due casi particolari del teorema generale meritano di essere rilevati:

α) *Ogni retta giacente sopra una superficie minima è asse di simmetria per la superficie.*

È infatti un ribaltamento di π attorno alla retta riconduce in sè stessa la striscia, e per ciò anche la superficie.

Del resto, applicando le formole (III) di Schwarz e prendendo la supposta retta per asse delle z, pongasi in questo caso

$$\begin{cases} x = 0, \ y = 0, \ z = t \\ X = \cos\sigma, \ Y = \operatorname{sen}\sigma, \ Z = 0, \end{cases}$$

con σ funzione analitica di t; le (III) dànno

$$u = -i\int \operatorname{sen}\sigma\, dt, \quad v = i\int \cos\sigma\, dt, \quad w = t.$$

Le u, v sono puramente immaginarie per t reale, indi per valori coniugati di t avranno le rispettive parti reali eguali e di segno contrario. Così ad ogni punto (x, y, z) della superficie ne corrisponderà uno simmetrico $(-x, -y, z)$ rispetto all'asse Oz.

Il secondo corollario del teorema generale che vogliamo rilevare è il seguente:

β) *Se un piano taglia ortogonalmente una superficie minima, esso è piano di simmetria per la superficie.* In tal caso infatti la simmetria rispetto al piano riporta in sè la striscia lungo il piano e per ciò anche la superficie.

Osserviamo che in generale se vogliamo: *determinare una superficie minima da una sua linea geodetica* C (mantenendo le consuete notazioni della teoria delle curve) dobbiamo porre nelle formole di Schwarz

$$t = s, \quad X = \xi, \quad Y = \eta, \quad Z = \zeta,$$

onde

$$u = x + i\int \lambda\, ds, \quad v = y + i\int \mu\, ds, \quad w = z + i\int \nu\, ds.$$

In particolare se la curva C è piana, ciò che corrisponde al nostro caso β), possiamo porre

$$z = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1,$$

il che dà

$$u = x, \quad v = y, \quad w = is$$

Per valori coniugati di s le parti reali di u, v conservano il medesimo valore e quella di w muta segno, onde la superficie è simmetrica rispetto al piano $\overset{\wedge}{xy}$, ciò che dà una verifica del teorema β).

§. 211.

Superficie applicabili sopra superficie minime.

Proponiamoci ora il problema: *Data una superficie* S, *riconoscere se essa è applicabile sopra una superficie minima.* Essendo dato il ds^2 della superficie:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

il problema equivale all'altro di riconoscere quando è che si possono determinare i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale in guisa da soddisfare alle equazioni di Gauss e Codazzi *e insieme all'altra*

$$ED'' + GD - 2FD' = 0.$$

La questione si può presentare anche sotto quest'altra forma: Per quali ds^2 hanno soluzioni comuni le due equazioni del secondo ordine

$$\begin{cases} \Delta_{22}\theta = (1 - \Delta_1\theta)\,K \\ \Delta_2\theta = 0 \end{cases}$$

Ma nel modo più semplice si risolve il problema ricordando che l'elemento lineare di una superficie minima, riferita alle sue linee di curvatura, è dato da

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

mentre la curvatura ha il valore

$$K = -\frac{1}{\lambda^2},$$

onde la forma quadratica

$$\sqrt{-K}\,ds^2 = du^2 + dv^2$$

è *a curvatura nulla.* Viceversa supponiamo che per una superficie (a curvature opposte) di elemento lineare

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e di curvatura K la forma differenziale

$$\sqrt{-K}\,(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

sia a curvatura nulla. Con quadrature (§ 41) potremo ridurla alla forma normale

$$d\alpha^2 + d\beta^2,$$

e ponendo $K = -\frac{1}{\lambda^2}$, sarà

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{34}$$

e quindi

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\beta^2}\right),$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\beta^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

Dunque l' elemento lineare

$$\frac{1}{\lambda}(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

appartiene alla sfera unitaria, e quindi il ds^2 proposto (34) ad una superficie d' area minima di cui le linee α, β sono le linee di curvatura; la superficie si avrà con quadrature note X, Y, Z in funzione di α, β (§ 166). Concludiamo: *Affinchè un dato* $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ *appartenga ad una (e quindi ad una serie* ∞^1*) di superficie ad area minima è necessario e sufficiente, che indicandone con* K *la curvatura, la forma differenziale* $\sqrt{-K}\,(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2)$ *risulti a curvatura nulla.*

In altro modo si può esprimere questa condizione scrivendo

$$\Delta_2 \log(-K) = 4\,K,$$

e sotto questa forma invariantiva venne data dal Ricci.

Se per esempio domandiamo le superficie di rotazione con

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2 \quad r = \varphi(u),$$

che sono applicabili sopra superficie minime, dovremo determinare

$\varphi(u)$ in guisa che risulti nulla la curvatura della forma

$$\sqrt{+\frac{r''}{r}}\,(du^2 + r^2\,dv^2).$$

L' equazione differenziale che ne risulta per r ricondurrebbe, integrata, ai risultati del § 209.

Ancora domandiamo: *Quali sono le superficie rigate applicabili sopra superficie minime?*

Se si prende l' elemento lineare della rigata sotto la forma

$$dz^2 = du^2 + (M^2\,u^2 + 2\,N\,u + 1)\,dv^2,$$

essendo la curvatura data da (§ 148)

$$K = -\frac{M^2 - N^2}{|\,M^2\,u^2 + 2\,N\,u + 1\,|^2},$$

indi

$$\sqrt{-K}\,ds^2 = \frac{\sqrt{M^2 - N^2}}{M^2\,u^2 + 2\,N\,u + 1}\,du^2 + \sqrt{M^2 - N^2}\,dv^2,$$

si vede che la condizione è soddisfatta solo per M, N costanti e quindi: *Le superficie rigate applicabili sopra superficie minime sono soltanto quelle delle binormali alle curve a torsione costante (deformate del catenoide).*

Capitolo XIII.

Il problema di Plateau e la superficie minima di Schwarz

Enunciato del problema di Plateau. — Considerazioni fondamentali relative alle due rappresentazioni conformi della superficie minima sulla sfera di Gauss e sul piano della variabile complessa σ. — Caso di un contorno a tratti rettilinei, o di un contorno generale di Schwarz. — Caso del quadrilatero sghembo formato da due coppie di spigoli opposti in un tetraedro regolare. — Rete ottaedrica e suo gruppo di 24 rotazioni. — La superficie minima di Schwarz con $F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}$ — Verifiche relative al contorno. — Gruppo che riproduce la superficie di Schwarz e continuazione analitica della superficie. — Superficie coniugata in applicabilità e suo gruppo. — Ritorno al problema di minimo. — Teorema di Steiner. — Teoremi di Schwarz sulla variazione seconda

§. 212.

Preliminari sul problema di Plateau.

In questo secondo Capitolo dedicato alle superficie minime, ci occuperemo delle relazioni di questa teoria col calcolo delle variazioni e in primo luogo formuleremo il problema che vi ha dato origine nel modo preciso seguente:

Dato un contorno chiuso C *nello spazio, costruire una porzione continua di superficie minima terminata a questo contorno e priva nell'interno di punti singolari.*

Sono celebri le esperienze di *Plateau*, colle quali questo fisico ha risoluto sperimentalmente il problema immergendo il contorno, realizzato fisicamente, nel liquido che porta il suo nome; la lamina fluida che resta sospesa al contorno, si conforma appunto a superficie minima.

L'analisi è ben lungi dal saper risolvere in generale il *problema di Plateau*; però nel caso in cui il contorno è formato da tratti rettilinei e in un altro caso più generale, che verrà fra breve indicato,

possediamo una serie di importanti risultati dovuti a Riemann, Weierstrass e Schwarz.

Noi ci limiteremo qui ad esporre un primo metodo che si offre spontaneamente in questa ricerca, in relazione colla teoria delle rappresentazioni conformi; questo metodo è sufficiente nei casi più semplici, in particolare per la superficie minima di Schwarz, limitata al quadrilatero sghembo formato da quattro spigoli, due a due opposti, di un tetraedro regolare. Allo studio di questo caso particolare, tanto interessante sotto molti rapporti, è principalmente dedicato il Capitolo. Questo metodo delle rappresentazioni conformi basta però soltanto, come sopra è avvertito, in pochi casi più semplici. Nelle *Lezioni* di Darboux (T. I pag. 453 s. s., 2ª ediz. pag. 490 s. s.) il lettore troverà esposto un metodo di molto maggiore efficacia e di grande interesse pei suoi rapporti colla teoria delle equazioni differenziali lineari.

Consideriamo una porzione A di superficie minima, limitata ad un contorno chiuso C, e la sua immagine sferica B, che, per la proprietà fondamentale delle superficie minime, darà una rappresentazione *conforme* dell'area A, ed ammettiamo anche che quest'area B ricopra la regione sferica con un solo strato. Riprendendo per la superficie minima S le notazioni del Capitolo precedente, introduciamo la variabile complessa

$$\sigma = \int \sqrt{2\,F(\tau)}\, d\tau,$$

la cui parte reale u ed il coefficiente dell'immaginario v, eguagliate a costanti, dànno le linee di curvatura di S.

Se, come supponiamo, la funzione σ è finita continua e monodroma nell'area A, distendendo i valori di σ nel suo piano complesso, avremo dell'area A una nuova immagine *conforme* B'. Così l'area sferica B e l'area piana B' saranno rappresentate conformemente l'una sull'altra, e nota che sia la legge di corrispondenza dei loro punti, si conoscerà completamente la superficie, perchè allora sarà nota σ in funzione di τ, e con essa la funzione di Weierstrass

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2,$$

dalla quale la superficie S è individuata.

Ove dunque il contorno assegnato C abbia tale forma che ne risulti determinata tanto l'area sferica B che la piana B', il problema

di Plateau si ridurrà, per quel contorno, al ben noto problema di analisi di rappresentare conformemente un' area data sopra un'altra.

La circostanza ora accennata si presenta appunto, prescindendo almeno da un certo grado di indeterminazione, quando il contorno C si compone di tratti rettilinei. Per l' immagine sferica B avremo in tal caso che ad ogni tratto rettilineo r del contorno C corrisponderà nel contorno di B un arco di cerchio massimo in un piano normale ad r; per conseguenza l' area B sarà un poligono sferico, il cui contorno sarà costituito da archi di circolo massimo perfettamente individuati di posizione. In secondo luogo, se consideriamo l' area piana B', siccome ogni tratto rettilineo del contorno C è un' asintotica per la superficie, il corrispondente tratto del contorno di B' sarà pure rettilineo e parallelo all' una o all' altra delle bisettrici

$$u - v = 0, \quad u + v = 0$$

degli assi coordinati sul piano B'. Il problema di Plateau si convertirà quindi, nel caso considerato, nell' altro: *Rappresentare in modo conforme il poligono sferico* B *sul poligono piano rettilineo* B'.

§. 213.

Caso di un contorno di Schwarz.

Le considerazioni stesse valgono ancora in un caso più generale formulato da Schwarz [1]) nel modo seguente:

Sia data una catena continua chiusa, formata di tratti rettilinei e di piani; si vuole determinare una superficie minima limitata dai tratti rettilinei e dai piani della catena, i quali ultimi debbono tagliare ortogonalmente la superficie.

I tratti rettilinei del contorno C sono asintotiche, e i tratti curvilinei linee di curvatura in piani normali alla superficie. Per ciò le immagini sferiche di questi ultimi tratti sono ancora archi di circolo massimo, in piani paralleli ai piani della catena. Sul piano σ la loro immagine è quindi un tratto rettilineo, parallelo all' uno o all' altro degli assi coordinati. Anche in questo caso più generale la soluzione del problema di Plateau dipende dunque dalle formole che

[1]) *Fortgesetzte Untersuchungen über Minimalflächen* (Monatsb. der Berl. Akademie 1872) Werke Bd. I S. 126 ff.

dànno la rappresentazione conforme di un poligono sferico sopra un poligono piano rettilineo.

Consideriamo per es. il caso più semplice in cui la catena sia costituita da due tratti rettilinei AB, AC terminati in B, C ad un piano, che la superficie debba tagliare ortogonalmente. Il settore ABC di superficie minima, come viene realizzato dall' esperienza, ha per immagine sulla sfera un triangolo perfettamente determinato, e l' immagine piana B' (sul piano σ) è un triangolo rettangolo isoscele coll' ipotenusa parallela ad uno degli assi coordinati. Il corrispondente problema di rappresentazione conforme si risolve, come è ben noto, per serie ipergeometriche.

Supponiamo ora di essere riusciti a risolvere, per un assegnato contorno di Schwarz, il problema di Plateau. La porzione Σ di superficie minima richiesta si otterrà dalle formole di Weierstrass, facendo muovere la variabile complessa τ entro il poligono sferico B; ma esaminiamo ora, servendoci dei teoremi di simmetria α), β) dimostrati alla fine del § 210, ciò che accade quando si consideri la continuazione analitica di questa porzione Σ di superficie minima, seguendo il prolungamento analitico della funzione $F(\tau)$. Se τ attraversa un lato l del poligono B, cui corrisponda un tratto rettilineo r del contorno C, sulla superficie passeremo da Σ al ribaltamento Σ' di questa attorno ad r, e rimarremo in questa nuova porzione Σ', finchè τ resta entro il poligono sferico simmetrico di B rispetto al lato l. Se invece al lato l di B corrisponde un tratto curvilineo di C, in un piano della catena normale a Σ, si passa allora da Σ alla porzione simmetrica Σ'' rispetto a questo piano.

Così, nella continuazione analitica della superficie minima, alla porzione Σ troviamo aderenti per ciascun lato altrettante nuove porzioni simmetriche di Σ, attorno a rette o rispetto a piani. Su ciascuna di queste possono ripetersi le considerazioni stesse, e la continuazione analitica consterà di infinite porzioni simmetriche o congruenti.

E in generale avverrà che una regione finita di spazio conterrà infinite di quelle porzioni, come si rileva considerando p. e. il caso di due tratti rettilinei del contorno concorrenti in un vertice sotto un angolo incommensurabile con π. La questione qui sollevata si collega coll' altra della discontinuità propria od impropria di un *gruppo di movimenti* e può trattarsi senza l' effettiva conoscenza della porzione di superficie minima limitata al contorno assegnato. La questione consiste infatti nel riconoscere la natura del gruppo generato dai ribaltamenti attorno ai lati rettilinei e le simmetrie rispetto ai

piani della catena. Il più semplice caso in cui la superficie minima corrispondente presenta una regolare diffusione nello spazio è quello appunto che passiamo ormai a trattare, ove il contorno di Schwarz è un quadrilatero sghembo formato da quattro spigoli, due a due opposti, di un tetraedro regolare.

Dei sei spigoli di un tetraedro regolare A B C D sopprimiamo p. e. i due opposti A D, B C, e consideriamo la porzione Σ di superficie minima limitata al quadrilatero sghembo restante A B D C. Questa superficie, come viene realizzata nella corrispondente esperienza di Plateau, è simmetrica rispetto ai piani condotti per gli spigoli soppressi A D, B C normalmente allo spigolo opposto B C o A D, e giace tutta nell' interno del tetraedro fondamentale A B C D. I piani tangenti nei quattro vertici sono appunto le facce del tetraedro e le loro pagine positive sono quelle interne per due vertici opposti, le esterne per gli altri due.

Ne risulta che l' immagine sferica di Σ è un quadrilatero sferico A' B' C' D' cogli angoli di 120°. Per ottenere un tale quadrilatero sulla sfera, basta inscrivere in questa il cubo e nei quattro vertici di una faccia si hanno appunto i vertici del quadrilatero. Ora osserviamo che il piano condotto per B C normalmente ad A D è normale a Σ e scinde questa in due settori simmetrici A B C, B D C che hanno per immagine sferica i due triangoli A' B' C', B' D' C' in cui la diagonale B' C' scinde il quadrilatero considerato.

Possiamo dunque sostituire al nostro problema l' altro più semplice della determinazione del settore minimo A B C, limitato da due tratti rettilinei A B, A C e dalla curva B C in un piano normale alla superficie. L' immagine sferica di questo settore è il triangolo A' B' C' con angoli di 120°, 60°, 60° rispettivamente in A', B', C'. Sul piano complesso σ l' immagine del medesimo settore è un triangolo rettangolo isoscele $a\,b\,c$ coll' ipotenusa $b\,c$ parallela ad uno degli assi coordinati sul piano σ.

Per trovare la funzione F (τ) di Weierstrass conveniente alla nostra superficie, bisogna adunque esprimere σ in funzione di τ in guisa che il triangolo sferico A' B' C' venga rappresentato conformemente sul triangolo piano $a\,b\,c$. Ora caliamo da A' (fig. 7ª) l' altezza A' H', dividendo così il triangolo in due simmetrici A' B' H', A' C' H' e decomponiamo nuovamente ciascuno di questi, mediante le rispettive altezze H' F', H' G' calate da H' in due triangoli minori ciascuno. Se una decomposizione del tutto analoga si effettua sul triangolo piano $a\,b\,c$ (fig. 8ª), è chiaro che basterà rappresentare in modo conforme il triangolo B' H' F', coi rispettivi angoli di 60°, 45° e 90°,

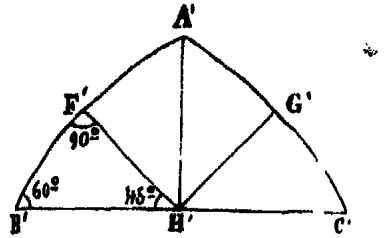


FIG. 7.ª

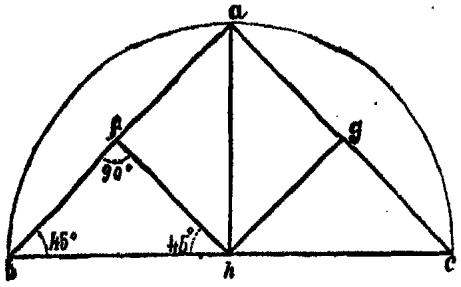


FIG. 8.ª

sul triangolo piano $b\,h\,f$ coi rispettivi angoli di 45°, 45° e 90°, in guisa che i vertici si corrispondano nell' ordine indicato.

La funzione σ (τ) che effettua questa rappresentazione, estesa colle leggi di simmetria a tutto il triangolo A' B' C', viene appunto a rappresentare quest' ultimo sul triangolo $a\,b\,c$.

Per trovare le formole corrispondenti basterà che rappresentiamo conformemente l' uno e l' altro triangolo B' F' H', $b\,f\,h$ sul semipiano di una variabile complessa ausiliaria z in guisa che al contorno di ciascuno corrisponda l' asse reale per z. In ciò potremo ancora fissare ad arbitrio i tre punti dell' asse reale sul piano z che corrispondono ai vertici, e noi fisseremo che si abbia

$$z = 0 \text{ in } (B'\,b)\,,\quad z = 1 \text{ in } (F',f)\,,\quad z = \infty \text{ in } (H',h).$$

§. 214.

La rete ottaedrica.

Nell' ipotesi dell' esistenza della funzione z (τ), che dà la rappresentazione conforme del triangolo sferico B' F' H' sul semipiano po-

sitivo z, noi andiamo ora a costruirla effettivamente come funzione razionale di τ del grado 24, e sulla espressione così ottenuta sarà poi facile verificare che essa gode delle proprietà volute (1).

Inscriviamo nella sfera complessa τ l'ottaedro regolare e projettiamone le facce, dal centro, sulla sfera, onde la sfera risulterà decomposta in 8 triangoli sferici trirettangoli. Ciascuno di questi si decomponga poi mediante le tre altezze (bisettrici, mediane) in 6 triangoli parziali, a ciascuno dei quali daremo il nome di *triangolo elementare*. La sfera è decomposta in una rete di 48 triangoli elementari, alternatamente simmetrici e congruenti e ciascuno di essi, come il triangolo $B'H'F'$ del paragrafo precedente, ha gli angoli di 60^0, 45^0, 90^0. Diremo questa la *rete ottaedrica*, e per distinguere la congruenza diretta dall'inversa, immagineremo *tratteggiati* i 24 triangoli che sono inversamente congruenti a quello da cui partiamo.

Conviene ora dare alla rete ottaedrica un'orientazione fissa sulla sfera

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

e questo facciamo ponendo due vertici opposti dell'ottaedro nei poli $(0, 0, \pm 1)$ e situando il quadrato degli altri quattro vertici, sul piano dell'equatore $\zeta=0$, coi lati paralleli agli assi $O\xi$, $O\eta$. Dopo ciò projettiamo stereograficamente sul piano dell'equatore dal polo $\tau=\infty$ $(0, 0, 1)$ la rete ottaedrica, tratteggiando i triangoli piani che sono immagini dei triangoli tratteggiati ed otterremo la figura 9.ª

I triangoli (tratteggiati) della rete ottaedrica si riuniscono quattro a quattro attorno ai vertici dell'ottaedro, tre a tre attorno ai punti medii delle facce (projettati sulla sfera), in fine due a due attorno ai punti medii degli spigoli. La considerazione diretta, o una semplice ispezione della figura, dimostra subito che i valori di τ nei punti delle tre specie sono:

$a)$ $\tau=\infty,\ 0,\ \dfrac{1\pm i}{\sqrt{1}},\ \dfrac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$ . . . . . (vertici dell'ottaedro)

$b)$ $\tau=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}i$ (punti medii delle facce)

(1) V.i Klein Ueber das Ikosaeder.

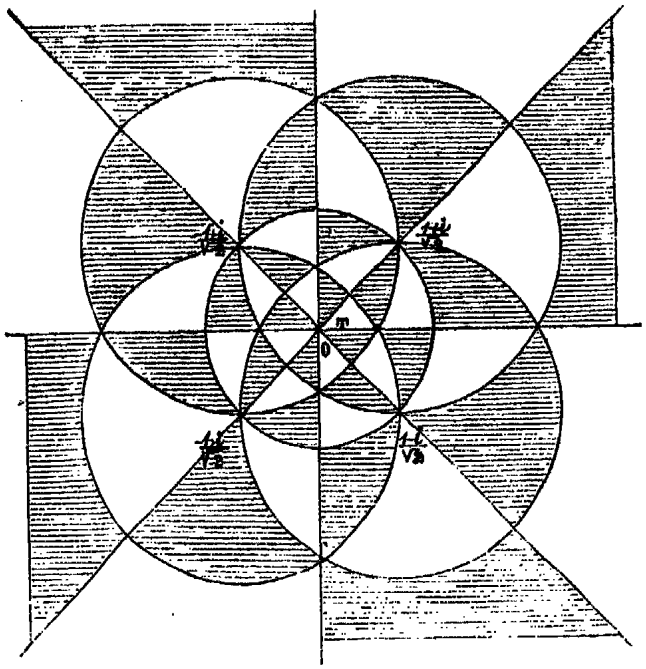


Fig. 9.ª

$c)$ $\tau=\pm 1,\ \pm i,\ (1\pm\sqrt{2})\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ (1\pm\sqrt{2})\dfrac{1-i}{\sqrt{2}},$

$-(1\pm\sqrt{2})\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ -(1\pm\sqrt{2})\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ (punti medii degli spigoli).

Costruiamo ora tre polinomii in τ dei rispettivi gradi 5, 8, 12 dei quali il primo ω si annulli del 1° ordine nei punti $a)$ salvo in $\tau=\infty$, il secondo w nei punti $b)$ ed il terzo χ nei punti $c)$. Il calcolo effettivo dà subito:

(1) $\omega=\tau(1+\tau^4),\ w=1-14\tau^4+\tau^8,\ \chi=1+33\tau^4-33\tau^8-\tau^{12}.$

§. 215.

Calcolo della funzione triangolare $z(\tau)$.

Per le nostre ipotesi, la funzione $z(\tau)$ deve dare la rappresentazione conforme del triangolo elementare T della rete, segnato nella

figura, coi vertici nei punti

$$\tau = 0\,, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,, \quad \tau = (\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

e coi rispettivi angoli di

$$45°\,, \quad 60°\,, \quad 90°$$

sul semipiano (positivo) z in guisa che mentre τ percorre il perimetro di T, z percorra l'asse reale, ai valori scritti di τ corrispondendo ordinatamente

$$z = \infty\,, \quad z = 0\,, \quad z = 1\,.$$

Estendiamo $z(\tau)$ a tutta la sfera complessa τ, secondo le note leggi di simmetria della continuazione analitica, per modo che in ogni punto τ' della sfera, appartenente ad uno dei 48 triangoli della rete, la z abbia il valore stesso che ha nel punto corrispondente τ del triangolo fondamentale T se il triangolo cui appartiene τ' è direttamente congruente con T, ed invece il valore coniugato se la congruenza è inversa. La funzione $z(\tau)$, così estesa a tutta la sfera complessa, è dappertutto regolare salvo che ha poli del 4° ordine nei punti *a*), vertici dell' ottaedro. Risulta già di qui che $z(\tau)$ è funzione razionale di τ del grado $4 \times 6 = 24$ e per trovarne l' espressione basta ora osservare che i suoi infinitesimi sono negli 8 punti *b*) (centri delle facce) e sono del terzo ordine.

La funzione razionale $\frac{w^3}{\omega^4}$ ha dunque i medesimi infinitesimi ed infiniti di $z(t)$, dalla quale non può differire che per un fattore costante C, scriviamo

$$z(\tau) = C\,\frac{w^3}{\omega^4}\,.$$

Per determinare C basta osservare che nei punti *c*), p. e. in $\tau = 1$, deve essere $z = 1$, e siccome

$$\omega = 2\,, \quad w = -12 \quad \text{per } \tau = 1\,,$$

ne viene

$$C = -\frac{1}{2^2 \cdot 3^3} = -\frac{1}{108}\,,$$

onde abbiamo in fine

$$(2) \qquad z(\tau) = -\frac{(1 - 14\,\tau^4 + \tau^8)^3}{108\,\tau^4\,(1+\tau^4)^6} = -\frac{w^3}{108\,\omega^4}\,.$$

Conviene inoltre osservare le altre formole seguenti. La funzione $z(\tau) - 1$ ha gli infiniti di z e gli infinitesimi, del secondo ordine, nei punti *c*) ove si annulla il polinomio χ; per conseguenza avremo

$$z - 1 = B\,\frac{\chi^2}{\omega^4}\,,$$

dove resta da determinare la costante B. Secondo la (2), identicamente

$$108\,\omega^4 + w^3 + 108\,B\,\chi^2 = 0\,.$$

e in questa identità ponendo p. e. $\tau = 0$ con che

$$\omega = 0\,, \quad w = \chi = 1\,,$$

viene $B = -\frac{1}{108}$. Si vede quindi che fra i tre polinomii ω, w, χ sussiste l' identità

$$(3) \qquad 108\,\omega^4 + w^3 - \chi^2 = 0\,,$$

ciò che si verifica anche subito direttamente. Così abbiamo trovato la seconda formola

$$(4) \qquad z(\tau) - 1 = -\frac{(1 + 33\,\tau^4 - 33\,\tau^8 - \tau^{12})^2}{108\,\tau^4\,(1+\tau^4)^4} = -\frac{\chi^2}{108\,\omega^4}\,.$$

Ed ora è facile calcolare anche la derivata $\frac{dz}{d\tau}$, osservando che i suoi infiniti sono in quelli di z cioè nei punti *a*) e precisamente, del 3° ordine in $\tau = \infty$, e del 5° ordine nei rimanenti cinque, sicchè è una funzione razionale del 28° ordine; la (2) dimostra che negli 8 punti *b*) ove s'annulla w la $\frac{dz}{d\tau}$ ha infinitesimi del 2° ordine, e per la (4) nei 12 punti ove s' annulla χ infinitesimi del 1° ordine, nè vi sono altri infinitesimi. La funzione $\frac{\chi\,w^3}{\omega^6}$ ha per ciò gli stessi zeri e infiniti di $\frac{dz}{d\tau}$, indi

$$\frac{dz}{d\tau} = A\,\frac{\chi\, w^4}{\omega^5} \quad (A \text{ costante}).$$

Per determinare infine la costante A, si osservi che per la (2)

$$\lim_{\tau = 0}\left(\tau^5 \frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{1}{3^3},$$

onde $A = \frac{1}{27}$, e in fine

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{27}\,\frac{\chi\, w^4}{\omega^5}. \tag{5}$$

Questa formola si verifica anche subito osservando l' identità

$$4\,w\,\frac{d\omega}{d\tau} - 3\,\omega\,\frac{dw}{d\tau} = 4\,\chi.$$

§. 216.

Verifiche relative alla rappresentazione conforme.

Colle formole ottenute sopra per la funzione razionale $z\,(\tau)$, è facile ora verificare che essa dà la rappresentazione conforme voluta.

Premettiamo perciò le considerazioni seguenti. La rete ottaedrica può portarsi a coincidere con sè medesima sovrapponendo un qualunque triangolo della rete ad uno qualunque dei 23 triangoli congruenti. Ciascuno di questi movimenti della sfera in sè è analiticamente rappresentato da una sostituzione lineare sulla variabile complessa τ, data dalla formola del Cayley (§ 59).

Abbiamo così, compresa l' identità, 24 movimenti o sostituzioni lineari che sono tutti e soli quelli che sovrappongono la rete ottaedrica a sè medesima, e per ciò stesso formano un gruppo; questo dicesi gruppo dell' ottaedro (o del cubo).

Importa scrivere le effettive espressioni di questi movimenti del gruppo, fra i quali osserviamo in primo luogo la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ attorno al diametro dell' ottaedro cogli estremi in $\tau = 0$, $\tau = \infty$ (asse polare); questa ha l' espressione

$$\tau' = i\,\tau$$

e ripetuta dà luogo alle 4 sostituzioni (compresa l' identità)

$$\tau' = i^r\,\tau \quad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Consideriamo poi il ribaltamento dell' ottaedro attorno all' asse $O\xi$, che permuta fra loro i due poli $\tau = 0$, $\tau = \infty$ e lascia singolarmente fissi i due punti $\tau = \pm 1$, onde la sostituzione corrispondente è $\tau' = \frac{1}{\tau}$ e, combinata colle quattro precedenti, dà luogo alle 8 sostituzioni

$$\tau' = i^r\tau, \qquad \tau' = \frac{i^r}{\tau} \quad (r = 0, 1, 2, 3),$$

che nel gruppo dell' ottaedro formano un sottogruppo G_8 (del diedro). Consideriamo in fine una rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ attorno alla congiungente i centri di due facce parallele opposte dell' ottaedro, rotazione manifestamente del gruppo.

Scegliamo p. e. quella che permuta circolarmente i tre vertici dell' ottaedro

$$\tau = \infty, \quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \tau = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

indi i diametralmente opposti

$$\tau = 0, \quad \tau = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \tau = -\frac{1-i}{\sqrt{2}};$$

per la sua espressione si trova subito

$$\tau' = \frac{(1+i)\,\tau + \sqrt{2}}{\tau\sqrt{2} - (1-i)},$$

ed ora combinando colle 8 precedenti, si hanno le 24 sostituzioni del gruppo dell' ottaedro sotto la forma normale:

$$(6)\quad \begin{cases} \tau' = i^r\tau, \quad \tau = \dfrac{i^r}{\tau}, \quad \tau' = i^r\dfrac{(1+i)\tau+\sqrt{2}}{\tau\sqrt{2}-(1-i)}, \quad \tau' = i^r\dfrac{(1-i)\tau+\sqrt{2}}{\tau\sqrt{2}-(1+i)} \\ \tau' = i^r\dfrac{\tau\sqrt{2}-(1-i)}{(1+i)\tau+\sqrt{2}}, \quad \tau' = i^r\dfrac{\tau\sqrt{2}-(1+i)}{(1-i)\tau+\sqrt{2}} \\ r = 0, 1, 2, 3 . \end{cases}$$

Ed ora andiamo a verificare che la funzione $z(\tau)$ data dalla (2) effettua la rappresentazione conforme voluta. Per questo cominciamo dall'osservare che: *La funzione* $z(\tau)$ *rimane inalterata se sopra l'argomento* τ *si effettua una qualunque delle 24 sostituzioni* (6) *del gruppo dell' ottaedro* (1).

Difatti una qualunque di queste scambia fra loro gli infinitesimi di $z(\tau)$, come pure gli infiniti, e di più i punti ove $z(\tau) = 1$ (2).

Ad ogni valore di z corrispondono 24 valori per τ, legati ad uno di essi dalle 24 sostituzioni (6) del gruppo; la funzione algebrica inversa $\tau(z)$ i cui 24 rami si deducono da uno di essi colle sostituzioni (6) dicesi *l' irrazionalità ottaedrica* (Klein).

Osserviamo ora che, *sul contorno di ogni triangolo elementare* $z(\tau)$ *è reale*, ciò che basta verificare p. e. pel triangolo fondamentale T della figura, coi vertici in

$$\tau = 0, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = (\sqrt{2}-1)\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Sui due lati rettilinei ciò accade certamente, giacchè ivi è già z^4 reale; sul lato curvilineo $z(\tau)$ prende gli stessi valori che sul lato rettilineo da $\tau = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, a $z = 1$ del triangolo omologo coi vertici in

(1) Per questa proprietà la $z(\tau)$ dà un primo ed elementare esempio di funzioni *automorfe*.

(2) O anche si osservi che la proprietà è evidente per le prime 8 sostituzioni (6) e si verifichi per l'altra $\tau' = \dfrac{(1+i)\tau+\sqrt{2}}{\tau\sqrt{2}-(1-i)}$.

$$\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \tau = 1, \quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

e per ciò è ancora reale. Percorrendo τ il contorno del triangolo T nel senso positivo (che lascia l'area interna alla sinistra) z percorre l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$ sempre movendosi nello stesso senso, non potendo riprendere due volte lo stesso valore (chè altrimenti ad un valore reale di z corrisponderebbero più di 24 valori per τ). Facciamo ora muovere τ nell' *interno* di T (ove z non può più riprendere valori reali) e z si muoverà nell' *interno* del suo semipiano E positivo; e poichè inversamente ad ogni valore di z in questo semipiano ne corrisponde uno in T (ed uno in ciascuno degli altri 23 triangoli congruenti), fra i punti di T e quelli del semipiano E ha luogo una corrispondenza biunivoca. Siccome poi $\dfrac{dz}{d\tau}$ non s'annulla mai nè diventa infinita in T: *la rappresentazione di* T *sopra* E *è dappertutto conforme, salvo nei vertici di* T.

§. 217.

Determinazione della superficie minima di Schwarz.

Per determinare completamente la superficie minima di Schwarz, rimane ora da rappresentare conformemente sul semipiano positivo z il triangolo rettangolo isoscele bfh del §. 213 nel piano σ, coll'ipotenusa bh parallela ad uno degli assi, poniamo all'asse reale, in guisa che si abbia

$$z = 0 \text{ in } b, \quad z = 1 \text{ in } f, \quad z = \infty \text{ in } h.$$

La nota formola di Schwarz-Christoffel per la rappresentazione conforme di un poligono rettilineo sul semipiano dà nel caso nostro

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = \frac{C}{z^{\frac{3}{2}}(z-1)},$$

e poichè per z reale negativo deve essere $\left(\dfrac{d\sigma}{dz}\right)^2$ reale positivo, dobbiamo avere

$$C = i\,A^2,$$

con A costante reale, e per ciò

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = A^2 \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}(z-1)}, \quad \sigma = A\, e^{\frac{\pi i}{4}} \int \frac{dz}{z^{\frac{3}{4}}(z-1)^{\frac{1}{2}}}.$$ (1)

La funzione $F(\tau)$ di Weierstrass per la superficie minima di Schwarz è quindi data dalla formola

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = -\frac{i\,A^2}{2} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}(z-1)} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

nella quale sostituendo i valori (2), (4), (5) per z, $z-1$, $\frac{dz}{d\tau}$, si ottiene, *a meno di una costante reale d' omotetia*

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}.$$

Ne concludiamo: *la superficie minima di Schwarz è definita dalle formole*

$$(1) \quad x = \mathrm{R}\int \frac{1-\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau, \quad y = \mathrm{R}\int \frac{i(1+\tau^2)}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau,$$

$$z = \mathrm{R}\int \frac{2\tau\,d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}.$$

Ed ora andremo appunto a verificare che, se manteniamo τ sulla sfera complessa entro uno dei 6 quadrilateri sferici con angoli di

(1) Colla sostituzione $z = t^2$, risulta

$$\sigma = 2A\sqrt{i}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t}},$$

e la quadratura porta alla speciale funzione ellittica p lemniscatica cogli invarianti

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0.$$

120°, corrispondenti alle facce del cubo, risulta in effetto una porzione regolare di superficie minima limitata a quattro spigoli, due a due opposti, di un tetraedro regolare.

Intanto si osservi che il terzo integrale nelle (1) si riduce subito a un integrale ellittico (di prima specie) colla sostituzione $\tau^2 = t$; i due primi sono apparentemente iperellittici, ma riducibili ad ellittici con sostituzioni che daremo fra breve.

Ma conviene prima girare gli assi coordinati attorno ad Oz di 45°, sostituendo a

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

nuovamente x, y; così avremo

$$x = \mathrm{R}\int \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1-i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau, \quad y = \mathrm{R}\int \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1+i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau,$$

$$z = \mathrm{R}\int \frac{2\tau\,d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}.$$

Fissiamo ora che τ si muova nel quadrilatero sferico coi vertici corrispondenti ai quattro valori di τ

$$a = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}, \quad b = ia = i\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}, \quad c = -a = -\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}},$$

$$d = -ia = -i\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}},$$

e prendiamo altresì come limite inferiore comune dei tre integrali il punto $o = -a$. Le formole che definiscono la porzione di superficie minima, sulle quali dovremo fare le indicate verifiche si scrivono:

$$(1^*) \quad x = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1-i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau, \quad y = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1+i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,d\tau,$$

$$z = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{2\tau\,d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}.$$

E dovremo anche tener presente che, dopo la rotazione effettuata di 45° degli assi Ox, Oy, bisogna introdurre il corrispondente

mutamento nelle formole (11) §. 203, che diventano ora:

$$(7^{\text{bis}}) \quad X = \frac{\tau+\tau_0-i(\tau-\tau_0)}{\sqrt{2}\,(\tau\tau_0+1)}, \quad Y = \frac{\tau+\tau_0-i(\tau-\tau_0)}{\sqrt{2}\,(\tau\tau_0+1)}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0-1}{\tau\tau_0+1}.$$

In fine, limitando il corso di τ al detto quadrilatero, per far sparire ogni ambiguità dalle formole (1*), non resta più che fissare quale è il ramo del radicale scelto per

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}},$$

e noi lo fissiamo senz'altro prendendo

$$F(0) = +1.$$

Notiamo poi che gli otto punti di diramazione del radicale essendo nei vertici del cubo,

$$\pm a, \quad \pm\frac{1}{a}, \quad \pm ia, \quad \pm\frac{i}{a},$$

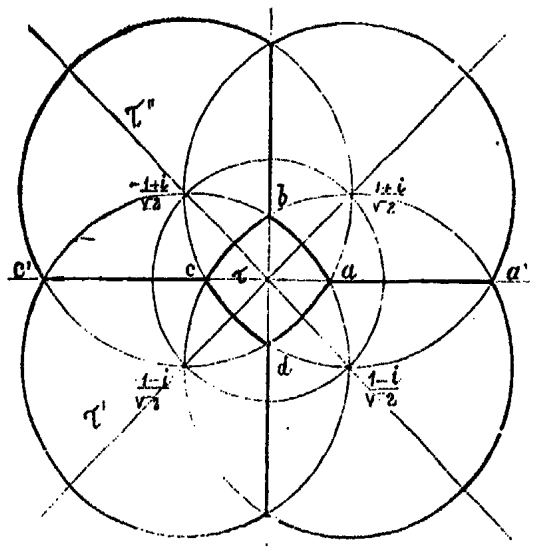


Fig. 10.ª

basterà eseguire nel piano τ quattro tagli rettilinei aa' da a fino ad $a'=\frac{1}{a}$, cc' da $-a$ fino $a-\frac{1}{a}$, bb' da ia fino a $\frac{i}{a}$, in fine dd' da $-ia$ fino $a-\frac{i}{a}$ e la funzione $F(\tau)$ nel piano così tagliato sarà una funzione finita continua e monodroma dappertutto, salvo negli 8 punti indicati.

§. 218.

Verifiche relative al contorno.

Cominciamo queste verifiche col ricercare le linee che corrispondono, sulla porzione Σ di superficie minima considerata, all'asse reale ed immaginario del piano τ ed alle loro bisettrici.

1.° Indichiamo con ρ una variabile reale; avremo lungo l'asse reale

$$\tau = \rho \quad -a \leq \rho \leq a,$$

indi

$$(8) \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-a}^{\rho}(1-\rho^2)F(\rho)\,d\rho, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-a}^{\rho}(1-\rho^2)F(\rho)\,d\rho,$$

$$z = \int_{-a}^{\rho} 2\rho F(\rho)\,d\rho,$$

e per ciò $x-y=0$. Si ha d'altra parte, lungo questa linea, per le (7), $X-Y=0$; dunque *il piano $x=y$ taglia normalmente Σ, cioè è un piano di simmetria della superficie.*

2.° Lungo l'asse immaginario è

$$\tau = i\rho, \quad d\tau = i\,d\rho$$

e indicando con x_0, y_0, z_0 i valori di x, y, z per $\tau=0$, avremo mentre τ percorre l'asse immaginario

$$(8^*) \quad x-x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}(1-\rho^2)F(\rho)\,d\rho, \quad y-y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}(1-\rho^2)F(\rho)\,d\rho,$$

$$z-z_0 = -\int_0^{\rho} 2\rho F(\rho)\,d\rho$$

e quindi

$$x+y = x_0+y_0$$

ma anche per le (7) $X+Y=0$, onde si vede che anche il piano $x+y=x_0+y_0$ è piano di simmetria per Σ.

3.° Lungo la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi, abbiamo

$$\tau = \sqrt{i}\,\rho\,, \quad d\tau = \sqrt{i}\,d\rho\,,$$

intendendo per $\sqrt{i}$ il valore

$$\sqrt{i} = \frac{1+1}{\sqrt{2}}\,,$$

e risulta quindi

$$x = x_0 + \int_0^\rho \frac{(1+\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{1+14\,\rho^4+\rho^8}}\,, \quad y = y_0\,, \quad z = z_0\,,$$

per ρ compreso nell'intervallo $(-a, +a)$. Il punto corrispondente sopra Σ descrive un tratto rettilineo parallelo all'asse Ox.

4.° Lungo la seconda bisettrice si ha

$$\tau = \sqrt{-i}\,.\,\rho\,, \quad \text{con } \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,,$$

indi

$$x = x_0\,, \quad y = y_0 + \int_0^\rho \frac{(1-\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{1+14\,\rho^4+\rho^8}}\,, \quad z = z_0\,,$$

e il punto (x, y, z) descrive un tratto rettilineo parallelo all'asse Oy. La porzione Σ di superficie minima possiede adunque intanto i due piani di simmetria

$$x - y = 0\,, \quad x + y = x_0 + x_0$$

e due assi di simmetria che sono le parallele condotte per (x_0, y_0, z_0) ai due assi Ox, Oy.

Ora poniamo

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-a}^{0} (1-\rho^2)\,F(\rho)\,d\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a (1-\rho^2)\,F(\rho)\,d\rho$$

$$B = \int_{-a}^{0} 2\,\rho\,F(\rho)\,d\rho = -\int_0^a 2\,\rho\,F(\rho)\,d\rho,$$

ed avremo

$$x_0 = y_0 - A\,, \quad z_0 = B\,.$$

Si dimostrerà al paragrafo seguente che $B = -A$; qui osserviamo che le (8), (8*) permettono di calcolare i valori di x, y, z ai quattro vertici a, b, c, d, per mezzo di A, B. Designando questi valori coll'apposizione degli indici a, b, c, d, troviamo infatti:

$$\begin{cases} x_a = 2\,A\,, & y_a = 2\,A\,, & z_a = 0 \\ x_b = 2\,A\,, & y_b = 0\,, & z_b = 2\,B \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = 0\,, & y_c = 0\,, & z_c = 0 \\ x_d = 0\,, & y_d = 2\,A\,, & z_d = 2\,B\,. \end{cases}$$

§. 219.

Riduzione a integrali ellittici.

Si è già detto (§. 217) che anche i due primi integrali delle formole (I*) possono ridursi ellittici ed ora andremo in effetto a constatare che si riducono al terzo. Osserviamo per ciò dapprima in generale che il differenziale

$$\frac{a+b\tau+c\tau^2}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}} \qquad (a,\ b,\ c \text{ costanti}),$$

applicando una qualunque delle 24 sostituzioni (6) del gruppo dell'ottaedro (§. 216) $\tau = \dfrac{\alpha\tau'+\beta}{\gamma\tau'+\delta}$ si trasforma nel differenziale omologo

$$\frac{a'+b'\tau'+c'\tau'^2}{\sqrt{1-14\tau'^4+\tau'^8}}\,,$$

dove il polinomio $a'+b'\tau'+c'\tau'^2$, eguagliato a zero, ha per radici i valori di τ' che corrispondono, secondo la sostituzione eseguita, alle radici di

$$a+b\tau+c\tau^2 = 0\,,$$

Ora nei due primi differenziali sotto il segno nelle (I*)

$$\sqrt{-i}\,\frac{1-i\tau^2}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,d\tau\,, \quad \sqrt{i}\,\frac{1+i\tau^2}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,d\tau\,,$$

le radici dei numeratori sono, in ciascuno, gli indici di due vertici

opposti dell' ottaedro, che, mediante una conveniente sostituzione del gruppo, potremo portare in $\tau = 0$, $\tau = \infty$, onde il primo e secondo integrale nelle (I*) saranno tradotti (salvo un fattore) appunto nel terzo. Per il primo integrale scegliamo la sostituzione che produce sui 6 vertici dell'ottaedro le due permutazioni circolari

$$0, -\sqrt{i}, -\sqrt{-i}) \ . \ (\infty, \sqrt{i}, \sqrt{-i}),$$

dove, come sopra

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}};$$

pel secondo integrale scegliamo l' inversa (o quadrato) della sostituzione precedente. Così la prima sostituzione è

$$(10) \qquad \tau = \frac{\sqrt{-i}\,\tau' + i}{\tau' - \sqrt{i}}, \quad \text{o} \quad \tau' = \frac{\sqrt{i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{-i}},$$

e la seconda

$$(10^*) \qquad \tau = \frac{\sqrt{i}\,\tau'' + i}{\tau'' - \sqrt{-i}}, \quad \text{o} \quad \tau'' = \frac{\sqrt{-i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{i}}.$$

Eseguendo il calcolo si trova

$$\sqrt{-i}\,\frac{1 - i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}\,d\tau = \frac{2\tau'\,d\tau'}{\sqrt{1 - 14\tau'^4 + \tau'^8}}$$

$$\sqrt{i}\,\frac{1 + i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}\,d\tau = \frac{2\tau''\,d\tau''}{\sqrt{1 - 14\tau''^4 + \tau''^8}},$$

dove soltanto rimarrà ben da fissare quale è la determinazione del ramo del radicale da scegliersi nel secondo membro di queste formole.

Se l'indice di τ resta nel quadrilatero $abcd$, quelli di τ', τ'' si muoveranno nei rispettivi quadrilateri adiacenti $cd'd'c'$, $cb'b'c'$ della fig. 10ª (pag. 582). Avendo ora $F(\tau')$, $F(\tau'')$ il significato preciso del §. 217, importa dunque decidere quale dei due segni è da scegliersi per ciascuna delle formole.

$$(11) \qquad \begin{cases} \sqrt{-i}\,(1 - i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \pm\, 2\tau'\,F(\tau')\,d\tau', \\ \sqrt{i}\,(1 + i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \pm\, 2\tau''\,F(\tau'')\,d\tau'' \end{cases}$$

Basterà per questo osservare ciò che accade nell'intorno di $\tau = 0$, trascurando le potenze superiori di τ. Abbiamo per la (10)

con $\qquad \tau = 0, \quad \tau' = -\sqrt{i}$

$$F(0) = +1, \quad F(-\sqrt{i}) = \frac{1}{4}\ (^1), \quad d\tau' = -2i\,d\tau,$$

e quindi

$$\sqrt{-i}\,(1 - i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \sqrt{-i}\,d\tau$$

$$2\tau'\,F(\tau)\,d\tau' = i\sqrt{-i}\,d\tau = -\sqrt{-i}\,d\tau.$$

Similmente

per $\tau = 0$ è $\tau'' = -\sqrt{-i}$, $F(\tau'') = \frac{1}{4}$, $d\tau'' = 2i\,d\tau$

$$\sqrt{i}\,(1 + i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \sqrt{i}\,d\tau$$

$$2\tau''\,F(\tau'')\,d\tau'' = -\sqrt{i}\,d\tau;$$

dunque in ambedue le formole (11) è il segno inferiore che vale. Le formole (I*) che definiscono Σ possono dunque scriversi nel modo seguente:

$$(12) \qquad x = -R\int_{-a}^{\tau'} 2\tau'\,F(\tau')\,d\tau', \quad y = -R\int_{-a}^{\tau''} 2\tau''\,F(\tau'')\,d\tau'',$$

$$z = R\int_{-a}^{\tau} 2\tau\,F(\tau)\,d\tau,$$

dove s' intende che τ si muova entro il quadrilatero abc partendo dal punto c, e τ', τ'' seguono i cammini conseguenti, secondo le formole (10), (10*), nei quadrilateri adiacenti $cc'd'd$, $cc'l'l$. Indicando con τ_0, τ'_0, τ''_0 le rispettive coniugate di τ, τ', τ'', scriviamo le (12) così:

$$(12^*) \qquad \begin{cases} x = -\int_{-a}^{\tau'_0} \tau'\,F(\tau')\,d\tau' - \int_{-a}^{\tau} \tau_0'\,F_0(\tau_0')\,d\tau_0' \\ y = -\int_{-a}^{\tau''} \tau''\,F(\tau'')\,d\tau'' - \int_{-a}^{\tau''_0} \tau_0''\,F_0(\tau_0'')\,d\tau_0' \\ z = \int_{-a}^{\tau} \tau\,F(\tau)\,d\tau + \int_{-a}^{\tau_0} \tau_0\,F_0(\tau_0)\,d\tau_0. \end{cases}$$

(1) Si badi che sul tratto rettilineo da o a $-\sqrt{i}$ $F(\tau)$ è sempre reale e non s'annulla.

Possiamo ora vedere facilmente quale è il contorno di Σ corrispondente al contorno $a\,b\,c\,d$ del quadrilatero in cui si muove τ: E infatti vediamo che mentre τ descrive $\overline{c\ b}$

$$\tau_0,\ \tau',\ \tau_0',\ \tau'',\ \tau_0''$$

descrivono rispettivamente i tratti

$$\overline{cd},\ \overline{cd},\ \overline{cb},\ \overline{co'},\ \overline{cd}.$$

Ora $F(\tau)$ lungo $\overline{co'}$ è puramente immaginario, onde segue dalle (12*)

$$y=0,\ x+z=0 \quad \text{lungo } \overline{cb};$$

e similmente si vede che

$$x=0,\quad y+z=0 \quad \text{lungo } \overline{cd}.$$

I due tratti corrispondenti del contorno di Σ sono dunque due segmenti rettilinei d'eguale lunghezza, inclinati l'uno sull'altro di 60°.

Basta ora riferirsi alle proprietà di simmetria osservate al paragrafo precedente per concluderne che il contorno di Σ è formato da quattro segmenti rettilinei d'eguale lunghezza, inclinati ciascuno sui due adiacenti di 60°. Di più, come si è visto sopra, Σ contiene altre due rette, congiungenti i punti medii dei lati opposti, e che si tagliano ortogonalmente nel centro del tetraedro regolare. Poichè inoltre, per quanto precede, si ha

$$x_b+z_b=0,\quad y_d+z_d=0,$$

dalle (9) risulta ora in effetto

$$B=-A,$$

e per la lunghezza l degli spigoli del tetraedro si ha quindi

$$l=2A\sqrt{2}.$$

L'integrale

$$\int_{-a}^{\tau} 2\tau F(\tau)\,d\tau$$

dal quale dipende la nostra superficie, colla sostituzione

$$\tau^2=t,$$

si riduce all'integrale ellittico

$$u=\int_{2-\sqrt{3}}^{t}\frac{dt}{\sqrt{1-14t^2+t^4}}$$

ovvero

$$u=\int_{2-\sqrt{3}}^{t}\frac{dt}{\sqrt{[(2-\sqrt{3})^2-t^2][(2+\sqrt{3})^2-t^2]}},$$

che definisce t come funzione ellittica di u col modulo

$$k=(2-\sqrt{3})^2;$$

invero risulta

$$t=(2-\sqrt{3})\,sn[(2+\sqrt{3})\,u+K].$$

§. 220.

Continuazione analitica della superficie di Schwarz.

Introducendo così nelle formole (12) le funzioni ellittiche, si possono studiare colle formole di questa teoria varie interessanti questioni relative alla superficie minima di Schwarz, in particolare quelle che ne riguardano la continuazione analitica (1). Ma per stabilire queste ultime proprietà bastano, come ora andiamo a constatare, mezzi più elementari e cioè i teoremi di simmetria congiunti a considerazioni *sui gruppi di movimenti*, colle quali si può seguire la continuazione analitica della superficie e in particolare constatarne la tripla periodicità nelle direzioni dei tre assi coordinati. La continuazione analitica di Σ si ottiene ribaltando successivamente la porzione Σ attorno a ciascuno dei suoi lati, le nuove ancora attorno ai loro lati liberi e così via indefinitamente.

Ora, proponendoci di studiare la costituzione del gruppo G di movimenti dello spazio che lasciano invariata, nella sua totalità, la superficie minima di Schwarz, osserviamo che, per ogni tale movi-

(1) V.i SCHWARZ — Bestimmung einer speciellen Minimalfläche — Werke Bd. I. S. 6 ff.

mento, la regione fondamentale Σ andrà in una congruente alla quale possiamo pure arrivare per successivi ribaltamenti attorno ai lati di porzioni congruenti a Σ e successivamente contigue, ovvero la Σ rimarrà in sè stessa. Per ciò il movimento più generale del gruppo G che riproduce la superficie minima di Schwarz, si genererà combinando il movimento ottenuto per i successivi ribaltamenti indicati con un movimento che cangi Σ in sè medesima. Questi ultimi movimenti sono evidentemente (oltre l'identità) tre soltanto, e cioè i ribaltamenti attorno alle tre congiungenti i punti medii delle costole opposte del tetraedro fondamentale, da cui siamo partiti.

Ricordiamo ora che due movimenti A, B si compongono in un terzo movimento, che indicheremo col simbolo

$$A\,B,$$

ponendo a sinistra quello eseguito sopra. Indicando con A^{-1} il movimento inverso di A, dicesi *trasformato di* B *mediante* A il movimento

$$B' = A^{-1}\,B\,A\,;$$

questo non è altro che il movimento stesso B, ma eseguito attorno all'asse in cui si trasporta l'asse centrale di B pel movimento A (1)

Ne segue che il nostro gruppo G si genera combinando i ribaltamenti elementari attorno ai lati del quadrilatero che limita Σ coi tre ribaltamenti sopra indicati. Si dimostrerà che il gruppo G non contiene movimenti infinitesimi ed è quindi propriamente discontinuo, con un campo fondamentale che è facile determinare, osservando che in G è contenuto come sottogruppo invariante di indice 24 un sottogruppo Γ generato da tre traslazioni elementari, d'eguale ampiezza, secondo tre direzioni ortogonali.

Prendiamo il quadrilatero fondamentale $a\,b\,c\,d$, appunto orientato come risultava nel §. 218, talchè ponendo

(1) Cf. JORDAN Sur les groupes de mouvements (Annali di matematica Serie 2ª T. II).

