BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR1998
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B50718
035/2: : |a (CaOTULAS)160123326
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Bianchi, Luigi, |d 1856-1928.
245:00: |a Lezioni di geometria differenziale.
250: : |a 3. ed. interamente rifatta.
260: : |a Pisa, |b E. Spoerri, |c 1922-[1924]
300/1: : |a 2 v. in 3. |b diagrs. |c 24 cm.
500/1: : |a Vol.2, pt.2 has imprint: Bologna, N. Zanichelli, [1924]
650/1: 0: |a Geometry, Differential
998: : |c RAS |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

TERZA EDIZIONE INTERAMENTE RIFATTA

VOLUME II - PARTE II

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Pisa - Arti Grafiche Nistri-Lischi e Figli - V-1924

VOLUME SECONDO - PARTE SECONDA

CAPITOLO XXV.

Spazî a n dimensioni - Superficie e curve di questi spazî.

Lo spazio $\mathbf{S}_n$ definito dal suo ds^2. - Metrica lineare e metrica angolare. - Linee geodetiche. - Ipersuperficie geodeticamente parallele. - La curvatura per ogni orientazione secondo RIEMANN. - Spazî a curvatura costante. - Le tre curvature principali di un S_3. - Formole generali per le ipersuperficie negli spazî curvi. - Generalizzazione delle formole di GAUSS e di CODAZZI. - Le curve negli iperspazî. - Estensione del teorema di MEUSNIER e della formola d'EULERO. - Linee di curvatura. - Rappresentazioni conformi e loro proprietà. - Sistemi n.upli ortogonali negli spazî S_n. - Caso $n=3$ e teorema di DUPIN-DARBOUX.

§ 429.

Spazî S_n definiti dal ds^2 - Metrica lineare.

In tutto il corso di queste Lezioni noi ci siamo limitati fin qui allo studio delle proprietà geometriche infinitesimali concernenti l'ordinario spazio (Euclideo) a tre dimensioni. Ci proponiamo ora, in questa seconda parte del presente Volume, di porre i fondamenti per l'estensione di queste ricerche agli spazii di quante si vogliano dimensioni e di natura qualunque.

Consideriamo n variabili *reali* indipendenti

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

ciascuna delle quali possa, da principio, assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$. L'insieme di n particolari valori

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$$

attribuiti alle variabili si dirà un *punto*, e i valori $x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ prenderanno il nome di *coordinate del punto* ; spesso per denotare il punto useremo la notazione

$$(x_i^{(0)})\ i = 1, 2, \ldots n.$$

La totalità dei punti si chiamerà *spazio* S_n *a n dimensioni.* Se $x_1, x_2, \ldots x_n$, invece che illimitatamente, variano entro certi rispettivi campi, parleremo di una *regione* di S_n.

Consideriamo ora iu S_n l'insieme dei punti che si ottengono ponendo le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ eguali a determinate funzioni di $m < n$ variabili

$$u_1, u_2 \ldots u_m,$$

poniamo

$$x_i = x_i\,(u_1, u_2, , \ldots u_m) \quad i = 1, 2 \ldots n, \tag{1}$$

funzioni che si supporranno sempre in seguito finite e continue colle derivate fino a quell'ordine che occorra considerare.

La totalità di punti in S_n, rappresentata dalle (1), si dirà una varietà o *spazio subordinato* in S_n ; precisamente quando le funzioni $x_i\,(u_1, u_2 \ldots u_m)$ $i = 1, 2, \ldots n$ non possano esprimersi per meno di m variabili, diremo che la (1) è una *varietà* V_m a m *dimensioni.* (*) In particolare le varietà ad *una* dimensione si dicono *curve*, quelle a due dimensioni *superficie* e le varietà ad $n - 1$ dimensioni ipersuperficie.

Se le (1) sono equivalenti ad un sistema di equazioni lineari nelle coordinate x, diremo che la V_m è uno *spazio lineare* e la indicheremo con S_m, in particolare lo spazio *ambiente* stesso S_n sarà riguardato *lineare.* Si avverta però che queste locuzioni vengono usate solo per comodità di linguaggio e sono del tutto relative al *sistema di coordinate* (x_i) prescelto. Lo spazio lineare S_n della geometria sintetica è qui per noi soltanto uno spazio rappresentativo.

Ora noi stabiliamo una *metrica* nel nostro spazio coll'assegnare una forma differenziale quadratica nelle n variabiii x

$$f = \sum_{i,k}^{1..n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

che in tutta la regione di spazio da considerarsi supporremo a *discriminante* $a = |a_{ik}|$ *non nullo* e supporremo inoltre che i coefficienti a_{ik} siano, nella

---

(*) La varietà data dalle (1) è a m dimensioni se la caratteristica della matrice $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right\| \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$ è precisamente m. In generale il numero delle dimensioni della varietà si riconosce dalla caratteristica di questa matrice funzionale.

medesima regione, funzioni reali finite e continue delle x, insieme almeno alle loro derivate parziali prime e seconde. Per la realità poi della rappresentazione geometrica faremo anche l'ipotesi che la forma f risulti *definita positiva* in tutta la regione (*).

Definiremo come distanza ds di due punti infinitamente vicini dello spazio (x_1), $(x_1 + dx_1)$ l'espressione data dalla formola

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{2}$$

e diremo anche ds *l'elemento lineare* dello spazio. Così, se consideriamo in S_n una curva C colle equazioni parametriche.

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, = \ldots n),$$

essendo t il parametro che individua i punti della curva, *l'arco* s di questa curva da $t = t_0$ a $t = t_1$ sarà dato dall' integrale definito

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}\, x'_i\, x'_k}\, .\, dt,$$

dove gli accenti indicano derivazione rapporto a t e il radicale si assume positivamente contando s crescente con t.

In particolare, se chiamiamo linee coordinate (x_i) quelle lungo le quali varia il solo parametro x_i, e indichiamo con ds_i il loro elemento d'arco, avremo manifestamente

$$ds_i = \sqrt{a_{ii}}\, .\, dx_i,$$

e il radicale si assumerà positivamente contando s_i crescente con x_i.

§ 430.

Metrica angolare.

Definita la legge per la metrica delle lunghezze in S_n, passiamo a definire quella per gli angoli. Consideriamo per ciò due elementi lineari ds, δs

(*) Dal punto di vista analitico questa condizione, come l' altra della realità non sono necessarie. Il lettore riconoscerà facilmente negli sviluppi seguenti del testo quali continuano a sussistere nel campo generale analitico.

spiccati da un punto (x_i) a due punti infinitamente vicini $(x_i + dx_i)$, $(x_i + \delta x_i)$, talchè

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,\quad \delta s^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k.$$

Si vede subito che il valore assoluto dell'espressione

$$\sum_{ik} a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{\delta x_k}{\delta s}$$

è minore dell' unità, (*) ed esiste per ciò un angolo reale ω, compreso fra o e π, individuato dalla formola

$$\cos\omega = \sum_{ik} a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{\delta x_k}{\delta s}. \tag{3}$$

Quest'angolo ω si dirà l'angolo formato dai due elementi lineari $ds, \delta s$ o dalle loro direzioni. A giustificare questa convenzione è bene osservare (**) che la distanza Ds dei due punti infinitamente vicini $(x_i + dx_i)$, $(x_i + \delta x_i)$ è data, *a meno di infinitesimi d'ordine superiore*, da

$$Ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, (dx_i - \delta x_i)\, (dx_k - \delta x_k),$$

cioè

$$Ds^2 = ds^2 + \delta s^2 - 2ds\, \delta s \cos\omega,$$

precisamente come se si trattasse dell'ordinario spazio euclideo.

Dalla formola (3), indicando con ω_{ik} l'angolo formato dalle direzioni (positive) delle rispettive linee coordinate (x_i), (x_k) si deduce in particolare

$$\cos\omega_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii} a_{kk}}}. \tag{3*}$$

(*) La forma quadratica $\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$ essendo definita, l'equazione di secondo grado nel rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\sum_{ik} a_{ik}\, (\lambda \xi_i + \mu \eta_i)\, (\lambda \xi_k + \mu \eta_k) = 0$$

ha radici immaginarie e quindi

$$\left(\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k\right)^2 < \left(\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k\right) \cdot \left(\sum a_{ik} \eta_i\, \eta_k\right)$$

(**) BELTRAMI Parametri differenziali pag. 14 Opere Vol. II pag. 86.

A complemento della definizione di angoli, conviene poi aggiungere le osservazioni seguenti. Se mutiamo le variabili x in altri variabili y, e corrispondentemente trasformiamo la forma quadratica fondamentale (2) che dà il ds^2, le lunghezze e gli angoli, quali sopra li abbiamo definiti non subiscono alterazione.

Inoltre, se in S_n consideriamo una varietà subordinata V_m, e ponendo nella (2) per le x i loro valori espressi colle (1) per le u, calcoliamo il ds^2 della varietà.

$$(2^*) \qquad ds^2 = \sum_{r,s}^{1\ldots m} b_{rs}\, du_r\, du_s,$$

le lunghezze e gli angoli misurati in V_m, secondo la (2*), coincidono colle lunghezze e cogli angoli, misurati secondo la (2), nello spazio ambiente S_n (*).

Costanti di direzione. Una direzione uscente da un punto $(x_i^{(0)})$ risulta fissata dai valori delle n costanti

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

che diremo *costanti di direzione* ; esse sono legate dall'identità

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 1.$$

Chiameremo per brevità direzione (ξ_i), relativa ad un dato punto (x_i), quella che ha le costanti di direzione $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

Considerando due direzioni $(\xi_i^{(1)})$, $(\xi_i^{(2)})$, uscenti da un medesimo punto, pel loro angolo ω avremo

$$\cos\omega = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i^{(1)}\, \xi_k^{(2)};$$

(*) Accenniamo di passaggio alla nozione di *volume* (ipervolume) di una regione finita di S_n, pel quale s'intende il valore dell'integrale n^{plo}

$$Y = \int\int \ldots \int \sqrt{A}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

esteso alla detta regione R_n. Questo è in effetto un *invariante integrale* per mutamenti di coordinate, e nel caso euclideo si riduce al volume ordinario. Similmente dicasi per i volumi (od aree) delle varietà V_m subordinate.

in particolare la condizione d'ortogonalità sarà

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i^{(1)}\, \xi_k^{(2)} = 0.$$

Se $(\xi_i^{(1)}), (\xi_i^{(2)}) \ldots (\xi_i^{(m)})$ sono m direzioni uscenti da un medesimo punto $(x_i^{(0)})$, possiamo considerare la varietà lineare di equazioni parametriche

$$x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)}\, u_1 + \xi_i^{(2)}\, u_2 \ldots + \xi_i^{(m)}\, u_m \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{4}$$

dove $u_1, u_2, \ldots u_m$ sono i parametri ; questa sarà ad m dimensioni, un S_m, se la matrice

$$\left|\xi^{(1)}\, \xi_i^{(2)} \ldots \xi_i^{(m)}\right| \quad i = 1, 2, \ldots n$$

avrà caratteristica m, ed allora si dirà che le m direzioni sono *indipendenti*. Se al contrario la caratteristica della matrice sarà $r < m$, allora le m direzioni saranno dipendenti e giaceranno in un S_r.

Supposte le m direzioni indipendenti, consideriamo un'altra qualunque direzione (ξ_i) uscente da $(x_i^{(0)})$ e giacente nell' S_m, dato dalle (4), individuato dalle m direzioni. Per le costanti ξ_i di una tale direzione abbiamo dalle (4)

$$\xi_i = \lambda_1\, \xi_i^{(1)} + \lambda_2\, \xi_i^{(2)} + \ldots + \lambda_m\, \xi_i^{(m)} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

dove i parametri $\lambda_r = \dfrac{du_r}{ds}$ saranno legati dalla identità quadratica

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2 + 2\, \lambda_1\, \lambda_2 \cos \alpha_{12} + \ldots = 1,$$

avendo indicato con α_{rs} l'angolo delle due direzioni $(\xi_i^{(r)})$, $(\xi_i^{(s)})$.

Ora si osservi che per un punto (ordinario) di una varietà V_m, data dalle (1), si possono condurre m direzioni indipendenti tangenti a V_m, p. e. le m che hanno costanti ξ_i di direzione proporzionali alle derivate $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_r}$ $(r = 1, 2, \ldots m)$, le quali saranno effettivamente indipendenti se nel punto la matrice funzionale $\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial u_k}\right|$ avrà la sua caratteristica generica m. Queste m direzioni individuano l'S_m *tangente* nel punto a V_m. Ogni direzione per quel punto che sia normale a tutte le m dire ioni individuanti S_m è pure normale ad ogni altra direzione in S_m e dicesi *normale* ad S_m o alla varietà V_m Gli S_1 normali nel punto alla varietà formano un S_{n-m} che dicesi l'S_{n-m} *normale* a V_m. In particolare se V_m è un' ipersuperficie

($m = n - 1$), si ha una determinata normale, se V_m è una curva ($m = 1$) un *iperpiano* normale. Per angolo di due ipersuperficie in un loro punto comune s'intenderà l'angolo delle due loro normali.

Si consideri un'ipersuperficie coordinata x_r=cost^{te}; o come diremo l'ipersuperficie x_r; dette ξ_i le costanti di direzione della sua normale, queste saranno proporzionali ai minori della linea r^{ma} nel discriminante, (*) e qui, conservando le notazioni del Cap. II, avremo

$$\xi_i = \frac{A_{ri}}{\sqrt{A_{rr}}}.$$

Ne segue che indicando con $\Omega_{r,s}$ l'angolo delle due ipersuperficie coordinate x_r, x_s si ha

$$\cos \Omega_{r,s} = \frac{\sum_{ik} a_{ik} A_{ri} A_{sk}}{\sqrt{A_{rr} A_{ss}}},$$

ossia

$$\cos \Omega_{rs} = \frac{A_{rs}}{\sqrt{A_{rr} A_{ss}}}.$$

È importante osservare che, usando i parametri differenziali, questa formola può scriversi

$$\cos \Omega_{r,s} = \frac{\nabla (x_r, x_s)}{\sqrt{\Delta_1 x_r}\ \sqrt{\Delta_1 x_s}},$$

e per la natura invariantiva dei parametri differenziali ne risulta che se si considerano due ipersuperficie qualunque di rispettive equazioni

$$U (x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$V (x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

(*) I coseni di direzione della tangente alla linea (x_1), sono:

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, 0, \ldots 0$$

la direzione (ξ_i) è normale a questa quando

$$\sum_i a_{1i} \xi_i = 0.$$

La direzione (ξ_i) normale contemporaneamente alle direzioni $(x_1), (x_2) \ldots (x_{r-1})$, $(x_{r+1}) \ldots (x_n)$ ha dunque le costanti ξ_i proporzionali alle quantità A_{ri} e il fattore di proporzionalità si determina da $\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k = 1$.

in ogni loro punto comune l' angolo Ω d' intersezione sarà dato dalla formola

$$\cos\Omega = \frac{\nabla(U, V)}{\sqrt{\Delta_1 U}\cdot\sqrt{\Delta_1 V}}.$$

In particolare: *la condizione necessaria e sufficiente per l' ortogonalità delle due ipersuperficie è dato dall' annullarsi del parametro differenziale misto* $\nabla(U, V)$.

§. 431.

Linee geodetiche.

Colla legge di misurazione delle lunghezze in S_n viene altresì stabilito il concetto di *linee geodetiche*, che definiamo come quelle linee di S_n le quali per due loro punti qualunque A, B *presi sufficientemente vicini* segnano il più breve cammino, entro S_n, fra A e B.

Basta applicare i primi principi del calcolo delle variazioni per ottenere le equazioni differenziali caratteristiche di queste linee. Immaginiamo una tale linea geodetica g e le sue equazioni parametriche $x_i = x_i(t)$, nelle quali t rappresenterà l'arco di geodetica g contato da un punto fisso, onde avremo

$$\sum_{ik} a_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt} = 1. \tag{5*}$$

Prendiamo ora il tratto di geodetica g compreso fra due suoi punti A, B, corrispondenti ai valori t_0, t_1 di t, ed esprimiamo che sostituendo alla geodetica nel tratto AB un'altra linea qualunque *infinitamente vicina* a g, congiungente A con B *la variazione dell'arco* è nulla.

Da

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

indicando col simbolo δ le variazioni, segue

$$\delta ds = \frac{1}{2}\sum_{ikl}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\,ds\,\delta x_l + \sum_{ik} a_{il}\frac{dx_i}{ds}\,\delta dx_l,$$

onde integrando dalle due parti ed eseguendo sull' integrale

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{il} a_{il}\frac{dx_i}{ds}\,d\delta x_l$$

un'integrazione per parti coll'osservare che, per le nostre ipotesi, le variazioni δx_l ai limiti t_0, t_1 sono nulle, otteniamo

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sum_l \left\{ \sum_{i,k} \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} - \frac{d}{ds} \sum a_{il} \frac{dx_i}{ds} \right\} ds\, \delta s_l .$$

Dunque le equazioni differenziali che esprimono l' annullarsi di $\delta \int_{t_0}^{t_1} ds$ saranno le seguenti:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt} \sum_i a_{il} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \quad (l = 1, 2, \ldots n),$$

e queste sono, sotto una prima forma, le equazioni differenziali cercate per le linee geodetiche. Coi simboli di CHRISTOFFEL esse possono scriversi sotto la forma equivalente

$$\text{(B)} \qquad \sum_i a_{il} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda,\mu} \left[\begin{matrix} \lambda\mu \\ l \end{matrix} \right]_a \frac{dx_\lambda}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} = 0, \quad (l = 1, 2, \ldots n),$$

dove l'indice a apposto al simbolo di CHRISTOFFEL sta ad indicare che esso è costruito per la forma differenziale $\Sigma\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$.

Risolvendo le (B) rispetto alle derivate seconde, vengono a introdursi i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie e le (B) si pongono sotto la forma equivalente

$$\text{(B*)} \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\}_a \frac{dx_\lambda}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Se integriamo le (B) o (B*) in guisa che le x_i assumano per $t = t_0$ valori prefissati $x_i^{(0)}$ e le derivate prime $\frac{dx_i}{dt}$ valori iniziali ξ_i pure arbitrarii, soddisfacenti però alla condizione necessaria

$$\Sigma\, a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 1,$$

la condizione (5*) sarà sempre soddisfatta, perchè dalle (B) segue che identicamente

$$\frac{d}{dt} \sum_{ik} a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 0.$$

La linea corrispondente sarà dunque una geodetica e t sarà il suo arco. Vediamo di qui che : *una geodetica di* S_n *è fissata quando sia dato un suo punto iniziale* $(x_i^{(0)})$ *e sia data la direzione* (ξ_i) *secondo cui esce da questo punto.*

Una volta ottenute le equazioni differenziali (B) o (B*) delle geodetiche, si può del tutto prescindere dal modo come furono ottenute (come equazioni differenziali delle linee minimizzanti l'arco) e definire come linee geodetiche quelle appunto che soddisfano le (B) o (B*). Ma allora bisogna verificare il carattere invariantivo delle (B) rispetto a qualsiasi cangiamento di variabili (trasformazione di coordinate). Ciò è facile a farsi, ed anzi si vedrà di più che ogni geodetica di S_n è altresì geodetica di qualunque varietà V_m di S_n che la contenga. Siano infatti

$$x_i = x_i\,(u_1, u_2, \ldots u_m)\; i = 1, 2, \ldots n$$

le equazioni parametriche della varietà V_m, o in particolare se $m = n$ le formole di trasformazione delle coordinate. Pel ds^2 della varietà V_m avremo

$$ds^2 = \sum_{i\,k}^{1\ldots m} b_{ik}\, du_i\, du_k,$$

dove si è posto

$$b_{ik} = \sum_{\lambda_1 \mu}^{1\ldots n} a_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k}\,, \tag{6}$$

Se calcoliamo di qui i valori $\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_b$ dei simboli di CHRISTOFFEL per questa seconda forma differenziale, troviamo subito

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_b = \sum_{\lambda,\mu,\nu}^{1\ldots n} \left[\begin{matrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{matrix}\right]_a \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_l} + \sum_{\lambda_1 \mu}^{1\ldots n} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_l}\,. \tag{6*}$$

Ora, essendo le x funzioni delle u, e queste funzioni di t, si ha

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = \sum_{i}^{1\ldots m} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_\lambda}{dt^2} = \sum_{i,k}^{1\ldots m} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt} + \sum_{i}^{1\ldots m} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{dt^2}\,.$$

Sostituendo nella (B), segue

$$\sum_{\lambda}^{1\ldots n} a_{\lambda\nu} \sum_{i,k}^{1\ldots m} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt} + \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \sum_{i}^{1\ldots m} a_{\lambda\nu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{dt^2} +$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots n} \left[\begin{matrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{matrix}\right]_a \sum_{i,k}^{1\ldots m} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k} \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0\,,$$

e moltiplicando questa per $\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i}$ e sommando da $\nu = 1$ a $\nu = n$, otteniamo per le (6), (6*)

$$\sum_{i}^{1..m} b_{il} \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_{i,k}^{1..m} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}_b \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt} = 0 \quad (l = 1, 2, .. m).$$

Ora queste sono appunto le equazioni differenziali (B) delle geodetiche costruite per la varietà V_m, ciò che dimostra la proprietà enunciata.

§ 432.

Forma geodetica del ds^2.

Supponiamo che le linee coordinate (x_1) siano geodetiche, e inoltre che il parametro x_1 sia l'arco di queste geodetiche, contato a partire dal corrispondente punto d'incontro con una determinata ipersuperficie x_1, p. e. colla $x_1 = 0$ talchè le altre ipersuperficie x_1 siano il luogo degli estremi di archi eguali staccati sulle dette geodetiche, a partire da $x_1 = 0$. Applicando le equazioni differenziali (A) alle attuali geodetiche (x_1), avremo subito, a causa di $a_{11} = 1$

$$\frac{\partial a_{1l}}{\partial x_1} = 0, \text{ per } l = 2, 3, .. n. \tag{7}$$

Se supponiamo ora che le geodetiche (x_1) siano ortogonali alla ipersuperficie iniziale $x_1 = 0$, e si abbia quindi

$$a_{1l} = 0 \text{ per } x_1 = 0 \ (l = 2, 3, .. n),$$

allora siccome per le (7) a_{1l} è indipendente da x_1, sarà identicamente $a_{1l} = 0$, cioè anche tutte le altre ipersuperficie x_1 sono normali alle geodetiche (x_1) Di qui il teorema :

Se per ogni punto di una ipersuperficie Σ *si conducono le geodetiche normali e su queste, a partire da* Σ, *si staccano archi eguali, il luogo degli estremi è un'altra ipersuperficie* Σ' *ortogonale alle geodetiche stesse.* Due tali ipersuperficie Σ, Σ' si diranno *geodeticamente* parallele.

Questo teorema è evidentemente l' estensione agli iperspazî del teorema di GAUSS relativo alle gedetiche di un'ordinaria superficie (I § 105), che corriponde al caso $n=2$. Ma è da osservarsi che inversamente, da questo

caso particolare segue subito il generale. E infatti segnata una linea qualunque L dell'ipersuperficie Σ, le geodetiche g normali a Σ nei punti di L formano una V_2, una superficie a due dimensioni, sulla quale, pel teorema ordinario di GAUSS, la linea L′ luogo degli estremi di archi eguali staccati sulle g è ortogonale a queste. Ora la linea L′ può essere una qualunque linea di Σ', e per ciò questa ipersuperficie è normale a tutte le geodetiche g.

Ritornando alla forma dell'elemento lineare nell'ipotesi superiore, poichè

$$a_{11} = 1 \ , \ a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0,$$

avremo

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{r,s}^{2\ldots n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s \ , \tag{8}$$

e questa si dirà la *forma geodetica* dell'elemento lineare

Osserviamo che si ha

$$\Delta_1 x_1 = A_{11} = 1 \, ;$$

e vicerversa dimostriamo che: *se* $\theta = \theta\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ *è una funzione delle* x *soddisfacente all' equazione*

$$\Delta_1 \theta = 1, \tag{9}$$

le ipersuperficie $\theta = \text{cost}^{\text{te}}$ *saranno geodeticamente parallele e la distanza geodetica-costante fra due ipersuperficie* $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$ *sarà data da* $\theta_1 - \theta_0$.

E infatti facciamo un cangiamento di variabili x nelle x', ponendo

$$x'_1 = \theta$$

e scegliendo per linee coordinate (x'_1) le trajettorie ortogonali delle ipersuperficie $\theta = \text{cost}^{\text{te}}$ onde le altre ipersuperficie coordinate $x'_2 = \text{cost}^{\text{te}}$, $x'_3 = \text{cost}^{\text{te}}$, . . $x'_n = \text{cost}^{\text{te}}$, saranno tutte ortogonali alle $x'_1 = \text{cost}^{\text{te}}$, e per ciò (§ 430)

$$\nabla\,(x'_1, x'_2) = 0, \quad \nabla\,(x'_1, x'_3) = 0, \ldots \nabla\,(x'_1, x'_n) = 0.$$

Indicando con

$$ds^2 = \sum_{i,k} a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k$$

l'elemento lineare trasformato, avremo quindi

$$A'_{12} = 0, \quad A'_{13} = 0, \ldots A'_{1n} = 0,$$

e per ciò

$$a'_{12} = 0, \quad a'_{13} = 0, \ldots a'_{1n} = 0.$$

Inoltre da

$$\Delta_1 x'_1 = A'_{11} = 1$$

segue

$$a'_{11} = \frac{1}{A'_{11}} = 1 ,$$

onde il ds^2 riceve appunto la forma geodetica

$$ds^2 = dx'^2_1 + \sum_{r,s}^{2 \ldots n} a'_{rs}\, dx'_r\, dx' .$$

In generale, affinchè le ipersuperficie

$$U (x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{cost}^{te}$$

siano geodeticamente parallele sarà evidentemente necessario che sia $\Delta_1 U$ funzione della sola U :

$$\Delta_1 U = f (U) ;$$

ma questa condizione è anche sufficiente, poichè se è soddisfatta basta cangiare il parametro U in

$$\theta = \int \frac{dU}{\sqrt{f(u)}} ,$$

e risulta

$$\Delta_1 \theta = 1.$$

Supponiamo ora che dell'equazione a derivate parziali (9) $\Delta_1 \theta = 1$ si conosca una *soluzione completa* θ, contenente cioè, oltre un'evidente costante additiva in θ, altre $n - 1$ costanti arbitrarie

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}.$$

Poichè dalla (9), derivando rapporto al parametro a_i, segue

$$\nabla \left(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial a_i}\right) = 0,$$

vediamo che le ipersuperficie $\dfrac{\partial \theta}{\partial a_i} = \text{cost}^{te}$ sono ortogonali alle $\theta = \text{cost}^{te}$.

Se si indicano quindi con $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ nuove costanti arbitrarie, si avrà l'integrale generale delle geodetiche sotto la forma

$$(9^*) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a_1} = b_1 \ , \ \frac{\partial \theta}{\partial a_2} = b_2 \ , \ \ldots \ \frac{\partial \theta}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1} \ ,$$

risultato che per $n = 2$ abbiamo incontrato al Vol. I (§. 111).

Se in particolare il ds^2 avrà la forma di LIOUVILLE (Cf. § 112)

$$ds^2 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2),$$

dove X_i indica una funzione della sola x_i, la (9) diventa

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_n}\right)^2 \equiv X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

e si ha subito la soluzione completa richiesta ponendo

$$\theta = c + \sum_i^{1 \ldots n} \int \sqrt{X_i + a_i} \ . \ dx_i \ (c, a_1, \ldots a_n \text{ costanti}),$$

quando si leghino le n costanti $a_1, a_2 \ldots a_n$ colla relazione

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0.$$

§ 433.

Le curvature in una data orientazione secondo Riemann.

Andiamo ora a stabilire l'importante concetto di *curvatura dello spazio* secondo una data orientazione, dovuto a RIEMANN.

Consideriamo un punto $M_0 \equiv (x_n^{(0)})$ dello spazio, e per esso due direzioni $(\xi_i^{(1)})$, $(\xi_i^{(2)})$; queste determinano (§ 340) un *fascio* di direzioni (ξ_i)

$$(10) \qquad \xi_i = \alpha\, \xi_i^{(1)} + \beta\, \xi_i^{(2)}$$

giacenti in un S_2, od anche, come si dirà, *un'orientazione* per M_0 in S_m. Le geodetiche uscenti da M_0 secondo le ∞^1 direzioni del fascio hanno per luogo una superficie σ, che si dirà la *superficie geodetica* pel punto M_0 in quella orientazione. Questa superficie geodetica σ avrà in M_0 una certa curvatura

K, quella che compete (Cap. II § 41) alla forma differenziale quadratica che ne dà il ds^2 calcolato in S_n. Questo elemento K prende appunto, secondo RIEMANN, il nome di *curvatura dello spazio in* M_0 *per l' assegnata orientazione.*

Per calcolare K consideriamo una qualunque delle geodetiche del fascio e sviluppiamo le coordinate x_i di un suo punto mobile secondo le potenze dell'arco t, misurato a partire da M_0, arrestandosi, colla formola abbreviata del TAYLOR, alla seconda potenza di t, ciò che è lecito per le ipotesi fondamentali (§ 429). A causa delle equazioni differenziali (B*) pag. 421 delle geodetiche avremo

$$x_i = x_i^{(0)} + \xi_i\, t - \sum_{\lambda,\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ i & \end{matrix} \right\}_a \xi_\lambda\, \xi_\mu \frac{t^2}{2} + \dots,$$

ovvero, sostituendo per le ξ_i i valori (10)

$$x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)}\, t\alpha + \xi_i^{(2)}\, t\beta - \frac{1}{2} \sum_{\lambda\,\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ i & \end{matrix} \right\}_a (\xi_\lambda^{(1)}\, t\alpha + \xi_\lambda^{(2)}\, t\beta)\,(\xi_\mu^{(1)}\, t\alpha + \xi_\mu^{(2)}\, t\beta) + \dots$$

Se prendiamo sulla superficie geodetica σ a variabili coordinate

$$u_1 = t\alpha, \quad u_2 = t\beta,$$

avremo per la formola precedente:

11) $$x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)}\, u_1 + \xi_i^{(2)}\, u_2 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda\,\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ i & \end{matrix} \right\}_a (\xi_\lambda^{(1)}\, u_1 + \xi_\lambda^{(2)}\, u_2)\,(\xi_\mu^{(1)}\, u_1 + \xi_\mu^{(2)}\, u_2) + \dots$$

Per calcolare la curvatura di σ in M_0, restiamo in un piccolo intorno di M_0, ove t è riguardato come un infinitesimo del primo ordine, e quindi anche u_1, u_2, e i termini scritti nella (u) basteranno già per calcolare i valori in M_0 delle derivate prime e seconde delle a_i rapporti ad u_1, u_2. Contrassegnando questi valori con un apice (0), avremo dalla (11)

(11*) $$\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)^{(0)} = \xi_i^{(k)}\,, \quad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_h\, \partial u_k}\right)^{(0)} = - \sum_{\lambda\,\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ i & \end{matrix} \right\}_a \xi_\lambda^{(h)}\, \xi_\mu^{(k)} \qquad (h, k = 1, 2).$$

Indichiamo ora con

$$ds^2 = b_{11}\, du_1^2 + 2\, b_{12}\, du_1\, du_2 + b_{22}\, du_2^2$$

ds^2 il della superficie σ riferito alle coordinate u_1, u_2, e secondo le formole (6), (6*) pag. 422 avremo :

$$b_{ik} = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k} \tag{21}$$

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_b = \sum_{\lambda,\mu,\gamma} \left[\begin{matrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{matrix}\right]_a \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_l} + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i\, \partial u_k} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_l} \,. \tag{12*}$$

La curvatura cercata K è data dalla formola (34) § 41 (I pag. 101)

$$K = \frac{(12,12)_b^{(0)}}{(b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2)^{(0)}} \tag{13}$$

e conviene quindi calcolare i valori dei simboli $\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_b$ in M_0 e delle loro derivate prime. Intanto dalle (12*), (11*), e dalle relazioni che legano i simboli di CHRISTOFFEL a tre indici di prima e seconda specie, segue subito che tutti i simboli $\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_b$ si annullano in M_0.

§ 434.

La formola per la curvatura Riemanniana.

Dopo le osservazioni superiori calcoliamo il numeratore $(12,12)_b^{(0)}$ della (13) mediante la formola (28) § 38 (I pag. 92), che qui si riduce a

$$(\alpha) \qquad (12,12)_b^{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \left[\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right]_b - \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right]_b \right)^{(0)} .$$

Ora dalla (12*) abbiamo

$$\left[\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right]_b = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \left[\begin{matrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{matrix}\right]_a \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_1} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_1} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_2} + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1^2} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_2}$$

$$\left[\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right]_b = \sum_{\lambda,\tau,\nu} \left[\begin{matrix} \lambda\,\tau \\ \nu \end{matrix}\right]_a \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_1} \frac{\partial x_\tau}{\partial u_2} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_2} + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1\, \partial u_2} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_2} ,$$

e nel formare la differenza del secondo membro nella (α) si distruggono i termini colle derivate terze, e due termini colle derivate seconde provenienti dalla derivazione dei fattori medii $\frac{\partial x_\mu}{\partial u_1}, \frac{\partial x_\tau}{\partial u_2}$ nelle somme triple, do-

po di che sostituendo per le derivate prime i valori iniziali (11*), si ottiene dapprima

$$(12,12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ \mu \end{bmatrix} \right\} \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)} +$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu,\nu} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1\, \partial u_2} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_2^2} +$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \xi_\mu^{(2)}\ \xi_\nu^{(2)} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1^2} + \sum_{\lambda\ \mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial u_2^2} -$$

$$- \sum_{\lambda,\tau,\nu} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ \nu \end{bmatrix}_a \xi_\tau^{(2)}\ \xi_\nu^{(2)} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1^2} - \sum_{\lambda,\tau,\nu} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ \nu \end{bmatrix}_a \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\tau^{(2)} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_1\, \partial u_2} -$$

$$- \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \xi_\mu^{(2)}\ \xi_\nu^{(1)} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1\, \partial u_2} - \sum_{\lambda\ \mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_1\, \partial u_2} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial u_1\, \partial u_2} .$$

Si osservi ora che per le seconde delle (11*), si ha

$$\sum_{\mu} a_{\lambda\,\mu} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial u_2^2} = - \sum_{\mu} a_{\lambda\,\mu} \sum_{i,k} \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ \mu \end{matrix} \right\}_a \xi_i^{(2)}\ \xi_i^{(2)} = - \sum_{ik} \begin{bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{bmatrix}_a \xi_i^{(2)}\ \xi_k^{(2)} ,$$

e similmente

$$\sum_{\mu} a_{\lambda\,\mu} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial x_1\, \partial x_2} = - \sum_{i,k} \begin{bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{bmatrix}_a \xi_i^{(1)}\ \xi_k^{(2)} ;$$

sostituendo nella (β) e raccogliendo i termini contenenti le medesime derivate seconde delle x (per il che basta cangiare opportunamente gli indici di sommazione) si ottiene :

$$(12,12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ \nu \end{bmatrix}_a \right\} \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)} +$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu,l} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ l \end{bmatrix}_a \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)} \frac{\partial^2 x_l}{\partial u_2^2} - \sum_{l,\mu,\nu} \begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ l \end{bmatrix}_a \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)} \frac{\partial^2 x_l}{\partial u_1\, \partial u_2} .$$

Infine si pongano per le derivate seconde i valori iniziali (11*)

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial u_2^2} = - \sum_{\nu,\tau} \begin{bmatrix} \nu\ \tau \\ l \end{bmatrix}_a \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)} , \qquad \frac{\partial^2 x_l}{\partial u_1 \partial u_2} = - \sum_{\lambda\tau} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ l \end{bmatrix}_a \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\tau^{(2)} ,$$

e la formola precedente si muterà nell'altra

$$(12,12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\tau} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \begin{bmatrix} \lambda\ \tau \\ \nu \end{bmatrix}_a + \sum_{l} \left(\begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ l \end{bmatrix}_a \left\{ \begin{matrix} \lambda\ \tau \\ l \end{matrix} \right\}_a - \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ l \end{bmatrix}_a \left\{ \begin{matrix} \nu\ \tau \\ l \end{matrix} \right\}_a \right) \right\} \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)} .$$

Quì si osserva che il coefficiente del prodotto

$$\xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)}$$

sotto la somma quadrupla non è altro (I pag. 92) che il simbolo di RIEMAN $(\lambda\nu, \mu\tau)_a$ e si ha quindi

$$(12, 12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} (\lambda\nu, \mu\tau)_a\ \xi_\lambda^{(1)}\ \xi_\mu^{(1)}\ \xi_\nu^{(2)}\ \xi_\tau^{(2)},$$

dove la somma del secondo membro è estesa a *tutte* le combinazioni da 1 a n dei quattro indici λ, μ, ν, τ. Ma ora, se si ha riguardo alle proprietà del simbolo di RIEMANN espresse dalle formole (I pag. 93)

$$(\lambda\nu, \mu\tau) = -(\nu\lambda, \mu\tau) = -(\lambda\nu, \tau\mu) = (\nu\lambda, \tau\mu), \quad (*)$$

la precedente può scriversi

$$(14) \qquad (12, 12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda\nu,\mu\tau}{}' (\lambda\nu, \mu\tau)_a \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} & \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} & \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} & \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} & \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix},$$

(*) La deduzione di questa formola e della conseguente formola (C) del testo per la curvatnra Riemanniana si può abbreviare, risparmiando il calcolo eseguito sino a questo punto del paragrafo, col riferirsi alla proprietà dei simboli Riemanniani espressa dalla formola (III) del § 37 (I pag. 91), di cui la (14) attuale è una semplice conseguenza. Scelte n direzioni per M_0 fra loro indipendenti

$$(\xi_i^{(1)}),\ (\xi_i^{(2)}) \ldots (\xi_i^{(n)}),$$

pongasi in generale

$$\xi_i = \alpha_1\,\xi_i^{(1)} + \alpha_2\,\xi_i^{(2)} + \ldots + \alpha_n\,\xi_i^{(n)},$$

e si introducano le variabili normali di RIEMANN

$$u_1 = t\alpha_1,\ u_2 = t\alpha_2 \ldots u_n = t\alpha_n,$$

e si abbia, in queste coordinate:

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..n} b_{ik}\,du_i\,du_k.$$

Si osserva subito che i simboli $\begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}$ sono *tutti nulli in* M_0, onde segue che il simbolo $(12, 12)^{(0)}$ ha lo stesso valore in M_0 tanto calcolato per la forma completa in $u_1, u_2, \ldots u_n$, come per la superficie geodetica lungo la quale $u_3, u_4 \ldots u_n$ si annullano. Dopo ciò la formola (14) attuale è un'immediata conseguenza della citata (III) § 37.

l'accento nella somma Σ *indicando che deve essere estesa solo a quelle combinazioni delle coppie* λ, ν, μ, τ *nelle quali si ha*

$$\lambda < \nu, \quad \mu < \tau.$$

D'altra parte si ha

$$b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 = \sum_{\lambda\, \mu} a_{\lambda\mu}\, \xi_\lambda^{(1)}\, \xi_\mu^{(1)} \cdot \sum_{\tau,\ \nu} a_{\nu\tau}\, \xi_\nu^{(2)}\, \xi_\tau^{(2)} - \sum_{\lambda,\ \tau} a_{\lambda\tau}\, \xi_\lambda^{(1)}\, \xi_\tau^{(2)} \cdot \sum_{\mu\ \nu} a_{\mu\nu}\, \xi_\mu^{(1)}\, \xi_\nu^{(2)}$$

ovvero

$$b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 = \sum_{\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \tau} (a_{\lambda\,\mu}\, a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}\, a_{\mu\,\nu})\, \xi_\lambda^{(1)}\, \xi_\mu^{(1)}\, \xi_\nu^{(2)}\, \xi_\tau^{(2)}$$

e poichè i minori $a_{\lambda\,\mu}\, a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}\, a_{\mu\nu}$ di secondo ordine del discriminante a godono delle proprietà stesse sopra ricordate per i simboli di RIEMANN, vale anche la trasformazione analoga

$$b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 = \sum_{\lambda\ \nu,\ \mu\ \tau}{}' \begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\tau} \\ a_{\nu\mu} & a_{\nu\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} & \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} & \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} & \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} & \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Sostituendo nella (13) abbiamo la formola definitiva di RIEMANN

$$\text{(C)} \qquad K = \frac{\sum_{\lambda\ \nu,\ \mu\ \tau}{}' (\lambda\ \nu,\ \mu\ \tau)_a \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} & \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} & \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} & \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} & \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix}}{\sum_{\lambda\ \nu,\ \mu\ \tau}{}' \begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\tau} \\ a_{\nu\mu} & a_{\nu\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} & \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} & \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} & \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} & \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix}},$$

sulla quale sono da fare le osservazioni seguenti. I determinanti di secondo ordine formati colle ξ che vi figurano non sono altro che i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \dots & \xi_n^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_n^{(2)} \end{vmatrix},$$

cioè le *coordinate* dell'S_2 corrispondente alla assegnata orientazione, 2.ª. La curvatura Riemanniana K, secondo la (C), è il quoziente di due forme quadratiche in queste coordinate, e quella al denominatore (equivalente a $b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2$) è *definita* positiva, come la primitiva $\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$.