Se il movimento A porta ogni punto (x, y, z) dello spazio nel punto (X, Y, Z), e quindi l'inverso A^{-1} qualsiasi punto (X, Y, Z) nel primitivo (x, y, z), e se con (x', y', z') indichiamo le coordinate del punto ove (x, y, z) è trasportato da B, è manifesto che $A^{-1}BA$ trasporta (X, Y, Z) in $(X'\ Y'\ Z')$, cioè: *il movimento* $A^{-1}BA$ *opera sopra ogni figura* T *dello spazio in cui una figura* Ω *venga trasportata da* A *precisamente come* A *operava entro* Ω.

$$k = 2\,A = -2\,B,$$

per le coordinate dei vertici avremo:

$$a \equiv (k, k, 0), \quad b \equiv (k, 0, -k), \quad c \equiv (0, 0, 0), \quad d \equiv (0, k, -k).$$

Numerando poi i lati *ab*, *bc*, *cd*, *da* ordinatamente con 1, 2, 3, 4, indichiamo con S_1, S_2, S_3, S_4 i movimenti dello spazio che consistono in ribaltamenti attorno ai detti lati 1, 2, 3, 4. Ancora indichiamo con S_5, S_6 i ribaltamenti attorno alle rispettive congiungenti i punti medii dei lati opposti *(ab, cd)* *(ad, bc)* del quadrilatero, infine con S_7 il ribaltamento prodotto di $S_5\,S_6$, ribaltamento che avviene attorno alla congiungente i punti medii dei due spigoli soppressi, *ac*, *bd* del tetraedro (1)

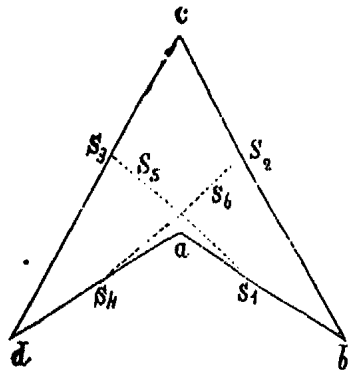


FIG. 11.ª

Le sostituzioni elementari del gruppo G saranno appunto

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$$

e per le loro espressioni analitiche si troverà subito

$$S_1)\quad x' = 2k - x, \qquad y' = k + z, \qquad z' = -k + y$$
$$S_2)\quad x' = -z, \qquad y' = -y, \qquad z' = -x$$
$$S_3)\quad x' = -x, \qquad y' = -z, \qquad z' = -y$$

(1) I tre ribaltamenti S_5, S_6, S_7, insieme coll'identità, formano il ben noto sottogruppo quadrinomio del 4° ordine (Vierergruppe) invariante nel gruppo del tetraedro.

$$S_4)\quad x' = k + z, \qquad y' = 2k - y, \qquad z' = -k + x$$
$$S_5)\quad x' = x, \qquad y' = k - y, \qquad z' = -k - z$$
$$S_6)\quad x' = k - x, \qquad y' = y, \qquad z' = -k - z$$
$$S_7)\quad x' = k - x, \qquad y' = k - y, \qquad z' = z,$$

dove ogni volta x, y, z indicano le coordinate di un punto qualunque dello spazio P, e x', y', z' quelle della nuova posizione P′ che viene ad occupare P dopo il movimento (1).

Cominciamo dall'osservare i due movimenti del gruppo G dati da

$$T = S_3\, S_1\, S_5, \quad T' = S_2\, S_4\, S_6,$$

per le cui espressioni analitiche troviamo

$$T = S_3\, S_1\, S_5) \ldots x' = x + 2k, \quad y' = y, \qquad z' = z$$
$$T' = S_2\, S_4\, S_6) \ldots x' = x, \qquad y' = y + 2k, \quad z' = z,$$

onde si vede che T, T′ sono due traslazioni d'eguale ampiezza $2k$, parallelamente agli assi Ox, Oy.

Una terza traslazione T″, della stessa ampiezza e parallela all'asse Oz, troviamo operando come segue. Formiamo la sostituzione (a periodo 3)

$$U = S_1\, S_2) \ldots x' = k - y, \quad y' = -k - z, \quad z' = x - 2k$$

e la sua inversa

$$U^{-1} = S_2\, S_1) \ldots x' = 2k + z, \quad y' = k - x, \quad z' = -k - y;$$

la trasformata T″ di T per mezzo di U

$$T'' = U^{-1}\, TU$$

ha per espressione

$$T'') \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 2k,$$

che è appunto l'annunciata terza traslazione.

(1) Essendo queste 7 sostituzioni elementari a periodo 2 è lecito dappertutto scambiare x, y, z con x', y', z'.

Le T, T′, T″ generano il gruppo Γ di traslazioni colla traslazione generale

$$x' = x + 2mk, \quad y' = y + 2nk, \quad z' = z + 2pk,$$

dove m, n, p sono numeri interi arbitrarii (positivi o negativi). Questo sottogruppo Γ di G è *invariante* in esso, cioè permutabile con tutte le sue operazioni, ciò che si constata subito osservando che le 7 operazioni elementari $S_1, S_2 \ldots S_7$ di G trasformano le tre traslazioni T, T′, T″ generatrici di Γ in loro combinazioni.

§. 221.

Discontinuità propria del gruppo G

Vogliamo ora dimostrare che il sottogruppo Γ di traslazioni, invariante in G, possiede in esso l'indice finito *24*, dopo di che la discontinuità propria di G risulterà accertata.

Per esprimerci più brevemente, diciamo *equivalenti* due operazioni A, B di G *rispetto al sottogruppo* Γ se si ha

$$A = B\,t, \quad \text{o} \quad B = A\,t^{-1},$$

essendo t una traslazione di Γ, e per significare questa equivalenza usiamo il simbolo

$$A \equiv B.$$

Osserviamo che da

$$A \equiv B, \quad A' \equiv B'$$

segue anche

$$AA' \equiv BB',$$

a causa della permutabilità di Γ con ogni operazione di G. (1).

Ciò premesso, e posto come sopra

$$U = S_1 S_2, \quad U^{-1} = S_2 S_1,$$

consideriamo le 12 operazioni di G:

(1) Da $A = B\,t$, $A' = B'\,t'$ segue

$$AA' = (B\,t)\,(B'\,t') = B\,(t\,B')\,t' = B\,(B'\,t)\,t' = (B\,B')\,t\,t'.$$

$$\alpha)\quad \begin{cases} 1, & S_5, & S_6, & S_7 \\ U, & S_5 U, & S_6 U, & S_7 U \\ U^{-1}, & S_5 U^{-1}, & S_6 U^{-1}, & S_7 U^{-1}, \end{cases}$$

due qualunque delle quali non sono equivalenti fra loro rispetto a Γ, come è facile accertarsi costruendo le loro effettive espressioni, che sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
1)\quad & x' = x, & y' = y, & & z' = z \\
S_5)\quad & x' = x, & y' = k - y, & & z' = -k - z \\
S_6)\quad & x' = k - x, & y' = y, & & z' = -k - z \\
S_7)\quad & x' = k - x, & y' = k - y, & & z' = z \\
U)\quad & x' = k - y & y' = -k - z, & & z' = -2k + x \\
S_5 U)\quad & x' = y & y' = z, & & z' = -2k + x \\
S_6 U)\quad & x' = k - y, & y' = z, & & z' = -k - x \\
S_7 U)\quad & x' = y, & y' = -k - z, & & z' = -k - x \\
U^{-1})\quad & x' = 2k + z & y' = k - x, & & z' = -k - y \\
S_5 U^{-1})\quad & x' = k - z, & y' = k - x, & & z' = -2k + y \\
S_6 U^{-1})\quad & x' = k - z, & y' = x & & z' = -k - y \\
S_7 U^{-1})\quad & x' = 2k + z, & y' = x, & & z' = -2k + y.
\end{aligned}$$

(In effetto paragonando due qualunque di queste non differiscono mai per una traslazione di Γ).

Ma al contrario se componiamo fra loro due qualunque delle 12 operazioni del quadro α) vediamo che il loro prodotto risulta equivalente ad una delle medesime 12. Questo si constata osservando le equivalenze elementari:

$$\begin{aligned}
& U S_5 \equiv S_6 U, & & U S_6 \equiv S_7 U, & & U S_7 \equiv S_5 U \\
& U^{-1} S_5 \equiv S_7 U^{-1}, & & U^{-1} S_6 \equiv S_5 U^{-1}, & & U^{-1} S_7 \equiv S_6 U^{-1}
\end{aligned}$$

Ora l'operazione S_2 di G non ha la sua equivalente nel quadro α), onde segue che le nuove 12 operazioni di G

$$\beta)\quad \begin{cases} S_2, & S_5 S_2, & S_6 S_2, & S_7 S_2 \\ U S_2, & S_5 U S_2, & S_6 U S_2, & S_7 U S_2 \\ U^{-1} S_2, & S_5 U^{-1} S_2, & S_6 U^{-1} S_2, & S_7 U^{-1} S_2 \end{cases}$$

non sono equivalenti fra loro nè ad alcuna delle 12 operazioni α). Invece il prodotto di due α) è equivalente ad una α), come sopra si è detto; il prodotto di una α) per una β) è equivalente ad una β) ed il prodotto di due β ad una α) le quali ultime proprietà risultano dalle equivalenze elementari:

$$S_2 S_5 \equiv S_7 S_2, \quad S_2 S_6 \equiv S_6 S_2, \quad S_2 U \equiv U^{-1} S_2.$$

Ed ora si scorge subito che una qualunque operazione di G è equivalente ad una (ed una sola) delle 24 operazioni α) e β), perchè questo vale delle operazioni generatrici di G; e infatti

$$S_1 \equiv U S_2, \quad S_3 \equiv S_5 U S_2, \quad S_4 \equiv S_6 S_2.$$

Dunque ogni operazione di G si ottiene prendendo l'espressione di una delle 24 operazioni α) o β) ed aggiungendo ai secondi membri dei convenienti multipli interi di $2k$. Dunque: *Il gruppo di movimenti* G *contiene come sottogruppo invariante d'indice 24 il sottogruppo di traslazioni* Γ.

Per *campo fondamentale* del gruppo Γ di traslazioni si può prendere il cubo di lato $= 2k$ col centro nell'origine e colle facce parallele ai piani coordinati.

Ciascuna faccia resta divisa dalle sue diagonali in quattro triangoli rettangoli isosceli e projettandoli dal centro decomponiamo il cubo in 24 piramidi che le 24 rotazioni del gruppo dell'ottaedro (del cubo) scambiano fra loro: *una qualunque di queste piramidi può assumersi come campo fondamentale pel gruppo* G.

§. 222.

La superficie completa di Schwarz.

Conosciuta per tal modo la costituzione del gruppo G di movimenti, che lasciano invariata, nella sua totalità, la superficie di Schwarz, è facile formarsi un'idea del modo come la porzione iniziale Σ si continua analiticamente dando luogo alla superficie completa. Questa ammette, come si è visto, tre traslazioni elementari in sè medesima nel senso delle tre congiungenti i punti medii di due spigoli opposti del tetraedro regolare primitivo e di ampiezza eguale al doppio della minima distanza k fra due spigoli opposti. Immaginando diviso lo spazio in infinite celle cubiche di lato $= 2k$, è chiaro che basterà conoscere della superficie di Schwarz la porzione compresa

entro uno di questi cubi, in ogni altro cubo trovandosi una porzione della superficie congruente per traslazione colla iniziale.

Consideriamo come cubo iniziale quello compreso fra i quattro piani

$$x = \pm k, \quad y = \pm k, \quad z = \pm k.$$

Il tetraedro regolare coi vertici nei punti (§. 220)

$$c \equiv (0, 0, 0), \quad a \equiv (k, k, 0), \quad b \equiv (k, 0, -k), \quad d \equiv (0, k, -k)$$

ha il primo vertice nel centro del cubo, gli altri tre nei punti medii degli spigoli del cubo che concorrono nel vertice $(k, k, -k)$ di questo. Soppressi i due spigoli $\overline{ca}$, $\overline{bd}$ del tetraedro, consideriamo la porzione Σ di superficie di Schwarz limitata al quadrilatero $abcd$. Ribaltiamo Σ attorno al lato $\overline{cd}$ in Σ_1, indi Σ_1 attorno alla nuova posizione di $\overline{ca}$ in Σ_2; poi Σ_2 attorno alla nuova posizione di $\overline{cd}$ e così di seguito. Otteniamo così 6 porzioni di superficie di Schwarz (Γ compresa) interne al cubo, tutte fra loro congruenti e che si riuniscono attorno al vertice comune c (centro del cubo) ove hanno lo stesso piano tangente e gli altri vertici sono nei punti medii delle costole del cubo (1). Gli effettivi valori delle coordinate dei vertici di queste 6 porzioni sono

Σ)	$(0, 0, 0)$,	$(k, 0, -k)$,	$(k, k, 0)$,	$(0, k, -k)$
Σ_1)	$(0, 0, 0)$,	$(-k, k, 0)$,	$(-k, 0, -k)$,	$(0, k, -k)$
Σ_2)	$(0, 0, 0)$,	$(-k, k, 0)$,	$(0, k, k)$,	$(-k, 0, k)$
Σ_3)	$(0, 0, 0)$,	$(0, -k, k)$,	$(-k, -k, 0)$,	$(-k, 0, k)$
Σ_4)	$(0, 0, 0)$,	$(0, -k, k)$,	$(k, 0, k)$,	$(k, -k, 0)$
Σ_5)	$(0, 0, 0)$,	$(k, 0, -k)$,	$(0, -k, -k)$,	$(k, -k, 0)$.

Ora se si prende uno qualunque dei 6 quadrilateri curvi Σ_i, la sua continuazione analitica lungo un lato uscente da c è evidentemente un'altra delle 6 Σ; invece vediamo che la continuazione di una tale Σ_i lungo un lato uscente dal vertice opposto a c si ottiene

(1) Queste circostanze si riconoscono nel modo più semplice sopra un modello solido degli spigoli del cubo nel quale mediante fili si inseriscano i 6 quadrilateri che limitano le porzioni di superficie di Schwarz.

per traslazione d'ampiezza $2k$ da una delle altre porzioni Σ_i. Basta verificarlo p. e. sulla iniziale Σ, chè le altre sono nelle medesime condizioni. Ora ribaltando Σ attorno ad $\overline{ab}$ si ottiene Σ_1, traslata di $2k$ nel senso dell'asse Ox, e ribaltandola invece attorno ad $\overline{ad}$ è come dare una traslazione di $2k$ a Σ_5 nel senso dell'asse Oy.

Così adunque l'intera regione di superficie di Schwarz interna al cubo è formata dalle dette 6 porzioni Σ_i; indi la superficie si riproduce in modo triplamente periodico negli altri cubi diffondendosi regolarmente in tutto lo spazio.

§. 223.

La superficie coniugata in applicabilità.

Diciamo ora brevemente della superficie minima S' coniugata in applicabilità della precedente, che indicheremo con S. Questa nuova superficie minima S', egualmente considerata da Schwarz (l. c.), si ottiene dalle (I*) §. 217 prendendo negli integrali dei secondi membri i coefficienti dell'immaginario, anzichè le parti reali. Essa gode di proprietà analoghe alla S; in particolare vedremo che anche la S' si divide in infiniti quadrilateri curvi congruenti, a contorno rettilineo, e in ogni regione finita dello spazio entra soltanto un numero finito di questi quadrilateri. Consideriamo per ciò sulla superficie S primitiva due dei quadrilateri curvi adiacenti a uno spigolo comune AB; i quattro piani di simmetria dei due quadrilateri limitano sull'esagono formato dalla loro riunione un nuovo quadrilatero, i cui lati sono archi di geodetiche (piane) di egual lunghezza, e i cui angoli sono di 60° per due vertici opposti, di 90° per gli altri due. Ora sulla superficie S', coniugata in applicabilità, questo quadrilatero si cangia in un quadrilatero a contorno rettilineo e quindi:

La superficie minima S' contiene infiniti quadrilateri curvi a contorno rettilineo, i cui lati hanno eguale lunghezza, e i cui angoli sono di 60° in due vertici opposti, di 90° negli altri due (1).

Partendo da questa osservazione, possiamo determinare, nello stesso modo come per la S, il gruppo G di movimenti dello spazio che riproduce la S', e studiare quindi la continuazione analitica di questa superficie.

(1) Un tale quadrilatero si forma riunendo due facce dell'ottaedro regolare aderenti per uno spigolo e sopprimendo questo spigolo.

Sia A B C D un tale quadrilatero, con angoli di 60° in A, B, e di 90° in C, D. Numeriamo i lati AB, BC, CD, DA con 1, 2, 3, 4 e indichiamo con

$$S_1, S_2, S_3, S_4$$

i ribaltamenti attorno a questi rispettivi lati.

Combinando questi movimenti elementari, si passa dal quadrilatero A B C D ad ogni altro congruente sulla superficie, e per avere le operazioni elementari del gruppo G che lascia invariata la superficie S', basterà associarvi i movimenti che lasciano invariato il quadrilatero A B C D.

Ma di questi non vi è che il ribaltamento attorno alla congiungente i punti medii di AC, BD, ribaltamento che indicheremo con S_5.

Indichiamo con $k\sqrt{2}$ la lunghezza comune dei quattro spigoli del quadrilatero ABCD; situando questo in modo conveniente rispetto agli assi, per le coordinate dei vertici possiamo prendere:

$$A \equiv (0, 0, 0), \quad B \equiv (k, 0, k), \quad C \equiv (0, 0, 2k), \quad D \equiv (0, k, k).$$

Dopo ciò calcoliamo subito le espressioni dei 5 ribaltamenti elementari, che sono date dalle formole seguenti:

$$\begin{aligned}
&S_1) \quad x' = z \qquad y' = -y \qquad z' = x\\
&S_2) \quad x' = 2k - z, \quad y' = -y \qquad z' = 2k - z\\
&S_3) \quad x' = -x, \quad y' = 2k - z, \quad z' = 2k - y\\
&S_4) \quad x' = -x, \quad y' = z, \quad z' = y\\
&S_5) \quad x' = y, \quad y' = x, \quad z' = 2k - z.
\end{aligned}$$

Di più osservando le due relazioni:

$$S_5\, S_2\, S_5 = S_4, \qquad S_5\, S_3\, S_5 = S_1,$$

si vede che: *L'intero gruppo* G *è generato dai tre ribaltamenti* S_1, S_2, S_5.

Ora prendiamo in G le due operazioni

$$H = S_5\, S_1, \quad K = S_5\, S_2,$$

colle espressioni analitiche

$$\begin{aligned}
&H) \quad x' = 2k - z, \quad y' = -x, \quad z' = y\\
&K) \quad x' = z, \quad y' = -x, \quad z' = 2k - y,
\end{aligned}$$

e nelle loro terze potenze

$$\begin{aligned}
&H^3) \quad x' = x + 2k, \quad y' = y - 2k, \quad z' = z - 2k\\
&K^3) \quad x' = x + 2k, \quad y' = y - 2k, \quad z' = z + 2k
\end{aligned}$$

si hanno due traslazioni di G. La trasformata di H^3 per mezzo di S_2 è la nuova traslazione

$$S_2\, H^3\, S_2) \quad x' = x + 2k, \quad y' = y + 2k, \quad z' = z - 2k,$$

e combinando colle precedenti, si trovano in G le due traslazioni

$$\begin{aligned}
&x' = x + 4k, \quad y' = y, \qquad z' = z\\
&x' = x, \qquad y' = y + 4k, \quad z' = z
\end{aligned}$$

di ampiezza $4k$ nel senso degli assi Ox, Oy. Si osservi ancora la trasformata di K^3 per S_1

$$S_1\, K^3\, S_1) \quad x' = x + 2k, \quad y' = y + 2k, \quad z' = z + 2k,$$

come anche la

$$H^3\, K^{-3}) \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 4k$$

che è la traslazione di $4k$ nel senso dell'asse Oz. Combinando le traslazioni sopra scritte, si ottengono *tutte* le traslazioni della forma

$$x' = x + 2mk, \quad y' = y + 2nk, \quad z' = z + 2pk,$$

dove m, n, p sono interi tutti pari o tutti dispari, soddisfacenti cioè alle congruenze

$$m \equiv n \equiv p \pmod 2.$$

Queste traslazioni formano evidentemente un sottogruppo Γ di G e vedremo subito che non vi sono in G altre traslazioni (1). Intanto

(1) Come traslazioni elementari di Γ possiamo prendere p. e.

$$\begin{cases}
x' = x + 4k, & y' = y, & z' = z\\
x' = x, & y' = y + 4k, & z' = z\\
x' = x + 2k, & y' = y + 2k, & z' = z + 2k.
\end{cases}$$

verifichiamo facilmente che Γ è invariante in G, poichè le operazioni generatrici S_1, S_2, S_5 di G trasformano Γ in sè stesso (1).

Come al §. 221 ripartiamo le operazioni di G in classi di operazioni equivalenti rispetto a Γ. Se poniamo $S_6 = S_2 S_1$, le tre operazioni S_1, S_2, S_6 formano, coll'identità, il solito gruppo quadrinomio, e ponendo poi

$$U = S_4 S_1, \quad U^{-1} = S_1 S_4$$

col costruire le 24 operazioni di G

$$\begin{cases} 1, & S_1, & S_2, & S_6 \\ U, & S_1 U, & S_2 U, & S_6 U \\ U^{-1}, & S_1 U^{-1}, & S_2 U^{-1}, & S_6 U^{-1} \\ S_5, & S_1 S_5, & S_2 S_5, & S_6 S_5 \\ U S_5, & S_1 U S_5, & S_2 U S_5, & S_6 U S_5 \\ U S_2, & S_1 U S_2, & S_2 U S_2, & S_6 U S_2, \end{cases}$$

si vede che esse formano un sistema *completo* di operazioni di G non equivalenti rispetto a Γ. Ne segue: *Il gruppo* G *contiene come sottogruppo invariante d' indice 24 il gruppo di traslazioni* Γ.

In particolare ne risulta la discontinuità propria di G, quindi la proprietà della superficie minima S' di diffondersi regolarmente, in modo triplamente periodico, nello spazio.

§. 224.

Il problema di minimo d' area. — Teorema di Steiner.

Terminiamo questi brevi studi sulle superficie minime ritornando al problema di calcolo delle variazioni da cui è nata tutta la teoria,

(1) Dalle S_1, S_2, S_5 la traslazione generica di Γ

$$(x + 2mk, \quad y + 2nk, \quad z + 2pk)$$

è trasformata rispettivamente in

$$(x + 2pk, \quad y - 2nk, \quad z + 2mk)$$
$$(x - 2pk, \quad y - 2nk, \quad z - 2mk)$$
$$(x + 2nk, \quad y + 2mk, \quad z - 2pk)$$

che sono ancora in Γ.

principalmente per far conoscere i principii delle importanti ricerche di Schwarz sulla *variazione seconda* dell' area di una porzione di superficie minima.

Premettiamo le seguenti osservazioni generali.

Supponiamo di considerare una porzione continua S di una superficie *qualunque* limitata ad un contorno C che riferiamo per semplicità alle sue linee di curvatura (u, v). In ciascun punto $M \equiv (u, v)$ di S eleviamo un segmento MM' di normale di cui sia $t = MM'$ il valore algebrico, essendo t una funzione dapprima arbitraria di u, v, e consideriamo la superficie S' luogo degli estremi M', le cui coordinate x', y', z' saranno date da

$$x' = x + tX, \quad y' = y + tY, \quad z' = z + tZ.$$

Calcoliamo gli elementi della superficie S', che indicheremo con accenti, e per ciò derivando le precedenti avremo (per le formole di Rodrigues)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left(1 + \dfrac{t}{r_2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial t}{\partial u} X \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \left(1 + \dfrac{t}{r_1}\right)\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial t}{\partial v} X, \end{cases}$$

indi

$$E' = E\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2, \quad F' = \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v}, \quad G' = G\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2$$

$$E'G' - F'^2 = EG\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)^2\left(1 + \frac{t}{r_2}\right)^2\left\{1 + \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2}{E\left(1 + \frac{t}{r_2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2}{G\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)^2}\right\}$$

e perciò

$$(13)\quad \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG}\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)\left(1 + \frac{t}{r_2}\right)\left\{1 + \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2}{E\left(1 + \frac{t}{r_2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2}{G\left(1 + \frac{t}{r_1}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L' area Σ della porzione S di superficie considerata è data da

$$\Sigma = \iint \sqrt{E\,G}\; du\, dv,$$

l' integrale doppio essendo esteso a tutti i valori di u, v appartenenti ad S, e l' area Σ' della corrispondente superficie S' sarà

$$\Sigma' = \iint \sqrt{E'\,G' - F'^2}\; du\, dv.$$

Ora supponiamo che il segmento t di normale sia infinitesimo e poniamo

$$t = \varepsilon\,\psi,$$

dove ε indica una costante infinitesima, che si assumerà come infinitesimo di primo ordine, e ψ una funzione arbitraria di u, v, finita e continua colle derivate, e *assoggettata ad annullarsi sul contorno* C di S. Calcoliamo la differenza

$$\Delta\,\Sigma = \Sigma' - \Sigma,$$

trascurando le potenze di ε superiori alla seconda.

Dalla (13) abbiamo subito

$$\sqrt{E'\,G' - F'^2} = \sqrt{E\,G}\left(1 + \varepsilon\,H\,\psi + \varepsilon^2\,K\,\psi^2\right)\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right]\right\},$$

dove come al solito

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad K = \frac{1}{r_1\,r_2},$$

od anche

$$\sqrt{E'\,G' - F'^2} = \sqrt{E\,G}\left\{1 + \varepsilon\,H\,\psi + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\Delta_1\,\psi + 2\,K\,\psi^2\right)\right\},$$

con

$$\Delta_1\,\psi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2;$$

ne segue, a meno d' infinitesimi di terzo ordine :

$$(14)\qquad \Sigma = \varepsilon \iint \sqrt{E\,G}\,.\,H\,\psi\; du\, dv + \frac{\varepsilon^2}{2}\iint \sqrt{E\,G}\left\{\Delta_1\,\psi + 2\,K\,\psi^2\right\} du\, dv.$$

Se H non fosse costantemente nulla sopra S, questa non potrebbe corrispondere al minimo d' area, perchè il termine preponderante nel secondo membro della (14) è il primo e, disponendo di ψ, si potrebbe rendere a piacimento positivo o negativo (1). Così vediamo in effetto : *Condizione necessaria affinchè la porzione di superficie* S *risponda al problema di minimo d' area è che, dappertutto, la sua curvatura media* H *sia nulla.*

Supposta questa condizione soddisfatta, possiamo fare

$$E = G = \lambda \quad K = -\lambda^{-2}$$

e la (14) resta

$$(14)\qquad \delta^2\,\Sigma = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\psi^2}{\lambda}\right\} du\, dv.$$

Questa è la formola di Schwarz per la *variazione seconda* dell' area di una porzione di superficie minima, dalla quale Schwarz ha trattato le notevoli conseguenze che ora passeremo ad esporre. Ma prima ritorniamo alla formola *in termini finiti* (13) dove supporremo di prendere per t una costante a sicchè la superficie S' sarà parallela alla S, alla distanza a. Allora abbiamo

$$\sqrt{E'\,G' - F'^2} = \sqrt{E\,G}\,(1 + a\,H + a^2\,K),$$

indi

$$\Sigma' - \Sigma = a\iint \sqrt{E\,G}\,H\, du\, dv + a^2\iint \sqrt{E\,G}\,K\, du\, dv,$$

e se supponiamo che la S sia ad area minima, essendo $H = 0$, e K negativa, risulta

$$\Sigma' < \Sigma.$$

---

(1) Basterebbe prendere

$$\psi = \pm\, H\,\varphi^2$$

con φ arbitraria nell' interno di S e annullantesi al contorno.

Si ha così il singolare teorema di Steiner:

Fra tutte le porzioni di superficie parallele ad una determinata porzione di superficie minima quest' ultima ha l' area massima. E il calcolo precedente dimostra anche che tale proprietà caratterizza le superficie minime, poichè per ogni altra superficie passando alle superficie parallele, da una parte vi è ampliflcazione dell' area, dall' altra contrazione.

§. 225.

Teoremi di Schwarz sulla variazione seconda.

Schwarz ha trasformato la formola (15) per la variazione seconda di una porzione S di superficie minima nel modo seguente. Prendiamo un' altra superficie minima arbitraria che si faccia corrispondere alla S per parallelismo di normali, e sia Σ la porzione di questa nuova superficie minima corrispondente alla S; le due regioni hanno per immagine la stessa regione corrispondente sulla sfera di Gauss, regione che indichiamo con σ. Sia W la distanza (algebrica) del piano tangente in un punto (u, v) di Σ dall' origine, talchè W è una soluzione dell' equazione tangenziale

$$\Delta_2 W + 2 W = 0,$$

il $\Delta_2 W$ essendo calcolato rispetto all' immagine sferica, cioè

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{2 W}{\lambda} = 0. \tag{16}$$

Supponiamo ora che questa soluzione W non si annulli mai in nessun punto della regione sferica σ nè al contorno, ossia geometricamente: *nessun piano tangente nella regione Σ passi per l' origine.* La quantità sotto il segno integrale nella (15), essendo sempre $W \neq 0$, può scriversi, a causa della (16)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\psi^2}{\lambda} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right),$$

e l' integrale (15) si scinderà in tre parti delle quali le ultime due, annullandosi ψ al contorno, sono nulle come segue subito integrando

per parti. La (15) prende dunque l' altra forma

$$\delta^2 S = \frac{s'}{2}\iint \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right\} du\, dv$$

la quale ci dimostra che $\delta^2 S > 0$ per *qualunque* determinazione di ψ, giacchè l' integrale del secondo membro è essenzialmente positivo (1), e quindi ogni superficie S' infinitamente vicina alla S, e limitata al medesimo contorno, ha un' area maggiore di S. Si ha così il risultato di Schwarz:

Una porzione S *di superficie a curvatura media nulla possiede certamente l' area minima fra tutte le superficie infinitamente vicine limitate al medesimo contorno, se esiste una porzione* M *di superficie della stessa specie, corrispondente per parallelismo di normali alla* S *e di cui nessun piano tangente in punti di* M *passi per un punto fissato dello spazio*

In particolare se per la nuova superficie minima si prende la S medesima, si vede che la porzione considerata godrà della proprietà di minimo se la superficie guardata da un punto conveniente dello spazio presenterà un contorno apparente che rimanga tutto esterno alla regione.

Se ci riferiamo poi alla rappresentazione sferica σ, potremo dire che la proprietà di minimo sarà assicurata quando esista una soluzione W della (16) che in tutta la regione, incluso il contorno, conservi sempre lo stesso segno.

Ciò può applicarsi in particolare alle soluzioni X, Y, Z della (16) che sono ciascuna positiva in una mezza sfera, negativa nell' altra. Dunque: *Se l' immagine sferica della porzione* S *è tutta interna a una mezza sfera, vale la proprietà di minimo d' area.*

Terminiamo col dare l' espressione dell' integrale generale della (16), cioè, introducendo la variabile complessa sulla sfera

$$\tau = \alpha + i\beta,$$

dell' equazione

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{8 W}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} = 0. \tag{16*}$$

---

(1) Esso potrebbe annullarsi solo per $\psi = cW$ (c costante), ma questo è escluso perchè ψ deve annullarsi al contorno.

Essendo W la distanza del piano tangente di una superficie minima dall' origine, se calcoliamo

$$W = X x + Y y + Z z$$

colle formole (II*) di Weierstrass (pag. 540), troviamo

$$W = R\left\{f'(\tau) - \frac{2\tau_0}{\tau\tau_0 + 1} f(\tau)\right\},$$

dove $f(\tau)$ indica una funzione arbitraria della variabile complessa $\tau = \alpha + i\beta$.

CAPITOLO XIV.

La geometria pseudosferica e la sua interpretazione non-euclidea

Prima rappresentazione conforme della moltiplicità pseudosferica sul semipiano. — Immagine delle geodetiche e misura delle distanze. — Altra rappresentazione conforme entro il cerchio limite. — Identità della metrica pseudosferica colla metrica non-euclidea. — Parallele ed angolo di parallelismo. — Movimenti non-euclidei rappresentati da sostituzioni lineari e loro classificazione. — I circoli non-euclidei delle tre specie. — Triangoli non-euclidei e loro area. — La trigonometria non-euclidea. — Passaggio alla rappresentazione geodetica del Beltrami ed alla metrica Cayleyana. — Coordinate di Weierstrass nel piano non-euclideo. — Sistema di equazioni a derivate parziali di Weingarten per le coordinate di Weierstrass. — L' equazione del tipo di Riccati da cui dipende la ricerca delle linee geodetiche.

§. 226.

Rappresentazione conforme sul semipiano.

Dallo studio delle proprietà principali delle superficie d' area minima, che ci ha occupato nei due precedenti Capitoli, ci volgiamo ora a quello di un' altra importantissima classe di superficie: *delle superficie a curvatura totale costante.*

E in primo luogo ci occuperemo della geometria su queste superficie, o moltiplicità a due dimensioni, riguardate, conforme alle vedute generali esposte al §. 120, come definite dal loro ds^2, senza riferimento alle forme speciali che possono realizzare nel nostro spazio ordinario, in tutto od in parte, siffatte moltiplicità.

Tre casi sono da distinguersi secondo che la curvatura della moltiplicità è nulla, positiva o negativa. Ma siccome nel primo caso non si ha altro che la *geometria piana*, e nel secondo caso la *geometria sferica*, è il terzo caso soltanto che ci interessa: quello della *geometria pseudosferica.* Questa può anche interpretarsi come *geometria non-euclidea* nel senso che ben presto impareremo a conoscere; e ciò

accresce l' interesse di questo studio legato così, per le ricerche fondamentali del Beltrami, ai fondamenti della geometria. È fin da ora (salvo a giustificare ben presto la denominazione (V.ª §. 229) daremo indifferentemente alla nostra metrica il nome di *pseudosferica* o *non euclidea*.

Scegliamo come forma tipica del ds^2 per una molteplicità pseudosferica di raggio R p. e. la forma parabolica A) §. 126:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2 ,$$

che ponendo

$$x = v , \quad y = R\, e^{\frac{-u}{R}} \tag{1}$$

trasformiamo subito nell' altra

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} . \tag{2}$$

Riguardando x, y come coordinate cartesiane in un piano, la y sarà da assumersi per le (1) sempre positiva, ed avremo cioè dalla molteplicità pseudosferica una *rappresentazione conforme sul semipiano positivo* $y > 0$ (1). Conforme alle vedute generali del §. 120 le coppie di valori (x, y) appartenenti al semipiano $y > 0$ corrispondono *biunivocamente* ai punti della molteplicità pseudosferica; la formola (2) assegna la legge elementare per la misurazione delle distanze fra punti infinitamente vicini, da cui integrando per un arco di curva tutto nel semipiano positivo, si ottiene la lunghezza L pseudosferica (o non-euclidea) dell' arco stesso. Quanto alla metrica *angolare*, stante alla forma isometrica (2) del ds^2, è quella stessa del semipiano rappresentativo, e per ciò appunto diciamo che la rappresentazione è *conforme*.

La prima domanda che ci facciamo è: *Come sono rappresentate le linee geodetiche nella nostra metrica?*

La forma (2) del ds^2 appartenendo alla forma di Liouville (§. 112), ove si ponga

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{R^2}{y^2} \qquad (x = u , \ y = v)$$

(1) È questa la celebre rappresentazione che ha servito così utilmente a Klein e Poincaré nelle ricerche sulle funzioni *automorfe* (Fuchsiane).

la formola (32) del citato paragrafo dà subito come equazioni delle linee geodetiche della metrica

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2 \quad (a, c \text{ costanti}),$$

cioè circoli col centro sull' asse delle x, vale a dire ortogonali alla *retta limite* del semipiano, e inoltre le rette $x = \text{cost.}^{te}$, le quali sono pure ortogonali alla retta limite, e rientrano come caso particolare fra i detti circoli:

Le geodetiche della metrica sono rappresentate dai circoli ortogonali alla retta limite.

Questo verrà del resto fra breve confermato e precisato dimostrando che, nel caso attuale, l' arco geodetico conserva la proprietà di minimo di lunghezza (non-euclidea) in qualunque estensione.

Ma prima risolviamo un' altra importante questione. Come vengono rappresentate le ∞^3 applicabilità della molteplicità pseudosferica in sè medesima, cioè il gruppo continuo a tre parametri di trasformazioni della forma differenziale quadratica (2) in sè? Queste si diranno anche i *movimenti* (diretti) della nostra metrica, perchè non alterano nè le lunghezze nè gli angoli (e di questi ultimi mantengono anche il senso). Introduciamo la variabile complessa

$$\omega = x + i\, y$$

e la sua coniugata

$$\omega_0 = x - i\, y ,$$

ponendo il ds^2 sotto la forma equivalente

$$ds^2 = -\frac{4\, R^2\, d\omega\, d\omega_0}{(\omega - \omega_0)^2} , \tag{2*}$$

e dimostriamo: *I movimenti (diretti) della molteplicità pseudosferica in sè sono rappresentati da tutte e sole le sostituzioni lineari sulla variabile complessa* ω

$$\omega' = \frac{\alpha\, \omega + \beta}{\gamma\, \omega + \delta} \tag{I}$$

con coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *reali e determinante*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

(*sostituzioni unimodulari*). È chiaro che le (I) formano la totalità di

quelle affinità circolari dirette di Möbius (§. 58) che trasformano in sè medesima (secondo una projettività concorde) la retta limite $y=0$ e però cangiano in sè stesso ciascuno dei due semipiani. Dimostriamo prima che ogni sostituzione (I) dà un movimento (non-euclideo). Dalla (I) segue

$$\omega'_0 = \frac{\alpha\omega_0 + \beta}{\gamma\omega_0 + \delta},$$

indi

$$\omega' - \omega'_0 = \frac{\omega - \omega_0}{(\gamma\omega + \delta)(\gamma\omega_0 + \delta)}. \tag{3}$$

Inoltre

$$d\omega' = \frac{d\omega}{(\gamma\omega + \delta)^2}, \quad d\omega'_0 = \frac{d\omega_0}{(\gamma\omega_0 + \delta)^2}$$

e quindi

$$\frac{d\omega'\, d\omega'_0}{(\omega' - \omega'_0)^2} = \frac{d\omega\, d\omega_0}{(\omega - \omega_0)^2}. \tag{4}$$

La (3) dimostra che posto

$$\omega = x + iy, \quad \omega' = x' + iy',$$

l'ordinata y' è positiva con y, cioè il semipiano positivo è trasformato in sè medesimo, e la (4) che la trasformazione (I) cangia il ds^2 non-euclideo, dato dalla (2*), in sè medesimo, e rappresenta quindi un movimento.

Che inversamente ogni movimento sia rappresentato da una sostituzione (I) si può vedere in varie guise. P. e. possiamo mostrare che, dati due punti qualunque A, A′ nel semipiano positivo, e due rispettive direzioni arbitrarie t, t' uscenti da A, A′, possiamo portare, con una conveniente sostituzione (I), A in A′ in modo che la direzione t si sovrapponga alla t'. Sia C il circolo ortogonale alla retta limite, che tocca in A la direzione t, e siano M_1, M_2 i suoi punti d'incontro colla retta limite, per modo che il verso $M_1 A M_2$ concordi con quello di t. Medesimamente sia C′ l'analogo circolo per A′, tangente a t', e il verso $M_1' A' M_2'$ concordante con t'. Esiste un'affinità circolare diretta che cangia $M_1 A M_2$ in $M_1' A' M_2'$, e per questa la retta limite si cangia in sè stessa; di più, siccome A, A′ appartengono allo stesso semipiano, tale affinità circolare è una (I) e raggiunge l'effetto voluto.

Oppure si può osservare che ogni movimento non-euclideo deve tradursi, nel semipiano rappresentativo, in una trasformazione conforme $\omega' = f(\omega)$ del semipiano in sè, che trasformi ogni circolo ortogonale alla retta limite (ogni geodetica) in un altro tale circolo (in una geodetica) e questo ha per conseguenza che qualunque altro circolo deve mutarsi in un circolo. Si tratta dunque di un'affinità circolare diretta di Möbius, che di più trasforma in sè la retta limite ed il semipiano positivo e quindi appartiene necessariamente al gruppo (I).

§. 227.

Rette non-euclidee. — Misura delle distanze.

Dopo queste osservazioni ritorniamo sulla questione delle geodetiche nella nostra metrica, trattando direttamente il problema di minimo: *Dati due punti* A, B *nel semipiano positivo, quale è la linea di più breve lunghezza (nel senso della nostra metrica) che riunisce* A *con* B?

Supponiamo dapprima che i due punti A, B siano sopra una stessa verticale (normale alla retta limite $y=0$) p. e. sull'asse delle y o $x=0$, e siano a, b le loro ordinate

$$0 < a < b.$$

La lunghezza l non-euclidea del tratto rettilineo A B è per la (2)

$$l = R\int_a^b \frac{dy}{y} = R\log\frac{b}{a}; \tag{5}$$

per un'altra linea qualunque $x = f(y)$ che riunisca A con B, rimanendo tutta nel semipiano positivo, la lunghezza L non-euclidea sarà

$$L = R\int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = R\int_a^b \frac{\sqrt{f'^2(y) + 1}}{y}\, dy \tag{5*}$$

e paragonando i due integrali (5), (5*) è immediatamente evidente che è sempre

$$L > l,$$

e sarà $L = l$ solo quando la nuova linea coincida col tratto rettilineo stesso A B. Dunque:

Per due punti A, B situati sull' asse $x = 0$ la linea di minima lunghezza non euclidea che li riunisce è il tratto rettilineo AB stesso, e la sua lunghezza l è data da

$$(A) \qquad l = R \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Questa possiamo scrivere anche sotto la forma

$$(A^*) \qquad l = R \log(\infty, 0, a, b),$$

dove $(\infty, 0, a, b)$ indica il birapporto di questi quattro valori, ossia del punto all' infinito della retta $x = 0$, dell'origine (0, 0) e dei due punti A, B. Ora con una sostituzione (1), che rappresenta, come si è visto, un movimento nella nostra metrica, possiamo portare i due punti A, B in altri due punti qualunque A′, B′ del piano ed allora la retta $x = 0$ si cangia nel circolo che passa per A′, B′ e taglia ortogonalmente la retta limite, mentre i due punti ∞ e o della detta retta si cangiano nei punti M_1, M_2 ove il detto circolo incontra ortogonalmente la retta limite.

Vediamo dunque: *Dati due punti qualunque* A, B *nel semipiano, vi è sempre una ed una sola linea di minima lunghezza non euclidea che li congiunge; questa è rappresentata dal circolo che passa per* A *e* B *e taglia ortogonalmente la retta limite in due punti* M_1, M_2. *La distanza non euclidea dei due punti è data dalla formola*

$$(B) \qquad \delta(AB) = R \log(M_1 M_2 AB), \quad (1)$$

indicando con $(M_1 M_2 AB)$ *il birapporto di questi quattro punti sul circolo.*

---

(1) In altro modo come segue. Prendasi p. e. il cerchio

$$x^2 + y^2 = 1$$

e sopra di esso i due punti A, B di anomalie $\theta_1 < \theta_2$ (comprese fra o e π). Per la loro distanza non-euclidea abbiamo dalla (2) (ponendo $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$)

$$\delta = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = R \log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}\right)$$

che dà ancora la formola (B) del testo.

Così abbiamo di nuovo stabilito il risultato al principio del paragrafo precedente, relativo alle geodetiche della nostra metrica (o rette non euclidee), e di più si è visto che un arco geodetico, in qualunque estensione, conserva sempre la proprietà di minimo (forte). Inoltre abbiamo la notevole formola (B) che assegna la legge di misurazione delle distanze *finite*, come la (2) assegnava quella per le distanze infinitesime. Su questa formola (B) è bene ancora fare le osservazioni seguenti:

1° Le due coppie $M_1 M_2$, AB non si separano e per ciò il birapporto $M_1 M_2 AB$ è in ogni caso positivo, e il logaritmo reale. Inoltre da $(M_1 M_2 AB) \cdot (M_1 M_2 BA) = 1$ segue

$$\delta(AB) = -\delta(BA)$$

2° Se tenendo fisso p. e. A, facciamo convergere B verso M_1 (o verso M_2) il birapporto tende verso o o ∞ e il logaritmo aumenta infinitamente. I punti della retta limite hanno quindi distanza non-euclidea infinita da qualunque punto proprio (del semipiano positivo); essi rappresentano i punti all' infinito (improprii) della nostra metrica, e la retta limite è da riguardarsi per ciò come *l'inaccessibile* della metrica (l' assoluto).

Alla formola (B) per la misura della distanza non-euclidea δ può tornare utile dare quest' altra forma che permette di calcolare δ appena noti i valori ω, ω' della variabile complessa in A e B. Se nella (B) prendiamo p. e. M_1 come centro di proiezione e indichiamo con m, m' i coefficienti angolari delle rette projettanti $M_1 A$, $M_1 B$, abbiamo

$$\delta = R \log \frac{m'}{m}, \quad \text{e} \quad e^{\frac{\delta}{R}} = \frac{m'}{m},$$

indi

$$\cosh\left(\frac{\delta}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{m} + \frac{m}{m'}\right) = \frac{m^2 + m'^2}{2 m m'},$$

e per ciò

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{1}{2}\left\{\cosh\left(\frac{\delta}{R}\right) - 1\right\} = \frac{(m' - m)^2}{4 m m'},$$

che possiamo scrivere sotto forma di birapporto

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = (m, -m', m', -m)$$

E siccome $-m, -m'$ sono i valori del coefficiente angolare corrispondenti alle rette projettanti i punti A_0, B_0 simmetrici di A, B rispetto alla retta limite abbiamo

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = (A, B_0, B, A_0),$$

ovvero, indicando con ω, ω' i valori della variabile complessa in A, B (sicchè in A_0, B_0 avremo i valori coniugati ω_0, ω_0',

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = (\omega, \omega_0', \omega', \omega_0),$$

ossia

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{(\omega-\omega')(\omega_0-\omega_0')}{(\omega-\omega_0)(\omega_0'-\omega')},$$

formola che raggiunge l'effetto voluto. Posto in fine

$$\omega = x+iy, \quad \omega' = x'+iy' \quad (y>0,\ y'>0)$$
$$d^2 = (x-x')^2+(y-y')^2$$

abbiamo la formola

$$\text{(B*)} \qquad \operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{d}{2\sqrt{yy'}}$$

che esprime la distanza non euclidea δ fra i due punti (x, y), (x', y') mediante le ordinate y, y' dei due punti e la loro distanza *euclidea* d.

§. 228.

Rappresentazione entro il cerchio limite.

Molte volte nelle ricerche di metrica pseudosferica (non euclidea) giova servirsi, anzichè della rappresentazione fin qui usata sul semipiano positivo, di un' altra rappresentazione (conforme) entro un cerchio limite, il cui raggio assumeremo per semplicità $= 1$. Per questo basta rappresentare conformemente il semipiano positivo della variabile complessa ω entro un disco circolare, di raggio $= 1$, nel piano

di un' altra variabile complessa che indicheremo p. e. con τ. Situando il centro del disco nell'origine $\tau = 0$, e supponendo che a questo corrisponda nel semipiano ω il punto $\omega = i$, basta porre a tale effetto

$$\text{(6)} \qquad \tau = \frac{\omega - i}{\omega + i}, \quad \text{ossia} \quad \omega = i\,\frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

La formola che ne consegue

$$\tau\tau_0 = \frac{\omega\omega_0 + 1 - 2y}{\omega\omega_0 + 1 + 2y} \quad (\omega = x+iy)$$

dimostra appunto che l'affinità circolare (6) trasforma il semipiano positivo $\omega y > 0$ nell'interno del disco, il semipiano negativo nell'esterno. E si vede anche subito che a valori coniugati ω, ω_0 di ω (simmetrici rispetto alla retta limite) corrispondono per τ due valori $\tau, \frac{1}{\tau_0}$ (simmetrici rispetto al cerchio). (1)

Dalla (6) abbiamo

$$\omega = i\,\frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \omega - \omega_0 = 2i\,\frac{1-\tau\tau_0}{(1-\tau)(1-\tau_0)}$$

$$d\omega = 2i\,\frac{d\tau}{(1-\tau)^2}, \quad d\omega_0 = -2i\,\frac{d\tau_0}{(1-\tau_0)^2},$$

indi

$$\frac{d\omega\, d\omega_0}{(\omega-\omega_0)^2} = -\frac{d\tau\, d\tau_0}{(1-\tau\tau_0)^2}$$

Dalla (2*) risulta quindi: *Nella rappresentazione entro il cerchio limite* $(\tau) = 1$ *il* ds^2 *non-euclideo è dato da*

$$\text{(7)} \qquad ds^2 = 4R^2\,\frac{d\tau\, d\tau_0}{(1-\tau\tau_0)^2}.$$

Ponendo τ sotto la forma trigonometrica

(1) Se $\tau = \dfrac{\omega - i}{\omega + i}$, $\tau' = \dfrac{\omega_0 - i}{\omega_0 + i}$, risulta $\tau' = \dfrac{1}{\tau_0}$.

$$\tau = \rho e^{i\theta}, \quad \tau_0 = \rho e^{-i\theta},$$

questa si può scrivere

$$(7^*) \qquad ds^2 = 4R^2 \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

Siccome nella nuova rappresentazione i circoli ortogonali alla retta limite sono manifestamente cangiati in circoli ortogonali al circolo limite, abbiamo: *Le geodetiche della metrica (rette non-euclidee) sono ora rappresentate da circoli ortogonali al cerchio limite, e la distanza δ non-euclidea di due punti* A, B *è data ancora dalla formola* (B)

$$\delta = R \log (A\,B\,M_1\,M_2),$$

dove M_1, M_2 *sono i punti ove il circolo che passa per* A, B *e taglia ortogonalmente il cerchio limite incontra quest' ultimo cerchio.*

La formola per la distanza δ si può nuovamente trasformare, come al paragrafo precedente, in

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = (A, B_0, B, A_0),$$

dove ora A_0, B_0 sono i punti simmetrici di A, B rispetto al cerchio limite. Se con τ, τ' indichiamo i valori della variabile complessa in A, B, quelli in A_0, B_0 sono come si è visto $\frac{1}{\tau_0}$, $\frac{1}{\tau_0'}$, indi

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \left(\tau, \frac{1}{\tau_0'}, \tau', \frac{1}{\tau_0}\right),$$

ossia

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{(\tau-\tau')(\tau_0-\tau_0')}{(1-\tau\tau_0)(1-\tau'\tau_0')}.$$

Infine ponendo τ, τ' sotto forma trigonometrica

$$\tau = \rho e^{i\theta}, \quad \tau' = \rho' e^{i\theta},$$

e indicando con d la distanza euclidea dei due punti risulta

$$(C) \qquad \operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{d}{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho'^2}}.$$

formola che, nella nuova rappresentazione, sostituisce la (B) (1). In particolare se poniamo $\rho' = 0$, indi $d = \rho$, si ha

$$\operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{2R}\right) = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

ovvero

$$(8) \qquad \rho = \operatorname{tgh}\left(\frac{\delta}{2R}\right).$$

È da notare che i diametri del cerchio limite figurano in particolare come suoi circoli ortogonali, e per ciò come immagini di geodetiche uscenti da un punto fisso la cui immagine è il centro. Si osservi poi che ponendo nella (7), secondo la (8)

$$\rho = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2R}\right), \qquad \theta = 0$$

si ottiene subito il ds^2 della molteplicità pseudosferica sotto la forma normale ellittica (§ 126)

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2.$$

Importa in fine osservare come vengono rappresentati i movimenti nell' attuale rappresentazione, per la qual cosa basta esprimere la formola (I) § 226 nella nuova variabile τ, secondo la (C). Oppure, come nel caso analogo dei movimenti della molteplicità sferica (§ 59), si osservi che un movimento sarà rappresentato da una sostituzione lineare su τ

$$\tau' = \frac{A\tau + B}{C\tau + D} \quad (AD - BC) = 0,$$

(1) Questa formola equivale alla relazione fondamentale di trigonometria non-euclidea

$$\cosh\left(\frac{a}{R}\right) = \cosh\left(\frac{b}{R}\right)\cosh\left(\frac{c}{R}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{b}{R}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{c}{R}\right)\cos A$$

che lega i tre lati a, b, c e un angolo A di un triangolo non-euclideo (Cf. più oltre § 235).

che possiamo già pensare scritta sotto forma unimodulare $AD - BC = 1$. Contemporaneamente il simmetrico $\frac{1}{\tau_0}$ di τ deve portarsi nel simmetrico $\frac{1}{\tau_0'}$ di τ' e per ciò

$$A_0 = \varepsilon D, \quad B_0 = \varepsilon C, \quad C_0 = \varepsilon B, \quad D_0 = \varepsilon A$$

$$(\varepsilon = \pm 1)$$

Ma si ha subito di qui

$$1 - \tau'\tau_0' = \frac{\varepsilon(1 - \tau\tau_0)}{(C\tau + D)(C_0\tau_0 + D_0)},$$

e siccome per ipotesi $\tau\tau_0 < 1$, $\tau'\tau_0' < 1$, ne segue che necessariamente $\varepsilon = +1$. Viceversa, supposte queste condizioni soddisfatte, risulta

$$\frac{d\tau'\ d\tau_0'}{(1 - \tau'\tau_0')^2} = \frac{d\tau\ d\tau_0}{(1 - \tau\tau_0)^2}$$

e per la (7) il ds^2 viene effettivamente trasformato in sè. Ne concludiamo: ***Nella nuova rappresentazione i movimenti non-euclidei sono rappresentati da tutte e sole le sostituzioni lineari del gruppo***

$$\text{(II)} \qquad \tau' = \frac{A\tau + B}{B_0\tau + A_0}, \text{ con } AA_0 - BB_0 = 1.$$

Questa formola tiene qui, nella geometria pseudosferica, il posto della formola del Cayley per la geometria sferica.

§. 229.

La metrica pseudosferica come metrica non-euclidea. L'angolo di parallelismo.

Studiate le proprietà fondamentali delle rappresentazioni della metrica pseudosferica, prima di procedere oltre nelle ricerche, facciamo alcune considerazioni che giustificano il nome più volte usato di *metrica non-euclidea*. Definito il ds^2 della nostra metrica mediante la formola (2*), o l'equivalente (7), noi abbiamo riconosciuto nella nostra metrica le seguenti proprietà fondamentali:

1° Come nella geometria piana (e nella sferica) esiste anche nella pseudosferica la completa libertà di movimenti, cioè vale in tutta la sua estensione il principio di sovrapponibilità delle figure.

2° Due punti qualunque sono sempre riuniti da una e da una sola linea geodetica.

3° Ogni linea geodetica ha lunghezza infinita; qualunque suo arco finito AB segna il più breve cammino per andare, nella molteplicità, da A a B.

Dopo ciò, se si esaminano gli assiomi ed i postulati posti da Euclide a base della geometria piana, *fatta eccezione dal postulato XI sulle parallele*, si riconosce che essi valgono tutti nell'attuale metrica, quando al nome di *retta* si sostituisca quello di *geodetica*. Tutte le conseguenze logiche dei detti assiomi e postulati (tolto il postulato delle parallele) valgono dunque nella nuova metrica, la quale non è per conseguenza che la metrica del piano quando non si ammetta il postulato delle parallele, che possiamo enunciare sotto questa forma: ***Da un punto fuori di una retta si può condurre una ed una sola retta che non la incontri.***

Dopo i vani tentativi di molti geometri per *dimostrare* questo postulato, cioè per dedurlo logicamente dagli altri principii, si passò a costruire una geometria che ne fosse indipendente, alla quale fu dato per ciò appunto il nome di *geometria non-euclidea*. Le osservazioni superiori spiegano come questa geometria non euclidea nel piano coincide colla metrica che abbiamo detto pseudosferica. Vediamo adunque come in questa metrica si comporta una geodetica qualunque g rispetto al fascio di geodetiche uscenti da un punto o fuori di g. Per questo serviamoci p. e. della seconda rappresentazione (§. precedente) eseguita in modo che il centro O del cerchio limite Γ (di raggio $= 1$) sia l'immagine del punto o. Così la geodetica g sarà rappresentata dal circolo G della figura 12ª, ortogonale al cerchio Γ, ed il fascio di geodetiche uscenti da o dal fascio di rette di centro O. Ora siano A, B i punti ove G incontra (ortogonalmente) il cerchio limite, che rappresentano nella nostra metrica i (due) punti inaccessibili di g. Le rette per O che cadono entro l'angolo $\widehat{AOB}$ incontrano G in punti reali e le rimanenti non la incontrano. Sulla molteplicità pseudosferica le obiettive di OA, OB sono due geodetiche oa, ob, che diconsi *parallele* alla g, perchè i loro punti d'incontro con g sono allontanati a distanza infinita. Esse segnano il limite fra le geodetiche del fascio (o) che tagliano effettivamente g e quelle che non la incontrano. Se da O caliamo il tratto rettilineo OP nor-

male a G (che va a passare pel centro C del circolo G) il tratto geodetico obiettivo op è la perpendicolare geodetica calata da o su

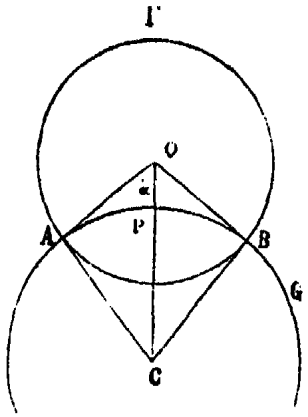


FIG. 12.[a]

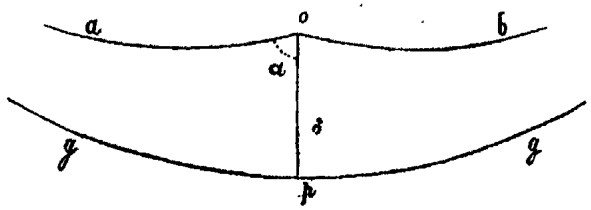


FIG. 12a bis

p (1); e come OP biseca l'angolo AOP, così op biseca l'angolo eguale $\widehat{aob}$. Quest'angolo $\alpha = \widehat{aop} = \widehat{bop}$ che l'una e l'altra parallela oa, ob formano colla normale op dicesi *l'angolo di parallelismo* del punto o rispetto a g. È manifesto *a priori* (pel principio di sovrapponibilità delle figure nella nostra metrica) che il valore α dell'angolo di parallelismo dipende solo dalla distanza geodetica $\delta = op$ del punto o da g.

Questo confermiamo trovando, colla nostra rappresentazione, la formola effettiva che lega α a δ. Per ciò osserviamo che dal triangolo rettangolo OCA della figura si ha

(1) Si rammenti qui ed in seguito che la rappresentazione è *conforme*.

$$\overline{CA}^2 + \overline{OA}^2 = (\overline{CP} + \overline{OP})^2 = \overline{CA}^2 + \overline{OP}^2 + 2\,\overline{CA}\,.\,\overline{OP},$$

da cui

$$\overline{CA} = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}{2\,\overline{OP}} = \frac{1-\rho^2}{2\rho},$$

posto $OP = \rho$. Ma dalla formola (3) abbiamo

$$\rho = \operatorname{tgh}\left(\frac{\delta}{2R}\right),$$

indi

$$\overline{CA} = \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{R}\right)}.$$

Ora dal triangolo rettangolo OCA

$$\overline{CA} = OA \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha,$$

e ne risulta la formola richiesta per l'angolo di parallelismo

$$\text{(III)} \qquad \cot\alpha = \operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{R}\right),$$

alla quale si possono dare le forme equivalenti

$$\text{(III*)} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{\delta}{R}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\delta}{R}\right)}.$$

Si vede che, quanto più piccolo è δ, tanto più α è vicino a $\frac{\pi}{2}$ e le due parallele tendono a confondersi in una; allontanando invece o da g si può rendere α piccolo a piacere.

Dunque: *In metrica non-euclidea da ogni punto b fuori di una geodetica g (retta non euclidea) partono due diverse geodetiche parallele a g; l'angolo α di parallelismo (semi-angolo delle due parallele) è legato alla distanza geodetica δ del punto o da g dalla formola* (III) *o* (III*).

Con questo risultato è provato che il postulato delle parallele in geometria piana è *indimostrabile*; esso serve appunto, insieme col principio della infinità della retta, a differenziare la geometria euclidea dalla non-euclidea.

§. 230

Classificazione dei movimenti diretti non-euclidei.

Andiamo ora a classificare i movimenti (diretti) non euclidei in tre specie e corrispondentemente a definire tre specie di *circoli non-euclidei.*

Nella prima rappresentazione conforme sul semipiano $y > 0$ (§. 226) un movimento è rappresentato da una sostituzione lineare della forma (I)

$$(I) \qquad \omega' = \frac{\alpha\,\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \delta}, \quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$$

con coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reali. Per ogni tale sostituzione vi sono due valori di ω che rimangono fissi, e cioè le radici dell'equazione

$$(9) \qquad \gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\,\omega - \beta = 0$$

e possono presentarsi tre casi a seconda che il discriminante ν di questa equazione

$$\nu = (\delta - \alpha)^2 + 4\,\beta\,\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4$$

è negativo, nullo o positivo.

1.° caso. $(\nu < 0)$, $(\alpha + \delta)^2 < 4$. Le radici della (9) sono coniugate immaginarie, una ω nel semipiano positivo, l'altra simmetrica ω_0 nel semipiano negativo. La prima rappresenta un punto P reale e a distanza finita della moltiplicità, che rimane fisso pel movimento; questo è una rotazione attorno al centro P immobile e dicesi *movimento ellittico.*

Come si calcola l'ampiezza Θ di questa rotazione?

Se ω è il punto che rimane fisso, $\omega + d\omega$ un punto infinitamente vicino ed $\omega + \delta\omega$ l'altro in cui questo si trasporta pel movimento, sarà Θ l'angolo fra i due elementi lineari $(\omega, \omega + d\omega)$, $(\omega, \omega + \delta\omega)$ che per le formole di metrica angolare è dato da

$$2\cos\Theta = \frac{d\omega\,\delta\omega_0 + d\omega_0\,\delta\omega}{\sqrt{d\omega\,d\omega_0}\sqrt{\delta\omega\,\delta\omega_0}}\ (^1).$$

(1) Posto $\omega = x + iy$, $\omega_0 = x - iy$ è la solita formola

$$\cos\Theta = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

per la metrica angolare nel piano.

Ma si ha per la (I)

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{(\gamma\,\omega + \delta)^2}, \quad \delta\omega_0 = \frac{d\omega_0}{(\gamma\,\omega_0 + \delta)^2},$$

quindi

$$2\cos\Theta = \frac{(\gamma\,\omega + \delta)^2 + (\gamma\,\omega_0 + \delta)^2}{(\gamma\,\omega + \delta)\,(\gamma\,\omega_0 + \delta)}.$$

A causa della (9)

$$\omega + \omega_0 = \frac{\alpha - \delta}{\gamma}, \quad \omega\,\omega_0 = -\frac{\beta}{\gamma}$$

$$(\gamma\omega + \delta)^2 + (\gamma\omega_0 + \delta)^2 = \gamma^2(\omega^2 + \omega_0^2) + 2\gamma\delta(\omega + \omega_0) + 2\delta^2 =$$

$$= \gamma^2(\omega + \omega_0)^2 - 2\gamma^2\omega\omega_0 + 2\gamma\delta(\omega + \omega_0) + 2\delta^2 = (\alpha + \delta)^2 - 2$$

$$(\gamma\omega + \delta)(\gamma\omega_0 + \delta) = \gamma^2\omega\omega_0 + \gamma\delta(\omega + \omega_0) + \delta^2 = -\beta\gamma + \delta(\alpha - \delta) + \delta^2$$

$$= 1,$$

e per ciò

$$2\cos\Theta = (\alpha + \delta)^2 - 2, \quad 2(1 + \cos\Theta) = (\alpha + \delta)^2,$$

che possiamo scrivere sotto la forma definitiva

$$(10) \qquad 2\cos\frac{\Theta}{2} = (\alpha + \delta).$$

Come si vede, l'ampiezza Θ della rotazione dipende unicamente dal valore assoluto della somma $\alpha + \delta$, che dicesi per ciò *l'invariante* della sostituzione; due movimenti ellittici d'eguale invariante sono rotazioni della stessa ampiezza. Anche è da osservarsi che la medesima formola (10) vale ancora per la rappresentazione entro il cerchio limite e si scrive allora

$$(10^a) \qquad 2\cos\frac{\Theta}{2} = |\,A + A_0\,|.$$

2.° caso. $(\nu > 0)$ $(\alpha + \delta)^2 > 4$. Qui le radici ω_1, ω_2 della (9) sono reali e distinte e dànno due punti fissi sulla retta limite; cioè mentre nessun punto a distanza finita della nostra metrica rimane ora fisso, rimangono invece fissi due punti distinti all'infinito e perciò *scorre in sè medesima la geodetica g loro congiungente,* rappresen-

tata dal circolo descritto sul segmento $(\omega_1 \ldots \omega_2)$ come diametro (1). Un movimento di questa specie dicesi *iperbolico*, e chiamasi *ampiezza* Θ del movimento il tratto, manifestamente costante, di cui scorre sopra g ogni punto di questa geodetica. Anche qui l'ampiezza Θ del movimento iperbolico si calcola con una formola analoga alla (10), e che troviamo nel modo seguente.

L'equazione del circolo descritto sul detto segmento $(\omega_1 \ldots \omega_2)$ come diametro è evidentemente:

$$\gamma (x^2 + y^2) + (\delta - \alpha) x - \beta = 0,$$

sicchè ogni punto ω situato su questa circonferenza soddisfa alla condizione

$$\gamma\, \omega\, \omega_0 + \frac{\delta - \alpha}{2} (\omega + \omega_0) - \beta = 0 \tag{10}$$

Ora calcoliamo la distanza (non-euclidea) ϑ a cui viene trasportato un tale punto dalla nostra sostituzione (I) applicando la formola (a) §. 127

$$-\operatorname{senh}^2 \frac{\vartheta}{2R} = \frac{(\omega - \omega')\,(\omega_0 - \omega_0')}{(\omega - \omega_0)\,(\omega' - \omega_0')},$$

coll'osservare che qui

$$\omega - \omega' = \frac{\gamma\,\omega^2 + (\delta - \alpha)\,\omega - \beta}{\gamma + \delta}, \quad \omega_0 - \omega_0' = \frac{\gamma\,\omega_0^2 + (\delta - \alpha)\,\omega_0 - \beta}{\gamma\,\omega_0 + \delta)}$$

e d'altra parte per la (3) §. 226

$$\omega' - \omega_0' = \frac{\omega - \omega_0}{(\gamma\,\omega + \delta)\,(\gamma\,\omega_0 + \delta)},$$

per cui abbiamo in generale

$$-\operatorname{senh}^2\left(\frac{\Theta}{2R}\right) = \frac{|\gamma\,\omega^2 + (\delta - \alpha)\,\omega + \beta|\,|\gamma\,\omega_0 + (\delta - \alpha)\,\omega_0 - \beta|}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Ma se si eseguisce il prodotto nel numeratore e si tiene conto

(1) Nel caso particolare $\gamma = 0$ una delle radici della (9) diventa infinita e il circolo si cangia in una retta normale alla retta limite, e vale sempre la seguente formola (11) nel testo.

della (10), con facile trasformazione (1) si trova per $\operatorname{senh}^2\left(\frac{\Theta}{2R}\right)$ il valore, indipendente dalla posizione di ω sul detto circolo:

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{\Theta}{2R}\right) = \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2 - 1,$$

cioè

$$4 \cosh^2\left(\frac{\Theta}{2R}\right) = (\alpha + \delta)^2,$$

o in fine

$$2 \cosh\left(\frac{\Theta}{2R}\right) = (\alpha + \delta), \tag{11}$$

formola analoga alla (10) e che determina qui l'ampiezza ϑ del movimento iperbolico, come dipendente unicamente dall'*invariante* $(\alpha + \delta)$.

3.° caso. $(\Delta = 0)$ $(\alpha + \delta)^2 = 4$. Le due radici della (9) coincidono in un'unica radice reale. Nel movimento, che dicesi in tal caso *parabolico*, resta fisso un solo punto all'infinito della moltiplicità.

Un tale movimento è da riguardarsi come una rotazione attorno ad un punto improprio.

Un'immagine chiara di queste tre specie di movimenti si ha nel considerare il moto di rotazione attorno all'asse delle tre specie di superficie pseudosferiche rotonde (§. 127) e che abbiamo appunto attribuito rispettivamente al tipo ellittico, iperbolico e parabolico.

§. 231.

Movimenti inversi o di 2.ª specie.

Insieme ai movimenti sopra considerati che conservano le lunghezze, e gli angoli *col loro senso*, consideriamo ora anche quelle

(1) Basta sostituire per ω_0 nella formola superiore il valore tratto dalla (10)

$$\omega_0 = \frac{-\frac{\delta - \alpha}{2}\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \frac{\delta - \alpha}{2}}$$

e moltiplicare numeratore e denominatore della formola per $\left(\gamma\,\omega + \frac{\delta - \alpha}{2}\right)^2$.

trasformazioni che conservano bensì le lunghezze e gli angoli, ma di questi ultimi invertono il senso; questi si diranno movimenti di *seconda* specie, a differenza dei primi che si dicono di prima specie. Il più semplice esempio di un movimento di seconda specie si ha nella *simmetria* rispetto ad una geodetica, ossia nel ribaltamento della moltiplicità attorno a questa geodetica. P. e. il ribaltamento attorno alla geodetica $x = 0$, nella solita rappresentazione sul semipiano, ha l'espressione analitica

$$\omega' = -\omega_0 ; \tag{12}$$

e siccome combinando due movimenti di seconda specie si ha un movimento di prima, così otterremo tutti i movimenti di seconda specie combinando la particolare simmetria (12) col più generale movimento (I) di prima specie. Dunque:

I movimenti non-euclidei di seconda specie sono rappresentati dalle sostituzioni lineari

$$\omega' = \frac{\alpha\,\omega_0 - \beta}{\gamma\,\omega_0 - \delta} \tag{IV}$$

a coefficienti reali e a determinante $-\alpha\delta + \beta\gamma = -1$.

Come per i movimenti di prima specie, domandiamo se nel movimento di seconda specie (IV), che indicheremo per brevità con S, vi sono dei punti della moltiplicità che rimangono fissi. Un punto che rimanga fisso per S rimarrà pur fisso pel movimento S ripetuto, che indichiamo con S^2, ed è di prima specie. Ora S^2 ha l'espressione effettiva

$$S^2) \qquad \omega' = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\,\omega + \beta(\delta - \alpha)}{-\gamma(\delta - \alpha)\,\omega + \delta^2 - \beta\gamma}$$

e se escludiamo per un momento che sia S^2 l'identità (cioè S a periodo 2) la somma del primo e quarto coefficiente in S^2 è

$$\alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\gamma = (\alpha - \delta)^2 + 2,$$

e siccome $\alpha \neq \delta$ (altrimenti sarebbe $S^2 = 1$), l'invariante di S^2 è > 2, cioè: *Se il movimento di seconda specie* S *non è a periodo 2, il suo quadrato* S^2 *è un movimento di prima specie iperbolico.*

Questo S^2 ha due punti fissi distinti impropri, che sono anche punti fissi per S, e cioè le radici *reali e distinte* della equazione

$$\gamma\xi^2 - (\delta + \alpha)\,\xi + \beta = 0,$$

che si ha ponendo nella (IV) $\omega = \omega_0 = \xi$. La geodetica che passa per questi due punti impropri, nel movimento S striscia sopra sè stessa, cioè: *In un movimento di seconda specie* S, *che non sia a periodo 2, vi è sempre una ed una sola geodetica che striscia in sè medesima; nessun punto rimane fisso, eccetto i due punti impropri di questa geodetica.* È manifesto che ogni punto di questa geodetica scorrerà di un tratto costante θ, che misurerà l'ampiezza del movimento.

Per calcolare questa ampiezza si osservi che pel movimento iperbolico S^2 (d'invariante

$$(\alpha - \delta)^2 + 2$$

come sopra si è visto) l'ampiezza è manifestamente 2θ, ed applicando la (11) si ha

$$2\cosh\left(\frac{\theta}{R}\right) = (\alpha - \delta)^2 + 2$$

indi

$$2\left[\cosh\left(\frac{\theta}{R}\right) - 1\right] = 4\,\mathrm{senh}^2\left(\frac{\theta}{2R}\right) = (\alpha - \delta)^2 ,$$

da cui la formola

$$2\,\mathrm{senh}\left(\frac{\theta}{2R}\right) = (\alpha - \delta), \tag{12}$$

corrispondente nel caso attuale alla (11).

Se infine $S^2 = 1$, indi $\delta = \alpha$, vi sono *infiniti* punti che la (IV) lascia fissi, e cioè tutti i punti del circolo

$$\gamma\omega\omega_0 - \alpha(\omega + \omega_0) + \beta = 0,$$

ossia

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right) + y^2 = \frac{1}{\gamma^2} .$$ [1]

In questo caso rimangono fissi tutti i punti di una geodetica, e per conseguenza ogni punto va nel suo simmetrico rispetto a questa.

---

[1] Eventualmente, per $\gamma = 0$, tutti i punti della retta $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Dunque: *un movimento di seconda specie a periodo* **2** *non è altro che un ribaltamento attorno ad una geodetica (simmetria, riflessione), di cui tutti i punti rimangono fissi.*

Del resto la formola (12) è applicabile ancora in questo caso; soltanto che, essendo $\delta = \alpha$, risulta $\Theta = 0$, cioè è nulla l'ampiezza del movimento, in corrispondenza alla circostanza che ogni punto della geodetica fissa rimane fisso.

È chiaro poi che ogni movimento di seconda specie, combinato con un movimento iperbolico, che faccia retrocedere di egual tratto i punti della geodetica fissa, ne lascia fissi tutti i punti e per ciò: *Ogni movimento di seconda specie è la combinazione di una simmetria rispetto ad una geodetica e di un movimento (di prima specie) iperbolico che fa scorrere in sè stessa questa geodetica.*

§. 232.

I circoli non-euclidei delle tre specie.

Chiameremo *circoli non euclidei* tutte le linee che nella metrica non euclidea hanno curvatura geodetica costante (1). Cominciamo dal dimostrare la seguente proprietà dell'una o dell'altra delle rappresentazioni conformi sul semipiano positivo o entro il cerchio limite, proprietà affatto analoga a quella di cui gode la proiezione stereografica della sfera:

Ogni circolo non-euclideo è rappresentato da un circolo nel piano immagine, e viceversa.

Sia L un circolo nella nostra metrica a curvatura $-\frac{1}{R^2}$, cioè una linea di curvatura geodetica costante. Prendiamo a linee coordinate $v = \text{cost.}^{te}$ le geodetiche normali alla L, e a linee $u = \text{cost.}^{te}$ le trajettorie ortogonali, fra le quali la L che supponiamo sia la $u = 0$. L'elemento lineare prenderà intanto la forma geodetica

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

con

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\,e^{\frac{u}{R}} + \psi(v)\,e^{-\frac{u}{R}} \quad (\text{Cf. §. 126}).$$

(1) Qui adunque la denominazione di circolo è presa nel secondo senso di cui è parola al §. 107. Soltanto i circoli che si dicono nel testo di prima specie (a centro reale proprio) sono circoli di Gauss.

La curvatura geodetica delle $u = \text{cost.}^{te}$ è

$$-\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{R}\,\frac{\varphi(v)\,e^{\frac{u}{R}} - \psi(v)\,e^{-\frac{u}{R}}}{\varphi(v)\,e^{\frac{u}{R}} + \psi(v)\,e^{-\frac{u}{R}}},$$

indi quella della linea L

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\psi(v) - \varphi(v)}{\psi(v) + \varphi(v)},$$

ed essendo per ipotesi costante sarà costante il rapporto $\frac{\varphi(v)}{\psi(v)}$, e per ciò cangiando il parametro v potremo prendere $\varphi(v)$, $\psi(v)$ costanti.

Ritorniamo così alle tre forme tipiche A) B) C) §. 127 per le superficie pseudosferiche di rotazione, onde vediamo che: *le linee geodeticamente parallele a circoli non-euclidei sono pure circoli e colle loro trajettorie ortogonali (geodetiche) formano un doppio sistema isotermo.*

Nel piano immagine avremo pure un sistema isotermo nel quale le immagini delle geodetiche sono circoli ortogonali alla retta (al cerchio) limite, e pel teorema al § 115 anche le immagini delle linee dell'altro sistema, in particolare quella della L, saranno circoli. Questo doppio sistema ortogonale di circoli sarà un fascio.

Inversamente un circolo qualunque del piano, insieme colla retta (col cerchio) limite, determina un fascio di circoli ed il fascio ortogonale, che insieme formano un sistema isotermo. I circoli del secondo fascio sono immagini di geodetiche e quindi quelli del primo immagini di linee a curvatura geodetica costante, cioè di circoli non-euclidei.

La seconda parte della proposizione si conferma anche calcolando, colla formola del Bonnet, la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ che spetta p. e. nella rappresentazione conforme sul semipiano, alla linea rappresentata dal circolo

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (a, b, r \text{ costanti})$$

nella metrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Troviamo invero per $\frac{1}{\rho_g}$ il valore costante

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{R} \cdot \frac{b}{r},$$

e notiamo che sarà

$$\frac{1}{\rho_g} > \frac{1}{R}$$

se $b > r$, cioè *se il cerchio immagine è tutto nel semipiano positivo*; invece

$$\frac{1}{\rho_g} < \frac{1}{R}, \text{ quando } b < r,$$

nel qual caso il circolo immagine taglia la retta limite sotto un angolo ψ tale che

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos\psi}{R}, \tag{13}$$

e in fine avremo

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{R} \text{ quando } b = r,$$

ossia quando il circolo immagine tocca la retta limite.

Corrispondentemente distinguiamo i circoli non-euclidei in tre specie. Nel primo caso $\frac{1}{\rho_g} > \frac{1}{R}$ il fascio di circoli determinato dal circolo immagine C e dalla retta limite ha punti base immaginarii ed il fascio ortogonale punti base reali di cui uno interno a C; questo punto è immagine di un punto proprio per cui vengono a passare tutte le geodetiche normali al circolo non-euclideo: *Un circolo non-euclideo di 1ª specie è un circolo a centro effettivo reale e a distanza finita.*

Nel secondo caso $\frac{1}{\rho_g} < \frac{1}{R}$, il circolo C taglia la retta limite in due punti reali e distinti, che sono i punti base del primo fascio, mentre quelle dei circoli ortogonali (immagini delle geodetiche normali al circolo non-euclideo) ha punti base immaginarii. Per ciò diciamo che: *i circoli non euclidei di seconda specie sono a centro ideale.*

Od anche, siccome nel primo fascio vi è in questo caso un circolo ortogonale alla retta limite, possiamo dire: *I circoli non euclidei di seconda specie (a centro ideale) sono linee geodeticamente parallele ad una geodetica.*

In fine i circoli della terza specie $\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{R}$, che già abbiamo detto chiamarsi *oricicli* (§. 126), possono considerarsi come circoli col centro all' infinito, le loro geodetiche normali sono tutte parallele nel senso non-euclideo (§. 229) e concorrono in questo centro all' infinito.

Nella seconda rappresentazione, entro il cerchio limite, un circolo immagine corrisponderà ad un circolo di 1ª specie se sarà tutto interno al cerchio limite, ad un circolo di 2ª specie se lo attraversa, in fine ad un oriciclo se sarà tangente (internamente) al cerchio limite.

Osserviamo da ultimo che ad un qualunque circolo non euclideo corrisponde un movimento continuo che fa scorrere il circolo in sè medesimo; e precisamente il movimento è ellittico se il circolo è a centro reale (che è allora il centro di rotazione) è iperbolico se il circolo è a centro ideale, ed è parabolico per un oriciclo.

§. 233.

I triangoli non-euclidei e la loro area.

Consideriamo un triangolo geodetico nella nostra metrica, e supponiamo dapprima che i tre vertici A, B, C del triangolo siano tutti a distanza finita. Pel teorema generale di Gauss al §. 114, essendo qui la curvatura costante negativa $= -\frac{1}{R^2}$, avremo: *la somma* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ *degli angoli del triangolo sarà minore di* π *(di due angoli retti) e indicando con* Δ *l' area del triangolo avremo*

$$\Delta = R^2(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}) \tag{14}$$

Ma ora dimostreremo di nuovo questo risultato servendoci della nostra rappresentazione conforme ed anzi proveremo che esso vale anche se uno, due, o tutti tre i vertici del triangolo cadono a distanza infinita, nel qual caso altrettanti angoli del triangolo sono nulli.

In primo luogo osserviamo che un triangolo (geodetico) coi tre angoli nulli ha per immagine, nella rappresentazione conforme sul semipiano, il triangolo racchiuso da tre semicirconferenze descritte sui segmenti AB, BC, AC della retta limite come diametri, essendo A, B, C le immagini dei tre vertici (1). Ora se A′, B′, C′ sono altri tre punti qualunque della retta limite vi è sempre una sostituzione (I) del gruppo dei movimenti che porta A, B, C ordinatamente in A′, B′, C′, ovvero in A′, C′, B′; dunque: *tutti i triangoli non-euclidei coi tre angoli nulli sono fra loro congruenti.*

Per calcolare l' area Δ di un tale triangolo basterà quindi considerarne uno particolare, p. e. quello racchiuso dalle due rette $x = -1$, $x = +1$ all' esterno del circolo

$$x^2 + y^2 = 1 . \tag{15}$$

Ora l' elemento lineare essendo dato dalla (2) § 226, l' elemento $d\sigma$ d' area è

$$d\sigma = R^2 \frac{dx\,dy}{y^2}$$

e però l' area Δ del nostro triangolo da

$$\Delta = R^2 \int_{-1}^{+1} dx \int_{\bar{y}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} , \quad (2)$$

---

(1) Uno dei vertici p. e. C può essere invece il punto improprio nella direzione normale alla retta limite ed allora le semicirconferenze BC, AC si convertono nelle tangenti alla semicirconferenza AB negli estremi.

(2) In generale, considerando una qualunque area non-euclidea tutta a distanza finita, salvo che il contorno si possa estendere anche all' infinito (nel senso non-euclideo) con vertici situati sulla retta limite, si può applicare all' integrale doppio che dà l' area

$$\Sigma = R^2 \iint \frac{dx\,dy}{y^2}$$

la nota formola di Gauss che lo trasforma in un integrale al contorno

avendo indicato con $\bar{y}$ l' ordinata nel cerchio (15) corrispondente all' ascissa x. Siccome $\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$ si annulla all' infinito, resta

$$\Delta = R^2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\bar{y}} ;$$

ma sul cerchio

$$x = \cos\theta \qquad \bar{y} = \operatorname{sen}\theta ,$$

indicando con θ l' anomalia e per ciò

$$\Delta = R^2 \int_0^{\pi} d\theta = \pi R^2 ,$$

e questa, come si vede, è la formola (14) per $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 0$.

Suppongasi ora che due dei vertici A, B cadano all' infinito, il terzo C a distanza finita; per triangolo immagine potrà prendersi quello racchiuso da un arco AC di cerchio normale in A alla retta limite, dalla tangente in A e dalla parallela per C. Procedendo come sopra si trova per l' area

$$\Delta = R^2 \Theta ,$$

essendo Θ l'angolo sotto cui l' arco AC è visto dal centro. Ma indicando con $\hat{C}$ l' angolo in C del triangolo si ha $\Theta = \pi - \hat{C}$ e per ciò

$$\Delta = R^2 (\pi - \hat{C}) ,$$

che è nuovamente la formola (14) per $\hat{A} = \hat{B} = 0$.

I due casi rimanenti si riducono facilmente a questi poichè:

$$\Sigma = R^2 \int \frac{\cos\eta\, ds'}{y} ,$$

dove ds' è l' elemento *euclideo* dell' arco di contorno e η indica l' angolo che la direzione della normale interna fa colla direzione positiva dell'asse y. Con questa formola si possono anche verificare i calcoli seguenti nel testo.

1° Se O soltanto è all' infinito ed A, B a distanza finita si conduca la geodetica parallela in un verso ad AB, nell'altro a BO (AO) e il nostro triangolo risulta come differenza di due tringoli nelle condizioni precedenti. Eseguendo la differenza delle due aree viene

$$\Delta = R^2 (\pi - \hat{A} - \hat{B}),$$

che è ancora la (14) per $\hat{O} = 0$.

2° Se A, B, C sono tutti tre al finito, si conduca p. e. per C la parallela (in un verso) alla AB e il triangolo risulterà la differenza di due triangoli nel caso precedente; in tal modo si ritrova la (14).

È bene da osservarsi che, mentre nella geometria euclidea esistono triangoli di area grande ad arbitrio, in quella non-euclidea invece l' area può raggiungere al massimo πR^2, e ciò avviene pei triangoli coi tre angoli nulli. *L' ammettere l' esistenza di triangoli con area superiore a qualunque limite dato equivale quindi ad ammettere il postulato d' Euclide* (1).

Osserviamo ancora che dalla formola (14) per l' area di un triangolo geodetico, si dedurrà, come in geometria piana o sferica, la formola per l' area Δ di un poligono geodetico di un numero qualunque n di lati: *La somma* S *degli angoli di un poligono non-euclideo di n lati è sempre inferiore a* $(n-2)\pi$ *e l' area* Δ *è data da*

$$\Delta = R^2 \{ (n-2)\pi - S \}$$

Il massimo dell' area è raggiunto per $S = 0$, cioè quando il poligono ha tutti gli angoli nulli, (tutti i vertici all' infinito).

§. 234.

I triangoli non-euclidei nella seconda immagine.

Consideriamo da capo un triangolo non euclideo $o\,a\,b$, di cui almeno un vertice o sia a distanza finita e facciamone la seconda rappresentazione entro il cerchio limite (§. 228) per modo che l' immagine del vertice o cada nel centro O del cerchio limite. Nell'immagine avremo il triangolo OAB della seguente figura 13ª

(1) Questo fatto era già noto a GAUSS.

racchiuso dai due seguenti rettilinei OA, OB e dall' arco AB di circolo ortogonale al cerchio limite. Se con D, E indichiamo gli ulteriori punti d' intersezione delle rette OA, OB col circolo AB, abbiamo (essendo = 1 il raggio del cerchio limite)

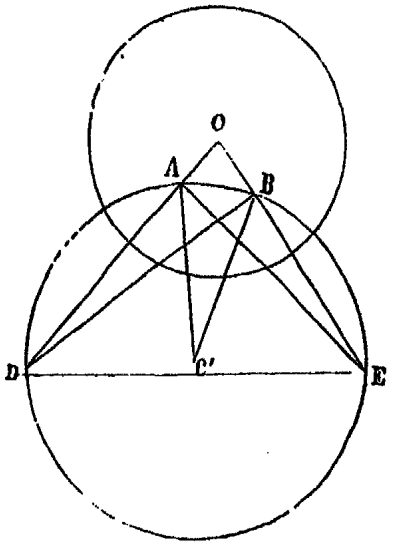


Fig. 13.ª

$$OA \cdot OD = 1, \qquad OB \cdot OE = 1,$$

e per gli angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{O}$ del nostro triangolo

$$\hat{A} = A\hat{E}D, \quad \hat{B} = B\hat{D}E, \quad \hat{O} = A\hat{O}B,$$

indi

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = \pi - A\hat{C'}B,$$

essendo $A\hat{C'}B$ l' angolo sotto cui è visto l' arco AB dal centro C' del cerchio stesso. Si vede dunque nuovamente che la somma dei tre angoli del triangolo è minore di due retti, e l' eccesso è misurato appunto dall' angolo $\alpha = A\hat{C'}B$, sicchè

$$\Delta = R^2 \alpha. \tag{16}$$

Dunque: *in questa seconda rappresentazione, l'area Δ non-euclidea del triangolo OAB è proporzionale, secondo la* (16), *all'angolo α sotto cui è visto l'arco AB dal suo centro.*

Dalla rappresentazione si deduce altresì inversamente che: *dati ad arbitrio tre angoli* $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{O}$ *tali che* $\hat{A}+\hat{B}+\hat{O}<\pi$, *esiste uno ed un solo triangolo non euclideo cogli angoli* $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{O}$. Se tutti tre gli angoli sono nulli, questo è già stato osservato al paragrafo precedente; se per es. $\hat{O}$ non è nullo, la figura 13ª riporta il problema a quello di geometria piana di costruire il quadrilatero OAC'B di cui sono noti gli angoli $AC'B=\alpha$, $OAC'=\frac{\pi}{2}+\hat{A}$, $OBC'=\frac{\pi}{2}+\hat{B}$ e si sa inoltre che i lati C'A, C'B sono eguali. Il quadrilatero è determinato a meno di una similitudine; e questa costante di omotetia si fisserà in guisa che risulti $=1$ il raggio del cerchio limite.

Anche è da osservarsi che in geometria non-euclidea, come in geometria piana e sferica: *esiste sempre il circolo circoscritto e quello inscritto in un triangolo* ABC (come è evidente dalla rappresentazione). Soltanto che nel caso attuale tale circolo potrà essere di prima, di seconda, ovvero di terza specie, e ciò avverrà secondo che il circolo immagine sarà tutto interno al cerchio limite, o lo attraverserà, o lo toccherà (1).

Risolviamo ancora colla rappresentazione il seguente problema: *Di un triangolo non euclideo oab è data la base o a in grandezza e posizione e l'area Δ; quale è il luogo del vertice b?*

Nell'immagine (fig.ra 13ª) sono fissi i punti O, A, D ed è fisso l'angolo $ODB=\frac{1}{2}\alpha=\frac{^{a}\Delta}{2R^2}$; il luogo di B nell'immagine è la retta condotta per D ed inclinata di $\frac{\Delta}{2R^2}$ sopra DO; obiettivamente abbiamo dunque come luogo di *b un circolo a centro ideale* (2). Naturalmente però, affinchè il problema sia solubile, occorre che la retta condotta per D ed inclinata di $\frac{\Delta}{2R}$ sopra DO sia una secante del cerchio limite, e siccome la sua distanza dal centro O è data da

$$OD\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta}{2R^2}=\frac{1}{OA}\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta}{2R^2},$$

deve essere $\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta}{2R^2}\right)<OA<\mathrm{tgh}\,\frac{l}{2R}$ avendo indicato con l la lunghezza non-euclidea della base.

Mediante considerazioni sulla figura immagine analoghe alle precedenti, si risolve la questione: *Di un triangolo geodetico o a b sono dati in grandezza i due lati o a, ob; quando ha luogo il massimo dell'area?* Ciò avviene (come in geometria piana e sferica) *quando l'angolo compreso fra i due lati assegnati è uguale alla somma degli altri due;* il circolo circoscritto al triangolo *o a b* d'area massima appartiene alla prima specie ed ha il suo centro sul terzo lato. Dette a, b le lunghezze non-euclidee assegnate dei lati *ob*, *oa* il massimo Δ dell'area ha luogo per

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta}{2R^2}\right)=\mathrm{tgh}\left(\frac{a}{2R}\right)\mathrm{tgh}\left(\frac{b}{2R}\right).$$

la quale formola, facendo crescere R all'infinito si converte nella formola di geometria piana

$$\Delta=\frac{1}{2}ab.$$

Da ultimo osserveremo che la teoria degli isoperimetri si può tutta fondare (come in geometria piana e sferica) sul risultato ora conseguito e ne risulta p. e. il teorema: *Fra tutte le curve chiuse isoperimetre il circolo geodetico a centro reale racchiude l'area massima.* Indicando con a il raggio geodetico di un tale cerchio la sua periferia C e l'area A si calcolano dalle formole (1)

$$C=2\pi R\,\mathrm{sen\,h}\left(\frac{a}{R}\right),\quad A=4\pi R^2\,\mathrm{sen\,h}^2\left(\frac{a}{2R}\right).$$

(1) In altre parole: in un triangolo ABC non-euclideo le perpendicolari elevate nei punti di mezzo dei lati (come pure le mediane, le bisettrici) s'incontrano in un punto che può essere reale e a distanza finita, ideale ovvero reale all'infinito.

(2) Corrisponde al cerchio di Lexell per la geometria sferica (Vl p. e. Baltzer Stereometria § 4).

(1) Si ricorra p. e. alla forma geodetica polare del ds^2

$$ds^2=du^2+R^2\,\mathrm{sen\,h}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2$$

§. 235.

Le formole di trigonometria non-euclidea.

Come in geometria piana e sferica, indichiamo quali elementi fondamentali per un triangolo non-euclideo ABC (i cui vertici supporremo dapprima a distanza finita) le misure A, B, C dei tre angoli e quelle a, b, c dei rispettivi lati opposti. Siccome di questi 6 elementi tre soltanto, valendo il principio di sovrapponibilità delle figure, possono prendersi ad arbitrio (non escluso il caso dei tre angoli, come sopra si è visto), così esistono fra questi 6 elementi tre relazioni indipendenti e si può quindi costruire una *trigonometria pseudosferica, o non-euclidea.*

Tutte le formole di trigonometria pseudosferica derivano dalle corrispondenti di trigonometria sferica secondo il semplice principio seguente: (1)

Una qualunque formola di trigonometria sopra una sfera di raggio R *si traduce in una corrispondente formola di trigonometria pseudosferica (di raggio* R*) cangiandovi dappertutto* R *in* Ri ($i = \sqrt{-1}$), *colla qual cosa le funzioni circolari dei lati* $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ *si cangiano in funzioni iperboliche.*

Per giustificare il principio enunciato basterà prendere tre dalle relazioni indipendenti in trigonometria sferica, p. e. le seguenti:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen} C}$$

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos B \cos C$$

e dimostrare che sussistono le corrispondenti pseudosferiche:

$$(\alpha) \qquad \frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{a}{R}\right)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen} C}$$

(1) L'osservazione risale a LAMBERT.

$$(\beta) \qquad \cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos h\left(\frac{a}{R}\right) - \cos B \cos C .$$

Per questo rappresentiamo il triangolo ABC sul piano in modo che l'immagine C del terzo vertice cada nel centro del cerchio limite e prolunghiamo i lati CA, CB ad incontrare ulteriormente in A′, B′ il circolo immagine del terzo lato AB (fig.ra 14ª)

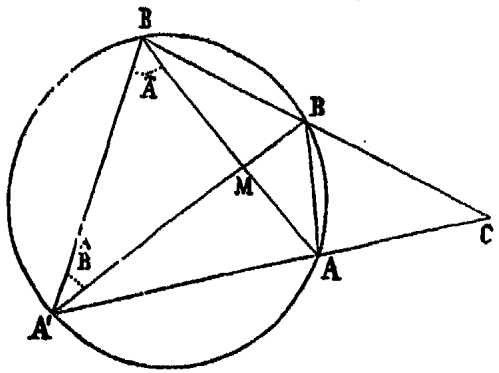


FIG. 14.ª

sicchè avremo

$$CA \cdot CA' = 1 \qquad CB \cdot CB' = 1.$$

Essendo M il punto d'incontro delle diagonali AB′, A′B del quadrilatero A B B′A′, dai triangoli simili A A′ M, B B′ M risulta

$$AA' : BB' = MA' : MB' = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B .$$

Ma, per le formole di rappresentazione si ha:

$$CA = \operatorname{tgh}\left(\frac{b}{2R}\right), \quad CA' = \operatorname{coth}\left(\frac{b}{2R}\right)$$

$$CB = \operatorname{tgh}\left(\frac{a}{2R}\right), \quad CB' = \operatorname{coth}\left(\frac{a}{2R}\right)$$

$$AA' = CA' - CA = \frac{2}{\operatorname{sen h}\left(\frac{b}{R}\right)}, \qquad BB' = CB' - CB = \frac{2}{\operatorname{sen h}\left(\frac{a}{R}\right)},$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{a}{R}\right)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen} B},$$

che è la prima delle (α); e per la stessa ragione anche il terzo rapporto $\dfrac{\operatorname{sen h}\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen} C}$ ha lo stesso valore.

Per dimostrare poi la (β) si osservi che dalla figura

$$\frac{CB'}{CA} = \frac{\operatorname{sen} A'AB'}{\operatorname{sen} AB'B}, \quad \frac{CB}{CA} = \frac{\operatorname{sen} A'B'B}{\operatorname{sen} AA'B'},$$

da cui dividendo

$$\frac{CB'}{CB} = \cot h^2\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\operatorname{sen} A'AB' \operatorname{sen} AA'B'}{\operatorname{sen} AB'B \operatorname{sen} A'B'B}.$$

Ora abbiamo

$$A + B + C = \pi - 2\,AB'B, \quad -A + B + C = \pi - 2\,A'B'B$$

$$A - B + C = \pi - 2\,AA'B', \quad A + B - C = \pi - 2\,B'AB'$$

e la formola precedente diviene

$$\cot h^2\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\cos\frac{A+B-C}{2} \times \cos\frac{A-B+C}{2}}{\cos\frac{A+B+C}{2} \times \cos\frac{-A+B+C}{2}} = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\cos A + \cos(B+C)}$$

ovvero

$$\cos A + \cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \left\{ \cos h^2\left(\frac{a}{2R}\right) + \operatorname{sen} h^2\left(\frac{a}{2R}\right) \right\} =$$

$$= \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos h\left(\frac{a}{R}\right),$$

formola che coincide colla (β).

Naturalmente nell'applicare le formole di trigonometria pseudosferica ai problemi di risoluzione di triangoli, bisogna tener presente

che qui si possono verificare circostanze limiti, nelle quali conviene interpretare convenientemente le formole stesse.

Così p. e. dati i tre lati a, b, c del triangolo e indicando, come al solito, con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro, vale per il raggio geodetico r del circolo circoscritto la formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{2 \operatorname{sen h}\left(\frac{a}{2R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{b}{2R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{c}{2R}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen h}\left(\frac{p}{R}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{p-a}{R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{p-b}{R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{p-c}{R}\right)}}.$$

Se il valore del secondo membro risulta < 1 il circolo circoscritto al triangolo è a centro reale, invece a centro ideale se ne risulta un valore > 1, e nel caso che tale valore risulti $= 1$ il triangolo è iscritto in un oriciclo.

Medesimamente per il raggio geodetico r' del cerchio iscritto nel triangolo vale la formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{r'}{R}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{p-a}{R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{p-b}{R}\right) \operatorname{sen h}\left(\frac{p-c}{R}\right)}{\operatorname{sen h}\left(\frac{p}{R}\right)}},$$

sulla quale sono da farsi considerazioni analoghe.

Così ancora la formola (III) o (III*), relativa all'angolo di parallelismo, non è che una formola trigonometrica relativa ad un triangolo rettangolo coll'ipotenusa ed un cateto di lunghezza infinita. Supposto invero il triangolo rettangolo in A, prendasi p. e. la formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{b}{R}\right) = \operatorname{sen h}\left(\frac{c}{R}\right) \operatorname{tg} B,$$

e restando fisso il cateto $AB = c$, si allontani C all'infinito, con che $\lim \operatorname{tgh}\left(\frac{b}{R}\right) = 1$, indi

$$\cot B = \operatorname{senh}\left(\frac{c}{R}\right),$$

che è appunto la citata formola per l'angolo di parallelismo.

§. 236.

Rappresentazione geodetica di Beltrami e metrica del Cayley.

Negli studi del presente Capitolo noi abbiamo constatato l'identità della geometria pseudosferica colla geometria non euclidea, cioè colla geometria del piano ove, pure ammettendo che la retta abbia lunghezza infinita, non si ammetta invece il postulato d'Euclide sulle parallele. Come già abbiamo detto al §. 225, il primo a stabilire che i teoremi della geometria non-euclidea trovano un'effettiva interpretazione sulle moltiplicità a curvatura costante negativa è stato il Beltrami nel suo celebre *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* (1868) (1).

A base di queste sue ricerche il Beltrami ha posto una rappresentazione piana delle superficie pseudosferiche che non ha più il vantaggio di essere conforme, come le due utilizzate nel presente Capitolo, ma in compenso ha l'altro ben rilevante che *le geodetiche sono rappresentate da rette.*

È questa la rappresentazione geodetica, di cui già abbiamo parlato al § 116, e che ora andiamo effettivamente a costruire partendo dalla rappresentazione (conforme) entro al cerchio limite del §. 228, col semplice procedimento seguente indicato da *Klein.* Su questo cerchio, come cerchio massimo, descriviamo la sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

e dal polo (0, 0, 1) riportiamo stereograficamente la figura immagine entro il cerchio equatoriale sulla sfera (sull'emisfero inferiore), dove ora le geodetiche saranno rappresentate da circoli in piani normali al piano dell'equatore. Indi facciamo una projezione *ortogonale* dei punti dell'emisfero inferiore sul piano dell'equatore; la nuova rappresentazione che si ottiene è quella del Beltrami in cui la moltiplicità pseudosferica viene ancora rappresentata entro il cerchio limite, ma *le geodetiche hanno per immagini le corde del cerchio limite* (1).

(1) Giornale di matematiche Vol. VI. Opere Vol. I pag. 374.

La costruzione precedente si traduce subito in formole ricordando che se τ è la variabile complessa sul piano equatoriale, le coordinate (X, Y, Z) del punto sulla sfera, projezione stereografica di τ, sono date dalle solite formole (46) §. 56 (pag. 145).

$$X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i}\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}$$

e le due prime X, Y sono precisamente le coordinate del punto projezione ortogonale sul piano dell'equatore. D'altronde esprimendo τ, secondo il §. 228, in coordinate geodetiche polari (u, v) che dànno al ds^2 non-euclideo la forma ellittica

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \tag{17}$$

abbiamo

$$\tau = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2R}\right) e^{iv}, \quad \tau_0 = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{2R}\right) e^{-iv},$$

onde *per le formole della rappresentazione di Beltrami abbiamo le espressioni seguenti*

$$X = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right)\cos v, \quad Y = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right)\operatorname{sen} v, \tag{18}$$

e trasformando il ds^2 dato dalla (17) in coordinate X, Y si trova la formola di partenza del Beltrami

$$ds^2 = R^2 \frac{(1 - Y^2)\,dX^2 + 2XY\,dX\,dY + (1 - X^2)\,dY^2}{(1 - X^2 - Y^2)^2} \tag{19}$$

È chiaro che per questa forma del ds^2 pseudosferico le geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari e viceversa.

È interessante ancora esaminare quale è ora, nella rappresentazione di Beltrami, la legge di misurazione delle distanze finite, cor-

(1) Manifestamente la rappresentazione di BELTRAMI è conforme solo nel centro di figura.

rispondente alla (B) §. 227 che valeva nelle due rappresentazioni conformi; e in secondo luogo (non essendo la rappresentazione conforme) come vengono ora misurati gli angoli nel senso non-euclideo.

Tutto ciò si può facilmente stabilire, trasformando le formole primitive secondo la costruzione stessa del Klein sopra indicata. Siano dapprima due punti qualunque A, B dell'emisfero considerato ed M_1, M_2 i due punti ove il circolo che li unisce ed è immagine di una geodetica incontra ortogonalmente l'equatore; per la (B) la distanza non euclidea δ fra A, B è data da

$$\delta = R \log (A\,B\,M_1\,M_2).$$

Eseguendo la proiezione ortogonale sul piano dell'equatore di A, B, M_1, M_2 in A′, B′, M_1, M_2 si riscontra subito che

$$(A'\,B'\,M_1\,M_2) = (A\,B\,M_1\,M_2)^2, \quad (^1)$$

e quindi nella rappresentazione di Beltrami la formola (B) si cangia nell'altra

$$\text{(D)} \qquad \delta = \frac{R}{2} \log (A'\,B'\,M_1\,M_2).$$

Passiamo alla misurazione degli angoli. Siano α, β due tangenti in un punto M alla sfera includenti l'angolo θ, che è pure l'angolo nel senso non-euclideo. Per la formola di Laguerre, si può scrivere

$$\theta = \frac{i}{2} \log (\alpha\,\beta\,g_1, g_2),$$

essendo g_1, g_2 le due generatrici (isotrope) della sfera uscenti da M. Projettando ortogonalmente sul piano dell'equatore, α, β si projettano in due rette α', β' uscenti dal punto M′ projezione di M, e g_1, g_2 nelle due tangenti t_1, t_2, immaginarie coniugate, tirate da M′ al circolo limite, onde la formola

(1) Suppongasi il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ e sopra di esso i due punti A, B di anomalie θ_1, θ_2 ed i punti M_1, M_2 d'anomalie π, 0; il birapporto $(A\,B\,M_1\,M_2)$ è dato (§. 227) da $\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} : \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}$. Le loro projezioni sul diametro $M_1\,M_2$ hanno le ascisse $\cos\theta_1$ $\cos\theta_2$, -1, $+1$ e il loro birapporto è il quadrato del precedente.

$$\text{(E)} \qquad \theta = \frac{i}{2} \log (\alpha'\,\beta'\,t_1\,t_2).$$

Se ora, con una omografia, trasformiamo il circolo limite in una qualunque conica reale Γ, le formole (D), (E) restano, per la loro natura projettiva, immutate. Si ha così una rappresentazione geodetica della moltiplicità pseudosferica entro la conica limite Γ, che rappresenta l'inaccessibile della metrica (l'assoluto).

La legge di misurazione delle distanze e quella degli angoli sono date, in questa metrica che venne studiata per primo dal *Cayley* (anteriormente alle ricerche del Beltrami), dalle formole projettive (D), (E). In particolare due rette uscenti da un punto M interno alla conica saranno fra loro perpendicolari, nel senso non-euclideo, quando siano divise armonicamente dalle due tangenti per M alla conica, ossia: *Due rette sono ortogonali nel senso non euclideo quando sono coniugate rispetto alla conica assoluta.*

Avremo occasione di ritornare in seguito sulla metrica del Cayly nello spazio a tre o a un numero qualunque di dimensioni, ed allora completeremo le prime nozioni qui stabilite.

§. 237.

Le coordinate di Weierstrass nel piano non-euclideo.

In molte ricerche di geometria non-euclidea riesce utile l'uso di un particolare sistema di coordinate omogenee (normalizzate), le *coordinate di Weierstrass*, che corrispondono alle coordinate X, Y, Z di un punto mobile sulla sfera. Deduciamo queste coordinate dalle ordinarie coordinate cartesiane ortogonali X, Y della rappresentazione geodetica di Beltrami (§. prec.te), sostituendovi coordinate omogenee col porre

$$X = \frac{x_1}{x_0}, \quad Y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Però un punto reale della moltiplicità essendo rappresentato da un punto interno al cerchio limite, abbiamo $X^2 + Y^2 < 1$, cioè

$$x_1^2 + x_2^2 < x_0^2,$$

ed ora del fattore arbitrario di proporzionalità in x_0, x_1, x_2 disponiamo in guisa che sia

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{20}$$

e dalle (18), ponendo per semplicità il raggio R della moltiplicità pseudosferica $= 1$, avremo

$$x_0 = \cosh u, \quad x_1 = \operatorname{senh} u \cos v, \quad x_2 = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v. \tag{21}$$

Queste sono le coordinate di Weierstrass, le quali si esprimono, con queste formole, per le geodetiche polari (u, v) che dànno al ds^2 la forma

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{senh}^2 u\, dv^2 \tag{22}$$

in modo analogo come sulla sfera i coseni di direzione del raggio con

$$X = \operatorname{sen} u \cos v, \quad Y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad Z = \cos u.$$

Essendo ora $P \equiv (x_0 x_1 x_2)$, $P' \equiv (x_0' x_1' x_2')$ due punti qualunque della moltiplicità, scriviamo in primo luogo la formola che dà la distanza non-euclidea δ dei due punti. Questa si può desumere dalla formola (D) calcolando il birapporto $(PP' M_1 M_2)$ dei punti P, P' coi punti M_1, M_2 ove la loro congiungente incontra il cerchio limite; ovvero si può ricorrere alle formole di trigonometria non-euclidea, osservando che posto come nelle (21)

$$x_0' = \cosh u', \quad x_1' = \operatorname{senh} u' \cos v', \quad x_2' = \operatorname{senh} u' \operatorname{sen} v',$$

si ha

$$\cosh \delta = \cosh u \cosh u' - \operatorname{senh} u \operatorname{senh} u' \cos(v - v'),$$

ossia

$$\cosh \delta = x_0 x_0' - x_1 x_1' - x_2 x_2'. \tag{E}$$

Insieme alle coordinate (x_0, x_1, x_2) di punto introduciamo anche le coordinate (ξ_0, ξ_1, ξ_2) delle rette non-euclidee, rappresentate dalle corde del cerchio limite; prenderemo per ξ_0, ξ_1, ξ_2 le coordinate del polo di una tale corda, e siccome questo polo è esterno al cerchio sarà

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 > \xi_0^2.$$

Normalizziamo anche queste coordinate prendendo il fattore di omogeneità in guisa che sia

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_0^2 = 1; \tag{23}$$

l'equazione della retta (ξ_0, ξ_1, ξ_2), polare del punto con queste coordinate è dunque

$$-\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0. \tag{24}$$

Consideriamo ora i due elementi lineari ds, δs spiccati dal punto (u, v) ai punti $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$, e si osservi che dalle (21), (22) si trae subito

$$\begin{cases} ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_0^2 \\ \delta s^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_0^2. \end{cases} \tag{25}$$

Per l'angolo θ fra i due elementi lineari si ha dalla (22)

$$\cos\theta = \frac{du\,\delta u + \operatorname{senh}^2 u\, dv\, \delta v}{ds\, \delta s},$$

e siccome

$$du\,\delta u + \operatorname{senh}^2 u\, dv\, \delta v = dx_1\, \delta x_1 + dx_2\, \delta x_2 - dx_0\, \delta x_0$$

possiamo anche scrivere

$$\cos\theta = \frac{dx_1\, \delta x_1 + dx_2\, \delta x_2 - dx_0\, \delta x_0}{ds\, \delta s}. \tag{26}$$

Supponiamo ora che il punto (x_0, x_1, x_2) e la retta (ξ_0, ξ_1, ξ_2) siano incidenti, talchè valga la (24); l'elemento lineare ds sia normale alla retta (ξ) nel detto punto (x) e l'altro δs giaccia sulla retta (ξ). Sussisteranno insieme le coppie d'equazioni

$$\begin{cases} \delta x_1 \cdot \xi_1 + \delta x_2\, \xi_2 - \delta x_0 \cdot \xi_0 = 0 \\ x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_0 \xi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta x_1 \cdot dx_1 + \delta x_2 \cdot dx_2 - \delta x_0 \cdot dx_0 = 0 \\ x_1 \cdot dx_1 + x_2\, dx_2 - x_0\, dx_0 = 0 \end{cases}$$

e varranno perciò le proporzioni

$$dx_1 : dx_2 : dx_0 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_0$$

e quindi per le (23), (26)

$$\xi_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad \xi_2 = \frac{dx_2}{ds}, \quad \xi_0 = \frac{dx_0}{ds}.$$

Dunque : *le coordinate di Weierstrass di una retta coincidono colle derivate, nel senso normale alla retta, delle coordinate di un suo punto (qualsiasi).*

Siano ora (ξ_0, ξ_1, ξ_2), (ξ_0', ξ_1', ξ_2') due rette aventi il loro punto comune (x_0, x_1, x_2) entro il cerchio limite; il loro angolo θ sarà misurato da quello dei due elementi lineari ds, δs rispettivamente normali alle due rette in (x_0, x_1, x_2). Per l'osservazione superiore, la formola (26) si scrive quindi

$$\cos\theta = \xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' - \xi_0\xi_0', \quad (F)$$

formola che, per la metrica angolare, è la duale della (E) che serve alla misura delle distanze. In particolare le due rette saranno ortogonali se

$$\xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' - \xi_0\xi_0' = 0$$

cioè se le due rette sono coniugate rispetto all'assoluto (Cf. §. prec.te).