§ 435.

Spazii di curvatura costante.

Diremo che lo spazio S_n è a curvatura (Riemanniana) costante K_0 quando questa curvatura serba sempre lo stesso valore K_0 per tutti i punti, in qualunque orientazione. Ma si vedrà fra breve § 437) che l'invariabilità della curvatura K in ogni orientazione attorno a ciascun punto, trae seco l'invariabilità assoluta da punto a punto. È facile trovare le condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti a_{ik} del ds^2 affinchè lo spazio abbia curvatura costante K_0. In tale ipotesi infatti, se manteniamo p. e fissa la prima direzione $(\xi_i^{(1)})$ e lasciamo l'altra affatto variabile, sicchè le corrispondenti costanti ξ_i di direzione non siano legate da altra relazione che dalla

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 1,$$

la formola Riemanniana (C), posto $K = K_0$, ci dà una relazione quadratica *omogenea* nelle ξ, che dovrà dunque ridursi ad un' identità ed avremo quindi per tutti i valori degli indici $\lambda, \nu; \mu, \tau$ le relazioni

$$(\lambda\, \nu,\, \mu\tau) = K_0\, (a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}\, a_{\mu\nu}).$$

Ma anche viceversa, se queste condizioni sono soddisfatte, sarà per la (C) costante $= K_0$ la curvatura dello spazio. Dunque:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè lo spazio S_n *definito da* $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ *sia a curvatura costante* K_0 *sono espresse dalle formole*

$$(\lambda\, \nu,\, \mu\, \tau)_a = K_0\, (a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}\, a_{\mu\nu}) \tag{15}$$

che debbono valere per tutti i valori degli indici λ, ν, μ, τ *da* 1 a n.

La prima cosa che ora vogliamo fare è di accertarci dell'effettiva esistenza, per n qualunque, di spazii S_n con curvatura costante K_0, ciò che (salvo il caso $K_0 = 0$ ove basta prendere costanti i coefficienti α_{ik}) non è evidente a priori poichè il numero $N_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$ delle condizioni (15) supera il numero $n(n+1)$ dei coefficienti disponibili a_{ik}. Troviamo subito per gli spazî di curvatura costante K_0 la forma tipica del ds^2 data da RIEMANN cercando

di soddisfare le (15) col porre

$$(16) \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{U^2},$$

e determinando convenientemente U in funzione di $x_1, x_2, \ldots x_n$ (*)

Premettiamo per ciò alcune osservazioni generali che ci saranno utili anche nel seguito. Quando il ds^2 dello spazio S_n ha la forma *ortogonale*

$$ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + \ldots + H_n^2\, dx_n^2.$$

valori dei simboli di CHRISTOFFEL, indicando con i, k, l tre indici diversi, sono

$$(16^*) \qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} = 0\,, \quad \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ k \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial\, log\, H_k}{\partial x_i} \\ \left\{ \begin{matrix} k\,k \\ l \end{matrix} \right\} = -\dfrac{H_k}{H_l^2}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_l}\,, \quad \left\{ \begin{matrix} k\,k \\ k \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial\, log\, H_k}{\partial x_k} \end{cases}$$

ed i valori dei simboli Riemanniani sono dati dalle formole seguenti, ove r, k, i, h significano quattro numeri *diversi* presi nella serie $1, 2, \ldots n$:

$$(17) \qquad \begin{cases} (r\,k,\ i\,h) = 0 \\ (r\,k, k\,h) = H_k \left\{ \dfrac{\partial^2 H_k}{\partial x_r\, \partial x_h} - \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_k}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r} - \dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_h}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_h} \right\} \\ (r\,k, k\,r) = H_r\, H_k \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_r}\left(\dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_k}\right) + \sum_l \dfrac{1}{H_l^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_l}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_l} - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{1}{H_r^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r} - \dfrac{1}{H_k^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_k}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_k} \right\}. \end{cases}$$

Applicando queste formole alla forma (16) del ds^2, le relative equazioni (15) diventano :

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_k} = 0 \\ U\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_r^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}\right) = K_0 + \sum_i \left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 \end{cases}$$

(*) Con ciò noi veniamo a ricercare le rappresentazioni conformi dello spazio a curvatura costante K_0 sullo spazio euclideo (Cf. più oltre § 447).

Da quelle della prima linea risulta

$$U = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

dove X_i è una funzione della sola x_i. E indicando con accenti le derivate, dalle (18) della seconda linea si ha subito intanto

$$X''_1 = X''_2 = \ldots = X''_n,$$

per cui queste derivate seconde eguagliano una medesima costante, diciamo $2a$. Integrando abbiamo

$$X_i = ax_i^2 + 2\, b_i\, x_i + c_i$$

con $b_1, b_2, \ldots b_n$; $c_1, c_2 \ldots c_n$ nuove costanti. Ma allora le (18) si riducono all'unica

$$4\, a \left(a \sum x_i^2 + 2 \sum b_i\, x_i + \sum_i c_i \right) = K_0 + 4 \sum_i (a\, x_i + b_i)^2,$$

che si risolve nella sola relazione fra le costanti

$$K_0 = 4\, a \sum_i c_i - 4 \sum_i b_i^2. \tag{19}$$

Se poniamo nulle tutte le b_i e prendiamo $\sum_i c_i = 1$, risulta

$$U = 1 + \frac{K_0}{4} \sum_i x_i^2,$$

onde la forma tipica di RIEMANN pel ds^2 dello spazio a curvatura costante K_0.

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{\left\{1 + \frac{K_0}{4} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\right\}^2}. \tag{D}$$

Nel caso di K_0 negativa, poniamo

$$K_0 = -\frac{1}{R^2},$$

e diciamo lo spazio *pseudosferico di raggio* R. Quì si può adottare un'altra forma tipica del ds^2, estensione di quella che al Cap. XIV ci ha servito agli studi di metrica non euclidea a due dimensioni. Soddisfacciamo la

(19) ponendo $b_1 = \frac{1}{2R}$ e tutte le altre costanti nulle; così si ottiene

$$(E) \qquad ds^2 = \frac{R^2}{x_1^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2).$$

§ 436.

Applicabilità di due spazî S_n colla medesima curvatura costante.

Al caso della curvatura Riemanniana costante siamo necessariamente condotti cercando degli spazii per i quali la geometria di ogni regione sia identica a quella di ogni altra regione, vogliamo dire tali che ogni figura in essi esistente, possa trasportarsi, senza alterazione delle lunghezze e degli angoli, in un'altra qualunque regione dello spazio ed ivi orientarsi in modo arbitrario attorno ad un suo punto fisso. Per esprimere questo fatto in modo più preciso, introduciamo la definizione di *spazi applicabili*, come al Cap. VII nel caso particolare $n = 2$. Due spazii S_n, S'_n, col medesimo numero n di dimensioni, si diranno applicabili se è possibile porre gli spazî stessi (o loro regioni convenientemente limitate) in tale corrispondenza di punto a punto che le lunghezze corrispondenti (e perciò anche gli angoli) risultino eguali. Due spazii S_n, S'_n, saranno applicabili quando le due forme differenziali quadratiche che ne dànno i ds^2

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad ds'^2 = \sum_{ik} a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k$$

siano equivalenti. È manifesto che per due spazî applicabili: *le curvature Riemanniane in ogni coppia di punti corrispondenti, secondo orientazioni corrispondenti, debbono sempre essere eguali fra loro.*

Ciò premesso, per gli spazii da noi cercati deve accadere che ogni regione risulti applicabile su qualunque altra dello spazio stesso, in modo che un punto P della prima si possa portare in un altro arbitrario P′ della seconda si da far coincidere un'orientazione qualunque per P con una qualunque per P′ (un'angolo col vertice in P con ogni angolo eguale avente il vertice in P′). In queste condizioni la curvatura Riemanniana dello spazio deve dunque essere costante, cioè tutti gli spazî nei quali vige un'identica geometria in tutte le regioni (pei quali vige il principio della sovrapponibilità delle figure) sono necessariamente a curvatura costante. Ma anche l'inversa è vera come precisiamo col seguente teorema:

Due spazii a n dimensioni colla medesima curvatura Riemanniana costante sono sempre applicabili l'uno sull' altro ; le formole d' applicabilità contengono $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri arbitrarii, in guisa che si può portare un punto* P *dell' uno in un punto arbitrario* P′ *dell' altro, e far coincidere uno* n^{edro} *ortogonale col vertice in* P *con un* n^{edro} *ortgonale arbitrario col vertice in* P′.

Questo teorema è già stato in sostanza stabilito al Cap. II § 39, e qui non abbiamo che da darne l' interpretazione geometrica. Le due forme (definite positive)

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad f' = \sum_{i,k} a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k$$

che dànno i due ds^2 degli spazî S_n, S'_n colla stessa curvatura costante K_0 sono equivalenti, e per trovare le x in funzione delle x' possiamo assegnare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori delle x', diciamo p. e. per $x'_i = 0$, i valori delle x_i, prendiamo ancora $x_i = 0$, e inoltre possiamo ancora assegnare a arbitrio i valori iniziali delle derivate $\frac{\partial x_i}{\partial x'_i}$ purchè soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$a'_{rs} = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x_r} \frac{\partial x_k}{\partial x_s}.$$

Ora, per maggior chiarezza, eseguiamo sulle x e sulle x' una sostituzione lineare in guisa da rendere nei punti iniziali (0), (0)

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} \quad , \quad a'_{ik} = \varepsilon_{ik}, \text{ (*)},$$

sicchè le condizioni precedenti diventano

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_s} = \varepsilon_{rs},$$

e posto $\frac{\partial x_i}{\partial x'_r} = \xi_i^{(r)}$, dove

$$\xi_1^{(r)},\ \xi_2^{(r)} \ldots \xi_n^{(r)}$$

sono n coseni di direzione (cioè della direzione corrispondente alla (x'_r)) si traducono nelle altre

$$\sum_i \xi_i^{(r)}\, \xi_j^{(s)} = \varepsilon_{rs}$$

(*) Al solito con ε^{ik} si indica lo zero se $i \neq k$, l'unità per $i = k$.

che esprimono l'ortogonalità delle n direzioni corrispondenti. Questo n^{edro} ortogonale, del resto arbitrario, uscente da (0) in S_n va appunto a sovrapporsi, per le formole d'applicabilità, all' n^{edro} ortogonale coordinato col vertice nell' origine (0) in S'_n ciò che prova il teorema. Le osservazioni precedenti provano anche inversamente che, se nelle formole d'applicabilità di due spazî S_n, S'_n entrano $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie, i due spazî hanno la stessa curvatura costante, poichè ci troviamo nel caso d'illimitata integrabilità esaminato al citato § 39.

In particolare possiamo applicare il teorema a due diverse regioni del medesimo spazio a curvatura costante, e se chiamiamo *movimento* in sè di uno spazio S_n ogni applicabilità dello spazio sopra sè stesso ne segue :

Ogni spazio a n dimensioni di curvatura Riemanniana costante ammette un gruppo continuo di movimenti con $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri; e viceversa l'esistenza di un gruppo continuo di movimenti con* $\frac{n(n+1)}{2}$ *parametri implica la curvatura costante dello spazio.*

Osserviamo il caso particolare dello spazio S_n a *curvatura nulla*, che dicesi anche spazio *euclideo*. Il suo ds^2 è riducibile alla forma tipica (la (D) pag. 434 per $K_0 = 0$)

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2,$$

e le geodetiche (rette) sono rappresentate dalle equazioni

$$x_i = a_i\, t + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

colle a_i, b_i costanti delle quali le prime n (coseni di direzione) legati dalla relazione

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1.$$

Ne segue subito che la distanza geodetica δ fra due punti (x_i), (x'_i) è data dalla formola :

$$\delta^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2.$$

§ 437.

Il teorema di Schur.

Abbiamo già accennato, al § 435, ad un importante teorema, dovuto a SCHUR, (*) che si enuncia :

Se la curvatura Riemanniana dello spazio attorno ad ogni singolo punto è la stessa in qualunque orientazione, essa non varia nemmeno da punto a punto, cioè lo spazio è a curvatura assolutamente costante.

Alla dimostrazione data da SCHUR (l. c) che procede in parte per via geometrica utilizzando speciali proprietà delle superficie geodetiche, sostituiamo qui una dimostrazione puramente analitica fondata su certe *identità differenziali*, per sè notevoli, a cui soddisfano i simboli Riemanniani a quattro indici.

Per stabilire queste identità prendasi il valore effettivo di un simbolo di Riemann (§ 38) :

$$(r\,k, i\,h) = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix} + \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ \mu \end{bmatrix}\right\}$$

e si derivi rispetto ad una qualunque x sia x_l, ricordando le formole (I pag. 82)

$$\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_l} = -\sum_t A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} l\,t \\ \mu \end{Bmatrix} - \sum_t A_{\mu t}\begin{Bmatrix} l\,t \\ \lambda \end{Bmatrix};$$

così si ottiene dapprima :

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(r\,k, i\,h) = \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_l}\begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}\begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix} + \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix} - \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} h\,k \\ \mu \end{bmatrix} - \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} h\,k \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix} -$$

$$-\sum_{\lambda\mu\,t}\left(\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ \mu \end{bmatrix}\right) A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} l\,t \\ \mu \end{Bmatrix} - \sum_{\lambda\mu\,t}\left(\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ \mu \end{bmatrix}\right) A_{\mu t}\begin{Bmatrix} l\,t \\ \mu \end{Bmatrix}.$$

Ora trasformiamo i varii termini delle ultime somme triple nel modo seguente, che indichiamo per esteso per uno di essi p. e pel primo :

$$\sum_{\lambda\mu t} A_{\lambda t}\begin{Bmatrix} l\,t \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} r\,h \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix}.$$

(*) Mathematische Annalen Bd 27.

Siccome si ha

$$\sum_{\lambda} A_{\lambda t} \begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} l\ t \\ \mu \end{Bmatrix} = \sum_{\lambda} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} l\ t \\ \lambda \end{bmatrix},$$

così si può scrivere

$$\sum_{\lambda\mu t} A_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} l\ t \\ \mu \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} = \sum_{t} \begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix} \cdot \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} l\ t \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Modificando nello stesso modo gli altri tre termini delle somme triple con leggieri combiamenti nelle notazioni degli indici risulta :

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix} + \sum_t \begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_l} \begin{bmatrix} i\,k \\ t \end{bmatrix} + \sum_t \begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_l} \begin{bmatrix} rh \\ t \end{bmatrix} -$$

$$- \sum_t \begin{Bmatrix} r\,i \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_l} \begin{bmatrix} hk \\ t \end{bmatrix} - \sum_t \begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_l} \begin{bmatrix} r\,i \\ t \end{bmatrix} + \sum_t \begin{Bmatrix} r\,i \\ t \end{Bmatrix} \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} hk \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ t \\ \lambda \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_t \begin{Bmatrix} hk \\ t \end{Bmatrix} \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} r\,i \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ t \\ \mu \end{bmatrix} - \sum_t \begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix} \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ t \\ \lambda \end{bmatrix} - \sum_t \begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix} \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} rh \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ t \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Ora, in questa formola, tenendo fissi i due indici r, k si permutino due volte cicolarmente i tre i, h, l e si sommino le tre formole. Si vede che nel secondo membro si elidono i termini contenenti derivate seconde dei simboli e ponendo insieme i termini che hanno a moltiplicatore il medesimo simbolo a tre indici di seconda specie, si trova la seguente identità :

$$\text{(F)}\quad \frac{\partial}{\partial x_l}(rk, ih) + \frac{\partial}{\partial x_i}(rk, hl) + \frac{\partial}{\partial x_h}(rk, li) = \sum_t \begin{Bmatrix} r\,i \\ t \end{Bmatrix} (kt, lh) + \sum_t \begin{Bmatrix} rh \\ t \end{Bmatrix} (kt, il) +$$

$$+ \sum_t \begin{Bmatrix} r\,l \\ t \end{Bmatrix} (kt, hi) + \sum_t \begin{Bmatrix} ki \\ t \end{Bmatrix} (rt, hl) + \sum_t \begin{Bmatrix} kh \\ t \end{Bmatrix} (rt, li) + \sum_t \begin{Bmatrix} k\,l \\ t \end{Bmatrix} (rt, ih),$$

che vale per tutti i valori degli indici

$$r\,k,\ i\,h\,l$$

dei quali però i tre ultimi, come i due primi, si prenderanno diversi fra loro,

chè altrimenti ci avrebbe una pura identità formale. (*) Sono queste le identità differenziali per i simboli di Riemann che si trattava di stabilire; esse sono lineari omogenee nei simboli stessi ed hanno per coefficienti i simboli di CHRISTOFFEL a tre indici di seconda specie.

Ora si osservi che *a queste relazioni differenziali* (F) *soddisfano anche i minori stessi di secondo grado del discriminante* :

$$a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh}\, a_{ik}$$

messi al posto del corrispondente simbolo di RIEMANN (rk, ih). Tale poprietà si verifica subito per derivazione effettiva ricordando che si ha (I pag. 82)

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_t \left\{ \begin{matrix} i\, l \\ t \end{matrix} \right\} a_{kt} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} k\, l \\ t \end{matrix} \right\} a_{it}.$$

Da queste osservazioni risulta ora facilmente il teorema di SCHUR. Supposto infatti che, attorno ad ogni singolo punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, si abbia in ogni orientazione la stessa curvatura K, questa sarà a priori una funzione di $x_1, x_2 \ldots x_n$, *che dobbiamo provare ridursi ad una costante.* E infatti susistono le formole

$$(rk, ih) = \mathrm{K}\,(x_1, x_2, \ldots x_n)\,(a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh} a_{ik})$$

ed applicando le identità (F), alle quali soddisfano come si è detto anche i minori $a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh}\, a_{ik}$, resta manifestamente

$$(a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh}\, a_{ik}) \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_l} + (a_{rh}\, a_{lk} - a_{rl}\, a_{hk}) \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_i} + (a_{rl}\, a_{ih} - a_{ri}\, a_{lk}) \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_h} = 0.$$

(*) Introducendo secondo le idee fondamentali di CHRISTOFFEL sviluppate dal RICCI i simboli a *cinque* indici

$$(r\,k,\ i\,h\,l) = \frac{\partial}{\partial x_l}(r\,k,\ i\,h) - \sum_t \left\{ \begin{matrix} l\, r \\ t \end{matrix} \right\} (t\,k,\ i\,h) - \sum_t \left\{ \begin{matrix} l\, k \\ t \end{matrix} \right\} (r\,t,\ i\,h)$$
$$- \sum_t \left\{ \begin{matrix} l\, i \\ t \end{matrix} \right\} (r\,k,\ t\,h) - \sum_t \left\{ \begin{matrix} l\, h \\ t \end{matrix} \right\} r\,k,\ i\,t)$$

(derivate prime covarianti dei simboli di RIEMANN) l'identità (F) del testo si scriva semplicemente

$$(r\,k,\ i\,h\,l) + (r\,k,\ h\,l\,i) + (r\,k,\ l\,i\,h) = 0.$$

Supposti i tre indici i, h, l diversi si moltiplichi questa per $A_{r,i}$ e si sommi da $r = 1$ a $r = n$, e risulterà

$$a_{hk} \frac{\partial K}{\partial x_l} - a_{lk} \frac{\partial K}{\partial x_h} = 0.$$

Se qui teniamo fissi h, k e diamo a l tutti i valori da 1 a n, se ne conclude che sarà

$$\frac{\partial K}{\partial x_l} = \frac{\partial K}{\partial x_h} = 0,$$

altrimenti si annullerebbero tutti i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{vmatrix}$$

indi anche il discriminante a. Dunque: *tutte le derivate della curvatura* K *si annullano e* K *è una costante, c. d. d.*

§ 438.

Le tre curvature principali in uno spazio S_3 (*).

Ritorniamo ora al caso di uno spazio curvo con una forma qualsiasi del ds^2, ma supponiamo $n = 3$ per studiare più da vicino negli spazii S_3 a tre dimensioni la distribuzione delle curvature Riemanniane attorno ad un punto, nelle diverse orientazioni. In questo caso la formola Riemanniana

(*) I risultati che qui esponiamo pel caso $n=3$ possono considerarsi come già implicitamente contenuti nella memoria fondamentale di CRISTOFFEL (1869), ove è riconosciuta l'esistenza di tre *invarianti differenziali* per un ds^2 a tre variabili; questi invarianti corrispondono appunto alle tre curvature principali. La considerazione dei tre massimi (o minimi) della curvatura appare, per quanto sembra, la prima volta in una memoria di *Souvorof: Sur les caractéristiques des systémes de trois dimensions* pubblicata in lingua russa (Kasan 1871); un'analisi di questo lavoro fu pubblicata dall'autore nel T. IV del *Bulletin des sciences mathématiques* (1873). Successivamente SCHUR nei citati lavori (1886) ritorna brevemente sulla legge di variazione delle curvature Riemanniane nelle diverse orientazioni. Il nome di *curvature principali* adottato nel testo venne introdotto dal *Ricci* nella memoria: *Sui gruppi continui di movimenti* Società dei XL T. XII 1899).

(C) per la curvatura (pag. 431) si presta ad una discussione ben semplice, quando si ricerchino le orientazioni secondo le quali hanno luogo i massimi e minimi delle curvature. Essendo $n = 3$, possiamo definire un' orientazione, un S_2, attorno ad un punto semplicemente col dare le tre costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 della direzione normale a questo S_2. Se introduciamo le coordinate omogenee η_1, η_2, η_3 di questo S_2

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \begin{vmatrix} \xi_2^{(1)} & \xi_3^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} & \xi_3^{(2)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_3^{(1)} & \xi_1^{(1)} \\ \xi_3^{(2)} & \xi_1^{(2)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

avremo evidentemente

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sum_i A_{1i}\,\eta_i : \sum_i A_{2i}\,\eta_i : \sum_i A_{3i}\,\eta_i \tag{20}$$

e la formola (C) darà K come quoziente di due forme quadratiche nelle tre variabili *indipendenti* η_1, η_2, η_3. Ora le coppie di indici $\lambda, \nu : \mu, \tau$ sono composte, ciascuna, di indici diseguali e se con r indichiamo il terzo indice dopo λ, ν, e così con s il terzo dopo μ, τ, invece di supporre come prima $\lambda < \nu$, $\mu < \tau$, converrà qui meglio prendere λ, ν, medesimamente μ, τ in guisa che tanto la permutazione (λ, ν, r) quanto la (μ, τ, s) sia una permutazione ciclica diretta di (1, 2, 3). Ciò è lecito evidentemente, poichè nella formola Riemanniana (C) uno scambio p. e di λ con ν non altera il termine corrispondente. Con questa convenzione avremo

$$\begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} & \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} & \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} = \eta_r \quad , \quad \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} & \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} & \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix} = \eta_s$$

$$a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}\, a_{\nu\mu} = a\, A_{rs} \;;$$

e se poniamo

$$a\, b_{rs} = (\lambda\nu, \mu\tau),$$

da cui

$$b_{rs} = \frac{1}{a}\,(\lambda\nu, \mu\tau) = b_{sr},$$

risulterà

$$\begin{cases} b_{11} = \dfrac{1}{a}\,(23, 23), \quad b_{22} = \dfrac{1}{a}\,(31, 31), \quad b_{33} = \dfrac{1}{a}\,(12, 12) \\ b_{12} = \dfrac{1}{a}\,(23, 31), \quad b_{23} = \dfrac{1}{a}\,(31, 12), \quad b_{31} = \dfrac{1}{a}\,(12, 23). \end{cases} \tag{21}$$

Così la formola Riemanniana (C) per la curvatura prenderà, nel caso $n = 3$, la forma

$$\text{(C)} \qquad K = \frac{\sum_{r,s}^{1\ldots3} b_{rs}\,\eta_r\,\eta_s}{\sum_{r,s}^{1\ldots3} A_{rs}\eta_r\,\eta_s}.$$

Ricerchiamo ora le orientazioni per le quali hanno luogo i massimi e minimi della curvatura K, orientazioni che si diranno *principali* e le direzioni normali a queste *direzioni principali*. Indicando per brevità con φ la forma quadratica al numeratore della (C*), con F quella (definita) al denominatore, dovremo cercare i valori delle η pei quali si ha

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_s} = F\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_s} \quad (s = 1, 2, 3),$$

cioè

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_s} = \rho\,\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_s}, \quad \rho = \frac{F}{\varphi}.$$

I valori dell'incognita ρ sono le radici dell'equazione cubica:

$$\text{(22)} \qquad \begin{vmatrix} A_{11} - \rho\, b_{11} & A_{12} - \rho\, b_{12} & A_{13} - \rho\, b_{13} \\ A_{21} - \rho\, b_{21} & A_{22} - \rho\, b_{22} & A_{23} - \rho\, b_{23} \\ A_{31} - \rho\, b_{31} & A_{32} - \rho\, b_{32} & A_{33} - \rho\, b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

che indicheremo con ρ_1, ρ_2, ρ_3. Queste radici sono sempre tutte tre reali, e le loro inverse $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}$ daranno i valori massimi e minimi della curvatura, ossia le tre *curvature principali*

$$K_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad K_2 = \frac{1}{\rho_2}, \quad K_3 = \frac{1}{\rho_3}.$$

Se una radice ρ della (22) è *semplice*, a questa corrisponderà un solo sistema di valori per il rapporto delle η da calcolarsi colle equazioni

$$\text{(22*)} \qquad \sum_k (A_{ik} - \rho\, b_{ik})\,\eta_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

e quindi una sola orientazione. Quando invece la radice ρ sia doppia, ed annulli quindi tutti i minori del secondo ordine del determinante (22),

le corrispondenti η debbono soddisfare ad una equazione lineare omogenea, e le direzioni principali corrispondenti formano un fascio (giacciono in un S_2). Se vi è un sola radice tripla tutte le direzioni sono principali e la curvatura, attorno a quel punto, è la stessa in tutte le orientazioni.

In generale se ρ, ρ' sono due radici *diverse* e (η_1, η_2, η_3), $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$ i valori corrispondenti per le η, dalle note proprietà dell'equazione (secolare) (22) si ha

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, \eta_r\, \eta'_s = 0.$$

Indicando con (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) le costanti delle due direzioni principali corrispondenti, dalle (20) risulta

$$\sum_{r,s,i,k} A_{rs}\, a_{ri}\, a_{sk}\, \xi_i\, \xi'_k = 0,$$

ossia

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi'_k = 0,$$

che esprime l'ortogonalità delle due direzioni (ξ_i), (ξ'_i). Dunque *due direzioni principali corrispondenti a radici distinte della* (22) *sono sempre fra loro ortogonali.*

§ 439.

Triedro principale in S_3.

Per uno spazio curvo S_3 le tre radici ρ_1, ρ_2, ρ_3 dell'equazione cubica (22), relative ad un punto $M \equiv (x_1, x_2, x_3)$, sono in generale distinte, ed abbiamo conseguentemente per M tre e tre sole direzioni principali formanti una terna ortogonale, il triedro formato da questa terna si dirà il *triedro principale* relativo al punto M.

Se avviene che una radice dell'equazione cubica, sia doppia ($\rho_1 = \rho_2$), e l'altra ρ_3 semplice, a quest'ultima corrisponde una direzione principale perfettamente determinata, mentre qualunque altra direzione normale a questa può riguardarsi come una direzione principale corrispondente alla radice doppia. In tal caso si può assumere come triedro principale di M quello formato dalla direzione corrispondente a ρ_3 e da un'altra coppia qualunque di direzioni ortogonali a questa e fra di loro.

Può darsi in fine il caso ulteriore che l'equazione cubica abbia un'unica radice (tripla) ed allora qualunque triedro trirettangolo col vertice in M è da riguardarsi come triedro principale. Se questo avviene per tutti i punti dello spazio, siamo nel caso del teorema di SCHUR, e lo spazio S_3 è a curvatura costante.

Colla nozione del triedro principale possiamo porre la formola (C*) per la curvatura sotto una forma notevole affatto analoga a quella d'EULERO per le curvature delle sezioni normali di una superficie nello spazio ordinario (§ 73). Per ciò, fissato un punto $M_0 \equiv (x_i^{(0)})$ dello spazio, assumiamo le linee coordinate (x_1), (x_2), (x_3) in guisa che escano da M_0 secondo le tre direzioni principali, ciò che è possibile in infiniti modi.

Avremo allora

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad \text{per } x_i = x_i^{(0)}$$

e di più disponendo dei parametri x_1, x_2, x_3, possiamo rendere

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, \quad \text{per } x_i = x_i^{(0)}.$$

Così le costanti di direzione ξ_1, ξ_2, ξ_3 pel punto M_0 coincideranno cogli ordinarii coseni di direzione e sarà per le (20)

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3.$$

Siccome le direzioni delle linee coordinate in M_0 sono quelle principali, dovranno essere soddisfatte le (22*), nelle quali si ponga successivamente

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (1, 0, 0) \text{ per } \rho = \rho_1$$
$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0, 1, 0) \text{ per } \rho = \rho_2$$
$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0, 0, 1) \text{ per } \rho = \rho_3$$

onde segue

$$b_{11} = \frac{1}{\rho_1}, \quad b_{22} = \frac{1}{\rho_2}, \quad b_{33} = \frac{1}{\rho_3}$$
$$b_{12} = b_{23} = b_{31} = 0,$$

e la (C*) diventa quindi

$$K = \frac{\dfrac{\xi_1^2}{\rho_1} + \dfrac{\xi_2^2}{\rho_2} + \dfrac{\xi_3^2}{\rho_3}}{\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

cioè

$$K = K_1 \xi_1^2 + K_2 \xi_2^2 + K_3 \xi_3^2, \tag{23}$$

indicando K_1, K_2, K_3, le tre curvature principali e ξ_1, ξ_2, ξ_3 i coseni degli angoli che la direzione normale alla orientazione considerata forma colle tre direzioni principali. Come per la formola d'EULERO s'introduce la *conica indicatrice* di DUPIN, così qui l'esame della legge secondo cui varia la curvatura K coll'orientazione può farsi introducendo la *quadrica indicatrice*

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 + K_3 z^2 = + 1,$$

i cui assi si facciano coincidere colle direzioni principali. La legge di variazione della curvatura coll'orientazione è la stessa come quella della inversa del quadrato del semidiametro della quadrica indicatrice nella direzione ortogonale.

§ 440.

Congruenze principali. Spazî S_3 normali.

La nozione di direzioni principali in ogni punto di un S_3 conduce ad introdurre quella delle *linee principali* di S_3, come quelle linee che seguono, in ogni loro punto, una delle tre direzioni principali. Se con ξ_1, ξ_2, ξ_3 indichiamo le costanti di una delle tre direzioni principali, saranno ξ_1, ξ_2, ξ_3 funzioni note di x_1, x_2, x_3 e le linee integrali delle equazioni differenziali simultanee

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_3}$$

saranno appunto le linee principali corrispondenti. Corrispondentemente a ciascuna delle tre direzioni principali, avremo una doppia infinità di linee principali che riempiono lo spazio e formano una congruenza: una *congruenza principale*. Abbiamo così trecongruenze principali; per ogni punto di S_3 passano tre linee, una per ciascuna congruenza, ed ivi si incrociano ad angolo retto. Ma in generale *non avviene* che colle linee delle tre congruenze principali si costituisca un *sistema triplo di superficie ortogonali*, poichè in generale una congruenza principale non ammette superficie ortogonali, non è una congruenza normale.

Se colle tre congruenze principali si può costituire un sistema triplo di superficie ortogonali diremo che lo spazio S_3 è *normale*. La ricerca degli spazî curvi S_3 normali si lega con un'altra importante nozione, introdotta

dal DARBOUX nella geometria infinitesimale dell'ordinario spazio euclideo: quella dei *sistemi tripli coniugati* di superficie, (*) nel modo che ora andiamo a dire.

Supposto che lo spazio S_3 sia normale, prendiamo a superficie coordinate $u_1 = \text{cost}^{te}$, $u_2 = \text{cost}^{te}$, $u_3 = \text{cost}^{te}$ quelle del sistema triplo ortogonale costituito dalle congruenze principali, ed avremo

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2, \tag{24}$$

e siccome le linee coordinate (u_1), (u_2), (u_3) sono principali si avrà (§ 439)

$$K_1 = b_{11} = \frac{1}{a}(23, 23),\quad K_2 = b_{22} = \frac{1}{a}(31, 31),\quad K_3 = b_{33} = \frac{1}{a}(12, 12) \tag{25}$$

e inoltre $b_{12} = b_{23} = b_{31} = 0$, cioè

$$(23, 31) = (31, 12) = (12, 23) = 0. \tag{25*}$$

Se per i simboli di RIEMANN poniamo i valori calcolati per la forma ortogonale (24), secondo le (16) pag. 433 le (25*) dànno come condizioni a cui debbono soddisfare H_1, H_2, H_3 le tre seguenti :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial u_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial u_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial H_3}{\partial u_2}.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Soddisfatte queste, lo spazio (24) è uno spazio normale, e dalle (25) si calcolano le sue tre curvature principali ;

$$\left\{\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\right)\right\} - \frac{1}{H_1^2 H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\\
K_2 &= -\frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\right)\right\} - \frac{1}{H_2^2 H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\\
K_3 &= -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\right)\right\} - \frac{1}{H_3^2 H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}.
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

(*) DARBOUX. *Théorie surfaces* IVsme Partie n. 1047 a 1052 *Syotéme ortkogonaux* Liore III Chap. III (2.sme Edizione 1910).

Le condizioni (26) che assicurano la normalità dello spazio (24) sono suscettibili di una seconda interpretazione. Essendo θ una funzione incognita delle tre variabili u_1, u_2, u_3, si consideri il sistema simultaneo per θ.

$$(G)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{\partial \log H_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \log H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{\partial \log H_2}{\partial u_3}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \log H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial_2\theta}{\partial u_3 \partial u_1} = \dfrac{\partial \log H_3}{\partial u_1}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \log H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial \theta}{\partial u_1}. \end{cases}$$

Se si forma dalle (G), nei tre modi possibili, la derivata terza mista $\dfrac{\partial^3\theta}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3}$ eliminando colle (G) stesse le derivate seconde, si vede che a causa delle (26), le tre espressioni sono identiche. Il sistema (G) è dunque completamente integrabile e ammette una soluzione generale θ *dipendente da tre funzioni arbitrarie*, una di ciascuna variabile u_1, u_2, u_3; precisamente scelto un sistema iniziale di valori per u_1, u_2, u_3 diciamo (0, 0, 0), si possono dare ad arbitrio le funzioni

$$\theta\,(u_1, 0, 0) = \varphi\,(u_1), \quad \theta\,(0, u_2\, 0) = \varphi\,(u_2)$$
$$\theta\,(0, 0, u_3) = \omega\,(u_3)$$

e ne resta individuata la soluzione θ. Ciò posto, si considerino tre sozioni *indipendenti* del sistema (G) siano $x = y, z$, e si interpretino x, y, z come cordinate cartesiane di un punto dello spazio : le formole

$$x = x\,(u_1, u_2, u_3), \quad y = y\,(u_1, u_2, u_3), \quad z = z\,(u_1, u_2, u_3)$$

dànno allora lo spazio riferito ad *un sistema triplo coniugato* (u_1, u_2, u_3) di superficie

$$u_1 = \text{cost}^{\text{te}}, \quad u_2 = \text{cost}^{\text{te}}, \quad u_3 = \text{cost}^{\text{te}},$$

cioè tale che le superficie di ciascuna serie sono tagliate in un sistema coniugato da quelle delle altre due. E infatti, a causa delle (G), si ha p. e

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial y}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial z}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial y}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0,$$

quindi sulle superficie $u_3 = \text{cost}^{te}$ il sistema (u_1, u_2) è un sistema coniugato di linee, ecc.

Così ad ogni spazio curvo normale S_3 corrispondono infiniti sistemi tripli coniugati dello spazio euclideo. E l'inversa è pur vera, come facilmente si prova. (*)

§ 441.

Le ipersuperficie negli spazi curvi.

Ritorniamo ora agli spazî di un numero qualunque di dimensioni per occuparci delle *ipersuperficie* in essi contenute e dare per esse le formole da considerarsi come le analoghe a quelle stabilite al Cap. IV per le ordinarie superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni.

Cangieremo alquanto, per comodità di scrittura, le notazioni: chiameremo $n + 1$ il numero delle dimensioni dello spazio S_{n+1}, le coordinate correnti di un cui punto saranno indicate con

$$x_0, x_1, \ldots x_n$$

e la metrica dell' S_{n+1} sarà determinata al solito dall' espressione del suo ds^2, che scriveremo

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{0 \ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{28}$$

Consideriamo in S_{n+1} un' ipersuperficie V_n, definita parametricamente dalle equazioni

$$x_i = x_i\,(u_1, u_2, \ldots u_n)\; i = 0, \quad 1, 2, \ldots n)$$

e sia il suo ds^2 subordinato a S_{n+1}

$$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu}^{1 \ldots n} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu\,. \tag{29}$$

di guisa che si avrà

(*) V. DARBOUX *l c* e i §§ 1, 2 della memoria dell' autore nel T.° 23 Serie 3ª degli Annali di matematica.

$$(30) \qquad b_{\lambda\mu} = \mathop{S}_{i,k} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial u_\mu} . \quad (*)$$

Consideriamo le ipersuperficie parallele geodeticamente alla V_n (§ 432) e sia u_0 l'arco delle geodetiche ortogonali, contato a partire dalla V_n.

L' elemento lineare di S_{n+1} in coordinate $u_0, u_1 \ldots u_n$ assumerà la forma geodetica

$$(31) \qquad ds^2 = du_0^2 + \sum_{i,k} c_{ik}\, du_i\, du_k,$$

dove le c_{ik} sono funzioni di $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, che per $u_0 = 0$ si riducono rispettivamente alle b_{ik}.

Per una funzione qualunque $\psi(u_0, u_1 \ldots u_n)$, adottando la notazione

$$\overline{\psi} = \psi(0, u_1, u_2, \ldots u_n),$$

avremo dunque

$$b_{ik} = \overline{c_{ik}} .$$

Per ottenere le formole fondamentali in vista basta considerare, insieme alla V_n, la ipersuperficie parallela infinitamente vicina $u_0 = \varepsilon$, con ε costante infinitesima che riguarderemo come del primo ordine. Calcoliamo la *variazione* del ds^2 : $\delta\, ds^2$ nel passaggio dalla V_n all'infinitamente vicina $u_0 = \varepsilon$, e trascurando le potenze superiori di ε avremo

$$(32) \qquad \delta\, ds^2 = -2\varepsilon \sum_{i,k} \Omega_{ik}\, du_i\, du_k ,$$

dove si è posto

$$(33) \qquad \Omega_{ik} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_0}\right)}.$$

Allora noi chiameremo *prima e seconda forma fondamentale* dell'ipersuperficie V_n rispettivamente le due forme differenziali quadratiche :

$$\sum_{i,k} b_{ik}\, du_i\, du_k , \quad \Sigma\, \Omega_{ik}\, du_i\, du_k .$$

Esse corrispondono appunto alle due forme differenziali introdotte al Cap. IV per le ordinarie superficie (I pag. 166).

(*) Qui ed in seguito adoperiamo due diversi simboli sommatorii S e Σ ; nel primo gli indici variabili prendono tutti i valori da o a n, nel secondo da 1 a n.

Se in un punto di V_n consideriamo la direzione normale e indichiamo con $X_0, X_1, \ldots X_n$ le rispettive costanti di direzione, avremo

$$X_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_0}\right) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n,$$

e per ciò le formole

$$(34) \qquad \begin{cases} \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} X_k = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n) \\ \sum_{ik} a_{ik} X_i X_k = 1 . \end{cases}$$

Appena date le equazioni parametriche della V_n, le prime equazioni, lineari omogenee in $X_0, X_1, \ldots X_n$, ne fissano i rapporti e la seconda delle (34) determina (a meno del segno) il fattore di proporzionalità.

§ 442.

La generalizzazione delle equazioni di Gauss e di Codazzi.

Ciò premesso, noi andiamo ora a stabilire le relazioni che passano fra i coefficienti b_{ik}, Ω_{ik} delle due forme fondamentali della ipersuperficie V_n (e le altre quantità introdotte). Per questo applicheremo semplicemente alle due forme differenziali equivalenti (28), (31) le formole generali di CHRISTOFFEL al Cap. II.

Indicando coll'apposizione di indici a, b, c i simboli di CHRISTOFFEL, costruiti per le rispettive forme differenziali (28), (29), (31), partiamo dalle formole fondamentali (I pag. 81)

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \lambda \end{matrix} \right\}_c \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} - \sum_{k,i} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \quad \begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots n \\ r, s = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

nelle quali facciamo $u_0 = 0$, ponendo da sè i termini corrispondenti all'indice *zero*. Ora si osservi che se i, k, l sono tre indici presi nella serie $1, 2, \ldots n$ si ha:

$$(b) \qquad \begin{cases} \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right]_c = \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right]_b , \quad \left[\begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix}\right]_c = \Omega_{ik} , \quad \left[\begin{matrix} i0 \\ l \end{matrix}\right]_c = -\Omega_{il} \\ \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}_c = \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}_b , \quad \left\{\begin{matrix} ik \\ 0 \end{matrix}\right\} = \Omega_{ik} , \end{cases}$$

e dalle (a) avremo le formole

$$(I)\quad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r\,\partial u_s} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ l \end{matrix} \right\}_b \frac{\partial x_\nu}{\partial u_l} + \Omega_{rs}\,X_\nu - \mathop{S}_{i,k} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s} \quad \begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots n \\ r, s = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

$$(II)\quad \frac{\partial X_\nu}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu}\,\Omega_{\mu s}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} - \mathop{S}_{i\,k} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial x_k}{\partial u_s}\,X_i\,,$$

le quali sono da riguardarsi come la generalizzazione delle formole fondamentali al § 65 (I pag. 169).