Nella formola (F) si è supposto che il punto d'incontro delle due rette $(\xi_0\ \xi_1\ \xi_2)$, $(\xi_0'\ \xi_1'\ \xi_2')$ sia interno all'assoluto (cerchio limite), ed allora in effetto il secondo membro della (F) ha un valore assoluto < 1. Se al contrario s'incontrassero fuori del cerchio limite, il valore assoluto del secondo membro in (F) sarebbe > 1 e la formola darebbe per θ un valore (puramente) immaginario. È notevole il caso intermedio in cui sia

$$\xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' - \xi_0\xi_0' = \pm 1, \quad (27)$$

nel qual caso le due rette si tagliano sul circolo limite; cioè: *Le due rette* (ξ_0, ξ_1, ξ_2), (ξ_0', ξ_1', ξ_2') *sono parallele nel senso non-euclideo quando sussiste la* (27).

Prendiamo ora una retta $(\xi_0\ \xi_1\ \xi_2)$, ed in un suo punto (x_0, x_1, x_2) (interno al cerchio limite) eleviamo la normale, e stacchiamo su di

(1) Per la metrica non-euclidea questa è l'analoga della formola di geometria analitica

$$\cos\theta = XX' + YY' + ZZ'$$

per le distanze angolari sulla sfera.

essa un segmento di lunghezza non-euclidea δ; domandiamo le coordinate $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ dell'estremo. Siccome la detta normale passa pel polo $(\xi_0\ \xi_1\ \xi_2)$ della retta avremo

$$\bar{x}_0 = \lambda x_0 + \mu\xi_0, \quad \bar{x}_1 = \lambda x_1 + \mu\xi_1, \quad \bar{x}_2 = \lambda x_2 + \mu\xi_2$$

ed il valore del moltiplicatore λ si determinerà dalla (E) in

$$\lambda = \cosh\delta.$$

Successivamente da $\bar{x}_0^2 - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 = 1$, avremo per le (23), (24)

$$\mu^2 = \operatorname{senh}^2\delta,$$

indi le formole richieste

$$\bar{x}_0 = x_0\cosh\delta \mp \xi_0\operatorname{senh}\delta, \quad \bar{x}_1 = x_1\cosh\delta \mp \xi_1\operatorname{senh}\delta, \quad (28)$$

$$\bar{x}_2 = x_2\cosh\delta \mp \xi_2\operatorname{senh}\delta.$$

Di qui deduciamo

$$\mp\operatorname{senh}\delta = \xi_1\bar{x}_1 + \xi_2\bar{x}_2 - \xi_0\bar{x}_0, \quad (29)$$

formola che assegna la distanza di un punto qualunque $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dalla retta (ξ_0, ξ_1, ξ_2).

§. 238.

Le equazioni a derivate parziali di Weingarten per le coordinate di Weierstrass.

Per stabilire in una moltiplicità pseudosferica un sistema di coordinate di Weierstrass (x_0, x_1, x_2) occorre conoscere, secondo le (21), le linee geodetiche.

Se è data soltanto una forma differenziale quadratica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

di curvatura costante negativa $K = -1$, appartenente quindi come ds^2 al piano non-euclideo, per trovare un sistema (x_0, x_1, x_2) di

coordinate di Weierstrass occorre determinare x_0, x_1, x_2 dalle condizioni

$$(30)\qquad \begin{cases} x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \\ dx_1^2 + dx_2^2 - dx_0^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 . \end{cases}$$

Importa osservare che queste tre funzioni $x\,(u,\ v)$ sono integrali di un notevole sistema simultaneo di equazioni a derivate parziali del secondo ordine, affatto analogo a quello cui soddisfano le coordinate X, Y, Z di un punto della sfera unitaria, definita soltanto dalla sua prima forma fondamentale (formole (IV) §. 86). Per formare l' indicato sistema di equazioni a derivate parziali si può procedere direttamente sulle (30), o più semplicemente ricondurre il calcolo a quello già eseguito al §. 86, osservando che se si pone

$$x_0 = \mathrm{X},\ x_1 = i\,\mathrm{Y},\ x_2 = i\,\mathrm{Z}$$

le (30) diventano

$$\begin{cases} \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1 \\ d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 = -(\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2) \end{cases}$$

e siccome la forma $-(\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2)$ ha la curvatura $= +1$, siamo analiticamente ricondotti alle equazioni (IV) §. 86, dove è da farsi

$$e = -\mathrm{E},\ f = -\mathrm{F},\ g = -\mathrm{G}.$$

Concludiamo quindi:

Data una forma differenziale quadratica (definita positiva) $\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$ *di curvatura* $\mathrm{K} = -1$, *appartenente quindi come* ds^2 *al piano non-euclideo, le coordinate di Weierstrass* x_0, x_1, x_2 *di un punto del piano sono soluzioni del sistema simultaneo di equazioni* (1)

$$(\mathrm{G})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{E}\,x \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{F}\,x \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{G}\,x, \end{cases}$$

(1) WEINGARTEN Crelle's Journal Bd. 94.

o brevemente, colle notazioni delle derivate seconde covarianti:

$$(\mathrm{G}^*)\qquad x_{11} = \mathrm{E}\,x,\ x_{12} = \mathrm{F}\,x,\ x_{22} = \mathrm{G}\,x.$$

Del resto, per la natura invariantiva di questo sistema (G), basta limitarsi a verificarlo p. e. per la forma geodetica polare (22) e si vede che x_0, x_1, x_2 date dalle (21) ne sono appunto tre soluzioni linearmente indipendenti.

Supponiamo ora in particolare che il dato ds^2 sia di forma ortogonale ($\mathrm{F} = 0$)

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

e dette $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ le coordinate di Weierstrass di un punto $(u,\ v)$, si indichino con

$$\xi_0,\quad \xi_1,\quad \xi_2$$

$$\eta_0,\quad \eta_1,\quad \eta_2$$

le rispettive coordinate delle rette (non-euclidee) tangenti alle linee coordinate $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$, onde avremo

$$(31)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial x_0}{\partial u},\quad \xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial x_1}{\partial u},\quad \xi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial x_2}{\partial u} \\ \eta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial x_0}{\partial v},\quad \eta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial x_1}{\partial v},\quad \eta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial x_2}{\partial v}. \end{cases}$$

Se ora nelle formole (G) sostituiamo ai simboli di Christoffel i loro valori effettivi, le (G) si mutano nel sistema lineare seguente

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\xi,\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\eta + \sqrt{\mathrm{E}}\,x,\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\xi \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,\eta,\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\eta,\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\xi + \sqrt{\mathrm{G}}\,x, \end{cases}$$

del quale sono soluzioni le tre terne

$$(x_0,\ \xi_0,\ \eta_0),\quad (x_1,\ \xi_1,\ \eta_1),\quad (x_2,\ \xi_2,\ \eta_2).$$

Queste formole tengono il luogo, per il piano non-euclideo riferito a coordinate ortogonali (u, v), delle formole (28) §. 181 (pag. 476) di geometria sferica.

§. 239.

L' equazione di Riccati per la ricerca delle geodetiche.

Ritorniamo al caso generale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

nel quale la ricerca delle coordinate di Weierstrass (ossia dell'equazione in termini finiti delle linee geodetiche) abbiamo visto ridursi all' integrazione del sistema differenziale (G).

Ora andiamo a dimostrare che: *L' integrazione dell' equazione differenziale delle geodetiche (o del sistema (G)) si riconduce a quella di un' equazione differenziale del primo ordine del tipo di Riccati.*

Osserviamo che la questione si riporta a trovare un sistema di oricicli paralleli e delle loro geodetiche normali, parallele nel senso non-euclideo, poichè, appena noto un tale doppio sistema ortogonale, si può eseguire la rappresentazione conforme sul semipiano (§. 226) e le geodetiche sono tutte note.

Indichiamo con θ l' angolo che le geodetiche del sistema parallelo supposte fanno colle linee $v =$ cost.^{te}, angolo definito dalla formola (pag. 116)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,dv}{E\,du + F\,dv} ,$$

essendo du, dv gli incrementi delle coordinate curvilinee lungo una geodetica del sistema.

Se la funzione $\theta\,(u, v)$ sarà nota, l' equazione in termini finiti delle dette geodetiche si avrà integrando l' equazione differenziale

$$\text{(a)} \qquad E\operatorname{sen}\theta\,du + (F\operatorname{sen}\theta - \sqrt{EG - F^2}\cos\theta)\,dv = 0 ,$$

che, pel teorema di Lie (§. 51), si avrà con quadrature. E similmente con quadrature si integrerà l' equazione differenziale degli oricicli ortogonali.

$$\text{(b)} \qquad E\cos\theta\,du + (F\cos\theta + \sqrt{EG - F^2}\operatorname{sen}\theta)\,dv = 0 .$$

Esprimiamo ora, mediante la formola di Bonnet §. 99 (pag. 269) che la curvatura geodetica delle linee (a) è nulla, e quella delle (b) è eguale a 1; troveremo così le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{F}{\sqrt{E}}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\cos\theta - \dfrac{F}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\theta\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{EG - F^2}. \end{cases}$$

Eseguendo le derivazioni, e risolvendo rapporto a $\dfrac{\partial\theta}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial v}$, coll' introdurre i simboli di Christoffel e l' angolo ω delle linee coordinate definito dalle formole

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} , \qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} ,$$

troviamo per la funzione incognita $\theta\,(u, v)$ le due equazioni simultanee

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \sqrt{E}\operatorname{sen}\theta + \left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{E} = 0 \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}(\theta - \omega) + \left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{E} = 0 . \end{cases}$$

Introducendo come funzione incognita $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$, si ha un' equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati, che è certo completamente integrabile, come risulta *a priori* da che esiste una semplice infinità di sistemi di geodetiche parallele, e perciò la soluzione θ generale contiene una costante arbitraria. Questa illimitata integrabilità del sistema (H) si può anche verificare tenendo conto che la curvatura è qui $K = -1$, e utilizzando la formola §. 41 pag. 102 per la curvatura.

Capitolo XV.

Le superficie a curvatura costante e la trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.

Il problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante. — Superficie pseudosferica con due assegnate asintotiche o con assegnata linea di curvatura. — Le superficie a curvatura costante riferite alle loro linee di curvatura. — La trasformazione di Hazzidakis. — Le superficie a curvatura media costante e la trasformazione di Bonnet-Lie. — Le superficie elicoidali e le superficie d' Enneper a curvatura costante — La trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche. — I sistemi ciclici di Ribaucour a raggio costante. — Applicazione successiva della trasformazione complementare.

§. 240.

Problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante.

Nel presente Capitolo iniziamo lo studio delle effettive forme nello spazio delle superficie a curvatura costante K positiva o negativa.

Le prime sono le superficie applicabili sulla sfera, le seconde quelle applicabili sulla pseudosfera, (o sfera di raggio puramente immaginario), escludendo naturalmente il caso delle superficie a curvatura nulla $K = 0$, che ci sono già tutte note come le superficie sviluppabili.

Se riferiamo la superficie S ad assi coordinati ortogonali, e ne scriviamo l' equazione sotto la forma ordinaria $z = z(x, y)$, dalla formola (52) §. 83 ; abbiamo subito : *Le superficie a curvatura costante* K *sono tutte e sole le superficie integrali dell' equazione a derivate parziali del secondo ordine.*

$$rt - s^2 = K(1 + p^2 + q^2)^2 \qquad \text{(K costante).} \tag{1}$$

Diciamo subito che l' Analisi non possiede fino ad ora mezzi per esprimere l' integrale *generale* di questa equazione ; a differenza di quello che accadeva p. e. per le superficie d' area minima, definite dall' equazione

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 ,$$

di cui sappiamo trovare l' integrale generale.

Svilupperemo nel seguito gli importanti metodi di integrazione *parziale* o *successiva* della (1) che si sono svolti dalla geometria, dando luogo alla teoria delle trasformazioni. Per ora cominciamo dai *teoremi d' esistenza* degli integrali della (1), sotto date condizioni ai limiti, nella qual cosa però converrà dapprima limitarsi, nell' ipotesi generale al caso *analitico*, pel qual caso soltanto valgono in tutta generalità, come già abbiamo avuto a ricordare nei §§. 135 a 137 a proposito della teoria della deformazione, i teoremi fondamentali sull' esistenza degli integrali.

Trattiamo in primo luogo del *problema di Cauchy* per le superficie a curvatura costante e cioè : *assegnata una striscia analitica per una superficie di data curvatura costante* K *far passare per questa una corrispondente superficie (analitica).*

Assegnare una curva C, per la quale debba passare la superficie S, e lungo di essa i piani tangenti di S, equivale a dare lungo C

$$x, y, z, p, q$$

quali funzioni (che supponiamo analitiche) di un parametro, p. e. dell' arco s di C. I teoremi generali di Cauchy [1] assicurano che esiste una ed una sola soluzione analitica della (1), che soddisfa alle condizioni iniziali imposte, *eccetuato il caso eccezionale in cui si abbia lungo* C

$$dx\,dp + dy\,dq = 0 . \tag{2}$$

È facile vedere il significato geometrico di questa condizione (2), poichè, serbando per la curva C le consuete notazioni, si ha per ipotesi

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0$$

e, differenziando lungo C, vediamo che la (2) equivale all' altra

$$p\xi + q\eta - \zeta = 0 ,$$

[1] V.i p. e. Goursat Équations aux derivées partielles du premier ordre p. 22.

la quale esprime che lungo C la normale principale di C giace nel piano tangente di S, cioè C è un'asintotica della superficie supposta. Dunque intanto a) *Per una striscia analitica data passa una ed una sola superficie analitica di data curvatura costante* K, *purchè quella striscia non risulti striscia asintotica della superficie.*

Il caso d'eccezione resta naturalmente escluso se $K>0$, perchè allora non vi sono asintotiche reali. Ma proseguiamo nella discussione e supponiamo che (essendo $K<0$), lungo la striscia prescritta abbia luogo la (2). Allora la teoria generale ci dice che il problema proposto è *impossibile,* se lungo la C non sussiste colla (2) anche l'altra

$$dp\,dq - K(1+p^2+q^2)^2\,dx\,dy = 0,$$

ciò che equivale per la (2) all'altra

$$dq^2 + K(1+p^2+q^2)^2\,dx^2 = 0. \tag{3}$$

Se $K>0$ questa naturalmente non può verificarsi, come già si è detto. Ma se $K<0$, poniamo $K=-\frac{1}{R^2}$, si vede facilmente che la (3) esprime dover essere la torsione della curva costante $=\pm\frac{1}{R}$, cioè riconduce, per questo caso, al teorema di Beltrami-Enneper. E infatti, avendosi

$$p=-\frac{\lambda}{\nu},\quad q=-\frac{\mu}{\nu},$$

se deriviamo, colle formole di Frenet, tenendo conto della (3), troviamo

$$\frac{1}{T^2}=\frac{1}{R^2}.$$

Dunque: *nel caso che la striscia prescritta debba risultare asintotica, il problema è impossibile se la curva* C *sostegno della striscia non è a torsione costante* $\pm\frac{1}{R}$.

Ed in quest'ultimo caso, come risulta già dal teorema finale al §. 90, relativo all'esistenza ed unicità della superficie pseudosferica con due assegnate asintotiche, il problema è affatto indeterminato. Questo risulterà nuovamente dimostrato dalle ricerche dei paragrafi

seguenti, dove sarà tolta, per il caso $K<0$, la condizione di analiticità fin qui supposta. Ma prima osserviamo ancora che il risultato principale a) non è che il teorema generale di deformazione, sviluppato nei citati §§. 135 e 136, applicato al caso particolare delle superficie deformate della sfera o della pseudosfera. E infatti sia ad es. prescritta una striscia analitica colla curva C di sostegno, per la quale si voglia far passare una superficie S deformata dalla sfera di raggio R.

Conosciamo di C la curvatura assoluta $\frac{1}{\rho}$ in funzione dell'arco s ed anche la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ che deve avere sulla S; per ciò della sua trasformata sferica Γ conosciamo la curvatura geodetica come funzione dell'arco s di Γ, e quindi Γ è perfettamente determinata sulla sfera a meno di movimenti. Il problema diventa quindi: Deformare la sfera in guisa che la sua curva Γ acquisti la forma prestabilita C. Siamo così ricondotti ad un caso particolare del problema al §. 136, che sotto le condizioni ivi supposte, e qui verificate, ammette appunto una ed una sola soluzione.

Lo stesso dicasi se invece della sfera si considera la pseudosfera e le sue deformate, salvo naturalmente il caso che la striscia prescritta sia asintotica, chè allora il problema o è impossibile, o è indeterminato, come già abbiamo osservato sopra e come ora andremo nuovamente a constatare.

§. 241.

Superficie pseudosferica con due assegnate asintotiche.

Il teorema finale del §. 90, sopra ricordato, che assicura l'esistenza e l'unicità della superficie pseudosferica di raggio R che ammette come asintotiche due assegnate curve C, C′ colle torsioni costanti eguali e di segno contrario $+\frac{1}{R}$, $-\frac{1}{R}$ incrociantisi in un punto O dello spazio, avendo ivi a comune il piano osculatore, ma tangenti distinte, è stato ivi dedotto dai teoremi generali d'esistenza delle reti di Tchebychef, o degli integrali delle corrispondenti equazioni di Servant o di Darboux.

Ma, nel caso attuale, possiamo procedere sopra un'unica equazione del secondo ordine (di tipo iperbolico) di forma più semplice,

che è d'altronde l'equazione fondamentale di tutta la teoria delle superficie pseudosferiche, l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \operatorname{sen} \omega . \tag{I}$$

Ponendo per semplicità $= 1$ il raggio R della superficie pseudosferica, si è visto che il ds^2 della superficie, riferita alle asintotiche (α, β), prende la forma caratteristica delle reti di Tchebychef

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos \omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \tag{4}$$

dove ω è una soluzione della (I); viceversa per ogni soluzione ω della (I) si ha una corrispondente superficie pseudosferica S definita *intrinsecamente* dalla (4). E si osservi che pei coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale di S risulta

$$D = D'' = 0 , \quad D' = \pm \operatorname{sen} \omega ;$$

se scegliamo p. e. $D' = \operatorname{sen} \omega$, ciò significa che le linee asintotiche $\alpha =$ cost.te sono a torsione $+1$, invece le $\beta =$ cost.te a torsione -1 (V.i — §. 77 eq.ni (43), (43*)).

Se calcoliamo ora le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_\alpha}$, $\frac{1}{\rho_\beta}$ di queste linee, dalle (6) §. 99 pag. 270 abbiamo

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{\rho_\beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \tag{5}$$

mentre d'altra parte β è l'arco delle linee $\alpha =$ cost.te, ed α quello delle linee $\beta =$ cost.te, contato p. e. dal punto $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Supponiamo ora che le due curve $\alpha = 0$, $\beta = 0$ siano prescritte di forma, e siano le assegnate curve C, C' incrocianti si in O, avendo ivi a comune il piano osculatore, sotto un angolo ω_0 compresa fra o e π, e colle rispettive torsioni $+1, -1$. Conosciamo inoltre di C la prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ in funzione dell'arco β, e questa coincide col valore *assoluto* della curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\alpha}$; ma possiamo supporre, senza alterare la generalità, che sia p. e.

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\rho} \quad \left(\frac{1}{\rho_\alpha} > 0 \right),$$

ciò equivalendo a fissare il senso positivo di β (1).

Gli elementi geometrici prescritti assegnano dunque il valore di

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right)_{\alpha = 0} \text{ in funzione di } \beta$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)_{\beta = 0} \text{ in funzione di } \alpha ;$$

e siccome conosciamo ω in $\alpha = 0$, $\beta = 0$ come $= \omega_0$, sarà nota ω lungo la $\alpha = 0$ come funzione di β, e lungo la $\beta = 0$ come funzione di α.

Per risolvere dunque il problema bisogna trovare una soluzione ω della (I), assegnati che ne siano i valori lungo le rispettive *caratteristiche* $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Ma viceversa, supposto questo problema analitico risoluto, la soluzione ω individuerà una superficie pseudosferica sulla quale le rispettive asintotiche $\alpha = 0$, $\beta = 0$ avranno le stesse equazioni intrinseche delle due curve assegnate C, C' colle quali coincideranno rispettivamente di forma, e basterà, come subito si vede, un movimento rigido della superficie pseudosferica trovata S, per sovrapporre insieme la $\alpha = 0$ alla C e la $\beta = 0$ alla C'.

Siamo così ridotti a dimostrare il seguente teorema d'analisi:
L'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z \tag{I}$$

ammette una ed una sola soluzione che per $y = 0$ si riduce ad una data funzione $\varphi(x)$ della x, e per $x = 0$ ad una data funzione $\psi(y)$ della y, nella ipotesi $\psi(0) = \varphi(0)$. Supporremo anche del resto che $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ ammettano derivate prime $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$ finite e continue come le primitive (2)

---

(1) Nel punto O le normali principali di C, C' hanno sensi positivi determinati, e si viene così a fissare nel testo che la direzione positiva di C' in O faccia un angolo acuto colla prima normale principale similmente quella di C colla seconda.

(2) Questo corrisponde alle circostanze geometriche supposte nelle curve C, C' per le quali ammettiamo le solite condizioni del §. 1.

§. 242.

Applicazione del metodo delle approssimazioni successive.

Per stabilire il teorema enunciato potremmo richiamarci a proprietà generali delle equazioni del secondo ordine del tipo iperbolico, come la nostra (1), ma qui, per il caso particolare che ci occupa, vogliamo svolgere la dimostrazione effettiva col metodo delle approssimazioni successive di Picard, presentandosi nel caso nostro circostanze che semplificano le deduzioni ed assicurano l'esistenza della soluzione *in un campo grande ad arbitrio per* x, y, purchè le condizioni per $\varphi(x), \psi(y)$ restino sempre soddisfatte. (1)

Prendiamo dapprima la funzione

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0),$$

che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(z_1)_{y=0} = \varphi(x), \quad (z_1)_{x=0} = \psi(y)$$

ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Indi costruiamo la funzione z_2 che soddisfa *alle medesime condizioni iniziali* ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z_1 ,$$

cioè prendiamo

$$z_2 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_1 \, dx\, dy .$$

Così continuiamo indefinitamente, costruendo la serie infinita di funzioni ausiliarie

$$(5) \qquad z_1, z_2, z_3 \ldots \quad z_{n-1}, z_n \ldots$$

(1) Nel caso generale invece: $s = F(x, y, z, p, q)$ l'esistenza della soluzione è assicurata soltanto per un campo *sufficientemente piccolo* nell'intorno del punto iniziale $x = 0$, $y = 0$.

colla legge ricorrente

$$(6) \qquad z_n = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_{n-1} \, dx\, dy ,$$

talchè le funzioni z_i della serie (5) sono tutte funzioni finite e continue di x, y in un campo comunque esteso, soddisfano inoltre tutte alle condizioni iniziali, e in generale alla relazione

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z_{n-1} .$$

Dimostreremo che la n^{ma} funzione ausiliaria z_n, al crescere infinito dell'indice n, *converge in egual grado verso una funzione limite,* $z = z(x, y)$, che è appunto la soluzione cercata della (1). Ciò equivale a dire che la serie

$$(8) \qquad z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

converge in egual grado nel detto campo, e la sua somma rappresenta la funzione cercata. Dimostreremo anzi di più che la convergenza della serie (8) è convergenza *assoluta,* che cioè converge (in egual grado) la serie

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} | z_n - z_{n-1} | .$$

Abbiamo intanto

$$z_2 - z_1 = \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_1 \, dx\, dy ,$$

e siccome $| \operatorname{sen} z_1 | \leq 1$

$$(9) \qquad | z_2 - z_1 | \leq | xy | ;$$

poi

$$z_3 - z_2 = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen} \frac{z_2 - z_1}{2} \cos \frac{z_2 + z_1}{2} \, dx\, dy ,$$

ed essendo $\left| \cos \frac{z_2 + z_1}{2} \right| \leq 1$, e per la (9)

$$\left| \operatorname{sen} \frac{z_2 - z_1}{2} \right| < \frac{1}{2} \, |xy| ,$$

ne viene

$$|z_3 - z_2| \leq \int_0^{|x|} \int_0^{|y|} xy \, dx \, dy \leq \frac{(xy)^2}{(1.2)^2} .$$

In generale si avrà la limitazione

$$|z_n - z_{n-1}| \leq \frac{|xy|^{n-1}}{(1.2.3 \ldots (n-1))^2} \tag{10}$$

poichè da questa, supposta vera per n, risulta per

$$z_{n+1} - z_n = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen} \left(\frac{z_n - z_{n-1}}{2} \right) \cos \left(\frac{z_n - z_{n-1}}{2} \right) dx \, dy$$

la limitazione

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{1}{1.2.3 \ldots (n-1)^2} \int_0^{(x)} \int_0^{(y)} |xy|^{n-1} \, dx \, dy ,$$

ossia

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{|xy|^n}{(1.2.3 \ldots n)^2} ,$$

che è la (16) stessa cangiato n in $n+1$. Posto dunque $\xi = |xy|$, la serie

$$\xi + \frac{\xi^2}{(1.2)^2} + \frac{\xi^3}{(1.2.3)^2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(1.2.3 \ldots n)^2} + \ldots ,$$

convergente in egual grado in qualunque campo finito, è *maggiorante* rispetto alla nostra

$$\sum |z_n - z_{n-1}| ,$$

che è dunque convergente in egual grado come erasi asserito. Ne segue che la somma $z = z(x, y)$ della serie (8) è una funzione finita e continua di x, y, e verso di essa converge *in egual grado* la funzione z_n (o z_{n-1}) al crescere indiuito dell'indice n; ma allora basta passare al limite per $n = \infty$ nella relazione (C) per dedurne che z soddisfa all'equazione integrale (1)

$$z = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z \, dx \, dy ,$$

o, ciò che è lo stesso, z possiede la derivata seconda mista $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \operatorname{sen} z$ e soddisfa, come z, alle condizioni iniziali.

Provata così l'esistenza della soluzione cercata, *l'unicità* si stabilisce subito e nel modo più semplice col solito procedimento di Goursat. Supposto che sia ζ un'altra soluzione della (1), soddisfacente alle stesse condizioni iniziali, avremo

$$\zeta = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} \zeta \, dx \, dy ,$$

indi

$$\zeta - z_n = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta - z_{n-1}}{2} \right) \cos \left(\frac{\zeta + z_n}{2} \right) dx \, dy$$

e per ciò

$$|\zeta - z_n| \leq \int_0^{(x)} \int_0^{(y)} |\zeta - z_{n-1}| \, dx \, dy .$$

---

(1) In modo più preciso, se si fa la differenza fra le due quantità (indipendenti da n)

$$z - \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z \, dx \, dy , \quad z_n - \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_{n-1} \, dx \, dy = z_1$$

differenza data da

$$(z - z_n) + \int_0^x \int_0^y (\operatorname{sen} z_{n-1} - \operatorname{sen} z) \, dx \, dy$$

si vede che, da un certo n in poi e *variando comunque* x, y *nel campo*, la differenza è piccola a piacere, indi nulla.

Supposto che in tutto il campo sia

$$| \zeta - z_1 | < M , \qquad \text{(M costante finita)}$$

ne segue successivamente

$$| \zeta_2 - z_2 | < M (xy) , \qquad | \zeta_3 - z_3 | < M \frac{(xy)^2}{(1 . 2)^2} \ldots$$

$$| \zeta_n - z_{n+1} | < M \frac{(xy)^n}{(1 . 2 . 3 \ldots n)^2} ,$$

e quindi al crescere infinito di n la z_n converge verso ζ; per ciò

$$\zeta = z , \text{ c. d. d.}$$

Dimostrato così l' enunciato teorema d' analisi, dobbiamo bene osservare che, nell' applicazione al problema geometrico, l' esistenza della superficie *regolare* pseudosferica resta accertata soltanto nel campo per α, β ove la soluzione ω della (I) non raggiunge i valori estremi o o π, ciò che ha luogo certamente in un intorno finito di $\alpha = 0$, $\beta = 0$ poichè ivi $\omega = \omega_0$ è discosto dai limiti estremi.

§. 243.

Il caso analitico.

Supponiamo ora che le due curve C, C', prescritte come asintotiche della superficie pseudosferica S, siano curve analitiche, e dimostriamo che: *la superficie pseudosferica da esse determinata è una superficie analitica.*

La nostra asserzione equivale all' altra che se, nelle condizioni del teorema al paragrafo precedente, supponiamo le due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$ funzioni analitiche olomorfe di x, y rispettivamente, anche la soluzione $z = z(x, y)$ della (I), individuata dalle condizioni iniziali, è funzione analitica olomorfa di x, y.

Per questo, supposto che $\varphi(x)$ sia sviluppabile in serie di potenze di x, convergente in un certo cerchio, e medesimamente $\psi(y)$ in serie di potenze di y, cercheremo di soddisfare alla (I) ed alle condizioni iniziali

$$(11) \qquad \begin{cases} z = \varphi(x) & \text{per } y = 0 \\ z = \psi(y) & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

con una doppia serie di Taylor

$$(12) \qquad z = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{mn} x^m y^n$$

convergente in un certo campo. Intanto le condizioni iniziali (11) insieme colla

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} z$$

e le equazioni che ne provengono per successiva derivazione, determinano completamente *nel punto iniziale* $x = 0$, $y = 0$ i valori di tutte le derivate

$$\left(\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} \right)_{0,0} ,$$

e risultano per ciò determinati, in modo unico, i coefficienti $a_{m,n}$ dello sviluppo (12), del quale resta solo a provare la convergenza. Questa risulta, per un certo campo finito, da un teorema generale di Goursat [1] a cui potremmo qui ricorrere.

Ma nel caso nostro speciale possiamo assicurare la convergenza dello sviluppo (12) in un campo più ampio e meglio precisato, paragonando la nostra equazione (I) colla ben nota equazione di Liouville

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^z .$$

Di questa è noto l' integrale generale dato da

$$e^z = \frac{2 X' Y'}{(X + Y)^2} ,$$

dove X, Y sono funzioni arbitrarie di x, y rispettivamente, finite e continue colle derivate X', Y', e dalla forma esplicita dell' integrale possiamo subito dedurre quella soluzione particolare della equazione (13) di Liouville che soddisfa alle condizioni iniziali date (11).

---

[1] V. Équations aux dérivées partielles du second ordre T. I §. 82 p. 184.

Questa è una funzione analitica di x, y olomorfa nell' intorno dell' origine e sviluppabile quindi in serie di potenze

$$z = \sum_m \sum_n a'_{m,n} x^m y^n . \tag{12*}$$

Paragoniamo i coefficienti $a_{m,n}$, $a'_{m,n}$ degli sviluppi (12), (12*) supponendo, per fissare le idee, che il valore iniziale $z = \varphi(0) = \psi(0)$ sia positivo

$$a_{0,0} = a'_{0,0} .$$

Si vede immediatamente che tutti i coefficienti $a'_{m,n}$ del secondo sviluppo sono positivi e inoltre è sempre

$$| a_{m,n} | < a'_{m,n} .$$

Per ciò, essendo convergente il secondo sviluppo (12*), è pure convergente, nel medesimo campo, il primo (12) ed è quindi provato che la soluzione z della (I), determinata dalle date condizioni iniziali, è olomorfa nell' intorno dell' origine.

Un caso particolare del risultato generale merita attenzione, il caso in cui le due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$ si riducano alla stessa costante a (con sen $a \neq 0$). In questo caso i valori iniziali per $x = y = 0$, di tutte quelle derivate $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$ nelle quali $m \neq n$ sono nulli e z risulta quindi funzione del prodotto xy. Posto

$$\tau = xy \qquad z = f(\tau),$$

la $f(\tau)$ soddisfa all' equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$\tau f''(\tau) + f'(\tau) = \operatorname{sen} f(\tau),$$

e risulta dal nostro calcolo stesso che questa ammette una ed una sola soluzione *regolare* nell' intorno dell' origine $\tau = 0$ col valore iniziale $f(0) = a \neq 0$. Quale è il significato geometrico di siffatta soluzione? Le osservazioni al §. 241 dimostrano che questo equivale ad assegnare quali asintotiche C, C' due rette incrociantisi in un punto sotto l' angolo a. Dunque: *Due rette incidenti individuano una superficie pseudosferica (analitica) che le contiene.* Queste singolari superficie pseudosferiche dipendono da una costante arbitraria, l' angolo a sotto cui si tagliano le due rette.

§. 244.

Superficie pseudosferica con un' assegnata linea di curvatura.

Col metodo delle approssimazioni successive potremmo riprendere, per una superficie pseudosferica, il problema di Cauchy studiato al §. 240 per il caso analitico e trattarlo ora con molta maggiore generalità, supponendo che sia data una qualunque striscia *non analitica* della superficie, nel qual caso esiste ancora una ed una sola superficie che contiene la striscia assegnata. Ci limiteremo, per maggiore determinatezza, al caso in cui la striscia assegnata sia una *striscia di curvatura*, e supporremo dunque data una qualunque curva C ed una sviluppabile per essa, nella quale si voglia inscrivere, lungo C, una superficie pseudosferica S di determinato raggio $R = 1$.

Vediamo in primo luogo in quale problema analitico per la corrispondente soluzione ω della (I) si traduce il nostro problema geometrico.

Avendo il ds^2 la forma (4) di Tchebychef, l' equazione differenziale delle linee di curvatura sarà [1]

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0 ,$$

e perciò le loro equazioni finite si scrivono

$$\alpha - \beta = \text{cost.}^{te} \qquad \alpha + \beta = \text{cost.}^{te} ;$$

e supponga si p. e. che la linea prescritta C di curvatura sia la $\alpha = \beta$. In primo luogo osserviamo che conosceremo il valore di ω lungo la linea C cioè $\omega(\alpha, \alpha)$. E infatti delle due curvature principali $\dfrac{1}{r_1}$, $\dfrac{1}{r_2}$,

---

[1] Si consideri che le linee di curvatura sono le bisettrici delle asintotiche, o si ricorra all' equazione generale

$$\begin{vmatrix} E d\alpha + F d\beta & F d\alpha + G d\beta \\ D d\alpha + D' d\beta & D' d\alpha + D'' d\beta \end{vmatrix} = 0$$

con $E = G = 1$, $F = \cos\omega$; $D = D'' = 0$, $D' = \operatorname{sen}\omega$.

legate dalla relazione $\frac{1}{r_1 r_2} = -1$ noi conosciamo, per i nostri dati geometrici, p. e. la seconda $\frac{1}{r_2}$, che possiamo supporre la positiva.

Ora abbiamo

$$\begin{cases} \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2} = 2\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega} \\ \frac{1}{r_1 r_2} = -1, \end{cases}$$

indi

$$\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^2 = 4\frac{\cos^2\omega}{\operatorname{sen}^2\omega} + 4 = \frac{4}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

e per ciò

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} = 2\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}, \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\omega},$$

ossia

$$\frac{1}{r_2} = \operatorname{cot}\frac{\omega}{2}, \quad \frac{1}{r_1} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}. \tag{13}$$

Queste mostrano appunto che ω è nota lungo la C. In secondo luogo è pur nota la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ che deve avere la C sulla superficie supposta, e d'altronde dalla formola di Bonnet per $\frac{1}{\rho_g}$ (pag. 269) ove si ponga $\varphi = \beta - \alpha$ si trae

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{2\cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right).$$

Conoscendo dunque lungo C ($\alpha = \beta$) i valori di ω e di $\frac{1}{\rho_g}$, conosciamo altresì quelli di $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$, o insomma lungo C sono prescritti i valori di $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$ e il valore di ω nel punto iniziale (0, 0).

Il problema geometrico enunciato si converte dopo ciò nel seguente d'analisi:

Trovare una soluzione $z = z(x, y)$ della equazione fondamentale (I)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z,$$

conoscendo lungo la bisettrice $x = y$ delle caratteristiche $x = 0$; $y = 0$ i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e nel punto iniziale (0, 0) il valore z_0 di z.

L'esistenza e l'unicità della soluzione si dimostra col metodo delle approssimazioni successive nel modo stesso che serve per le equazioni lineari: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$, come segue (Cf. §. 242). Essendo $\varphi(x)$, $\psi(y)$ i valori prescritti per le derivate di z lungo la bisettrice $x = y$, pongasi

$$z_1 = \int_0^x \varphi(x)\,dx + \int_0^y \psi(y)\,dy + z_0, \tag{14}$$

sicchè la z_1 soddisfa alle condizioni iniziali e alla equazione $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Ora per il punto generico (x, y) del campo si conducano le parallele agli assi e si indichi con T il triangolo racchiuso da queste due parallele agli assi e dalla bisettrice, ma per fissare le idee supponiamo di restare nell'ottante compreso fra la direzione positiva dell'asse Ox e la bisettrice $y = x$ delle direzioni positive degli assi, talchè $0 < y < x$. Se con $f(\xi, \eta)$ si indica una qualunque funzione finita e continua di ξ, η, l'integrale doppio

$$u(x, y) = -\iint_T f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = -\int_y^x d\xi \int_y^\xi f(\xi, \eta)\,d\eta = -\int_y^x d\eta \int_\eta^x f(\xi, \eta)\,d\xi \tag{15}$$

è una funzione continua $u = u(x, y)$, che soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x, y)$$

e si annulla insieme colle sue derivate prime $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ lungo la bisettrice $x = y$. (1)

Ciò premesso, partendo dalla prima funzione ausiliaria z_1 data dalla (14), si costruisca la serie infinita

$$z_1, z_2, z_3 \ldots z_n \ldots$$

data dalle formole ricorrenti

$$(16) \qquad \begin{cases} z_2 = z_1 - \iint_T \operatorname{sen} z_1 \, d\xi \, d\eta \\ z_3 = z_1 - \iint_T \operatorname{sen} z_2 \, d\xi \, d\eta \\ \ldots\ldots\ldots \\ z_n = z_1 - \iint_T \operatorname{sen} z_{n-1} \, d\xi \, d\eta \end{cases}$$

In generale per la z_n $(n > 1)$, abbiamo

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \, \partial y} = \operatorname{sen} z_{n-1}$$

e lungo la bisettrice $x = y$ la z_n soddisfa alle medesime condizioni iniziali della z_1. Se dimostriamo la convergenza in egual grado della serie (8), le considerazioni stesse del §. 242 provano che la somma

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots$$

dà la soluzione cercata. Ora, al nostro oggetto, basta procedere a convenienti limitazioni dei valori assoluti delle differenze $z_2 - z_1$, $z_3 - z_2$, ... Ma si ha dalla prima delle (16)

(1) Cf. p. e. GOURSAT Cours d' Analyse 2ème Edition T. I. pag. 311. Si osservi che la regola di derivazione sotto il segno dà subito

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_y^x f(x, \eta) \, d\eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_y^x f(\xi, y) \, d\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = f(x, y)$$

formola che dimostrano le proprietà enunciate nel testo.

$$(17) \qquad |z_2 - z_1| \leq \iint_T d\xi \, d\eta < \frac{1}{2} (x - y)^2,$$

poi da

$$z_3 - z_2 = \iint_T (\operatorname{sen} z_2 - \operatorname{sen} z_1) \, d\xi \, d\eta = \iint_T 2 \operatorname{sen} \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right) \cos \left(\frac{z_2 + z_1}{2} \right) d\xi \, d\eta,$$

osservando la limitazione (17), risulta

$$|z_3 - z_2| < \frac{1}{2} \int_y^x d\xi \int_y^\xi (\xi - \eta)^2 \, d\eta < \frac{1}{6} \int_y^x (\xi - y)^3 \, d\xi < \frac{1}{24} (x - y)^4,$$

cioè

$$|z_3 - z_2| < \frac{(x - y)^4}{4!}$$

In generale si ha la limitazione

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{(x - y)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!},$$

che si prova col solito processo ricorrente. (1) Si vede che la serie

(1) Si ha

$$z_{n+1} - z_n = \iint_T (\operatorname{sen} z_{n-1} - \operatorname{sen} z_n) \, d\xi \, d\eta,$$

indi

$$|z_{n+1} - z_n| < \iint_T |z_n - z_{n-1}| \, d\xi \, d\eta$$

e supposta la limitazione (α) del testo:

$$|z_{n+1} - z_n| < \int_y^x d\xi \int_y^\xi \frac{(\xi - \eta)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}$$

$$< \int_y^x d\xi \frac{(\xi - y)^{2n-1}}{(2n-1)!} < \frac{(x - y)^{2n}}{(2n)!},$$

che è la (α), cangiato n in $n + 1$.

$$|z_1 - z_1| + |z_3 - z_2| + \ldots\ldots + |z_n - z_{n-1}| + \ldots$$

è minorante rispetto all'altra convergente in egual grado

$$\frac{\xi^2}{1.2} + \frac{\xi^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{\xi^{2n}}{1.2.3..(2n)} + \ldots = \cosh\xi - 1$$

$$(\xi = x - y)$$

e per ciò è convergente essa stessa in egual grado *c. ∂. ∂.*

Per dimostrare in fine l'unicità della soluzione basta ancora applicare il procedimento di Goursat (Cf. §. 242). E nuovamente si può concludere che ove la striscia di curvatura assegnata fosse analitica anche la superficie pseudosferica individuata sarebbe analitica.

I risultati ottenuti in questo e nei precedenti paragrafi, in rapporto alle superficie pseudosferiche, confermano la profonda differenza fra questo caso e quello delle deformate della sfera. Ciò dipende in sostanza da che l'equazione fondamentale appartiene nel primo caso al tipo iperbolico, nel secondo al tipo ellittico.

§. 245.

Le superficie pseudosferiche riferite alle loro linee di curvatura.

Abbiasi una superficie pseudosferica di raggio R, riferita dapprima alle sue linee asintotiche (α, β). Pel suo ds^2 abbiamo (§. 241, 244)

$$ds^2 = R^2(d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2),$$

essendo ω una soluzione della (I), e pei raggi principali di curvatura

$$r_1 = -R\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}, \quad r_2 = R\cot\frac{\omega}{2}.$$

Se introduciamo invece le linee di curvatura u, v ponendo

$$u = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \beta$$

e inoltre

$$\omega = 2\theta,$$

risulta

$$ds^2 = R^2(\cos^2\theta\, du^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, dv^2), \tag{18}$$

con

$$r_2 = R\cot\theta, \quad r_1 = -R\,\mathrm{tg}\,\theta, \tag{19}$$

mentre l'equazione fondamentale (I) prende, nelle coordinate (u, v), la forma

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta. \tag{II}$$

Dunque: *L'elemento lineare di una superficie pseudosferica di raggio* R, *riferita alle sue linee di curvatura* (u, v), *prende la forma caratteristica* (18), *dove i raggi principali di curvatura hanno i valori* (19) *e* θ *è una soluzione dell'equazione* (II); *viceversa ad ogni soluzione* θ *della* (II) *corrisponde una superficie pseudosferica di raggio* R, *definita dalle* (18), (19) [1].

Anche è da osservarsi che l'elemento lineare ds' della rappresentazione sferica prende la forma analoga alla (18)

$$ds'^2 = \mathrm{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2; \tag{18*}$$

e viceversa, quando l'elemento lineare sferico ha questa forma (con $E + G = 1$), le linee sferiche (u, v) sono le immagini delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica.

---

[1] Tutto ciò si deduce del resto anche direttamente dalle formole generali §. 157 relative ad una superficie S riferita alle sue linee di curvatura (u, v) con

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Se si suppone infatti la superficie pseudosferica di raggio R, si possono fare le posizioni (19) e introducendo questi valori di r_2, r_1 nelle equazioni di Codazzi (2*) §. 157, ne viene

$$\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

Cangiando i parametri u, v si può fare

$$\sqrt{E} = R\cos\theta, \quad \sqrt{G} = R\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e si ottiene la (18). Quanto alla (II) essa non è altro che l'equazione di Gauss (2) ibid.

Mantenendo le consuete notazioni della teoria generale, scriviamo ora le *formole* (A) §. 157 pel caso attuale nel seguente quadro, a cui dovremo spesso ricorrere nei calcoli seguenti:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = R\cos\theta\,.\,X_1\,, & \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_2 - \operatorname{sen}\theta\,X_3\,, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_1\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\,.\,X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = R\operatorname{sen}\theta\,.\,X_2\,, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_2 & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_1 + \cos\theta\,X_3\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta\,X_2\,. \end{cases}$$

Della superficie pseudosferica S consideriamo una delle due falde dell' evoluta, p. e. la prima data da

$$x_1 = x - r_1 X_3 = x + R\operatorname{tg}\theta\,X_3\,,\ \text{ecc.}$$

Derivando rapporto ad u, v abbiamo dalle (A)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\left(\cos\theta\,X_1 + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_2\right) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_2 \end{cases}$$

e quindi per l'elemento lineare ds_1 della prima falda

$$ds_1^2 = R^2\left(\frac{d\theta^2}{\cos^4\theta} + \frac{du^2}{\cos^2\theta}\right).$$

che ponendo

$$R\operatorname{tg}\theta = \rho$$

si trasforma in

$$ds_1^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + R^2)\,du^2,$$

appartenente al catenoide di parametro R, proprietà questa che ci è ben nota (§. 171).

Si osservi anche che per la superficie pseudosferica S si ha

$$D = -\frac{E}{r_2} = -R\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\ D' = 0,\ D'' = -\frac{G}{r_1} = R\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

cioè: *il sistema* (u, v) *delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica è isotermo-coniugato* (§. 79). Ma anche sulle due falde dell' evoluta il sistema (u, v) è isoterma coniugato. e infatti per la prima falda S_1 dell' evoluta abbiamo

$$D_1 = -\frac{R}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v},\ D_1' = 0,\ D_1'' = -\frac{R}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

e analogamente per la seconda. Di qui si vede nuovamente (§. 160) che: *Le asintotiche delle due falde dell' evoluta della superficie pseudosferica corrispondono alle asintotiche dell' evolvente.*

Se ora consideriamo il luogo delle normali alla superficie pseudosferica lungo un' asintotica, che è una curva a torsione costante $\pm\dfrac{1}{R}$, questa è la rigata delle binormali dell' asintotica stessa e quindi applicabile sul catenoide cioè sulla corrispondente falda del l' evoluta.

La detta rigata è appunto il luogo delle tangenti alle deformate dei meridiani del catenoide (o delle generatrici dell' elicoide rigato ad area minima) lungo la corrispondente asintotica. E si verifica anche facilmente, colle formole superiori, che nella deformazione della rigata che la applica sulla detta falda dell'evoluta *l'asintotica di contatto resta rigida.* Questo non è del resto che un caso particolare del teorema di Chieffi (§ 153).

§ 246.

Le superficie a curvatura costante positiva riferite alle linee di curvatura.

Consideriamo ora una superficie S a curvatura costante positiva $K = +\dfrac{1}{R^2}$, cioè una deformata della sfera di raggio R, e riferiamo la S alle sue linee di curvatura (u, v). I due raggi principali di curvatura r_1, r_2 sono legati dalla relazione

$$r_1 r_2 = R^2$$

ed hanno lo stesso segno, che possiamo supporre sia il positivo. Supponiamo p. e. $r_1 > R$, $r_2 < R$ e indicando con $\theta = \theta(u, v)$ una funzione *positiva* di u, v poniamo

$$(20)\qquad r_1 = R\coth\theta,\quad r_2 = R\operatorname{tgh}\theta.$$

Introducendo questi valori nelle formole di Codazzi (2*) §. 157, risulta

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \log \operatorname{senh} \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \cosh \theta}{\partial u},$$

e cangiando i parametri u, v possiamo fare senz' altro

$$\sqrt{E} = R \operatorname{senh} \theta \qquad \sqrt{G} = R \cosh \theta,$$

sicchè per l' elemento lineare della superficie abbiamo

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2), \tag{21}$$

e per quello della sua immagine sferica

$$ds'^2 = \cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2. \tag{21*}$$

Resta ancora da tener conto dell' equazione di Gauss per esprimere che la curvatura della forma differenziale (21) è data da $+\frac{1}{R^2}$ (ovvero quella della forma (21*) da $+1$); questa si traduce per $\theta = \theta(u, v)$ nell' equazione a derivate parziali seconde (del tipo ellittico)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0. \tag{III}$$

Viceversa, se θ è una soluzione di questa equazione, ne resta definita intrinsecamente, dalla (21), una deformata S della sfera per la quale le linee u, v sono le linee di curvatura e i raggi principali di curvatura sono dati dalle (20).

Anzi osserviamo subito che, essendo l' equazione simmetrica in u, v, è lecito nel risultato precedente scambiare u con v (r_1 con r_2), onde risulta:

La determinazione delle deformate della sfera dipende dall' equazione a derivate parziali di secondo ordine (III). *Ad ogni soluzione* $\theta = \theta(u, v)$ *di questa corrisponde una coppia* S, S' *di superficie deformate della sfera di raggio* R, *i cui elementi lineari* ds, ds', *riferiti alle linee di curvatura* (u, v), *sono dati rispettivamente da*

$$(a) \quad \begin{cases} ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2) \\ ds'^2 = R^2 (\cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2), \end{cases}$$

mentre i loro raggi principali di curvatura hanno i valori

$$(b) \quad \begin{cases} r_1 = R \coth \theta, \; r_2 = R \operatorname{tgh} \theta \;\; \textit{per la S} \\ r'_1 = R \operatorname{tgh} \theta, \; r'_2 = R \coth \theta \;\; \textit{per la S'}. \end{cases}$$

I loro corrispondenti elementi lineari sferici sono

$$(c) \quad \begin{cases} ds_1^2 = \cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2 \quad \textit{per la S} \\ ds_1'^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2 \quad \textit{per la S'}. \end{cases}$$

Così adunque, corrispondentemente alle soluzioni della (III), le deformate della sfera si presentano sempre associate in coppie (S, S'), ed una superficie della coppia determina perfettamente l' altra. Le formole precedenti rendono evidente quale è la relazione geometrica fra le due superficie S, S'. Distendendo S sulla sfera, le sue linee di curvatura si distendono sulle immagini sferiche delle linee di curvatura dell' altra S', e similmente invertendo S con S'. Dunque ogni deformata S della sfera ne determina una seconda colla costruzione seguente: *Si rappresenti* S *sulla sfera* (*di raggio* R) *al modo di Gauss e si considerino le immagini sferiche delle linee di curvatura. Esiste una deformazione della sfera dopo la quale queste immagini diventano linee di curvatura sulla deformata, che è la seconda superficie domandata* S'.

Questa trasformazione *involutoria* delle deformate della sfera è stata scoperta da *Hazzidakis* (1), e si dirà la trasformazione di Hazzidakis.

Osserviamo ancora che, applicando S' sulla sfera, ogni sua geodetica diventa un circolo massimo; ora questa è l' immagine di una linea L di S lungo la quale le normali alla superficie sono tutte perpendicolari a una direzione fissa, onde se pei punti di L si tirano le parallele a quella direzione si forma un cilindro circoscritto alla S lungo L, colle generatrici parallele a quella direzione. Dunque L è *linea d' ombra* su S per raggi paralleli a quella direzione.

Nella corrispondenza fra i punti delle due trasformate di Hazzidakis si riscontrano quindi le seguenti proprietà:

a) la rappresentazione di S su S' è equivalente (conserva le aree).

b) le linee di curvatura si corrispondono e i raggi principali di curvatura hanno gli stessi valori (permutati).

---

(1) Crelle's Journal Bd. 88.

c) si corrispondono in generale i sistemi coniugati (1).

d) alle geodetiche di una delle due superficie corrispondono le linee d'ombra sull'altra.

§. 247.

Le formole per la trasformazione di Hazzidakis.

Abbiamo dedotto la trasformazione di Hazzidakis riferendoci alle linee di curvatura delle deformate della sfera, ma si può anche dedurre immediatamente il risultato dalle formole fondamentali del Cap. IV. Supponiamo di avere una deformata S della sfera, che prendiamo per semplicità di raggio $R = 1$, e sia

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{22}$$

la *prima* forma fondamentale di S, e la *terza* sia data da

$$E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2, \tag{22*}$$

mentre con $D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ indichiamo al solito la seconda forma fondamentale. Le due forme definite positive (22), (22*) sono ambedue a curvatura $K = +1$ ed è $EG - F^2 = E'G' - F'^2$, inoltre i coefficienti D, D', D'' soddisfano alle equazioni di Codazzi e di Gauss tanto rispetto alla forma (22) che alla (22*). Dunque: *scambiando la prima e la terza forma fra loro ne resta definita una seconda deformata S' della sfera, in relazione involutoria con S e l'elemento lineare dell'una coincide manifestamente coll'elemento della rappresentazione sferica per l'altra.* — Questa è appunto la trasformazione di Hazzidakis.

In particolare supponiamo che, essendo note sopra S le geodetiche, siasi ridotto l'elemento lineare alla forma geodetica polare

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\,dv^2.$$

---

(1) I valori di D, D', D'' sono gli stessi per le due superficie e cioè

$$D = D'' = -R\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,\quad D' = 0,$$

onde segue incidentalmente: *Sopra ogni deformata della sfera le linee di curvatura formano un sistema isotermo coniugato.*

Questo sarà al tempo stesso l'elemento sferico rappresentativo per la trasformata di Hazzidakis S', i cui coseni di direzione della normale X', Y', Z' potranno assumersi dati dalle solite formole

$$X' = \operatorname{sen} u\cos v,\quad Y' = \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,\quad Z' = \cos u.$$

Dopo ciò le formole generali di rappresentazione sferica (V) §. 86 (pag. 234) dànno immediatamente *per quadrature* le coordinate x', y', z' del punto (u, v) sulla S' colle formole

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x'}{\partial u} = -D\cos u\cos v + \frac{D'}{\operatorname{sen} u}\operatorname{sen} v,\quad \frac{\partial y'}{\partial u} = -D\cos u\operatorname{sen} v - \frac{D'}{\operatorname{sen} u}\cos v,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial z'}{\partial u} = D\operatorname{sen} u\\
&\frac{\partial x'}{\partial v} = -D'\cos u\cos v + \frac{D''}{\operatorname{sen} u}\operatorname{sen} v,\quad \frac{\partial y'}{\partial v} = -D'\cos u\operatorname{sen} v - \frac{D''}{\operatorname{sen} u}\cos v,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial z'}{\partial v} = D'\operatorname{sen} u,
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

dove è da osservare che le condizioni d'integrabilità sono tutte soddisfatte in virtù delle equazioni di Codazzi, che si possono scrivere sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(D\operatorname{sen} u)}{\partial v} = \frac{\partial(D'\operatorname{sen} u)}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\operatorname{sen} u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\operatorname{sen} u}\right) = D\cos u.
\end{aligned}\right.$$

Dalla (23) risulta che le linee *di livello* $z' = \text{cost.}^{te}$ sulla S' hanno per equazione differenziale

$$D\,du + D'\,dv = 0,$$

che è altresì quella delle linee a tangenti coniugate colle geodetiche $v = \text{cost.}^{te}$ sulla S, onde segue che sulla S' le linee a tangenti coniugate colle linee di livello $z' = \text{cost.}^{te}$, cioè *le linee d'ombra* relative a raggi paralleli alla giacitura del piano xy (§. 78) corrispondono alle linee geodetiche del fascio $v = \text{cost.}^{te}$ su S. Questa è la proprietà *d*) del paragrafo precedente.

Un'altra notevole proprietà della trasformazione di Hazzidakis si ottiene considerando due falde omonime dell'evoluta per le due superficie S, S' p. e. le prime falde luogo dei centri di curvatura delle rispettive linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$. Di queste due prime falde indichiamo i rispettivi elementi lineari con ds_1, ds_1' e dalla formola (6) §. 157 (pag. 418), ponendo mente alle (a), (b) del paragrafo precedente, avremo subito

$$\begin{cases} ds_1^2 = R^2 \left(\dfrac{d\theta^2}{\operatorname{senh}^2\theta} + \dfrac{du^2}{\operatorname{senh}^2\theta} \right) \\ ds_1'^2 = R^2 \left(\dfrac{d\theta^2}{\cosh^2\theta} + \dfrac{du^2}{\cosh^2\theta} \right), \end{cases}$$

che si possono ridurre alla forma tipica di superficie di rotazione ponendo $\alpha = \coth\theta$ nel primo caso, $\alpha = \operatorname{tgh}\theta$ nel secondo, e così (Cf. §. 171)

$$ds_1^2 = R^2 \{ d\alpha^2 + (\alpha^2 - 1) du^2 \}$$

$$ds_1'^2 = R^2 \{ d\alpha^2 + (1 - \alpha^2) du^2 \}.$$

Sappiamo dal §. 160 che ai sistemi coniugati della evolvente S corrispondono i sistemi coniugati della evoluta S_1, e così per S', S_1'; e siccome su S, S' si corrispondono i sistemi coniugati, lo stesso accade per S_1, S_1'. Ma inoltre diciamo che la corrispondenza stabilita fra S_1, S_1' fa corrispondere ad ogni geodetica di S_1 una geodetica di S_1'.

E infatti per la prima superficie S_1 l'integrale primo, dato dal teorema di Clairaut, è

$$(a^2 - \operatorname{senh}^2\theta)\, du^2 - d\theta^2 = 0 \qquad (a \text{ costante})$$

così per la seconda

$$(b^2 - \cosh^2\theta)\, du^2 - d\theta^2 = 0 \qquad (b \text{ costante}),$$

e basta legare le due costanti a, b colla relazione

$$b^2 - a^2 = 1$$

per far coincidere le due equazioni. Dunque:

Due falde omonime dell'evoluta di due deformate S, S' *della sfera, in trasformazione di Hazzidakis, si corrispondono insieme per sistemi coniugati e per linee geodetiche.* Per questa proprietà le due superficie (complementari) S_1, S_1' si comportano come due quadriche a centro in omografia geodetica (§. 119), circostanza questa su cui avremo occasione di ritornare in seguito (Vol. II).

§. 248.

Le superficie a curvatura media costante e il teorema di Bonnet.

Colle superficie a curvatura costante positiva $K = \dfrac{1}{R^2}$ stanno in relazione le superficie *a curvatura media costante (non nulla)*, secondo questo semplice teorema del Bonnet:

Se la superficie S *è a curvatura costante positiva* $K = \dfrac{1}{R^2}$, *le due superficie parallele alla* S *e distanti da questa di* R *hanno la curvatura media costante* $\pm \dfrac{1}{R}$; *viceversa ad ogni superficie a curvatura media costante* $\pm \dfrac{1}{R}$ *è parallela una superficie a curvatura costante positiva* $\dfrac{1}{R^2}$, *ed una seconda superficie a curvatura media costante* $\mp \dfrac{1}{R}$.

Questo risulta semplicemente dall'osservare che se una superficie (qualunque) S ha i raggi principali di curvatura $r_1 = \overline{M_1 M}$, $r_2 = \overline{M_2 M}$, una superficie S' parallela a questa e distante da essa di $\overline{M'M} = l$ (l costante) avrà i raggi principali di curvatura

$$r_1' = \overline{M_1 M'} = r_1 - l, \quad r_2' = \overline{M_2 M'} = r_2 - l.$$

Se dunque la S è deformata di una sfera di raggio R, essendo $r_1 r_2 = R^2$, i raggi principali di curvatura della S' saranno legati dalla relazione

$$(r_1' + l)(r_2' + l) = R^2,$$

cioè dalla relazione bilineare simmetrica

$$r_1' r_2' + l(r_1' + r_2') + l^2 - R^2 = 0 . \quad (^1)$$

Prendendo ora $l = \mp R$ risulta

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} = \pm \frac{1}{R} ,$$

come è asserito nella prima parte del teorema.

Se supponiamo invece che la S sia a curvatura media costante $\frac{1}{a}$ indi

$$r_1 r_2 = a(r_1 + r_2)$$

ne verrà

$$(r_1' + l)(r_2' + l) = a(r_1' + r_2' + 2l)$$
$$r_1' r_2' + (l - a)(r_1' + r_2') = l(2a - l)$$

e prendendo $l = a$

$$r_1' r_2' = a^2 ,$$

ciò che dimostra la seconda parte.

---

(1) In generale se una superficie S ha i raggi principali di curvatura legati da una relazione bilineare simmetrica

$$a r_1 r_2 + b(r_1 + r_2) + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ costanti}),$$

(che è quanto dire le due curvature H, K legate da una relazione lineare intera : $cK + bH + a = 0$), lo stesso accade di ogni sua parallela alla distanza l, e invero risulta

$$a' r_1' r_2' + b'(r_1' + r_2') + c' = 0 ,$$

con

$$a' = a, \quad b' = b + al, \quad c' = c + 2bl + al^2$$

Se $a \pm 0$ si può rendere $b' = 0$ $\left(\text{ponendo } l = -\frac{b}{a}\right)$ ed allora $r_1' r_2' = \text{cost.}^{te}$.

Se invece $a = 0$ indi $b \pm 0$, si può rendere anche $c' = 0$ ponendo $l = -\frac{c}{2b}$;

dunque:

Le superficie colla curvatura media e totale legate linearmente sono tutte e sole le superficie parallele a quelle di curvatura media costante ed alle superficie minime.

Importa, per future ricerche sulle deformate delle quadriche rotonde (teoremi di Guichard), enunciare il risultato di Bonnet sotto quest'altra forma equivalente : *Se una sfera di raggio* R *rotola sopra una sua deformata (sull' una o sull' altra faccia) il centro della sfera descrive una superficie a curvatura media costante* $\pm \frac{1}{R}$; *viceversa ogni superficie a curvatura media costante è generabile in questo modo.*

Si vede adunque che il problema di trovare le deformate della sfera coincide colla ricerca delle superficie a curvatura media costante, e dipendono dunque l' uno e l' altro dalla equazione a derivati parziali (III). Esaminiamo allora quale forma assume il $\overline{ds^2}$ di una superficie a curvatura media costante, riferita alle sue linee di curvatura u, v. In generale se di una superficie S consideriamo la parallela $\bar{S}$ alla distanza l, abbiamo

$$\bar{x} = x - lX , \quad \bar{y} = y - lY , \quad \bar{z} = z - lZ ,$$

indi (riferendoci alle linee di curvatura)

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(1 - \frac{l}{r_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} , \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(1 - \frac{l}{r_1}\right)\frac{\partial x}{\partial v} ,$$

e per ciò (indicando con un soprassegno le quantità relative alla $\bar{S}$)

$$(24) \qquad \bar{E} = E\left(1 - \frac{l}{r_2}\right)^2 , \quad \bar{F} = 0 , \quad \bar{G} = G\left(1 - \frac{l}{r_1}\right)^2$$

$$(25) \qquad \bar{D} = -\frac{E}{r_2}\left(1 - \frac{l}{r_2}\right) , \quad \bar{D}' = 0 , \quad \bar{D}'' = -\frac{G}{r_1}\left(1 - \frac{l}{r_1}\right) .$$

In particolare se applichiamo queste formole alla superficie S deformata della sfera di raggio R corrispondente alle (20), (21) §. 246 e poniamo inoltre

$$l = \mp R$$

avremo

$$(26) \qquad \overline{ds^2} = R^2 e^{\pm 2\theta}(du^2 + dv^2)$$

$$(26^*) \qquad \bar{r}_1 = r_1 \pm R = \frac{Re^{\pm\theta}}{\operatorname{senh}\theta}, \quad \bar{r}_2 = \pm R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\cosh\theta}$$

$$\frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2} = \pm\frac{1}{R}.$$

Se applichiamo le medesime formole alle parallele S′ alla distanza $\pm R$ dalla trasformata S′ di Hazzidakis della S, avremo similmente

$$(27) \qquad \overline{ds'^2} = R^2 e^{\pm 2\theta}\,(du^2 + dv^2)$$

$$(27^*) \qquad \bar{r}_1' = \pm R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\cosh\theta}, \quad \bar{r}_2' = \mp R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\operatorname{senh}\theta}.$$

Intanto possiamo formulare i risultati ottenuti col teorema:

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura media costante $\pm\frac{1}{R}$, *riferita alle linee di curvatura u, v, assume la forma* (26), *dove* θ *è una soluzione dell'equazione a derivate parziali* (III)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0.$$

Viceversa se θ *è una soluzione di questa, vi corrispondono due coppie di superficie parallele a curvatura media costante definite dalle formole* (26), (26*); (27), (27*).

E in particolare, siccome il ds^2 della forma (26) o (27) ha forma isoterma abbiamo il risultato: *Sopra ogni superficie a curvatura media costante, come su quelle ad area minima, le linee di curvatura costituiscono un sistema isotermo.*

Si osserverà poi che, a ciascuna delle due superficie parallele nella coppia (26), ne corrisponde una nell'altra coppia collo stesso elemento lineare, linee di curvatura corrispondenti e curvature principali permutate. Dunque:

Ogni superficie a curvatura media costante $\bar{S}$ *può deformarsi in un'altra* $\bar{S}'$ *della stessa specie conservando le sue linee di curvatura e permutando i valori dei raggi principali.*

Questa singolare deformazione, *caratteristica* per le superficie a curvatura media costante, (1) corrisponde manifestamente alla trasformazione di Hazzidakis per le superficie parallele a curvatura costante *positiva*.

A complemento di queste proprietà delle superficie a curvatura media costante, in relazione colle parallele deformate della sfera, si notino questi altri due teoremi:

α) *Se* S *è una superficie deformata della sfera ed* $\bar{S}$ *una parallela a curvatura media costante, ai sistemi coniugati di* S *corrispondono i sistemi ortogonali sopra* $\bar{S}$.

β) *Se* S, $\bar{S}$ *sono due superficie parallele a curvatura media costante, la rappresentazione dell'una sull'altra è conforme.*

Questi risultano subito, insieme coi loro inversi, dalle formole (24), (25). Supponiamo infatti che, essendo S, $\bar{S}$ una coppia di superficie parallele, ai sistemi ortogonali di S corrispondano sistemi coniugati sopra S, ciò che si esprime colla proporzione

$$\bar{D} : E = \bar{D''} : G$$

cioè per le (25)

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\left\{1 - l\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\} = 0.$$

(1) Che sia caratteristica per questo caso risulta p. e. dalle equazioni di Codazzi riferite alle linee di curvatura

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{\bar{E}}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{\bar{G}}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0.$$

Se queste debbono essere ancora verificate permutando r_1 con r_2, sommando risulta

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0,$$

cioè $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cost.te}$

Escludendo il caso ovvio della sfera ($r_1 = r_2$) ne risulta $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{l}$, cioè S è a curvatura media costante ed $\overline{S}$ la parallela a curvatura totale costante.

In secondo luogo supponga si conforme la rappresentazione di S sopra $\overline{S}$, cioè

$$\overline{E} : \overline{G} = E : G .$$

Per le (24) avremo

$$\left(1 - \frac{l}{r_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{l}{r_1}\right)^2 ,$$

ossia

$$\left(2 - l\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right)\left(l\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = 0 ,$$

ed escludendo nuovamente il caso della sfera

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{l} .$$

La superficie S è a curvatura media costante e la $\overline{S}$ la sua parallela, *c. d. d.*

§. 249.

Le trasformazioni di Bonnet-Lie per le superficie a curvatura costante.

La forma dell'equazione (III) rende evidente che se si eseguisce sulle variabili u, v una sostituzione ortogonale

$$(28) \qquad \begin{cases} u = u_1 \cos\sigma - v_1 \operatorname{sen}\sigma \\ v = u_1 \operatorname{sen}\sigma + v_1 \cos\sigma , \end{cases} \qquad (\sigma \text{ costante})$$

la funzione

$$(29) \qquad \theta_1(u_1, v_1) = \theta(u_1 \cos\sigma - v_1 \operatorname{sen}\sigma,\ u_1 \operatorname{sen}\sigma + v_1 \cos\sigma)$$

soddisfa nuovamente all'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_1^2} + \operatorname{senh}\theta_1 \cosh\theta_1 = 0 .$$

Così da una soluzione nota $\theta(u, v)$ della (III) si ottengono, con questa semplice osservazione, ∞^1 soluzioni. Il significato geometrico di questa circostanza si riconosce nel modo più opportuno osservando che alla primitiva soluzione $\theta(u, v)$ corrisponde una superficie a curvatura media costante d'elemento lineare

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

coi raggi principali di curvatura

$$r_1 = R\frac{e^{\theta}}{\operatorname{senh}\theta}, \qquad r_2 = R\frac{e^{\theta}}{\cosh\theta},$$

e analogamente all'altra soluzione $\theta_1(u_1, v_1)$ la superficie S_σ a curvatura media costante con

$$ds_1^2 = e^{2\theta_1}(du_1^2 + dv_1^2)$$

e i raggi principali di curvatura

$$R\frac{e^{\theta_1}}{\operatorname{senh}\theta_1}, \qquad R\frac{e^{\theta_1}}{\cosh\theta_1}.$$

Ma in virtù delle (28) è $\theta_1(u_1, v_1) = \theta(u, v)$, indi

$$e^{2\theta}(du^2 + dv^2) = e^{2\theta_1}(du_1^2 + dv_1^2) ,$$

onde le due superficie S, S_σ sono applicabili ed hanno in punti corrispondenti eguali i corrispondenti raggi di curvatura. Dalle formole (28) è poi evidente che le nuove linee di curvatura (u_1, v_1) di S_1 tagliano sotto l'angolo costante σ le antiche linee di curvatura (u, v). Dunque:

Ogni superficie a curvatura media costante è suscettibile di una deformazione continua, nella quale i suoi raggi principali di curvatura restano singolarmente invariati e le nuove linee di curvatura tagliano sotto angolo costante arbitrario le antiche.

Queste deformazioni, trovate da Bonnet, sono evidentemente le analoghe di quelle al § 207 per le superficie d'area minima (a curvatura media nulla).

È da notarsi il caso particolare di quelle superficie a curvatura media costante per le quali θ è una funzione dell'argomento

$$\tau = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Posto $\theta = \theta(\tau)$, esse sono determinate dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$2\tau\theta'' + 2\theta' + \operatorname{senh}\theta = 0$$

e dalla deformazione di Bonnet vengono trasformate in sè medesime. Esse sono applicabili sopra superficie di rotazione e le linee $u^2 + v^2 = \text{cost.}^{te}$ sono le trasformate dei paralleli (1).

Anche per le superficie pseudosferiche abbiamo una trasformazione che corrisponde alla precedente per le superficie a curvatura costante positiva. È questa la *trasformazione di Lie* che risulta analiticamente dall'osservare che, se $\omega(\alpha, \beta)$ è una soluzione della equazione fondamentale (I) §. 241

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen}\omega,$$

se ne ha subito una nuova *con una costante arbitraria k* ponendo

$$\omega_1(\alpha, \beta) = \omega\left(k\alpha, \frac{\beta}{k}\right).$$

Se ci riferiamo ai parametri u, v delle linee di curvatura, la trasformazione di Lie consiste nel cangiare u, v rispettivamente in

$$u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma,\quad u\operatorname{senh}\sigma + v\cosh\sigma \quad (\sigma \text{ costante}).$$

Si osserverà che la trasformazione di Lie, come quella di Bonnet, conduce ad un ciclo *chiuso* di ∞^1 superficie a curvatura costante negativa o positiva. Ben presto troveremo delle trasformazioni di ben altra natura e di significato geometrico, alle quali sono dovuti i più importanti progressi di questa teoria.

(1) Insieme colle superficie elicoidali sono le uniche superficie a curvatura media costante applicabili sopra superficie di rotazione (Cf. CHINI — Giornale di matematiche 1888).

§. 250.

Le superficie elicoidali a curvatura costante.

Abbiamo già avuto occasione di considerare, al §. 132, le elicoidi del Dini a curvatura costante negativa. Vogliamo ora ricercare, in generale, le elicoidi a curvatura costante le quali dipendono dalle funzioni ellittiche, che soltanto nel caso del Dini si semplificano in circolari.

a) Elicoidi pseudosferiche. Per trovare queste elicoidi dobbiamo cercare quelle particolari soluzioni θ della equazione fondamentale (II)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

per le quali la corrispondente superficie pseudosferica (18) d'elemento lineare

$$ds^2 = R^2(\cos^2\theta\,du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,dv^2)$$

ammette un movimento continuo in sè stessa.

In questo movimento dovranno strisciare in sè medesime le linee (eliche) $\theta = \text{cost.}^{te}$, perchè lungo queste linee sono appunto costanti i raggi principali di curvatura, e lungo queste linee dovranno pur rimanere costanti le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$ delle linee di curvatura. Ma si ha

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u},\quad \frac{1}{\rho_v} = -\frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

e per ciò avremo

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = f(\theta),\quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \varphi(\theta)$$

e sarà quindi (1)

(1) Dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}f(\theta) = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\theta)$$

risulta

$$f'\varphi = f\varphi'$$

e per ciò $f = c\varphi$ (c costante).

$$f(\theta) = c\,\varphi(\theta) \qquad (c \text{ costante}),$$

cioè θ *funzione dell'argomento*

$$\tau = cu + v.$$

Viceversa se $\theta = \theta(\tau)$ è una soluzione della (*II*), la corrispondente superficie pseudosferica è elicoidale, perchè allora la prima e la seconda forma fondamentale ammettono il gruppo continuo

$$u = u' + h, \quad v = v' - ch \qquad (h \text{ parametro})$$

che trasforma ciascuna delle forme in sè stessa (Cf. §. 129 nota). Dunque: *le superficie pseudosferiche elicoidali si ottengono prendendo una soluzione* θ *della* (II) *che sia funzione di una combinazione lineare dei parametri* u, v. In queste sono incluse le superficie pseudosferiche di rotazione che corrispondono manifestamente a prendere $c = 0$ (ovvero $c = \infty$). Ed anzi, ricorrendo alla trasformazione di Lie, si vede che: *le superficie pseudosferiche elicoidali sono le trasformate di Lie di quelle di rotazione.*

Abbiamo già distinto queste ultime al §. 127 nei tre tipi parabolico, ellittico ed iperbolico, che ritroviamo ora di nuovo cercando le soluzioni $\theta = \theta(u)$ della (II) funzioni della sola u, da cui l'equazione differenziale

$$\theta''(u) = \operatorname{sen}\theta\cos\theta;$$

di questa abbiamo subito l'integrale primo

$$\theta'^2(u) = a^2 - \cos^2\theta \qquad (a \text{ costante}),$$

e si hanno i tre diversi tipi secondo che $a^2 = 1$, $a^2 > 1$ ovvero $a^2 < 1$. Nel primo caso l'integrazione si compie per funzioni ordinarie colle formole

$$\cos\theta = \operatorname{tgh} u, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\cosh u} \qquad \begin{matrix}(\text{tipo parabolico,}\\ \text{pseudosferico}),\end{matrix}$$

negli altri due casi per funzioni ellittiche, di modulo $k = \frac{1}{a}$ nel secondo caso, di modulo $k = a$ nel terzo e così abbiamo gli altri due tipi:

$$\cos\theta = sn\left(\frac{u}{k}\right), \quad \operatorname{sen}\theta = cn\left(\frac{u}{k}\right) \qquad (\text{tipo ellittico})$$

$$\cos\theta = k\,sn\,u, \quad \operatorname{sen}\theta = dn\,u \qquad (\text{tipo iperbolico}).$$

Basta ora applicare una trasformazione di Lie per ottenere i tre tipi di elicoidi pseudosferiche corrispondenti alle formole

A) $\cos\theta = \operatorname{tgh}(u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma)$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\cosh(u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma)}$.

B) $\cos\theta = sn\left(\dfrac{u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma}{k}\right)$, $\operatorname{sen}\theta = cn\left(\dfrac{u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma}{k}\right)$

C) $\cos\theta = k\,sn(u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma)$, $\operatorname{sen}\theta = dn(u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma)$.

Le elicoidi del primo tipo non sono altro che le elicoidi del Dini (§. 132). Degli altri due tipi si trovano anche facilmente le equazioni in termini finiti per funzioni ellittiche, e si osserverà che il secondo tipo dà come caso limite il primo (elicoidi del Dini) quando il modulo k si faccia $= 1$.

Se si calcola la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\theta}$ delle eliche $\theta = \text{cost.}^{te}$ per queste elicoidi (dalla formola del Bonnet) si trova per le elicoidi del secondo tipo

$$\frac{1}{\rho^2_\theta} = \frac{1}{R^2}\,\frac{dn^2\tau}{k^2(\operatorname{senh}^2\sigma + cn^2\tau)}, \qquad \tau = \frac{u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma}{k}$$

indi

$$\frac{1}{\rho^2_\theta} - \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^2}\,\frac{1 - k^2\cosh^2\sigma}{k^2(\operatorname{senh}^2\sigma + cn^2\tau)}$$

Dunque: *nel secondo tipo* B) *i circoli geodetici* $\theta = \text{cost.}^{te}$ *sono a centro reale se* $\cosh^2\sigma < \frac{1}{k^2}$, *a centro ideale se* $\cosh^2\sigma > \frac{1}{k^2}$, *infine oricicli ove sia* $\cosh^2\sigma = \frac{1}{k^2}$.

Pel terzo tipo C) si trova

$$\frac{1}{\rho^2_\theta} = \frac{1}{R^2}\,\frac{k^2\,cn^2\tau}{\operatorname{senh}^2\sigma + dn^2\tau}, \qquad \tau = u\cosh\sigma + v\operatorname{senh}\sigma$$

indi

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\rho_0^2} = \frac{1}{R^2} \frac{k'^2 + \operatorname{senh}^2 \sigma}{\operatorname{senh}^2 \sigma + dn^2 \tau};$$

nel terzo tipo C) *i circoli geodetici* $\theta = \text{cost.}^{te}$ *sono a centro ideale (paralleli alla geodetica* $\tau = K$).

Un' altra notevole proprietà delle elicoidi pseudosferiche si ottiene cercando le equazioni intrinseche delle loro linee asintotiche, del primo o del secondo sistema, linee che sono in ciascun sistema fra loro congruenti. La torsione di una tale linea è costante, precisamente

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R},$$

e ora ne calcoliamo la flessione $\frac{1}{\rho}$, in funzione dell'arco s osservando che questa eguaglia la curvatura geodetica. Prendiamo per es. l' asintotica $u = v$ per la quale abbiamo dalla (18)

$$s = Ru$$

e per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ (dalla formola del Bonnet, o anche dalle (5)))

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cdot 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \right);$$

Eseguendo il semplice calcolo, troviamo per il tipo B)

$$\frac{1}{\rho} = 2 m \, dn(ms), \text{ con } m = \frac{e^{\sigma}}{k R}$$

e nel tipo C) invece

$$\frac{1}{\rho} = 2 m \, cn \left(\frac{ms}{R} \right), \quad m = \frac{k e^{\sigma}}{R}$$

Le asintotiche delle elicoidi pseudosferiche hanno dunque le equazioni intrinseche

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\rho} = 2 m \, dn(ms), \quad \text{nel tipo B)}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\rho} = 2 m \, cn \left(\frac{ms}{R} \right) \text{ nel tipo C).}$$

Se si confrontano queste formole con quelle date da Hermite (1) per caratterizzare le forme a torsione costante della *curva elastica*, si vede che esse coincidono. Dunque: *le asintotiche delle elicoidi pseudosferiche sono curve elastiche a torsione costante; viceversa ogni curva elastica a torsione costante, per conveniente moto elicoidale attorno al suo asse, genera un' elicoide pseudosferica su cui rimane asintotica.*

b) *Elicoidi a curvatura costante positiva* $+\frac{1}{R^2}$.

Come nel caso precedente si vede che: *Le deformate elicoidali della sfera sono le trasformate di Bonnet-Lie di quelle di rotazione.*

Queste forme di rotazione già esaminate al §. 130 e contraddistinte nei due tipi delle fig.re 4ª e 6ª (pag. 348) corrispondono nelle formole attuali a prendere

$$\cosh \theta = \frac{1}{k'} \, dn \left(\frac{u}{k'}, k \right), \quad \operatorname{senh} \theta = \frac{k}{k'} cn \left(\frac{u}{k'}, k \right),$$

formole che corrispondono precisamente al secondo dei tipi, mentre il primo se ne ottiene per trasformazione di Hazzidakis.

Le elicoidi a curvatura costante positiva risultano dalle formole precedenti con trasformazione di Bonnet mutandovi u in $u \cos \sigma - v \operatorname{sen} \sigma$ (σ cost.te). Anche di queste elicoidi si hanno le equazioni in termini finiti per funzioni ellittiche, che nel caso attuale però non degenerano mai in circolari.

§. 251.

Le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane.

Si ottiene una interessante classe di superficie a curvatura costante cercando le superficie di questa specie con linee di curvatura

(1) Sur quelques applications des fonctions elliptiques (Paris Gauthier-Villars 1885).

piano in un sistema; le elicoidi del Dini appartengono appunto a questa classe.

Supponiamo dapprima che si tratti di una superficie pseudosferica il cui raggio R assumiamo per semplicità di scrittura $= 1$ ed abbiasi, secondo le (18), (19), (18*)

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2$$

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2$$

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta, \qquad r_2 = \cot\theta .$$

Ed ora supponiamo di più che le linee di curvatura di un sistema p. e. le $v = \text{cost.}^{te}$ siano piane, per la qual cosa è necessario e sufficiente che le loro immagini sferiche siano circoli. Ma la curvatura geodetica di queste linee è (salvo il segno)

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\partial \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\partial x},$$

e la condizione imposta equivale all' altra che questa sia una funzione della sola v, cioè si abbia

$$\frac{\partial^2 \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\partial u\,\partial v} = 0; \tag{30}$$

il problema proposto è così ricondotto a trovare le soluzioni comuni a questa equazione di secondo ordine e all' altra (II). Integrando la (30) abbiamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{U+V}$$

con U funzione di u soltanto e V di v, da cui

$$\cos^2\theta = \operatorname{tgh}^2(U+V), \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{\cosh^2(U+V)},$$

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(U+V)\,du^2 + \frac{dv^2}{\cosh^2(U+V)}.$$

Siccome escludiamo il caso ovvio delle forme di rotazione e quindi nè U, V debbono ridursi a costanti, potremo prendere U, V come nuovi parametri e scrivere il ds^2 sotto la forma

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(u+v)\,\frac{du^2}{U^2} + \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{V^2}, \tag{31}$$

avendo di nuovo indicato con U, V due funzioni rispettivamente di u, v. Resta da esprimere che la curvatura K della forma differenziale (31) è $K = -1$, il che dà

$$(V V' - U U')\cosh(u+v) = (V^2 - U^2 + 1)\operatorname{senh}(u+v).$$

Se poniamo

$$U^2 = \varphi(u), \quad V^2 = \psi(v),$$

la precedente si scrive

$$\psi' - \varphi' = 2(\psi - \varphi + 1)\operatorname{tgh}(u+v), \tag{32}$$

e facendo in questa p. e. $v = \text{cost.}^{te}$ ne risulta un'equazione lineare del 1° ordine per $\varphi(u)$ che si integra subito e dà

$$\varphi(u) = C - A\cosh 2u + B\operatorname{senh} 2u,$$

essendo A, B, C costanti. Dopo ciò, sostituendo nella (32) si ottiene

$$\psi(v) = A\cosh 2v + B\operatorname{senh} 2v + C - 1,$$

e tutte le condizioni sono soddisfatte. Ne concludiamo: *La più generale superficie pseudosferica di raggio* $R = 1$, *con linee di curvatura* v *piane, è definita intrinsecamente dalle formole:*

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(u+v)\,\frac{du^2}{C - A\cosh 2u + B\operatorname{senh} 2u} + \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{A\cosh 2v + B\operatorname{senh} 2v + C - 1}$$

$$r_1 = \frac{1}{\operatorname{senh}(u+v)}, \quad r_2 = -\operatorname{senh}(u+v) \tag{34}$$

e il corrispondente ds'^2 *sferico è dato da*

$$(35)\qquad ds'^2 = \frac{1}{\cosh^2(u+v)\,(C - A\cosh 2u + B\,\mathrm{senh}\,2u)}\,du^2 +$$

$$+ \mathrm{tgh}^2(u+v)\,\frac{dv^2}{A\cosh 2v + B\,\mathrm{senh}\,2v + C - 1}\,.$$

Si osservi però subito che in realtà queste superficie dipendono solo da due costanti arbitrarie, poichè cangiando u, v in $u+k$, $v-k$ (k cost.te), ove le costanti A, B non siano eguali, si può rendere nulla una di esse. Queste superficie pseudosferiche, vennero determinate da Enneper (1868), come le altre deformate della sfera di cui al paragrafo seguente, e si dicono superficie d' Enneper. Fra esse le più semplici, sfuggite all' analisi di Enneper, corrispondono al caso $A = B$ e furono studiate da Kuen.

§. 252.

Le deformate della sfera con un sistema di linee di curvatura piane.

In modo affatto analogo determiniamo una classe di deformate della sfera di raggio R con un sistema di linee $v =$ cost.te di curvatura piane. Facendo ancora $R = 1$, supponiamo p. e. che la detta superficie sia determinata intrinsecamente dalle formole §. 246

$$ds^2 = \mathrm{senh}^2\theta\,du^2 + \cosh^2\theta\,dv^2$$

$$r_1 = \coth\theta\,,\quad r_2 = \mathrm{tgh}\,\theta\,,$$

essendo θ una soluzione della (III)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta = 0\,.$$

Le linee di curvatura $v =$ cost.te saranno piane quando le loro immagini sferiche nel

$$ds'^2 = \cosh^2\theta\,du^2 + \mathrm{senh}^2\theta\,dv^2$$

siano circoli, quando si abbia cioè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0\,,$$

ossia

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{tgh}\,\frac{\theta}{2}\right) = 0\,.$$

Di qui, integrando, possiamo porre

$$\mathrm{tgh}\,\frac{\theta}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U+V}{2}\right),$$

essendo U, V funzioni rispettivamente di u la prima, di v la seconda. Ne deduciamo

$$\mathrm{senh}\,\theta = \cot(U+V)\,,\quad \cosh\theta = \frac{1}{\mathrm{sen}\,(U+V)}\,,$$

$$ds^2 = \cot^2(U+V)\,du^2 + \frac{dv^2}{\cos^2(U+V)}$$

formola che, escludendo il caso di superficie di rotazione, e cangiando i parametri u, v potremo scrivere in analogia al paragrafo precedente

$$ds^2 = \cot^2(u+v)\,\frac{du^2}{U^2} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{V^2}\,.$$

Resta solo da determinare U (u), V (v) in guisa che questo ds^2 abbia la curvatura $= +1$, il che dà l' equazione differenziale

$$UU' + VV' = (U^2 + V^2 + 1)\cot(u+v)\,.$$

Procedendo come al paragrafo precedente troviamo

$$U^2 = B\,\mathrm{sen}\,2u - A\cos 2u - C - 1$$

$$V^2 = A\cos 2v + B\,\mathrm{sen}\,2v + C\,,$$

con A, B, C costanti. Però se cangiamo u, v in $u+k$, $v-k$ e prendiamo convenientemente k, si vede che, senza alterare la generalità, si può rendere qui per es. $A = 0$. Dunque: *Le deformate della sfera unitaria, con linee* $v =$ cost.te *di linee di curvatura piane, sono definite intrinsecamente dalle formole*

$$(36)\quad \begin{cases} ds^2 = \cot^2(u+v)\,\dfrac{du^2}{B\,\mathrm{sen}\,2u - C - 1} + \dfrac{1}{\mathrm{sen}^2(u+v)}\,\dfrac{dv^2}{B\,\mathrm{sen}\,2v + C} \\ r_1 = \dfrac{1}{\cos(u+v)}, \quad r_2 = \cos(u+v) \\ ds'^2 = \dfrac{1}{\mathrm{sen}^2(u+v)}\,\dfrac{du^2}{B\,\mathrm{sen}\,2u - C - 1} + \cos^2(u+v)\,\dfrac{dv^2}{B\,\mathrm{sen}\,2v + C} \end{cases}$$

con B, C *costanti arbitrarie.*

Bene inteso, è qui supposto che il minore raggio di curvatura sia r_2; altrimenti bisogna sostituire alla superficie la sua trasformata di Hazzidakis (§. 247).

§. 253.

Le superficie d' Enneper a curvatura costante come superficie di Joachimsthal.

Queste superficie d' Enneper a curvatura costante sono così intrinsecamente definite dalle formole superiori, ma ora vogliamo di più accennare come le loro equazioni in termini finiti si hanno per quadrature (con funzioni ellittiche). Per questo cominciamo dallo stabilire la seguente loro notevole proprietà: *In ogni superficie a curvatura costante, con un sistema di linee di curvatura piane, i piani di queste linee passano per una retta fissa, e per ciò* (§. 193) *le linee di curvatura dell' altro sistema sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie coi centri distribuiti sulla retta fissa.*

Per questo cominciamo dall' osservare che in ogni tale superficie, colle linee $v =$ cost.te di curvatura piane, quelle dell' altro sistema $u =$ cost.te sono a curvatura geodetica costante (circoli geodetici). Prendasi p. e. il caso pseudosferico dove la condizione perchè le linee $v =$ cost.te siano piane è data da

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial r}\right).$$

Ora la curvatura geodetica $\dfrac{1}{\rho_u}$ delle $u =$ cost.te essendo data da

$$-\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

la condizione scritta equivale all' altra

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) = 0,$$

ciò che dimostra l'asserzione; anzi ne risulta di più: *Se le linee di curvatura di un sistema sopra una superficie a curvatura costante sono circoli geodetici, quelle dell' altro sistema sono piane e la superficie appartiene alla classe di Enneper.*

Dopo ciò ricorriamo al seguente teorema dovuto a **Brioschi**: *Se una linea di curvatura C di una superficie ha costante $= a$ il raggio di curvatura geodetica, essa è tracciata sopra una sfera di raggio a che taglia ortogonalmente la superficie.* Il teorema si stabilisce subito ricorrendo alla costruzione di Beltrami (§. 158) per il centro di curvatura geodetica, onde risulta che nella nostra ipotesi la sviluppabile circoscritta alla superficie deve ridursi ad un cono sul quale la curva C taglia ortogonalmente le generatrici, alla distanza a del vertice; per ciò la sfera descritta col centro in questo vertice e di raggio $= a$ contiene la curva C lungo la quale taglia ortogonalmente la superficie.

Dunque nelle superficie d' Enneper a curvatura costante, colle linee $v =$ cost.te di curvatura piane, le altre $u =$ cost.te sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie, e quindi i piani delle $v =$ cost.te passano per una retta fissa, che è il luogo dei centri delle sfere contenenti le linee u. In conclusione: *le superficie d' Enneper a curvatura costante appartengono alla classe di Joachimsthal.*

Ora, se si paragonano le formole colle quali abbiamo sopra definito intrinsecamente queste superficie con quelle generali (§. 193) per le superficie di Joachimsthal si vede che bastano quadrature per ottenere l' identificazione; anzi più in generale è facile provare che: *Se di una superficie di Joachimsthal sono note la prima e la terza forma fondamentale, riferite alle linee di curvatura (u, v), la determinazione della superficie si effettua con quadrature* [1].

Nel caso delle superficie d' Enneper a curvatura costante queste quadrature portano alle funzioni ellittiche.

---

[1] V. la 2ª edizione di questo libro Vol. II. §. 333.

§. 254.

La trasformazione complementare per le superficie pseudosferiche.

Abbandoniamo queste ricerche sopra classi speciali di superficie a curvatura costante e volgiamoci a quella *teoria delle trasformazioni*, alla quale sono dovuti i più importanti progressi nello studio di queste superficie. Le trasformazioni di cui vogliamo ora occuparci sono di natura ben diversa, come già abbiamo accennato al §. 249, delle trasformazioni di Bonnet Lie, o della trasformazione di Hazzidakis.

Queste ultime, applicate ad una superficie a curvatura costante nota, ne fanno derivare soltanto un ciclo chiuso di ∞^1 tali superficie, sicchè la trasformazione di Bonnet Lie, ripetuta sopra una qualunque superficie del ciclo, conduce ad un'altra superficie del ciclo stesso ; invece le nuove trasformazioni in vista permettono di dedurre sempre nuove superficie, partendo da una iniziale nota, e introducono nelle corrispondenti soluzioni delle equazioni fondamentali (II), (III) (§§. 245, 246) un numero arbitrario di costanti arbitrarie essenziali. Esse costituiscono in sostanza dei metodi di *integrazione successiva ed illimitata* per queste equazioni, metodi che si estendono poi a moltissimi altri problemi di geometria infinitesimale, come vedremo in seguito.

La prima di queste trasformazioni che si conobbe si riferisce alle superficie pseudosferiche e porta il nome di *trasformazione complementare* [1]. La proposizione fondamentale relativa è già stata stabilita al §. 170 nel teorema :

Se sopra una superficie pseudosferica si considera un qualunque sistema di ∞^1 oricicli geodeticamente paralleli, il luogo dei loro centri di curvatura geodetica è una nuova superficie pseudosferica (dello stesso raggio).

Colle nozioni di geometria pseudosferica (non-euclidea), acquistate al Capitolo precedente, possiamo formulare il risultato colla costruzione : *Sopra una superficie pseudosferica S di raggio R si tracci un qualunque sistema ∞^1 di geodetiche g parallele, nel senso non euclideo, e condotte le ∞^2 tangenti a queste geodetiche sopra ciascuna di essa, a partire dal punto M di contatto e nel verso stesso del parallelismo, si stacchi un segmento costante $\overline{MM'} = R$; la superficie S' luogo degli estremi è un'altra superficie pseudosferica dello stesso raggio R.*

Sappiamo inoltre che le due superficie pseudosferiche complementari S, S' si trovano nelle medesime condizioni e formano le due falde dell'evoluta di una superficie Σ con

$$r_1 - r_2 = R,$$

le cui normali sono le ∞^2 tangenti costruite alle geodetiche g di S, e per la medesima ragione inviluppano pure sopra S' un sistema ∞^1 di geodetiche g' di S' parallele nel senso non-euclideo [1]. Ricordiamo inoltre, dai §§ 160, 161, 185, che nella corrispondenza fra le due superficie complementari S, S' hanno luogo le seguenti ulteriori proprietà :

a) *Sopra S, S' si corrispondono le linee di curvatura.*
b) *si corrispondono le linee asintotiche (i sistemi coniugati).*
c) *la corrispondenza fra le asintotiche ha luogo per archi eguali.*

[1] Questa trasformazione venne introdotta nella tesi d'abilitazione dell'autore : *Ricerche sulle superficie a curvatura costante.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa t. II) e Math. Annalen Bd. XVI (1880). — Per le relazioni cogli antecedenti risultati dovuti a Ribaucour Cf. §. 257.

§. 255.

Le formole per la trasformazione complementare riferite alle linee di curvatura.

Andiamo ora a ricercare le formole per la trasformazione complementare riferendo la superficie S pseudosferica iniziale alle sue linee di curvatura (§. 245); e per questo conduciamo in ogni punto $M \equiv (u, v)$ di S un segmento $\overline{MM'} = R$ tangente alla superficie, cercando di determinarne *l'orientazione* in guisa che la superficie S' luogo degli estremi M' tocchi alla sua volta in M' il detto segmento, ed abbia la sua normale (perpendicolare al detto segmento) diretta nel piano tangente di S. Noi sappiamo già che questo è possibile in

[1] A scanso di equivoci è bene ricordare che queste geodetiche parallele di S' *non corrispondono* alle geodetiche g di S, sibbene alle loro linee *a tangenti coniugate.*

∞^1 modi, ma i calcoli seguenti ne daranno una nuova conferma e ne risulteranno nuovamente dimostrate tutte le proprietà a), b), c) segnalate al paragrafo precedente.

Assumiamo come incognita l'angolo $\varphi = \varphi(u, v)$ d'inclinazione del supposto segmento MM′ sulle linee di curvatura $r = \text{cost.}^{te}$ di S, sicchè i coseni di direzione ξ, η, ζ del detto segmento MM′ (raggio della congruenza pseudosferica) saranno

$$(37)\quad \xi = \cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2, \quad \eta = \cos\varphi\, Y_1 + \operatorname{sen}\varphi\, Y_2, \quad \zeta = \cos\varphi\, Z_1 + \operatorname{sen}\varphi\, Z_2$$

e le coordinate x', y', z' di M′ saranno

$$(38)\qquad x' = x + R\xi, \quad y' = y + R\eta, \quad z' = z + R\zeta$$

ovvero

$$(38^*)\qquad x' = x + R(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2), \text{ ecc.}$$

le quali formole daranno le equazioni parametriche della superficie S′.

Derivando rapporto ad u, v, colle formole del quadro (A) §. 245 (pag. 674), troviamo

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = R\left\{\left[\cos\theta - \operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right] X_1 + \cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right) X_2 - \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, X_3\right\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = R\left\{ -\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) X_1 + \left[\operatorname{sen}\theta + \cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right] X_2 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta\, X_3\right\}. \end{cases}$$

Indicando con accenti le quantità relative alla superficie S′, dobbiamo avere per ipotesi che i coseni di direzione

$$X_3', \quad Y_3', \quad Z_3'$$

della sua normale debbono essere dati dalla formola

$$(39^*)\qquad X_3' = \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2,$$

e dalle altre due analoghe. Per ciò debbono verificarsi le due condizioni

$$S\, X_3' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad S\, X_3' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

le quali, calcolate colle precedenti, dànno subito il sistema fondamentale del primo ordine cui deve soddisfare la funzione incognita φ

$$(IV)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni date la prima volta da Darboux, come espressione analitica della trasformazione complementare. Si osservi subito che il sistema (IV), o l'equazione a differenziali totali equivalente per la funzione incognita φ

$$(IV^*)\quad d\varphi + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi\right) du + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right) dv = 0$$

è completamente integrabile, appunto in grazia della equazione (II) cui soddisfa θ

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta;$$

ed anzi se si deriva la prima delle (IV) rapporto ad u, la seconda rapporto a v e si sottrae, viene ad eliminarsi θ, e si vede che la funzione φ è alla sua volta una soluzione della medesima equazione (II)

$$(40)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.$$

Inoltre è da osservare che prendendo per incognita in luogo di φ

$$\Lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

la (IV*) assume in Λ la forma di Riccati, e basta quindi conoscerne una soluzione particolare per dedurne la generale con quadrature.

§. 256.

Verifiche delle proprietà della trasformazione complementare.

Supponiamo che per φ sia presa una delle ∞^1 soluzioni delle (IV), e andiamo a verificare che la superficie S′, definita parametricamente dalle (38), è pseudosferica dello stesso raggio R e gode di tutte le altre proprietà sopra segnalate.

Intanto le (39), osservando le (IV), dànno

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \mathrm{R}\cos\varphi\,\{\cos\theta\,(\cos\varphi\,\mathrm{X}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{X}_2) - \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{X}_3\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi\,\{\operatorname{sen}\theta\,(\cos\varphi\,\mathrm{X}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{X}_2) + \cos\theta\,\mathrm{X}_3\}, \end{cases}$$

da cui

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{R}^2\cos^2\varphi, \quad \mathrm{S}\,\frac{\partial x'}{\partial u}\,\frac{\partial x'}{\partial v} = 0, \quad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{R}^2\operatorname{sen}^2\varphi,$$

e per l' elemento lineare di S′

$$(42)\qquad ds'^2 = \mathrm{R}^2\,(\cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2).$$

Siccome φ soddisfa alla (III) (alla (40)), resta già confermato che la S′ è pseudosferica dello stesso raggio R. Se ora deriviamo rapporto ad u, v i valori (39*) di X_3', Y_3', Z_3', avendo riguardo alle (IV) ed alle (A) §. 245, troviamo subito le formole

$$\frac{\partial \mathrm{X}_3'}{\partial u} = \frac{1}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_3'}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\cot\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial v},$$

le quali dimostrano: 1° *che le linee (u, v) sono anche sulla* S′ *linee di curvatura, 2° che i raggi principali* r_1', r_2' *della* S′ *sono*

$$r_1' = -\mathrm{R}\operatorname{tg}\varphi, \quad r_2' = \mathrm{R}\cot\varphi,$$

da cui nuovamente $r_1'\,r_2' = -\mathrm{R}^2$.

Così è confermata la proprietà *a)* §. 254, e si vede altresì che *hanno pur luogo le b) c), perchè le linee asintotiche* $u + v = \text{cost.}^{te}$ $u - v = \text{cost.}^{te}$ si corrispondono su S, S′ ed hanno archi di eguale lunghezza.

Dalle (41) deduciamo le formole che definiscono i coseni delle direzioni principali X_1', X_2' per la S_1' alle quali aggiungiamo le (39) per le X_3' ed abbiamo il quadro

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1' = \cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{X}_1 + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{X}_2 - \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{X}_3 \\ \mathrm{X}_2' = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\mathrm{X}_1 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{X}_2 + \cos\theta\,\mathrm{X}_3 \\ \mathrm{X}_3' = \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{X}_1 - \cos\varphi\,\mathrm{X}_2. \end{cases}$$

Se ora con (x_1, y_1, z_1) indichiamo le coordinate del primo centro di curvatura M_1 di S e con (x_2, y_2, z_2) quelle del secondo M_2 abbiamo

$$x_1 = x + \mathrm{R}\operatorname{tg}\theta\,\mathrm{X}_3, \quad x_2 = x - \mathrm{R}\cot\theta\,\mathrm{X}_3, \text{ ecc.}$$

onde seguono le formole

$$x' - x_1 = \frac{\mathrm{R}}{\cos\theta}\,\mathrm{X}_1', \quad x' - x_2 = \frac{\mathrm{R}}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{X}_2',$$

che ci esprimono il teorema seguente: *Le tangenti alle linee di curvatura* $v = \text{cost.}^{te}$ *della complementare* S′ *di* S *incontrano la normale di quest' ultima rispettivamente nel primo e secondo centro di curvatura di* S. E così pure i due centri di curvatura della S′ sono nei due punti d' incontro della normale di S′ colle tangenti alle linee di curvatura di S.

Si osservi ora che le formole (IV) di Darboux si potevano anche scrivere subito come caso particolare delle formole (H) §. 239 per l' angolo φ d' inclinazione sulle $v = \text{cost.}^{te}$ delle geodetiche di un sistema parallelo nel senso non-euclideo e nel debito verso.

Tutto ciò si conferma anche colle formole seguenti. Le linee inviluppate sopra S dai raggi MM′ della congruenza hanno per equazione differenziale

$$(43)\qquad \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,du - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,dv = 0$$

e l' equazione differenziale delle loro trajettorie ortogonali (oricicli paralleli) è quindi

$$\cos\theta\cos\varphi\,du + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv = 0. \tag{44}$$

A causa delle (IV), il primo membro di questa è un differenziale esatto, e posto

$$\psi = \int (\cos\theta\cos\varphi\,du + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv),$$

pei parametri differenziali di ψ (rispetto al ds^2 di S) si trova

$$\Delta_1\psi = 1, \quad \Delta_2\psi = -1,$$

quindi (pag. 131) si ha un fattore integrante del primo membro della (43) dato da e^{ψ} come si verifica anche subito direttamente. Ponendo

$$\tau = \int e^{\psi}\,(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,du - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,dv),$$

ne risulta

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\varphi\,du + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv = d\psi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,du - \operatorname{sen}\theta\cos\psi\,dv = e^{-\psi}\,d\tau, \end{cases}$$

onde quadrando e sommando

$$ds^2 = \cos^2\theta\,du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,dv^2 = d\psi^2 + e^{-2\psi}\,d\tau^2, \tag{45}$$

formola che pone appunto in evidenza il ds^2 della S riferito alle geodetiche parallele $\tau = \text{cost.}^{te}$ ed oricicli ortogonali $\psi = \text{cost.}^{te}$.

Sulla superficie complementare S′ l'equazione differenziale delle geodetiche parallele, caustiche della congruenza, è invece

$$\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,du - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv = 0,$$

e qui il primo membro ammette il fattore integrante $e^{-\psi}$. Posto

$$\tau_1 = \int e^{-\psi}\,(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,du - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv),$$

ne viene la formola analoga alla (45)

$$ds'^2 = \cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2 = d\psi^2 + e^{2\psi}\,d\tau_1^2. \tag{45*}$$

In fine se calcoliamo le derivate rapporto ad u, v dei coseni di direzione ξ, η, ζ dei raggi della congruenza (normale) pseudosferica, abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = -\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi\,X_1 + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,X_2 - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,X_3 \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,X_1 - \operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi\,X_2 + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,X_3 \end{cases}$$

e quindi

$$d\xi^2 + d\eta_1^2 + d\zeta^2 = (\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,du - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,dv)^2 + (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,du - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,dv)^2,$$

od anche

$$d\xi^2 + d\eta_1^2 + d\zeta^2 = e^{-2\psi}\,d\tau^2 + e^{2\psi}\,d\tau_1^2.$$

Questa formola ci dà l'elemento lineare sferico rappresentativo della congruenza pseudosferica normale riferito alle immagini τ, τ_1 delle sviluppabili. Queste linee, conformemente alle osservazioni in fine al §. 182, dividono la sfera in rettangoli infinitesimi d'area costante; inversamente ogni sistema ortogonale sulla sfera dotato di questa proprietà si ottiene colle formole superiori.

§. 257.

I sistemi ciclici di Ribaucour di raggio costante.

Dalle proprietà della trasformazione complementare sopra studiate risulta ora evidente che le ∞^1 superficie S′ complementari di una medesima superficie pseudosferica S hanno per trajettorie ortogonali i circoli di raggio R tracciati nei piani tangenti di S col centro nel punto di contatto. Ora dimostriamo che queste ∞^1 superficie, insieme colle superficie luogo dei detti circoli associati lungo le linee di curvatura della S, superficie che diremo rispettivamente Σ_1, Σ_2, formano un *sistema triplo ortogonale*. Intanto la Σ_1 luogo dei circoli C lungo una linea di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$ di S ammette questi circoli per linee di curvatura (§. 194), e la sua normale in ogni punto M′ di C è la congiungente M′ col primo centro di curvatura M_1 della S in M, cioè è precisamente (§. prec.^{te}) la tangente alla linea di curvatura $v = \text{cost.}^{te}$ della S′ uscente da M′.

Per la stessa ragione la normale in M′ alla Σ_2 è l'altra tangente principale $M'M_2$ della S′, dopo di che è manifesto che le tre super-

ficie S', Σ_1, Σ_2 uscenti da M' s'incontrano ortogonalmente, le loro tre normali formando un triedro trirettangolo. Inoltre, siccome alle linee di curvatura di S corrispondono le linee di curvatura delle S', si vede che le tre serie di superficie S', Σ_1, Σ_2 si tagliano mutuamente lungo le linee di curvatura, conforme al celebre teorema di Dupin sui sistemi tripli ortogonali, di cui ci occuperemo diffusamente in seguito.

Questi singolari sistemi tripli ortogonali, con una serie di superficie pseudosferiche di raggio R aventi per trajettorie ortogonali dei circoli di questo raggio, furono scoperti da Ribaucour nel 1870 e si diranno: *sistemi ciclici di Ribaucour di raggio costante.*

Alle considerazioni geometriche superiori si può anche sostituire un breve calcolo, osservando che se si indica con w la costante arbitraria o parametro che figura nella soluzione φ delle (IV), le formole (38*) vengono a definire le coordinate x', y', z' di un punto dello spazio espresso per le tre variabili indipendenti u, v, w. Ma allora, se alle formole (41) si associano le altre che dànno le derivate di x', y', z' rapporto a w:

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = \mathrm{R}\left(-\operatorname{sen}\varphi\, \mathrm{X}_1 - \cos\varphi\, \mathrm{X}_2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

e si calcola l'elemento lineare ds dello spazio in coordinate u, v, w da

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

si trova subito

$$ds^2 = \mathrm{R}^2\left\{\cos^2\varphi\, du^2 - \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2\right\},$$

formola che pone appunto in evidenza il sistema triplo ortogonale (u, v, w).

Un esempio particolare notevole di questi sistemi ciclici di Ribaucour si ottiene assumendo per superficie pseudosferica iniziale S di raggio R una qualunque dei tre tipi di rotazione.

Le complementari S' di S sono le trajettorie ortogonali dei circoli C di raggio R tracciati nei piani tangenti di S col centro nel punto di contatto, e le superficie Σ_1, Σ_2, che completano colle S' il sistema triplo ortogonale, sono i luoghi dei circoli C lungo i paralleli ed i meridiani di S. Siccome l'intero sistema ciclico ritorna in sè per rotazione attorno all'asse, è evidente che in questo caso tutte

le superficie S' sono congruenti fra loro, (1) ed è pure evidente che ciascuna superficie Σ_2 è una sfera col centro sull'asse (nel centro di curvatura relativo al parallelo). Dunque la S' ha linee di curvatura di un sistema (le $u =$ cost.te) tracciate sopra sfere che tagliano ad angolo retto la S' ed hanno il centro sull'asse, indi le linee di curvatura $v =$ cost.te in piani per l'asse. Vediamo così che: *Le superficie complementari delle superficie pseudosferiche di rotazione appartengono alla classe di Enneper.* È però visibile che non esauriscono la classe, poichè dipendono solo da una costante arbitraria (Cf. §. 251).

§. 258.

Applicazione successiva della trasformazione complementare.

Per trovare le ∞^1 trasformate complementari S' di una data superficie pseudosferica S, basta conoscere della S le linee geodetiche, o ciò che è lo stesso avere integrato l'equazione di Riccati da cui la ricerca dipende (§. 239), ovvero il sistema (IV) §. 255 di Darboux. Ma prendiamo ora una qualunque di queste complementari, sia la S', e applichiamo nuovamente la trasformazione complementare; siccome fra le complementari di S' vi è la S iniziale, della relativa equazione di Riccati conosciamo una soluzione particolare, e la generale si ha quindi con quadrature. Al medesimo risultato si arriva osservando che al sistema di oricicli paralleli su S corrisponde un altro tale sistema sopra S' e bastano quindi quadrature per trovare le geodetiche su S', (2) dopo di che ci troviamo con S' nelle medesime condizioni come prima con S. Ne concludiamo che: *L'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione complementare richiede soltanto successive quadrature.* Per tal modo, partendo da una soluzione nota $\vartheta = \vartheta(u, v)$ dell'equazione fondamentale (II), *con quadrature,* se ne ottengono delle nuove contenenti un numero grande ad arbitrio di *costanti essenziali.* Il risultato, già a questo punto notevole, verrà ulteriormente perfezionato nel Capitolo seguente.

Consideriamo ora in particolare la relazione fra due superficie pseudosferiche derivate l'una dall'altra per una *doppia* trasformazione complementare. Siano dunque S_1, S_2 due complementari di una

(1) Oppure si osservi che un sistema ∞^1 di geodetiche parallele (in senso non-euclideo) tracciato su S dà tutti gli altri per rotazione attorno all'asse.