Facciamo ora la medesima sostituzione nelle formole (III) del Cap. II (I, pag. 91)

$$(\alpha\delta\,,\,\beta\gamma)_c = \mathop{S}_{r,ki,h} (r\,k,\,i\,h)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial u_\delta}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma}\,,$$

ove supporremo α, β, γ diversi da zero.

Ricordiamo che il valore effettivo del simbolo $(\alpha\delta,\,\beta\gamma)_c$ di RIEMANN è dato da (I pag. 92).

$$(\alpha\delta,\,\beta\gamma)_c = \frac{\partial}{\partial u_\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ \delta \end{bmatrix}_c - \frac{\partial}{\partial u_\beta}\begin{bmatrix} \alpha\,\gamma \\ \delta \end{bmatrix}_c + \mathop{S}_{l,m} C_{l,m} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ m \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \beta\delta \\ l \end{bmatrix}_c - \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ m \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \gamma\delta \\ l \end{bmatrix}_c \right\},$$

e d'altronde avendosi

$$C_{00} = 1,\ C_{0i} = 0,\quad \text{per}\quad i \neq 0,$$

possiamo anche scrivere

$$(\alpha\delta,\,\beta\gamma)_c = \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ 0 \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \beta\delta \\ 0 \end{bmatrix}_c - \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ 0 \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \delta\gamma \\ 0 \end{bmatrix}_c + \frac{\partial}{\partial u_\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \delta \end{bmatrix}_c - \frac{\partial}{\partial u_\beta}\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \delta \end{bmatrix}_c +$$
$$+ \sum_{l,m} C_{l\,m} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ m \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \beta\delta \\ l \end{bmatrix}_c - \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ m \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} \gamma\delta \\ l \end{bmatrix}_c \right\}.$$

Ed ora dobbiamo distinguere secondo che si prende $\delta \neq 0$ ovvero $\delta = 0$. Nel primo caso, servendoci delle formole (b), troviamo le formole

$$(III)\quad \Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\delta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta,\,\beta\gamma)_b - \mathop{S}_{r,ki,h} (r\,k\,,\,i\,h)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma}\frac{\partial x_k}{\partial u_\delta}\,,$$

le quali valgono per tutti i valori degli indici α, β, γ, δ da 1 a n, e sono ma-

nifestamente da riguardarsi come la generalizzazione dell'equazione di GAUSS

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2} = K$$

del caso $n = 2$ per le ordinarie superficie.

Quando poi si assuma $\delta = 0$, la medesima sostituzione porta alle equazioni seguenti

$$(IV) \qquad \frac{\partial\,\Omega_{\alpha\beta}}{\partial\,u_\gamma} - \frac{\partial\,\Omega_{\alpha\gamma}}{\partial\,u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix} \right\} \Omega_{\beta t} =$$

$$= \sum_{r,k,i,h} (r\,k,\,i\,h)_\alpha \frac{\partial\,x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial\,x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial\,x_h}{\partial u_\gamma} X_k\,,$$

e queste, alla loro volta, sono le *formole di* CODAZZI *generalizzate.*

Per altro, nel caso generale di uno spazio curvo qualunque S_{n+1}, le formole (III), e (IV), che diremo equazioni di GAUSS di CODAZZI, contengono oltre i coefficienti b_{rs}, Ω_{rs} delle due forme fondamentali della V_n e loro derivate, anche le derivate prime delle funzioni incognite x delle u. Ma vi è un caso assai notevole in cui queste ultime derivate prime spariscono dalle formole (III) e (IV), le quali si riducono allora completamente analoghe alle equazioni ordinarie di GAUSS e di CODAZZI. *E' questo il caso che lo spazio ambiente* S_{n+1} *abbia curvatura Riemanniana costante* K_0, *del resto qualunque.*

E infatti abbiamo allora

$$(rk,\,ih)_\alpha = K_0\,(a_{ri}\,a_{hk} - a_{rh}\,a_{ik}),$$

e per ciò

$$\sum_{r,k,i,h} (r\,k,\,i\,h)_\alpha \frac{\partial\,x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial\,x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial\,x_h}{\partial u_\gamma} \frac{\partial\,x_k}{\partial u_\delta} = K_0 \Big\{ \sum_{ri} a_{ri} \frac{\partial\,x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial\,x_i}{\partial u_\beta} \times \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial\,x_h}{\partial u_\gamma} \frac{\partial\,x_k}{\partial u_\delta} -$$

$$- \sum_{r,h} a_{rh} \frac{\partial\,x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial\,x_h}{\partial u_\gamma} \times \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial\,x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial\,x_k}{\partial u_\delta} \Big\},$$

quindi per le (30)

$$\sum_{r,k,i,h} (rk,\,ih)_\alpha \frac{\partial\,x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial\,x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial\,x_h}{\partial u_\gamma} \frac{\partial\,x_k}{\partial u_\delta} = K_0\,(b_{\alpha\beta}\,b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\delta}).$$

E similmente si trova

$$\sum_{r,k,i,h} (r\,k,\,i\,h)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} X_k = K_0 \Big\{ b_{\alpha\beta} \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} X_k - b_{\alpha\gamma} \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} X_k \Big\} = 0 ,$$

annullandosi per la (34) le due somme nel secondo membro. Abbiamo quindi il risultato :

Se lo spazio ambiente S_{n+1} *ha curvatura costante* K_0, *le equazioni di* GAUSS *e* CODAZZI *diventano rispettivamente* :

$$\text{(III*)}\quad \Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta,\,\beta\gamma)_b - K_0(b_{\alpha\beta}\,b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\delta})$$

$$\text{(IV*)}\quad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\beta t} = 0. \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2 \ldots n.$$

È molto notevole che in questo caso le relazioni (III*), (IV*) fra i coefficienti delle due forme fondamentali esprimono le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè esista una corrispondente ipersuperficie V_n. Che siano necessarie si è visto, e la sufficienza risulta da ciò che, supposte soddisfatte le (III*), (IV*), le equazioni fondamentali (I), (II), alle quali si aggreghino le (34) formano un sistema *illimitatamente integrabile* nelle $(n+1)$ $(n+2)$ funzioni incognite

$$x_i\ ,\ X_i\ ,\ \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\ .$$

Le (III*), (IV*), dànno infatti, pel modo stesso come furono dedotte, le condizioni d'integrabilità del sistema. Un'altra verifica di tale importante proprietà risulterà in apposito Capitolo (Cap. XXVII).

Ritornando ancora al caso generale, importa osservare le formole che, data l' ipersuperficie V_n, permettono di calcolare i coefficienti Ω_{rs} della sua seconda forma fondamentale. Per ciò moltiplichiamo le (I) per $a_{\mu\nu}$ X_μ e sommiamo rispetto a μ, ν da o a n ; otterremo

$$\text{(V)}\qquad \Omega_{rs} = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} X_\mu \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_r\,\partial u_s} + \sum_{i,k\mu} \left[\begin{matrix} i\,k \\ \mu \end{matrix} \right]_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_\mu ,$$

formole che raggiungono lo scopo prefisso. Avendo riguardo alle (34), si

può dar loro anche la forma equivalente

$$(V^*) \qquad \Omega_{rs} = -\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_r} \frac{\partial X_\mu}{\partial u_s} - \sum_{i,k,\mu} \begin{bmatrix} k\mu \\ i \end{bmatrix}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_\mu .$$

§ 443.

Le curve nello spazio S_{n+1}.

Consideriamo nello spazio S_{n+1} una curva qualunque C, di cui siano

$$x_0 = x_0(t),\ x_1 = x_1(t),\ \ldots\ x_n = x_n(t)$$

le equazioni parametriche, il parametro t indicando l'arco di C misurato a partire da un suo punto iniziale M_0. Dobbiamo per prima cosa definire un elemento geometrico che si dirà la *curvatura o flessione* della curva C e misurerà la rapidità di deviazione della curva dalla geodetica. Per questo procederemo con Voss (*) nel modo seguente. Se M_0 è il punto di C di cui si tratta, tiriamo ivi la geodetica tangente g e sull'una e sull'altra curva stacchiamo, a partire da $M_0 \equiv (x_i^{(0)})$ due archi infinitesimi, di eguale lunghezza t e sia $M \equiv (x_i)$ l'estremo di detto arco sopra C, ed $\overline{M} \equiv (\bar{x}_i)$ quello sulla geodetica g. Indicando con d la distanza fra M, $\overline{M}$ dimostreremo che il rapporto

$$\frac{2d}{t^2},$$

al tendere di t a zero, ha (in generale) un limite determinato e finito. Questo indicheremo con

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{t=0} \left(\frac{2d}{t^2} \right)$$

e chiameremo la curvatura o *flessione* della curva C in M_0 (**).

Per calcolare questo limite sviluppiamo x_i, $\bar{x}_i$ per potenza di t tra-

(*) Mathm. Annalen Bd. 16.

(**) Si ricordi che per le curve dell'ordinario spazio euclideo S_3 la flessione può appunto definirsi in questo modo (I pag. 5) e nel caso di una moltiplicità a due dimensioni il concetto corrisponde a quello di curvatura geodetica.

scurando quelle superiori alla *seconda* ; avremo per la curva C

$$x_i = x_i^{(0)} + t\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)_0 + \dots$$

e per la geodetica g, a causa delle equaioni differenziali (B*) pag. 421 :

$$\bar{x}_i = x_i^{(0)} + t\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0 - \frac{t^2}{2}\sum_{\lambda,\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ i\end{matrix}\right\}_a\left(\frac{dx_\lambda}{dt}\right)_0\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)_0 + \dots$$

e quindi per le differenze $x_i - \bar{x}_i$.

$$x_i - \bar{x}_i = \frac{t^2}{2}\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ i\end{matrix}\right\}_a\left(\frac{dx_\lambda}{dt}\right)_0\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)_0\right\} + \dots$$

Trascurando le potenze di t superiori alla seconda, abbiamo

$$d = \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}(x_i - \bar{x}_i)(x_k - \bar{x}_k)},$$

e di qui pel limite cercato $\frac{1}{\rho}$ troviamo

$$(35)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \sum_{ik} a_{ik}\left[\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ i\end{matrix}\right\}_a\frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right]\cdot\left[\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ k\end{matrix}\right\}_a\frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right],$$

formola che dà l'espressione cercata per la flessione.

È da osservarsi che la forma definita $\sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k$ si annulla solo pe valori tutti nulli delle ξ, e per ciò dalla (35) segue: *soltanto per le geodetich dello spazio risulta nulla la flessione.* Senza trattenerci qui a proseguire tutt le analogie e generalizzazioni che spontaneamente si offrono dall'ordinari teoria delle curve (Cap. I), ci basterà fissare la nozione di *normale principale* Le formole precedenti dimostrano che l'elemento lineare $M\bar{M}$, al conver gere di M, $\bar{M}$ verso M_0 (di t a zero), converge verso una direzione limite uscente da M_0, colle costanti di direzione

$$(36)\qquad \xi_i = \rho\left[\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ i\end{matrix}\right\}_a\frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right].$$

A questa direzione (ξ_i) daremo il nome di normale principale in M_0 all curva C. È manifesto geometricamente che essa è normale alla curva C i

M_0, e questo si conferma subito analiticamente osservando che si ha

$$\sum_{ki} a_{ik}\,\xi_i\,\frac{dx_k}{dt} = 0.$$

Quella superficie geodetica, relativa al punto M_0, che è individuata dal contenere le direzioni della tangente e della normale principale alla curva può dirsi la *superficie geodetica osculatrice* in M_0. Facilmente si vedrebbe che essa è il limite di una superficie geodetica variabile che passa per la geodetica tangente in M_0 e per un punto M di C prossimo a M_0, quando M si faccia tendere a M_0. La normale principale è adunque quella normale di C che tocca la superficie geodetica osculatrice.

§ 444.

Le curvature delle linee tracciate in un'ipersuperficie.

Consideriamo in S_{n+1} un'ipersuperficie V_n definita dalle solite formole (§ 441) ed una curva arbitraria C tracciata su V_n. Essendo M_0 un punto qualunque di C, avremo ivi da considerare questi elementi geometrici:

1°) la curvatura (assoluta) $\frac{1}{\rho}$ di C rispetto allo spazio ambiente S_{n+1},

2°) la curvatura relativa di C rispetto all' ipersuperficie V_n, o spazio subordinato, nella quale è immersa; questa curvatura relativa si indicherà con $\frac{1}{\rho_g}$ e si dirà anche (per la ragione che si vedrà in appresso) la *curvatura geodetica* di C rispetto alla V_n.

3°) la normale principale (assoluta) di C rispetto a S_{n+1}, le cui costanti di direzione, si indicheranno, come sopra, con ξ.

4°) la normale principale relativa di C rispetto a V_n, le cui costanti di direzione saranno indicate con $\bar{\xi}_i$.

Introdotte queste denominazioni e notazioni, osserviamo che, essendo lungo C le x funzioni delle u, e queste funzioni dell'arco t, avremo

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l}\frac{du_l}{dt}\,; \quad \frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r\,\partial u_s}\frac{du_r}{dt}\frac{du_s}{dt} + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l}\frac{d^2u_l}{dt^2}\,.$$

Sostituendo in quest' ultima per $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s}$ i valori (I) pag. 81, si ottiene:

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \mathrm{S}_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\}_a \frac{dx_\lambda}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} = \mathrm{X}_i \sum_{r,s} \Omega_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt} + \\ + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l} \left[\frac{d^2 u_l}{\partial t^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ l \end{matrix} \right\}_b \frac{du_\lambda}{dt} \frac{du_\mu}{dt} \right].$$

Il primo membro di questa equivale, per le (36), a $\frac{\xi_i}{\rho}$, e per le formole stesse, la quantità fra parentesi nel secondo membro, sotto la seconda somma eguaglia $\frac{\eta_l}{\rho_g}$, indicando con η_l le costanti di direzione, nello spazio subordinato V_n, della normale principale (relativa) di C, onde segue

$$\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l} \left[\frac{d^2 u_l}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ l \end{matrix} \right\}_b \frac{du_\lambda}{dt} \frac{du_\mu}{dt} = \frac{\overline{\xi_i}}{\rho_g} \right],$$

e la formola (α) si scrive finalmente:

$$(37) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = \mathrm{X}_i \sum_{r,s} \Omega_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt} + \frac{\overline{\xi_i}}{\rho_g}.$$

Applichiamo queste formole generali al caso in cui la linea C sia una *geodetica* di V_n, quindi $\frac{1}{\rho_g} = 0$, e indicando con $\frac{1}{\mathrm{R}}$ la curvatura assoluta di questa geodetica di V_n, dalla (37) avremo

$$\xi_i = \mathrm{R}\,\mathrm{X}_i \sum_{r,s} \Omega_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt}$$

e siccome le ξ_i e le X_i, come costanti di (una medesima) direzione coincidono, ovvero sono eguali e di segno contrario, attribuendo ora ad R non solo un valore assoluto ma anche un segno, potremo fare

$$\mathrm{R} \sum_{r,s} \Omega_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt} = 1,$$

ed avremo la formola importante

$$(37^*) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sum_{r,s} \Omega_{rs}\, du_r\, du_s}{\sum_{r,s} b_{rs}\, du_r\, du_s}.$$

Di qui intanto deduciamo il teorema:

Una linea geodetica di un'ipersuperficie V_n *è caratterizzata dall'avere, in ogni suo punto, la direzione della normale principale (assoluta) coincidente con quella normale all'ipersuperficie.*

La (37*) ci dà poi la curvatura (assoluta) di quella geodetica g di V_n che esce dal punto considerato nella direzione assegnata dagli incrementi du_r.

Ottenuta la (37*), la generale (37) si scrive

$$(\beta) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = \frac{X_i}{R} + \frac{\overline{\xi_i}}{\rho_g} ,$$

dove $\frac{1}{R}$ indica la curvatura della geodetica g di V_n tangente in M_0 alla curva C. Evidentemente le due direzioni (X_i) $(\overline{\xi_i})$ sono fra loro ortogonali, e le formole precedenti dimostrano che la direzione della normale principale assoluta (ξ_i) giace nell'S_2 individuato dalle due precedenti, cioè.

Per ogni curva C *tracciata sopra un' ipersuperficie* V_n *le direzioni della normale a* V_n *e delle due normali principali, assoluta e relativa, di* C *giacciono in un* S_2.

Indicando ora con σ l'angolo che la normale principale assoluta (ξ_i) fa colla normale (X_i) dell'ipersuperficie, abbiamo

$$\cos\sigma = \sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,X_k ,$$

e dalle osservazioni superiori si ha anche

$$\operatorname{sen}\sigma = \sum_{ih} a_{ik}\,\xi_i\,\overline{\xi_k} ;$$

per ciò la (β) dà luogo alle formole notevoli

$$(38) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos\sigma}{\rho}$$

$$(38^*) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} .$$

La prima di queste dà l'estensione del teorema di MEUSNIER (I pag. 191) al caso di uno spazio curvo di quante si vogliano dimensioni, perchè $\frac{1}{R}$,

curvatura della geodetica di V_n tangente a C, misura altresì la curvatura di quella sezione normale di V_n che si ottiene intersecando V_n colla superficie geodetica individuata dalla direzione della tangente C e dello normale a V_n.

Quanto alla (38*), essa ci dimostra come la curvatura relativa $\frac{1}{\rho_g}$ di C rispetto a V_n corrisponda esattamente all'ordinaria curvatura geodetica (I § 98).

§ 445.

Curvature principali di un'ipersuperficie.

La formola (37*) può scriversi

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\sum_{r,s} \Omega_{rs}\, \eta_r\, \eta_s}{\sum_{r,s} b_{rs}\, \eta_r\, \eta_s},$$

dove $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ indicano le costanti di direzione *entro l' ipersuperficie* V_n della geodetica g considerata ; essa ci dà la curvatura della sezione normale di V_n corrispondente alla detta direzione (η_i).

Ora andiamo a ricercare i massimi e minimi di queste curvature e le direzioni secondo cui hanno luogo, ciò che condurrà alla estensione dei risultati al Cap. IV. Per ottenere questi massimi e minimi dobbiamo eguagliare a zero le derivate rispetto alle η del quoziente delle due forme quadratiche nelle η che figurano nel secondo membro della (γ), di cui *quella al denominatore è definita.*

Questo ci dà le n equazioni lineari omogenee nelle η

$$(39) \qquad \sum_s (b_{rs} - R\,\Omega_{rs})\,\eta_s = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots n),$$

essendo $\frac{1}{R}$ precisamente la curvatura della geodetica di V_n spiccata nella direzione (η). L'eliminazione delle η dalle (39) conduce alla equazione di ben nota forma

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} - R\,\Omega_{11}, & b_{12} - R\,\Omega_{12}, \ldots & b_{1n} - R\,\Omega_{1n} \\ b_{21} - R\,\Omega_{21}, & b_{22} - R\,\Omega_{22}, \ldots & b_{2n} - R\,\Omega_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} - R\,\Omega_{n1}, & b_{n2} - R\,\Omega_{n2}, \ldots & b_{nn} - R\,\Omega_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

che prende il nome di *equazione secolare*. Essa ha le n radici

$$R_1, R_2, \ldots R_n$$

tutte reali e diverse da zero perchè $| b_{ik} | \neq 0$, (*) e le loro inverse

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots \frac{1}{R_n}$$

dànno i massimi e minimi richiesti. Ad una radice semplice R_k della (40) corrisponde una sola direzione, che si dirà la *direzione principale* corrispondente della V_n, e le relative costanti di direzione η_i si indicheranno con

$$\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)} \ldots \eta_n^{(k)};$$

esse sono da calcolarsi dalle equazioni

$$(39^*) \qquad \sum_s (b_{rs} - R_k \Omega_{rs}) \eta_s^{(k)} = 0 \ (r = 1, 2, \ldots n)$$

aggiunta l'altra

$$\sum_{r,s} b_{rs} \eta_r^{(k)} \eta_s^{(k)} = 1.$$

Quando la radice R_k sia multipla d'ordine h, nel qual caso essa rende il determinante

$$| b_{rs} - R_k \Omega_{rs} |$$

precisamente di caratteristica $n - h$, le equazioni (39*) saranno sole $n-h$ indipendenti ed esisteranno quindi ∞^{h-1} direzioni principali corrispondenti distinte che individuano un S_h. Si intende che il caso $h > 1$ si presenterà solo eccezionalmente, cioè le n radici della (40) saranno, in generale, distinte.

Supposto che le due direzioni principali

$$(\eta_i^{(k)}), (\eta_i^{(l)})$$

corrispondano a due radici diverse R_k, R_l della (40) (semplici o multiple) si sa che sussiste la relazione

(*) Possono invece una o più radici diventare infinite ed allora si annullano altrettante delle curvature principali considerate nel seguito del testo.

$$\sum_{r,s} b_{rs}\,\eta_r^{(k)}\,\eta_s^{(l)} = 0, \quad (*)$$

la quale esprime l'ortogonalità di quelle due direzioni.

Dunque per una qualunque ipersuperficie V_n abbiamo in ogni punto n *curvature principali*

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots \frac{1}{R_n}$$

e corrispondentemente n direzioni principali

$$(\eta_i^{(1)}),\ (\eta_i^{(2)}) \ldots (\eta_i^{(n)})$$

che formano un n-edro ortogonale. Se indichiamo ora con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gli angoli che una direzione qualunque (η_i) forma colle n principali, avremo

$$\eta_i = \cos\alpha_1\,\eta_i^{(1)} + \cos\alpha_2\,\eta_i^{(2)} + \ldots + \cos\alpha_n\,\eta_i^{(n)}$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

$$(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1),$$

e la formola (37*)

$$\frac{1}{R} = \sum_{r,s} \Omega_{rs}\,\eta_2\,\eta_1$$

che dà la curvatura della sezione normale di V_n individuata dalla direzione (η_i), ove si tenga conto delle identità

$$\sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\,\eta_\lambda^{(i)}\,\eta_\mu^{(i)} = \frac{1}{R_i}\ ,\quad \sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\,\eta_\lambda^{(i)}\,\eta_\mu^{(k)} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k$$

(*) Ciò segue subito dalle equazioni

$$\sum_s b_{rs}\,\eta_s^{(k)} = R_k \sum_s \Omega_{rs}\,\eta_s^{(k)}\ ,\quad \sum_r b_{rs}\,\eta_r^{(l)} = R_l \sum_r \Omega_{rs}\,\eta_r^{(l)}\ ,$$

onde si deduce

$$\sum_{rs} b_{rs}\,\eta_r^{(l)}\,\eta_s^{(k)} = R_k \sum_s \Omega_{rs}\,\eta_r^{(l)}\,\eta_s^{(k)} = R_l \sum_{r,s} \Omega_{rs}\,\eta_r^{(l)}\,\eta_s^{(k)}\ ,$$

e per ciò

$$\left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_l}\right) \sum_{r,s} b_{rs}\,\eta_l^{(r)}\,\eta_s^{(k)} = 0\,.$$

diventa

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{R^2} + \ldots + \frac{\cos^2 \alpha_n}{R_n} .$$

Questa è manifestamente l'analoga della formola d'EULERO (§ 73), generalizzata alle ipersuperficie di spazii curvi qualunque. Per rappresentare geometricamente la legge di variazione delle curvature delle sezioni normali della V_n potremmo manifestamente servirci di una *quadrica indicatrice*

$$\frac{y_1^2}{R_1} + \frac{y_2^2}{R^2} + \ldots + \frac{y_n^2}{R_n} = \pm 1$$

nell'ordinario spazio euclideo a n dimensioni.

La nozione di direzioni principali della V_n porta altresì a definire come *linee di curvatura* della V_n quelle linee che seguono in ogni loro punto una delle n direzioni principali. In generale avremo n sistemi di linee di curvatura, tali che da ogni punto di V_n esce una linea di ciascuno degli n sistemi, e le equazioni differenziali delle linee di curvatura corrispondenti alla direrezione principale $(\eta_i^{(k)})$ saranno

$$\frac{d u_1}{\eta_1^{(k)}} = \frac{d u_2}{\eta_2^{(k)}} = \ldots = \frac{d u_n}{\eta_n^{(k)}} ,$$

che per le (39*) possono anche scriversi

$$(40^*) \qquad \sum_s (b_{rs} - R_k \Omega_{rs}) du_s = 0 \quad r = 1, 2, \ldots n .$$

Come al § 440, anche qui è bene avvertire che in generale non si può costituire cogli n sistemi di linee di curvatura della V_n *un sistema n-uplo di varietà* V_{n-1} *ortogonale*. Quando una tale distribuzione sia possibile diremo con DARBOUX che l'ipersuperficie ha linee di curvatura *coordinate*, od anche che è una V_n *normale*.

§ 446.

Casi particolari $n = 2$, $n = 3$.

Fermiamoci a considerare alcuni casi più semplici dei risultati generali ottenuti.

a) Prendiamo daprima $n = 2$, cioè consideriamo una superficie V_2 immersa in uno spazio curvo qualunque a tre dimensioni S_3. Alla V_2 competeranno due raggi principali di curvatura R_1, R_2 (le inverse delle curvature principali) ; noi daremo il nome di *curvatura relativa* della superficie V_2 al prodotto

$$\frac{1}{R_1 R_2},$$

mentre riserberemo il nome di *curvatura assoluta* K di V_2 a quella che compete al suo ds^2 misurato nell'S_3. (*)

Ora fra la curvatura relativa $\dfrac{1}{R_1 R_2}$ e l'assoluta K passa una relazione semplicissima, che si trae subito dalla formola (III) di CODAZZI (pag. 452) nel caso $n = 2$. Si ha invero

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2} = \frac{(12, 12)_b}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2} - \frac{\sum\limits_{r,k,i,h} (rk, ih)_a \dfrac{\partial x_r}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_h}{\partial u_2}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2}}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}$$

e si osserva che il primo termine del secondo membro è precisamente la curvatura assoluta della V_2, e per la formola (C) § 434 che dà la curvatura Riemanniana in una data orientazione, si vede che indicando con K_0 la curvatura dello spazio S_3 nell'orientazione del piano tangente alla V_2 si ha appunto :

$$K_0 = \frac{\sum\limits_{r,k,i,h} (rk, ih)_a \dfrac{\partial x_r}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_h}{\partial u_2}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2}}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2},$$

onde risulta

$$\frac{1}{R_1 R_2} = K - K_0 .$$

Si ha dunque il teorema : *La curvatura relativa in un punto di una superficie* V_2, *entro uno spazio curvo* S_3 *a tre dimensioni, eguaglia la differenza fra la sua curvatura assoluta e la curvatura Riemanniana dello spazio nell'orientazione che ha la* V_2 *in quel punto.*

(*) Alcuni autori usano senz'altro il nome di curvatura per un'ipersuperficie V_n di S_{n+1} per il prodotto delle n curvature principali $\dfrac{1}{R_1 R_2 \ldots R_n}$. Sembrano preferibili le denominazioni nel testo per non ingenerare confusioni col concetto di curvatura Riemanniana.

b) Prendiamo ora $n = 3$, e supponiamo di più che lo spazio ambiente S_4 sia *a curvatura Riemanniana costante* K_0. Per una qualunque ipersuperficie V_3 di questo spazio abbiamo da considerare, in ogni punto M_0, le tre direzioni delle linee di curvatura e i tre raggi principali di curvatura R_1, R_2, R_3. D'altra parte la V_3, come spazio curvo a tre dimensioni, possiede (§ 438) le tre direzioni principali *rispetto alle curvature Riemanniane* nelle diverse orientazioni e le tre curvature Riemanniane principali K_1, K_2, K_3. Fra questi elementi sussistono delle relazioni ben semplici che troviamo come segue. Nel punto in considerazione della V_3 possiamo rendere simultaneamente

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 1$$

$$b_{ik} = \Omega_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k \,(*)\,,$$

e sarà quindi

$$\Omega_{11} = \frac{1}{R_1}\,,\quad \Omega_{22} = \frac{1}{R_2}\,,\quad \Omega_{33} = \frac{1}{R_3}\,.$$

Sostituendo nelle formole (III*) di CODAZZI, si ottiene

$$(23, 23)_b = \frac{1}{R_2\,R_3} + K_0,\ (31, 31)_b = \frac{1}{R_3\,R_1} + K_0,\ (12, 12)_b = \frac{1}{R_1\,R_2} + K_0$$

$$(23, 31) = (31, 12) = (12, 23) = 0.$$

Le tre ultime dimostrano (§ 438) che le linee coordinate (u_1), (u_2), (u_3) hanno nel punto precisamente le direzioni principali di V_3, come spazio a tre dimensioni ; e le tre prime dànno per le curvature Riemanniane principali le formole

$$K_1 = \frac{1}{R_2\,R_3} + K_0\,,\quad K_2 = \frac{1}{R_3\,R_1} + K_0\,,\quad K_3 = \frac{1}{R_1\,R_2} + K_0\,.$$

Si ha dunque il teorema: *Le tre direzioni principali di ogni spazio curvo* V_3 *a tre dimensioni, immerso in uno spazio* S_4 *a quattro dimensioni di curvatura costante* K_0, *coincidono colle direzioni delle linee di curvatura* (*di* V_3 *rispetto a* S_4), *e le tre curvature Riemanniane principali* K_1, K_2, K_3 *dello spazio* S_3 *hanno coi raggi principali di curvatura* R_1, R_2, R_3 *le semplici relazioni* :

(*) Basta per ciò scegliere le linee coordinate in V_3 per modo che abbiano nel punto le direzioni delle linee di curvatura e fissare convenientemente i parametri.

$$K_1 - K_0 = \frac{1}{R_2 R_3}, \quad K_2 - K_0 = \frac{1}{R_3 R_1}, \quad K_3 - K_0 = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Si osservi che di qui risulta

$$(K_1 - K_0)(K_2 - K_0)(K_3 - K_0) = \frac{1}{R_1^2 R_2^2 R_3^2},$$

e il prodotto considerato è quindi certamente positivo (o nullo): In particolare si vede che:

In uno spazio a quattro dimensioni di curvatura costante K_0 *non esiste alcuno spazio a tre dimensioni di curvatura costante* K *minore della curvatura* K_0 *dello spazio ambiente.*

Così lo spazio S_4 euclideo ($K_0 = 0$) non contiene alcun spazio pseudosferico a tre dimensioni (di curvatura costante negativa). Similmente non esistono nell'S_4 euclideo spazii subordinati V_3 a tre dimensioni le cui curvature Riemanniane principali siano tutte tre negative, ovvero due positive ed una negativa.

In fine osserviamo che le ipersuperficie V_3 dell'S_4 a curvatura costante *con linee di curvatura coordinate* non sono altro che gli spazii normali S_3 (§ 440) immersi in questo S_4.

§ 447.

Spazî in rappresentazione conforme Teorema di Liouville.

Ritornando al caso generale di un'ipersuperficie V_n, immersa in uno spazio qualunque S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni, consideriamo un secondo spazio S'_{n+1} che corrisponda punto per punto al primo, in guisa che gli angoli siano conservati, cioè vi sia *rappresentazione conforme* dell'uno sull'altro. Mantenendo tutte le altre notazioni e indicando con

$$ds'^2 = \sum_{i,k} a'_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

il ds'^2 di S'_{n+1}, perchè abbia luogo rappresentazione conforme dovremo avere manifestamente proporzionalità fra i coefficienti a'_{ik} a_{ik}, scriviamo adunque,

$$a'_{ik} = U^2 a_{ik}.$$

All'ipersuperficie V_n di S_{n+1} coll'elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu$$

corrisponderà in S'_{n+1} un'ipersuperficie V'_n coll'elemento lineare

$$ds'^2 = U^2 \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu\,.$$

Indicando con accenti le quantità relative alla V'_n, avremo intanto

$$b'_{\lambda\mu} = U^2\, b_{\lambda\mu}\,, \quad X'_\mu = \frac{X_\mu}{U}\,.$$

Ora pei simboli $\left[\begin{matrix} i\,k \\ \mu \end{matrix}\right]_{a'}$ di CHRISTOFFEL per la forma $\sum_{ik} a'_{ik}\, dx_i\, dx_k$ troviamo subito

$$\left[\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right]_{a'} = U^2 \left[\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right]_{a} + U \left\{ a_{k\mu} \frac{\partial U}{\partial x_i} + a_{i\mu} \frac{\partial U}{\partial x_k} - a_{ik} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \right\},$$

e se adoperiamo le formole (V) pag. 454 per costruire i coefficienti Ω'_{rs} della seconda forma fondamentale di V'_n, avremo dapprima

$$\Omega'_{rs} = U\,\Omega_{rs} + \sum_{i,k,\mu} \left(a_{k\mu} \frac{\partial U}{\partial x_i} + a_{ik} \frac{\partial U}{\partial x_k} - a_{ik} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_\mu\,.$$

Ma si ha, per le (30), (34)

$$\sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = b_{rs}\,, \quad \sum_{k\mu} a_{k\mu} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_\mu = 0$$

$$\sum_{i,\mu} a_{i\mu} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} X_\mu = 0\,,$$

e resta quindi

$$\Omega'_{rs} = U\,\Omega_{rs} - b_{rs} \sum_{\mu} X_\mu \frac{\partial U}{\partial x_\mu}\,.$$

Possiamo porre quest'ultima formola sotto una forma più espressiva, ricordando che le costanti di direzione X_μ della normale a V_n non sono altro che le derivate

$$X_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial u_0}$$

delle x_μ nel senso normale all'ipersuperficie (§ 441), onde abbiamo

$$\Omega'_{rs} = U\,\Omega_{rs} - b_{rs}\frac{\partial U}{\partial u_0}. \tag{41}$$

Dopo ciò le equazioni differenziali (40*) pag. 463 delle linee di curvatura della V'_n, scrivendosi

$$\sum_s (b'_{rs} - R'\,\Omega'_{rs})\,du_s = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n),$$

diventano

$$\sum_s \left(\frac{b_{rs}}{R'} - \frac{\Omega_{rs}}{U} + \frac{b_{rs}}{U}\frac{\partial\, log\, U}{\partial u_0}\right) du_s = 0,$$

e si deducono dalle corrispondenti

$$\sum_s \left(\frac{b_{rs}}{R} - \Omega_{rs}\right) du_s = 0$$

per la V_n semplicemente ponendo

$$\frac{1}{R} = \frac{U}{R'} + \frac{\partial\, log\, U}{\partial u_0}. \tag{42}$$

Abbiamo dunque il teorema generale:

Se fra due spazii qualunque, di quante si vogliano dimensioni, vi ha rappresentazione, conforme, sopra due ipersuperficie corrispondenti si corrispondono sempre le linee di curvatura e le curvature principali $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, sono *legate dalla relazione lineare* (42), *i cui coefficienti dipendono unicamente dal modulo* U *della rappresentazione* (*) *e dalla sua derivata normale.*

Il teorema precedente può applicarsi in particolare agli spazii euclidei (a curvatura nulla). In questo caso è facile risolvere la questione di trovare tutte le possibili rappresentazioni dello spazio euclideo a n dimensioni sopra sè stesso ; il gruppo delle rappresentazioni conformi dello spazio euclideo S_n, appena $n > 2$, è infatti, come ora vedremo, un gruppo *finito* cioè con un numero finito $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$ di parametri (**).

(*) Diciamo modulo U della rappresentazione il coefficiente di dilatazione $\frac{ds'}{ds} = U$ (rapporto di due elementi lineari corrispondenti).

(**) Per $n = 2$ il gruppo è infinito e dipende da una funzione arbitraria di variabile complessa.

Prendiamo il ds^2 dello spazio S_n euclideo sotto la forma normale

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 ;$$

volendolo rappresentare in modo conforme sopra sè stesso, dovremo porre

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{U^2}$$

e determinare U in guisa che il ds'^2 sia nuovamente a curvatura Riemanniana nulla. Il problema è già stato risoluto al § 435, e la funzione U, appena $n > 2$, ha necessariamente la forma

$$U = a\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2 \sum_i b_i\, x_i + C,$$

dove le costanti, per la (19) pag. 434. sono legate dalla relazione

$$a\,C = \Sigma\, b_i^2.$$

Se $a = 0$ anche tutte le b_i sono zero e si può fare, applicando un'omotetia, $U = 1$, nel qual caso la rappresentazione conforme è semplicemente un movimento, e per C qualunque una similitudine. Se $a \neq 0$ scriviamo

$$U = a \sum_i \left(x_i + \frac{b_i}{a} \right)^2$$

e, cangiando x_i in $x_i - \frac{b_i}{a}$ (applicando una traslazione), non cangiamo la generalità ponendo

$$U = a\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

$$ds' = \frac{1}{a^2} \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2}.$$

A meno di movimenti, questa trasformazione si ottiene coll'inversione per raggi vettori reciproci

$$x'_i = \frac{x_i}{a \sum_\lambda x_\lambda^2}.$$

Ne concludiamo quindi il teorema, dimostrato da LIOUVILLE pel caso $n = 3$:

Le più generali trasformazioni conformi dello spazio euclideo di $n > 2$ dimensioni in sè stesso si ottengono combinando le inversioni per raggi vettori reciproci coi movimenti e colle similitudini.

Queste trasformazioni formano un gruppo continuo con un numero di parametri dato da

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

come sopra si è asserito. Questo è il *gruppo conforme* dello spazio euclideo.

Ricordiamo poi, dal § 435, che ogni spazio S_n a curvatura Riemanniana costante è rappresentabile conformemente sull'euclideo e quindi ammette un gruppo conforme simile a quello dello spazio euclideo.

§ 448.

Sistemi *npli.* ortogonali negli spazi curvi S_n.

Dato il ds^2 di uno spazio curvo qualunque S_n a n dimensioni

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1 \ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

non è, in generale, possibile (appena $n > 3$) introdurre nuove n variabili $y_1, y_2, \ldots y_n$ tali da ridurre il ds^2 alla forma ortogonale

$$ds^2 = H_1^2\, dy_1^2 + H_2^2\, dy_2^2 + \ldots + H_n^2\, dy_n^2. \tag{43}$$

Questo si intende facilmente riflettendo che le n funzioni incognite $y_1, y_2, \ldots y_n$ debbono per ciò soddisfare alle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni a derivate parziali del 1.° ordine

$$\nabla(y_i, y_k) = 0 \qquad \text{per } i \neq k,$$

ed il numero $\frac{n(n-1)}{2}$ di queste equazioni eccede, quando $n > 3$, il numero n delle incognite.

La riduzione alla forma ortogonale (43) sarà dunque possibile solo in casi particolari. Ma, supposto che ciò sia, diremo che le ipersuperficie

coordinate $(y_1)\,(y_2)\ldots(y_n)$ formano in S_n un *sistema n-uplo di ipersuperficie ortogonali.* Ricerchiamo allora quali sono le linee di curvatura delle ipersuperficie coordinate, p. e delle $y_n = \text{cost.}^{te}$. Cerchiamo per ciò quali sono i coefficienti Ω_{ik} della seconda forma fondamentale

$$\sum_{1,\ldots n-1}^{i,k} \Omega_{ik}\, dy_i\, dy_k$$

per la $y_n = \text{cost.}^{te}$. Per quanto si è visto al § 430 (pag. 419) le costanti di direzione della normale sono semplicemente

$$X_i = \frac{A_{ni}}{\sqrt{A_{nn}}}\,,\ i = 1, 2, \ldots n,$$

e per ciò abbiamo

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 0\,,\quad X_n = \frac{1}{H_n}\,.$$

Calcolando quindi le Ω_{rs} dalle (V) pag. 454 (col tener conto delle mutate notazioni) troviamo subito

$$\Omega_{rs} = \begin{bmatrix} r\ s \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{H_n} \quad (r, s = 1, 2, \ldots n-1)$$

e quindi

$$\Omega_{rr} = -\frac{H_r}{H_n}\frac{\partial H_r}{\partial y_n}\,,\quad \Omega_{rs} = 0 \ \text{ per } \ r \neq s. \tag{44}$$

Essendo dunque *zero* tutte le Ω con indici diseguali, vediamo che le linee di curvatura delle $y_n = \text{cost}^{te}$ sono appunto le linee coordinate $(y_1)\,(y_2)\ldots(y_{n-1})$. Di qui il teorema:

Se in uno spazio curvo a n dimensioni esiste un sistema n-plo di ipersuperficie ortogonali, queste si tagliano mutuamente lungo le loro linee di curvatura.

Enunciamo in particolare il teorema pel caso $n = 3$ sotto la forma:

In ogni sistema triplo ortogonale di superficie in uno spazio curvo qualunque S_3 *le superficie di diverso sistema si tagliano (ortogonalmente) lungo linee di curvatura.*

Questo è, per l'ordinario spazio euclideo, il celebre teorema di DUPIN che completeremo al prossimo paragrafo colla dimostrazione del teorema inverso di DARBOUX.