(2) Le quadrature a ciò necessarie sono già date nelle formole al §. 256.

medesima S, e indichiamo con M_1, M_2, M una terna di punti corrispondenti di S_1, S_2, S. Le due normali in M_1, M_2 alle S_1, S_2, come tangenti in M_1, M_2 al cerchio di raggio R descritto nel piano tangente di S, col centro in M, s' incontrano in un punto $\bar{M}$, equidistante da M_1, M_2. Andiamo a dimostrare che: *La superficie* $\bar{S}$ *luogo del punto* $\bar{M}$ *è applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione.* Per questo osserviamo che i raggi MM_1, MM_2 delle rispettive congruenze pseudosferiche normali, di cui (S, S_1), (S, S_2) sono le falde focali, sono le tangenti a due diversi sistemi di geodetiche parallele su S, e vi è quindi una geodetica g di S appartenente ad ambedue i sistemi, cioè parallela in un verso alle prime, nel verso opposto alle seconde. Riferiamo la S al sistema delle geodetiche $v = \text{cost.}^{te}$ normali alla g ed alle loro trajettorie ortogonali, fra le quali la $u = 0$ sia la geodetica g, onde il ds^2 assumerà la forma iperbolica

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2. \tag{46}$$

Ora l'angolo M_1MM_2 è il doppio dell'angolo α di parallelismo relativo alla geodetica g ed al punto M, alla distanza geodetica u da g, e si ha quindi (§. 229)

$$\cos\alpha = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Avendo dunque indicato con M il punto d'incontro delle due normali in M_1, M_2 dal triangolo MM_1M rettangolo in M_1, col cateto $MM_1 = R$ e l'angolo in M eguale ad α, si ricava

$$MM = \frac{R}{\cos\alpha} = R \coth\left(\frac{u}{R}\right).$$

Ma appunto nella forma (46) del ds^2 la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ dei circoli geodetici $u = \text{cost.}^{te}$ è data da

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{R} \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right),$$

cioè si ha

$$\rho_u = -|MM|.$$

Di qui si vede che il punto $\bar{M}$ è precisamente il centro di curvatura geodetica della linea $u = \text{cost.}^{te}$ che passa per M, cioè la superficie è la complementare di S *rispetto alle geodetiche* $v = \text{cost.}^{te}$ normali alla geodetica g, e pei teoremi al §. 170 è quindi appunto applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione.

Si osservi ora che se col centro in $\bar{M}$ si descrive la sfera di raggio $\bar{M}M_1 = \bar{M}M_2 = R \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\dfrac{u}{R}}$ questa sfera tocca in M_1 la S_1, in M_2 la S_2, e d'altronde il suo raggio $r = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\dfrac{u}{R}}$ eguaglia precisamente il raggio r del parallelo della superficie logaritmica, (4) mentre la $\bar{S}$ è la più generale deformata di questa superficie. Vediamo adunque che: *Se nella superficie logaritmica di rotazione si descrivono le sfere che hanno i centri nei punti della superficie e toccano l'asse, indi si deforma comunque la superficie che seco trasporti le sfere, l'inviluppo di questa doppia infinità di sfere (congruenza) consta sempre di due superficie pseudosferiche* S_1, S_2 *complementari di una medesima.*

Si aggiunga poi che le asintotiche di S corrispondono tanto a quelle di S_1, S_2 come a quelle di $\bar{S}$, e per ciò: *Le asintotiche delle due falde* S_1, S_2 *dell'inviluppo di sfere corrispondono sempre alle asintotiche della superficie* $\bar{S}$ *luogo dei centri.* È questo un primo esempio di circostanze geometriche che vedremo verificarsi in altri casi analoghi.

§. 259.

Le complementari delle superficie d' Enneper.

Si è visto, al §. 257, che le complementari delle superficie pseudosferiche di rotazione sono tutte superficie d' Enneper, ed ora pro-

(4) Secondo la formola c) §. 170 il raggio r del parallelo della superficie logaritmica di rotazione è appunto

$$r = \frac{R}{\sqrt{\cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) - 1}} = \frac{R}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{R}\right)}$$

viamo che questa proprietà è *caratteristica* per le forme di rotazione. Supponiamo che della superficie pseudosferica S, definita da

$$ds^2 = R^2 (\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2) ,$$

tutte le complementari (1) S′ abbiano piane le linee di curvatura di un sistema, p. e. le v. Avremo allora (§. 251)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0 ,$$

equazione da aggiungersi alle equazioni (IV) di trasformazione, in virtù delle quali la condizione scritta diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \cot\varphi \operatorname{sen}\theta\right) = 0 ,$$

ed eseguendo le derivazioni col tener conto delle (IV) stesse e della (II), risulta

$$\cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 . \tag{47}$$

Ove questa non fosse un' identità in φ, darebbe al massimo *due* eventuali complementari di S colle linee v piane ; per ciò dovremo avere $\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0$, e viceversa in questo caso la condizione sarà soddisfatta. Ma, essendo θ una funzione di u, la S è di rotazione e le $u =$ cost.te ne sono i paralleli, dunque : *se tutte le complementari di una superficie* S *pseudosferica sono superficie d' Enneper, la* S *è di rotazione.*

Con metodo analogo possiamo trattare e risolvere il seguente problema :

Quali sono le superficie pseudosferiche di cui tutte le complementari hanno sferiche le linee di curvatura di un sistema ?

Secondo il risultato finale del §. 199, volendo scrivere che le superficie complementari S′ hanno sferiche le linee di curvatura $v =$ cost.te, dobbiamo porre la condizione

(1) Propriamente dalla dimostrazione nel testo risulta che se ciò accade per più di due complementari, accade per tutte.

$$\cot\varphi = \alpha + \beta \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v} ,$$

con α, β funzioni di v soltanto, che derivando rapporto ad u si mette sotto la forma equivalente

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0 . \tag{48}$$

Dovendo questa coesistere coll' altra che ne proviene per una nuova derivazione rapporto ad u avremo

$$\begin{gathered} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} , \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) , \qquad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \end{gathered} = 0 . \tag{49}$$

Viceversa da questa ultima si trae che sussiste la (48), oppure l' altra $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0$, sicchè la (49) esprime che le linee di curvatura $v =$ cost.te della S′ sono o sferiche o piane.

Ciò posto, sviluppando la (49) sostituendovi per $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ i valori tratti dalle (IV), si ottiene la equazione lineare in $\cos\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi$

$$A\cos\varphi + B\operatorname{sen}\varphi + C = 0 , \tag{50}$$

dove i coefficienti A, B, C hanno i valori seguenti :

$$\begin{cases} A = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\theta}{\partial v} + \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} \\ B = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \cos\theta\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v^2} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} \\ C = \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^3 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} \end{cases} .$$

La (50) dovendo essere un' identità, avremo necessariamente

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0. \ (^1)$$

Ma supposto $\frac{\partial\theta}{\partial u} \neq 0$ (altrimenti la S sarebbe di rotazione e torneremmo al primo caso), la condizione $A = 0$ equivale alla

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$$

la quale esprime che le linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$ della S sono piane. E siccome con $A = 0$ sono verificate anche le altre due $B = C = 0$, si vede che in tal caso tutte le S' avranno le linee v di curvatura o sferiche o piane; ma l' ultima circostanza potrà verificarsi al massimo per due delle complementari, se la S non è di rotazione. Vediamo intanto che: *le complementari di una superficie pseudosferica* S *hanno tutte sferiche le linee di curvatura u, quando la* S *ha le linee v piane* (è una superficie d' Enneper). Invece le linee di curvatura v delle S', corrispondenti alle piane di S non saranno, *in generale*, nè piane nè sferiche. Per altro è facile vedere che fra queste ∞^1 complementari della superficie S d' Enneper ve ne sono due (reali od immaginarie) colle linee di curvatura v piane. Per questo basta verificare, secondo i risultati ottenuti al principio del paragrafo, che i valori di φ tratti dalla (47) verificano le due equazioni (IV) di trasformazione. Per questo basta tener conto che, avendo la S le linee di curvatura v piane, si ha

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

ed allora derivando la (47) rapporto ad u, v, si vede che ne seguono appunto le (IV). Concludiamo quindi: *Ogni superficie pseudosferica d' Enneper possiede due complementari d' Enneper (reali od immaginarie); le altre complementari hanno soltanto sferiche le linee di curvatura di un sistema, quello corrispondente alle sferiche della superficie iniziale.*

Così abbiamo anche stabilita l' esistenza di superficie pseudosferiche con un sistema soltanto di linee di curvatura sferiche (2).

---

(1) Si osservi di nuovo che se la (49) non è un' identità due al massimo possono essere le complementari con linee v di curvatura sferiche (o piane).

(2) In generale le superficie pseudosferiche di questa specie sono state studiate dal DOBRINER (Acta Math. T. 9) che ne esprime le equazioni parametriche per funzioni θ di due variabili. Le superficie considerate nel testo ne sono un caso particolare.

CAPITOLO XVI.

La trasformazione di Bäcklund per le superficie a curvatura costante e il teorema di permutabilità.

La trasformazione di Bäcklund delle superficie pseudosferiche e le sue proprietà fondamentali. — Scorrimento delle reti di Tchebychef sulle superficie a curvatura costante. — Applicabilità speciale delle due falde di una congruenza pseudosferica. — Il teorema di permutabilità e le sue conseguenze. Composizione di trasformazioni opposte di Bäcklund reali o puramente immaginarie. — Trasformazioni (immaginarie) di Bäcklund per le deformate della sfera. — Il relativo teorema di permutabilità. — Composizione in trasformazioni reali. — Relazione colle deformate delle quadriche rotonde (ellissoide allungato e iperboloide a due falde). — Applicazioni del teorema di permutabilità.

§. 260.

Preliminari sulla trasformazione di Bäcklund.

La trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche venne felicemente generalizzata da Bäcklund nel 1883 colla trasformazione che porta il suo nome e di cui ora andiamo ad occuparci.

Se ritorniamo alla trasformazione complementare, vediamo che due superficie pseudosferiche complementari S, S' non sono altro che le due falde focali di una congruenza pseudosferica *normale*, sicchè l' esistenza delle trasformazioni complementari per una superficie pseudosferica S corrisponde alla proprietà seguente:

Ogni superficie pseudosferica S *è la prima falda focale di* ∞^1 *congruenze pseudosferiche normali, le cui seconde falde focali sono le superficie pseudosferiche complementari della* S.

Ora, insieme alle congruenze pseudosferiche normali, esistono, come abbiamo dimostrato ai §§. 182, 185, le congruenze pseudosferiche *generali* nelle quali è costante la distanza R dei punti limiti ed insieme anche l' angolo ω dei piani focali; le due falde focali della congruenza sono superficie pseudosferiche di raggio R. Nel seguito

indicheremo sempre con σ il complemento dell'angolo ω dei piani focali

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

sicchè la distanza dei fuochi su ogni raggio sarà $R\cos\sigma$. Ora l'esistenza delle nuove trasformazioni (di Bäcklund) dipende dal seguente teorema col quale si estende a tutte le congruenze pseudosferiche la proprietà sopra rilevata per il caso particolare delle congruenze normali:

Data una qualunque superficie pseudosferica S, ***e fissato ad arbitrio l'angolo*** $\omega = \frac{\pi}{2} - \sigma$ ***dei piani focali, esistono*** ∞^1 ***congruenze pseudosferiche aventi*** S ***per prima falda focale, e l'angolo*** ω ***fissato per angolo dei piani focali.***

Le seconde falde focali S' di queste congruenze saranno altrettante nuove superficie pseudosferiche dello stesso raggio R, e le diremo derivate dalla primitiva per *trasformazione* B_σ *di Bäcklund*, ponendo in evidenza la costante σ, che è il complemento dell'angolo dei piani focali. L'angolo *acuto* σ potrà anche scendere a zero, e la corrispondente trasformazione B_0 sarà allora manifestamente la trasformazione complementare.

Noi andiamo ora a stabilire l'effettiva esistenza delle trasformazioni di Bäcklund B_σ, cercando le formole che, nell'ipotesi della loro esistenza, debbono definirle e sulle formole così trovate sarà facile effettuare tutte le verifiche richieste. Basterà per questo riprendere i calcoli eseguiti al §. 255 per la trasformazione complementare B_0, colle generalizzazioni opportune.

In ogni punto $M \equiv (x, y, z)$ di S conduciamo, nel piano tangente, un segmento costante

$$\overline{MM'} = R\cos\sigma,$$

la cui inclinazione sulla linea di curvatura $v = \text{cost.}^{te}$ indicheremo con $\varphi = \varphi(u, v)$; le coordinate x', y', z' dell'estremo M' saranno

$$x' = x + R\cos\sigma\,(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2), \tag{1}$$

colle analoghe per gli altri due assi, e queste formole daranno le equazioni parametriche della superficie S' luogo degli estremi M'.

Ora per soddisfare a tutte le nostre condizioni, sarà ***necessario e sufficiente*** assoggettare la funzione φ alle condizioni seguenti:

1.° *il segmento* $MM' = R\cos\sigma$ *tocchi in* M' *la superficie* S'

2.° *le due normali in* M, M' *alle* S, S' *rispettivamente formino fra loro l'angolo costante* $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Per tal modo infatti la congruenza generata dalle rette MM' sarà pseudosferica, cogli elementi prescritti, ed avrà S per prima falda focale, S' per seconda.

Indicando con accenti le quantità relative alla S', i coseni di direzione della sua normale X_3', Y_3', Z_3' dovranno calcolarsi dalle due equazioni

$$S X_3'(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2) = 0 \qquad S X_3' X_3 = \pm\operatorname{sen}\sigma$$

le quali traducono appunto le due condizioni enunciate, e noi prenderemo senz'altro, come è lecito

$$X_3' = \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2) - \operatorname{sen}\sigma\, X_3. \tag{2}$$

Ed ora non resta più altro che assoggettare φ a soddisfare alle due condizioni

$$S X_3' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \qquad S X_3' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

le quali esprimono appunto che X_3', Y_3', Z_3' sono i coseni di direzione della normale alla S'.

Procedendo come al §. 225, deriviamo in primo luogo le (1) rapporto ad u, v, avendo riguardo alle formole del quadro (A) §. 245 (pag. 672); troveremo:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= R\left\{\left[\cos\theta - \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right] X_1 + \cos\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) X_2 - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \cos\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, X_3\right\}\\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= R\left\{-\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) X_1 + \left[\operatorname{sen}\theta + \cos\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right] X_2 + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, X_3\right\},
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

e le (3), calcolate, ci danno per l'incognita φ il sistema simultaneo

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=-\dfrac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=-\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\,. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni fondamentali per la trasformazione B_σ di Bäcklund, (1) e per $\sigma=0$ si riconducono alle (IV) §. 255 della trasformazione complementare B_σ. Come in questo caso particolare, anche per σ qualunque le (I) formano un sistema *completamente integrabile*, a causa della equazione cui soddisfa θ

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,,$$

e ne risulta, come al §. 255, che φ ne è una nuova soluzione, cioè

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,.$$

Prendendo per incognita

$$A=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

si ha nuovamente un'equazione a differenziali totali per A del tipo di Riccati e valgono quindi le medesime conclusioni come al §. 255.

Così è dimostrata l'esistenza delle trasformazioni di Bäcklund B_σ secondo l'enunciato del teorema, e si vede che la soluzione φ della (I) contiene una costante arbitraria c, oltre la σ, scriviamo

$$\varphi=\varphi(u,v;\sigma,c),$$

ciò che si può esprimere geometricamente così:

Ogni superficie pseudosferica S *possiede una doppia infinità di superficie pseudosferiche dello stesso raggio* R *contigue alla* S *per trasformazione di Bäcklund; per ottenerne una basta fissare arbitrariamente, in un punto iniziale* M *di* S *il relativo segmento focale* $\overline{MM'}\leq R$ *in grandezza e posizione.*

(1) Sotto questa forma vennero date nella memoria dell'autore: *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten*. Annali di matematica Serie II T. XIV (1886).

§. 261.

Verifiche della proprietà della trasformazione di Bäcklund.

Noi potremmo ora invocare le proprietà già riconosciute al §. 185 per la corrispondenza fra i punti delle due falde focali di una congruenza pseudosferica, ma sarà opportuno procedere qui ad una verifica colle attuali formole. Si osservi in primo luogo che le (4), avuto riguardo alle (1), diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u}=R\cos\varphi\,\{(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,X_1+(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi+ \\ \qquad +\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,X_2-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,X_3\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v}=R\operatorname{sen}\varphi\,\{(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,X_1+(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi- \\ \qquad -\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,X_2+\cos\sigma\cos\theta\,X_3\}\,, \end{cases}$$

per cui l'elemento lineare ds' della S' è dato da

$$(6)\qquad ds'^2=R^2(\cos^2\varphi\,du^2+\operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2)\,,$$

e soddisfacendo φ alla (5) ne viene che la S' è pseudosferica di raggio R. Ma inoltre: *le linee* (u, v) *sono linee di curvatura della* S'. Derivando infatti le (2) rapporto ad u, v troviamo

$$\frac{\partial X_3'}{\partial u}=\frac{1}{R}\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial u}\,,\qquad \frac{\partial X_3'}{\partial v}=-\frac{1}{R}\cot\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial v}\,,$$

le quali provano che le u, v sono le linee di curvatura su S'; di più i raggi principali di curvatura sono dati da

$$r_1'=-R\operatorname{tg}\varphi\,,\qquad r_2'=R\cot\varphi\,,$$

onde risulta nuovamente $r_1'r_2'=-R^2$. Inoltre sulle S, S' si corrispondono le linee asintotiche $u+v=\text{cost.}^{te}$, $u-v=\text{cost.}^{te}$ *per archi eguali*, come già si è riconosciuto alla fine del §. 185.

Un' ulteriore interessante proprietà geometrica della trasformazione di Bäcklund che generalizza quella già segnalata al §. 256 per la trasformazione complementare, è data dal seguente teorema osservato dal Darboux :

In ogni coppia S, S' di superficie pseudosferiche, trasformate di Bäcklund l' una dell' altra, la normale di una qualunque di esse incontra nei suoi due centri principali di curvatura i due piani principali nel punto corrispondente dell' altra.

Osserviamo che pei coseni delle due direzioni principali di S', e per quelli della normale risultano le formole

$$(7)\quad \begin{cases} X_1' = (\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,X_1 + (\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \\ \qquad + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,X_2 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,X_3 \\ X_2' = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,X_1 + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \\ \qquad - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,X_2 + \cos\sigma\cos\theta\,X_3 \end{cases}$$

$$X_3' = \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\,X_2 - \operatorname{sen}\sigma\,X_3 .$$

Siano ora M, M' due punti corrispondenti di S, S' e indichiamo con M_1, M_2 i due centri principali di curvatura sulla normale in M alla S, relativi alle rispettive linee di curvatura $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$, e similmente con M_1', M_2' quelli omologhi sulla normale in M' alla S'. Indichiamo anche con S_1, S_2 le due falde dell' evoluta di S, luoghi rispettivamente di M_1, M_2, e con S_1', S_2' le analoghe per S'; sappiamo che queste quattro superficie S_1, S_2; S_1', S_2' sono tutte applicabili sul catenoide e si corrispondono punto a punto con conservazione delle asintotiche (corrispondenti a quelle di S, S'). Ciò ricordato, cerchiamo p. e. in quale punto M la normale alla S' in M' incontra il *primo* piano principale di S in M, cioè (§. 154) il piano tangente in M_1 alla S_1, i coseni di direzione della cui normale (§. 157) sono dati da X_2, Y_2, Z_2. Se prendiamo per incognita T il valore algebrico del tratto $T = \overline{M}\,M'$, le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ di M saranno

$$\bar{x} = x' - T\,X_3', \quad \bar{y} = y' - T\,Y_3', \quad \bar{z} = z' - T\,Z_3',$$

e la congiungente $\overline{M}\,M$ avrà coseni di direzione proporzionali a

$$x' - x - T\,X_3', \quad y' - y - T\,Y_3', \quad z' - z - T\,Z_3'.$$

Questa direzione deve essere perpendicolare alla X_2, Y_2, Z_2, onde rilevasi

$$T\,S\,X_2 X_3' = S\,X_2(x' - x),$$

indi per le (1), (2)

$$T = -R\,tg\,\varphi,$$

valore che combina precisamente con r_1', dunque la normale in M' alla S' incontra il primo piano principale di S in M nel primo centro di curvatura M_1', similmente il secondo nel secondo M_2'. E lo stesso vale naturalmente per la normale di S in M, che incontrerà i due piani principali di S' in M_1, e in M_2.

Risulta di qui che, se si considera il quadrilatero $M_1 M_2 M_2' M_1'$, ciascun suo lato descrive una congruenza i cui due fuochi sono i due vertici e le due relative falde focali sono superficie applicabili sul catenoide, e sulle due falde focali di ciascuna di queste congruenze si corrispondono le asintotiche (congruenze W).

§. 262.

Le trasformate di Bäcklund in coordinate asintotiche.

Le formole (I) per la trasformazione B_σ di Bäcklund assumono la loro forma più semplice se ai parametri u, v delle linee di curvatura si sostituiscono quelli α, β delle linee asintotiche, secondo le formole (§. 245)

$$u = \alpha + \beta, \qquad v = \alpha - \beta,$$

ovvero

$$\alpha = \frac{1}{2}(u + v), \qquad \beta = \frac{1}{2}(u - v),$$

dalle quali risulta

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}.$$

Sommando e sottraendo le (I), queste si possono sostituire colle equivalenti

$$(7^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) \\ \dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi+\theta), \end{cases}$$

alle quali, introducendo al posto di σ la costante arbitraria

$$k = \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{k} = \frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma},$$

daremo la forma definitiva

$$(II)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = k\operatorname{sen}(\varphi-\theta) \\ \dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k}\operatorname{sen}(\varphi+\theta). \end{cases}$$

Su questa forma delle equazioni di trasformazione si riconoscono, nel modo più semplice, le proprietà analitiche già osservate al §. 260 in coordinate u, v.

Si otterrà in particolare la trasformazione complementare B_0 dalle (II), ponendovi $k=1$; e la circostanza che a questo caso si riduce il caso generale (II), includendo le costanti k, $\frac{1}{k}$ nei rispettivi parametri α, β, dimostra già che la trasformazione generale B_σ di Bäcklund si riduce a quella complementare se si fa uso opportuno della trasformazione di Lie (§. 249). Per formulare in modo più preciso questa relazione, supponiamo le soluzioni φ, θ della equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2(2\theta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen} 2\theta,$$

legate dalla trasformazione complementare B_0

$$\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = \operatorname{sen}(\varphi-\theta), \qquad \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = \operatorname{sen}(\varphi+\theta),$$

e passiamo dalle soluzioni θ, φ alle nuove Θ, Φ colla trasformazione di Lie:

$$\begin{cases} \Theta(\alpha,\beta) = \theta\left(k\alpha, \dfrac{\beta}{k}\right) \\ \Phi(\alpha,\beta) = \varphi\left(k\alpha, \dfrac{\beta}{k}\right). \end{cases}$$

Manifestamente queste due nuove soluzioni Θ, Φ saranno legate dalla trasformazione B_σ di Bäcklund:

$$\frac{\partial(\Phi+\Theta)}{\partial\alpha} = k\operatorname{sen}(\Phi-\Theta), \qquad \frac{\partial(\Phi-\Theta)}{\partial\beta} = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(\Phi+\Theta)$$

$$\left(k = \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\right).$$

Il passaggio da Θ a Φ, che si compie colla trasformazione di Bäcklund B_σ, si può decomporre nei tre successivi: 1.° da Θ a θ con una trasformazione di Lie, che indicheremo con L; 2.° da θ a φ colla trasformazione complementare B_0: 3.° da φ a Φ colla trasformazione inversa L^{-1} di Lie. Possiamo dunque scrivere simbolicamente

$$(8)\qquad B_\sigma = L B_0 L^{-1},$$

o in parole: *La trasformazione di Bäcklund è la trasformata della complementare per mezzo di una trasformazione di Lie.*

Se per tal modo, dal punto di vista analitico, la trasformazione di Bäcklund si riduce a quella complementare, preceduta e seguita da due trasformazioni di Lie inverse l'una dell'altra, non se ne concluda che sia inutile lo studio diretto della trasformazione di Bäcklund. Questa, come la complementare, ha un significato ben preciso geometrico dipendente dalle congruenze pseudosferiche, mentre nulla di simile ha luogo per la trasformazione di Lie il cui significato appare soltanto analitico (1). In ogni modo la decomposi-

(1) Le considerazioni nel testo troveranno un'ampia giustificazione nelle ricerche future del Vol. II sui sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie pseudosferiche, dove si vedrà che la trasformazione di Bäcklund compie un ufficio ben più importante della complementare. (V.i anche le prossime ricerche sul teorema di permutabilità §§. 266 s. s.).

zione segnalata nella formola (8) è per sè notevole e può presentarsi sotto quest'altra forma: *Le più generali congruenze pseudosferiche si ottengono applicando la trasformazione di Lie alle congruenze pseudosferiche normali.*

§. 263.

La trasformazione di Bäcklund nell'immagine sferica.

Siamo condotti a nuove interessanti osservazioni sulla trasformazione di Bäcklund, considerandone l'effetto *sull'immagine sferica* delle asintotiche delle superficie pseudosferiche. Siano S, S' due superficie pseudosferiche, trasformate l'una dell'altra per trasformazione B_σ di Bäcklund, e consideriamo sulla sfera le due reti (α, β) di Tchebychef immagini delle loro rispettive asintotiche. Queste due reti sulla sfera si corrispondono punto per punto in modo che risultano soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° Se un punto P della prima rete descrive una linea $\alpha = \text{cost.}^{te}$ (o $\beta = \text{cost.}^{te}$), il punto P' corrispondente della seconda descrive la corrispondente della seconda *per archi eguali*,

2.° Due punti corrispondenti P P' delle due reti si trovano alla distanza sferica costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Diremo per ciò che le due reti di Tchebychef sulla sfera sono applicabili, mentre ogni punto si trasporta a distanza geodetica costante, e diremo anche che si passa da una rete all'altra *per uno scorrimento*. Ora domandiamo: Esistono altri scorrimenti di reti di Tchebychef in geometria sferica? La risposta è negativa, come ora si vedrà, purchè si prescinda dal caso ovvio in cui ogni punto P vada nel punto diametralmente opposto P'. Dimostriamo adunque: *Se due reti di Tchebychef sulla sfera si corrispondono punto per punto in guisa che le linee delle due reti si corrispondano per archi eguali e le coppie di punti corrispondenti* P, P' *siano a distanza sferica costante, le due reti sono le immagini delle asintotiche di due superficie pseudosferiche* S, S' *contigue per trasformazione di Bäcklund.*

Sotto altra forma possiamo enunciare il teorema così: Se due superficie pseudosferiche S, S' di egual raggio si corrispondono punto per punto in guisa che siano soddisfatte le condizioni seguenti *a)* le asintotiche si corrispondano ad archi uguali, *b)* le normali in punti corrispondenti facciano angolo costante, basta una trasla zione di una delle due superficie per renderle falde focali di una congruenza pseudosferica.

Per dimostrarlo scriviamo il ds^2 sferico riferito alla prima rete di Tchebychef (α, β)

$$ds^2 = d\alpha^2 - 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2,$$

ovvero riferendolo invece alle curve diagonali (u, v) (bisettrici della rete):

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2,$$

ed avremo così le immagini sferiche delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica S per la quale varranno le formole del §. 255, in particolare quelle del quadro (A). Indicando con X_3', Y_3', Z_3' le coordinate del punto P' della seconda rete, corrispondente al punto $P \equiv (X_3, Y_3, Z_3)$ della prima, potremo ancora scrivere la formola (2) §. 260.

$$(9) \qquad X_3' = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_2 - \operatorname{sen}\sigma\, X_3,$$

dove $\varphi = \varphi(u, v)$ è un angolo ausiliario da determinarsi e σ una costante. Derivando rapporto ad u, v, colle ricordate formole (A) §. 245, abbiamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_3'}{\partial u} = \left\{ -\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta + \cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right\} X_1 + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) X_2 - \\ \qquad - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, X_3, \\ \dfrac{\partial X_3'}{\partial v} = \cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) X_1 + \left\{ \operatorname{sen}\sigma\cos\theta + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\} X_2 - \\ \qquad - \cos\sigma\cos\theta\cos\varphi\, X_3, \end{cases}$$

ovvero introducendo piuttosto le derivazioni rapporto ad α, β, sommando e sottraendo (§. prec.^{te}):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X''}{\partial \alpha} = \left\{ \cos\sigma\cos\varphi \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta \right\} X_1 + \left\{ \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} + \right. \\ \qquad\qquad + \left. \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \right\} X_2 - \cos\sigma\cos(\varphi-\theta) X_3 \\ \dfrac{\partial X_3'}{\partial\beta} = \left\{ \cos\sigma\cos\varphi \dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta \right\} X_1 + \left\{ \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} - \right. \\ \qquad\qquad - \left. \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \right\} X_2 + \cos\sigma\cos(\varphi+\theta) X_3 . \end{cases}$$

Le condizioni del problema si traducono nelle due equazioni

$$S\left(\frac{\partial X_3'}{\partial\alpha}\right)^2 = 1, \quad S\left(\frac{\partial X_3'}{\partial\beta}\right)^2 = 1,$$

le quali calcolate colle precedenti dànno

$$\begin{cases} \cos^2\sigma\left(\dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\sigma + 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}(\varphi-\theta)\dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} + \\ \qquad\qquad + \cos^2\sigma\cos^2(\varphi-\theta) = 1 \\ \cos^2\sigma\left(\dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\sigma - 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} + \\ \qquad\qquad + \cos^2\sigma\cos^2(\varphi+\theta) = 1, \end{cases}$$

che possiamo scrivere

$$\begin{cases} \left\{ \cos\sigma\dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} + \operatorname{sen}(\varphi-\theta) \right\}^2 = \operatorname{sen}^2(\varphi-\theta) \\ \left\{ \cos\sigma\dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\varphi+\theta) \right\}^2 = \operatorname{sen}^2(\varphi+\theta). \end{cases}$$

Estraendo le radici quadrate e significando ε, ε' l'unità positiva o negativa, avremo

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{\varepsilon - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) \\ \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{\varepsilon' + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\varphi+\theta). \end{cases}$$

Derivando la prima rispetto a β, la seconda rispetto ad α e sottraendo risulta

$$\frac{\partial^2(2\theta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{(\varepsilon - \operatorname{sen}\sigma)(\varepsilon' + \operatorname{sen}\sigma)}{\cos^2\sigma}\operatorname{sen}(2\theta);$$

ma siccome

$$\frac{\partial^2(2\theta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen}(2\theta),$$

dovremo avere

$$(\varepsilon - \operatorname{sen}\sigma)(\varepsilon' + \operatorname{sen}\sigma) = \cos^2\sigma,$$

ovvero

$$\varepsilon\varepsilon' + \operatorname{sen}\sigma(\varepsilon - \varepsilon') = 1,$$

onde si conclude

$$\varepsilon = \varepsilon' = \pm 1.(1)$$

Ma possiamo prendere $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, chè l'altro caso $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ corrisponde a cangiare σ in $\pi + \sigma$, cioè a cangiare (per le (9)) la seconda rete nella diametralmente opposta. Così le (10) si riducono precisamente alle formole (II) della trasformazione di Bäcklund e ne è provata la nostra proposizione.

§. 264.

Scorrimenti delle reti di Tchebychef in geometria pseudosferica.

Il risultato ottenuto al paragrafo precedente rende naturale la domanda: ***esistono scorrimenti delle reti di Tchebychef sulle altre superficie a curvatura costante, negativa o nulla?*** Il primo caso della curvatura negativa è il più interessante per noi, come quello che ci condurrà a notevoli conseguenze rispetto all'applicabilità delle due falde di una congruenza pseudosferica (non normale). Prendiamo il raggio R della superficie pseudosferica $= 1$ e, trattandosi di studiare proprietà inerenti alla geometria della superficie, riguardiamo

(1) L'altro caso $\varepsilon = -\varepsilon' = \pm 1$ darebbe $\operatorname{sen}\sigma = \pm 1$, $\cos\sigma = 0$, e le due reti coinciderebbero o sarebbero diametralmente opposte.

questa come un piano non-euclideo servendoci nei calcoli delle coordinate di Weierstrass (§§. 237, 238).

Abbiasi nel piano non-euclideo una prima rete di Tchebychef con

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos(2\theta)\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2,$$

ovvero, riferendoci alle bisettrici (u, v) della rete

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2.$$

Indichino x_0, x_1, x_2 le coordinate di Weierstrass del punto (u, v), o (α, β) della rete e introduciamo altresì le coordinate di Weierstrass

$$\xi_i = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial x_i}{\partial u}, \qquad \eta_i = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

delle rette tangenti alle linee coordinate $v =$ cost.te, $u =$ cost.te. Per le formole (32) §. 238 (pag. 651) avremo

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = \cos\theta\,.\,\xi_i\,, & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,.\,\eta_i + \cos\theta\,.\,x_i\,, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,.\,\xi_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,.\,\xi_i\,, & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,.\,\eta_i\,, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,.\,\eta_i + \operatorname{sen}\theta\,.\,x_i \end{cases}$$

Conduciamo ora per ogni punto $M \equiv (x_0\ x_1\ x_2)$ del piano non-euclideo un segmento rettilineo MM' di lunghezza costante δ inclinato dell'angolo $\varphi = \varphi(u, v)$ sulla linea $v =$ cost.te; per le coordinate x_i' dell'estremo M' avremo dalle formole (28) §. 237

$$(12)\quad x_i' = \cosh\delta\,.\,x_i + \operatorname{senh}\delta\,(\cos\varphi\,.\,\xi_i + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta_i) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

da cui derivando rapporto ad u, v si trae per le (11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i'}{\partial u} = \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\cos\theta\,.\,x_i + \Big\{\cosh\delta\cos\theta - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\Big\}\xi_i + \\ \qquad + \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\eta_i \\ \dfrac{\partial x_i'}{\partial v} = \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,.\,x_i - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\xi_i + \Big\{\cosh\delta\operatorname{sen}\theta + \\ \qquad + \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\Big\}\eta_i \end{cases}$$

od anche, introducendo le derivate rapporto ad α, β, col sommare e sottrarre

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i'}{\partial\alpha} = \operatorname{senh}\delta\cos(\varphi-\theta)\,.\,x_i + \Big\{\cosh\delta\cos\theta - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\,\dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha}\Big\}\xi_i + \\ \qquad + \Big\{\operatorname{senh}\delta\cos\varphi\,\dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} + \cosh\delta\operatorname{sen}\theta\Big\}\eta_i \\ \dfrac{\partial x_i'}{\partial\beta} = \operatorname{senh}\delta\cos(\varphi+\theta)\,.\,x_i + \Big\{\cosh\delta\cos\theta - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\,\dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta}\Big\}\xi_i + \\ \qquad + \Big\{\operatorname{senh}\delta\cos\varphi\,\dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} - \cosh\delta\operatorname{sen}\theta\Big\}\eta_i\,. \end{cases}$$

Cerchiamo ora di determinare φ in funzione di α, β in guisa che il punto M' descriva alla sua volta una rete di Tchebychef (α, β) corrispondente alla primitiva per archi eguali, il che si traduce nelle condizioni necessarie e sufficienti (Cf. (25) §. 237)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial x_1'}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2'}{\partial\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial x_0'}{\partial\alpha}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\partial x_1'}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2'}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial x_0'}{\partial\beta}\right)^2 = 1\,. \end{cases}$$

Queste, calcolate colle (13), ricordando che si ha

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1\,, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_0^2 = 1\,, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_0^2 = 1\,,$$

diventano

$$\operatorname{senh}^2\delta\left(\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha}\right)^2 + \cosh^2\delta - \operatorname{senh}^2\delta\cos^2(\varphi-\theta) - 2\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\operatorname{sen}(\varphi-\theta)\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = 1$$

$$\operatorname{senh}^2\delta\left(\frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta}\right)^2 + \cosh^2\delta - \operatorname{senh}^2\delta\cos^2(\varphi+\theta) - 2\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = 1\,,$$

ovvero

$$\left\{ \operatorname{senh}\delta \frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} - \cosh\delta \operatorname{sen}(\varphi-\theta) \right\}^2 = \operatorname{sen}^2(\varphi-\theta)$$

$$\left\{ \operatorname{senh}\delta \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} - \cosh\delta \operatorname{sen}(\varphi+\theta) \right\}^2 = \operatorname{sen}^2(\varphi+\theta).$$

Estraendo la radice quadrata e indicando con ε, ε' l' unità, positiva o negativa, risulta

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{\varepsilon+\cosh\delta}{\operatorname{senh}\delta} \operatorname{sen}(\varphi-\theta) \\ \dfrac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{\varepsilon'+\cosh\delta}{\operatorname{senh}\delta} \operatorname{sen}(\varphi+\theta); \end{cases}$$

ed ora se si forma nuovamente la condizione d' integrabilità, derivando la prima rapporto a β la seconda rispetto ad α e sottraendo (Cf. §. prec.to si trova

$$\varepsilon\varepsilon' + \cosh\delta(\varepsilon+\varepsilon') + 1 = 0.$$

Dunque ε, ε' hanno necessariamente segno contrario, poniamo

$$\varepsilon' = \pm 1, \quad \varepsilon = \mp 1,$$

e le formole (14) si identificano colle (7°) della trasformazione B_σ di Bäcklund ponendo, in corrispondenza:

$$\cos\sigma = \operatorname{tgh}\delta, \quad \operatorname{sen}\sigma = \pm\frac{1}{\cosh\delta},$$

formole che, lasciando indeterminata la curvatura $K = -\frac{1}{R^2}$ del piano non-euclideo, scriveremo

$$(15)\qquad \cos\sigma = \operatorname{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right), \operatorname{sen}\sigma = \pm\frac{1}{\cosh\left(\frac{\delta}{R}\right)}.$$

È notevole che la relazione fra σ e δ è precisamente quella che intercede fra l' angolo σ di parallelismo in geometria non-euclidea e la distanza δ da cui sono spiccate le due parallele alla retta non-euclidea (§. 229).

Intanto si conclude di qui: *Anche in geometria pseudosferica (come nella sferica), esistono per ogni rete di Tchebychef ∞^2 scorrimenti; lo scorrimento è individuato appena fissato il punto in cui si vuole trasportare un determinato punto della rete.*

È poi da osservare che le formole (13), tenendo conto delle (14), diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'_i}{\partial\alpha} = -\operatorname{senh}\delta\cos(\varphi-\theta)\,x_i + \{\cosh\delta\cos\varphi\cos(\varphi-\theta) - \varepsilon\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(\varphi-\theta)\}\,\xi_i + \\ \qquad + \{\cosh\delta\operatorname{sen}\varphi\cos(\varphi-\theta) + \varepsilon\cos\varphi\operatorname{sen}(\varphi-\theta)\}\,\eta_i \\ \dfrac{\partial x'_i}{\partial\beta} = -\operatorname{senh}\delta\cos(\varphi+\theta)\,x_i + \{\cosh\delta\cos\varphi\cos(\varphi+\theta) - \varepsilon'\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\}\,\xi_i + \\ \qquad + \{\cosh\delta\operatorname{sen}\varphi\cos(\varphi+\theta) + \varepsilon'\cos\varphi\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\}\,\eta_i \end{cases}$$

e di qui formando il ds'^2 riferito alla nuova rete di Tchebychef

$$ds'^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 - dx'^2_0$$

si ottiene subito

$$(16)\qquad ds'^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\varphi\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2.$$

Questo prova che l' angolo 2φ ha, per la nuova rete di Tchebychef, lo stesso significato come 2θ per la rete primitiva.

Osservazione. — Per completare i risultati di questo e del precedente paragrafo concernenti gli scorrimenti delle reti di Tchebychef in geometria sferica e pseudosferica, si può osservare che esistono pure di tali scorrimenti in geometria piana euclidea.

Se con

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0\right)$$

$$ds'^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\varphi\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0\right)$$

indichiamo i due ds^2 delle corrispondenti reti piane di Tchebychef, abbiamo in primo luogo gli scorrimenti che corrispondono a *traslazioni* nel piano dati dalle formole

$$\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha}=0\,,\qquad \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta}=0\,;$$

ma esiste qui una seconda classe di scorrimenti che corrispondono p. e. alle formole

$$\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha}=c\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta)\,,\qquad \frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta}=0\ \ (c\ \text{costante}).$$

In questi una delle due curve generatrici della rete ($\beta=$ cost.^{te}) resta immutata e l'altra subisce una trasformazione geometrica che sarebbe facile caratterizzare.

§. 265.

Applicabilità speciale delle due falde di una congruenza pseudosferica.

Le due falde focali S, S′ di una congruenza pseudosferica, come superficie della stessa curvatura costante (negativa), sono certo applicabili l'una sull'altra in ∞^3 modi. Ma fra queste ∞^3 applicabilità ve ne ha una particolare notevole che risulta facilmente dal confronto fra le formole della trasformazione B_σ di Bäcklund (§. 260, 261) colle altre stabilite al paragrafo precedente per gli scorrimenti delle reti di Tchebychef in geometria pseudosferica. Siano

$$ds^2=R^2(\cos^2\theta\,du^2+\mathrm{sen}^2\theta\,dv^2)$$

$$ds'^2=R^2(\cos^2\varphi\,du^2+\mathrm{sen}^2\varphi\,dv^2)$$

i rispettivi elementi lineari delle S, S′ riferiti alle linee di curvatura u, v. Queste medesime formole dànno anche i due elementi lineari del piano non-euclideo riferiti alle curve bisettrici delle due reti di Tchebychef. Inoltre l'angolo φ ha il medesimo significato nei due sistemi di formole onde segue che l'arco geodetico di lunghezza δ che unisce sopra S il punto $M\equiv(x_0\,x_1\,x_2)$ al punto

$M_1\equiv(x_0'\,x_1'\,x_2')$ tocca in M il raggio MM′ della congruenza pseudosferica e per la formola (15)

$$R\cos\sigma=R\,\mathrm{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right),$$

il senso da M verso M_1 è concordante con quello da M verso M′. Dopo queste osservazioni possiamo formulare la costruzione seguente che dà l'indicata relazione *speciale* d'applicabilità di S su S′:

Se S, S′ *sono le due falde focali pseudosferiche di raggio* R *di una congruenza pseudosferica coll'angolo* $\frac{\pi}{2}-\sigma$ *dei piani focali* $\left(0<\sigma<\frac{\pi}{2}\right)$, *si prolunghi il raggio* MM′ *generico della congruenza geodeticamente sulla superficie* S, *di un arco costante* $MM_1=\delta$ *dato da*

$$\mathrm{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right)=\cos\sigma\,.$$

La seconda falda focale S′ *è allora applicabile sulla prima* S *in guisa che ogni punto* M′ *di* S′ *viene a cadere nel detto punto* M_1 *corrispondente.*

Osserviamo subito che la costruzione diventa illusoria nel caso della trasformazione complementare $\sigma=0$, perchè allora bisognerebbe prendere $\delta=\infty$, e tutti i punti di S′ verrebbero trasportati, nell'applicabilità, a distanza infinita. In secondo luogo si osservi che, a causa dell'ufficio simmetrico compiuto nelle nostre formole dagli angoli θ, φ, invertendo nella costruzione le due superficie S, S′, la legge d'applicabilità resta la medesima.

Per compiere effettivamente la costruzione indicata basta conoscere le linee geodetiche di S, dopo di che si conoscono anche quelle di S′, come corrispondenti, nell'applicabilità costruita, alle geodetiche di S. Se ne trae questa notevole conseguenza: *Se di una superficie* S *pseudosferica si conoscono le linee geodetiche ed è nota una seconda superficie pseudosferica* S′ *derivata da* S *per una trasformazione* B_σ *di Bäcklund non complementare* $(\sigma\neq 0)$, *le geodetiche di* S′ *si hanno in termini finiti.*

Nel caso della trasformazione complementare B_0, per determinare le geodetiche sulla superficie complementare S′ non abbiamo altro mezzo che di eseguire le quadrature indicate al §. 258.

§. 266.

Preliminari al teorema di permutabilità.

Ci volgiamo ora a quel perfezionamento dei metodi di trasformazione delle superficie a curvatura costante che dipende dal così detto *teorema di permutabilità*, (1) teorema la cui validità si estende a molte altre teorie di trasformazione nella geometria infinitesimale.

Cominceremo la nostra ricerca da un punto di vista puramente intrinseco, o analitico, considerando questi metodi come metodi di trasformazione per le soluzioni $\theta(\alpha, \beta)$ della equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2(2\theta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen}(2\theta), \tag{A}$$

dati dal sistema simultaneo (II) pag. 722 delle equazioni di trasformazione. Partendo da una soluzione iniziale θ della (A), e integrando il corrispondente sistema di Riccati (II), si ottiene *una doppia infinità di nuove soluzioni* φ, contenenti la costante arbitraria k ed una nuova costante C introdotta dall'integrazione. Tutte queste ∞^2 soluzioni φ si diranno le *contigue* alla iniziale θ. Ora prendiamo due particolari soluzioni θ_1, θ_2 contigue a θ, e corrispondenti ai valori k_1, k_2 della costante k, legate quindi alla θ dalle rispettive equazioni di trasformazione

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial\alpha} = k_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) \end{cases} \qquad (17')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2+\theta)}{\partial\alpha} = k_2 \operatorname{sen}(\theta_2-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_2-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta). \end{cases}$$

Possiamo dire che le due molteplicità ∞^2 di soluzioni, contigue rispettivamente a θ_1 e a θ_2, hanno a comune la soluzione θ, e ora ci domandiamo se esistono altre soluzioni comuni alle due molteplicità? Dimostreremo che: *esiste oltre* θ, *una ed una sola seconda soluzione comune* θ' *diversa da* θ, *se* $k_1 \neq k_2$, *e coincidente con questa quando* $k_1 = k_2$. Questa notevole circostanza dà luogo, come vedremo, al *teorema di permutabilità*.

Supponiamo che una tale soluzione θ' contigua, come la θ, alle θ_1, θ_2 esista e siano λ_1, λ_2 i valori della costante k corrispondente, talchè insieme alle (17), (17') sussistano le corrispondenti formole di trasformazione

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta_1)}{\partial\alpha} = \lambda_1 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) \end{cases} \qquad (18')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta_2)}{\partial\alpha} = \lambda_2 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{\lambda_2}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_2). \end{cases}$$

In tale ipotesi, sottraendo le (17), (17') della medesima linea, risulta

$$(s)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial\alpha} = k_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta) - k_2 \operatorname{sen}(\theta_2-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) - \dfrac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta), \end{cases}$$

e similmente procedendo sulle (18), (18'), dal confronto risultano le due equazioni in termini finiti fra θ, θ_1, θ_2, θ':

$$(19)\quad \begin{cases} \lambda_1 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) - \lambda_2 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_2) = k_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta) - k_2 \operatorname{sen}(\theta_2-\theta) \\ \dfrac{1}{\lambda_2}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_2) - \dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) = \dfrac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) - \dfrac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta). \end{cases}$$

Siccome, per un valore iniziale arbitrario di θ, restano affatto arbitrarii quelli di θ_1, θ_2, occorre in primo luogo che le due equazioni precedenti siano compatibili nell'incognita θ', *comunque si prendano* θ, θ_1, θ_2. Facendo nelle (19) $\theta_1 = \theta_2 = 0$, risulta $(\lambda_1 - \lambda_2)\operatorname{sen}\theta' = (k_2 - k_1)\operatorname{sen}\theta$, $\left(\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_1}\right)\operatorname{sen}\theta' = \left(\dfrac{1}{k_1} - \dfrac{1}{k_2}\right)\operatorname{sen}\theta$, e di videndo

$$\lambda_1\,\lambda_2 = k_1\,k_2, \tag{20}$$

(1) Questo teorema venne stabilito dall'autore, nel caso particolare della trasformazione complementare combinata con una trasformazione di Bäcklund, fin già dal 1885 nella memoria: *Sui sistemi di Weingarten* (Annali di mat. Serie II^a T. XIV); poi, pel caso generale, nei Rendiconti dei Lincei del 1892.

onde le (19) possono scriversi

$$(19^*)\quad \begin{cases} \lambda_1 \operatorname{sen}(\theta' - \theta_1) - \lambda_2 \operatorname{sen}(\theta' - \theta_2) = k_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) - k_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \lambda_1 \operatorname{sen}(\theta' + \theta_2) - \lambda_2 \operatorname{sen}(\theta' + \theta_1) = k_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) - k_1 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta). \end{cases}$$

Se in queste poniamo per es. $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ ne viene

$$\begin{cases} \lambda_1 \operatorname{sen}\theta' + \lambda_2 \cos\theta' = -k_1 \operatorname{sen}\theta - k_2 \cos\theta \\ \lambda_1 \cos\theta' - \lambda_2 \operatorname{sen}\theta' = k_2 \operatorname{sen}\theta - k_1 \cos\theta \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

e quindi per la (20)

α) $\qquad \lambda_1 = \varepsilon k_1, \qquad \lambda_2 = \varepsilon k_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$

ovvero

β) $\qquad \lambda_1 = \varepsilon k_2, \qquad \lambda_2 = \varepsilon k_1 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$

Ma siccome un cangiamento simultaneo di segno in λ_1, λ_2 equivale ad aumentare θ' di π, possiamo limitarci a supporre $\varepsilon = +1$. Ora il primo caso α) con $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$ porta a $\theta' = \theta + \pi$, cioè sostanzialmente alla medesima soluzione θ. Resta dunque soltanto da esaminare il secondo caso

$$\lambda_1 = k_2, \quad \lambda_2 = k_1,$$

che ci porterà appunto al teorema di permutabilità. Le (19*) diventano ora

$$\begin{cases} k_1 [\operatorname{sen}(\theta' - \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)] = k_2 [\operatorname{sen}(\theta' - \theta_1) + \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta)] \\ k_1 [\operatorname{sen}(\theta' + \theta_1) - \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta)] = k_2 [\operatorname{sen}(\theta' + \theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta)], \end{cases}$$

o con semplici trasformazioni trigonometriche

$$\begin{cases} k_1 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\dfrac{\theta' + \theta - \theta_1 - \theta_2}{2} = \\ \qquad = k_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2} - \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\dfrac{\theta' + \theta - \theta_1 - \theta_2}{2} \\ k_1 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\dfrac{\theta' + \theta + \theta_1 + \theta_2}{2} = \\ \qquad = k_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta' - \theta}{2} - \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\dfrac{\theta' + \theta + \theta_1 - \theta_2}{2}. \end{cases}$$

Come si vede, queste combinano nell' unica

$$k_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta' - \theta}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta' - \theta}{2} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right),$$

ossia

$$(k_2 - k_1) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = (k_2 + k_1) \cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2},$$

a cui diamo la forma

$$(\mathrm{III}) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) = \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

In fine, introducendo al posto di k_1, k_2 i corrispondenti valori σ_1, σ_2 dell' angolo σ nella trasformazione B_σ di Bäcklund, col porre

$$k_1 = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2},$$

scriviamo la (III) sotto la forma equivalente

$$(\mathrm{III}^*) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

Di qui intanto concludiamo: *Se* θ_1, θ_2 *sono due soluzioni della equazione fondamentale, contigue ad una medesima* θ *per trasformazioni* B_{σ_1}, B_{σ_2} *di Bäcklund, esiste al massimo una quarta tale soluzione* θ' *contigua nuovamente a* θ_1, θ_2 *e data in termini finiti dalla formola* (III*).

§. 267.

Il teorema (intrinseco) di permutabilità.

Ora possiamo facilmente verificare che la funzione $\theta' = \theta'(\alpha, \beta)$, definita dalla formola (III), è in effetto una quarta soluzione della equazione fondamentale legata alle θ_1, θ_2 dalle formole di trasformazione (18), (18'), cioè (essendo $\lambda_1 = k_2$, $\lambda_2 = k_1$) dalle seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta_1)}{\partial\alpha} = k_2 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta_2)}{\partial\alpha} = k_1 \operatorname{sen}(\theta'- \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_2); \end{cases}$$

ma basterà verificare le prime, chè le seconde sono conseguenze di queste e delle equazioni in termini finiti dalle quali abbiamo determinato θ'. Le formole da verificarsi, tenendo conto delle (17), sono le seguenti:

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\alpha} = k_2 \operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) - k_1 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) + \dfrac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta). \end{cases}$$

Ora se dalla (III) calcoliamo $\cos(\theta'-\theta)$, $\operatorname{sen}(\theta'-\theta)$ abbiamo

$$(IV) \qquad \begin{cases} \cos(\theta'-\theta) = \dfrac{(k_2^2+k_1^2)\cos(\theta_1-\theta_2) - 2k_1k_2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)} \\ \operatorname{sen}(\theta'-\theta) = \dfrac{(k_2^2-k_1^2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}, \end{cases}$$

e differenziando la prima (il cui secondo membro è funzione lineare di $\cos(\theta_1-\theta_2)$) risulta

$$\operatorname{sen}(\theta'-\theta)\,d(\theta'-\theta) = \frac{(k_2^2-k_1^2)^2}{\{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)\}^2}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\,d(\theta_1-\theta_2),$$

cioè per la seconda

$$d(\theta'-\theta) = \frac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\,d(\theta_1-\theta_2).$$

In particolare avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\,\dfrac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\,\dfrac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial\beta} \end{cases}$$

e le formole (21) da verificarsi, tenuto conto delle (a) al paragrafo precedente, diventano

$$k_2\operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) - k_1\operatorname{sen}(\theta_1-\theta) = \frac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\{k_1\operatorname{sen}(\theta_1-\theta) - k_2\operatorname{sen}(\theta_2-\theta)\}$$

$$\frac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) + \frac{1}{k_1}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) = \frac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+k_1^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)}\left\{\frac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) - \frac{1}{k_2}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta)\right\}:$$

Trasportando i secondi termini nel secondo membro e riducendo, queste equivalgono alle equazioni seguenti:

$$\{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)\}\operatorname{sen}(\theta'-\theta_1) = 2k_1\{k_2 - k_1\cos(\theta_1-\theta_2)\}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta) + (k_2^2-k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2-\theta)$$

$$\{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)\}\operatorname{sen}(\theta'+\theta_1) = 2k_2\{k_2\cos(\theta_1-\theta_2) - k_1\}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta) + (k_1^2-k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2+\theta$$

ovvero, sostituendo a sen $(\theta' - \theta_1)$, sen $(\theta' + \theta_1)$ le espressioni equivalenti

$$\operatorname{sen}(\theta' - \theta)\cos(\theta_1 - \theta) - \cos(\theta' - \theta)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\theta' - \theta)\cos(\theta_1 + \theta) + \cos(\theta' - \theta)\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta),$$

cangieremo le equazioni da verificarsi, osservando le (IV), nelle altre

$$(k_2^2 - k_1^2)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta) - [(k_1^2 + k_2^2)\cos(\theta_1 - \theta_2) - 2k_1k_2]\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) =$$
$$= [2k_1k_2 - 2k_1^2\cos(\theta_1 - \theta_2)]\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) + (k_1^2 - k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta),$$

$$(k_2^2 - k_1^2)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 + \theta) + [(k_1^2 + k_2^2)\cos(\theta_1 - \theta_2) - 2k_1k_2]\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) =$$
$$= [2k_2^2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 2k_1k_2]\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) + (k_1^2 - k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta).$$

Semplificando, queste si mutano nelle semplici identità:

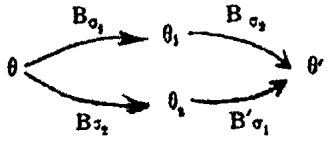
$$\begin{cases} (k_1^2 - k_2^2)\{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} = \\ \qquad = (k_1^2 - k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ (k_1^2 - k_2^2)\{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta)\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta)\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} = \\ \qquad = (k_1^2 - k_2^2)\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta), \end{cases}$$

e le verifiche sono così compiute.

Abbiamo dunque stabilito il teorema di permutabilità:

Se dalla soluzione θ della equazione fondamentale si passa a due contigue θ_1, θ_2 mediante le due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2}, esiste una ed una sola quarta soluzione θ', determinata in termini finiti dalla formola (III^a), che è contigua rispettivamente alle medesime θ_1, θ_2 per due trasformazioni di Bäcklund B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, colle costanti σ_1, σ_2 invertite.

Possiamo figurare la relazione fra le quattro soluzioni θ, θ_1, θ_2, θ' dell'equazione fondamentale (A) nello schema



onde si vede che dalla θ perveniamo alla θ' sia eseguendo prima B_{σ_1} poi B'_{σ_2}, oppure prima B_{σ_2} indi B'_{σ_1}; simbolicamente:

$$B_{\sigma_1} \cdot B'_{\sigma_1} = B_{\sigma_2} \cdot B'_{\sigma_1},$$

da cui il nome di teorema di permutabilità.

§. 268.

Integrazione successiva dell'equazione fondamentale (A).

Dal teorema di permutabilità possiamo ora trarre importanti conclusioni che concernono l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione. Facilmente dimostriamo la proposizione seguente:

Se di una soluzione θ conosciamo tutte le ∞^2 contigue φ per trasformazione di Bäcklund, soddisfacenti alle equazioni (II) pag. 722, di ciascuna di queste nuove soluzioni φ potremo determinare le ∞^2 contigue CON SOLI CALCOLI ALGEBRICI E DI DERIVAZIONE.

Noi supponiamo adunque di avere completamente integrato il sistema (di Riccati) delle equazioni (II) di trasformazione, per un valore generico di k; e sia

$$\varphi = \varphi(\alpha, \beta; k, c)$$

la soluzione generale contenente le due costanti arbitrarie k, c. Sia θ_1 una soluzione particolare corrispondente p. e. a

$$k = k_1, \quad c = c_1,$$

onde

$$\theta_1 = \varphi(\alpha, \beta; k_1, c_1).$$

Indichi ora Θ una nuova soluzione, contigua alla θ_1 per una trasformazione a costante k, che supponiamo dapprima diversa da k_1.

Per il teorema di permutabilità, la terna di soluzioni



è completata ad una quaderna da una quarta soluzione, contigua a θ per una B_k, e quindi della forma per ipotesi nota

$$\varphi(\alpha, \beta; k, c).$$

La formola (III) del teorema di permutabilità ci dà adunque

$$\text{(V)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \frac{k + k_1}{k - k_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1 - \varphi(\alpha, \beta; k, c)}{2}\right),$$

e con questa calcoliamo in effetto, in termini finiti, ogni soluzione Θ contigua alla θ_1 per una trasformazione a costante k qualunque, *purchè dapprima diversa da* k_1. Ma ora, con un semplice passaggio al limite, completiamo il risultato trovando anche le ∞^1 soluzioni Θ contigue alla θ_1 per una trasformazione *a costante* k_1. Per questo si osservi che la formola (V) o

$$\text{(22)} \qquad -\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \frac{k + k_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varphi(\alpha, \beta; k, c) - \varphi(\alpha, \beta, k_1, c_1)}{2}\right)}{\dfrac{k - k_1}{2}}$$

vale sempre, comunque si prenda k vicino a k_1.

Ora prendiamo per la costante c in questa formola una funzione finita, continua e derivabile di k

$$c = c(k),$$

coll' unica condizione che si abbia $c(k_1) = c_1$. Il secondo membro della (22) tende, *per* $k = k_1$, ad un limite, e cioè verso

$$k_1 \lim_{k = k_1} \frac{\varphi(\alpha, \beta; k, c) - \varphi(\alpha, \beta; k_1, c_1)}{k - k_1} =$$

$$= k_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial k} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{dc}{dk}\right)_{k = k_1}.$$

Il valore di $\left(\dfrac{dc}{dk}\right)_{k = k_1}$ è una *costante arbitraria*, che indichiamo con $-c'$, e la formola (V) dà, al limite, l'altra perfettamente determinata:

$$\text{(VI)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = k_1 \left(c' \frac{\partial \varphi}{\partial c} - \frac{\partial \varphi}{\partial k}\right);$$

e, pel modo stesso con cui l'abbiamo dedotta, è manifesto che essa darà *tutte* le soluzioni Θ contigue alla θ_1 per una trasformazione a costante k_1.

§. 269.

Significato geometrico completo del teorema.

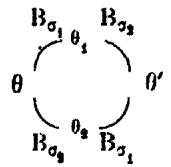
Fino ad ora abbiamo sviluppato le formole del teorema di permutabilità dal punto di vista intrinseco, solo in riguardo ai metodi d'integrazione successiva che ne derivano per l'equazione fondamentale. Ma è importante completare questi risultati col dare il significato geometrico del teorema, in riguardo anche alla posizione effettiva delle corrispondenti superficie pseudosferiche nello spazio. Il teorema si enuncia allora, sotto la sua forma completa, così:

Se alla superficie pseudosferica S *sono contigue due nuove superficie pseudosferiche* S_1, S_2, *per trasformazioni di Bäcklund* B_{σ_1}, B_{σ_2} *a costanti* σ_1, σ_2 *differenti, esiste una ed una sola quarta superficie pseudosferica* S′ *contigua alla* S_1 *per una* B_{σ_2}, *alla* S_2 *per una* B_{σ_1}.

Indichiamo con θ, θ_1, θ_2 le soluzioni dell'equazione fondamentale (A) corrispondenti alle superficie pseudosferiche

$$S, S_1, S_2,$$

e con θ' la quarta soluzione che completa, secondo le formole (III*) e (IV) del teorema intrinseco di permutabilità, la quaderna



Derivando la S_1 dalla S per la trasformazione di Bäcklund B_{σ_1}, i coseni delle direzioni principali della S_1 (denotati qui con accenti) sono dati per le formole *(7)* §. 261 (pag. 720) da

$$
(23)\quad \begin{cases}
X_1' = (\cos\theta\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1)\,X_1 + (\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \\
\qquad + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1)\,X_2 - \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta\,X_3 \\
X_2' = (\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1)\,X_1 + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1 - \\
\qquad - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\cos\theta_1)\,X_2 + \cos\sigma_1\cos\theta\,X_3 \\
X_3' = \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1\,X_1 - \cos\sigma_1\cos\theta_1\,X_2 - \operatorname{sen}\sigma_1\,X_3 .
\end{cases}
$$

Ed ora se chiamiamo S' la superficie pseudosferica derivata dalla S_1 colla B_{σ_2}, a funzione trasformatrice θ', per le coordinate x', y', z' del punto (u, v) di S' avremo per le (1) §. 260

$$x' = x_1 + R\cos\sigma_2(\cos\theta' X_1' + \operatorname{sen}\theta' X_2'),$$

dove X_1', X_2' hanno i valori precedenti (23) e

$$x_1 = x + R\cos\sigma_1(\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2).$$

Sostituendo, scriveremo

$$x_1 = x + AX_1 + BX_2 + CX_3,$$

avendo posto

$$
(25)\quad \begin{cases}
A = R\cos\sigma_1\cos\theta_1 + R\cos\sigma_2[\cos\theta_1\cos(\theta'-\theta) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(\theta'-\theta)] \\
B = R\cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1 + R\cos\sigma_2[\operatorname{sen}\theta_1\cos(\theta'-\theta) - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta_1\operatorname{sen}(\theta'-\theta)] \\
C = R\cos\sigma_1\cos\sigma_2\operatorname{sen}(\theta'-\theta).
\end{cases}
$$

In questi valori di A, B, C sostituiamo le espressioni (IV) di $\cos(\theta'-\theta)$, $\operatorname{sen}(\theta'-\theta)$, esprimendovi altresì $\cos\sigma_1$, $\cos\sigma_2$; $\operatorname{sen}\sigma_1$, $\operatorname{sen}\sigma_2$ per le costanti k_1, k_2 colle formole

$$\cos\sigma_1 = \frac{2k_1}{1+k_1^2}, \quad \cos\sigma_2 = \frac{2k_2}{1+k_2^2}$$

$$\operatorname{sen}\sigma_1 = \frac{1-k_1^2}{1+k_1^2}, \quad \operatorname{sen}\sigma_2 = \frac{1-k_2^2}{1+k_2^2};$$

Dopo alcune semplici riduzioni, troviamo le formole

$$
(26)\quad \begin{cases}
A = \dfrac{2R(k_1^2-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}\cdot\dfrac{k_1(1-k_2^2)\cos\theta_1 - k_2(1-k_1^2)\cos\theta_2}{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)} \\
B = \dfrac{2R(k_1^2-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}\cdot\dfrac{k_1(1-k_2^2)\operatorname{sen}\theta_1 - k_2(1-k_1^2)\operatorname{sen}\theta_2}{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)} \\
C = \dfrac{4Rk_1k_2(k_2^2-k_1^2)}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)}{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\theta_1-\theta_2)},
\end{cases}
$$

le quali pongono in evidenza che A, B, C sono *simmetriche* rispetto alle coppie (θ_1, θ_2); (k_1, k_2). Dopo ciò è chiaro come le formole (24) conducono alla medesima quarta superficie pseudosferica S', sia applicando alla S successivamente la B_{σ_1} che la porta in S_1, poi la B_{σ_2} che cangia S_1 in S', ovvero prima la B_{σ_2} che cangia S in S_2, indi la B_{σ_1} che trasporta la S_2 in S'; e questo è appunto quanto è asserito nell' enunciato superiore del teorema di permutabilità.

Le formole (26) mostrano chiaramente che nel caso $\sigma_1 = \sigma_2$ o $k_1 = k_2$, i coefficienti A, B, C si annullano e la quarta superficie S' del teorema di permutabilità viene a coincidere colla prima.

Osserviamo ora che se prendiamo sulle quattro superficie S, S_1, S_2, S' una qualunque quaderna F, F_1, F_2, F' di punti corrispondenti, il quadrilatero sghembo $FF_1F'F_2$ gode delle seguenti proprietà:

1.° *i lati in ciascuna coppia* $(FF_1, F'F_2)$, $(FF_2, F'F_1)$ *hanno lunghezze costanti eguali, nella prima coppia a* $R\cos\sigma_1$, *nella seconda a* $R\cos\sigma_2$.

2.° *ciascuno dei quattro piani del quadrilatero*

$$F_2FF_1, \quad FF_1F', \quad F_1F'F_2, \quad F'F_2F$$

forma coi due contigui gli angoli costanti $\frac{\pi}{2}-\sigma_1, \frac{\pi}{2}-\sigma_2$.

Questo quadrilatero sghembo *articolato* è deformabile senza che variino nè le lunghezze dei lati nè gli angoli dei suoi piani; (1) in

(1) Si deve al DARBOUX l' interessante osservazione che il quadrilatero sghembo del teorema di permutabilità offre l' unico esempio di *un quadrilatero sghembo che possa deformarsi conservando invariate le lunghezze dei suoi angoli e i suoi angoli diedri*. (V. DARBOUX — *Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches*. Paris 1908.

particolare qui abbiamo un movimento a due parametri del quadrilatero articolato nel quale i suoi quattro vertici descrivono le quattro superficie pseudosferiche del teorema di permutabilità e i quattro piani del quadrilatero sono costantemente i piani tangenti delle superficie stesse.

Si osserva che due lati opposti del quadrilatero, p. e. FF_1, $F'F_2$, descrivono due congruenze pseudosferiche d'eguale angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \sigma_1\right)$ dei piani focali; possiamo anche dire che: *una trasformazione di Bäcklund trasforma l' una congruenza nell' altra.*

Così p. e. la trasformazione B_{σ_2} cangia la congruenza pseudosferica (FF_1) nella (F_2F') cangiando ad un tempo S, S_1 in S_2, S' [1].

Un' ultima osservazione, analiticamente ovvia, è da farsi in riguardo dell' utilizzazione di trasformazioni *immaginarie* di Bäcklund; diciamo che:

Il teorema di permutabilità permette di comporre trasformazioni immaginarie (coniugate) di Bäcklund in trasformazioni reali.

Se alla soluzione *reale* θ della (A) applichiamo, colle formole (17), una trasformazione B_{σ_1} *a costante complessa* k_1 qualunque

$$k_1 = k + i\,k',$$

la nuova soluzione θ_1 sarà essa stessa complessa. Ma allora, dalle (17'), è evidente che la coniugata θ_2 di θ_1 è legata alla medesima iniziale θ dalla trasformazione B_{σ_2} coniugata della primitiva, a costante

$$k_2 = k - i\,k',$$

---

[1] Le quattro superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S' del teorema di permutabilità formano un ciclo chiuso di 2^2 superficie tali che ciascuna di esse è legata alle due contigue nel ciclo da due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} di Bäcklund. Proseguendo questi studi, se ad una superficie pseudosferica S si applicano n diverse trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} ... B_{σ_n} che la cangino nelle n contigue $S_1 S_2 \ldots S_n$ e si applica ripetutamente l' ordinario teorema di permutabilità si è condotti ad un *ciclo chiuso* di 2^n superficie pseudosferiche ciascuna delle quali è legata alle n contigue da n trasformazioni di Bäcklund colle stesse costanti $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$. — V.I la memoria dell' autore: *Configurazioni mobili di Möbius* nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo T. XXV (1908).

coniugata della primitiva k_1. E la formola (III) del teorema di permutabilità dimostra che il secondo membro è reale, e per ciò nella quaderna di soluzioni della (A)



la quarta θ' è reale come l' iniziale θ. Alla loro volta le formole (26), essendo θ_1, θ_2 quantità coniugate come k_1, k_2, dimostrano che le quantità A, B, C risultano reali, e quindi per le (24) anche x', y', z'. Dunque: *Se una superficie pseudosferica reale* S *si trasforma, con due* B_{σ_1}, B_{σ_2} *coniugate immaginarie (coniugate), la quarta superficie* S' *del teorema di permutabilità si presenta nuovamente reale.*

§. 270.

Applicazione ad un particolare gruppo di superficie pseudosferiche.

Si è visto che, mediante il teorema di permutabilità, l' applicazione indefinitamente ripetuta del processo di trasformazione si compie *in termini finiti,* appena che siasi integrata la *prima* equazione di Riccati che si presenta per trovare tutte le contigue della superficie pseudosferica inizialmente data. Le nuove equazioni di Riccati per le superficie contigue alla primitiva, per le contigue a queste e così via di seguito, sono dunque tutte integrate insieme colla prima *senza che sia più necessaria alcuna quadratura.*

In particolare di tutte le superficie derivate noi conosceremo senz' altro le linee geodetiche, risultato già in parte contenuto nei teoremi stabiliti al §. 265.

Per mostrare in un semplice esempio l'applicazione di questi metodi partiamo dalla soluzione evidente $\theta = 0$ dell' equazione fondamentale. A questa soluzione non corrisponde propriamente una vera superficie pseudosferica, ma un suo caso limite in cui la superficie si restringe ad una retta. Ed in effetto gli sviluppi relativi alla trasformazione di Bäcklund restano ancora applicabili a questo caso limite $= 0$, quando le quantità

$$(x, y, z), (X_1, Y_1, Z_1), (X_2\ Y_2\ Z_2), (X_3\ Y_3 Z_3)$$

si prendano in guisa da soddisfare le equazioni fondamentali del quadro (A) §. 245 (pag. 674) per $\theta = 0$, per il che basta prendere

$$\begin{cases} x = 0\,, & y = 0\,, & z = Ru \\ X_1 = 0\,, & Y_1 = 0\,, & Z_1 = 1 \\ X_2 = \operatorname{sen} v\,, & Y_2 = -\cos v\,, & Z_2 = 0 \\ X_3 = \cos v\,, & Y_3 = \operatorname{sen} v\,, & Z_3 = 0\,, \end{cases}$$

formole che riducono la superficie all' asse Oz.

Essendo $\theta = 0$, le formole (1) pag. 718 per la trasformazione B_σ diventano

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}\varphi\,,$$

che s' integrano subito con

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = C\,e^{\tau}\,,$$

dove C è una costante arbitraria e

$$\tau = \frac{u - v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,;$$

ma senza alterare le generalità si può fare manifestamente $C = 1$. Così abbiamo

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\cosh\tau}\,, \quad \cos\varphi = -\operatorname{tgh}\tau\,,$$

formole che corrispondono alle elicoidi del Dini (§. 250) nel caso di σ qualunque, in particolare per $\sigma = 0$ alla pseudosfera ; e del resto le formole (1) §. 260, applicate al caso attuale, dànno appunto per le equazioni parametriche delle superficie pseudosferiche contigua alla soluzione $\theta = 0$:

$$x' = \frac{R\cos\sigma}{\cosh\tau}\operatorname{sen} v\,, \quad y' = -\frac{R\cos\sigma}{\cosh\tau}\cos v\,, \quad z' = R\,(u - \cos \operatorname{tgh}\tau),$$

che appartengono alle elicoidi del Dini.

I teoremi generali ci assicurano ora che : *L' applicazione del processo illimitato di trasformazione per queste elicoidi pseudosferiche, in particolare per la pseudosfera, si compie senza alcun calcolo d'integrazione.* È manifestamente nel gruppo *infinito* di superficie pseudosferiche che ne derivano, le equazioni parametriche, riferite alle linee di curvatura, conterranno soltanto ordinarie funzioni circolari ed iperboliche.

Così p. e. se si prende una particolare elicoide del Dini

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = e^{\tau_1}\,, \quad \tau_1 = \frac{u - v\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\,,$$

la sua trasformata generica di Bäcklund a costante σ si avrà subito dalla formola (III*) del teorema di permutabilità

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right)}\ \frac{e^{\tau_1} - e^{\tau}}{1 + e^{\tau + \tau_1}}\,,$$

e invece nel caso particolare $\sigma = \sigma_1$ bisognerà ricorrere alla formola limite di questa

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{u\operatorname{sen}\sigma_1 - v + c'}{\cos\sigma_1\ \cosh\tau_1}\,.$$

E in particolare se in questa facciamo $\sigma_1 = 0$, indi $\tau_1 = u$, avremo la superficie complementare della pseudosfera, ove possiamo prendere

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = -\frac{v}{\cosh u}\,;$$

essa è una particolare superficie d' Enneper (§. 259).

Le sue equazioni parametriche, come si deducono dalle precedenti, sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\,R\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\,(\operatorname{sen} v - v\cos v) \\ y = -\dfrac{2\,R\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\,(\cos v + v\operatorname{sen} v) \\ z = R\left(u - \dfrac{2\operatorname{senh} u\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\right). \end{cases}$$

La superficie ha due linee singolari (cuspidali)

$$v = 0 \qquad e \quad v = \cosh u$$

corrispondenti a $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; la prima è una curva piana che si ha dalla trattrice meridiana della pseudosfera come luogo degli estremi di segmenti $= R$ staccati sulle tangenti nel verso che s' allontana dall' asintoto, la seconda linea cuspidale è una curva gobba.

§. 271.

Composizione di due trasformazioni reali opposte di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$.

Volgiamoci ora allo studio di un caso particolare del teorema di permutabilità che conduce ad interessanti conseguenze *quando il quadrilatero sghembo* $FF_1F'F_2$ *ha i quattro lati eguali e diventa quindi una losanga sghemba.* Ciò avviene allora che le due trasformazioni di Bäckland componenti B_{σ_1}, B_{σ_2} hanno le costanti σ_1, σ_2 eguali e di segno contrario (1).

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$$

(ovvero, riferendosi alle costanti k_1, k_2, $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$). In questo caso la simmetria della losanga rende evidente che: *le due normali in*

(1) Naturalmente si esclude il caso $\sigma_1 = \sigma_2$ (o $k_1 = k_2$) perchè allora la quarta superficie S' coinciderebbe colla prima.

F, F' alle due superficie pseudosferiche opposte S, S' (le normali ai piani FF_1F_2, $F'F_1F_2$ *della losanga) s' incontrano in un punto* M_0 *equidistante da F, F'; e similmente le due normali in* F_1, F_2 *alle altre due* S_1, S_2 *s' incontrano in un punto* M_0' *equidistante da* F_1, F_2. *La retta* M_0M_0' *è manifestamente la perpendicolare comune alle due rette (ortogonali)* FF', F_1F_2 *e le incontra nei loro punti medii.*

Indichiamo con S_0 la superficie luogo di M_0, e con S_0' la superficie luogo di M_0', e andiamo a dimostrare che queste due superficie S_0, S_0' sono applicabili sulla stessa superficie di rotazione, precisamente sul catenoide accorciato (Cf. §. 131 c)) e sono superficie complementari l' una dell'altra.

Per questo cominciamo dal calcolare le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto M_0, che potremo scrivere

$$x_0 = x + TX_3,\quad y_0 = y + TY_3,\quad z_0 = z + TZ_3, \tag{27}$$

avendo posto

$$FM_0 = T.$$

Siccome la congiungente M_0F' deve essere la normale in F' alla S', in particolare perpendicolare alla $F'F_1$, dovremo avere

$$S(x' - x_0)(x' - x_1) = 0. \tag{28}$$

Ma per le formole (24) §. 269 si ha

$$x' = x + AX_1 + BX_2 + CX_3,$$

e inoltre

$$x_1 = x + R\cos\sigma(\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2),$$

onde la (28) diventa

$$T.C = S(AX_1 + BX_2 + CX_3).\{AX_1 + BX_2 + CX_3 - R\cos\sigma(\cos\theta_1 X_2 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2)\}$$

ossia

$$T.C = A^2 + B^2 + C^2 - R\cos\sigma(A\cos\theta_1 + B\operatorname{sen}\theta_1).$$

Ma le formole (25) §. 269, ove si ponga

$$\sigma_1 = \sigma\,, \quad \sigma_2 = -\sigma\,,$$

ci dànno

$$(28^*)\quad \begin{cases} A = R\cos\sigma\,\{\cos\theta_1[1+\cos(\theta'-\theta)]+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(\theta'-\theta)\} \\ B = R\cos\sigma\,\{\operatorname{sen}\theta_1[1+\cos(\theta'-\theta)]-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta_1\operatorname{sen}(\theta'-\theta)\} \\ C = R\cos^2\sigma\operatorname{sen}(\theta'-\theta) \end{cases}$$

e qui di

$$A^2+B^2+C^2 = 2R^2\cos^2\sigma[1+\cos(\theta'-\theta)]$$

$$A\cos\theta_1 + B\operatorname{sen}\theta_1 = R\cos\sigma[1+\cos(\theta'-\theta)]\,.$$

Resta adunque

$$T\operatorname{sen}(\theta'-\theta) = R[1+\cos(\theta'-\theta)]\,,$$

cioè

$$T = R\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,,$$

e se ricorriamo alla formola (III*) §. 266 del teorema di permutabilità (ponendovi $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$), abbiamo in fine

$$(29)\qquad T = R\operatorname{sen}\sigma\cot\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).$$

§. 272.

Calcolo dell' elemento lineare della S_σ.

Ora prendiamo le formole delle due trasformazioni opposte di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\sigma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\sigma}\,. \end{cases}$$

Introducendo al posto di θ_1, θ_2 le due funzioni

$$\Omega = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}\,, \quad \Phi = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\,,$$

queste si scrivono sotto la forma equivalente

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\Omega+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\Omega}{\cos\sigma}\cdot\cos\Phi \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Omega-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\Omega}{\cos\sigma}\cdot\operatorname{sen}\Phi \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\cos\Omega-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma}\cdot\operatorname{sen}\Phi \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\Omega+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma}\cdot\cos\Phi\,, \end{cases}$$

od anche, posto per abbreviare

$$\begin{cases} P = \cos\theta\operatorname{sen}\Omega+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\Omega \\ Q = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Omega-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\Omega\,, \end{cases}$$

sotto quest' altra

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u} = \dfrac{P\cos\Phi}{\cos\sigma}\,, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} = \dfrac{Q\operatorname{sen}\Phi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{1}{\cos\sigma}\dfrac{\partial P}{\partial\Omega}\cdot\operatorname{sen}\Phi\,, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{1}{\cos\sigma}\dfrac{\partial Q}{\partial\Omega}\cdot\cos\Phi\,. \end{cases}$$

Ciò premesso, prendiamo le formole (27), che diventano ora per la (29)

$$x_0 = x + \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cot\Omega\,.\,\mathrm{X}_3,\quad \text{ecc.}$$

e derivando rapporto ad u, v, colle formole del quadro (A) §. 245 (pag. 674), avremo

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \mathrm{R}\left\{\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{sen}\,\Omega}\,\mathrm{X}_1 - \dfrac{\mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}^2\Omega}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}\,\mathrm{X}_3\right\} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \mathrm{R}\left\{\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{sen}\,\Omega}\,\mathrm{X}_2 - \dfrac{\mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}^2\Omega}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\,\mathrm{X}_3\right\}, \end{cases}$$

onde calcolando l' elemento lineare ds_0 della S_0 risulta

$$(32)\qquad ds_0^2 = \mathrm{R}^2\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,\sigma}{\mathrm{sen}^4\,\Omega}\,d\Omega^2 + \frac{\mathrm{P}^2\,du^2 + \mathrm{Q}^2\,dv^2}{\mathrm{sen}^2\,\Omega}\right).$$

Ma dalle (30) segue che

$$\mathrm{P}\cos\Phi\,du + \mathrm{Q}\,\mathrm{sen}\,\Phi\,dv$$

è un differenziale esatto, precisamente

$$\mathrm{P}\cos\Phi\,du + \mathrm{Q}\,\mathrm{sen}\,\Phi\,dv = \cos\sigma\,d\Omega,$$

ed anche: $\mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,\Phi\,du - \mathrm{Q}\cos\Phi\,dv$ è un differenziale esatto, poniamo

$$(33)\qquad \mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,\Phi\,du - \mathrm{Q}\cos\Phi\,dv = \cos\sigma\,d\Psi,$$

e quadrando e sommando questa colla precedente si ottiene

$$\mathrm{P}^2\,du^2 + \mathrm{Q}^2\,dv^2 = \cos^2\sigma\,(d\Omega^2 + d\Psi^2).$$

Così la (32) diventa

$$(34)\qquad ds_0^2 = \mathrm{R}^2\left\{\frac{\mathrm{sen}^2\,\sigma + \cos^2\sigma\,\mathrm{sen}^2\,\Omega}{\mathrm{sen}^4\,\Omega}\,d\Omega^2 + \frac{\cos^2\sigma}{\mathrm{sen}^2\,\Omega}\,d\Psi^2\right\}$$

e pone in evidenza l' elemento lineare di una superficie di rotazione, precisamente quello di un catenoide accorciato (§. 131), il cui raggio del parallelo è

$$r = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cosh\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right),$$

avendo posto

$$\cot\Omega = \mathrm{senh}\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right).$$

È manifesto che la seconda superficie S_0' luogo di M_0' sarà pure applicabile sul *medesimo* catenoide accorciato, ed ora non resta altro da provare che S_0, S_0' sono complementari l' una dell' altra. Per questo si osservi che dalle formole (31), scritte sotto la forma

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{sen}\,\Omega}\left(\mathrm{X}_1 - \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\cos\Phi}{\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\Omega}\,\mathrm{X}_3\right)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{sen}\,\Omega}\left(\mathrm{X}_2 - \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\Phi}{\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\Omega}\,\mathrm{X}_3\right),$$

segue che i coseni di direzione della normale alla S_0 sono proporzionali alla quantità

$$\cos\Phi\,\mathrm{X}_1 + \mathrm{sen}\,\Phi\,\mathrm{X}_2 + \cot\sigma\,\mathrm{sen}\,\Omega\,\mathrm{X}_3$$

ed alle due analoghe, alle quali sono pure proporzionali, come si osserva sulle (28*), le quantità

$$\mathrm{AX}_1 + \mathrm{BX}_2 + \mathrm{CX}_3,\ \text{ecc.}$$

ossia le differenze

$$x' - x,\ y' - y,\ z' - z;$$

dunque: *il piano tangente in* M_0 *alla* S_0 *ha per normale la congiungente* FF', *cioè coincide col piano* $\mathrm{M}_0\,\mathrm{F}_1\,\mathrm{F}_2$. Per la stessa ragione il piano tangente in M_0' alla S_0' è il piano $\mathrm{M}_0\,\mathrm{FF}'$; questi due piani di simmetria della losanga si tagliano (ortogonalmente) lungo la retta $\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_0'$ che è dunque tangente in M_0 alla S_0, in M_0' alla S_0', e le due superficie sono complementari come si era asserito. Riepiloghiamo i risultati ottenuti nel teorema: *Nel caso della composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund* B_σ, $\mathrm{B}_{-\sigma}$ *il quadrilatero sghembo del teorema di permutabilità diventa una losanga e le normali in vertici opposti ai piani della losanga si incontrano in due punti* M_0, M_0'

che descrivono due superficie applicabili sul medesimo catenoide accorciato e complementari l' una dell' altra.

Il teorema così stabilito è da confrontarsi coll' altro del §. 258 relativo alla composizione di due trasformazioni complementari, corrispondenti al caso $\sigma = 0$.

Aggiungiamo che, inversamente, qualunque coppia di superficie complementari deformate del catenoide accorciato (o dell' elicoide logaritmica §. 131) dà luogo alla configurazione qui studiata delle quattro superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S' descritte dai quattro vertici della losanga articolata.

§. 273.

Composizione di due trasformazioni immaginarie opposte di Bäcklund $B_{i\sigma}$, $B_{-i\sigma}$.

Abbiamo già osservato, alla fine del §. 269, che due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund si compongono in una trasformazione reale, in particolare questo vale per due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} a costanti σ_1, σ_2 puramente immaginarie coniugate

$$\sigma_1 = ib, \quad \sigma_2 = -ib \quad (^1) \qquad (b \text{ reale}).$$

In tale caso valgono ancora tutti i calcoli eseguiti ai due paragrafi precedenti e soltanto, per presentare le formole definitive sotto forma reale, converrà dappertutto separare il reale dall'immaginario, ponendo

$$\sigma = ib, \quad \operatorname{sen}\sigma = i \operatorname{senh} b, \quad \cos\sigma = \cosh b.$$

Le funzioni θ_1, θ_2 saranno complesse coniugate, poniamo

$$\theta_1 = \varphi + i\omega, \quad \theta_2 = \varphi - i\omega,$$

da cui

$$\Omega = i\omega, \quad \Phi = \varphi$$

$$(35) \qquad \begin{cases} P = i(\cos\theta \operatorname{senh}\omega + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \cosh\omega) \\ Q = i(\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\omega - \operatorname{senh} b \cos\theta \cosh\omega), \end{cases}$$

(1) I corrispondenti valori delle costanti k_1, k_2 saranno quantità complesse coniugate *di modulo* = 1.

Le equazioni differenziali (α) (β) per Ω, φ si scrivono ora sotto forma reale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = -\dfrac{\cos\theta \operatorname{senh}\omega + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \cosh\omega}{\cosh b} \cos\varphi \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\omega - \operatorname{senh} b \cos\theta \cosh\omega}{\cosh b} \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta \cosh\omega + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\omega}{\cosh b} \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \cosh\omega - \operatorname{senh} b \cos\theta \operatorname{senh}\omega}{\cosh b} \cos\varphi. \end{cases}$$

La quarta superficie pseudosferica S' del teorema di permutabilità è reale e corrisponde alla soluzione θ' della equazione fondamentale data, secondo la (III*) pag. 737, da

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tgh}\omega}{\operatorname{senh} b}.$$

Le normali in due punti corrispondenti F, F' di S, S' s' incontrano in punto M_0 equidistante da F, F' e la superficie S_0 luogo di M_0 avrà un elemento lineare ds_0 che si calcolerà ancora dalla (34) del paragrafo precedente, ove si ponga

$$\operatorname{sen}\sigma = i \operatorname{senh} b, \quad \cos\sigma = \cosh b, \quad \Omega = i\omega, \quad \operatorname{sen}\Omega = i \operatorname{senh}\omega;$$

ma siccome per le (35) le quantità P, Q sono puramente immaginarie, (tale sarà pure Ψ definita dalla (33) e se poniamo $\Psi = i\psi$, avremo

$$\cosh b\, d\psi = (\cos\theta \operatorname{senh}\omega + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \cosh\omega)\, du + \\ + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\omega - \operatorname{senh} b \cos\theta \cosh\omega)\, dv.$$

Così la formola (34) per l' elemento lineare della superficie S_0 diventa

$$ds_0^2 = R^2 \left\{ \frac{\operatorname{senh}^2 b + \cosh^2 b \operatorname{senh}^2\omega}{\operatorname{senh}^4\omega}\, d\omega^2 + \frac{\cosh^2 b}{\operatorname{senh}^2\omega}\, d\psi^2 \right\},$$

che appartiene di nuovo ad una superficie di rotazione. Per superficie tipica si può prendere quella definita da

$$r = \mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,b\,\mathrm{senh}\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right), \tag{36}$$

avendo posto

$$\cosh\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right) = \coth\omega, \quad \mathrm{senh}\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right) = \frac{1}{\mathrm{senh}\,\omega}.$$

La superficie di rotazione definita dalla (36) si dirà il *sinusoide iperbolico*.

È da osservarsi che le due superficie pseudosferiche S_1, S_2 contigue alla S (ed alla S′) sono immaginarie coniugate e le loro normali in punti corrispondenti F_1, F_2 (immaginarie coniugate) s'incontrano in un punto *reale* M_0 il quale descrive la superficie reale S_0 complementare della S_0.

Concludiamo quindi: *Se alla superficie pseudosferica reale* S *si applicano due trasformazioni puramente immaginarie coniugate di Bäcklund a costante* $a = \pm ib$, *la quarta superficie* S′ *del teorema di permutabilità è reale; le normali in punti corrispondenti* F, F′ *alle* S, S′ *s' incontrano in un punto* M_0 *equidistante da* F, F′, *che descrive una superficie* S_0 *applicabile sul sinusoide iperbolico* (36). *La sfera col centro in* M_0 *e di raggio*

$$\mathrm{T} = \mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,b\cosh\left(\frac{z}{\mathrm{R}}\right)$$

tocca rispettivamente in F, F′ *le superficie pseudosferiche* S, S′, *che sono le due falde dell' inviluppo di queste sfere.*

§. 274.

Trasformazioni (immaginarie) di Bäcklund per le deformate della sfera.

Le considerazioni precedenti sulla composizione in trasformazioni reali di trasformazioni immaginarie di Bäcklund acquistano il significato più importante nella teoria delle superficie a curvatura costante *positiva*. In questo caso, invero, le trasformazioni *semplici* di Bäcklund, pure esistenti dal punto di vista analitico, applicate a superficie reali conducono di necessità a superficie immaginarie, ed è soltanto combinandone opportunamente due successive, secondo il teorema di permutabilità, che si perviene ad ottenere nuovamente delle trasformazioni reali.

Noi cominciamo queste ultime ricerche appunto collo stabilire le formole per le trasformazioni *elementari* di Bäcklund applicate alle superficie a curvatura costante positiva $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$, o deformate della sfera di raggio $= \mathrm{R}$.

L' elemento lineare di una tale superficie S, riferita alle linee di curvatura u, v, può assumersi dato da (Cf. §. 246)

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(\mathrm{senh}^2\theta\,du^2 + \cosh^2\theta\,dv^2), \tag{37}$$

coi raggi principali di curvatura

$$r_1 = \mathrm{R}\coth\theta, \quad r_2 = \mathrm{R}\,\mathrm{tgh}\,\theta, \tag{38}$$

essendo θ una soluzione dell' equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta = 0. \tag{B}$$

Scriviamo anche subito le equazioni fondamentali del quadro:

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{X}_1, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mathrm{X}_2 - \cosh\theta\,\mathrm{X}_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mathrm{X}_1, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u} = \cosh\theta\,\mathrm{X}_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{R}\cosh\theta\,\mathrm{X}_2, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mathrm{X}_2, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mathrm{X}_1 - \mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{X}_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v} = \mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{X}_2. \end{cases}$$

Ora conduciamo per ogni punto $\mathrm{F} \equiv (u, v)$ di S, nel piano tangente, un segmento di lunghezza costante $\mathrm{FF}' = k$, di cui indichiamo con $\varphi = \varphi(u, v)$ l'angolo d'inclinazione sulle linee $v = \text{cost.}^{te}$ Cerchiamo di determinare la costante k e l' angolo incognito φ in guisa

che per la superficie S' luogo di F' abbiano luogo le proprietà seguenti:

1° *il segmento* FF' *tocchi in* F' *la* S', *cioè la* S' *sia dopo* S, *la seconda falda focale della congruenza* FF'.

2° *le due normali in* F, F' *alle* S, S' *formino fra loro un angolo costante.*

Per le coordinate x', y', z' di F' abbiamo

$$x' = x + k(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2), \text{ ecc.} \tag{39}$$

da cui derivando colle (C) e ponendo per brevità

$$A = \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v}, \quad B = \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}, \tag{40}$$

deduciamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left\{ R\operatorname{senh}\theta - k\,A\operatorname{sen}\varphi \right\}. \left\{ X_1 + k\,A\cos\varphi\, X_2 - k\cos\varphi\cosh\theta\,.\,X_3 \right. \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -k\,B\operatorname{sen}\varphi\,.\,X_1 + \left\{ R\cosh\theta + k\,B\cos\varphi \right\} X_2 - k\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta\,.\,X_3 \end{cases} \tag{41}$$

La prima condizione imposta si esprime coll'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u} & \dfrac{\partial y'}{\partial u} & \dfrac{\partial z'}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} & \dfrac{\partial y'}{\partial v} & \dfrac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix},$$

che si traduce per le precedenti nell'equazione lineare fra A e B:

$$k\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta\,.\,A - k\cos\varphi\cosh\theta\,.\,B + R(\cos^2\varphi\cosh^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{senh}^2\theta) = 0\,. \tag{42}$$

La normale in F' alla S' deve essere perpendicolare alle due direzioni coi coseni rispettivamente proporzionali a

$$\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial y'}{\partial u}, \quad \frac{\partial z'}{\partial u}$$

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z;$$

dunque i coseni di direzione X_3', Y_3', Z_3' di questa normale saranno dati dalla formola

$$X_3' = \rho \left\{ \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2 + \frac{R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta - k\,A}{k\cos\varphi\cosh\theta} X_3 \right\}$$

e dalle due analoghe, con

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{1 + \left(\frac{R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta - k\,A}{k\cos\varphi\cosh\theta} \right)^2}.$$

Ora la seconda condizione porta che si abbia

$$X_3 X_3' + Y_3 Y_3' + Z_3 Z_3' = \text{cost.te}$$

ossia

$$\frac{R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta - k\,A}{k\cos\varphi\cosh\theta} = \sigma \quad (\sigma \text{ costante}).$$

Da questa e dalla (42), avuto riguardo ai valori (40) di A, B, si traggono le formole

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{R}{k}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta - \sigma\cos\varphi\cosh\theta \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{R}{k}\cos\varphi\cosh\theta - \sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta\,, \end{cases} \tag{43}$$

le quali esprimono le condizioni *necessarie e sufficienti* pel nostro problema.

Ma ora dobbiamo tener conto delle condizioni d'integrabilità per questo sistema, per la qualcosa deriviamo la prima delle (43) rapporto a v la seconda rapporto ad u e sottraggiamo, ricordando che θ è una soluzione della (B). Troviamo così che le costanti σ, k debbono essere legate dalla relazione

$$\sigma^2 + \frac{R^2}{k^2} + 1 = 0 , \tag{44}$$

onde intanto vediamo che la trasformazione richiesta è necessariamente *immaginaria*. Per soddisfare la (44), nel modo più generale, poniamo

$$\sigma = \operatorname{senh} \sigma , \quad \frac{R}{k} = i \cosh \sigma , \tag{45}$$

essendo σ una costante complessa. Inoltre sostituiamo all'incognita φ l'altra θ_1 data da

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + i\,\theta_1 ,$$

da cui

$$\operatorname{sen} \varphi = \cosh \theta_1 , \quad \cos \varphi = - i \operatorname{senh} \theta_1 .$$

Le formole di trasformazione (43) assumono così la forma definitiva:

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u} + i \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 \\ i \dfrac{\partial \theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = - \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 - \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 . \end{cases}$$

Soddisfacendo θ alla (B), queste formano rispetto all'incognita θ_1 un sistema completamente integrabile, come segue già dai calcoli superiori; di più se dalle (D) eliminiamo per derivazione la θ, troviamo che θ_1 soddisfa alla sua volta la (B). Però, mentre la soluzione primitiva θ era reale, la nuova θ_1 è immaginaria.

Per la superficie (immaginaria) S', seconda falda della congruenza costruita, le formole (39), (41) diventano:

$$x' = x - \frac{R}{\cosh \sigma} \left(\operatorname{senh} \theta_1 X_1 + i \cosh \theta_1 X_2 \right), \tag{46}$$

$$\text{(47)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = R \operatorname{senh} \theta_1 \Big\{ - (\operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{tgh} \sigma \cosh \theta \cosh \theta_1) X_1 - \\ \qquad - i (\operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 + \operatorname{tgh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1) X_2 + \dfrac{\cosh \theta}{\cosh \sigma} X_3 \Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = R \cosh \theta_1 \Big\{ - i (\cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1) X_1 + \\ \qquad + (\cosh \theta \cosh \theta_1 + \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \theta_1) X_2 + i \dfrac{\operatorname{senh} \theta}{\cosh \sigma} X_3 \Big\} . \end{cases}$$

Per l'elemento lineare ds' della S' ne deduciamo

$$ds'^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2 \theta_1 \, du^2 + \cosh^2 \theta_1 \, dv^2) ,$$

che è la (37) mutata θ in θ_1; e siccome θ_1 è una soluzione della (B), si vede che la S' è ancora a curvatura costante $\frac{1}{R^2}$. Dalle (47) abbiamo infine pei coseni di direzione X_3', Y_3', Z_3' della normale alla S':

$$X_3' = \frac{\cosh \theta_1 X_1 + i \operatorname{senh} \theta_1 X_2 + \operatorname{senh} \sigma X_3}{\cosh \sigma} , \tag{48}$$

e si ha quindi

$$X_3 X_3' + Y_3 Y_3' + Z_3 Z_3' = \operatorname{tgh} \sigma , \tag{49}$$

formola che definisce l'angolo (costante) dei piani focali nella congruenza mentre per la distanza $\delta = k$ dei fuochi si ha

$$\delta^2 = - \frac{R^2}{\cosh^2 \sigma} . \tag{50}$$

§. 275.

Il teorema intrinseco di permutabilità per le soluzioni della equazione (B).

Gli sviluppi analitici dati ai §§. 266, 267 pel teorema di permutabilità sono applicabili anche al caso attuale con semplici cambiamenti di notazione, che riportano l'equazione fondamentale (B) alla

(A) §. 266. Qui deduciamo direttamente le formole relative dalle formole di trasformazione scritte sotto la forma attuale (D). Supponiamo di avere dedotte con queste formole dalla soluzione iniziale θ della (R) due nuove soluzioni θ_1, θ_2 legate alla θ dalle (D) coi valori σ_1, σ_2 della costante σ e si abbia quindi

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 . \end{cases}$$

Dimostriamo che esiste una quarta soluzione θ' legata alle medesime θ_1, θ_2 da trasformazioni colle stesse costanti, ma invertite, talchè si abbia:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta'}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta'\cosh \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta'}{\partial u} = -\cosh\sigma_2\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta'}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta'}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta'}{\partial u} = -\cosh\sigma_1\cosh\theta'\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta'\cosh\theta_2 . \end{cases}$$

Confrontando le (α), (β), (γ), (δ) fra loro, facilmente si eliminano le derivate e si hanno per determinare θ' ***due*** equazioni in termini finiti che equivalgono alle due formole seguenti

$$(51)\quad \begin{cases} \cosh(\theta'-\theta) = \dfrac{\cosh(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2)-1}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)} \\ \operatorname{senh}(\theta'-\theta) = \dfrac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cosh(\sigma_1-\sigma_2)} , \end{cases}$$

che sono d'altronde compatibili, la differenza dei quadrati dei secondi membri essendo $= 1$.

Da queste (51) segue l'altra

$$(52)\qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

che può sostituirsi alle (51). Ottenute queste formole che dànno in termini finiti la funzione incognita θ', con calcoli perfettamente simili a quelli eseguiti al §. 267 si verifica che questa funzione θ' soddisfa alle equazioni differenziali (γ), (δ), ed è quindi appunto la ***quarta soluzione richiesta del teorema di permutabilità.***

Suppongasi ora che la soluzione θ iniziale sia *reale* e cerchiamo di applicare il teorema di permutabilità in modo che anche la quarta soluzione θ' risulti reale. Per questo prendasi σ complessa comunque, e indicando in generale colla segnatura $\bar{A}$ la quantità coniugata di una quantità complessa A, prendasi

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1 .$$

Allora si osserva che le equazioni differenziali (β) risultano soddisfatte ponendo

$$\theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1 ,$$

dopo di che la formola (52) diventa

$$(53)\qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1+\bar{\sigma}_1}{2}\right)\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_2+\bar{\theta}_1}{2}\right).$$

Ora il secondo membro è manifestamente reale e, in valore assoluto, < 1, indi la quarta soluzione θ' è nuovamente reale.

Per presentare le formole precedenti sotto forma reale, basterà ora scindere il reale dall' immaginario, ponendo

$$\sigma_1 = a + ib, \quad \theta_2 = \omega + i\varphi .$$

Introducendo inoltre le notazioni

$$(53^*) \quad \begin{cases} A = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh a \cosh \theta \cosh \omega \\ B = \operatorname{senh} a \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh a \operatorname{senh} \theta \cosh \omega \\ C = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} \theta \cosh \omega + \cosh a \cosh \theta \operatorname{senh} \omega \\ D = \operatorname{senh} a \cosh \theta \cosh \omega + \cosh a \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega , \end{cases}$$

le equazioni differenziali (α) prendono la forma seguente

$$(54) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = B \cos b \cos \varphi - A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \varphi \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = - B \operatorname{sen} b \cos \varphi - A \cos b \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

$$(54^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = D \cos b \operatorname{sen} \varphi + C \operatorname{sen} b \cos \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = - D \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \varphi + C \cos b \cos \end{cases} ,$$

e questo è un sistema completamente integrabile nelle incognite (ω, φ).

Si osservi ora che, eseguendo sulle variabili u, v la sostituzione ortogonale

$$(55) \quad \begin{cases} u = u' \cos b + v' \operatorname{sen} b \\ v = - u' \operatorname{sen} b + v' \cos b , \end{cases}$$

il sistema differenziale precedente prende la forma più semplice

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u'} = B \cos \varphi , \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial v'} = - A \operatorname{sen} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u'} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v'} = D \operatorname{sen} \varphi , \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial v'} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u'} = C \cos \varphi , \end{cases}$$

che nelle nuove variabili u', v' è il sistema differenziale stesso fattovi $b = 0$. Ora la sostituzione (55) equivale ad una trasformazione reale di Bonnet-Lie (§. 249), onde risulta che le: *attuali trasformazioni reali delle deformate della sfera si riducono, con una trasformazione di Bonnet al caso* $b = 0$.

§. 276.

Le formole effettive per la quarta superficie S'.

Dalle formole relative al teorema intrinseco di permutabilità passiamo ora a quelle pel calcolo effettivo della quarta superficie S' nello spazio. Indichiamo con S_1, S_2 le due superficie contigue alla S per le trasformazioni considerate a costanti σ_1, σ_2, e denotiamo con F, F_1, F_2, F' quattro punti corrispondenti sopra S, S_1, S_2 S' rispettivamente. Siano (x_1, y_1, z_1) le coordinate di F_1 e (x_2, y_2, z_2), (x', y', z') quelle di F_2, F', in fine $(X_3^{(1)}, Y_3^{(1)}, Z_3^{(1)})$, $(X_3^{(2)}, Y_3^{(2)}, Z_3^{(2)})$ i coseni di direzioni delle normali alle S_1, S_2. Dalle formole al § 274 abbiamo

$$(56) \quad \begin{cases} x_1 = x - \dfrac{R}{\cosh \sigma_1} (\operatorname{senh} \theta_1 X_1 + i \cosh \theta_1 X_2) \\ x_2 = x - \dfrac{R}{\cosh \sigma_1} (\operatorname{senh} \theta_2 X_1 + i \cosh \theta_2 X_2) \end{cases}$$

$$(57) \quad \begin{cases} X_3^{(1)} = \dfrac{\cosh \theta_1 X_1 + i \operatorname{senh} \theta_1 X_2 + \operatorname{senh} \sigma_1 X_3}{\cosh \sigma_1} \\ X_3^{(2)} = \dfrac{\cosh \theta_2 X_1 + i \operatorname{senh} \theta_2 X_2 + \operatorname{senh} \sigma_2 X_3}{\cosh \sigma_2} . \end{cases}$$

Per trovare le coordinate x', y', z' di F' sopra S', si osservi che questo punto si trova sulla retta FF' intersezione dei due piani tangenti in F_1, F_2 alle S_1, S_2. Dalle (57) risulta subito che i coseni di direzione di questa retta FF' sono proporzionali alle tre quantità α, β, γ date dall' espressione

$$(58)\quad \alpha = (\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_2)\,X_1 + i(\operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_2)\,X_2 + \operatorname{senh}(\theta_2 - \theta_1)\,X_3,$$

e dalle due analoghe per β, γ, e potremo quindi porre, indicando con Λ una conveniente incognita,

$$(59)\qquad x' = x + \Lambda\alpha,\quad y' = y + \Lambda\beta,\quad z' = z + \Lambda\gamma.$$

Secondo la formola (50) §. 274, dovremo determinare Λ in guisa che si abbia simultaneamente

$$F'F_1^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_2},\qquad F'F_2^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_1},$$

cioè

$$(60)\quad \begin{cases} S\{\Lambda\alpha + (x - x_1)\}^2 = -\dfrac{R^2}{\cosh^2\sigma_2} \\ S\{\Lambda\alpha + (x - x_2)\}^2 = -\dfrac{R^2}{\cosh^2\sigma_1}. \end{cases}$$

Sottraendo queste due ultime, ricordando che si ha

$$S(x - x_1)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_1},\qquad S(x - x_2)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_2},$$

ne viene

$$\Lambda\, S\,\alpha(x_2 - x_1) = R^2\,\frac{\cosh^2\sigma_2 - \cosh^2\sigma_1}{\cosh^2\sigma_1 \cosh^2\sigma_2}.$$

Ora si ha per le (56)

$$x_2 - x_1 = R\left\{\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_1}{\cosh\sigma_1} - \frac{\operatorname{senh}\theta_2}{\cosh\sigma_2}\right)X_1 + i\left(\frac{\cosh\theta_1}{\cosh\sigma_1} - \frac{\cosh\theta_2}{\cosh\sigma_2}\right)X_2\right\}$$

e calcolando

$$S\,\alpha(x_2 - x_1)$$

mediante le (58) si trova per Λ il valore

$$(61)\qquad \Lambda = \frac{R\operatorname{senh}(\sigma_2 - \sigma_1)}{\cosh\sigma_1 \cosh\sigma_2\,[\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)]},$$

col quale valore tutte le nostre condizioni sono soddisfatte. Dopo ciò le formole (59), sostituendo i valori (58) per α, β, γ ed il valore (61) per Λ, *dànno, in termini finiti, la quarta superficie* S' *del teorema di permutabilità.*

Supponiamo ora, in particolare, che le due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} siano coniugate immaginarie, nel senso del paragrafo precedente, cioè si abbia

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1 \qquad \theta_2 = \pi i - \bar{\theta}_1;$$

in tal caso le formole (56) dànno per (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) valori coniugati immaginarii, cioè le due superficie S_1, S_2 sono immaginarie coniugate, e le formole (58), (61) forniscono per

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \Lambda$$

valori *reali*, onde la quarta superficie S' definita dalle (59) è nuovamente reale.

§. 277.

Casi in cui le normali alle superficie opposte S, S' s' incontrano.

Domandiamoci ora se, in analogia di quanto accadeva per le superficie pseudosferiche (§§. 258, 271), può presentarsi il caso che le normali in punti corrispondenti alle due superficie opposte S, S' costantemente s' incontrino. Siano in tale ipotesi

$$(62\qquad x_0 = x + TX_3,\quad y_0 = y + TY_3,\quad z_0 = z + TZ_3$$

le coordinate del punto M_0 d' incontro delle due normali. Siccome la direzione $M_0 F'$ deve essere perpendicolare alla $F_1 F_2$, dovremo avere

$$S(x_0 - x')(x_1 - x_2) = 0,$$

cioè

$$S(TX_2 - \alpha)(x_1 - x_2) = 0,$$

che si riduce alla

$$S\alpha(x_1 - x_2) = 0.$$

Questa, calcolata colle (56), (58), dà semplicemente

$$\operatorname{senh}(\sigma_1 + \sigma_2) = 0, \tag{63}$$

e la medesima condizione esprime altresì (come è visibile a priori) che s' incontrano le due normali in punti F_1, F_2 corrispondenti alle S_2, S_3.

Supposta soddisfatta la (62) (cioè $\sigma_1 + \sigma_2$ multiplo di πi), cerchiamo il corrispondente valore di T, per la qual cosa basterà tener conto di ciò che la direzione $M_0 F'$ deve p. e. riuscire normale alla $F' F_1$.

Questo dà per determinare T la condizione

$$S(TX_2 - \alpha)(\alpha + x - x_1) = 0,$$

cioè

$$TSX_2\alpha = \alpha S\alpha^2 + S\alpha(x - x_1).$$

Ma dalle (60), sommate, risulta

$$\alpha S\alpha^2 + S\alpha(x - x_1) = -S\alpha(x - x_2),$$

e dalle (56), (58)

$$S\alpha(x - x_2) = \frac{R}{\cosh\sigma_2} S(\operatorname{senh}\theta_2 X_1 + i\cosh\theta_2 X_2).\alpha$$

$$= \frac{R}{\cosh\sigma_2}\left\{\operatorname{senh}\sigma_1 - \operatorname{senh}\sigma_2\cosh(\theta_1 - \theta_2)\right\},$$

$$S\alpha X_2 = \operatorname{senh}(\theta_2 - \theta_1),$$

e quindi pel valore cercato di T

$$T = \frac{R\left\{\operatorname{senh}\sigma_1 - \operatorname{senh}\sigma_2\cosh(\theta_1 - \theta_2)\right\}}{\cosh\sigma_2\operatorname{senh}(\theta_1 - \theta_2)}. \tag{64}$$

Applichiamo queste formole al nostro caso particolare in cui la quarta superficie S' risulta reale, avendosi (§. 275)

$$\sigma_1 = \alpha + ib \qquad \sigma_2 = -\alpha + ib$$
$$\theta_1 = \omega + i\varphi \qquad \theta_2 = \pi i - \omega + i\varphi.$$

La condizione d' incontro (63) per le normali di S, S' ci dà

$$\operatorname{senh}(2ib) = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(2b) = 0,$$

e siccome nelle formole fondamentali (α) §. 275 si può aumentare b di un multiplo di π (σ_1 di un multiplo di πi), purchè si aumenti θ_1 di un equimultiplo di πi, senza alterare la generalità, potremo limitarci a distinguere i due casi seguenti:

$$\text{Caso I)} \quad b = 0, \qquad \text{Caso II)} \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

Corrispondentemente avremo dalla (64)

$$T = R\operatorname{tgh}\alpha\operatorname{tgh}\omega, \qquad \text{nel caso I)} \tag{65}$$

$$T = R\coth\alpha\coth\omega, \quad \text{nel caso II)}, \tag{65'}$$

e si osserverà che nel primo caso $T < R$, nel secondo $T > R$.

§. 278.

La superficie S_0 luogo del punto d' incontro come deformata di una quadrica rotonda.

Analogamente come nelle ricerche ai §§. 271, 273 per le trasformazioni delle superficie pseudosferiche, prendiamo ora a considerare la superficie S_0 luogo del punto M_0 d' incontro delle normali in punti corrispondenti alle deformate S, S' della sfera. Calcolando l' elemento lineare ds_0, verremo a constatare che la superficie S_0 è,

nel caso attuale, deformata di una quadrica reale rotonda, risultato che si collega ad importanti teoremi di Guichard il cui studio viene riservato al secondo Volume del presente trattato.