Tornando al caso di n qualunque, calcoliamo ancora, dalle formole (44) per le Ω_{rs}, i valori dei raggi principali di curvatura per le ipersuperficie coordinate. Per ciò introduciamo la notazione seguente : *indichiamo con* r_{ik} *il raggio principale di curvatura dell' ipersuperficie* $y_i = cost.^{te}$ *lungo la linea di curvatura* (y_k). Il raggio r_{nk} per la $y_n = \text{cost}^{te}$ sarà

$$\frac{1}{r_{nk}} = \frac{\Omega_{kk}}{a_{kk}} ,$$

cioè per le (44)

$$\frac{1}{r_{nk}} = - \frac{1}{H_n H_k} \frac{\partial H_k}{\partial y_n} .$$

In generale abbiamo dunque il risultato :

In un sistema n-uplo ortogonale

$$ds^2 = H_1^2 dy_1^2 + H_2^2 dy_2^2 + \ldots + H_n^2 dy_n^2$$

i raggi principali di curvatura delle ipersuperficie coordinate sono dati dalle formole

$$\frac{1}{r_{ik}} = - \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial y_i} . \tag{45}$$

Altre formole pure notevoli si ottengono cercando le flessioni delle linee coordinate (y_i) che indicheremo con $\frac{1}{R_i}$. Calcoliamo p. e. $\frac{1}{R_n^2}$ dalla formola (35) pag. 456 che diventa qui

$$\frac{1}{R_n^2} = \sum_i H_i^2 \left(\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dy_\lambda}{dt} \frac{dy_\mu}{dt} \right)^2 , \tag{46}$$

e siccome $dt = H_n dy_n$, indi

$$\frac{dy_\lambda}{dt} = 0 , \quad \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = 0 \quad \text{per} \quad \lambda \neq n$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{1}{H_n} \quad \frac{d^2 y_n}{dt^2} = - \frac{1}{H_n^3} \frac{\partial H_n}{\partial y_n} ,$$

da cui

$$\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dy_\lambda}{dt} \frac{dy_\mu}{dt} = \frac{1}{H_n^2} \left\{ \begin{matrix} n\,n \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{H_n^2 H_i^2} \left[\begin{matrix} n\,n \\ i \end{matrix} \right] ,$$

ne risulta

$$\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dy_\lambda}{dt} \frac{dy_\mu}{dt} = -\frac{1}{H_n H_n^2} \frac{\partial H_n}{\partial y_i} \quad \text{per } i \neq n$$

$$\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ n \end{matrix} \right\} \frac{dy_\lambda}{dt} \frac{dy_\mu}{dt} = \frac{1}{H_n^3} \frac{\partial H_n}{\partial y_n}.$$

Dunque nella somma a destra della (46) si annulla l'ultimo termine e resta

$$\frac{1}{R_n^2} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{H_i^2 H_n^2} \left(\frac{\partial H_n}{\partial y_i} \right)^2,$$

formola che per le (45) si scrive

$$\frac{1}{R_n^2} = \frac{1}{r_{1n}^2} + \frac{1}{r_{2n}^2} + \ldots + \frac{1}{r_{n-1,n}^2},$$

e in generale

$$\frac{1}{R_i^2} = \sum_{\lambda}{}' \frac{1}{r_{\lambda i}^2}, \tag{46*}$$

dove l'accento nella somma indica che λ percorre i valori da 1 a n, con *esclusione di* $\lambda = i$.

§ 449.

Caso degli spazi a tre dimensioni.

Applichiamo i teoremi dimostrati al caso degli spazii (curvi) a tre dimensioni, ove la ricerca si può facilmente precisare e completare.

In primo luogo estenderemo a qualunque spazio curvo S_3 i teoremi sulle linee di curvatura che, per lo spazio euclideo, abbiamo dedotti al § 70 dalle proprietà delle curve evolute.

Dimostriamo che:

Se in uno spazio curvo S_3 *due superficie si tagliano lungo una linea* C *che sia linea di curvatura per ambedue le superficie, esse si tagliano sotto angolo costante. Viceversa se due superficie si tagliano sotto angolo costante lungo una linea che sia linea di curvatura per una di esse, questa linea sarà di curvatura anche per l'altra.*

Riferiamo lo spazio S_3 ad un tale sistema coordinato (x_1, x_2, x_3) che le due superficie in questione siano p. e le due superficie coordinate $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, che si tagliano lungo la (x_1). Sia

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

ed esprimiamo in primo luogo che sulla superficie $x_3 = 0$ la linea $x_2 = 0$ è linea di curvatura. Per questo calcoliamo i coefficienti Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22} della seconda forma fondamentale per la $x_3 = 0$. Intanto per le costanti di direzione della normale abbiamo (pag. 419)

$$X_1 = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{33}}}, \quad X_2 = \frac{A_{23}}{\sqrt{A_{33}}}, \quad X_3 = \frac{A_{33}}{\sqrt{A_{33}}},$$

e le formole (V) pag. 454 dànno quindi

$$\Omega_{rs} = \sum_{\mu} \begin{bmatrix} r\,s \\ \mu \end{bmatrix} X_\mu = \frac{1}{\sqrt{A_{33}}} \begin{Bmatrix} r\,s \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

Ora l'equazione differenziale delle linee di curvatura sulla $x_3 = 0$ è data da

$$\begin{matrix} a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2\,, & a_{12}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 \\ \Omega_{11}\,dx_1 + \Omega_{12}\,dx_2\,, & \Omega_{12}\,dx_1 + \Omega_{22}\,dx_2 \end{matrix} = 0\,,$$

e per ciò la linea $x_2 = 0$ sulla superficie $x_3 = 0$ sarà di curvatura quando si abbia

$$a_{11}\,\Omega_{12} = a_{12}\,\Omega_{11} \quad \textit{per } x_2 = x_3 = 0,$$

ossia

$$(\alpha) \qquad a_{11} \begin{Bmatrix} 12 \\ 3 \end{Bmatrix} - a_{12} \begin{Bmatrix} 11 \\ 3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Similmente la condizione perchè sulla superficie $x_2 = 0$ la linea $x_3 = 0$ sia di curvatura sarà (permutando x_2 con x_3):

$$(\beta) \qquad a_{11} \begin{Bmatrix} 13 \\ 2 \end{Bmatrix} - a_{13} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad x_2 = x_3 = 0.$$

D'altra parte l'angolo Ω sotto cui si tagliano le dette due superficie coordinate è dato da (pag. 419)

$$\cos\Omega = \frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}\,A_{33}}} \quad \text{per} \quad x_2 = x_3 = 0$$

e per esprimere che quest'angolo è costante lungo la (x_1) basta scrivere che è nulla la derivata di $\cos\Omega$ rapporto a x_1, cioè

$$2\,A_{22}\,A_{33}\frac{\partial\,A_{23}}{\partial\,x_1} = A_{23}\left(A_{22}\frac{\partial\,A_{33}}{\partial\,x_1} + A_{33}\frac{\partial\,A_{22}}{\partial\,x_1}\right).$$

Se alle derivate A_{ik} sostituiamo le loro espressioni, secondo le formole (B) del Vol. I pag. 82, troviamo

$$A_{22}\,A_{33}\left(\sum_t A_{2t}\left\{\begin{matrix}1\,t\\3\end{matrix}\right\} + \sum_t A_{3t}\left\{\begin{matrix}1\,t\\2\end{matrix}\right\}\right) = A_{22}\,A_{23}\sum_t A_{3t}\left\{\begin{matrix}1\,t\\3\end{matrix}\right\} +$$

$$+\,A_{23}\,A_{33}\sum_t A_{22}\left\{\begin{matrix}1\,t\\2\end{matrix}\right\}.$$

Omettendo i termini che si distruggono, questa si trasforma nell'altra

$$A_{22}\,(A_{12}\,A_{33} - A_{23}\,A_{13})\left\{\begin{matrix}11\\3\end{matrix}\right\} + A_{22}\,(A_{22}\,A_{33} - A_{23}^2)\left\{\begin{matrix}12\\3\end{matrix}\right\} +$$

$$+\,A_{33}\,(A_{22}\,A_{13} - A_{23}\,A_{12})\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + A_{33}\,(A_{22}\,A_{33} - A_{23}^2)\left\{\begin{matrix}13\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Tenendo conto delle relazioni che legano i minori del secondo ordine del determinante reciproco (A_{ik}) agli elementi del primitivo, la condizione perchè l'angolo Ω sia costante si traduce nella equazione

$$(\gamma)\quad A_{22}\left[a_{11}\left\{\begin{matrix}12\\3\end{matrix}\right\} - a_{12}\left\{\begin{matrix}11\\3\end{matrix}\right\}\right] + A_{33}\left[a_{11}\left\{\begin{matrix}13\\2\end{matrix}\right\} - a_{13}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right] = 0 \quad \text{per } x_1 = x_3 = 0.$$

Questa è una combinazione lineare delle (α), (β), con coefficienti A_{22}, A_{33} diversi ambedue da zero (essendo la forma $\sum_{ik} a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ definita); dunque il verificarsi di due fra le tre equazioni (α), (β), (γ) porta seco il verificarsi della terza, e il teorema è dimostrato.

§ 450.

Sistemi tripli ortogonali in un S_3.

Facciamo ora una seconda ricerca diretta ad invertire, nel caso $n = 3$, il teorema di DUPIN (§ 448). Supponiamo di avere in S_3 due sistemi ∞^1 di superficie Σ, Σ' che si taglino mutuamente ad angolo retto e domandiamo

quando accadrà che esista un terzo sistema Σ'' ortogonale ad ambedue, sì da completare un sistema triplo ortogonale. Sappiamo già che condizione *necessaria* (pel teorema di DUPIN), è che i due sistemi Σ, Σ' si taglino lungo, linee di curvatura, ma ora proveremo che tale condizione è pure *sufficiente*, anzi proveremo le due cose insieme dimostrando così nuovamente il teorema di DUPIN.

Scegliamo per ciò a superficie coordinate $x_3 = \text{cost}^{\text{te}}$. le superficie Σ di uno dei due sistemi, a linee coordinate (x_3) le loro trajettorie ortogonali, in fine a linee coordinate (x_1) le intersezioni delle Σ colle Σ', che saranno dunque le linee $x_2 = \text{cost}^{\text{te}}$. L' elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$(47) \qquad ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2$$

con $a_{13} = a_{23} = 0$, perchè le linee (x_3) sono ortogonali alle superficie $x_3 = \text{cost}^{\text{te}}$.

Supponiamo che sulle superficie $x_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$ le linee (x_1) o $x_2 = \text{cost}^{\text{te}}$ siano di curvatura, ciò che si esprimerà colla (α)

$$a_{11}\begin{Bmatrix}12\\3\end{Bmatrix} = a_{12}\begin{Bmatrix}11\\3\end{Bmatrix},$$

ovvero, avendosi qui $A_{13} = A_{23} = 0$, $A_{33} = \dfrac{1}{a_{33}}$,

$$a_{11}\left|\begin{matrix}12\\3\end{matrix}\right| = a_{12}\left|\begin{matrix}11\\3\end{matrix}\right|,$$

e svolgendo

$$(\alpha^*) \qquad a_{11}\frac{\partial\, a_{12}}{\partial\, x_3} = a_{12}\frac{\partial\, a_{11}}{\partial\, x_3}.$$

Di quì integrando abbiamo

$$a_{12} = a_{11}\,f(x_1, x_2),$$

dove $f(x_1, x_2)$ non contiene x_3. Indicando con λ un fattore integrante di

$$dx_1 + f(x_1, x_2)\,dx_2,$$

possiamo scrivere

$$ds^2 = \frac{a_{11}}{\lambda^2}(\lambda\,dx_1 + \lambda\,f\,dx_2)^2 + (a_{22} - a_{11}\,f^2)\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2,$$

e basta introdurre la nuova variabile

$$y_1 = \int \lambda \, (dx_1 + f \, dx_2)$$

per avere il ds^2 ridotto alla forma ortogonale

$$ds^2 = \frac{a_{11}}{\lambda^2} dy_1^2 + (a_{22} - a_{11} f^2) dx_2^2 + a_{33} dx_3^2$$

senza avere cambiato le superficie coordinate $x_2 = \text{cost.}^{te}$ $x_3 = \text{cost}^{te}$. Così è dimostrato che la condizione enunciata è sufficiente, ma lo stesso procedimento conduce a riconoscere la condizione anche come necessaria, cioè dà di nuovo il teorema di DUPIN. E infatti se, mantenendo le superficie coordinate $x_2 = \text{cost.}^{te}$ $x_3 = \text{cost.}^{te}$, deve essere possibile ridurre la (47) a forma ortogonale, questo dovrà ottenersi mutando solo la variabile x_1 in $\varphi(y_1, x_2)$ ciò che dà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_{12}\right) = 0.$$

Ma $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \neq 0$ e per ciò deve essere $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ funzione solo di x_1, x_2, onde la (α^*) è soddisfatta. Così abbiamo il teorema nella sua forma completa :

In uno spazio curvo qualunque S_3 *la condizione necessaria e sufficiente perchè a due sistemi di superficie ortogonali fra loro possa associarsene un terzo ortogonale ad ambedue è che i due primi s'incontrino lungo linee di curvatura.*

E' questa l'importante inversione del teorema di DUPIN effettuata dal DARBOUX nel caso euclideo e che qui abbiamo esteso ad uno spazio curvo qualunque S_3.

Da quanto già abbiamo detto al § 448 s'intende che in un S_3 curvo qualunque esistono infiniti sistemi tripli ortogonali ; il problema analiticamente considerato equivale alla ricerca di tre funzioni incognite y_1, y_2, y_3 delle tre coordinate x che soddisfino al sistema delle tre equazioni a derivate parziali del primo ordine

$$\nabla(y_1, y_2) = 0, \quad \nabla(y_2, y_3) = 0, \quad \nabla(y_3, y_1) = 0.$$

Ora è assai notevole che ad un tale sistema si può sostituire *un' unica equazione alle derivate parziali terze per una sola funzione incognita.* Que-

sto importante, risultato venne stabilito dal DARBOUX per lo spazio euclideo, e facilmente si estende ad un qualunque S_3.

Per questo andiamo a ricercare la condizione affinchè un sistema ∞^1 di superficie, dato da

$$(a) \qquad y(x_1, x_2, x_3) = c,$$

dove c è un parametro variabile, appartenga ad un sistema triplo ortogonale, nel qual caso diremo che il sistema (a) costituisce una *famiglia di* LAMÈ Se questo è il caso, ciascuno degli altri due sistemi, completando con (a) il sistema triplo ortogonale, dovrà avere per trajettorie ortogonali le linee di curvatura di un sistema di tutte le superficie (a). Viceversa se le linee di curvatura di *uno dei due sistemi* sulle (a) ammettono una serie di superficie ortogonali, queste taglieranno ortogonalmente le (a) lungo linee di curvatura e quindi, pel teorema di DARBOUX, esisterà un terzo sistema ortogonale ad ambedue: Per esprimere adunque che le superficie (a) formano una famiglia di LAMÈ basta porre la condizione che la doppia infinità di linee di curvatura *di unodei due sistemi* sulle (a) ammetta una serie di superficie ortogonali. Se indichiamo con X_1, X_2, X_3 le costanti di direzione delle tangenti a queste linee di curvatura, le superficie ortogonali, se esistono, saranno date dall'integrare l'equazione ai differenziali totali

$$\sum_{i,k}^{1,3} a_{ik} X_k \, dx_i = 0,$$

ovvero

$$Y_1 \, dx_1 + Y_2 \, dx_2 + Y_3 \, dx_3 = 0,$$

posto

$$Y_i = \sum_h a_{ik} X_k .$$

La condizione è dunque che questa equazione sia completamente integrabile, cioè sia soddisfatta identicamente la condizione d'integrabilità

$$(b) \qquad Y_1\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_2}\right) + Y_2\left(\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_3}\right) + Y_3\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Ma, secondo le formole generali sviluppate nei paragrafi precedenti X_1, X_2, X_3, e per ciò anche Y_1, Y_2, Y_3 si esprimono per le x_1, x_2, x_3 *e le derivate prime e seconde* della funzione y (x_1, x_2, x_3) Sostituendo nella (b) questa diventa appunto per la y un'equazione alle derivate parziali terze.

CAPITOLO XXVI.

Geometria degli spazî a curvatura costante.

Forme tipiche del ds^2 per gli spazî di curvatura costante. - Rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sul semispazio euclideo. - Immagini delle linee geodetiche e delle varietà geodetiche. - Rappresentazione geodetica del BELTRAMI. - Metrica del Cayley e coordinate di WÉIRSTRASS. - Movimenti nello spazio iperbolico a tre dimenzioni rappresentati dalle sostituzioni sopra una variabile complessa colle formole di POINCARÈ. - Movimenti nello spazio ellettico. Scorrimenti e parallelismo di Clifford. - Parametri di scorrimento. - Le rigate a curvaturà nulla e la superficie di CLIFFORD. - Formole di FRENET in geometria ellittica ed iperbolica. - Curve a torsione costante.

§ 451.

Equazioni simultanee di Weingarten.

Ci proponiamo, nel presente Capitolo, di svolgere i principii fondamentali della geometria degli spazî di curvatura Riemanniana costante, in un numero qualunque n di dimensioni, estendendo gli studî che nel Capitolo XIV Vol. I abbiamo esposti, nel caso particolare $n = 2$, per la geometria pseudosferica a due dimensioni. E in primo luogo dimostreremo, in un nuovo modo, il teorema (§ 436) che due spazî S_n colla stessa curvatura costante sono sempre applicabili l'uno sull'altro (in $\infty \frac{n(n+1)}{2}$ modi diversi); nello stesso tempo verremo a far conoscere particolari forme tipiche importanti per il ds^2 di questi spazî.

Partiremo da un'osservazione fondamentale di WEINGARTEN che ad ogni ds^2

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

di curvatura Riemanniana costante associa un notevole sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine per una funzione incognita

$U(x_1, x_2 \ldots x_n)$ delle n variabili. Il sistema si scrive

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_l} - K a_{ik} U \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ed esprime *tutte* le derivate seconde delle U linearmente per la U e per le derivate prime. Esso è *illimitatamente integrabile* appunto a causa delle relazioni

$$(2) \qquad (rk, ih) = K (a_{ri} a_{hk} - a_{rh} a_{ik}),$$

le quali esprimono che il ds^2 dato dalla (1) è a curvatura Riemanniana costante K. Per vedere questo si osservi che, adoperando i simboli a quattro indici di seconda specie, le (2) equivalgono alle altre

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \{rk, ih\} = 0 \quad \text{per} \quad k \neq i, h \\ \{rk, ik\} = K a_{ri}, \end{cases}$$

mentre coi simboli delle derivate seconde covarianti il sistema (A) di WEINGARTEN si scrive

$$(A^*) \qquad U_{ik} = - K a_{ik} U.$$

Basta allora far uso delle identità (I pag. 99)

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_{jl}} - \frac{\partial U_{il}}{\partial x_{hk}} = \sum_j \{i\,j, l\,k\} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} i\,l \\ j \end{matrix} \right\} U_{jk} - \sum_j \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix} \right\} U_{jl}$$

e delle (2*) per vedere che le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte. Segue di qui che, per individuare una soluzione U del sistema (A), basta assegnare ad arbitrio, in un punto di S_n, i valori iniziali di U e delle sue n derivate prime.

Osserviamo di più che, se U, V sono due soluzioni, distinte o coincidenti, del sistema (A), sussiste la relazione

$$(3) \qquad \nabla (U, V) + K U V = \text{cost.}^{\text{te}}$$

Si ha infatti (I pag. 100)

$$\frac{\partial \nabla (U, V)}{\partial x_i} = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_s} U_{ir} + \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} V_{is},$$

e quindi per le (A)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\nabla(U, V) + K\,U\,V\right\} = K\,U\frac{\partial V}{\partial x_i} + K\,V\frac{\partial U}{\partial x_i} - KU\sum_{rs} A_{rs}\,a_{ir}\frac{\partial V}{\partial x_s}$$

$$- KV\sum_{rs} A_{rs}\,a_{is}\frac{\partial U}{\partial x_r} = 0.$$

Dalla (3) segue in particolare per $V = U$

$$\Delta_1 U + KU^2 = \text{cost.}^{\text{te}} \tag{3*}$$

e questo dimostra che: *se* U *è una soluzione del sistema* (A) *di* WEINGARTEN, *le ipersuperficie* $U = cost.^{te}$ *sono geodeticamente parallele.* Dimostreremo ora di più che queste ipersuperficie $U = \text{cost.}^{\text{te}}$ sono esse stesse spazii ad $n - 1$ dimensioni di curvatura Riemanniana costante e di qui si dedurrà facilmente la nuova dimostrazione cercata.

§ 452.

Forme tipiche del ds^2 per gli spazî di curvatura costante.

Scelta una soluzione U del sistema (A), prendiamo le ipersuperficie $U = \text{cost.}^{\text{te}}$, geodeticamente parallele, a ipersuperficie coordinate $x_n = \text{cost.}^{\text{te}}$, scegliendo a parametro x_n l'arco delle geodetiche ortogonali (x_n) contato a partire da una di queste ipersuperficie fisse. Il ds^2 assumerà così la forma geodetica

$$ds^2 = dx_n^2 + \sum_{i,k}^{1\ldots n-1} b_{ik}\,dx_i\,dx_k\,,$$

e sarà U funzione della sola x_n.

Ora qui abbiamo

$$B_{nn} = 1, \quad B_{rn} = 0 \quad \text{per } r \neq n,$$

quindi

$$\left\{\begin{matrix} ik \\ n \end{matrix}\right\}_b = \left[\begin{matrix} ik \\ n \end{matrix}\right]_b = -\frac{1}{2}\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_n},$$

e calcolando le (A), posto $U' = \dfrac{dU}{dx_n}$, $U'' = \dfrac{d^2U}{dx_n^2}$, si trova

$$U'' = -KU \tag{4}$$

$$(4^*) \qquad \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_n} = -2\,K\frac{U}{U'}b_{ik} = 2\,b_{ik}\frac{U''}{U'}.$$

Ora la (3*) diventa

$$(5) \qquad U'^2 + K\,U^2 = C \qquad (C \text{ costante}),$$

e le (4*) integrate dànno

$$(6) \qquad b_{ik} = U'^2\,c_{ik},$$

dove le c_{ik} *sono funzioni soltanto di* $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$.

D'altra parte, se indichiamo con Ω_{ik} $(i, = k\ 1, 2, \ldots .)$ i coefficienti della seconda forma fondamentale per l'ipersuperficie x_n, abbiamo (§ 441)

$$\Omega_{ik} = -\frac{1}{2}\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_n},$$

ossia per le (4), (4*)

$$(7) \qquad \Omega_{ik} = K\frac{U}{U'}b_{ik}.$$

Se sostituiamo questi valori nelle formole (III*) § 442 di GAUSS, (pag. 454) ne deduciamo

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)_b = \left(K^2\frac{U^2}{U'^2} + K\right)(b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}),$$

ossia per la (5)

$$(8) \qquad (\alpha\delta, \beta\gamma)_b = \frac{K\,C}{C - K\,U^2}(b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}).$$

Queste formole ci dimostrano: *Le ipersuperficie* $U = cost.^{te}$ *sono spazii ad* $n-1$ *dimensioni colla curvatura Riemanniana costante.*

$$\frac{KC}{C - KU^2}.$$

a) Se $K = 0$ sarà $U'^2 = C$, e possiamo fare $U' = 1$ indi

$$ds^2 = dx_n^2 + \sum_{i,k}^{1\ldots n-1} b_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

dove le b_{ik} sono indipendenti da x_n, e la forma

$$\sum_{ik}^{1..k-1} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura nulla. Basta dunque ridurre questa alla forma normale

$$\sum_{1..n}^{ik} b_{ik}\, dx_i\, dx_k = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{n-1}^2$$

e sarà conseguita la riduzione analoga pel caso superiore

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{n-1}^2 + dy_n^2.$$

b) Sia ora K negativa, poniamo

$$K = -\frac{1}{R^2},$$

e si tratterà dello spazio pseudosferico S_n di raggio = R. Disponendo dei valori iniziali di U e derivate in un punto, possiamo rendere nulla la costante C del secondo membro nella (50), talchè avremo

$$U = e^{\frac{x_n}{R}},$$

indi

$$ds^2 = d\,x_n^2 + e^{\frac{2x_n}{R}} \sum_{ik}^{1..n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

e la forma $\sum_{ik}^{1..n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k$ nelle $n-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ è, per quanto precede, a curvatura nulla. Si può dunque ridurre alla forma

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{n-1}^2,$$

dopo di che si avrà

$$ds^2 = dx_n^2 + e^{\frac{2x_n}{R}} (dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{n-1}^2),$$

e ponendo

$$e^{-\frac{x_n}{R}} = \frac{y_n}{R}$$

troviamo la forma tipica determinata

$$(I) \qquad ds^2 = R^2 \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2}{y_n^2}$$

pel ds^2 dello spazio pseudosferico di raggio R, già segnalata sotto la forma (E) § 435. (pag. 435).

Quando la costante C nel secondo membro della (3*) o (5) non è nulla, dovremo distinguere secondo che C è negativa o positiva. Nel primo caso, senza alterare la generalità, possiamo fare

$$U = R \cosh\left(\frac{x_n}{R}\right),$$

e nel secondo

$$U = R \operatorname{senh}\left(\frac{x_n}{R}\right).$$

Il ds^2 prenderà per la (6) la forma

$$(II) \qquad ds^2 = dx_n^2 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x_n}{R}\right) \sum_{ik}^{1..n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

rispettivamente l'altra

$$(III) \qquad ds^2 = dx_n^2 + \cosh^2\left(\frac{x_n}{R}\right) \sum_{ik}^{1..n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

essendo le c_{ik} indipendenti da x_n e la (8) dimostra che la forma in $n-1$ variabili $\sum_{ik} c_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ha curvatura Riemanniana costante $= \pm \frac{1}{R^2}$, secondo che siamo nel primo caso o nel secondo. Si osserverà che le forme (II), (III) del ds^2 corrispondono al ds^2 di forma ellittica ed iperbolica per una superficie pseudosferica, mentre la (I) appartiene al tipo parabolico.

C) Supponiamo in fine K positiva, e poniamo

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

La costante C nella (5) è positiva e facendo (ciò che non altera la generalità):

$$U = R \cos\left(\frac{x_n}{R}\right) \quad \text{indi} \quad U' = -\operatorname{sen}\left(\frac{x_n}{R}\right), \; C = 1$$

avremo

$$ds^2 = dx_n^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_n}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

la forma $\sum_{i,k}^{1\ldots n-1} c_{ik}\, dx_i\, dx_k$ essendo essa stessa a curvatura $\frac{1}{R^2}$. Applicando a questa la medesima formola di riduzione, e così di seguito, giungiamo manifestamente alla seguente forma tipica del ds^2 per uno spazio a n dimensioni di curvatura $K = \frac{1}{R^2}$:

$$\text{(IV)} \quad ds^2 = dx_n^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_n}{R}\right) dx_{n-1}^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_n}{R}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_{n-1}}{R}\right) dx_{n-2}^2 + \ldots +$$
$$+ \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_n}{R}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_{n-1}}{R}\right) \ldots \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_2}{R}\right) dx_1^2 .$$

Ridotti così i ds^2 degli spazî a curvatura costante a queste forme tipiche determinate (I), (II), (III), (IV), ne risulta nuovamente dimostrato il teorema dell' applicabilità di due spazî colla medesima curvatura costante e fissato il numero dei parametri in $\frac{n(n+1)}{2}$.

§ 453.

Rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sul semispazio euclideo.

Per studiare la geometria degli spazî pseudosferici a n dimensioni (geometria pseudosferica a n dimensioni) cominciamo dall'estendere al caso di n qualunque le proprietà della rappresentazione conforme che ci ha servito nel Cap. XIV nel caso $n = 2$.

Partiamo per ciò dalla forma tipica (1) del ds^2 pseudosferico, nella quale porremo inoltre per semplicità $R = 1$:

$$\text{(1)} \qquad ds^2 = \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2}{y_n^2} .$$

Riguardando $y_1, y_2, \ldots y_n$ come ordinarie coordinate cartesiane ortogonali di uno spazio euclideo d'elemento lineare:

$$ds_1^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2,$$

la (I) stabilisce una *rappresentazione conforme* dello spazio pseudosferico (di raggio R = 1) sullo spazio euclideo. I punti reali del primo spazio hanno per immagini nell'euclideo punti situati tutti da una parte dell'iperpiano limite $y_n = 0$, i cui punti rappresentano punti all'infinito dello spazio obiettivo. Per fissare le idee riterremo che la regione dello spazio euclideo rappresentante punti reali del pseudosferico S_n sia il *semispazio* $y_n > 0$.

Per prima cosa ricerchiamo la soluzione più generale U del sistema (A) di WEINGARTEN per l'elemento lineare (I). A causa delle formole (16*) § 435 (pag. 433), tutti i simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ di CHRISTOFFEL sono nulli tranne i seguenti

$$\left\{ \begin{matrix} n\,k \\ k \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{y_n}, \quad \left\{ \begin{matrix} kk \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{y_n}, \quad \left\{ \begin{matrix} n\,n \\ n \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{y_n},$$

onde il sistema (A) si riduce alle equazioni simultanee

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_r \partial y_s} = 0 \text{ per } r \neq s, \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_r^2} = \dfrac{1}{y_n}\dfrac{\partial U}{\partial y_n} + \dfrac{U}{y_n^2} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_n \partial y_r} = -\dfrac{1}{y_n}\dfrac{\partial U}{\partial y_r}, \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_n^2} = -\dfrac{1}{y_n}\dfrac{\partial U}{\partial y_n} + \dfrac{U}{y_n^2}. \end{array} \right. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n-1)$$

Si trova subito che la soluzione generale U, a meno di una costante moltiplicativa, è data dalla formola

$$(9) \qquad U = \frac{1}{y_n}\left\{(y_1 - a_2)^2 + (y_2 - a_2)^2 + \ldots + (y_{n-1} - a_{n-1})^2 + y_n^2 + c\right\},$$

indicando $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, c$ costanti arbitrarie, e di qui si trae

$$(10) \qquad \Delta U = U^2 - 4c.$$

Le ipersuperficie U = cost.te, indicando con $2a_n$ la costante del secondo membro, hanno per equazione

$$(11) \qquad (y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2 + \ldots + (y_n - a_n)^2 = r^2$$

$$r^2 = a_n^2 - c,$$

cioè nello spazio rappresentativo sono ipersfere di centro o di raggio arbitrario. Pel teorema dedotto al paragrafo precedente dalla (8), queste sono immagini di spazî subordinati ad $n-1$ dimensioni e di curvatura Riemanniana k costante. E siccome per la (10) abbiamo qui

$$C = -4c \quad \text{e} \quad K = -1,$$

ne risulta

$$k = \frac{4c}{U^2 - 4c} = \frac{c}{a_n^2 - c},$$

o in fine

$$k = \frac{a_n^2 - r^2}{r^2}. \tag{12}$$

Dunque: *Ogni ipersfera dello spazio euclideo rappresentativo è l'immagine di uno spazio subordinato ad* $n-1$ *dimensioni di curvatura Riemanniana costante* $k = \frac{a_n^2 - r^2}{r^2}$, *essendo* r *il raggio dell'ipersfera ed* a_n *l'ordinata del centro rispetto all'iperpiano limite. Si ha quindi* $k > 0$ *quando l'ipersfera rimane tutta nel semispazio positivo* $y_n > 0$ (*quando* $a_n^2 > r^2$), *invece* $k < 0$ *se l'ipersfera attraversa l'iperpiano limite* ($a_n^2 < r^2$) *in fine* $k = 0$ *quando l'ipersfera tocca l'iperpiano limite.*

In quest'ultimo caso l'ipersuperficie obiettiva dicesi un'*orisfera* dello spazio pseudosferico; la sua metrica è quella euclidea.

Notevole è il caso di $a_n = 0$, quando l'ipersfera ha il centro sull'iperpiano limite. Allora la (12) dà $k = -1$ e l'ipersuperficie ha la curvatura stessa dello spazio ambiente; essa è, come ora vedremo, un' ipersuperficie completamente geodetica, cioè tutte le sue geodetiche sono geodetiche dello spazio ambiente.

§ 454.

Immagini delle geodetiche e varietà geodetiche.

E' facile integrare le equazioni differenziali delle geodetiche per l'attuale forma (I) del ds^2, applicando le osservazioni alla fine del § 432. E infatti posto

$$U = \frac{(y_1 - a_1)^2 + (y_2 + a_2)^2 + \ldots + (y_{n-1} - a_{n-1})^2 + y_n^2}{y_n}$$

con $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ costanti arbitrarie, la formola (10) dà

$$\Delta_1 U = U^2,$$

onde posto

$$\theta = \int \frac{dU}{\sqrt{\Delta_1 U}} = log\ U,$$

abbiamo in θ una soluzione completa colle $n-1$ costanti effettive $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ della

$$\Delta_1 \theta = 1.$$

Si avranno dunque in termini finiti le equazioni delle geodetiche eguagliando ad altrettante costanti arbitrarie $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ le derivate di θ rapporto ai parametri $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, il che dà

$$(\alpha) \qquad y_i - a_i = \frac{b_i}{2} y_n U \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

e inoltre l'arco s delle geodetiche sarà dato, a meno di una costante additiva, da θ stessa, onde avremo

$$(\beta) \qquad U = C e^s,$$

essendo C una costante di cui potremo disporre ad arbitrio. Colle precedenti possiamo esprimere $y_1, y_2, \ldots y_n$ per s. Quadrando e sommando le (α) coll'aggiungere y_n^2, otteniamo

$$y_n U = \frac{b^2}{4} y_n^2 U^2 + y_n^2,$$

avendo posto

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2.$$

Dalla (β) risulta

$$y_n = \frac{C e^s}{\frac{b^2 C^2}{4} e^{2s} + 1},$$

e ponendo, se $b \neq 0$, $C = \frac{2}{b}$ avremo

$$y_n = \frac{1}{b \cos h s}.$$

Dopo di ciò la (α) diventa

$$y_i - a_i = \frac{b_i}{b^2} \frac{e^s}{\cosh s},$$

cioè

$$y_i = \frac{b_i}{b^2} tg\, h\, s + c_i,$$

colle c_i nuove costanti. Ne concludiamo:

Le linee geodetiche dello spazio pseudosferico hanno, in funzione dell'arco s, le equazioni parametriche

$$(13) \qquad \begin{cases} y_i = \dfrac{b_i}{b^2} tg\, h\, s + c_i \quad (i = 1, 2, \ldots n-1) \\ y_n = \dfrac{1}{b \cosh s}, \end{cases}$$

essendo $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ *costanti arbitrarie e* $b^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n-1}^2$.

Si è supposto nel calcolo precedente $b \neq 0$; ma quando $b = 0$ indi $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1}$, ritornando alle ($\alpha$), si hanno le corrispondenti geodetiche rappresentate dalle equazioni

$$(13^*) \qquad y_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),\ y_n = C\, e^s$$

e qui le immagini sono le rette (y_n) normali all'iperpiano limite.

Nel caso generale (13) l'immagine della geodetica giace nell' S_2 determinato dalle $n - 2$ equazioni

$$b_2 (y_1 - c_1) = b_1 (y_2 - c_2),\ b_3 (y_1 - c_1) = b_1 (y_3 - c_3), \ldots b_{n-1} (y_1 - c_1) = \\ = b_1 (y_{n-1} - c_{n-1}),$$

che rappresentano ciascuna un'iperpiano normale all'iperpiano limite. La linea immagine è dunque piana e di più, avendosi

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (y_i - c)^2 + y_n^2 = \frac{1}{b^2},$$

tutti i suoi punti distano egualmente dal punto $(c_1, c_2, \ldots c_{n-1}, 0)$ di questo S_2. Tale linea è un circolo che incontra ortogonalmente l' iperpiano li-

mite $y = 0$ nei due punti corrispondenti a $s = \pm \infty$

$$\left(c_1 \pm \frac{b_1}{b^2}\,,\ c_2 \pm \frac{b_2}{b^2}\,, \ldots c_{n-1} \pm \frac{b_{n-1}}{b^2}\,,\ 0\right).$$

Dunque: *Le immagini delle linee geodetiche dello spazio pseudosferico sono circoli (o rette) normali all'iperpiano limite, e viceversa.*

L'attuale rappresentazione estende, come si vede, al caso di n qualunque le proprietà studiate al Cap. XIV per $n = 2$. Ripetendo le medesime osservazioni allora fatte, si vede che due punti dello spazio pseudosferico individuano, senza eccezioni, una linea geodetica, e la loro distanza geodetica effettiva è misurata, nella nostra rappresentazione, dal logaritmo del birapporto che sul circolo immagine formano i due punti immagini coi punti d'incontro del circolo coll'iperpiano limite.

Consideriamo ora un'ipersfera Σ_{n-1} *col centro sull'iperpiano limite*

$$(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2 + \ldots + (y_{n-1} - a_{n-1})^2 + y_n^2 = r^2,$$

e tagliamo Σ_{n-1} con un'iperpiano normale all'iperpiano limite. La sezione sarà una varietà sferica Σ_{n-2} il cui centro sarà il piede della normale abbassata dal centro di Σ_{n-1} sull'iperpiano segante, e situato quindi nuovamente sull' iperpiano limite. Intersecando nuovamente Σ_{n-2} con un iperpiano normale a $y_n = 0$ avremo una nuova varietà sferica Σ_{n-3} col centro su $y_n = 0$, e così continuando arriveremo alle ordinarie sfere Σ_2 col centro su $y_n = 0$. Ogni tale sfera contiene una doppia infinità di circoli ortogonali all'iperpiano limite e rappresenta quindi una superficie geodetica *rispetto ad uno qualunque dei suoi punti.* Per ciò stesso è manifesto che queste superficie geodetiche hanno curvatura costante ed eguale a quella dello spazio. Ed ora, risalendo per le altre varietà sferiche

$$\Sigma_3,\ \Sigma_n \ldots \Sigma_{n-1}$$

sopra considerate, è chiaro che esse rappresentano altrettante *varietà geodetiche* rispetto a tutti i loro punti, cioè le loro geodetiche sono geodetiche dello spazio ambiente ; di più esse hanno tutte curvatura Riemanniana costante eguale a quella dello spazio.

§ 455.

Rappresentazione geodetica di Beltrami.

Dalla rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sullo spazio euclideo sopra studiata possiamo facilmente dedurre un'altra importante rappresentazione che ha servito al BELTRAMI nelle sue ricerche sugli spazî di curvatura costante e nella quale le geodetiche hanno per immagini rette dello spazio euclideo. Abbiamo già avuto occasione di esporre pel caso $n = 2$ le ricerche analoghe nel Cap. XIV (V. § 236), e come il lettore osserverà le attuali ne costituiscono l'estensione ad un numero qualunque n di dimensioni.

Prendiano lo spazio pseudosferico di curvatura $K = -1$, con $n + 1$ dimensioni, definito dal ds^2 della forma

$$(I^*) \qquad ds^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_0^2},$$

rappresentato conformemente sullo spazio euclideo $(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n)$ al di sopra dell'iperpiano limite $x_0 = 0$. Consideriamo in questo spazio rappresentativo l'ipersfera

$$(14) \qquad x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

col centro sull'iperpiano limite $x_0 = 0$, che rappresenterà quindi, per quanto si è ora visto, un'ipersuperficie geodetica, cioè uno pazio pseudosferico a n dimensioni colla stessa curvatura $K = 1$.

Le geodetiche di questo spazio sono rappresentate per le (13) da equazioni della forma:

$$(15) \qquad \begin{cases} b x_0 = \dfrac{1}{\cosh s}, \quad x_r = \dfrac{b_r}{b^2} \operatorname{tg} h\, s + c_r \quad (r = 1, 2, \ldots n \\ b^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2, \end{cases}$$

dove però attualmente, trattandosi di geodetiche sull'ipersfera (14), dovremo aggiungere fra le costanti le due relazioni seguenti

$$(15^*) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} b_r\, c_r = 0, \qquad \frac{1}{b^2} + \sum_{r=1}^{r=n} c_r^2 = 1.$$

Ora riguardiamo $x_1, x_2, \ldots x_n$ *come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo* S_n *rappresentativo a* n *dimensioni* (ciò che equivale a projettare ortogonalmente sull' iperpiano limite $x_0 = 0$ i punti dello spazio pseudosferico a n dimensioni (14)). Lo spazio pseudosferico (14) sarà tutto rappresentato entro l'ipersfera

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$$

mentre i punti di questa ipersfera rappresentano i punti all'infinito. A causa poi delle (15), le geodetiche saranno rappresentate dalle $n - 1$ equazioni *lineari* nelle $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$x_r = \frac{b_r}{b^2} \, tg\, h\, s + c_r \, ,$$

cioè da rette dello spazio euclideo S_n; ne consegue che le superficie geodetiche saranno rappresentate da piani, e in generale ogni varietà geodetica da uno spazio lineare subordinato.