Separando la trattazione dei due casi, cominciamo dal

Caso I) $\qquad b = 0, \quad T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega .$

Le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 sono

$$(66) \qquad x_0 = x + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega X_3 , \quad y_0 = y + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega Y_3 ,$$
$$z_0 = z + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega Z_3 ,$$

e le formole (54), (54*), essendo $b = 0$, diventano:

$$(67) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = B \cos \varphi , & \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = - A \operatorname{sen} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = D \operatorname{sen} \varphi , & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = C \cos \varphi . \end{cases}$$

Derivando le (66) rapporto ad u, e colle formole del quadro (C) §. 274, tenendo presenti le (53*), troviamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = R \left\{ \dfrac{B}{\cosh a \cosh \omega} X_1 + \dfrac{\operatorname{senh} a}{\cosh a \cosh^2 \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} X_3 \right\} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = R \left\{ \dfrac{A}{\cosh a \cosh \omega} X_2 + \dfrac{\operatorname{senh} a}{\cosh a \cosh^2 \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial v} X_3 \right\} , \end{cases}$$

e quindi

$$ds_0^2 = \frac{R^2}{\cosh^2 a \cosh^2 \omega} (B^2 du^2 + A^2 dv^2) + \frac{R^2 \operatorname{senh}^2 a}{\cosh^2 a \cosh^4 \omega} d\omega^2 .$$

Ma, a causa delle (67), abbiamo

$$B \cos \varphi \, du - A \operatorname{sen} \varphi \, dv = d\omega ,$$

e d'altronde anche l'espressione

$$B \operatorname{sen} \varphi \, du + A \cos \varphi \, dv$$

è, per le (67) medesime, un differenziale esatto, poniamo

$$B \operatorname{sen} \varphi \, du + A \cos \varphi \, dv = d\psi ,$$

da cui quadrando e sommando

$$B^2 du^2 + A^2 dv^2 = d\omega^2 + d\psi^2 .$$

Così la formola per il ds_0^2 diventa

$$(68) \qquad ds_0^2 = R^2 \left\{ \frac{\cosh^2 \omega + \operatorname{senh}^2 a}{\cosh^2 a \cosh^2 \omega} d\omega^2 + \frac{d\psi^2}{\cosh^2 a \cosh^2 \omega} \right\} ,$$

e pone in evidenza l'elemento lineare di una superficie di rotazione. Riguardo alla curva meridiana si vede subito che può assumersi data da

$$z = R \operatorname{tgh} \omega , \qquad r = \frac{R}{\cosh a \cosh \omega} ,$$

ed è dunque l'ellisse

$$\frac{z^2}{R^2} + \frac{r^2}{\frac{R^2}{\cosh^2 a}} = 1 .$$

Si vede che: *la S_0 è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione col semi-asse maggiore* $= R$ *(al raggio della sfera) e di semi-asse minore* $= \dfrac{R}{\cosh a}$.

È da osservarsi che le sfere descritte coi centri nei punti M_0 di S_0 e con raggio

$$T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega$$

toccano rispettivamente in F, F' le due deformate S, S' della sfera che sono le due falde dell'inviluppo. Se in luogo delle S, S' vogliamo considerare (secondo il teorema di Bonnet) le due coppie di superficie parallele a queste e di curvatura media costante $\pm \dfrac{1}{R}$ (§. 248), basterà sostituire alle dette sfere quelle concentriche di raggio

$$R \pm T = R (1 \pm \operatorname{tgh} \omega \operatorname{tgh} a) ,$$

valori che eguagliano le distanze del centro M_0 dai due fuochi. Ritroveremo queste notevoli circostanze, sotto forma diretta, nelle future ricerche sui teoremi già sopra accennati di Guichard.

Veniamo ora all'altro caso:

Caso II) $$b = \frac{\pi}{2}, \quad T = R \coth a \coth \omega$$

$$x_0 = x + R \coth a \coth \omega \, X_3 .$$

Le (54), (54*) diventano ora

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = - A \operatorname{sen} \varphi, & \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = - B \cos \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = C \cos \varphi, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = - D \operatorname{sen} \varphi, \end{cases}$$

e per le derivate di x_0 abbiamo

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = R \left\{ \frac{A}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh} \omega} X_1 - \frac{\cosh a}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}^2 \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} X_3 \right\}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = R \left\{ \frac{B}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh} \omega} X_2 - \frac{\cosh a}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}^2 \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} X_3 \right\},$$

indi per l'elemento lineare ds_0 della S_0

$$ds_0^2 = R^2 \left\{ \frac{A^2 du^2 + B^2 dv^2}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2 \omega} + \frac{\cosh^2 a}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^4 \omega} d\omega^2 \right\}.$$

Ora le due espressioni

$$A \operatorname{sen} \varphi \, du + B \cos \varphi \, dv = - d\omega$$

$$A \cos \varphi \, du - B \operatorname{sen} \varphi \, dv = d\psi$$

sono due differenziali esatti, da cui quadrando e sommando risulta

$$A^2 du^2 + B^2 dv^2 = d\omega^2 + d\psi^2 ,$$

e la formola pel ds_0^2 si scrive

$$ds_0^2 = R^2 \left\{ \frac{\operatorname{senh}^2 \omega + \cosh^2 a}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^4 \omega} d\omega^2 + \frac{d\psi^2}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2 \omega} \right\}.$$

Questa appartiene ad una superficie di rotazione colla curva meridiana

$$z = R \coth \omega \qquad r = \frac{R}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}^2 \omega},$$

e qui abbiamo dunque un iperboloide di rotazione a due falde col semiasse trasverso $= R$ e di semiasse coniugato $= \dfrac{R}{\operatorname{senh} a}$. Le sfere coi centri su S_0 e di raggio

$$T = R \coth a \coth \omega$$

hanno per inviluppo le due deformate della sfera S, S' e si osserverà che ancora qui le quantità

$$R \coth a \coth \omega \pm R$$

dànno le due distanze focali.

§. 279.

Permutabilità colla trasformazione di Hazzidakis.

Andiamo ora ad esaminare le relazioni fra le trasformazioni di Bäcklund delle deformate della sfera e la trasformazione involutoria di Hazzidakis.

Abbiasi una deformata S della sfera ed una sua trasformata di Bäcklund S_1 secondo le formole del §. 274. Suppongasi inoltre di conoscere la trasformata $\bar{S}$ di S per la trasformazione di Hazzidakis con

$$\bar{ds}^2 = R^2 (\cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2);$$

allora possiamo dimostrare: *Note* S, S_1, $\bar{S}$, *possiamo trovare in termini finiti la trasformata di Hazzidakis* $\bar{S}_1$ *della* S_1, *che sarà alla sua volta legata alla* $\bar{S}$ *da una corrispondente trasformazione di Bäcklund.*

Per questo daremo le formole effettive per la $\bar{S}_1$ e sopra di esse sarà facile eseguire le verifiche. Denotiamo con

$$\bar{x}, \ \bar{X}_1, \ \bar{X}_2, \ \bar{X}_3, \ldots$$

le quantità che per la $\bar{S}$ tengono il posto delle x, X_1, X_2, X_3 per la S; queste quantità, che si suppongono note, soddisfano alle relazioni analoghe delle (C) §. 274

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = R\cosh\theta\,\bar{X}_1, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_2 - \operatorname{senh}\theta\,X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \bar{X}_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\bar{X}_1, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\,\bar{X}_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = R\operatorname{senh}\theta\,\bar{X}_2, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\bar{X}_2, \quad \dfrac{\partial \bar{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_1 - \cosh\theta\,\bar{X}_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \bar{X}_3}{\partial v} = \cosh\theta\,\bar{X}_2. \end{cases}$$

Andiamo a verificare che le formole

$$(70)\qquad \bar{x}_1 = \bar{x} + \frac{R}{\operatorname{senh}\sigma}(\cosh\theta_1\,\bar{X}_1 + i\operatorname{senh}\theta_1\,\bar{X}_2)$$

colle analoghe per $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$, definiscono la superficie $\bar{S}_1$ domandata, trasformata di Hazzidakis della S_1 e trasformata di Bäcklund della $\bar{S}$.

Derivando le (70) colle (69) e tenendo conto delle equazioni (D) di trasformazione (§. 274), troviamo

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = R\cosh\theta_1\Big\{(\cosh\theta\cosh\theta_1 + \coth\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,\bar{X}_1 + \\ + i(\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \coth\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1)\,\bar{X}_2 - \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\sigma}\bar{X}_3\Big\}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = R\operatorname{senh}\theta_1\Big\{i(\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \coth\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,\bar{X}_1 - \\ -(\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \coth\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1)\,\bar{X}_2 - \frac{i\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\sigma}\bar{X}_3\Big\},$$

e di qui intanto

$$d\bar{s}_1^2 = S\,d\bar{x}_1^2 = R^2(\cosh^2\theta_1\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta_1\,dv^2),$$

che combina col ds^2 della trasformata di Hazzidakis di S_1. Di più pei coseni di direzione della normale alla $\bar{S}_1$ troviamo

$$\bar{X}_2^{(1)} = \frac{\operatorname{senh}\theta_1\,\bar{X}_1 + i\cosh\theta_1\,X_2 - \cosh\sigma\,X_3}{\operatorname{senh}\sigma},$$

colle analoghe per $\bar{Y}_3^{(1)}$, $\bar{Z}_3^{(1)}$, e con queste si verifica subito che sulla $\bar{S}_1$ le linee u, v sono quelle di curvatura ed i raggi principali di curvatura hanno i valori

$$R\operatorname{tgh}\theta_1, \qquad R\coth\theta_1,$$

onde la $\bar{S}_1$ è trasformata di Hazzidakis di S_1.

Ma ora le formole

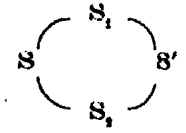
$$S(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = \frac{R^2}{\operatorname{senh}^2\sigma}, \quad S\,\bar{X}_3(\bar{x}_1 - \bar{x}) = 0 \quad S\,\bar{X}_3^{(1)}(\bar{x}_1 - \bar{x}) = 0$$

$$S\,\bar{X}_3\,\bar{X}_3^{(1)} = -\coth\sigma = \text{cost.te},$$

provano che la $\bar{S}_1$ è anche trasformata di Bäcklund della $\bar{S}$. Possiamo enunciare il risultato ottenuto sotto quest'altra forma:

Ogni coppia (S, S_1) *di deformate della sfera legate da una trasformazione di Bäcklund viene cangiata dalla trasformazione di Hazzidakis in un'altra tale coppia* $(S, \bar{S}_1)$.

Ed ora, se consideriamo una quaderna



di deformate della sfera nella relazione del teorema di permutabilità (§. 270), è chiaro che la trasformazione di Hazzidakis le cangierà ad un tempo in un'altra tale quaderna



Particolarmente interessante è il caso quando (S, S') sono reali (§. 276), con (S_1, S_2) coniugate immaginarie, chè la stessa cosa accade nella seconda quaderna trasformata di Hazzidakis. Se inoltre supponiamo che le normali ad S, S' s'incontrino, cioè $b = 0 \left(o\ b = \frac{\pi}{2} \right)$ lo stesso avverrà per le trasformate di Hazzidakis $\bar{S}$, $\bar{S}'$ ove si avrà in corrispondenza $b = \frac{\pi}{2}$ ($o\ b = 0$).

La superficie S_0 luogo del punto M_0 d' incontro delle prime normali sarà applicabile sull' ellissoide allungato di rotazione, e l' altra $\bar{S}_0$, luogo del punto $\bar{M}_0$ d' incontro delle seconde normali, sarà invece applicabile sull' iperboloide rotondo a due falde, e pel raggio T delle sfere coi centri su S_0 avremo

$$T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega,$$

per quelle invece coi centri su $\bar{S}_0$

$$\bar{T} = R \coth a \coth \omega,$$

onde

$$T . \bar{T} = R^2.$$

Aggiungiamo che, riguardando come coppie di punti corrispondenti sopra S_0, $\bar{S}_0$ i punti M_0, $\bar{M}_0$, questa corrispondenza conserva i sistemi coniugati e le linee geodetiche e le due quadriche rotonde su cui sono applicabili dànno una coppia di quadriche in rappresentazione omografica geodetica del §. 119.

§. 280.

Applicazione successiva delle trasformazioni.

Le ricerche precedenti ci pongono in grado di estendere ai metodi di trasformazione per le superficie deformate della sfera le conseguenze tratte dal teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie pseudosferiche. E possiamo enunciare il risultato:

Se per una superficie S deformata della sfera di raggio R, definita da

$$ds^2 = R^2 \left(\operatorname{senh}^2 \theta\, du^2 + \cosh^2 \theta\, dv^2 \right)$$

si sanno integrare completamente le equazioni di trasformazione (D) §. 274, *per un valore generico della costante σ, l' applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione alle nuove superficie via via ottenute si compirà con soli calcoli algebrici e di derivazione.*

Volendo limitarsi al caso più interessante nelle applicazioni di trasformazioni reali di superficie reali, basterà supporre alla costante σ nelle (D) o un valore reale $\sigma = a$, o un tale valore aumentato di $\frac{\pi i}{2}$ (§. 278), gli altri casi deducendosi da questo con trasformazioni di Bonnet-Lie. In ogni caso poi, quando insieme alla superficie iniziale S si conosca la sua trasformata $\bar{S}$ di Hazzidakis (per il che basta conoscere le geodetiche sopra S), sarà sempre opportuno applicare insieme le trasformazioni all' una e all' altra superficie nella coppia (S, $\bar{S}$), e si otterranno così sempre le nuove superficie a coppie di trasformate di Hazzidakis, dopo di che sull' una e sull' altra saranno note le linee geodetiche.

Come esempio consideriamo un gruppo infinito di deformate della sfera (corrispondenti al gruppo del §. 270 di superficie pseudosferiche), le cui equazioni si hanno in termini finiti per funzioni ordinarie.

Partiamo per ciò dalla soluzione evidente $\theta = 0$ della equazione fondamentale (B), alla quale corrisponderà una superficie S degenerata in una linea (retta) e corrispondente alle formole

$$(71) \quad \left| \begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = Rv \\ X_1 = -\operatorname{sen} u, & Y_1 = \cos u, & Z_1 = 0 \\ X_2 = 0, & Y_2 = 0, & Z_2 = 1 \\ X_3 = \cos u, & Y_3 = \operatorname{sen} u, & Z_3 = 0, \end{array} \right.$$

le quali mostrano la superficie S ridotta all'asse delle z, e quindi la sua parallela a curvatura media costante $\frac{1}{R}$ (Bonnet) come cilindro circolare retto di raggio = R coll' asse Oz.

È gioverà considerare insieme anche la sua trasformata $\bar{S}$ di Hazzidakis, ridotta pure all'asse Oz secondo le formole

$$(71^*)\quad \begin{cases} \bar{x}=0, & \bar{y}=0, & z=-Ru \\ \bar{X}_1=0, & \bar{Y}_1=0, & \bar{Z}_1=-1 \\ \bar{X}_2=-\operatorname{sen} v, & \bar{Y}_2=\cos v, & \bar{Z}_2=0 \\ \bar{X}_3=\cos v, & \bar{Y}_3=\operatorname{sen} v, & \bar{Z}_3=0. \end{cases}$$

Le equazioni (B) per $\theta=0$ diventano

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u}=\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_1, \qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial v}=i\cosh\sigma\operatorname{senh}\theta,$$

e si integrano con

$$(72)\qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)=e^{u\operatorname{senh}\sigma+iv\cosh\sigma},$$

avendo omessa la costante moltiplicativa non essenziale. Lasciando alla costante σ un valore complesso qualunque

$$\sigma=a+ib,$$

e ponendo $\theta_1=\omega+i\varphi$, si separano subito nella (72) le parti reali ed immaginarie, onde basterebbe applicare le formole del §. 276 per dedurne ∞^2 deformate reali della sfera dipendenti dalle due costanti arbitrarie a, b. Con sole operazioni di derivazione avremo di qui il gruppo infinito di deformate della sfera dipendenti dalle funzioni ordinarie, di cui sopra è discorso.

Qui limitiamoci a prendere $b=0$, e dalle superficie relative a questo caso si avranno le generali indicate con trasformazioni di Bonnet-Lie. Avendosi ora

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)=e^{u\operatorname{senh}a+iv\cosh a},$$

se poniamo per brevità

$$(73)\qquad u_1=u\operatorname{senh}a, \qquad v_1=v\cosh a,$$

ne deduciamo

$$\cosh\theta_1=-\coth(u_1+iv_1), \qquad \operatorname{senh}\theta_1=-\frac{1}{\operatorname{senh}(u_1+iv_1)},$$

da cui separando il reale dall'immaginario

$$\begin{cases} \cosh\omega\cos\varphi=-\dfrac{\operatorname{senh}u_1\cosh u_1}{\operatorname{senh}^2u_1+\operatorname{sen}^2v_1}, & \operatorname{senh}\omega\cos\varphi=-\dfrac{\operatorname{senh}u_1\cos v_1}{\operatorname{senh}^2u_1+\operatorname{sen}^2v_1} \\ \cosh\omega\operatorname{sen}\varphi=\dfrac{\cosh u_1\operatorname{sen}v_1}{\operatorname{senh}^2u_1+\operatorname{sen}^2v_1}, & \operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi=\dfrac{\operatorname{sen}v_1\cos v_1}{\operatorname{senh}^2u_1+\operatorname{sen}^2v_1}, \end{cases}$$

e quindi

$$\operatorname{tgh}\omega=\frac{\cos v_1}{\cosh u_1}.$$

Ricerchiamo dapprima le due superficie S_0, $\bar{S}_0$ applicabili rispettivamente sull'ellissoide e sull'iperboloide rotondo che ne derivano secondo il §. 278.

Avendosi nel caso attuale

$$T=R\operatorname{tgh}a\frac{\cos v_1}{\cosh u_1}$$

$$\bar{T}=R\coth a\frac{\cosh u_1}{\cos v_1},$$

basterà applicare le formole

$$x_0=x+TX_3, \quad y_0=y+TY_3, \quad z_0=z+TZ_3$$

$$\bar{x}_0=\bar{x}+\bar{T}\bar{X}_3, \quad \bar{y}_0=\bar{x}+\bar{T}\bar{Y}_2, \quad \bar{z}_0=\bar{z}+\bar{T}\bar{Z}_3.$$

Sostituendo i valori (71), (71*), otteniamo le due superficie

$$S_0)\quad x_0=R\operatorname{tgh}a\frac{\cos v_1}{\cosh u_1}\cos u, \quad y_0=R\operatorname{tgh}a\frac{\cos v_1}{\cosh u_1}\operatorname{sen}u, \quad z_0=Rv$$

$$\bar{S}_0\quad \bar{x}_0=R\coth a\frac{\cosh u_1}{\cos v_1}\cos v, \quad \bar{y}_0=R\coth a\frac{\cosh u_1}{\cos v_1}\operatorname{sen}v, \quad \bar{z}_0=-Ru,$$

applicabili la prima sull'ellissoide allungato di semi assi $\left(R, \frac{R}{\cosh a}\right)$, la seconda sull'iperboloide rotondo a due falde di semiassi $\left(R, \frac{R}{\operatorname{senh} a}\right)$.

Introducendo coordinate cilindriche

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = a r c \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z,$$

le equazioni di queste superficie hanno le semplici forme

$$S_0) \qquad r \cosh(\theta \operatorname{senh} a) = R \operatorname{tgh} a \cos\left(\frac{z \cosh a}{R}\right)$$

$$\overline{S}_0) \qquad r \cos(\theta \cosh a) = R \coth a \cosh\left(\frac{z \operatorname{senh} a}{R}\right).$$

È da osservarsi che le deformate dei paralleli della quadrica sono, sopra S_0, $\overline{S}_0$, le linee T o $\overline{T} =$ cost.te, cioè le $r =$ cost.te e sono quindi descritte sopra cilindri di rotazione attorno all'asse z.

Per le deformate corrispondenti S', $\overline{S}'$ della sfera avremo

$$ds'^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta' du^2 + \cosh^2\theta' dv^2)$$

$$\overline{ds}'^2 = R^2(\cosh^2\theta' du^2 + \operatorname{senh}^2\theta' dv^2),$$

dove θ' sarà data, per la formola (53) §. 275 del teorema di permutabilità, da

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \operatorname{tgh} a \frac{\cos v_1}{\cosh u_1}.$$

Sarebbe facile scrivere le formole esplicite per questo superficie, ma qui ci basterà osservare che esse appartengono alla classe di Enneper (§. 252). E infatti essendo $\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$ il prodotto di due funzioni una della sola u, l'altra della sola v, ne segue che la superficie S' avrà piane le linee di curvatura $u =$ cost.te, e sferiche le altre, e per la trasformata $\overline{S}'$ di Hazzidakis saranno invece le $v =$ cost.te piane, le $u =$ cost.te sferiche.

APPENDICE

Nota sul metodo del triedro mobile.

1. — Nello svolgimento dato in questo libro ai metodi ed alle teorie della geometria infinitesimale ci siamo attenuti all'indirizzo inaugurato da Gauss coll'introduzione delle forme quadratiche differenziali fondamentali. Fra gli altri metodi equivalenti di presentare le formole generali della teoria delle superficie ha singolare importanza per la sua efficacia, e per l'effettiva parte che ha preso nello sviluppo storico delle teorie, il metodo così detto del *triedro mobile*, metodo informato a concetti cinematici del movimento relativo. È questo il metodo preferito dalla scuola Francese che trovasi sviluppato sistematicamente nelle classiche Lezioni del Darboux. Ci proponiamo nella presente nota di farne conoscere le formole fondamentali, adoperando, per più agevole confronto, le notazioni stesse usate dal Darboux.

Data una superficie S, riferita ad un sistema qualunque (u, v) di coordinate curvilinee, indichiamo al solito con

$$(1) \qquad ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare, e in ogni punto M di S come vertice pensiamo situato un triedro trirettangolo, di cui uno spigolo abbia la direzione (positiva) della normale coi coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3 e gli altri due, coi coseni

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2),$$

giacciano comunque nel piano tangente di S. Per altro si supporrà tale giacitura fissata esclusivamente rispetto alla prima forma fondamentale (1), sicchè allorquando la S, come superficie flessibile e inestendibile, venga a deformarsi trascini seco invariabilmente legato il detto triedro.

Indichiamo con $\varphi = \varphi(u, v)$ l'angolo di cui deve rotare, sulla pagina positiva del piano tangente e nel verso positivo delle rota-

zioni, la direzione (X_1, Y_1, Z_1) per sovrapporsi alla direzione positiva della linea $v = \text{cost.}^{te}$ e sarà così definita perfettamente l'orientazione, in ogni punto (u, v), del triedro mobile

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2), \quad (X_3, Y_3, Z_3),$$

che supponiamo direttamente congruente col triedro coordinato O $(x\ y\ z)$.

Consideriamo dapprima il triedro trasportato, parallelamente a sè stesso, col vertice nell'origine O, sicchè il nuovo triedro che diremo T avrà il vertice fisso in O ed al variare di u, v assumerà una doppia infinità di orientazioni. I nove coseni di direzione dei suoi spigoli disposti nel quadro:

$$(2) \qquad \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{matrix}$$

saranno i coefficienti di una sostituzione ortogonale diretta ($\text{det.}^{te} = +1$) dipendenti dalle due variabili u, v. Ora se in una linea del quadro (2) sostituiamo ai coefficienti le loro derivate parziali rispetto ad u o v, il determinante corrispondente è nullo (perchè il valore risulta $= \mathrm{S} X_i \dfrac{\partial X_i}{\partial u}$, o $= \mathrm{S} X_i \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = 0$); per ciò ciascuna di quelle tre derivate è una medesima combinazione lineare omogenea dei coseni delle altre due linee. Scrivendo per disteso le formule corrispondenti alle derivate dei coseni della prima verticale, ove si tenga conto delle condizioni d'ortogonalità, si vedrà subito che esse assumono la forma seguente:

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = r X_2 - q X_3, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = r_1 X_2 - q_1 X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = p X_3 - r X_1, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = p_1 X_3 - r_1 X_1 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = q X_1 - p X_2, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = q_1 X_1 - p_1 X_2 \end{cases}$$

dove (p, q, r), (p_1, q_1, r_1) sono due terne di funzioni di u, v a cui, pel loro significato geometrico, si dà il nome di *rotazioni* del triedro. (1) Alle stesse equazioni (I) soddisfano le altre due terne

$$(Y_1, Y_2, Y_3), \quad (Z_1, Z_2, Z_3).$$

Ora scrivendo le condizioni d'integrabilità delle (I), si trova subito che le rotazioni p, q, r; p_1, q_1, r_1 debbono soddisfare alle tre relazioni fondamentali

$$(II) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1 \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1 \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1. \end{cases}$$

Inversamente se p, q, r; p_1, q_1, r_1 sono funzioni di u, v soddisfacenti a queste relazioni, le (I) formano un sistema *completamente integrabile ed ortogonale* e scelta arbitrariamente un'orientazione iniziale del triedro T, diciamo per $u = u_0$, $v = v_0$, ne resterà individuata l'orientazione generica

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

per una coppia arbitraria (u, v) delle variabili. Possiamo quindi concludere: *Le relazioni* (II) *costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le sei rotazioni di un triedro mobile in una doppia infinità di orientazioni.*

(1) In effetto p, q, r sono le componenti, attorno agli assi di T, della rotazione infinitesima che subisce T quando si tenga fissa v e si faccia variare u; analogamente per p_1, q_1, r_1.

2. — Venendo ora a considerare il triedro mobile T, parallelo a T, col vertice nel punto $M \equiv (u, v)$ della superficie S, saranno nulli i due determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

perchè ciascuna volta le tre direzioni corrispondenti agli elementi delle tre linee orizzontali sono complanari. Ne risulta che potremo porre

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \xi X_1 + \eta X_2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \xi Y_1 + \eta Y_2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \xi Z_1 + \eta Z_2, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \xi_1 X_1 + \eta_1 X_2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi_1 Y_1 + \eta_1 Y_2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \xi_1 Z_1 + \eta_1 Z_2, \end{cases}$$

dove $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ sono quattro funzioni di u, v aventi rispetto al triedro mobile T il significato geometrico di *traslazioni*.

Dalle (III) si deduce subito che le traslazioni sono legate ai coefficienti del ds^2 dalle formole

$$\text{(3)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = E, \quad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 = F, \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 = G,$$

onde rilevasi

$$(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2 = EG - F^2,$$

e ponendo per brevità

$$\Delta = EG - F^2$$

si avrà quindi

$$\xi\eta_1 - \eta\xi_1 = \pm\sqrt{\Delta},$$

avendo indicato come al solito con $\sqrt{\Delta}$ il valore positivo del radicale.

L'incertezza del segno in questa formola si toglie ricordando che si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = +\sqrt{\Delta},$$

e d'altronde per le (III) lo stesso determinante è il prodotto dei due

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix},$$

dei quali il secondo è l'unità positiva; si ha dunque in definitiva

$$\text{(4)} \qquad \xi\eta_1 - \eta\xi_1 = \sqrt{\Delta}.$$

Avendo riguardo a questa ed alle (3), e ricordando che l'angolo ω delle linee coordinate è definito dalle formole

$$\text{(5)} \qquad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{EG}},$$

possiamo esprimere le quattro traslazioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ per un unico angolo ausiliario φ nel modo seguente:

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} \xi = \sqrt{E}\cos\varphi, & \eta = \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi \\ \xi_1 = \sqrt{G}\cos(\omega + \varphi), & \eta_1 = \sqrt{G}\operatorname{sen}(\omega + \varphi). \end{cases}$$

Ed ora, avendosi dalle (3)

$$S\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}X_1 = \cos\varphi, \quad S\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}X_2 = \operatorname{sen}\varphi,$$

vediamo che: φ *misura la rotazione positiva che deve compiere nel piano tangente la direzione* (X_1, Y_1, Z_1) *per sovrapporsi alla direzione positiva della tangente alla linea* $v = cost.$[1]

3. — Scriviamo ora le condizioni d'integrabilità delle (III), sviluppando l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial v}(\xi X_1 + \eta_1 X_2) - \frac{\partial}{\partial u}(\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2),$$

che per le (I) si cangia in un'espressione lineare omogenea in X_1, X_2, X_3, i cui singoli coefficienti debbono essere nulli. Così otteniamo le tre condizioni

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1 r - \xi r_1 \end{cases}$$

$$\text{(V)} \qquad \eta p_1 - \xi q_1 + \xi_1 q - \eta_1 p = 0.$$

Sostituiamo ora nelle (IV) i valori (6) di ξ, η, ξ_1, η_1 esprimendovi le derivate dell'angolo ω colle formole

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -\sqrt{\Delta}\left[\frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + \frac{1}{G}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = -\sqrt{\Delta}\left[\frac{1}{E}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \frac{1}{G}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right]$$

che si ricavano per derivazione dalle (5). Risolvendo dopo ciò le (IV) rispetto alle derivate di φ, otteniamo

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - r \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - r_1, \end{cases}$$

onde vediamo intanto che: *le rotazioni* r, r_1 *dipendono unicamente dall'elemento lineare della* S *e dalla orientazione scelta pel triedro* $\overline{T}$.

Eliminando poi φ dalle (7) deduciamo

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{E}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right],$$

e siccome per la formola (V) §. 41 il secondo membro non è altro che la curvatura K del ds^2 moltiplicata per $\sqrt{\Delta}$, la precedente si scrive

$$\text{(8} \qquad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = K\sqrt{\Delta}.$$

Supposto scelto in modo arbitrario l'angolo φ, e fissata così l'orientazione del triedro $\overline{T}$, le formole (7) daranno i valori delle rotazioni r, r_1 e le altre quattro rotazioni

$$p,\ q;\ p_1,\ q_1$$

dovranno soddisfare le (II) e (V), cioè il sistema:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1 \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1 \\ pq_1 - qp_1 = K\sqrt{\Delta} \\ \eta_1 p - \xi_1 q + \xi q_1 - \eta p_1 = 0, \end{cases}$$

dove le traslazioni ξ, η; ξ_1, η_1 hanno i valori (6) e le rotazioni r, r_1 i valori tratti dalle (7). Ma dalle considerazioni superiori risulta pure che inversamente: *Se le rotazioni* p, q; p_1, q_1 *soddisfano le quattro equazioni* (A), *avendovi le* ξ, η; ξ_1, η_1 *i valori* (6) *contenenti l'angolo arbitrario* φ, *e le rotazioni* r, r_1 *i valori tratti dalle* (7), *ne risulterà individuata una superficie* S *del dato elemento lineare* (1).

Il sistema (A), insieme alle formole (6), (7), tiene perfettamente il luogo nella teoria generale delle superficie delle formole fondamentali del metodo di Gauss (Cap. IV).

Se si derivano le (III) rapporto ad u, v e per le derivate seconde si sostituiscono nei primi membri i valori che risultano dalle formole fondamentali

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D X_3 = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} (\xi X_1 + \eta X_2) +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2) + D X_3 ,$$

e dalle altre analoghe, basta paragonare dall' una e dall' altra parte i termini in X_3 per ottenere i valori dei coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale espressi per le traslazioni e per le rotazioni colle formole seguenti

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} D = \eta p - \xi q , & D' = \eta p_1 - \xi q_1 \\ D' = \eta_1 p - \xi_1 q , & D'' = \eta_1 p_1 - \xi_1 q_1 . \end{cases}$$

E il paragone dei coefficienti di X_1, X_2 darebbe invece i valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ di Christoffel espressi per le rotazioni e per le traslazioni.

FINE DEL VOLUME PRIMO

INDICE DELLE MATERIE DEL VOLUME I.

CAPITOLO I.

Curve a doppia curvatura.

§. 1.	— Tangente e piano normale.	pag.	1
2.	— Prima curvatura o flessione	»	2
3.	— Piano osculatore	»	5
4.	— Triedro principale	»	8
5.	— Seconda curvatura o torsione	»	10
6.	— Formole di Frenet	»	11
7.	— Significato del segno della torsione	»	14
8.	— Equazioni intrinseche delle curve	»	16
9.	— Integrazione delle equazioni intrinseche	»	18
10.	— Eliche cilindriche in generale	»	22
11.	— Eliche cilindriche speciali	»	23
12.	— Superficie inviluppi	»	26
13.	— Superficie canali	»	29
14.	— Superficie sviluppabili	»	30
15.	— Sviluppabile rettificante	»	31
16.	— Determinazione delle geodetiche di una sviluppabile	»	33
17.	— Sviluppabile polare	»	36
18.	— La sfera osculatrice	»	38
19.	— Curva luogo dei centri delle sfere osculatrici	»	41
20.	— Evolventi ed evolute	»	44
21.	— Trajettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di piani	»	47
22.	— Trasformazione di Combescure delle curve	»	50
23.	— Applicazione delle trasformazioni di Combescure	»	51
24.	— Trajettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di sfere	»	55
25.	— Metodo di Darboux	»	57
26.	— Altre formole generali per le curve gobbe	»	60
27.	— Le curve di Bertrand	»	62
28.	— Determinazione di tutte le curve di Bertrand	»	66

Capitolo II.

Forme differenziali quadratiche.

§. 29. — Forme quadratiche algebriche . . . . . pag. 69
30. — Forme differenziali quadratiche . . . . . » 73
31. — Invarianti e parametri differenziali . . . . . » 74
32. — Parametri differenziali primi $\Delta_1 U$, $\varphi (U, V)$ . . » 75
33. Equivalenza di forme quadratiche differenziali. Formole di Christoffel. . . . . » 78
34. — Proprietà dei simboli a tre indici . . . . . » 81
35. — Derivate seconde covarianti e parametro differenziale secondo $\Delta_2 U$ . . . . . » 83
36. — Equazioni ai differenziali totali per le p_{ik} . . . » 87
37. — Le condizioni d' integrabilità . . . . . » 89
38. — Simboli di Riemann e loro proprietà . . . . . » 91
39. — Caso d' illimitata integrabilità . . . . . » 93
40. — Forme quadratiche simultanee f, φ e forma trilineare associata . . . . . » 95
41. — Invariante assoluto K (curvatura) di una forma binaria » 100
42. — Forme binarie simultanee . . . . . » 103

Capitolo III.

Coordinate curvilinee sulle superficie Rappresentazioni conformi.

§. 43. — Coordinate curvilinee sopra una superficie . . pag. 108
44. — Elemento lineare ed elemento d' area . . . » 110
45. — Metrica angolare sulla superficie . . . . » 114
46. — Involuzione ortogonale di elementi lineari . . . » 117
47. — Involuzioni generali di coppie d' elementi lineari . » 119
48. — Simboli di Christoffel, parametri differenziali e curvatura » 122
49. — Cangiamento di variabili — Sistemi isotermi . . » 124
50. — Parametri isometrici . . . . . » 129
51. — Teorema di Lie pei sistemi isotermi . . . . » 131
52. — Rappresentazione di una superficie sopra un' altra in generale . . . . . » 132
53. — Teorema di Tissot — Ellisse delle dilatazioni, moduli principali . . . . . » 135
54. — Rappresentazioni conformi . . . . . » 139
55. — Caso delle superficie di rotazione . . . . » 141

§. 56. — La sfera complessa . . . . . pag. 143
57. — I doppi sistemi ortogonali di circoli sulla sfera e sul piano . . . . . » 146
58. — Le affinità circolari di Möbius nel piano . . . » 147
59. — Collineazioni della sfera in sè — Movimenti . . » 150
60. — Le reti di Tchebychef sulle superficie . . . » 153
61. — Equazioni di Servant per le reti di Tchebychef . » 156
62. — Esistenza delle reti di Tchebychef e loro arbitrarietà » 158
63. — Le reti di Tchebychef sul piano e sulla sfera . . » 160

Capitolo IV.

Formole fondamentali per la teoria delle superficie.

§. 64. — La seconda forma quadratica fondamentale per una superficie . . . . . pag. 163
65. — Equazioni fondamentali per $\frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_r}$ . . » 167
66. — Le condizioni d' integrabilità . . . . . » 171
67. — Le equazioni di Gauss e Codazzi . . . . . » 174
68. — Prima dimostrazione del teorema A) (in coordinate generali) . . . . . » 177
69. — Seconda dimostrazione (con riferimento alle linee di curvatura) . . . . . » 180
70. — Linee di curvatura — Proprietà fondamentali . . » 184
71. — Loro equazioni in coordinate curvilinee . . . » 187
72. — Le curvature delle linee uscenti da un punto sulla superficie . . . . . » 190
73. — Formola di Eulero per le curvature delle sezioni normali . . . . . » 192
74. — Curvatura media e curvatura totale (di Gauss) . » 196
75. — Tangenti coniugate secondo Dupin . . . . . » 199
76. — Linee asintotiche . . . . . » 202
77. — Teorema di Beltrami-Enneper per la torsione delle asintotiche . . . . . » 204
78. — Proprietà fondamentali dei sistemi coniugati . . » 208
79. — Sistemi isotermo-coniugati e linee asintotiche . . » 210
80. — Alcune applicazioni . . . . . » 213
81. — Inversione per raggi vettori reciproci . . . » 215
82. — Calcolo di parametri differenziali . . . . » 217
83. — Elementi delle superficie in coordinate cartesiane . » 221

Capitolo V.

Rappresentazione sferica di Gauss. — Coordinate tangenziali.

§. 84. — Rappresentazione di Gauss per le superficie non sviluppabili . . . . . pag. 224
85. — Formole di Weingarten pei simboli di Christoffel . » 228
86. — Formole generali di rappresentazione sferica . . » 232
87. — Complementi alle formole generali . . . . . » 235
88. — Immagini sferiche delle asintotiche. — Condizione del Dini . . . . . » 238
89. — Le linee asintotiche sulle superficie d' area minima . » 241
90. — Le asintotiche sulle superficie pseudosferiche . . » 243
91. — Le formole di Lelieuvre per le asintotiche . . » 244
92. — Applicazioni delle formole di Lelieuvre . . . » 248
93. — Superficie con assegnata immagine sferica di un sistema coniugato . . . . . » 251
94. — Sistemi isotermo-coniugati — Nuove formole di Lelieuvre . . . . . » 253
95. Le formole di Weingarten in coordinate tangenziali . » 255
96. — Conferma analitica e ulteriori proprietà . . . » 259
97. — Applicazioni delle formole in coordinate tangenziali . » 262

Capitolo VI.

Curvatura tangenziale o geodetica — Linee geodetiche.

§. 98. — Curvatura tangenziale o geodetica . . . . . pag. 264
99. — Formola del Bonnet per la curvatura geodetica . » 267
100. — Formola del Liouville per la curvatura K . . » 270
101. — Linee geodetiche e loro equazione differenziale . » 273
102. — Altre forme dell'equazione differenziale delle geodetiche » 275
103. — La curvatura tangenziale come curvatura geodetica . » 278
104. — Equazione differenziale di Gauss per le geodetiche . » 282
105. — Proprietà generali delle linee geodetiche . . . » 284
106. — Linee geodeticamente parallele . . . . . » 286
107. — Forma geodetica polare del ds^2 . . . . . » 288
108. — Ellissi ed iperbole geodetiche . . . . . » 292
109. — La torsione delle linee geodetiche . . . . . » 294
110. — Torsione geodetica e sua relazione coll' assoluta . » 297
111. — Teoremi sull' integrazione dell' equazione differenziale delle geodetiche . . . . . » 299

§. 112. — Geodetiche sulle superficie di Liouville . . . pag. 302
113. — Le geodetiche sulle superficie di rotazione . . » 304
114. — Il teorema di Gauss sulla curvatura totale di un triangolo geodetico . . . . . » 306
115. — Sistemi doppi ortogonali di linee a curvatura geodetica costante . . . . . » 308
116. — Superficie rappresentabili geodeticamente sul piano. Teorema del Beltrami . . . . . » 310
117. — Problema generale della rappresentazione geodetica. Teorema del Dini . . . . . » 313
118. — Quadriche in corrispondenza omografica geodetica . » 316
119. — Le coppie di quadriche a centro in rappresentazione geodetica . . . . . » 317

Capitolo VII.

Superficie applicabili e teoremi generali sulla deformazione.

§. 120. — Superficie applicabili . . . . . pag. 321
121. — Elementi invariabili per flessione . . . . . » 324
122. — Risoluzione del primo problema dell' applicabilità nel caso generale . . . . . » 326
123. — Esame del caso singolare (A) . . . . . » 329
124. — Caso delle superficie a curvatura costante . . . » 330
125. — Le ∞^3 applicabilità in sè di una superficie a curvatura costante . . . . . » 333
126. — Le tre forme tipiche del ds^2 per una superficie pseudosferica . . . . . » 335
127. — Le superficie pseudosferiche di rotazione . . . » 337
128. — Regioni di superficie pseudosferiche applicabili sui tre tipi di rotazione . . . . . » 341
129. — Superficie con un gruppo continuo di applicabilità in sè. Elicoidi . . . . . » 343
130. — Superficie di rotazione applicabili . . . . . » 345
131. — Esempi di elicoidi applicabili sopra superficie di rotazione . . . . . » 349
132. — Elicoidi pseudosferiche del Dini . . . . . » 353
133. — Il secondo problema dell'applicabilità e la relativa prima equazione . . . . . » 355
134. — Seconda dimostrazione — La seconda equazione dell'applicabilità . . . . . » 358
135. — Indeformabilità di una superficie con una linea rigida (non asintotica) . . . . . » 361

§. 136. — Deformazione di una superficie, assegnata la deformata di una sua curva . . . . . pag. 364
137. — Verifiche relative alla superficie deformata . . » 367
138. — Equazioni di Darboux per le asintotiche virtuali . » 370
139. — Applicazione ai problemi di deformazione . . . » 373
140. — Le asintotiche come linee di piegamento . . . » 375

Capitolo VIII.

Deformazione delle superficie rigate.

§. 141. — Teoremi di Bonnet e Beltrami per la deformazione delle rigate . . . . . pag. 377
142. — Secondo teorema di Bonnet sulle rigate applicabili . » 380
143. — Elemento lineare di una rigata . . . . . » 381
144. — Linea di stringimento e teoremi di Bonnet . . » 385
145. — Paraboloide delle normali e formola di Chasles . » 388
146. — Asintotiche curvilinee — Teorema di P. Serret . » 392
147. — Deformazioni delle rigate secondo Minding . . » 394
148. — Metodo di Beltrami . . . . . » 397
149. — Deformazione che cangia la direttrice in asintotica . » 399
150. — Deformazioni diverse . . . . . » 401
151. — Rigate applicabili sopra superficie di rotazione . » 403
152. — Determinazione di tutte queste rigate — Teoremi di Laguerre e Bioche . . . . . » 405
153. — Il teorema di Chieffi . . . . . » 407

Capitolo IX.

Superficie evolute e teoremi di Weingarten.

§. 154. — Le due falde dell' evoluta di una superficie . . pag 411
155. — Evolventi di una data superficie . . . . . » 413
156. — Superficie di cui una falda dell' evoluta si riduce ad una curva . . . . . » 414
157. — Calcolo degli elementi fondamentali dell' evoluta . » 416
158. — Costruzione di Beltrami pel raggio di curvatura geodetica . . . . . » 419
159. — Evoluta media secondo Ribaucour . . . . . » 421
160. — Le superficie W e le loro due falde dell' evoluta . » 423
161. — Caso in cui sulle due falde si corrispondono le linee di curvatura . . . . . » 426

§. 162. — Teorema di Lie per le linee di curvatura di una superficie W . . . . . pag. 427
163. — Il primo teorema di Weingarten . . . . . » 429
164. — Il teorema reciproco di Weingarten . . . . . » 431
165. — Elemento lineare sferico rappresentativo di una superficie W . . . . . » 433
166. — Classi complete di superficie W. . . . . » 436
167. — Le superficie complementari . . . . . » 439
168. — Caso di superficie applicabili sopra superficie di rotazione . . . . . » 442
169. — Applicazione alle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda . . . . . » 443
170. — Complementari delle superficie a curvatura costante . » 445
171. — Evolute ed evolventi delle superficie a curvatura costante . . . . . » 450

Capitolo X.

Sistemi ∞^1 di raggi o congruenze rettilinee.

§. 172. — Le due forme di Kummer per le congruenze rettilinee pag. 454
173. — Momento e parametro distributore nelle rigate della congruenza . . . . . » 456
174. — Punti limiti e formola di Hamilton . . . . . » 460
175. — Congruenze isotrope di Ribaucour . . . . . » 462
176. — Ascisse dei punti limiti . . . . . » 464
177. — Modo di variazione del parametro distributore . . » 466
178. — Fuochi e sviluppabili della congruenza . . . . » 468
179. — Superficie focali — Caso in cui coincidono (congruenze paraboliche) . . . . . » 471
180. — Congruenze normali — Teoremi di Beltrami e Malus-Dupin . . . . . » 474
181. — Congruenze con assegnata immagine sferica delle superficie principali . . . . . » 476
182. — Applicazione alle congruenze isotrope ed alle congruenze pseudosferiche . . . . . » 479
183. — Congruenze riferite alle sviluppabili . . . . . » 483
184. — Elementi delle due falde della superficie focale. . » 485
185. — Applicazione alle congruenze W, in particolare alle pseudosferiche. . . . . » 489
186. — Congruenze e superficie di Guichard . . . . . » 491

§. 187. — Formole generali del Sannia per le due forme fondamentali di una congruenza rettilinea . . . . pag. 493
188. — Applicazione alle congruenze rettilinee di Appell (generalizzate) . . . . . » 498

Capitolo XI.

Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane o sferiche.

§. 189. — Elemento lineare sferico riferito ad un doppio sistema ortogonale di circoli. . . . . pag. 502
190. — Costruzione geometrica di Darboux delle superficie a linee di curvatura piane . . . . . » 505
191. — La superficie con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 508
192. — Superficie modanate (moulures) . . . . . » 510
193. — Superficie di Joachimsthal . . . . . » 512
194. — Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari . . . . . » 515
195. — Le serie di superficie a linee di curvatura circolari associate ad una superficie qualunque . . . » 517
196. — Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 518
197. — Il teorema di Ribaucour . . . . . » 519
198. — Superficie a linee di curvatura sferiche in un sistema » 522
199. — Altra forma della condizione (α) . . . . . » 525
200. — Determinazione di tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche . . . . . » 527

Capitolo XII.

Le superficie d'area minima.

§. 201. — Cenno storico sulla teoria delle superficie d'area minima pag. 531
202. — Le superficie minime come superficie di traslazione . » 533
203. — Formole di Weierstrass per le superficie minime . » 537
204. — Nuova forma di queste formole — Superficie minime algebriche . . . . . » 540
205. — Superficie minime doppie . . . . . » 543
206. — Superficie minime con linee di curvatura piane. . » 544
207. — Superficie minime applicabili . . . . . » 547

§. 208. — Proprietà caratteristiche delle superficie minime associate . . . . . pag. 551
209. — Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione . . . . . » 554
210. — Le formole di Schwarz e il problema di Björling-Cauchy . . . . . » 558
211. — Superficie applicabili sopra superficie minime. . . » 563

Capitolo XIII.

Il problema di Plateau e la superficie minima di Schwarz.

§. 212 — Preliminari sul problema di Plateau . . . . pag. 566
213. — Caso di un contorno di Schwarz . . . . . » 568
214. — La rete ottaedrica sulla sfera . . . . . » 571
215. — Calcolo della funzione triangolare $s(\tau)$ . . . » 573
216. — Verifiche relative alla rappresentazione conforme . » 576
217. — Determinazione della superficie minima di Schwarz . » 579
218. — Verifiche relative al contorno . . . . . » 583
219. — Riduzione ad integrali ellittici . . . . . » 585
220. — Continuazione analitica della superficie di Schwarz . » 589
221. — Discontinuità propria del gruppo . . . . . » 593
222. — La superficie completa di Schwarz . . . . . » 595
223. — La superficie coniugata in applicabilità . . . » 597
224. — Il problema del minimo d'area — Teorema di Steiner » 600
225. — Teoremi di Schwarz sulla variazione seconda . . » 604

Capitolo XIV.

La geometria pseudosferica e la sua interpretazione non-euclidea.

§. 226. — Rappresentazione conforme sul semipiano . . . pag. 607
227. — Rette non euclidee — Misura delle distanze . . » 611
228. — Rappresentazione entro il cerchio limite . . . » 614
229. — La metrica pseudosferica come metrica non-euclidea — Angolo di parallelismo . . . . . » 618
230. — Classificazione dei movimenti diretti non-euclidei . » 622
231. — Movimenti inversi o di seconda specie . . . . » 625
232. — I circoli non-euclidei delle tre specie. . . . . » 628
233. — I triangoli non-euclidei e la loro area . . . . » 631

§. 234. — I triangoli non-euclidei nella seconda immagine . . pag. 634
235. — Le formole di trigonometria non-euclidea . . . » 638
236. — Rappresentazione geodetica del Beltrami e metrica Cayleyana . . . . . » 642
237. — Le coordinate di Weierstrass nel piano non-euclideo. » 645
238. — Le equazioni a derivate parziali di Weingarten per le coordinate di Weierstrass . . . . . » 649
239. — L'equazione di Riccati per la ricerca delle geodetiche » 652

Capitolo XV.

Le superficie a curvatura costante e la trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.

§. 240. — Il problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante . . . . . pag. 654
241. — Superficie pseudosferica con due assegnate asintotiche » 657
242. — Applicazione del metodo delle approssimazioni successive. . . . . » 660
243. — Il caso analitico . . . . . » 664
244 — Superficie pseudosferica con un'assegnata linea di curvatura . . . . . » 667
245. — Le superficie pseudosferiche riferite alle loro linee di curvatura . . . . . » 672
246. — Le superficie a curvatura costante positiva riferite alle linee di curvatura . . . . . » 675
247. — Le formole per la trasformazione di Hazzidakis . . » 678
248. — Le superficie a curvatura media costante e il relativo teorema di Bonnet . . . . . » 681
249. — Le trasformazioni di Bonnet-Lie per le superficie a curvatura costante . . . . . » 686
250. — Le superficie elicoidali a curvatura costante . . » 689
251. — Le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 693
252. — Le deformate della sfera con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 696
253. — Le superficie d'Enneper a curvatura costante come superficie di Joachimsthal . . . . . » 698
254. — La trasformazione complementare per le superficie pseudosferiche . . . . . » 700
255. — Le formole per la trasformazione complementare riferite alle linee di curvatura . . . . . » 701

256. — Verifiche delle proprietà della trasformazione complementare . . . . . » 704
257. — I sistemi ciclici di Ribaucour di raggio costante . » 707
258. — Applicazione successiva della trasformazione complementare . . . . . » 709
259. — Le complementari delle superficie d'Enneper . . » 711

Capitolo XVI.

La trasformazione di Bäcklund per le superficie a curvatura costante e il teorema di permutabilità.

§. 260. — Preliminari sulla trasformazione di Bäcklund . . pag. 715
261. — Verifiche delle proprietà della trasformazione di Bäcklund . . . . . » 719
262. — La trasformazione di Bäcklund in coordinate asintotiche . . . . . » 721
263. — La trasformazione di Bäcklund nell'immagine sferica » 724
264. — Scorrimenti delle reti di Tchebychef in geometria pseudosferica . . . . . » 727
265. — Applicabilità speciale delle due falde di una congruenza pseudosferica . . . . . » 732
266. — Preliminari al teorema di permutabilità . . . » 734
267. — La forma intrinseca del teorema di permutabilità . » 738
268. — Integrazione successiva dell'equazione fondamentale . » 741
269. — Significato geometrico completo del teorema . . » 743
270. — Applicazione ad un particolare gruppo di superficie pseudosferiche . . . . . » 747
271. — Composizione di due trasformazioni reali opposte di Bäcklund . . . . . » 750
272. — Calcolo dell'*elemento* lineare della S_0 (elicoide logaritmica) . . . . . » 752
273. — Composizione di due trasformazioni immaginarie opposte B_{ia}, B_{-ia} . . . . . » 756
274. — Trasformazioni (immaginarie) di Bäcklund per le deformate della sfera. . . . . » 758
275. — Il teorema (intrinseco) di permutabilità per le soluzioni della equazione (B) . . . . . » 763
276. — Le *formole effettive* per la quarta superficie S' . . » 767
277. — Caso in cui le normali alle superficie opposte S, S' s'incontrano . . . . . » 769

§. 278. — La superficie S_0 luogo del punto M_0 d' incontro come deformata di una quadrica rotonda . . . pag. 771
279. — Permutabilità colla trasformazione di Hazzidakis . » 775
280. — Applicazione successiva delle trasformazioni . . » 778

APPENDICE.

Nota sul metodo del triedro mobile . . . . . pag. 785

CORREZIONI

	Errata	Corrige
pag. 15ª linea 5ª dal basso	$\frac{1}{T} > 0$	$\frac{1}{T} < 0$
« 23 linea 16ª	(48)	(48*)
« 25 formole (14)	$u = Ae^{ht}$ cost.	$x = Ae^{ht}$ cost.
« 73 linea 2ª	quadratrica	quadratica
« 81 linea 11ª	$< \frac{n(n+1)}{2}$	$\leqq \frac{n(n+1)}{2}$
« 87 linea 5 dal basso	(I)	(I*)
« 111 linea 5ª nella formola (3) a destra	ds^2	dx^2
« 116 ultima	$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{\zeta}}\frac{dv}{ds}$	$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}$
« 138 linea 4ª	per la (37)	per la (32)
« 156 antipenultima	$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}'$	$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 0$
« 202 linea 13ª dal basso	(VII)	(VIII)
« 213 §. 79 ultima linea	(VI)	(XI)
« 260 linea 4ª	costante e	costante c e
« 263 linea 1ª	$y = ay_1 + ry_2$	$y = ay_1 + by_2$
« 268 linea 6 dal basso	(φ,	(φ, ψ)
« 270 formola (I*)	2 F M F	2 F M N
« 292 ultima linea citazione	pag. 219	pag. 221
« 294 linea 4 dal basso	$-S N \left\| \begin{matrix} \beta & \gamma \\ Y & Z \end{matrix} \right\|$	$-S \frac{dX}{ds} \left\| \begin{matrix} \beta & \gamma \\ Y & Z \end{matrix} \right\|$
« 380 ultima linea	$D_1 = \pm D'$	$D_1' = \pm D'$
« 382 ultima linea	$ds^2 = du$	$ds^2 = du^2$
« 391 linea 15ª	$\xi^2 - \eta^2 + 2k$	$\xi^2 - \eta^2 = 2k\zeta$
« 441 linea 6 dal basso	$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}$	$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$
« 441 linea 3ª	R =	$R^2 =$
« 457 linea 4ª	$\rho' =$	$p' =$

	Errata	Corrige
pag. 458 linea 6ª	$S\,l\ \frac{\partial l}{\partial v}$	$S\,l\ \frac{\partial l}{\partial v} = 0$
« 478 linea 5ª	$\rho^2 = r^4 - \rho^2$	$\rho^2 = r^4 - \gamma^2$
« 489 nella seconda delle (42)	K_1	K_2
« 499 linea 3ª	$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$
« 529 Intestazione	Deformazione	Determinazione
« 539 linea 8ª	$1 - \tau_0^2$	$1 + \tau_0^2$
« 545 ultima linea	$a = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2}$	$a = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2}$
« 549 linea 10ª	$y_0 = R\int (1+\tau) f(\tau)\, d\tau$	$y = -R\int (1+\tau^2) f(\tau)\, d\tau$
« 584 linea 5ª	$\sqrt{i} = \frac{1+1}{2}$	$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
« 586 ultima linea	$\pm 2\,\tau^2 F(\tau')\, a\tau'$	$\pm 2\,\tau' F(\tau')\, d\tau'$
« 631 linea 2ª	quelle	quello
« 645 linea 15ª	Cayly	Cayley
« 655 linea 8 dal basso	*eccetuato*	*eccettuato*