Importa ora osservare la legge secondo cui, presi, nello spazio rappresentativo euclideo S_n due punti (x_i) (x'_i), interi all' ipersfera limite $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, viene misurata nello spazio pseudosferico la distanza geodetica δ dei due punti obiettivi. Per ciò, misurando nelle (15) l'arco s a partire dal punto (x_i'), avremo

$$\cosh \delta = \frac{x'_0}{x_0} = \frac{\sqrt{1 - \sum_r x_r'^2}}{\sqrt{1 - \sum_r x_r^2}} \, ,$$

e siccome per le (15) (15*)

$$x'_r = c_r \, , \quad \Sigma \, x_r \, x'_r = \Sigma \, x_r^2 \, ,$$

la precedente può scriversi

$$\cosh \delta = \frac{1 - \Sigma \, x_r \, x'_r}{\sqrt{1 - \Sigma \, x_r^2} \; \sqrt{1 - \Sigma \, x_r'^2}} \, ,$$

e ponendo per brevità

$$1 - \Sigma \, x_r^2 = \Omega_{xx} \, , \quad 1 - \Sigma \, x_r'^2 = \Omega_{x'x'}$$
$$1 - \Sigma \, x_r x'_r = \Omega_{xx'}$$

avremo in fine

$$\cosh \delta = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx'}\,\Omega_{x'x'}}}. \tag{16}$$

Consideriamo ora la congiungente i due punti immagini (x_i), (x'_i) che incontrerà l' ipersfera

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

in due punti e calcoliamo il birapporto M che questi due punti formano con (x_i), (x'_i).

Ora se (y_i) è uno dei due detti punti d'incontro si ha

$$y_i = \frac{\lambda\, x_i + x'_i}{\lambda + 1},$$

e per determinare λ l'equazione di secondo grado

$$\lambda^2\, \Omega_{xx} + 2\,\lambda\, \Omega_{xx'} + \Omega_{x'x'} = 0,$$

Il rapporto delle due radici λ_1, λ_2 è precisamente M, onde risulta

$$\frac{1}{2}\left(M^{\frac{1}{2}} + M^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x}}},$$

e quindi per la (16)

$$M^{\frac{1}{2}} + M^{-\frac{1}{2}} = 2 \cosh \delta,$$

o in fine

$$\delta = \frac{1}{2}\, log\, M. \tag{17}$$

Se al raggio dello spazio pesudosferico volessimo dare il valore R (anzichè R = 1) basterebbe scrivere invece

$$\delta = \frac{R}{2}\, log\, M. \tag{17*}$$

Vediamo dunque che: *Nella rappresentazione geodetica dello spazio pseudosferico entro l'ipersfera la distanza geodetica di due punti è data, salvo un fattore costante, dal logaritmo del birapporto che questi due punti formano sulla loro congiungente coi due punti d'intersezione coll'ipersfera limite.*

Si noti ancora che la formola superiore del birapporto M può scriversi:

$$(18) \qquad M = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'}}}.$$

§ 456.

Metrica del Cayley.

Il risultato testè conseguito ci conduce a parlare della *metrica del Cayley*, come già abbiamo fatto nel caso delle due dimensioni al § 236. La metrica del Cayley equivale in sostanza alla metrica degli spazi a curvatura costante e dà un'immagine molto chiara e completa della geometria di questi spazi.

All'ipersfera di Beltrami

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

sostituiamo una quadrica arbitraria *con equazione reale* aggiungendo per altro la condizione che essa *non contenga rette reali* ed esista pertanto una regione dello spazio (tutto lo spazio se la quadrica è immaginaria) dai cui punti non partano tangenti reali alla quadrica.

Presi ora due punti arbitrari P P′ dello spazio della regione considerata *definiamo* come loro distanza il logaritmo, moltiplicato per una costante, del birapporto

$$(P\ P'\ A\ B),$$

avendo indicato con A B i due punti ove la congiungente P P′ sega la quadrica. Restando nella regione dello spazio dai cui punti non partono tangenti reali alla quadrica, i due punti A B non possono coincidere e la distanza si annulla soltanto quando P, P′ coincidono. In particolare assumendo P, P′ infinitamente vicini, troveremo per il ds^2 una forma differenziale quadratica, e questa per quanto precede non potendo annullarsi, per valori non tutti nulli dei differenziali, sarà *definita* conformemente alle convenzioni fondamentali.

Notiamo poi che i punti della quadrica fondamentale rappresentano, nella metrica Cayleyana, punti a distanza infinita; la quadrica dicesi anche per ciò *l'assoluto della metrica.*

È facile vedere *a priori* che la metrica del CAYLEY è quella di uno spazio a curvatura costante. E infatti una quadrica arbitraria in S_n ammette come è noto, un gruppo continuo, con $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri, di collineazioni in sè medesima ; e siccome le collineazioni conservano i birapporti, indi le distanze in questa metrica, per lo spazio col corrispondente ds^2 questo è un gruppo continuo di movimenti e la curvatura dello spazio è in conseguenza costante (§ 436).

Dimostriamo inoltre facilmente che, nella metrica del CAYLEY, le linee geodetiche sono rappresentate da rette. Prendasi infatti una qualunque retta (un S) non tangente alla quadrica ed il suo spazio lineare polare S_{n-2}, che non ha punti a comune con S_1. Si consideri l'omologia assiale armonica che ha per spazî di punti uniti S_1, S_{n-2} ; questa è una collineazione della quadrica in sè, nella quale tutti i punti di S_1 rimangono fissi, ma nessun altro punto nell'intorno di S_1. Ma allora se A, B sono due punti qualunque di S_1, la geodetica che li unisce dovendo pure rimanere fissa coi suoi punti, coinciderà con S_1.

Introducendo coordinate omogenee

$$x_0, x_1, \ldots x_n,$$

scriviamo l'equazione della quadrica

$$\Omega_{xx} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Siccome non debbono esistere rette reali sulla quadrica, riducendo nel noto modo, con una sostituzione lineare reale, la forma quadratica Ω_{xx} a somme di quadrati, dovranno i coefficienti dei quadrati o avere tutti il medesimo segno, ovvero tutti tranne uno.

Senza alterare la genealità potremo dunque porre, dopo una trasformazione omografica

$$\Omega_{xx} = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

ovvero

$$\Omega_{xx} = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Nel secondo caso (assoluto reale) ritorniamo evidentemente alla rappresentazione geodetica del BELTRAMI per lo spazio pseudosferico e si ha la *metrica iperbolica* (non euclidea in senso stretto). Nel primo caso invece (assoluto immaginario) abbiamo la metrica che si dice *ellittica*, di cui ora andiamo ad occuparci ed allora lo spazio ha curvatura costante positiva.

§ 457.

Metrica ellittica e coordinate di Weierstrass.

Posto

$$\Omega_{x,x} = \sum_{i}^{0\ldots n} x_i^2 ,$$

per la distanza δ di due punti, secondo la metrica Cayleyana, avremo dalla (18)

$$\delta = h\, log \left(\frac{\Omega_{x,x'} + i\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega_{x,x'}^2}}{\Omega_{x,x'} - i\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega_{x,x'}^2}} \right)$$

con h costante; e poichè la quantità sotto il segno logaritmico è complessa di modulo $= 1$, per avere δ reale converrà prendere h immaginario puro, facciamo $h = \frac{\mathrm{R}}{i}$ con R reale, onde avremo

$$\cos\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) = \frac{\Omega_{x,x'}}{\sqrt{\Omega_{x,x}\,\Omega_{x'x'}}} .$$

Fissiamo ora il fattore arbitrario inerente alle coordinate omogenee coll'assumere

(19) $$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

e la precedente diviene

(20) $$\cos\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) = \sum_{i} x_i\, x'_i = x_0\, x'_0 + x_1\, x'_1 + \ldots + x_n\, x'_n .$$

Dopo ciò calcoliamo il ds^2 del nostro spazio nel modo seguente. Sopra una curva qualunque prendiamo due punti infinitamente vicini (x_i) e $(x_i + dx_i)$, e sia h l'incremento infinitesimo dell' arco nel passaggio dal primo al secondo punto. Ponendo nella (20)

$$\delta = h, \quad x'_i = x_i + \frac{dx_i}{ds}\, h + \frac{d^2x_i}{ds^2}\,\frac{h^2}{2} + \ldots ,$$

avremo

$$1 - \frac{h^2}{2\,\mathrm{R}^2} + \ldots = 1 + h \sum_{i} x_i \frac{dx_i}{ds} + \frac{h^2}{2} \sum_{i} x_i \frac{d^2x_i}{ds^2} + \ldots ,$$

da cui per la (19), paragonando i coefficienti di h^2

$$-\mathrm{S}_i\, x_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \mathrm{S}_i \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

e quindi per il ds^2 del nostro spazio

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 (dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2), \tag{21}$$

essendo $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ legate dalla (19) $\mathrm{S}x_i^2 = 1$.

Di qui appunto vediamo facilmente che l'attuale spazio ha la curvatura costante positiva $= \frac{1}{\mathrm{R}^2}$.

Se infatti, cangiando per un momento l'interpretazione geometrica, riguardiamo $\mathrm{R}x_0, \mathrm{R}x_1 \ldots \mathrm{R}x_n$ come coordinate cartesiane ortogonali (non omogenee) di uno spazio euclideo S_{n+1} di elemento lineare (21), la (19) è l'equazione di un'ipersfera di raggio $= \mathrm{R}$, che è appunto in S_{n+1} uno spazio ad n dimensioni di curvatura $\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}$.

Ma ora ritorniamo all'interpretazione primitiva di $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ come coordinate omogenee (normalizzate colla (19)) per un S_n rappresentativo ove le geodetiche dello spazio ellittico sono rappresentate da equazioni lineari ; diremo $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ le *coordinate di* WEIERSTRASS *di punto*.

Consideriamo un iperpiano di equazione

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = 0 \tag{22}$$

e *normalizziamo* ancora le coordinate omogenee ξ_i dell'iperpiano in guisa che sia

$$\mathrm{S}\,\xi_i^2 = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1 ;$$

diremo le ξ_i le coordinate di WEIERSTRASS dell'iperpiano. (*) Ma possiamo anche riguardare le ξ come coordinate di un punto il quale, per la (22), non è altro che il polo dell'iperpiano rispetto all'assoluto

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

della metrica CAYLEYANA. Ora se consideriamo i due elementi lineari ds,

(*) Nell' interpretazione nell'S_{n+1} le ξ sono i coseni di direzione della normale all'iperpiano.

δs spiccati dal punto (x_i) ai due punti infinitamente vicini $(x_i + dx_i)$, $(x_i + \delta x_i)$, la condizione d'ortogonalità dei due elementi sarà espressa da

$$\mathrm{S}_i \, dx_i \, \delta x_i = 0,$$

come si vede ricorrendo all'interpretazione nello spazio S_{n+1}, od anche direttamente osservando che se si esprimono le x per n variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots u_n$ e si ha

$$\mathrm{S}_i \, dx_i^2 = \sum_{r,s} a_{rs} \, du_r \, du_s ,$$

ne segue

$$\mathrm{S}_i \, dx_i \, \delta x_i = \sum_{r,s} a_{rs} \, du_r \, \delta u_s .$$

Se il primo elemento ds appartiene all'iperpiano (ξ_i) sarà

$$\mathrm{S}\, \xi_i \, dx_i = 0,$$

e d'altronde gli incrementi δx_i delle x nella direzione che unisce (x_i) al polo (ξ_i) dell'iperpiano sono proporzionali alle ξ_i, e per ciò questa direzione è normale a tutte le direzioni nell'iperpiano. Dunque: *nella metrica Cayleyana la normale in un punto* (x_i) *ad un iperpiano* (ξ_i) *è la congiungente* (x_i) *col polo dell'iperpiano rispetto all'assoluto.*

Possiamo definire una retta dando le coordinate (x_i) di un suo punto e le coordinate (ξ_i) dell'iperpiano normale in (x_i) alla retta, sicchè

$$\mathrm{S}_i \, x_i \, \xi_i = 0.$$

Le coordinate x'_i di ogni altro suo punto saranno

$$x'_i = \lambda \, x_i + \mu \, \xi_i$$

con $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Se δ è la distanza di (x'_i) da (x_i), avremo per la (20)

$$\lambda = \cos\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) , \quad \mu = \mathrm{sen}\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right),$$

indi

$$x'_i = x_i \cos\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) + \xi_i \, \mathrm{sen}\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right), \tag{23}$$

e similmente le coordinate ξ'_i dell'iperpiano normale nel punto (x'_i) alla retta saranno

$$\xi'_i = x_i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{R}\right) - \xi_i \cos\left(\frac{\delta}{R}\right). \tag{23*}$$

Se in queste formole si fa crescere δ con continuità da o a πR, manifestamente il punto (x'_i) descrive, a partire da (x_i), l'intera retta e ritorna al punto stesso, perchè dopo l'aumento di πR risulta $x'_i = -x_i$, e nello spazio rappresentativo S_n si ritorna quindi al medesimo punto. Per ciò se riguardiamo come coincidenti due punti dello spazio curvo aventi la medesima immagine nell'euclideo S_n, e chiamiamo *spazio ellittico semplice* lo spazio a curvatura costante positiva così considerato, possiamo dire che: *Nello spazio ellittico semplice di raggio* R *la retta ha la lunghezza finita* πR.

Quando, al contrario, si riguardino come distinti due punti dello spazio curvo con coordinate eguali e di segno contrario, la retta si chiuderà soltanto dopo un giro doppio di $2\pi R$.

E, mentre nello spazio ellittico semplice, due rette che si tagliano hanno un solo punto comune, nello spazio ellittico *doppio* invece due rette che si incontrano in un punto tornano ad incontrarsi nel punto (diametralmente opposto), distante dal primo di πR.

Notiamo ancora, in metrica ellittica generale a n dimensioni, le due formole che seguono dalle superiori e danno l'angolo φ di due iperpiani (ξ_i), (ξ'_i) e la distanza δ del punto (x_i) dall'iperpiano $(\xi_i)_j$ esse si scrivono

$$\cos\varphi = \sum_i \xi_i \xi'_i \tag{24}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{R}\right) = \sum_i x_i \xi_i . \tag{25}$$

§ 458.

Metrica iperbolica (o non euclidea).

Diamo ora le formole relative alla metrica del Cayley con assoluto reale, la cui equazione scriviamo in coordinate omogenee:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_0^2 = 0 .$$

Questa metrica (iperbolica) coincide come già si è detto colla metrica del Beltrami (§ 456), e solo le formole sono trasformate in coordinate omogenee.

Stabiliamole direttamente col procedimento usato nel paragrafo precedente. Lo spazio iperbolico viene rappresentato nella regione interna all'assoluto (§ 456), cioè le coordinate di ogni punto a distanza finita dello spazio iperbolico soddisfano alla disuguaglianza

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2 > 0 ,$$

e noi qui *normalizziamo* nuovamente le coordinate omogene disponendo del fattore arbitrario di proporzionalità in guisa che si abbia (Cf. per $n = 2$ Vol. I. § 237).

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 \ldots - x_n^2 = x_0^2 - \sum_i x_i^2 = 1. \tag{26}$$

Posto ora

$$\Omega_{xx} = x_0^2 - \sum_i x_i^2 , \quad \Omega_{xx'} = x_0 x'_0 - \sum_i x_i x'_i$$

abbiamo per la (18)

$$\mathrm{M} = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - 1}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - 1}}$$

e per la distanza δ dei due punti

$$\delta = \frac{\mathrm{R}}{2} \log \mathrm{M} ,$$

ossia

$$\cosh\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) = x_0 x'_0 - \sum_i x_i x'_i . \tag{27}$$

Se i due punti si suppongono infinitamente vicini e si procede come al paragrafo precedente per calcolare il ds^2, si trova:

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 - dx_0^2) , \tag{28}$$

elemento lineare che già dal § 455 sappiamo appartenere allo spazio iperbolico di raggio R.

Consideriamo ora un punto di coordinate omogenee $\xi_0, \xi_1, \ldots . \xi_n$ *esterno* all'assoluto per modo che $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots . + \xi_n^2 > \xi_0^2$ e normalizziamo

anche qui queste coordinate fissando il fattore di proporzionalità in guisa che sia

$$\sum_{i}^{1\ldots n} \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1. \tag{29}$$

L'iperpiano polare del punto (ξ_i) rispetto all'assoluto ha l'equazione

$$\sum_{i} \xi_i \, x_i - \xi_0 \, x_0 = 0; \tag{30}$$

esso solca la regione accessibile della metrica e rappresenta un'ipersuperficie geodetica.

Diremo anche qui le (x_i), legate dalla (26), le coordinate di Weierstrass di punto, e le (ξ_i), legate dalla (29), quelle di un iperpiano.

Se consideriamo due elementi lineari spiccati dal punto (x_i) ai due punti infiinitamente vicini $(x_i + d\,x_i)$, $(x_i + \delta\, x_i)$, la condizione d'ortogonalità dei due elementi si scrive (cf. § prec$^{\text{nte}}$.)

$$\sum_{i} dx_i \, \delta x_i - dx_0 \, \delta\xi_0 = 0,$$

e se ne deduce nuovamente che, nella metrica del Cayley, la normale in un punto all'iperpiano è la congiungente il punto col polo dell'iperpiano. E allora, se definiamo una retta dando le coordinate (x_i) di un suo punto e le coordinate (ξ_i) dell'iperpiano normale alla retta nel punto, le coordinate x'_i di ogni punto della retta saranno date dalle formole, analoghe alle alle (23):

$$x'_i = x_i \cosh\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) + \xi_i \operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) \; (i = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{31}$$

e similmente le coordinate ξ'_i, dell'iperpiano normale in (x'_i) alla retta dalle altre

$$\xi'_i = x_i \operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right) + \xi_i \cosh\left(\frac{\delta}{\mathrm{R}}\right). \tag{31*}$$

Nella metrica iperbolica la retta è infinita ed ha due punti distinti all'infinito, i suoi due punti d'incontro coll'assoluto; da ogni punto dello spazio partono ad una retta data due distinte parallele (nel senso non-euclideo), per l'angolo di parallelismo vale la formola già trovata al Cap. XIV (§ 229) ecc.

Se due iperpiani si segano internamente all' assoluto, formano fra loro un angolo φ dato da

$$\cos\varphi = \sum_i \xi_i \xi'_i - \xi_0 \xi'_0 ; \tag{32}$$

per la distanza δ di un punto (x) dall'iperpiano (ξ) abbiamo poi la formola

$$\operatorname{senh}\left(\frac{\delta}{R}\right) = \sum_i x_i \xi_i - x_0 \xi_0 . \tag{33}$$

La formola (32) ci conduce a parlare dell'-*elemento angolare* che corrisponde dualmente all'elemento lineare. Se consideriamo una semplice infinità d'iperpiani le cui coordinate ξ_i siano espresse in funzione di un parametro t, potremo considerare l'angolo infinitesimo $d\varphi$ che forma un iperpiano del sistema col successivo. Per calcolare $d\varphi$, che chiamiamo elemento angolare, diamo al parametro t nelle (32) un incremento infinitesimo h e sviluppiamo, dall'una e dall'altra parte, per potenze di h ; avremo

$$\varphi = h\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \ldots , \quad \xi' = \xi + h\frac{d\xi}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \ldots ,$$

indi

$$(\alpha) \qquad 1 - \frac{h^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \ldots = 1 + h\left(\sum_i \xi_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_0 \frac{d\xi_i}{dt}\right) + \\ + \frac{h^2}{2}\left(\sum_i \xi_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} - \xi_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2}\right) + \ldots$$

Ma siccome

$$\sum_i \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1 ,$$

ne segue

$$\sum_i \xi_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_0 \frac{d\xi_0}{dt} = 0 , \quad \sum_i \xi_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} - \xi_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} = -\left(\sum_i \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2\right),$$

e il paragone dei coefficienti di h^2 nella (α) dà quindi la formola richiesta

$$d\varphi^2 = \sum_i d\xi_i^2 - d\xi_0^2 . \tag{34}$$

Questa formola si applica a due iperpiani qualunque infinitamente vicini, sicchè se esprimiamo le coordinate ξ_i per n variabili indipendenti $u_1, u_2 \ldots u_n$, il secondo membro della (34) è una forma differenziale quadratica (indefinita):

$$\sum_{r,s} a'_{rs}\, du_r\, du_s ,$$

la cui curvatura, come subito si vede, è costante $= +1$.

§ 459.

Le equazioni di Weingarten per le coordinate di Weierstrass.

Facciamo ora per lo spazio a curvatura costante di n dimensioni la medesima ricerca che al § 238 (I pag. 649) abbiamo compiuto per lo spazio pseudosferico a due dimensioni. Supponiamo cioè dato soltanto il ds^2 di uno spazio a n dimensioni e di curvatura costante $K = \pm \frac{1}{R^2}$, che scriviamo

$$ds^2 = R^2 \sum_{1\ldots n}^{i,k} a_{ik}\, dy_i\, dy_k ,$$

talchè la curvatura Riemanniana della forma $\sum_i a_{ik}\, dy_i\, dy_k$ sarà costante ed $= \pm 1$; domandiamo di stabilire in questo spazio un sistema di coordinate di WEIERSTRASS, ciò che equivale ad integrare le equazioni differenziali delle linee geodetiche. Basterà eseguire il calcolo per il caso $K = +\frac{1}{R^2}$ chè una trattazione analoga vale per l'altro caso. Dovremo dunque determinare le $n+1$ funzioni incognite $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ delle y in guisa che si abbia

$$(35) \qquad \begin{cases} \mathrm{S}_r x_r^2 = 1 \\ \mathrm{S}_r\, dx_r^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, dy_i\, dy_k , \end{cases}$$

ciò che sappiamo *a priori* essere possibile. Dalle equazioni

$$(35^*) \qquad \mathrm{S}_r \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_r}{\partial y_k} = a_{ik}$$

si traggono subito le altre (*)

(*) Per brevità da questo punto omettiamo nella scrittura l'indice r per la x_r, rispetto al quale è eseguita la somma S.

$$(36) \qquad S \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial x}{\partial y_\lambda} = \begin{bmatrix} ik \\ \lambda \end{bmatrix}_a ,$$

e dalla prima delle (35) derivando

$$(36^*) \qquad S\, x \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} = - a_{ik} .$$

Tenendo nelle (36), (36*) fissi gli indici i,k e dando a λ i suoi n valori $1, 2, \ldots n$, risolviamo queste $n+1$ equazioni lineari rispetto alle $n+1$ incognite

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial y_i \partial y_k}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_i \partial y_k} \cdots \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_i \partial y_k},$$

coll'osservare che il determinante dei coefficienti non è nullo, perchè il suo quadrato eguaglia per le (35), (35*) il determinante delle a_{ik} Avremo così manifestamente formole del tipo seguente

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} = \sum_t \alpha_{ik}^{(t)} \frac{\partial x}{\partial y_t} + \beta_{ik}\, x ,$$

che valgono per qualunque delle $n+1$ coordinate x, rimanendo fissi i coefficienti $\alpha_{ik}^{(t)}$, β_{ik}. I valori di questi si calcolano subito sostituendo nelle (36), (36*), ciò che dà

$$\sum_t \alpha_{ik}^{(t)} a_{t\lambda} = \begin{bmatrix} ik \\ \lambda \end{bmatrix}_a , \quad \text{da cui} \quad \alpha_{ik}^{(t)} = \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}_a$$

$$\beta_{ik} = - a_{ik} .$$

Ne concludiamo :

Le $n+1$ coordinate $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ di WEIERSTRASS sono soluzioni del sistema differenziale di WEINGARTEN (§ 451) :

$$(A') \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} = \sum_t \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial x}{\partial y_t} - a_{ik}\, x .$$

È facile vedere che, per trovare le coordinate di WEIERSTRASS $x_0, x_1, \ldots, x_n$, data soltanto la forma differenziale a curvatura $K = +1$, è necessario e basta conoscere del sistema (A') $n+1$ tali soluzioni particolari che i

loro valori *iniziali* per $y_i = y_i^{(0)}$, e quelli delle loro derivate, soddisfino le equazioni:

$$\sum_r x_r^2 = 1\,, \quad \sum_r \frac{\partial x_r}{\partial y_i}\frac{\partial x_r}{\partial y_k} = a_{ik} \qquad per\ y_i = y_i^{(0)}\,.$$

Il calcolo per la curvatura negativa è precisamente lo stesso e si trova che le coordinate di WEIERSTRASS soddisfano in questo caso alle equazioni simultanee

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_i\,\partial y_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial x}{\partial y_l} + a_{ik}\, x\,, \tag{A''}$$

che sono ancora le equazioni (A) di WEINGARTEN, questa volta per $K = -1$.

Applichiamo queste osservazioni ad un esempio interessante prendendo il ds^2 sotto la forma Riemanniana (D) del § 435 (pag. 434) che scriviamo con un leggiero mutamento di notazioni

$$ds^2 = R^2\, \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2}{\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \pm \frac{1}{4}\right)^2}\,, \tag{D*}$$

il segno superiore valendo per la curvatura positiva, l'inferiore per la negativa. Chiamiamo $y_1, y_2, \ldots y_n$ le *coordinate di* RIEMANN di un punto dello spazio di curvatura costante e proponiamoci di esprimere le coordinate $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ per quelle di RIEMANN. Le formole effettive di passaggio sono le seguenti; esse possono dedursi nel modo indicato in generale, e si verificano del resto immediatamente. Nel caso della curvatura positiva abbiamo:

$$x_0 = \frac{\frac{1}{4} - \sum_i y_i^2}{\frac{1}{4} + \sum_i y_i^2}\,, \quad x_r = \frac{y_r}{\frac{1}{4} + \sum_i y_i^2} \quad (r = 1, 2, \ldots n)\,, \tag{a}$$

e per la curvatura negativa

$$x_0 = \frac{\sum_i y_i^2 + \frac{1}{4}}{\sum_i y_i^2 - \frac{1}{4}}\,, \quad x_r = \frac{y_r}{\sum_i y_i^2 - \frac{1}{4}}\,, \tag{a*}$$

e da queste si deducono subito le inverse

$$(b) \qquad y_r = \frac{1}{2}\frac{x_r}{x_0 + 1}$$

$$(b^*) \qquad y_r = \frac{1}{2}\frac{x_r}{x_0 - 1}\,.$$

Se si riguardano $y_1, y_2, \ldots y_n$ come coordinate cartesiane ortogonali di uno spazio euclideo rappresentativo, la formola Riemanniana (D*) dà una rappresentazione conforme dello spazio a curvatura costante sull'euclideo. Si vede subito che le immagini delle linee geodetiche sono circoli, i quali nel caso iperbolico tagliano ortogonalmente l'ipersfera limite

$$(\alpha) \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \frac{1}{4}\,,$$

entro la quale viene rappresentato tutto lo spazio. Nel caso ellittico le immagini delle geodetiche sono ancora circoli che tagliano ortogonalmente la ipersfera immaginaria

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

o, per restare al reale, incontrano la ipersfera stessa (α) in coppie di punti diametralmente opposti.

§ 460.

Rappresentazione della metrica iperbolica a tre dimensioni nel semispazio.

Dal caso generale degli spazî a curvatura costante a n dimensioni passiamo ora a considerare il caso particolare $n = 3$, specialmente per trattare del gruppo G_6 di movimenti in questi spazî. Cominciamo dal caso dello spazio iperbolico S_3 servendoci della rappresentazione conforme del § 453 sul semispazio euclideo, al di sopra del piano limite. Dette ξ, η, ζ le coordinate cartesiane ortogonali nello spazio rappresentativo, e posto il raggio R dello spazio pseudosferico $= 1$, assumeremo il ds^2 della metrica iper-

bolica sotto la forma

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2} . \tag{37}$$

Per le ragioni già addotte al Cap. XIV, questa dicesi anche la metrica *non-euclidea* a tre dimensioni, perchè rappresenta appunto la geometria dello spazio quando, *supposta sempre la retta infinita*, non si ammetta il postulato d'EUCLIDE sulle parallele.

Ricordiamo che in questa rappresentazione:

1.° le geodetiche della metrica (rette non-euclidee) hanno per immagini i circoli ortogonali al piano limite, giacenti cioè in piani perpendicolari a questo, e col centro sul piano limite stesso (in particolare rette ordinarie normali al piano limite).

2.° la distanza non euclidea di due punti P, P′ nel semispazio è data dal logaritmo del birapporto (P P′ A B), essendo A, B i due punti d'incontro col piano limite del circolo che passa per P, P′ ed è ortogonale al piano.

3.° una sfera col centro sul piano limite (ortogonale al piano limite, in particolare un piano ortogonale al piano limite) rappresenta una superficie geodetica o piano non euclideo. La sua metrica, calcolata dalla (37), è quella iperbolica a due dimensioni con $K = -1$, nella quale il circolo d'intersezione della sfera col piano limite (equatore della sfera) rappresenta il circolo limite.

Prendasi ora un circolo qualunque C dello spazio rappresentativo (che solchi almeno in parte il semispazio $\zeta > 0$). Pel circolo C passa una sfera ortogonale al piano limite, la quale rappresenta un piano non-euclideo ed il circolo C è pure un circolo non-euclideo dello spazio iperbolico. Questi circoli non euclidei sono di tre specie (Cap. XIV § 232): *a*) circoli a centro reale con immagine C tutta interna al semispazio $\zeta > 0$, *b*) circoli a centro ideale rappresentati da circoli che attraversano il piano limite, *c*) oricicli con circolo C immagine tangente al piano limite. I circoli della specie *a*) sono linee a flessione costante $\frac{1}{\rho} > 1$; quelli della specie *b*) hanno invece flessione costante < 1, e precisamente

$$\frac{1}{\rho} = \cos \psi ,$$

indicando con ψ l'angolo d'inclinazione del circolo immagine C sul piano limite. In fine gli oricicli hanno flessione $= 1$.

Si consideri ora una qualunque sfera S nello spazio euclideo, di cui sia r il raggio e b l'ordinata ζ del centro. Secondo la formola (12) § 453, la superficie obiettiva della metrica iperbolica ha la curvatura costante

$$k = \frac{b^2 - r^2}{r^2}, \tag{38}$$

e questa è positiva quando la sfera immagine S giace tutta nel semispazio $\zeta > 0$, negativa se la detta sfera attraversa il piano limite e nulla se è tangente. In ogni caso la superficie obiettiva contiene una doppia infinità di circoli e dicesi una sfera non-euclidea.

Nel primo caso si tratta di una sfera a centro reale, e l'immagine del centro è il punto del semispazio $\zeta > 0$ per cui vengono a passare tutti i circoli ortogonali alla sfera immagine ed al piano limite. Nel secondo caso la sfera non-euclidea è a centro ideale, ossia è una superficie geodeticamente parallela ad un piano non-euclideo, rappresentato dalla sfera descritta sul circolo intersezione di S col piano limite come circolo massimo. Per la curvatura k la formola (38) dà

$$k = -\operatorname{sen}^2 \psi$$

essendo ψ l'angolo sotto cui S attraversa il piano limite.

In fine nel terzo caso si ha un'*orisfera* o sfera limite, col centro a distanza infinita. La metrica delle orisfere nellò spazio iperbolico è quella del piano ordinario.

§ 461.

Movimenti nello spazio iperbolico. Formole di Poincaré.

Un movimento dello spazio iperbolico sarà rappresentato da una trasformazione del semispazio immagine (ξ, η, ζ) in sè, che deve mutare in sè stessa la forma differenziale (37), e per ciò sarà una rappresentazione conforme dello spazio, nella quale il piano limite $\zeta = 0$ è cangiato in sè medesimo. Ma siccome ogni sfera ortogonale al piano limite deve mutarsi in un'altra tale sfera, è chiaro che nella detta trasformazione (conforme) del piano limite ogni circolo deve mutarsi in un circolo, e si tratta per ciò di

un'*affinità circolare di* MOBIUS (I § 58). Se distendiamo su questo piano i valori della variabile complessa.

$$z = \xi + i\,\eta,$$

ad ogni movimento dello spazio iperbolico corrisponderà dunque una sostituzione lineare

$$(V) \qquad z' = \frac{\alpha\, z + \beta}{\gamma\, z + \delta}$$

sulla variabile complessa z, ovvero sulla coniugata z_0:

$$(V^*) \qquad z' = \frac{\alpha\, z_0 + \beta}{\gamma\, z_0 + \delta}.$$

Ma se ci restringiamo dapprima a considerare i movimenti *diretti*, che si possono generare in modo continuo con movimenti infinitesimi, dovremo escludere la seconda formola (V*), e attenerci alla prima. I coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ della (V) saranno in generale costanti *complesse qualunque* e naturalmente il determinante

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$$

sarà diverso da zero. Senza alterare la generalità, possiamo moltiplicare α, β, γ, δ per un fattore tale da rendere

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

o, come diciamo, la sostituzione (V) *unimodulare.*

Così adunque ad ogni movimento diretto dello spazio iperbolico corrisponde una determinata (*) sostituzione *unimodulare* (V); e che inversamente ad ogni tale sostituzione corrisponda un movimento sarà provato ora subito colle formole di POINCARÉ (Acta Mathematica Bd. 3) che dànno l'effettiva trasformazione del semispazio corrispondente alla (V).

Indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate di un punto qualunque P del semispazio $\zeta > 0$, con ξ', η', ζ' quelle del punto P′ in cui P è trasportato dal movimento (V). Partiamo con POINCARÉ dall'osservazione che le sfere ortogonali al piano limite e passanti per P′ debbono mutarsi nelle sfere per P ortogonali al piano limite.

(*) A meno di un cangiamento simultaneo di segno di $\alpha, \beta, \gamma\ \delta$.

Sia nelle solite notazioni

$$(a) \qquad A\, z'\, z'_0 + B\, z' + B_0\, z'_0 + C = 0$$

l'equazione del circolo sezione di una di queste sfere per P′ col piano limite, talchè posto

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

sarà

$$(a^*) \qquad A\, \rho'^2 + Bz' + B_0\, z'_0 + C = 0$$

l'equazione della sfera stessa. Per la sostituzione (V) il circolo (a) si muta nell'altro

$$(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0)\, zz_0 + (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0)\, z +$$
$$+ (A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta)\, z_0 + (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0;$$

e siccome la sfera che ha questo circolo per circolo massimo deve passare per $P \equiv (\xi\ \eta, \zeta)$, si avrà

$$A\,(\alpha\alpha_0\,\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0) + B\,(\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0) +$$
$$+ B_0\,(\alpha_0\gamma\rho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta) + (\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0\, z + \gamma_0\, \delta z_0 + \delta\delta_0) = 0.$$

Ogni qualvolta le costanti A, B, C soddisfano la (a) dovranno pure soddisfare quest'ultima; dal confronto risultano le formole di POINCARE sotto questa prima forma:

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho'^2 &= \frac{\alpha\alpha_0\,\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\,\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z + {}_0\,\delta\delta_0} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\rho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta}{\gamma\gamma_0\,\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0}. \end{aligned} \right.$$

Siccome si ha

$$\rho^2 = \zeta^2 + z\, z_0, \quad \rho'^2 = \zeta'^2 + z'\, z'_0,$$

possiamo anche scrivere

$$\zeta'^2 + z' z'_0 = \frac{\alpha\alpha_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)}$$

$$z' = \frac{\alpha\gamma_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)}$$

$$z'_0 = \frac{\alpha_0\gamma\zeta^2 + (\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)},$$

da cui risulta

$$\zeta'^2 = \frac{[\alpha\alpha_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0)][\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)] - [\alpha\gamma_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)][\alpha_0\gamma\zeta^2 + (\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + (\partial)]}{\{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)\}^2}$$

Riducendo al numeratore viene

$$\zeta'^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)\zeta^2}{\{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)\}^2},$$

e poichè la sostituzione (V) si prende sotto la forma unimodulare, mentre ζ, ζ' sono ambedue positive, possiamo scrivere le formole di POINCARÉ sotto la forma definitiva:

(VI)
$$\begin{cases} z' = \dfrac{\alpha\gamma_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)} \\ z'_0 = \dfrac{\alpha_0\gamma\zeta^2 + (\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0 z)} \qquad \begin{matrix} z = \xi + i\eta \\ z' = \xi' + i\eta' \end{matrix} \\ \zeta' = \dfrac{\zeta}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)} \end{cases}$$

Con queste formole si vede ora subito inversamente che a qualunque sostituzione lineare (V) corrisponde un effettivo movimento nello spazio iperbolico. Basta invero verificare questo per le sostituzioni delle tre forme elementari

$$z' = z + c, \quad z' = k z, \quad z' = \frac{1}{z} \quad (c, k \text{ costante}),$$

per le quali la verifica è immediata, mentre d'altra parte ogni sostituzione lineare si decompone in elementari.

In conclusione le formole (VI) di POINCARÉ mettono in relazione *d'isomorfismo oloedrico* il gruppo G_6 di movimenti dello spazio iperbolico col gruppo totale a 6 parametri (reali) delle sostituzioni lineari sulla variabile complessa z.

Se in fine, accanto ai movimenti diretti, che cangiano ogni figura in una congruente, vogliamo considerare anche quelli inversi, pei quali ogni figura si cangia in un'altra *inversamente* congruente, basterà ricorrere alla sostituzione lineare (V*) (di seconda specie) sulla coniugata, e scambiare nelle formole di POINCARÉ la variabile z colla coniugata z_0.

§ 462.

Classificazione dei movimenti nello spazio iperbolico.

Consideriamo un qualunque movimento diretto dello spazio iperbolico, e distinguiamo secondo che esiste una superficie geodetica (piano non euclideo) che nel movimento strisci sopra sè stessa, senza inversione delle facce, oppur no. Nel primo caso il movimento è già perfettamente determinato da quello della superficie geodetica in sè e dicesi per ciò *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico* secondo la specie a cui appartiene il movimento in sè del piano non-euclideo (§ 230). Se nessuna superficie geodetica striscia in sè medesima, il movimento si dirà *lossodromico*.

Per distinguere, dai valori dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ della sostituzione unimodulare (V), la specie del movimento si può cangiare la sostituzione (V) in una qualunque sua trasformata, cioè il dato movimento in un movimento *affine*, nella qual cosa occorre ricordare che la somma $\alpha+\delta$ del primo e quarto coefficiente è un invariante, che diciamo j.

Ora se nel movimento vi è una superficie geodetica che striscia in sè medesima, sostituiamovi un movimento affine nel quale striscii sopra stesso il piano $\eta = 0$. La sostituzione corrispondente acquisterà coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reali, e siccome la variabile complessa $\xi + i\,\zeta$ sul piano $\eta = 0$ subisce la sostituzione stessa, avremo che in tutti tre i casi l'invariante j è reale e si ha:

un movimento ellittico per $|j| = |\alpha + \delta| < 2$,

un movimento parabolico per $|j| = 2$,

un movimento iperbolico per $|j| > 2$.

Viceversa se questo invariante j è reale, il movimento sarà di una di queste tre specie, e cioè *non lossodromico*. Infatti se i due punti fissi della so-

stituzione lineare (V) nel piano limite sono distinti, potremo cangiare la sostituzione data in una sua trasformata di forma normale

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \quad (\alpha\delta = 1),$$

e quando invece quei due punti fissi coincidano, nell'altra

$$z' = z + \beta.$$

Ma, in quest'ultimo caso, le formole di POINCARÉ dànno nello spazio rappresentativo una traslazione e vi sono infinite superficie geodetiche, rappresentate da piani paralleli normali al piano limite, che strisciano in sè stesse ; il movimento è parabolico. Nel primo caso poi, essendo $\alpha + \delta$ reale e $\alpha\delta = 1$, saranno α, δ reali ovvero coniugati immaginarii con modulo $= 1$; corrispondentemente il movimento è iperbolico ovvero ellittico.

Riassumendo : Il movimento è lossodromico se l'invariante $j = \alpha + \delta$ è complesso ; se j è reale il movimento è ellittico, parabolico od iperbolico secondo che $|j| < 2$, $|j| = 2$, o $|j| > 2$.

Osserviamo ora che, escluso il caso parabolico, vi sono sempre due punti fissi distinti A, B nel piano limite (i punti fissi della sostituzione (V)), ed il circolo ortogonale a questo piano nei due punti A, B rappresenta una geodetica dello spazio iperbolico che nel movimento striscia sopra sè stessa (asse del movimento). Se riduciamo da capo la sostituzione alla forma normale

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \ , \quad \alpha\delta = 1 \ ,$$

l'asse del movimento è rappresentato dall'asse $O\zeta$ e si rilevano allora le circostanze seguenti :

Nel caso ellittico tutti i punti di questo asse rimangono fissi ed il movimento è una pura *rotazione* attorno a questo asse. Posto

$$\alpha = e^{i\varphi}, \quad \delta = e^{-i\varphi},$$

è $z' = e^{2i\varphi} z$, e l'ampiezza Ω della rotazione è data da $\Omega = 2\varphi$, e siccome $j = \alpha + \delta = 2\cos\varphi$ si ha pel calcolo di Ω la formola

$$j = 2\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right). \tag{40}$$

Nel caso iperbolico l' asse del movimento scorre sopra sè stesso di un certo tratto d (misurato nella metrica iperbolica) che diciamo *l'ampiezza* del movimento stesso, e contemporaneamente scorrono in sè stesse tutte le superficie geodetiche per l'asse. Anche qui l'ampiezza d dipende solo dall'invariante j poichè, essendo α, δ reali $\beta = \gamma = 0$, la terza formola (VI) dà

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\delta^2} ;$$

e siccome per la geodetica rappresentata dall'asse ζ si ha

$$ds = \frac{d\zeta}{\zeta} ;$$

indi

$$d = log \frac{\zeta}{\zeta'} = 2 \, log \, \delta ,$$

ne risulta

$$j = \alpha + \delta = \delta + \frac{1}{\delta} ,$$

cioè

(40*) $$j = 2 \cosh \left(\frac{d}{2}\right) ,$$

che è la corrispondente alla (40).

Nel caso lossodromico infine l'asse del movimento scorre in sè stesso, e nel medesimo tempo lo spazio ruota attorno all'asse ; il movimento si compone chiaramente di un movimento ellittico e di un iperbolico col medesimo asse.

In fine fra i movimenti di *seconda specie* noteremo quelli a periodo 2, che si dicono *riflessioni* e si distinguono in due categorie. Quelli della prima sono effettive *simmetrie* rispetto ad una superficie geodetica, quelli della seconda si ottengono combinando una tale riflessione propria con una rotazione di un angolo piatto attorno ad un asse geodetico normale alla superficie geodetica di riflessione.

§ 463.

Movimenti in geometria ellittica. — Scorrimenti.

Veniamo ora ai movimenti dello spazio ellittico a tre dimensioni. Riferendoci ad un sistema di coordinate di WEIERTRASS x_0, x_1, x_2, x_3, legate dalla relazione (§ 457):

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \tag{41}$$

avremo per il ds^2

$$ds^2 = R^2 (dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \tag{41*}$$

Ogni movimento nello spazio ellittico è dato da un'omografia dello spazio euclideo rappresentativo, per la quale la quadrica assoluto si trasforma in sè stessa; esso è quindi rappresentata da una sostituzione lineare omogenea

$$\begin{cases} x'_0 = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} x_3 \\ x'_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x'_2 = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x'_3 = a_{30} x_0 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 ; \end{cases} \tag{42}$$

e siccome deve essere $S x'^2_i = S x_i^2 = 1$, è manifesto che la sostituzione deve essere *ortogonale*, e l' inversa è pur vera. Il gruppo continuo dei movimenti nello spazio ellittico è dunque rappresentato dal gruppo G_6 delle sostituzioni ortogonali quaternarie (42), con determinante $= + 1$, o se si vuole dalle rotazioni dello spazio euclideo a quattro dimensioni attorno ad un punto fisso (origine).

Fra i movimenti dello spazio ellittico ve ne ha una classe di particolare importanza, che non ha riscontro nello spazio iperbolico, ed è invece assimilabile sotto molti rapporti al gruppo delle traslazioni nello spazio euclideo. Definiamo questi movimenti come quelli nei quali tutti i punti dello spazio distano egualmente dalle rispettive posizioni che vengono ad occupare dopo il movimento ; essi diconsi *scorrimenti* (ted. SCHIEBUNGEN). Per dimostrarne l'esistenza e trovarne in pari tempo l'espressione analitica basta porre la condizione che, secondo la formola (20) § 457 (pag. 497), la quantità

$$x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 ,$$

calcolata dalla (42), sia costante. Se indichiamo con δ il tratto costante (ampiezza dello scorrimento) di cui ogni punto dello spazio si sposta, troviamo

$$a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = A = \cos\left(\frac{\delta}{R}\right),$$

e inoltre

$$a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad \text{per } i \neq k.$$

Poichè d'altronde la (42) deve essere una sostituzione ortogonale, ne deduciamo

$$a_{20}\,a_{21} + a_{30}\,a_{31} = 0$$
$$a_{20}^2 + a_{30}^2 = a_{21}^2 + a_{31}^2\,,$$

da cui

$$a_{21} = \pm a_{30},\ a_{31} = \mp a_{20}.$$

Distinguendo i due casi dei segni superiori e degli inferiori, troviamo due classi distinte di scorrimenti dati dalle rispettive formole :

$$\text{(VII)}\qquad \begin{cases} x'_0 = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3 \\ x'_1 = Bx_0 + Ax_1 - Dx_2 + Cx_3 \\ x'_2 = Cx_0 + Dx_1 + Ax_2 - Bx_3 \\ x'_3 = Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 + Ax_3\,, \end{cases}$$

e dalle altre

$$\text{(VII*)}\qquad \begin{cases} x'_0 = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3 \\ x'_1 = Bx_0 + Ax_1 - Dx_2 - Cx_3 \\ x'_2 = Cx_0 - Dx_1 + Ax_2 + Bx_3 \\ x'_3 = Dx_0 + Cx_1 - Bx_2 + Ax_3\,, \end{cases}$$

essendo ambedue le volte A, B, C, D costanti reali qualunque, legate dalla relazione

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Evidentemente si può dare a queste quattro costanti il significato seguente : *esse sono le coordinate del punto in cui si trasporta il punto* (1, 0, 0, 0,) *dopo lo scorrimento.*

Come si vede, uno scorrimento di prima specie (VII), o di seconda specie (VII*), è perfettamente determinato quando si fissi la posizione che deve occupare, dopo lo scorrimento, il punto (1, 0, 0, 0), ovvero un altro punto fisso qualunque dello spazio.

Consideriamo uno scorrimento qualunque, p. e uno di prima specie (VII) ; per esso ogni piano $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ si trasporterà in un nuovo piano $(\xi'_{01}\,\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$, e si troverà subito che le formole per la trasformazione delle coordinate di piano sono identiche alle (VII) per coordinate di punto scrivendosi :

$$(VII') \qquad \begin{cases} \xi'_0 = A\xi_0 - B\xi_1 - C\xi_2 - D\xi_3 \\ \xi'_1 = B\xi_0 + A\xi_1 - D\xi_2 + C\xi_3 \\ \xi'_2 = C\xi_0 + D\xi_1 + A\xi_2 - B\xi_3 \\ \xi'_3 = D\xi_0 - C\xi_1 + B\xi_2 + A\xi_3 . \end{cases}$$

Di qui risulta che se consideriamo un piano (ξ) che passi per la congiungente il punto (x) colla sua nuova posizione (x'), eseguito lo scorrimento, il nuovo piano (ξ') passerà ancora per la stessa congiungente (x) (x'). E infatti supponendo

$$S\xi\, x = 0 \qquad S\,\xi\, x' = 0,$$

ne deduciamo subito per le (VII), (VII')

$$S\xi'\, x' = 0, \qquad S\,\xi'\, x = 0.$$

Inoltre se indichiamo con φ l'angolo dei due piani (ξ), (ξ'), abbiamo

$$\cos\varphi = S\,\xi\,\xi',$$

e dalle (VII')

$$\cos\varphi = A,$$

cioè

$$\varphi = \frac{\delta}{R}.$$

Ne concludiamo : *In ogni scorrimento le rette che congiungono due punti corrispondenti scorrono ciascuna sopra sè stessa ; ogni punto sopra una tale congiungente si sposta (sulla congiungente stessa) ; del tratto costante* $\delta = R \arccos A$ *ed ogni piano condotto per essa ruota attorno a questa retta dell'angolo costate* $\varphi = \frac{\delta}{R}$.

Se vogliamo considerare la semplice infinità di scorrimenti che fanno muovere il punto fisso (1, 0, 0, 0) lungo una medesima retta, basterà porre

$$A = \cos t,\ B = \beta \operatorname{sen} t,\ C = \gamma \operatorname{sen} t,\ D = \delta \operatorname{sen} t,$$

essendo t un parametro variabile e β, γ, δ tre costanti tali che

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Sostituendo questi valori di A, B, C, D nelle (VII) ovvero nelle (VII*), si verrà a definire un gruppo continuo ad un parametro t di scorrimenti, ed in tale scorrimento continuo le trajettorie dei singoli punti saranno altrettante rette, formanti una congruenza, che si dice una *congruenza di* CLIFFORD.

Come si distinguono le due specie di scorrimenti (VII) o (VII*)? Durante lo scorrimento continuo un piano può ruotare attorno ad una retta della congruenza nell'uno o nell'altro senso, da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra rispetto ad un osservatore disteso lungo la retta. Di qui la distinzione degli scorrimenti in *destrorsi* o *sinistrorsi*, o ciò che è lo stesso delle rispettive congruenze di CLIFFORD in destrorse o sinistrorse. Supponendo una conveniente orientazione al tetraedro delle coordinate di punto coi vertici in

$$(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1),$$

noi diremo destrorsi gli scorrimenti (VII), sinistrorsi quelli dati dalle formole (VII*).

§ 464.

I movimenti come omografie dell'assoluto.

Ogni movimento in sè, diretto, dello spazio ellittico è un'omografia dello spazio rappresentativo che trasforma la quadrica assoluta in sè medesima, che dovrà quindi cangiare le generatrici della quadrica in generatrici, e precisamente ciascun sistema in sè medesimo ; (*) e le generatrici di ciascun sistema saranno scambiate projettivamente fra loro.

In particolare in uno scorrimento, siccome tutti punti si muovono rettilineamente, dovranno rimanere singolarmente invariate le generatrici dell'una o dell'altra serie, poniamo quelle della prima. Allora nella seconda serie le generatrici si scambieranno projettivamente e vi saranno due particolari generatrici (coniugate) che rimarranno fisse, insieme evidentemente ad ogni loro punto. Uno scorrimento non è altro aduque che una *omografia biassiale* avente per assi due generatrici coniugate di una medesima serie, e viceversa si vede subito che ogni tale omografia biassiale è uno scor-

(*) I movimenti diretti formando un gruppo *continuo*, non possono scambiare i due sistemi di generatrici.

rimento. Le ∞^2 rette di una congruenza di CLIFFORD sono dunque caratterizzate dall'appoggiarsi a due generatrici coniugate dell'assoluto.

Considerati gli scorrimenti sotto questo secondo aspetto, è evidente che due scorrimenti della stessa specie si compongono in un terzo scorrimento ancora della stessa specie, inoltre, trasformando uno scorrimento S per mezzo di un qualunque movimento M, il movimento trasformato $M^{-1}SM$ è nuovamente uno scorrimento della specie di S, perchè lascia invariate le singole generatrici del medesimo sistema. Risulta di qui che gli scorrimenti della medesima specie formano, entro il gruppo totale a 6 parametri dei movimenti, un sottogruppo *invariante* a tre parametri.

Di più facilmente vediamo che: *qualsiasi movimento* M *si decompone in due successivi scorrimenti di specie opposta.* E invero se M non è uno scorrimento, esso lascia invariate due e due sole generatrici g_1, g_2 (coniugate) nella prima serie, e altre due coniugate g'_1, g'_2 nella seconda. Queste quattro generatrici formano un quadrilatero gobbo le cui diagonali sono rette reali, polari rispetto alla quadrica, e queste due rette strisciano nel movimento ciascuna sopra sè stessa. Dunque: *in ogni movimento* M *vi sono due assi del movimento* a, a' *che sono rette polari rispetto all'assoluto.*

Sia ora g_3 un' altra generatrice della prima serie (di g_1, g_2) che per M si trasporti in $\bar{g}_3$; se combiniamo M con uno scorrimento S' di seconda specie che lasci fisse le generatrici g_1, g_2 e trasporti $\bar{g}_3$ in g_3, il movimento composto MS', lasciando fisse le tre generatrici g_1, g_2, g_3 della prima serie, lascia fisse anche tutte le altre, ed è per ciò uno scorrimento S di prima specie. Se ne deduce

$$M\,S' = S\,, \quad \text{o} \quad M = SS'^{-1},$$

formola che dà la richiesta decomposizione del movimento M in due scorrimenti di specie opposta.

È poi da ossevare: *due scorrimenti di specie contraria* S, S' *sono sempre fra loro permutabili, cioè* $SS' = S'S$.

Difatti due movimenti SS', S'S producono sulla stessa serie di generatrici il medesimo effetto, quello di S' o di S. Anche segue di qui che la decomposizione di ogni movimento nel prodotto di due scorrimenti ha luogo in modo unico. (*) Tutte queste proprietà che abbiamo qui dimo-

(*) Da $S\,S' = S_1\,S'_1$, a causa della permutabilità, segue $S\,S_1^{-1} = S'_1 S'^{-1} = 1$, indi $S = S'$, $S_1 = S'_1$.

strato per via geometrica si possono facilmente verificare sulle formole (VII), (VII*) per gli scorrimenti.

§ 465.

Il parallelismo di Clifford.

Le singolari proprietà che abbiamo visto appartenere agli scorrimenti in geometria ellittica hanno condotto CLIFFORD ad introdurre in questa geometria l'importante nozione di parallelismo di due rette. (*) Se volessimo, come in geometria euclidea ed iperbolica, definire due rette parallele quelle che hanno un punto comune all' infinito, dovremmo dire che nello spazio ellittico, non essendovi punti reali all'infinito, non esistono rette parallele. Ma le parallele della geometria iperbolica solo in parte posseggono le proprietà delle parallele della geometria euclidea, alcune delle più semplici fra queste proprietà andando realmente perdute: Così in geometria euclidea, prese due parallele, possiamo muovere tutto lo spazio in guisa che le due parallele striscino ciascuna sopra se stessa; due parallele hanno infinite perpendicolari comuni, proprietà che cessano di sussistere per due parallele nello spazio iperbolico. Invece possiamo ritrovarle nuovamente nello spazio ellittico, se ricorriamo alla seguente definizione *del parallelismo* di CLIFFORD :

Due rette dello spazio ellittico si dicono parallele quando si appoggiano ad una medesima coppia di generatrici coniugate dell'assoluto, ossia quando appartengono ad una medesima congruenza di CLIFFORD.

Si osserverà subito che, al contrario di quanto accadeva in geometria euclidea e nella iperbolica, due rette parallele nel senso di CLIFFORD non sono mai complanari. Come le congruenze di CLIFFORD si distinguono nelle due specie, così il parallelismo deve distinguersi in *destrorso* e *sinistrorso*. Da ogni punto P dello spazio, ad una data retta r, partono due parallele una nel senso destrorso l'altra nel sinistrorso, e le due parallele sono distinte, salvo quando P dista da r di un quadrante $\frac{\pi R}{2}$, chè allora vengono a coincidere nella polare r' rirpetto all'assoluto.

È chiaro che, fissate due rette parallele nel senso di CLIFFORD, vi ha uno scorrimento dello spazio che fa scorrere le due rette ciascuna in sè stessa.

(*) Le idee di Clifford su questo argomento vennero fatte particolarmente conoscere e sviluppate da Klein (V. Klein Math. Annalen Bol. 37, e le lezioni litografate: *Nicht Euklidische Geometrie* Göltingen 1890).

Se da un punto A′ della seconda retta a' caliamo il segmento A′ A perpendicolare in A alla prima a, questo segmento A′A, nello scorrimento continuo, striscierà coi suoi due estremi A, A′ sulle rette a, a', e resterà di lunghezza costante e normale ad ambedue le rette. Dunque, come in geometria euclidea, tutti i punti di una retta distano egualmente da ogni parallela alla retta e le due rette hanno infinite minime distanze, tutte eguali fra loro.

Un altro ravvicinamento fra il parallelismo euclideo e quello di CLIFFORD si rileva dalle osservazioni seguenti. In geometria euclidea, applicando ad una retta una traslazione si ottiene una retta parallela ; così pure in geometria ellittica ad una retta r applicando uno scorrimento, p. e *destrorso* la nuova posizione r' di r è parallela alla r, però nel senso opposto sinistrorso. E infatti nello scorrimento destrorso tutte le generatrici del secondo sistema sull'assoluto scorrono in sè medesime e per ciò anche le due (coniugate) g_1, g_2 a cui r si appoggia; dunque anche r' si appoggia a g_1, g_2 ed è quindi parallela nel senso sinistrorso a r.

Segue di qui che se due rette parallele r, r' sono tagliate da una medesima ρ, esse formano con ρ nei due punti d'incontro A, B angoli (alterni) eguali, come nella geometria euclidea. E i fatti, se il parallelismo di r, r' è p. e destrorso si faccia uno scorrimento sinistrorso che trasporti A in B; la ρ scorrerà in sè medesima e la retta r si sovrapporrà alla r'.

§ 466.

Parametri di scorrimento e angolo di parallelismo. (*).

Risolviamo ora il problema di trovare le due parallele che ad una data retta r escono da un punto P dello spazio.

Supponiamo definita la retta r nel solito modo, coll'assegnare le coordinate (x_i) di un suo punto e quelle (ξ_i) del piano normale in (x_i) alla retta, ossia individuiamo la retta r mediante le coordinate (x_i) (ξ_i) di due suoi punti coniugati rispetto all'assoluto (distanti di un quadrante).

(*) Le considerazioni che seguono furono svolte dal FUBINI nella sua tesi di laurea: *Il parallelismo di Clifford negli spazî ellittici* Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa Vol. IX 1900). Indipendentemente dal FUBINI apparvero poco dopo le pubblicazioni dello STUDY sull'argomento.

La retta r individua due scorrimenti di ampiezza eguale ad un quadrante $\frac{\pi R}{2}$, che portano ciascuno il punto (x) in (ξ) ; indi (ξ) in (x). Per ambedue gli scorrimenti si ha nelle relative formole (VII), (VII*) pag. 517 $A = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, e i tre rimanenti parametri B, C, D, legati dalla relazione

$$B^2 + C^2 + D^2 = 1,$$

risultano determinati p. e nelle (VII) dalle formole

$$\begin{cases} \xi_0 = -Bx_1 - Cx_2 - Dx_3 \\ \xi_1 = Bx_0 - Dx_2 + Cx_3 \\ \xi_2 = Cx_0 + Dx_1 - Bx_3 \\ \xi_3 = Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 . \end{cases}$$

Queste, risolute rapporto a B, C, D, col tener conto delle relazioni

$$Sx^2 = 1, \quad Sx\,\xi = 0,$$

dànno subito le formole

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} B = (x_0\,\xi_1 - x_1\,\xi_0) + (x_2\,\xi_3 - x_3\,\xi_2) \\ C = (x_0\,\xi_2 - x_2\,\xi_0) + (x_3\,\xi_1 - x_1\,\xi_3) \\ D = (x_0\,\xi_3 - x_3\,\xi_0) + (x_1\,\xi_2 - x_2\,\xi_1) , \end{cases}$$

che definiscono i *parametri di scorrimento* destrorsi della retta r. Questi sono precisamente le coordinate del punto ove la parallela destrorsa tirata pel punto (1, 0, 0, 0) alla retta incontra il piano polare $x_0 = 0$ del punto.

Similmente, indicando con β, γ, δ i parametri di scorrimento sinistrorsi della retta r, troveremo

$$\text{(VIII*)} \qquad \begin{cases} \beta = (x_0\,\xi_1 - x_1\,\xi_0) - (x_2\,\xi_3 - x_3\,\xi_2) \\ \gamma = (x_0\,\xi_2 - x_2\,\xi_0) - (x_3\,\xi_1 - x_1\,\xi_3) \\ \delta = (x_0\,\xi_3 - x_3\,\xi_0 - (x_1\,\xi_2 - x_3\,\xi_1). \end{cases}$$

Come si vede, questi 6 parametri di scorrimento (B, C, D), (β, γ, δ), legati dalle relazioni

$$B^2 + C^2 + D^2 = 1, \quad \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

sono semplici combinazioni, per somma e differenza, delle 6 coordinate usuali della retta

$$p_{ik} = x_i\,\xi_k - x_k\,\xi_i\ ;$$

precisamente si ha

$$(43)\qquad \begin{cases} \mathrm{B} = p_{01} + p_{23}\ , & \mathrm{C} = p_{02} + p_{31}\ , & \mathrm{D} = p_{03} + p_{12} \\ \beta = p_{01} - p_{23}\ , & \gamma = p_{02} - p_{31}\ , & \delta = p_{03} - p_{12}. \end{cases}$$

I sei parametri di scorrimento (B, C, D), (β, γ, δ) sono in sostanza coordinate *normalizzate* della retta e la individuano. Per due rette parallele nel senso destrorso la prima terna è la stessa, per due parallele nel senso sinistrorso la seconda.

Dati i 6 parametri di scorrimento di una retta r, si risolve subito la questione di trovare le due parallele tirate per un punto $(y_0\ y_1\ y_2\ y_3)$ dello spazio alla retta data. Indicando infatti con η_0, η_1, η_2, η_3 le coordinate del punto situato p. e. sulla prima parallela alla distanza di un quadrante da (y_i), avremo

$$(44)\qquad \begin{cases} \eta_0 = -\mathrm{B}y_1 - \mathrm{C}y_2 - \mathrm{D}y_3\ , & \eta_2 = \mathrm{C}y_0 + \mathrm{D}y_1 - \mathrm{B}y_3 \\ \eta_1 = \mathrm{B}y_0 - \mathrm{D}y_2 + \mathrm{C}y_3\ , & \eta_3 = \mathrm{D}y_0 - \mathrm{C}y_1 + \mathrm{B}y_2\ . \end{cases}$$

e analogamente per le coordinate η_i del punto alla distanza di un quadrante da (y_i) sulla seconda parallela:

$$(44^*)\qquad \begin{cases} \eta_0 = -\beta y_1 - \gamma y_2 - \delta y_3 & \eta_2 = \gamma y_0 - \delta y_1 + \beta y_3\ . \\ \eta_1 = \beta y_0 + \delta y_2 - \gamma y_3 & \eta_3 = \delta y_0 + \gamma y_1 - \beta y_2\ . \end{cases}$$

Applichiamo queste formole al calcolo dell'*angolo di* Ω *di parallelismo*, cioè dell'angolo che le due parallele tirate alla retta r dal punto (y_i) formano fra loro. È chiaro *a priori* che quest'angolo Ω non può dipendere che dalla distanza d del punto dalla retta; poichè se il punto P ha dalla retta r la stessa distanza che il punto P′ dalla retta r', possiamo *con un movimento* dello spazio portare r su r' e P su P′, dopo di che le due parallele tirate per P alla r si sovrappongono a quelle tirate da P′ alle r'.

Prendiamo allora per retta r la congiungente i due punti (1, 0, 0, 0) (0, 1, 0, 0); le sue coordinate p_{ik} sono tutte nulle, tranne la $p_{01} = 1$, e i suoi parametri di scorrimento calcolati dalle (43) sono

$$(\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) = (1, 0, 0),\quad (\beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 0).$$

Consideriamo il punto di coordinate

$$y_0 = \cos\left(\frac{d}{R}\right),\ y_1 = 0, \quad y_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{d}{R}\right),\ y_3 = 0,$$

il quale dista dalla retta r appunto di d; applicando le (44), (44*) abbiamo

$$\eta_0 = 0\ ,\ \ \eta_1 = \cos\left(\frac{d}{R}\right),\ \ \eta_2 = 0\ ,\ \ \eta_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{d}{R}\right)$$

$$\overline{\eta_0} = 0 \quad \overline{\eta_1} = \cos\left(\frac{d}{R}\right),\ \ \overline{\eta_2} = 0\ ,\ \ \overline{\eta_3} = -\operatorname{sen}\left(\frac{d}{R}\right).$$

L'angolo Ω delle due parallele, ossia dei due piani (η_i), $(\overline{\eta_i})$ normali in $(y_i$ a queste due rette è dato da:

$$\cos\Omega = S\,\eta_i\,\overline{\eta_i} = \cos\left(\frac{2d}{R}\right).$$

Di qui il semplice risultato: *L'angolo* Ω *delle due parallele tirate da un medesimo punto* P *ad una retta* r *dipende dalla distanza* d *di* P *da* r *secondo la formola*

$$\Omega = \frac{2d}{R}. \tag{IX}$$

Si osserverà che non solo per $d = 0$ le due parallele coincidono (come è naturale), ma ancora per $d = \frac{\pi R}{2}$ e in quest'ultimo caso, come già abbiamo osservato sopra, coincidono nella retta polare r' di r rispetto all'assoluto.

Un'ultima osservazione relativa ai parametri di scorrimento ci sarà utile nel seguito. Siano r, r' due rette uscenti da un medesimo punto (x') e rispettivamente normali in questo punto ai due piani (ξ), (ξ'); siano B, C, D, B′, C′, D′ i relativi parametri di scorrimento, p. e. destrorsi, di queste due rette e θ l'angolo che esse formano fra loro, onde

$$\cos\theta = S\,\xi\xi'.$$

Dimostriamo che è anche

$$\cos\theta = BB' + CC' + DD'. \tag{α}$$

Difatti

$$\begin{aligned} &B = p_{01} + p_{23}\ , \quad C = p_{02} + p_{31}\ , \quad D = p_{03} + p_{12} \\ &B' = p'_{01} + p'_{23}\ , \quad C' = p'_{02} + p'_{31}\ , \quad D' = p'_{03} + p'_{12}, \end{aligned}$$

e siccome le due rette sono incidenti si ha

$$\begin{aligned} &p_{01}\, p'_{23} + p_{02}\, p'_{31} + p_{03}\, p'_{12} = 0 \\ &p'_{01}\, p_{23} + p'_{02}\, p_{31} + p'_{03}\, p_{12} = 0, \end{aligned}$$

indi

$$\begin{aligned} BB' + CC' + DD' = {} & p_{02}\, p'_{01} + p_{02}\, p'_{02} + p_{03}\, p'_{03} + \\ & + p_{23}\, p'_{23} + p_{31}\, p'_{31} + p_{12}\, p'_{12}, \end{aligned}$$

cioè

$$BB' + CC' + DD' = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi'_0 & \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & S\, x\, \xi' \\ S x \xi & S\, \xi\, \xi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\ , \quad \text{c. d. d..}$$

Segue di qui: ***D**ue coppie di rette incidenti rispettivamente parallele (nel medesimo senso) formano lo stesso angolo.*

§ 467.

Le rigate a curvatura nulla e la superficie di Clifford. (*)

Un'altra notevole analogia fra il parallelismo in geometria euclidea e quello in geometria ellittica si ha considerando nello spazio ellittico una qualunque rigata le cui generatrici siano tutte parallele p. e. destrorse, cioè una qualunque rigata entro una congruenza di CLIFFORD. Lo scorrimento continuo individuato da questa congruenza fa scorrere la rigata R in sè medesima. Dunque l'elemento lineare di R, riferito alle generatrici $u = \text{cost}^{\text{te}}$ e alle trajettorie ortogonali $v = \text{cost}^{\text{te}}$, prenderà la forma (I pag. 343)

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2.$$

(*) Cf. la memoria dell'autore: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*. Annali di matematica (1895).

Ma poichè le linee u = cost^{te} sono geodetiche, sarà $\varphi(u)$ = cost, e il ds^2 ha la forma del piano euclideo. (**) Ne risulta il teorema: *Ogni rigata dello spazio ellittico, con generatrici parallele nel senso di* CLIFFORD, *è una superficie a curvatura (assoluta) nulla.* Con questo teorema le rigate di CLIFFORD (contenute in una congruenza di CLIFFORD) vengono assimilate alle superficie cilindriche dello spazio euclideo.

Come si vedrà più avanti, vale in geometria ellittica anche il teorema inverso che ogni rigata a curvatura nulla è una rigata di CLIFFORD.

Consideriamo in particolare la rigata di CLIFFORD le cui generatrici g escono dai punti di una medesima retta γ, non appartenente alla congruenza di CLIFFORD. Esse formano una particolare rigata (quadrica) sulla quale esistono due diversi sistemi di generatrici (g), (γ) parallele fra loro le prime in un senso, le seconde nell'opposto. In ogni quadrilatero formato da due coppie di genetratrici (g_1, g_2) (γ_1, γ_2) i lati opposti e gli angoli opposti sono eguali (nella metrica ellittica). Questa superficie, che dicesi *superficie di* CLIFFORD, possiede evidentemente due scorrimenti di diversa specie in sè medesima, fra loro permutabili, Da questa ultima circostanza CLIFFORD traeva appunto la conseguenza che la superficie ha nulla la curvatura assoluta, proprietà che più in generale appartiene, come si è visto, a tutte le rigate con generatrici parallele.

Si ottiene un'altra notevole generazione della superficie di CLIFFORD colle considerazioni seguenti. I due scorrimenti in sè che possiede la superficie di CLIFFORD individuano due rette, polari rispetto all'assoluto, che sono parallele tanto alle generatrici dell'uno quanto a quelle dell'altro sistema. Siano r, r' queste due rette, che diciamo gli *assi* della superficie di CLIFFORD ; questi per l'uno e per l'altro dei due scorrimenti strisciano sopra sè stessi, e quindi anche per qualunque movimento combinato dai due scorrimenti. Ora si combini uno scorrimento destrorso lungo r con uno sinistrorso di eguale e contraria ampiezza angolare lungo r'; tutti i piani per r scorreranno in sè stessi, e con essi le sezioni che producono nella superficie di CLIFFORD, la quale scorre pel movimento considerato in sè medesima. Ma nel movimento del piano ellittico pel quale una retta scorre in sè stessa tutte le altre

(**) In modo più geometrico così: Lo scorrimento scambia fra loro le trajettorie ortogonali delle generatrici e per ciò gli archi intersecati su queste trajettorie ortogonali (t) dalle generatrici sono eguali ; dunque le (t) stesse sono geodetiche. Ma ogni superficie con un doppio sistema ortogonale (od anche isogonale) di curve geodetiche è a curvatura nulla (I pag. 272).

trajettorie dei punti sono circoli, geodeticamente paralleli alla retta, col centro nel polo della retta. Dunque tutte le sezioni fatte nella superficie di CLIFFORD con piani per l'asse r (e quindi normale al secondo asse r') sono circoli di raggio eguale coi centri distribuiti sul secondo asse r'. È evidente che una pura rotazione attorno ad r scambia i circoli considerati fra loro, si può quindi formulare la seguente costruzione geometrica della superficie di CLIFFORD : *Preso un circolo e tracciata nel suo piano la retta r polare del centro, si faccia rotare attorno a questa retta r il piano ; il circolo descrive la superficie di* CLIFFORD.

La superficie di CLIFFORD possiede manifestamente un secondo sistema di circoli nei piani per r' e coi centri distribuiti sopra r. Questi due sistemi di circoli, i cui piani sono ortogonali alla superficie, ne sono le linee di curvatura e, come tali, sono le bisettrici del doppio sistema di generatrici.

Possiamo infine generare la superficie di CLIFFORD nel seguente modo equivalente : *La superficie di* CLIFFORD *è il luogo di un circolo di raggio costante il cui centro descrive una retta e il cui piano resta normale alla retta.* Così questa singolare superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico viene a ravvicinarsi al cilindro circolare retto euclideo.

§ 468.

Le formole di Frenet in geometria ellittica ed iperbolica.

Le ultime ricerche del presente capitolo saranno volte ad estendere la teoria delle curve, esposta al Vol. I Cap. I, alla metrica ellittica ed iperbolica. Ci limiteremo a stabilire le *formole di* FRENET in questi spazî, e col sussidio di queste formole fondamentali sarà facile al lettore riprendere le singole ricerche del Cap. I e riconoscere le lievi modificazioni che vengono ad introdursi nei risultati finali a causa della curvatura dello spazio.

Cominciando dal caso dello spazio ellittico a tre dimensioni, consideriamovi una curva qualunque C, che definiremo dando le coordinate x_0, x_1, x_2, x_3 di VEIERTRASS di un suo punto mobile in funzione dell'arco s. Se con

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2.\ \alpha_3$$

indichiamo le coordinate del piano normale in (x_i) alla curva, avremo

$$\alpha_i = \mathrm{R}\frac{dx_i}{ds} \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{45}$$

e le α_i si diranno anche i coseni di direzione della tangente. Calcoliamo in primo luogo la prima curvatura o flessione $\frac{1}{\rho}$ della curva C secondo la definizione generale del § 443, come limite del rapporto $\frac{2\,d}{t^2}$, significando d la distanza dei due punti M′, $\overline{\mathrm{M}}$ che si ottengono staccando sulla curva e sulla tangente in M due archi infinitesimi di lunghezza $= t$. Abbiamo con notazioni evidenti

$$x'_i = x_i + \frac{t}{\mathrm{R}}\,\alpha_i + \frac{t^2}{2\,\mathrm{R}}\,\frac{d\alpha_i}{ds} + \ldots$$

$$\bar{x}_i = x_i \cos\left(\frac{t}{\mathrm{R}}\right) + \alpha_i \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\mathrm{R}}\right) = x_i + \frac{t}{\mathrm{R}}\,\alpha_i - \frac{t^2}{2\,\mathrm{R}^2}\,x_i + \ldots,$$

ove abbiamo trascurato di scrivere le potenze di t superiori alla seconda. Ne segue

$$x'_i - \bar{x}_i = \frac{t^2}{2\,\mathrm{R}}\left(\frac{d\alpha_i}{ds} + \frac{x_i}{\mathrm{R}}\right) + \ldots$$

indi

$$d = \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{S}(x'_i - \bar{x}_i)^2} = \frac{t^2}{2}\sqrt{\mathrm{S}\left(\frac{d\alpha_i}{ds} + \frac{x_i}{\mathrm{R}}\right)^2},$$

e per ciò

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{t=0}\frac{2\,d}{t^2} = \sqrt{\mathrm{S}\left(\frac{d\alpha_i}{ds} + \frac{x_0}{\mathrm{R}}\right)^2}.$$

Anche qui, come in geometria euclidea, converremo di dare alla flessione $\frac{1}{\rho}$ un valore assoluto e prenderemo per ciò, nella formola superiore, il valore positivo del radicale. Da quanto abbiamo osservato in generale al § 443 risulta inoltre che i coseni di direzione $\xi_0\ \xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ della normale principale alla curva sono dati da:

$$\xi_i = \rho\left(\frac{d\alpha_i}{ds} + \frac{x_i}{\mathrm{R}}\right),\quad i = 0, 1, 2, 3\,. \tag{46}$$

La tangente e la normale principale individuano il piano osculatore, e noi indicheremo con

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

le coordinate di questo piano, ossia i coseni di direzione della *binormale* alla curva. Il determinante

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

è allora il determinante di una sostituzione ortogonale e, per fissare completamente le λ anche in segno, conveniamo che il *valore di questo determinante debba essere positivo*, *cioè* $= +1$.

L'equazione del piano osculatore in (x_i) è data da

$$\begin{vmatrix} X_0 , & X_1 , & X_2 , & X_3 \\ x_0 , & x_1 , & x_2 , & x_3 \\ \frac{dx_0}{ds} , & \frac{dx_1}{ds} , & \frac{dx_2}{ds} , & \frac{dx_3}{ds} \\ \frac{d^2x_0}{ds^2} , & \frac{d^2x_1}{ds^2} , & \frac{d^2x_2}{ds^2} , & \frac{d^2x_3}{ds^2} \end{vmatrix} = 0 ,$$

avendo indicato con X_i le coordinate correnti di punto. In modo analogo come al § 3 si proverebbe che si possono adottare per questo piano le altre definizioni di quel paragrafo.

Fissata la nozione di piano osculatore, si definirà la seconda curvatura o *torsione* $\frac{1}{T}$ precisamente come al § 5 pel caso euclideo, e se ne dedurrà pel valore della torsione

$$(48) \qquad \frac{1}{T^2} = S\left(\frac{d\lambda_i}{ds}\right)^2 .$$

Dopo di ciò stabiliamo subito le *formole di* FRENET in geometria ellittica, che dànno le derivate rispetto all'arco s degli elementi del determinante (47) in una stessa colonna, espresse linearmente ed omogeneamente per gli elementi stessi e per le due curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$. Le (45), (46) dànno già due gruppi di tali formole. Ora dalle identità

$$S\, x\lambda = 0, \quad S\alpha\lambda = 0, \quad S\,\lambda^2 = 1,$$

derivando rapporto ad s, coll'osservare le (45) (46), segue

$$S\,x\,\frac{d\lambda}{ds} = 0\,,\quad S\,\alpha\,\frac{d\lambda}{ds} = 0,\quad S\,\lambda\,\frac{d\lambda}{ds} = 0\,,$$

e quindi

$$\frac{d\lambda_i}{ds} = K\,\xi_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

con K fattore di proporzionalità. Ma dalla (48) risulta $\frac{1}{T^2} = K^2$, e noi ponendo

$$\frac{1}{T} = K\,,$$

veniamo ad attribuire alla torsione un valore *algebrico*, dopo di che le formole precedenti diventano

$$\frac{d\lambda_i}{ds} = \frac{\xi_i}{T}\,.$$

Rimangono solo a calcolare i valori delle derivate $\frac{d\xi_i}{ds}$, ciò che si fa subito ricordando le proprietà del determinante ortogonale (47) (*) e facendo uso delle formole già ottenute. Riepilogando, abbiamo per le formole di FRENET in geometria ellittica il quadro seguente :

$$\text{(IX)}\qquad \frac{dx_i}{ds} = \frac{\alpha_i}{R}\,,\quad \frac{d\alpha_i}{ds} = \frac{\xi_i}{\rho} - \frac{x_i}{R}\,,\quad \frac{d\xi_i}{ds} = -\frac{\alpha_i}{\rho} - \frac{\lambda_i}{T}\,,\quad \frac{d\lambda_i}{ds} = \frac{\xi_i}{T}$$

$$i = 0, 1, 2, 3.$$

Da queste formole fondamentali, precisamente come in geometria euclidea (§§), si deduce che anche nello spazio ellittico una curva è perfettamente determinata di forma dalle sue equazioni intrinseche : $\frac{1}{\rho} = f(s)$, $\frac{1}{T} = \varphi\,(s)$ le quali possono venire assegnate ad arbitrio.

Un procedimento del tutto analogo a quello sopra tenuto per lo spazio ellittico serve per stabilire le formole di FRENET nello spazio iperbolico. (**)

(*) Ogni elemento del determinante è eguale al proprio complemento algebrico ; più in generale qualunque minore eguaglia il suo complemento algebrico.

(**) V. per i calcoli sviluppati la nota di *A. Razzaboni. Le formole del Frenet in geometria iperbolica e loro applicazioni* (Bologna Gamberini 1897).

Mantenendo le notazioni stesse, queste formole si scrivono:

$$(IX^*)\quad \frac{dx_r}{ds} = \frac{\alpha_r}{R}\,,\quad \frac{d\alpha_r}{ds} = \frac{\xi_r}{\rho} + \frac{x_r}{R}\,,\quad \frac{dx_r}{ds}\,,\ = -\frac{\alpha_r}{\rho} - \frac{\lambda_r}{T}\,,\quad \frac{d\lambda_r}{ds} = \frac{\xi_r}{T}$$

$$r = 0, 1, 2, 3,$$

le relazioni fra le x, α, ξ, λ essendo attualmente

$$x_0^2 - \sum_r x_r^2 = 1\,,\quad \sum_r \alpha_r^2 - \alpha_0^2 = 1\,,\quad \sum_r \xi_r^2 - \xi_0^2 = 1\,,\quad \sum_r \lambda_r^2 - \lambda_0^2 = 1$$

$$\sum_r x_r\alpha_r - x_0\alpha_0 = 0\,,\quad \sum_r \alpha_r\,\xi_r - \alpha_0\,\xi_0 = 0\,,\ \text{ecc. ecc.}$$

Del resto, analiticamente, le formole (IX*) di FRENET in geometria iperbolica si deducono subito dalle corrispondenti (IX) in geometria ellittica cangiando R in $i\,R\,(i = \sqrt{-1})$ e corrispondentemente x_1, x_2, x_3 in $-i\,x_1$, $-ix_2$, $-ix_3$; α_0, ξ_0, λ_0 in $i\alpha_0$, $i\xi_0$, $i\lambda_0$, rispettivamente.

§ 469.

Formole del Fubini pei parametri di scorrimento principali.

Le formole (IX) di FRENET in geometria ellittica vennero trasformate dal FUBINI (tesi citata al § 466) in modo molto notevole introducendo al posto delle quantità che figurano nel determinante ortogonale (47) i parametri di scorrimento destrorsi o sinistrorsi dei tre spigoli del triedro principale. Riferiamoci dapprima ai parametri destrorsi e indichiamo con

t_1, t_2, t_3 i parametri destrorsi della tangente
n_1, n_2, n_3 i parametri destrorsi della normale principale
$b_1\ b_2\ b_3$ i parametri destrorsi della binormale,

onde avremo per le formole (VIII)

$$(49)\qquad t_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\,,\quad n_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}\,,$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

colle analoghe per (t_2, n_2, b_2), $(t_3\, n_3, b_3)$ che si ottengono da queste tenendo fisso l'indice o e permutando circolarmente (1, 2, 3). Notiamo che, per quanto si è visto alla fine del § 466, il determinante

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{50}$$

è un determinante *ortogonale* ternario, ed il suo valore è ancora $= +1$. Deriviamo ora la prima e la terza delle (49) rapporto ad s utilizzando le formole (IX) di FRENET e troveremo subito

$$\frac{dt_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}\right\} = \frac{n_1}{\rho},$$

$$\frac{db_1}{ds} = \frac{1}{R}\left\{\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{T}\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}\right\}.$$

Ma, per le proprietà del determinante ortogonale (47), si ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix},$$

onde la precedente si scrive

$$\frac{db_1}{ds} = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right) n_1.$$

Per calcolare in fine $\frac{dn_1}{ds}$ si derivi la identità

$$t_1^2 + n_1^2 + b_1^2 = 1,$$

tenendo conto delle precedenti, e si avrà

$$\frac{dn_1}{ds} = -\frac{t_1}{\rho} - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right) b_1.$$

E se, insieme alle formole così ottenute, si scrivono anche quelle dedotte con permutazione circolare degli indici avremo le formole di FRENET poste sotto la forma data dal FUBINI:

$$(X)\quad \frac{d\,t_i}{d\,s} = \frac{1}{\rho}\,n_i\,,\quad \frac{dn_i}{d\,s} = -\frac{1}{\rho}\,t_i - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right) b_i\,,\quad \frac{d\,b_i}{d\,s} = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Se poi introduciamo anche i parametri di scorrimento *sinistrorsi*, che indichiamo con $\bar{t}$, , $\bar{b}$, $\bar{n}$ essendo

$$\bar{t}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix},\quad \bar{n}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix},$$

$$\bar{b}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

lo stesso calcolo eseguito sopra ci dà

$$(X^*)\quad \frac{d\,\bar{t}_i}{d\,s} = \frac{1}{\rho}\,\bar{n}_i\,,\quad \frac{d\bar{n}_i}{d\,s} = -\frac{1}{\rho}\,t_i - \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{R}\right)\bar{b}_i\,,\quad \frac{d\bar{b}_i}{d\,s} = \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{R}\right)\bar{n}_i$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Queste formole (X), (X*) equivalgono alle formole (IX) del FRENET, e scritte in questo modo hanno il vantaggio di avere la stessa forma come nella geometria euclidea (§ 6). È chiaro infatti dalle (IX) che il determinante (50) è il determinante dei nove coseni delle direzioni principali di una curva Γ_1 dello spazio euclideo di cui s sia l' arco e le due curvature $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{T_1}$, abbiano i valori

$$(51)\qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho}\,,\quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{R}\,.$$

Similmente per le (10*), $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)$, $(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$ $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ dànno i rispettivi coseni di direzione della tangente, normale principale e binormale di una seconda curva Γ_2 dello spazio euclideo, di cui l' arco sia ancora s e le curvature $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{T_2}$ vengono date da

$$(52)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\,,\quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T} + \frac{1}{R}\,.$$

Si ha quindi il notevole risultato del FUBINI :

Ogni curva C *dello spazio ellittico individua una coppia di curve* (Γ_1, Γ_2) *dello spazio euclideo che hanno eguale arco ed eguale flessione della curva* C *e*

le cui torsioni $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$ *sono eguali a quella di* C *aumentata o diminuita della costante* $\frac{1}{R}$; *i coseni delle direzioni principali di* Γ_1, Γ_2 *sono i parametri di scorrimento destrorsi e sinistrorsi degli spigoli del triedro principale di* C.

Inversamente si vedrà subito che ogni coppia (Γ_1, Γ_2) di curve dello spazio euclideo che ad eguale arco abbiano eguale flessione, e le cui torsioni differiscono di una quantità costante $\frac{2}{R}$, individuano una curva corrispondente C nello spazio ellittico di curvatura $K = \frac{1}{R^2}$.

Si osservi che se, mantenendo fissa nello spazio euclideo una delle due curve p. e Γ_1, si assoggetta l'altra Γ_2 ad un qualunque movimento, che possiamo limitare ad una rotazione attorno all'origine, la curva C nello spazio ellittico subisce uno scorrimento destrorso giacchè (t_i, n_i, b_i) restano fissi. Similmente ad una rotazione di Γ_2 attorno all'origine corrisponde uno scorrimento sinistrorso di C. E se Γ_1, Γ_2 subiscono due movimenti indipendenti, la C subirà un movimento decomposto in due scorrimenti (Cf. § 466).

Come caso particolare si osservi che se la curva C dello spazio ellittico è una curva piana qualunque, le due corrispondenti Γ_1, Γ_2 dello spazio euclideo sono inversamente congruenti, con torsioni *costanti* eguali e di segno contrario.

§ 470.

Applicazione alle curve di torsione costante.

Prendiamo una qualunque rigata di CLIFFORD (a generatrici parallele). Sappiamo che la superficie è a curvatura nulla e le trajettorie ortogonali delle sue generatrici sono geodetiche della superficie, congruenti per scorrimento. Queste geodetiche hanno dunque per binormali comuni precisamente le generatrici (parallele) della rigata. Se il parallelismo è destrorso, i parametri di scorrimento destrorsi b_1, b_2, b_3 della binormale sono costanti e la terza delle (X) dimostra che si ha

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R} ;$$

nel caso invece di parallelismo sinistrorso si avrà dalla (IX*)

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{R}.$$

Inversamente se per una curva C dello spazio ellittico la torsione è costante $= \pm \frac{1}{R}$ segue dalle (IX), (IX*) che sono costanti b_1, b_2, b_3 ovvero $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$, secondo che vale il segno superiore o inferiore; per ciò le binormali della curva sono parallele nel senso destrorso ovvero nel sinistrorso. Abbiamo dunque il teorema:

In ogni rigata di CLIFFORD *a generatrici parallele le trajettorie ortogonali delle generatrici sono curve (congruenti) a torsione costante* $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ *secondo che il parallelismo è destrorso o sinistrorso. Viceversa ogni curva colla torsione costante* $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ *ha le sue binormali parallele nel senso destrorso o sinistrorso e la rigata delle binormali è una rigata di* CLIFFORD.

Segue di qui che, per avere la più generale curva a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ dello spazio ellittico, basta prendere ad arbitrio una rigata di CLIFFORD e determinare (con una quadratura) le trajettorie ortogonali delle generatrici.

Dimostriamo ora che le rigate di CLIFFORD posseggono un secondo sistema di curva a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ quello delle *asintotiche curvilinee*, le quali sono manifestamente congruenti fra loro per lo scorrimento stesso. Per questo proviamo che se per *una curva* C *dello spazio ellittico le parallele destrorse condotte pei punti di* C *ad una retta fissa giacciono nei rispettivi piani osculatori la curva* C *ha la torsione* $\frac{1}{T} = \frac{1}{R}$. I coseni di direzione delle supposte rette parallele tirate pei punti di C nei piani osculatori saranno

$$\alpha_0 \cos\sigma + \xi_0 \operatorname{sen}\sigma\,,\quad \alpha_1 \cos\sigma + \xi_1 \operatorname{sen}\sigma\,,\quad \alpha_2 \cos\sigma + \xi_2 \operatorname{sen}\sigma,\quad \alpha_3 \cos\sigma + \xi_3 \operatorname{sen}\sigma$$

dove $\sigma = \sigma(s)$ è l'angolo d'inclinazione sulla curva. Ma allora i parametri di scorrimento destrorsi di queste rette, diciamo B_1, B_2, B_3 saranno

$$B_i = \cos\sigma\, t_i + \operatorname{sen}\sigma\, n_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dovendo le B_i ridursi a costanti sarà $\frac{dB_i}{ds} = 0$, indi per le (X)

$$-\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho}\left(\rho\frac{d\sigma}{ds}+1\right)t_i+\frac{\cos\sigma}{\rho}\left(\rho\frac{d\sigma}{ds}+1\right)n_i-\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{R}\right)b_i=0 \quad (i=1,2,3),$$

e per ciò avendosi

$$(\alpha) \qquad \frac{d\sigma}{ds}=-\frac{1}{\rho}\,,\quad \frac{1}{T}-\frac{1}{R}=0$$

dalla seconda formola risulta l'asserto.

Le rigate delle binormali delle curve a torsione costante $\frac{1}{T}=\pm\frac{1}{R}$ sono, come si è visto, le rigate di CLIFFORD, e come tali applicabili sopra una superficie di rotazione, p. e sulla superficie di CLIFFORD. Più in generale dimostriamo che: *Nello spazio ellittico ed iperbolico (come nell'euclideo) le rigate delle binormali delle curve colla medesima torsione costante sono applicabili l'una sull'altra e sulla stessa superficie di rotazione, le generatrici distendendosi sui meridiani.*

Consideriamo infatti, dapprima in geometria ellittica, una curva C qualunque e la rigata S delle sue binormali e per individuare i punti di S prendiamo a coordinate curvilinee: 1° l'arco v della C, 2° il tratto u che intercede sopra una generatrice (binormale) fra il punto (x_i) della curva e il punto $(\bar{x}_i)$ che si considera sulla S. Le equazioni parametriche della S sono

$$\bar{x}_i = x_i\cos\left(\frac{u}{R}\right)+\lambda_i\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right),$$

da cui derivando rapporto a u e v coll'osservare le formole (IX) del FRENET.

$$\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial u}=\frac{1}{R}\left\{-x_i\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right)+\lambda_i\cos\left(\frac{u}{R}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial\bar{x}_i}{dv}=\frac{1}{R}\left\{\alpha_i\cos\left(\frac{u}{R}\right)+\frac{R}{T}\xi_i\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right)\right\}.$$

Di qui per il ds^2 della superficie dato da

$$ds^2 = R^2\sum_i d\bar{x}_i^2$$

si trae

$$(52^*) \qquad ds^2 = du^2+\left\{\cos^2\left(\frac{u}{R}\right)+\frac{R^2}{T^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{R}\right)\right\}dv^2\,,$$

e analogamente nel caso iperbolico

$$ds^2 = du^2 + \left\{\cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{R^2}{T^2}\,\mathrm{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)\right\} dv^2 .$$

Come si vede in ogni caso questo ds^2 è indipendente dalla configurazione della curva, purchè $\frac{1}{T}$ rimanga la stessa funzione di u. E in particolare se $\frac{1}{T} = \text{cost.}^{te}$, questo ds^2 appartiene ad una superficie di rotazione di cui le $v = \text{cost.}^{te}$ sono meridiani.

§ 471.

Eliche in geometria ellittica. — Curve di Bertrand.

Terminiamo questo Capitolo con alcune altre semplici applicazioni delle formole del FRENET. *a*) In primo luogo studiamo, in geometria ellittica, le relazioni che intercedono fra una curva C e la sua curva *polare* C′ rispetto all'assoluto, cioè la curva i cui punti sono poli dei piani osculatori di C e che ha quindi per piani osculatori i piani polari dei punti di C. Indicando con accenti gli elementi di C′ si ha

$$x'_i = \lambda_i ,$$

da cui derivando colle (IX)

$$\frac{dx'_i}{ds} = \frac{\xi_i}{T} ,$$

indi

$$\left(\frac{ds'^2}{ds}\right)^2 = \frac{R^2}{T^2} , \quad ds' = \frac{R}{T}\,ds ,$$

dalla quale formola risulta intanto che : *tutte e sole le curve a torsione costante* $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ *corrispondono per eguaglianza d'arco alle loro polari.*

Proseguendo in generale le derivazioni, si ottengono le formole

$$(53) \qquad \begin{cases} x'_i = \lambda_i , \ \alpha'_i = \xi_i , \ \xi'_i = -\alpha_i , \ \lambda'_i = -x_i \\ ds' = \dfrac{R}{T}\,ds , \ \dfrac{1}{\rho'} = \dfrac{T}{R}\cdot\dfrac{1}{\rho} , \ \dfrac{1}{T\,T'} = \dfrac{1}{R^2} , \end{cases}$$

che pongono in evidenza le proprietà metriche involutorie delle due curve.

b) Sopra una rigata a curvatura nulla consideriamo una qualunque *geodetica* che diremo un'elica della geometria ellittica. Una tale curva è *caratterizzata* dalla proprietà di tagliare sotto angolo costante σ una serie ∞^1 di rette parallele, proprietà che si traduce subito in una relazione lineare fra le due curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$. Supponiamo infatti che dai punti di una curva C parta una serie di rette parallele p. e nel senso destrorso, tagliate sotto angolo costante σ dalla curva. Siccome C è certamente geodetica della rigata a curvatura nulla generata, queste rette sono normali alla normale principale di C e i loro coseni di direzione possono quindi assumersi dati da

$$\alpha_i \cos\sigma + \lambda \operatorname{sen}\sigma \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

conseguentemente i loro parametri di scorrimento destrorsi saranno

$$B_i = t_i \cos\sigma + b_i \operatorname{sen}\sigma \quad (i, = 1, 2, 3),$$

indi per le (X)

$$\frac{dB_i}{ds} = \left(\frac{\cos\sigma}{\rho} + \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right)\right) n_i .$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè B_1, B_2, B_3 risultino costanti è dunque

$$\frac{\cos\sigma}{\rho} + \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{R}\right) = 0, \tag{54}$$

e questa equazione intrinseca ovvero l'altra

$$\frac{\cos\sigma}{\rho} + \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{R}\right) = 0 \tag{54*}$$

pel caso sinistrorso, caratterizza dunque le eliche della geometria ellittica. (*) Dalle (53) risulta poi subito che: *le curve polari delle eliche sono nuovamente eliche*

(*) Si può anche scrivere, per migliore ravvicinamento col caso euclideo

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{T} \pm \frac{1}{R}} = \text{costte},$$

dove al denominatore figura la torsione *ridotta* destrorsa o sinistrorsa della curva.

c) Le eliche sono casi particolari delle *curve di* BERTRAND caratterizzate dalla proprietà di avere le due curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ legate fra loro linearmente. Come nel caso euclideo, si arriva alle curve di BERTRAND cercando le coppie di curve (C, $\overline{C}$) aventi a comune le normali principali. Se k è il tratto, necessariamente costante, delle normali principali compreso fra le due curve, indicando con un soprassegno gli elementi di $\overline{C}$ avremo :

$$\bar{x}_i = x_i \cos\left(\frac{k}{R}\right) + \xi_i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{R}\right) \tag{55}$$

$$\pm\,\bar{\xi}_i = x_i \operatorname{sen}\left(\frac{k}{R}\right) - \xi_i \cos\left(\frac{k}{R}\right) \tag{55*}$$

Derivando le (55) colle formole (IX) di FRENET risulta

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = \alpha_i \left\{\frac{1}{R}\cos\left(\frac{k}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{R}\right)\right\} - \lambda_i \frac{1}{T}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{R}\right)$$

e ponèndo

$$\cos\sigma = \frac{\frac{1}{R}\cos\left(\frac{k}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\frac{k}{R}}{\sqrt{\left\{\frac{1}{R}\cos\left(\frac{k}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\frac{k}{\rho}\right\}^2 + \frac{1}{T^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k}{R}\right)}}, \tag{56}$$

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{-\frac{1}{T}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{R}\right)}{\sqrt{\left\{\frac{1}{R}\cos\left(\frac{k}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}.\frac{k}{\rho}\right\}^2 + \frac{1}{T^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k}{R}\right)}}$$

ne viene

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i \cos\sigma + \lambda_i \operatorname{sen}\sigma \tag{57}$$

$$\frac{\overline{ds}}{ds} = R\sqrt{\left\{\frac{1}{R}\cos\left(\frac{k}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\rho}\right)\right\}^2 + \frac{1}{T^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k}{R}\right)}.$$

Ma derivando le (57) rapporto ad s colle (IX) ed osservando le (55*) ne risulta subito che σ è costante, cioè *i due piani osculatori delle curve* (C, $\overline{C}$) *in punti corrispondenti fanno fra loro l'angolo costante* σ.

Ora segue dalle (56) che le due curvature di C sono legate dalla relazione lineare

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} - \frac{\cos\sigma}{T} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{R}\cot\left(\frac{k}{R}\right); \tag{58}$$

e viceversa da questa, retrocedendo, si deduce che la $\overline{C}$ ha a comune con C le normali principali (Cf. § 27). Anche qui una coppia di curve (C, $\overline{C}$) aventi a comune le normali principali si dirà una coppia di *curve coniugate del* BERTRAND. Ed è facile dimostrare che sussiste pure in questo caso la proposizione di LAGUERRE e di BIOCHE: *Se pei punti della curva* C *si conducono le normali ai piani osculatori di* $\overline{C}$, *la rigata che si forma è applicabile sull'iperboloide rotondo, e la curva* C *è la deformata del circolo di gola.*

Per questo si calcoli l'elemento lineare dS della detta rigata assumendo a parametro v l'arco s della curva C, a parametro u il tratto di generatrice misurato a partire da C. Siccome, per le formole precedenti, le coordinate $\overline{\lambda_i}$ del piano osculatore della coniugata $\overline{C}$ sono

$$\overline{\lambda_i} = \alpha_i \operatorname{sen}\sigma - \lambda_i \cos\sigma,$$

indicando con X_i ($i = 0, 1, 2, 3$) le coordinate di un punto generico della rigata avremo

$$X_i = x_i \cos\left(\frac{u}{R}\right) + (\alpha_i \operatorname{sen}\sigma - \lambda_i \cos\sigma)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right)$$

e derivando colle formole di FRENET e tenendo conto della (58), viene

$$\begin{cases} R\dfrac{\partial X_i}{\partial u} = -x_i \operatorname{sen}\left(\dfrac{u}{R}\right) + \alpha_i \operatorname{sen}\sigma\cos\left(\dfrac{u}{R}\right) - \lambda_i \cos\sigma\cos\dfrac{u}{R} \\ R\dfrac{\partial X_i}{\partial v} = -x_i \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\left(\dfrac{u}{R}\right) + \alpha_i \cos\left(\dfrac{u}{R}\right) + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\left(\dfrac{u}{R}\right)\cot\left(\dfrac{k}{R}\right).\ \xi_i \end{cases}$$

e quindi

$$dS^2 = du^2 + 2\operatorname{sen}\sigma\, du\, dv + \left[\cos^2\left(\frac{u}{R}\right) + \frac{\operatorname{sen}^2\sigma\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{u}{R}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{k}{R}\right)}\right] dv^2.$$

In questa formola pel dS^2 non vi è più traccia della particolare curva di BERTRAND della classe (58), sicchè variando la curva C, tutte le rigate

ottenute risultano applicabili. Se in particolare facciamo nella (58) $\frac{1}{T} = 0$, ne risulta $\rho = R \operatorname{tgh}\left(\frac{k}{R}\right)$, cioè la curva C si riduce ad un circolo di raggio k, indi la rigata all' iperboloide rotondo ad una falda avente questo circolo per circolo di gola.

In modo perfettamente analogo si stabilirebbero le proprietà corrispondenti in geometria iperbolica facendo uso delle formole (XI*) del Frenet.

d) Da ultimo, ritornando al caso ellittico, osserviamo due casi particolari notevoli di coppie di curve coniugate di Bertrand che si hanno rispettivamente supponendo $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ovvero $k = \frac{\pi R}{2}$. Nel primo caso si hanno le curve a flessione costante che hanno per coniugata la curva luogo dei centri di curvatura ; nel secondo caso le curve che hanno costante il rapporto delle due curvature, e le curve coniugate distano fra loro di un quadrante. Le due specie di curve come risulta dalle (53), sono polari l'una dell'altra.

Una costruzione geometrica semplicissima conduce da una curva C a flessione costante alla coppia di curve coniugate con $\frac{T}{\rho} = \text{cost}^{te}$. Si riporti a partire da ogni punto M della curva C, sulla tangente e sulla binormale, un segmento eguale ad un quadrante $\frac{\pi R}{2}$; le due curve luogo degli estremi formano una coppia di curve coniugate della seconda specie $\left(\frac{T}{\rho} = \text{cost}^{te}\right)$.

CAPITOLO XXVII.

Le ipersuperficie negli spazî di curvatura costante.

Formole per le ipersuperficie nello spazio euclideo. - Indeformabilità delle ipersuperficie supposte flessibili. - Linee di curvatura e ipersuperficie evolute. - Rappresentazione ipersferica e coordinate tangenziali. - Ipersuperficie normali con data rappresentazione ipersferica. - Ipersuperficie negli spazî di curvatura costante. - Le superficie in geometria ellittica ed iperbolica a tre dimensioni. - Sistemi coniugati e linee asintotiche. - Superficie riferite alle loro linee di curvatura. Le due falde dell'evoluta e i teoremi di WEINGARTEN. - Superficie riferite alle loro asintotiche. - Determinazione di tutte le superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico come superficie di scorrimento. - La doppia rappresentazione sferica nei due casi. - Superficie a curvatura nulla e superficie a curvatura media costante $\pm\frac{1}{R}$ in metrica iperbolica. - Formole per uno spazio rappresentabile conformemente sull'euclideo. - Le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche nelle due geometrie.

§ 472.

Le ipersuperficie nello spazio Euclideo.

Abbiamo stabilito nel Cap. XXV (§ 441 s. s.) le formole fondamentali per le ipersuperficie negli spazî curvi qualunque. Nel presente Capitolo andremo a sviluppare maggiormente i risultati pel caso che lo spazio ambiente sia a curvatura costante, con un numero qualunque di dimensioni, per fermarci poi più particolarmente sulla estensione dei principali teoremi relativi alle superficie dello spazio ordinario alla geometria ellittica ed iperbolica a tre dimensioni.

Cominciamo la nostra ricerca dal caso delle ipersuperficie V_n immerse nello spazio euclideo S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni. Stabiliamo in S_{n+1} un sistema di coordinate cartesiane ortogonali

$$x_0, x_1, \ldots x_n,$$

scrivendo il ds^2 sotto la forma

$$ds = \sum_{i}^{0..n} dx_i^2 ,$$

onde la distanza D fra due punti (x_i) (x'_i) sarà data da

$$D^2 = \sum_i (x_i - x_i)^2.$$

Colle notazioni del Cap. XXV, siano

$$\sum_{i,k}^{1..n} b_{ik}\, du_i\, du_k\,, \quad \sum_{i,k}^{1..n} \Omega_{ik}\, du_i\, du_k$$

le due forme fondamentali dell' ipersuperficie V_n. I coefficienti b_{ik}, Ω_{ik} saranno legati fra loro dalle equazioni (III*), (IV*) di GAUSS e CODAZZI (pag. 454) ove si faccia $K_0 = 0$, e cioè dalle :

$$(I) \qquad (\alpha\delta, \beta\gamma)_b = \Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta}$$

$$(II) \qquad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\beta t} = 0$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots n).$$

Note le due forme fondamentali della V_n, se denotiamo al solito con $X_0, X_1, \ldots X_n$ i coseni di direzione della normale all'ipersuperficie, espressi per le variabili u_i, qualunque coppia $(x_\nu\,,\, X_\nu)$, per $\nu = 0, 1, 2, \ldots b$, dovrà soddisfare alle equazioni fondamentali (I), (II) pag. 452

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} rs \\ l \end{matrix} \right\}_b \frac{\partial x}{\partial u_l} + \Omega_{rs}\, X$$

$$(B) \qquad \frac{\partial X}{\partial u_s} = - \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda\mu}\, \Omega_{\mu\lambda}\, \frac{\partial x}{\partial u_\lambda}\,.$$

Notisi poi che le formole pel calcolo dei coseni X e dei coefficienti Ω_{rs}, q ando siano date le equazioni parametriche di V_n, sono (§ 442)

$$(C) \qquad \sum_\nu X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n), \quad \sum_\nu X_\nu^2 = 1$$

$$(D) \qquad \Omega_{rs} = \sum_\nu X_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r\, \partial u_s} = - \sum_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial u_r} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_s}\,.$$

Nel caso che ci occupa andiamo maggiormente a precisare quanto già si è detto al § 442, e cioè che, se i coefficienti b_{rs}, Ω_{rs} soddisfano alle equazioni

(I), (II) di GAUSS e CODAZZI, il sistema differenziale (A), (B) per x, X è illimitatamente integrabile. Per questo riduciamolo al 1° ordine introducendo, come altrettante nuove funzioni incognite, le derivate prime delle x ponendo

$$\frac{\partial x}{\partial u_r} = p^{(r)},$$

e considerando (A), (B) quale sistema ai differenziali totali lineari ed omogeneo per le $n+1$ funzioni incognite : $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(n)}$, X

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} dp^{(r)} = \sum_s \left(\sum_l \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ l \end{matrix} \right\}_b p^{(l)} + \Omega_{rs}\, \mathrm{X} \right) du_s \\ d\,\mathrm{X} = -\sum_s \left(\sum_{\lambda,\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \Omega_{\lambda s}\, p^{(\mu)} \right) du_s . \end{cases}$$

Se si formano le condizioni d'integrabilità per questo sistema, tenendo conto delle equazioni (I) (II) e delle (α) stesse, (*) si trova facilmente che esse sono identicamente soddisfatte.

Ciò premesso, prendiamo $n+1$ diversi sistemi di soluzioni

$$p_\nu^{(1)}, p_\nu^{(2)} \ldots p_\nu^{(n)}; \mathrm{X}_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

individuati rispettivamente dai loro valori inziali, presi ad arbitrio. Pongasi allora

$$\beta_{rs} = \mathrm{S}_\nu\, p_\nu^{(r)}\, p_\nu^{(s)} - b_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \ldots n); \quad \alpha_r = \mathrm{S}_\nu\, p_\nu^{(r)}\, \mathrm{X}_\nu \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

$$\gamma = \mathrm{S}_\nu\, \mathrm{X}_\nu^2 - 1 ,$$

e dalle (α) avremo per le $n(n+1)+1$ funzioni $\beta_{rs}\ \alpha_r, \gamma$ il seguente sistema differenziale *lineare ed omogeneo* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_t} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} r\,t \\ l\,l \end{matrix} \right\}_b \beta_{sl} + \sum_l \left\{ \begin{matrix} s\,t \\ l \end{matrix} \right\} \beta_{rl} + \Omega_{rt}\, \alpha_s + \Omega_{st}\, \alpha_r \\ \dfrac{\partial \alpha_r}{\partial u_s} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ l\,l \end{matrix} \right\}_b \alpha_l - \sum_{\lambda\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \Omega_{\lambda s}\, \beta_{r\mu} + \Omega_{rs}\, \gamma \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial u_s} = -2 \sum_{\gamma\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \Omega_{\lambda s}\, \alpha_\mu . \end{cases}$$

(*) Per il calcolo indicato si tengano anche presenti le formole

$$\frac{\partial \mathrm{B}_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = -\sum_t \left\{ \begin{matrix} l\,t \\ \mu \end{matrix} \right\}_b \mathrm{B}_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} l\,t \\ \lambda \end{matrix} \right\} \mathrm{B}_{\mu t} .$$

Basta dunqie scegliere i valori *iniziali*, diciamo per $u_i = u_i^{(0)}$, in guisa che siano nulle inizialmente le

$$\beta_{rs} \ , \ \alpha_r \ , \ \gamma \ ,$$

e queste risulteranno nulle per tutti i valori delle u_s (*). Dopo ciò risulterà *per tutti i valori delle* u_i

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\nu} p_\nu^{(r)} p_\nu^{(s)} = b_{rs} \ , \quad \mathrm{S}\, p_\nu^{(r)} \mathrm{X}_\nu = 0 \ , \quad \mathop{\mathrm{S}}_{\nu} \mathrm{X}_\nu^2 = 1.$$

Ed ora poichè, in forza delle (α), le espressioni

$$\sum_r p_\nu^{(r)} du_r \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

sono altrettanti differenziali esatti, poniamo

$$x_\nu = \int \sum_i p_\nu^{(r)} du_r \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

e consideriamo queste come equazioni parametriche di un'ipersuperficie V_n Si vede subito che questa V_n ha precisamente per forme fondamentali le due forme assegnate

$$\sum_{r,s} b_{rs} \, du_r \, du_s \ , \qquad \sum_{r,s} \Omega_{rs} \, du_r \, du_s \ .$$

Dimostrata così l'effettiva esistenza dell' ipersuperficie V_n, dalla dimostrazione stessa risulta anche l'unicità, poichè l'arbitrarietà che resta nella scelta del determinante ortogonale iniziale (e delle costanti additive nelle x_r) corrisponde precisamente alla libertà di muovere comunque l' ipersuperficie V_n nello spazio S_{n+1}. Concludiamo quindi :

(*) Per vedere con maggiore chiarezza come possono effettivamente scegliersi questi valori iniziali, si renda p. e con una sostituzione lineare sulle u

$$b_{rs} = \varepsilon_{rs} \qquad (\text{per } u_i = u_i^{(0)})$$

e allora basterà scegliere come valori iniziali delle

$$p_\nu^{(1)} \ p_\nu^{(2)} \ p_\nu^{(n)} \ \mathrm{X}_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

i coefficienti di una sostituzione ortogonale in $n+1$ variabili.

Affinchè a due date forme quadratiche fondamentali

$$\sum_{r,s}^{1..n} b_{rs}\, du_r\, du_s\ ,\quad \sum_{r,s}^{1..n} \Omega_{rs}\, du_r\, du_s$$

corrisponda un'ipersuperficie V_n *nello spazio euclideo* S_{n+1} *è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le equazioni* (I), (II) *di* GAUSS *e* CODAZZI; *l'ipersuperficie ne risulta individuata a meno di movimenti nello spazio.*

§ 473.

Indeformabilità delle ipersuperficie in generale.

Nel risultato ora conseguito appare perfetta l'analogia colle proprietà delle superficie nello spazio ordinario. Ma, appena il numero delle dimensioni dello spazio supera 3, la moltiplicità di vincoli fra i coefficienti b_{rs}, Ω_{rs}, delle due forme fondamentali, imposti dalle equazioni di GAUSS e CODAZZI, dà luogo a circostanze affatto nuove e a profonde differenze che ci conviene ora esaminare.

Dimostriamo in primo luogo : *Un'ipersuperficie* V_n *in* S_{n+1} *è già in generale pienamente determinata di forma, appena* $n > 2$, *quando sia data la sua prima forma fondamentale* $\Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s$.

A causa delle equazoni (I) di GAUSS, appena data la prima forma fondamentale, si conoscono *tutti i minori di* (*secondo ordine*) nel discriminante

$$\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \dots & \Omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \dots & \Omega_{nn} \end{vmatrix}$$

e noi deduciamo la verità della proposizione enunciata dal seguente lemma sui determinanti :

Se due determinanti d'ordine $n > 2$

$$|a_{rs}|\quad |a'_{rs}|,$$

uno almeno dei quali abbia caratteristica $\rho \geqq 3$, *hanno eguali tutti i minori corrispondenti di secondo ordine, gli elementi* a'_{rs} *dell'uno saranno eguali ai*

corrispondenti a_{rs} dell'altro, salvo al massimo un cangiamento simultaneo di segno.

Per dimostrare questo procediamo con KILLING (*) nel modo seguente.

Supposto p. e. il determinante $|a_{rs}|$ di caratteristica $\rho > 2$, esso avrà almeno un minore del terzo ordine non nullo, quindi anche qualcuno del secondo, che scambiando opportunamente gli indici possiamo supporre sia p. e.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pel noto teorema di KRONECKER, fra i minori del terzo ordine non nulli in $|a_{rs}|$ ve ne sarà uno almeno che contiene il precedente come minore del secondo e, senza alterare la generalità, possiamo supporre che sia

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Indichiamo con A_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ i minori di secondo ordine in questo determinante di 3° ordine A, e notazioni analoghe teniamo pel corrispondente

$$\mathrm{A}' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Siccome per ipotesi

$$\mathrm{A}'_{ik} = \mathrm{A}_{ik}$$

sarà

$$\mathrm{A}'^2 = \mathrm{A}^2,$$

indi

$$\mathrm{A}' = \varepsilon\,\mathrm{A} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

I determinanti di secondo ordine formati colle A_{ik} sono eguali ai corrispondenti formati colle A'_{ik}, onde, per le relazioni che intercedono fra i minori del secondo ordine del determinante reciproco cogli elementi del primitivo, segue

$$\mathrm{A}'\,a'_{ik} = \mathrm{A}\,a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

(*) *Nicht-Euklidische Raumformen in analytischer Behandlung* (Teubner 1885) pag. 236-237.

$$a'_{ik} = \varepsilon\, a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ora si ha per ipotesi *per qualunque* r :

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{r1} & a'_{r2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{r1} & a_{r2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'_{21} & a'_{22} \\ a'_{r1} & a'_{r2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{r1} & a_{r2} \end{vmatrix},$$

ossia

$$a_{11}(a_{r2} - \varepsilon\, a'_{r2}) - a_{12}(a_{r1} - \varepsilon\, a'_{r1}) = 0$$
$$a_{21}(a_{r2} - \varepsilon\, a'_{r2}) - a_{22}(a_{r2} - \varepsilon\, a'_{r2}) = 0,$$

e siccome $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, ne segue

$$a_{r1} = \varepsilon\, a'_{r1}\,, \quad a_{r2} = \varepsilon\, a'_{r2},$$

ossia

$$a'_{r1} = \varepsilon\, a_{r1}\,, \quad a'_{r2} = \varepsilon\, a_{r2}\,;$$

ed affatto similmente

$$a'_{1r} = \varepsilon\, a_{1r}\,, \quad a'_{2r} = \varepsilon\, a_{2r}\,.$$

Finalmente, essendo r, s due indici qualunque, si ha per ipotesi

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{s1} \\ a'_{r1} & a'_{rs} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1s} \\ a_{r1} & a_{rs} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{1s} \\ a'_{r2} & a'_{rs} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1s} \\ a_{r2} & a_{rs} \end{vmatrix},$$

che per le precedenti si riducono alle

$$a_{11}(a'_{rs} - \varepsilon\, a_{rs}) = 0 \quad a_{12}(a'_{rs} - \varepsilon\, a_{rs}) = 0,$$

dalle quali, non avendosi insieme $a_{11} = a_{12} = 0$, risulta

$$a'_{rs} = \varepsilon\, a_{rs}.$$

Dimostrato così il lemma, segue che se una seconda ipersuperficie V'_n ha a comune colla V_n la prima forma fondamentale, essa ha comune con V_n anche la seconda forma (salvo tutto al più un cangiamento simultaneo di segno nelle Ω_{rs}), e quindi le due ipersuperficie V_n, V'_n saranno congruenti per un movimento nello spazio, ovvero inversamente congruenti. Unico *possibile* caso d'eccezione è quando per la V_n il discriminante della seconda forma abbia caratteristica < 3.

Il significato geometrico di questa condizione si desume facilmente dal § 445. Se nel discriminante $|\Omega_{rs}|$ si annullano tutti i minori del 3° ordine, l'equazione (40) ibid. pag. 460, le cui radici in R dànno i raggi principali di curvatura della V_n si riduce al massimo al secondo ordine, cioè $n-2$ almeno delle curvature principali si annullano. Possiamo dunque enunciare il risultato :

Nello spazio euclideo a più di tre dimensioni ogni ipersuperficie è indeformabile (non può flettersi) ; un'eccezione può presentarsi soltanto nel caso che tutte le curvature principali dell'ipersuperficie, tranne due al più, si annullino.

Sullo studio interessante dei casi *positivi* di ipersuperficie deformabili non vogliamo qui addentrarci. (*)

§ 474.

Le equazioni dell'applicabilità.

Si è visto sopra che la prima forma fondamentale di un'ipersuperficie fissa, in generale, la seconda ; ma vi ha ben di più e cioè che : *nemmeno la prima forma fondamentale può darsi ad arbitrio*, o in altre parole, entro lo spazio euclideo S_{n+1} non può realizzarsi, in generale, un dato $ds^2 = \sum_{r,s}^{1..n} b_{rs}\, du_r\, du_s$ ad n dimensioni. Questo s'intende facilmente dalle discussioni precedenti, poichè i valori delle Ω_{rs}, tratti dalle equazioni (I) di GAUSS, dovranno ancora soddisfare alle equazioni (II) di CODAZZI. Se affrontiamo direttamente il problema di realizzare nello spazio S_{n+1} il dato ds^2 a n variabili u_r, dobbiamo determinare le $n+1$ funzioni inco-

(*) I primi risultati notevoli in questo indirizzo sono quelli ottenuti da SCHUR nel vol. XXVII dei Math. Annalen (1886), che per le ipersuperficie deformabili nell'S_n ridusse il problema all'altro delle superficie nell'S_3 ellittico deformabili in modo continuo *con conservazione di un sistema coniugato.*

Segue la memoria dell'autore. *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili* ecc. (Società dei XL. serie 3.ª Tomo XIII) i cui risultati vennero notevolmente estesi dallo SBRANA.

Più recentemente si sono occupati della questione il BOMPIANI ed il CARTAN, quest'ultimo però senza riferimento ai lavori precedenti.

gnite $x_0, x_1 \ldots x_n$ delle u in guisa che risulti

$$dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = \sum_{r,s} b_{rs}\, du_r\, du_s \,. \quad (*)$$

Ma è facile eliminare n di queste incognite e formare un *sistema differenziale* del 2° ordine a cui deve soddisfare la restante. Per una qualunque di esse x, espressa per le u, la forma differenziale in n variabili

$$(\alpha) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots n} \left(b_{rs} - \frac{\partial x}{\partial u_r} \frac{\partial x}{\partial u_s} \right) du_r\, du_s$$

deve infatti riuscire a curvatura Riemanniana nulla e inoltre *definita positiva* ; e viceversa se ciò accade abbiamo una soluzione del problema (Cf. §§ 133, 134). Trascuriamo pel momento le condizioni (che si traducono in diseguaglianze) perchè la forma (α) sia definita positiva e osserviamo le equazioni differenziali che consistono nell' annullarsi dei relativi simboli Riemanniani a quattro indici, e si traducono in altrettante equazioni del *secondo ordine* a cui deve soddisfare la x. Noi formiamo queste equazioni nel modo più semplice procedendo come al § 133 per l'ordinaria equazione dell' applicabilità. Le equazioni fondamentali (A) pag. 544, coi simboli delle derivate seconde covarianti, si scrivono

$$x_{rs} = \Omega_{rs}\, \mathrm{X},$$

e d'altra parte si ha come nel caso ordinario

$$\mathrm{X} = \sqrt{1 - \Delta_1 x} \,.$$

Questo si prova rendendo p. e nel punto $(u_i^{(0)})$ ove si calcola $\Delta_1 x$

$$b_{ik} = \varepsilon_{ik},$$

come è lecito, dopo di che in $(u_i^{(0)})$ il determinante

$$\left| \frac{\partial x_\nu}{\partial u_1}, \frac{\partial x_\nu}{\partial u^2} \ldots \frac{\partial x_\nu}{\partial u_n}\, \mathrm{X}_\nu \right| \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots n$$

(*) Il numero $\frac{n(n+1)}{2}$ delle condizioni supera (per $n > 2$) il numero delle incognite $n+1$ e il problema è in generale insolubile.

è il deteminante di una sostituzione ortogonale e si ha quindi

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i}\right)^2 = \Delta_1 x_\nu = 1 - X_\nu^2 .$$

Quando dunque sia nota $x = x(u_1, x_2, \ldots u_n)$, i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale si calcolano subito da

$$\Omega_{rs} = \frac{x_{rs}}{\sqrt{1 - \Delta_1 x}} . \tag{2}$$

Questi valori delle Ω_{rs}, introdotti nelle equazioni (I) di GAUSS, dànno luogo alle equazioni cercate che diciamo le *equazioni dell'applicabilità* :

$$x_{\alpha\beta}\, x_{\gamma\delta} - x_{\alpha\gamma}\, x_{\beta\delta} = (\alpha\delta\ ,\ \beta\gamma)_b\ (1 - \Delta_1 x) \tag{III}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots n.$$

Ma se ora introduciamo i medesimi valori nelle equazioni (II) di CODAZZI, facilmente dimostriamo che, supposte soddisfatte le (III), le equazioni di CODAZZI risultano *identicamente soddisfatte.* E infatti abbiamo così :

$$\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{\beta t} = \tag{2*}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta_1 x}} \left(\frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial x_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b x_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b x_{\beta t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - \Delta_1 x} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 x}{\partial u_\gamma} \cdot x_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 x}{\partial u_\beta} x_{\alpha\gamma} \right] \right) .$$

Ora, in virtù delle identità generali stabilite al Cap. II (I pag. 99), abbiamo

$$\frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial x_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix} \right\}_b x_{\gamma t} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix} \right\} x_{\beta t} = \sum_t \{\alpha t, \gamma b\}_b \frac{\partial x}{\partial u_t} =$$

$$= \sum_{t,\delta} B_{t\delta}\, (\alpha\delta\ ,\ \beta\gamma)_b \frac{\partial x}{\partial u_t} = \frac{1}{1 - \Delta_1 x} \sum_{t\delta} (x_{\alpha\gamma}\, x_{\beta\delta} - x_{\alpha\beta}\, x_{\gamma\delta}) \frac{\partial x}{\partial u_t} ,$$

e d'altra parte

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 x}{\partial u_\gamma} = \sum_{t\delta} B_{\delta t}\, x_{\gamma\delta} \frac{\partial x}{\partial u_t} , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 x}{\partial u_\beta} = \sum_{t\delta} B_{t\delta}\, x_{\beta\delta} \frac{\partial x}{\partial u_t} .$$

Sostituendo nela (2*), vediamo che il secondo membro identicamente si annulla, c. d. d.

Affinchè adunque esista nell'S_{n+1} euclideo un'ipersuperficie V_n col dato $ds^2 = \sum_{r,s} b_{rs}\, du_r\, du_s$ è necessario e sufficiente che possegga soluzioni il sistema differenziale del secondo ordine (III) per l'unica funzione incognita x. Questa inoltre, a volere che l'ipersuperficie V_n risulti reale, dovrà anche verificare la diseguaglianza

$$\Delta_1 x < 1.$$

Così è dimostrato indirettamente che le equazioni (III) dell'applicabilità esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma differenziale (α) risulti a curvatura Riemanniana nulla. La diseguaglianza $\Delta_1 x < 1$ basta poi ad assicurare, per quanto precede, che la forma stessa riesce definita positiva.

Insieme alle formole precedenti notiamo ancora quella che assegna il parametro differenziale secondo $\Delta_2 x$:

$$\Delta_2 x = \sum_{r,s} B_{rs}\, x_{rs} = X \sum_{r,s} B_{rs}\, \Omega_{rs}.$$

La somma $\sum_{r,s} B_{rs}\, \Omega_{rs}$, per la (40) § 445, non è altro che la somma delle n curvature principali della V_n

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

e si può quindi scrivere

$$\Delta_2 x = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) X, \tag{3}$$

ovvero

$$\Delta_2 x = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) \sqrt{1 - \Delta_1 x}, \tag{3*}$$

formola che generalizza quella del BELTRAMI al § 82 (1 pag. 219). Si potrebbero scrivere evidentemente formole analoghe per gli altri parametri differenziali secondi espressi per la somma dei prodotti due a due, tre a tre delle curvature principali.

§ 475.

Spazi V_n a curvatura costante entro l'S_{n+1} euclideo. — Ipersfere.

Come esempio delle circostanze generali sopra osservate cerchiamo se nell'S_{n+1} euclideo sono contenuti spazi V_n a n dimensioni (ipersuperficie) che siano a curvatura Riemanniana costante K_0 diversa da zero. Per le formole (I) di GAUSS dovremo avere

$$\Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta} = K_0\,(b_{\alpha\beta}\,b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\delta})\,;$$

ed ora, con una sostituzione lineare sulle u, possiamo rendere

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ik} = \Omega_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k,$$

e le precedenti restano

$$\Omega_{ii}\,\Omega_{kk} = K_0,$$

ovvero, siccome Ω_{ii} dà appunto la curvatura principale $\frac{1}{R_i}$:

$$\frac{1}{R_i}\,\frac{1}{R_k} = K_0 \quad (i \neq k = 1, 2, \ldots n).$$

Ma se supponiamo $n > 2$ da tre di queste

$$\frac{1}{R_i}\,\frac{1}{R_k} = K_0\,, \quad \frac{1}{R_i}\,\frac{1}{R_l} = K_0\,, \quad \frac{1}{R_k}\,\frac{1}{R_l} = K_0$$

si trae

$$\frac{1}{R_i^2} = K_0.$$

Dunque intanto K_0 deve essere positiva poniamo

$$K_0 = \frac{1}{R^2}\,,$$

e se ne dedurrà

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n = \varepsilon\,R \qquad (\varepsilon = \pm 1)\,.$$

Per ciò la seconda forma fondamentale $\sum_{ik} \Omega_{ik}\, du_i\, du_k$ non differisce dalla prima che per il fattore costante $\frac{\varepsilon}{R}$. E allora, se ricorriamo alle formole fondamentali (B) pag. 544, ne deduciamo

$$\frac{\partial X}{\partial u_s} = -\frac{\varepsilon}{R} \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda\mu}\, b_{\mu s}\, \frac{\partial x}{\partial u_\lambda} = -\frac{\varepsilon}{R} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda s}\, \frac{\partial x}{\partial u_\lambda}$$

cioè

$$\frac{\partial x}{\partial u_s} = -\varepsilon R \frac{\partial X}{\partial u_s}.$$

Integrando risulta

$$x_\nu = c_\nu - \varepsilon R X_\nu , \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

essendo le c_ν costanti, onde segue che le ipersuperficie richieste sono unicamente le ipersfere di raggio = R.

$$(x_0 - c_0)^2 + (x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 = R^2.$$

Abbiamo quindi il risultato :

Nello spazio euclideo a più di tre dimensioni non esiste alcuna ipersuperficie che sia uno spazio di curvatura Riemanniana costante negativa ; e di ipersuperficie a curvatura Riemanniana costante positiva $\frac{1}{R^2}$ *esiste soltanto l'ipersfera di raggio* R.

Le ipersfere di raggio R dello spazio euclideo hanno in ogni punto eguali fra di loro e alla costante $\frac{1}{R}$ le n curvature principali. È facile vedere che non esistono altre ipersuperficie che abbiano eguali in ogni punto le n curvature principali ; cioè queste, se ciò accade, sono necessariamente costanti e l'ipersuperficie è un'ipersfera. Se infatti in ogni punto sono eguali le n curvature principali risulta dal § 445 che le Ω_{ik} sono proporzionali alle b_{ik} pel fattore $\frac{1}{R} = \mu$

$$\Omega_{ik} = \mu\, b_{ik} ;$$

ma allora sostituendo nelle equazioni (II) di Codazzi, alle quali identicamente soddisfano le b_{ik}, seguono le relazioni

$$b_{\alpha\beta} \frac{\partial \mu}{\partial u_\gamma} - b_{\alpha\gamma} \frac{\partial \mu}{\partial u_\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta, = 1, 2, \ldots n)$$

e di qui col procedimento stesso che ha servito nel § 437 per la dimostrazione del teorema di SCHUR si trae che $\mu = \frac{1}{R}$ è necessariamente una costante. Ed ora le formole (I) di GAUSS dànno

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)_b = \frac{1}{R^2}(b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\delta})$$

e dimostrano che la nostra ipersuperficie V_n è uno spazio a curvatura Riemanniana costante positiva $= \frac{1}{R^2}$, ed è quindi un'ipersfera di raggio R.

§ 476.

Linee di curvatura e ipersuperficie evoluta.

Riprendiamo ora, pel caso euclideo, lo studio delle proprietà delle linee di curvatura di un'ipersuperficie. In questo caso le linee di curvatura sono suscettibili di una seconda definizione, che è la generalizzazione di quella da cui siamo partiti per lo spazio ordinario (§ 70): *Una linea tracciata sopra un'ipersuperficie* V_n *nello spazio* S_{n+1} *euclideo è linea di curvatura se le normali all'ipersuperficie lungo la linea risultano tangenti ad una curva nello spazio ; il valore (algebrico) del segmento che intercede fra il piede della normale ed il punto ove questa tocca la curva rappresenta il corrispondente raggio principale di curvatura.*

Supponiamo sulla ipersuperficie V_n una linea L a cui appartenga l'enunciata proprietà, ed essendo M il piede della normale sopra L, ed m il punto di contatto della normale colla curva C inviluppo delle normali lungo L, poniamo

$$\rho = \overline{m\,\mathrm{M}}\ ,$$

assegnando dunque a ρ il valore positivo o negativo secondo che la direzione da m verso M procede nel senso positivo o negativo della normale. Il punto m si dirà il relativo *centro principale* di curvatura.

Procedendo precisamente come nel caso ordinario (I pag. 186), troviamo che una tale linea L è caratterizzata dalle equazioni

$$dx_r = \rho\, d\,\mathrm{X}_r \quad (r = 0, 1, 2, \ldots n),$$

i differenziali essendo presi lungo L. Se scriviamo queste equazioni in coordinate curvilinee u_i

$$\sum_s \frac{\partial x_r}{\partial u_s} du_s = \rho \sum_s \frac{\partial X_s}{\partial u_s} du_s ,$$

indi le moltiplichiamo per $\frac{\partial x}{\partial u_k}$ e sommiamo rispetto a r, osservando che

$$S_r \frac{\partial x_r}{\partial u_s} \frac{\partial x_r}{\partial u_k} = b_{rk} , \quad S_r \frac{\partial X_r}{\partial u_s} \frac{\partial x_r}{\partial u_k} = -\Omega_{rk} ,$$

otteniamo le equazioni perfettamente equivalenti

$$\sum_s (b_{ks} + \rho \Omega_{ks}) du_s = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

che coincidono colle (40*) § 445 (pag. 463), ove si faccia $\rho = -R$, e questo dimostra il teorema enunciato. Osserviamo poi che, sopra ogni normale all'ipersuperficie V_n, avremo da considerare gli n *centri principali di curvatura* $m_1, m_2 \ldots m_n$, il cui luogo, composto di n falde, diciamo l'*ipersuperficie evoluta*. Le considerazioni geometriche al principio del Cap. IX sono immediatamente estendibili al caso di un numero qualunque di dimensioni. Ne risulta che sopra ciascuna falda Σ_i dell'ipersuperficie evoluta, corrispondente al raggio principale ρ_i, le linee inviluppate dalle normali dell'ipersuperficie primitiva lungo una linea di curvatura corrispondente sono *geodetiche* di Σ_i ed esse ammettono in Σ_i una serie di varietà ad $n - 1$ dimensioni ortogonali, varietà che hanno per equazione $\rho_i = \text{cost}^{te}$. La verifica analitica di queste proprietà si fa semplicemente (Cf. § 157). Prendiamo infatti a linee coordinate (u_1) sopra V_n le linee di curvatura di un sistema e sia ρ_1 il corrispondente raggio principale di curvatura. Se con $\bar{x}_r$ indichiamo le coordinate del relativo centro di curvatura avremo

$$\bar{x}_r = x_r - \rho_1 X_r ,$$

ed essendo per ipotesi

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_1} = \rho_1 \frac{\partial X_r}{\partial u_2} ,$$

ne verrà

$$\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial u_1} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} X_r , \quad \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial u_s} = \frac{\partial x_r}{\partial u_s} - \rho_1 \frac{\partial X_r}{\partial u_s} - \frac{\partial \rho_1}{\partial u_s} X_r$$

$$(s = 2, 3, \ldots n)$$

Indicando dunque con b_{rs} i coefficienti del $d\bar{s}^2$ per la falda Σ_1 dell' evoluta, ne deduciamo

$$\bar{b}_{11} = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_1}\right)^2 \quad \bar{b}_{1s} = \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial u_s}$$

$$\bar{b}_{rs} = \frac{\partial \rho_1}{\partial u_r}\frac{\partial \rho_1}{\partial u_s} + \mathrm{S}_r\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_r} - \rho_1\frac{\partial \mathrm{X}_r}{\partial u_r}\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_s} - \rho_1\frac{\partial \mathrm{X}_r}{\partial u_s}\right)$$

$$(r, s = 2, 3, \ldots n),$$

e per ciò

$$d\bar{s}^2 = d\rho_1^2 + \sum_{r,s}^{2\ldots n} \alpha_{rs}\, du_r\, du_s ,$$

le α_{rs} essendo funzioni di $u_1, u_2 \ldots u_n$. Questo $d\bar{s}^2$ ha così la forma geodetica (§ 432) e si vede che sulla Σ_1 le varietà $\rho_1 =$ cost.te sono geodeticamente parallele ed hanno per trajettorie ortogonali le linee (u_1), le quali sono dunque geodetiche sopra Σ_1, c. d. d.

Inversamente, tracciando ad arbitrio entro un'ipersuperficie V_n di S_{n+1} un sistema ∞^1 di varietà $n-1$ dimensioni geodeticamente parallele, se si tirano in S_{n+1} le tangenti alle geodetiche ortogonali alle dette varietà, queste tangenti riusciranno normali ad una serie d'ipersuperficie (parallele) Σ_n, ciascuna delle quali avrà dunque per una falda dell'evoluta la V_n data.

§ 477.

Rappresentazione ipersferica delle ipersuperficie.

Ci proponiamo ora di estendere allo spazio euclideo a più dimensioni la teoria della ordinaria rappresentazione sferica di GAUSS (Cap. V), nella qual cosa basterà limitarsi alla generalizzazione delle formole fondamentali.

Data un'ipersuperficie V_n in S_{n+1}, consideriamo l'ipersfera

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

col centro nell'origine e di raggio $= 1$, e preso un punto $\mathrm{M} = (x_0\, x_1 \ldots x_n)$ sopra V_n tiriamo per l'origine il raggio dell'ipersfera parallelo alla normale (X) in M. Questo raggio incontrerà l'ipersfera nel punto M′ di coordinate

$$x'_i = \mathrm{X}_i \ (i = 0, 1, 2 \ldots n),$$

e riguarderemo M′ quale immagine sull' ipersfera del punto M di V_n. Se M si muove su V_n, M′ si muoverà sull'ipersfera descrivendo l'immagine di V_n. Ma affinchè quest'immagine abbia lo stesso numero n di dimensioni occorre escludere il caso che una o più delle curvature principali di V_n si annullino; poichè il numero delle dimensioni dell'immagine ipersferica è $< n$ solo quando le funzioni $X_i\ (u_1, u_2 \dots u_n)$ possono esprimersi per meno di n variabili. E allora, se cangiamo le variabili in modo che p. e. le X_i siano indipendenti da u_n, si annullano tutte le Ω_{rn} $(r = 1, 2, \dots n)$ e per ciò la (40) pag. 460 ha almeno una radice R infinita. Supponiamo dunque che *l'ipersuperficie* V_n, *di cui facciamo la rappresentazione ipersferica, abbia tutte le curvature principali diverse da zero.*

Indichiamo ora con

$$ds'^2 = \sum_{r,s} b'_{rs}\, du_r\, du_s \tag{4}$$

il ds^2 dell'immagine ipersferica di V_n, ponendo cioè

$$b'_{rs} = \mathrm{S}_{\nu} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_r} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_s} . \tag{5}$$

La forma quadratica (4) si dirà la *terza forma fondamentale* dell' ipersuperficie V_n ; il suo discriminante $| b'_{rs} |$ è nelle nostre ipotesi diverso da zero, come quello della prima, perchè esso eguaglia appunto il quadrato della matrice

$$\left| \frac{\partial X_\nu}{\partial u_1} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_2} \dots \frac{\partial X_\nu}{\partial u_n} \right| \quad \nu = 0.\ 1, 2, \dots n ,$$

la quale ha caratteristica n.

Cerchiamo le relazioni che legano questa terza forma fondamentale alle altre due, per la qual cosa sostituendo nel secondo membro della (5) i valori di $\frac{\partial X_\nu}{\partial u_r}$, $\frac{\partial X_\nu}{\partial u_s}$ tratti dalle (B) pag. 544 deduciamo

$$b'_{rs} = \mathrm{S}_{\nu} \left(\sum_{\lambda\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \Omega_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} \sum_{\lambda'\mu'} \mathrm{B}_{\lambda'\mu'}\, \Omega_{\mu' s} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_{\lambda'}} \right) =$$

$$= \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \mathrm{B}_{\lambda'\mu'}\, \Omega_{\mu r}\, \Omega_{\mu' s}\, b_{\lambda\lambda'} =$$

$$= \sum_{\mu\lambda'\mu'} \varepsilon_{\mu\lambda'}\, \mathrm{B}_{\lambda'\mu'}\, \Omega_{\mu r}\, \Omega_{\mu' s} = \sum_{\mu\mu'} \mathrm{B}_{\mu\mu'}\, \Omega_{\mu r}\, \Omega_{\mu' s} ,$$

ossia

$$b'_{rs} = \sum_{i,k} b_{ik}\,\Omega_{ir}\,\Omega_{ks}. \tag{6}$$

D'altra parte le formole (A) applicate all'ipersfera stessa dànno le corrispondenti

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i\,\partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_{b'} \frac{\partial X}{\partial u_l} - b'_{ik}\,X\,, \tag{A*}$$

l'indice b' apposto ai simboli di CHRISTOFFEL indicando che questi sono costruiti per la *terza* forma fondamentale (4).

Ora deriviamo la formola

$$\Omega_{ik} = -\,S\,\frac{\partial x}{\partial u_i}\,\frac{\partial X}{\partial u_k} = -\,S\,\frac{\partial x}{\partial u_k}\,\frac{\partial X}{\partial u_i}$$

rapporto ad u_l tenendo conto delle (A), (A*) e troveremo subito

$$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_l} = \sum_t \left\{ \begin{matrix} il \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{kt} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} kl \\ t \end{matrix} \right\}_{b'} \Omega_{it} \tag{a}$$

$$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_l} = \sum_t \left\{ \begin{matrix} kl \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{it} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} il \\ t \end{matrix} \right\}_{b'} \Omega_{kt}\,, \tag{b}$$

che sono le formole di WEINGARTEN al § 85 estese alle n dimensioni. Se permutiamo in (a) k con l e combiniamo per sottrazione colla seguente otteniamo

$$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_l} - \frac{\partial \Omega_{il}}{\partial u_k} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} ik \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{lt} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} il \\ t \end{matrix} \right\}_b \Omega_{kt} = 0\,;$$

che sono le formole (II) di CODAZZI. Ma se procediamo nel medesimo modo sulle (b), otteniamo le altre perfettamente simili rispetto alla terza forma fondamentale

$$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_l} - \frac{\partial \Omega_{il}}{\partial u_k} + \sum_t \left\{ \begin{matrix} ik \\ t \end{matrix} \right\}_{b'} \Omega_{lt} - \sum_t \left\{ \begin{matrix} il \\ t \end{matrix} \right\}_{b'} \Omega_{kt} = 0\,, \tag{II*}$$

e queste si diranno le *equazioni di* CODAZZI *per la rappresentazione ipersferica.*

§ 478.

Relazioni caratteristiche fra la seconda e terza forma fondamentale.

Date due forme quadratiche differenziali

$$\sum_{r,s}^{1..n} \Omega_{rs}\, du_r\, du_s, \quad \sum_{r,s}^{1..n} b'_{rs}\, du_r\, du_s ,$$

delle quali la seconda definita e positiva, affinchè esse appartengano *come seconda e terza forma fondamentale* rispettivamente ad un'ipersuperficie V_n è certamente necessario, per quanto si è visto, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1° *la forma* $\sum_{r,s} b'_{rs}\, du_r\, du_s$ *rappresenti il* ds'^2 *di uno spazio ad n dimensioni di curvatura Riemanniana costante* $= 1$.

2° *Le* Ω_{ik} *soddisfino le equazioni* (II*) *di* CODAZZI.

Dimostriamo che queste condizioni sono anche sufficienti e, supposte soddisfatte, l'ipersuperficie V_n ne risulta determinata a meno di movimenti. Supponiamo note le X_ν in funzione delle u_i e fissata così nello spazio l'immagine ipersferica. Intanto, essendo il determinante

$$\left| \frac{\partial X_\nu}{\partial u_1}, \frac{\partial X_\nu}{\partial u_2} \ldots \frac{\partial X_\nu}{\partial u_n}, X_\nu \right| \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots n$$

diverso da zero (perchè il suo quadrato eguaglia $|b'_{rs}|$, potremo certamente esprimere le derivate delle funzioni incognite x_ν come aggregati lineari ed omogenei degli elementi della riga scritta nel determinante, poniamo

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} = \sum_r \alpha_{ir} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_r} + \beta_i X_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots n).$$

Per determinare i coefficienti α_{ir}, β_i osserviamo che si ha

$$-\mathrm{S}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_k} = \Omega_{ik}, \quad \mathrm{S}_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial u_r} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_k} = b'_{rk}$$

$$X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} = 0, \quad \mathrm{S}_\nu X_\nu^2 = 1$$

e ne dedurremo subito

$$\beta_i = 0 , \quad \sum_r \alpha_{ir} b'_{rk} = - \Omega_{ik} ,$$

da cui risolvendo rapporto alle α_{ir} segue

$$\alpha_{ir} = - \sum_k \mathrm{B}'_{rk} \Omega_{ik} ,$$

e le formole richieste sono quindi

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} = - \sum_{r,k} \mathrm{B}'_{rk} \Omega_{ik} \frac{\partial \mathrm{X}_\nu}{\partial u_r} .$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots n , \quad i = 1, 2, \ldots n) .$$

Essendo così determinate tutte le derivate delle x_ν l'ipersuperficie (se esiste) sarà individuata a meno di una traslazione nello spazio, che combinata con una rotazione dell'immagine ipersferica dà appunto il più generale movimento.

Che poi l'ipersuperficie esista effettivamente vediamo osservando che le condizioni d'integrabilità delle (IV)

$$\frac{\partial}{\partial u_l} \left(\sum_{rk} \mathrm{B}'_{rk} \Omega_{rk} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_r} \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{rk} \mathrm{B}'_{rk} \Omega_{lk} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_r} \right) = 0$$

sono identicamente soddisfatte, in virtù delle (A*), delle (II*) e delle note formole (I pag. 82)

$$\frac{\partial \mathrm{B}'_{rk}}{\partial u_l} = - \sum_t \mathrm{B}'_{rt} \left\{ \begin{matrix} l\ t \\ k \end{matrix} \right\}_{b'} - \sum_t \mathrm{B}'_{kt} \left\{ \begin{matrix} l\ t \\ r \end{matrix} \right\}_{b'} .$$

Osserviamo poi che dalle (IV) formando

$$b_{ik} = \mathrm{S}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_k}$$

si ottengono le formole da raffrontarsi colle (C)

$$\text{(7)} \qquad b_{ik} = \sum_{r,s} \mathrm{B}'_{rs} \Omega_{ir} \Omega_{ks} .$$

Stabiliamo ancora le formole che esprimono i raggi principali di curvatura dell' ipersuperficie V_n e le equazioni differenziali delle linee di curvatura per mezzo della seconda e terza forma fondamentale. Per ciò, prese le equazioni differenziali caratteristiche lungo una linea di curvatura (§ 476)

$$\sum_i \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} du_i = \rho \sum_i \frac{\partial X_\nu}{\partial u_i} du_i \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

si moltiplichi per $\frac{\partial x_\nu}{\partial u_k}$ e si eseguisca la sommazione S rispetto a ν, onde si muteranno nelle equivalenti

$$\sum_i (\Omega_{ik} + \rho\, b'_{ik})\, du_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

Eliminando le du_i si ha l'equazione di n^{mo} grado in ρ

$$| \Omega_{ik} + \rho\, b'_{ik} | = 0 \tag{9}$$

le cui n radici $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ (tutte finite) sono i raggi principali di curvatura. Può darsi però che la (9) possegga una o più radici nulle, il che avviene quando è nullo il determinante $|\Omega_{ik}|$; allora l' ipersupercie V_n si riduce in effetto ad una varietà di un numero minore di dimensioni accompagnata da tutti i suoi iperpiani tangenti, e in corrispondenza le formole (7) mostrano che si annulla il determinante $|b_{il}|$. Notiamo infine che dalle (9) segue per la somma dei raggi principali di curvatura la formola:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = - \sum_{ik} B'_{ik}\, \Omega_{ik}\,. \tag{10}$$

§ 479.

Coordinate tangenziali.

Estendiamo ora le formole di WEINGARTEN relative alle coordinate tangenziali (I § 95), riguardando l'ipersuperficie V_n come inviluppo dei suoi iperpiani tangenti. Daremo allora le coordinate $X_0, X_1, \ldots X_n$ del punto immagine sull'ipersfera in funzione delle variabili indipendenti e medesimamente la distanza (algebrica) W dell'iperpiano tangente dall'origine

$$W = \mathrm{S}_\nu\, x_\nu\, X_\nu\,. \tag{11}$$

Così l'ipersuperficie è individuata parametricamente come inviluppo mediante le coordinate *metriche*

$$(X_0, X_1 \ldots X_n ; W), \quad \underset{\nu}{S} X_\nu^2 = 1$$

del suo iperpiano tangente, nella qual cosa potrà anche accadere, in casi particolari, che l'ipersuperficie si riduca ad una varietà V_r di un numero $r < n$ di dimensioni accompagnata da tutti i suoi ∞^{n-r} iperpiani tangenti in ogni punto (Cf. sopra).

Per un'osservazione già fatta al § precedente potremo determinare le coordinate x_ν del punto di contatto dell'iperpiano tangente con formole del tipo seguente :

$$x_\nu = \alpha X_\nu + \sum_i \beta_i \frac{\partial X_\nu}{\partial u_i} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n) , \tag{12}$$

le β_i, α essendo funzioni delle u indipendenti dall'indice ν. Dalle (11) risulta subito $\alpha = W$; e poichè dalle (11) derivando si ha

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = \underset{\nu}{S} x_\nu \frac{\partial X_\nu}{\partial u_k} , \tag{13}$$

le (12) dànno per determinare le β_i il sistema lineare

$$\sum_i b'_{ik} \beta_i = \frac{\partial W}{\partial u_k} \quad (k = 1, 2, \ldots n) ,$$

e risolvendo abbiamo

$$\beta_i = \sum_k B'_{ik} \frac{\partial W}{\partial u_k} .$$

Sostituendo nelle (12) risultano le formole richieste

$$x_\nu = W X_\nu + \sum_{i,k} B'_{ik} \frac{\partial X_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial W}{\partial u_k} ,$$

le quali possiamo scrivere per parametri differenziali

$$x_\nu = W X_\nu + \nabla (W, X), \tag{V}$$

dove il parametro differenziale misto $\nabla (W, X_\nu)$ s'intende calcolato rispetto al ds'^2 dell'immagine ipersferica.

Determiniamo facilmente i coefficienti Ω_{ik} della seconda forma fondamentale con una nuova derivazione delle (13), il che avuto riguardo alle (A*) pag. 560 dà

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_{b'} \frac{\partial W}{\partial u_l} - b'_{ik} W - \Omega_{ik},$$

ovvero coi simboli delle derivate seconde covarianti W_{ik}:

$$-\Omega_{ik} = W_{ik} + b'_{ik} W. \tag{14}$$

Le formole (7), sostituendovi questi valori delle Ω_{ik} dànno per il calcolo dei coefficienti b_{ik} della *prima* forma fondamentale:

$$b_{ik} = \sum_{rs} B'_{rs} W_{ir} W_{ks} + 2 W_{ik} W + b'_{ik} W^2. \tag{14*}$$

Così abbiamo tutte le formole per il calcolo degli elementi dell'ipersuperficie in coordinate tangenziali. In particolare è da osservarsi la formola per la *somma* dei raggi principali $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ di curvatura, che si ottiene dalla (10) ove si sostituiscano i valori (14):

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = \sum_{ik} B'_{ik} W_{ik} + W \sum_{ik} B'_{ik} b'_{ik},$$

alla quale si può dare la formola notevole

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = \Delta_2 W + n W. \tag{VI}$$

Per $n = 2$ queste formole si riducono alle formole del § 95.

§ 480.

Ipersuperficie normali e loro rappresentazione ipersferica.

Abbiamo già introdotto al § 445, in generale, la nozione di ipersuperficie V_n normali, nelle quali le linee di curvatura si distribuiscono in un sistema n^{plo} di varietà V_{n-1} ortogonali. Ricerchiamo le ipersuperficie normali V_n dell'S_{n+1} euclideo. Il loro ds^2 riferito alle linee di curvatura (u_1), $(u_2) \ldots (u_n)$ assumerà la forma ortogonale

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \ldots + H_n^2 du_n^2$$

e per le proprietà delle linee di curvatura avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = \rho_i \frac{\partial X}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

onde risulta immediatamente che anche il ds'^2 dell'immagine ipersferica avrà la forma ortogonale

$$ds'^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + \ldots + h_n^2\, du_n^2, \tag{15}$$

ove si è posto

$$h_1 = \frac{H_1}{\rho_1}, \quad h_2 = \frac{H_2}{\rho_2}, \ldots h_n = \frac{H_n}{\rho_n}. \tag{16}$$

Così adunque ad ogni ipersuperficie V_n normale nell'S_{n+1} corrisponde un sistema n^{plo} ortogonale (15) nell'ipersfera rappresentativa.

Ma ora andiamo a dimostrare inversamente il teorema di DARBOUX: *Dato un qualunque sistema n^{plo} ortogonale nell' ipersfera, esistono infinite ipersuperficie normali (dipendenti da n funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna) di cui quel sistema n^{plo} ortogonale dà l' immagine delle linee di curvatura.*

Suppongasi dato un sistema n^{plo} ortògonale nell' ipersfera, definito dalla (15), e si cerchi un'ipersuperficie V_n che lo ammetta per immagine delle linee di curvatura, onde sussistendo le formole

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = \rho_i \frac{\partial X}{\partial u_i},$$

la V_n sarà certamente normale. Per questo, adoperando coordinate tangenziali $(X_0, X_1, \ldots X_n ; W)$, avremo da determinare la funzione incognita W in guisa che risulti

$$\Omega_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k,$$

ossia in modo che W soddisfi alle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni simultanee del 2° ordine

$$W_{ik} = 0 \quad (\text{per} \quad i \neq k).$$

A causa della forma ortogonale (15) del ds'^2 queste si scrivono (cf. § 435 pag. 433 formole (16*)):

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u_i\,\partial u_k} = \frac{\partial\ log\ h_k}{\partial\ u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k} + \frac{\partial\ log\ h_i}{\partial\ u_k}\frac{\partial W}{\partial u_i}$$

$$(i \neq k = 1, 2, \ldots n)\,.$$

Il sistema assegna tutte le derivate seconde miste espresse linearmente ed omogeneamente per le derivate prime, ed ora proviamo che le condizioni d'integrabilità, ottenute col formare nei due modi la derivata terza mista

$$\frac{\partial^3 W}{\partial u_i\,\partial u_k\,\partial u_l}\,,$$

sono soddisfatte in virtù delle (17) medesime, che cioè si ha identicamente per le (17)

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial\ log\ h_l}{\partial\ u_i}\frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial\ log\ h_i}{\partial\ u_l}\frac{\partial W}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial log\, h_k}{\partial\ u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k} + \frac{\partial log\, h_i}{\partial\ u_k}\frac{\partial W}{\partial u_i}\right).$$

Per questo si ricordi che la forma (15) ha curvatura Riemanniana $= 1$ e perciò, essendo i, k, l tre indici diversi si ha

$$(ik,\ kl) = b'_{ik}\,b'_{kl} - b'_{il}\,b'_{kk} = 0,$$

cioè per la seconda delle formole (17) al citato § 435 (pag. 433)

$$\frac{\partial^2 h_k}{\partial u_i\,\partial u_l} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial u_l}\frac{\partial h_k}{\partial u_i} + \frac{1}{h_l}\frac{\partial h_l}{\partial u_i}\frac{\partial h_k}{\partial u_l}\,,$$

colla quale formola si verifica subito che la (18) si risolve in un'identità.

Da noti teoremi sui sistemi di equazioni a derivate parziali, ai quali avremo più volte occasione di ricorrere in seguito, risulta che il sistema (17) possiede una soluzione generale W dipendente da n funzioni arbitrarie, e precisamente, scelto un punto arbitrario $(u_i^{(0)})$ dell'ipersfera e considerate le linee coordinate (u_1), $(u_2)\ldots(u_n)$ uscenti da quel punto, può darsi ad arbitrio lungo ciascuna di queste linee (u_i) il valore di W come funzione di u_i.

La ricerca delle ipersuperficie normali V_n entro lo spazio S_{n+1} euclideo è così ricondotta a quella dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio ellittica a n dimensioni, o ciò che torna lo stesso dei sistemi n^{pli} ortogonali nell'S_n euclideo (*), poichè i due spazii si rappresentano conformemente

(*) Di questo problema in generale tratta il seguente Capitolo.

l'uno sull' altro ; e successivamente all' integrazione del sistema completamente integrabile.

In particolare si deduce di qui : Nello spazio euclideo a quattro dimensioni esistono infiniti spazii normali V_3 *a tre dimensioni e la loro ricerca dipende da quella dei sistemi tripli ortogonali nell' ordinario spazio.*

§ 481.

Formole generali per le ipersuperficie nello spazio ellittico.

Possiamo ora a stabilire le formole generali per le ipersuperficie negli spazii a curvatura costante non nulla. Sarà opportuno, tanto per lo spazio ellittico che per l'iperbolico, fare uso delle coordinate di WEIERSTRASS, le formole risultando allora affatto simili a quelle per lo spazio euc ideo. (*)

Cominciando dallo spazio ellittico S_n a n dimensioni, di curvatura $K = \frac{1}{R^2}$, definiamo il suo ds^2 colla formola

$$ds^2 = R^2 (dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2) = R^2 \sum_\nu dx_\nu^2 \tag{19}$$

essendo $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ le coordinate correnti (di WEIERSTRASS) di punto legate dalla relazione

$$\sum_\nu x_\nu^2 = 1. \tag{20}$$

Il più spesso gioverà considerare $x_0, x_1 \ldots x_n$ come coordinate omogenee (normalizzate) in uno spazio euclideo S'_n rappresentativo ove è stabilita una metrica di CAYLEY rispetto all'assoluto

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0. \tag{21}$$

Prendiamo in S_n un' ipersuperficie V_{n-1} definita parametricamente dalle equazioni

$$x_\nu = x_\nu (u_1, u_2 \ldots u_{n-1}) \; (\nu = 0, 1, \ldots n),$$

(*) Per il caso delle tre dimensioni e per una forma ortogonale del ds^2 queste formole furono date per primo dal FIBBI nella sua tesi di abilitazione. *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazî di curvatura costante.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa T. VII. (1895).

e indichiamo al solito il suo ds^2 con

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..n} b_{ik}\, du_i\, du_k \,, \tag{22}$$

dove si è posto

$$b_{ik} = \mathrm{R}^2 \sum_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_k} \,. \tag{23}$$

Siano poi $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$, le coordinate di WEIERSTRASS dell'iperpiano tangente in (x_i) a V_{n-1}, definite, a meno di un cangiamento simultaneo di segno, dalle equazioni (§ 457):

$$\sum_{\nu} \xi_\nu^2 = 1, \quad \sum_{\nu} \xi_\nu\, x_\nu = 0 \,, \quad \sum_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1). \tag{24}$$

Esprimiamo ora per mezzo delle x, ξ e delle loro derivate i coefficienti Ω_{ik} della seconda forma fondamentale di V_{n-1}. Per questo dobbiamo calcolare (Cf. § 441 formola (32) pag. 450) la variazione $\delta\, ds^2$ del ds^2 nel passaggio dalla ipersuperficie V_{n-1} alla infinitamente vicina $\overline{\mathrm{V}}_{n-1}$ da

$$\delta\, ds^2 = -2\,\varepsilon \sum_{ik}^{1..n-1} \Omega_{ik}\, du_i\, du_k \,,$$

avendo indicato con ε il tratto infinitesimo di normale fra V_{n-1} e $\overline{\mathrm{V}}_{n-1}$. Ora per le coordinate $\bar{x}_\nu$ di un punto di $\overline{\mathrm{V}}_{n-1}$ abbiamo

$$\bar{x}_\nu = x_\nu \cos\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\right) + \xi_\nu \operatorname{sen}\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\right)$$

e trascurando le potenze superiori di ε

$$\bar{x}_\nu = x_\nu + \frac{\varepsilon}{\mathrm{R}}\, \xi_\nu \,,$$

ossia

$$\delta x_\nu = \frac{\varepsilon\, \xi_\nu}{\mathrm{R}} \,.$$

Variando la (19) si ottiene

$$\delta\, ds^2 = 2\,\mathrm{R}^2 \sum_{\nu} dx_\nu\, \delta\, dx_\nu = -2\,\mathrm{R}\,\varepsilon \sum_{\nu} dx_\nu\, \delta\xi_\nu \,,$$

e quindi

$$\Omega_{ik} = -\,\mathrm{R}\,\mathrm{S}_{\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_k} = \mathrm{R}\,\mathrm{S}_{\nu}\,\xi_\nu\,\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_i\,\partial u_k}\,. \tag{25}$$

Ora se osserviamo che il quadrato del determinante

$$\left|\mathrm{R}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_1}\,,\ \mathrm{R}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_2}\,,\ \ldots\ \mathrm{R}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_{n-1}}\,,\ x_\nu\,,\ \xi_\nu\right| \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n) \tag{26}$$

eguaglia per le (23), (24) il discriminante $|\,b_{ik}\,|$ della prima forma fondamentale, ed è quindi diverso da zero, potremo scrivere le derivate seconde $\dfrac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_i\,\partial u_k}$, e le derivate prime delle ξ_ν espresse linearmente ed omogeneamente per gli elementi della riga scritta del determinante (26), con coefficienti indipendenti dall'indice ν. Ma se si osservano le identità

$$\mathrm{S}\,x\frac{\partial x}{\partial u_i} = 0,\quad \mathrm{S}\,x\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k} = -\frac{b_{ik}}{\mathrm{R}^2}\,,\quad \mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k}\frac{\partial x}{\partial u_t} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}\left[\begin{matrix} ik \\ t \end{matrix}\right]_b\,,$$

che seguono derivando le (20), (23) e si tiene conto altresì delle (24), (25), si trovano subito le formole seguenti:

$$\text{(E)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_k} = \displaystyle\sum_l \left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}_b \frac{\partial x}{\partial u_l} - \frac{b_{ik}}{\mathrm{R}^2}\,x + \frac{\Omega_{ik}}{\mathrm{R}}\,\xi \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1) \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u_i} = -\,\mathrm{R}\displaystyle\sum_{\lambda\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\,\Omega_{\mu i}\,\frac{\partial x}{\partial u_\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1), \end{cases}$$

le quali valgono sostituendo per x, ξ una coppia qualunque $(x_\nu\,,\ \xi_\nu\,)$ per $\nu = 0, 1, \ldots n$, e sono da confrontarsi colle (A), (B) § 472 per lo spazio euclideo. Se si scrivono le condizioni d'integrabilità del sistema (E), con un calcolo simile a quello indicato nel § 472, si trova che esse si riducono alle equazioni di Gauss e Codazzi (III*) e (IV*) § 442, e cioè alle seguenti:

$$\text{(F)}\qquad \Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta, \beta\gamma)_b - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\,(b_{\alpha\beta}\,b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\delta})$$

$$\text{(G)}\qquad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\delta} + \sum_t \left\{\begin{matrix} \alpha\beta \\ t \end{matrix}\right\}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \left\{\begin{matrix} \alpha\gamma \\ t \end{matrix}\right\}_b \Omega_{\beta t} = 0\,.$$

E medesimamente si dimostra che, date inversamente le due forme fondamentali

$$\sum_{i,k}^{1..h-1} b_{ik}\,du_i\,du_k\,,\qquad \sum_{i,k}^{1..n-1} \Omega_{ik}\,du_i\,du_k\,,$$

soddisfacenti alle equazioni (F) di GAUSS e alle (G) di CODAZZI, esiste nello spazio ellittico una corrispondente ipersuperficie V_{n-1}, determinata a meno di movimenti nello spazio.

Come per lo spazio euclideo, si osserverà anche qui che le ipersuperficie nello spazio ellittico a n dimensioni, appena $n>3$, sono in generale *indeformabili ;* anzi di più non si può in generale collocare entro lo spazio ellittico S_n uno spazio V_{n-1} ad $n-1$ dimensioni *con* ds^2 *assegnato*. Così p. e non esistono in S_n ipersuperficie di curvatura Riemanniana costante $< \frac{1}{R^2}$, e di ipersuperficie con curvatura Riemanniana costante $> \frac{1}{R^2}$ eistono solo le ipersfere.

Non lascieremo di osservare che nello spazio ellittico sussiste una legge completa di *dualità metrica* sostituendo ad ogni ente il suo ente polare rispetto all'assoluto. Così ogni ipersuperficie V_{n-1} individua la sua polare V'_{n-1} rispetto all'assoluto che è geodeticamente parallela alla V_{n-1} e distante da essa di un quadrante $\frac{\pi R}{2}$, talchè indicando con accenti gli elementi di V'_{n-1} si ha

$$x'_\nu = \xi_\nu \quad , \quad \xi'_\nu = x_\nu \, .$$

E se corrispondentemente introduciamo la *terza* forma fondamentale:

$$ds'^2 = R^2 \sum_\nu d\xi_\nu^2 = \sum_{ik} b'_{ik} \, du_i \, du_k \, ,$$

valgono insieme alle formole fondamentali (E), (F), (G) le altre che se ne ottengono scambiando dappertutto le x colle ξ e i coefficienti b_{ik} della prima forma con quelli b'_{ik} della terza.

Osserviamo in fine, che, dalle seconde delle (E), pei valori dei coefficienti b'_{ik} si ha

$$b'_{ik} = R^2 \sum_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} =$$

$$= R^4 \sum_\nu \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} B_{\lambda\mu} B_{\lambda'\mu'} \Omega_{\mu i} \Omega_{\mu' k} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_{\lambda'}} =$$

$$= R^2 \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} B_{\lambda\mu} B_{\lambda'\mu'} b_{\lambda\lambda'} \Omega_{\mu i} \Omega_{\mu' k} .$$

Ma siccome

$$\sum_\lambda b_{\lambda\lambda'} B_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\lambda'\mu} \, ,$$

resta più semplicemente :

$$b'_{ik} = \mathrm{R}^2 \sum_{\lambda\mu} \mathrm{B}_{\lambda\mu}\, \Omega_{\lambda i}\, \Omega_{\mu k}. \tag{26*}$$

§ 482.

Formole per le ipersuperficie nello spazio iperbolico.

Affatto analogamente procederemo per lo spazio iperbolico, ove il ds^2 è dato (§ 458) da

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 (ds_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 - dx_0^2), \tag{27}$$

le coordinate $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ di WEIERSTRASS essendo ora legate dalla relazione

$$x_0^2 - \sum_i^{1..n} x_i^2 = 1. \tag{28}$$

Considerando nell'S_n iperbolico un' ipersuperficie V_{n-1} definita parametricamente dalle formole

$$x_\nu = x_\nu (u_1, u_2, \ldots u_{n-1}),$$

indichiamo ancora il suo ds^2 con

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1..n-1} b_{ik}\, du_i\, du_k, \tag{29}$$

avendosi

$$b_{ik} = \mathrm{R}^2 \left(\sum_t^{1..n} \frac{\partial x_t}{\partial u_i} \frac{\partial x_t}{\partial u_k} - \frac{\partial x_0}{\partial u_i} \frac{\partial x_0}{\partial x_k} \right). \tag{30}$$

Le coordinate $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ dell'iperpiano tangente sono definite dalle equazioni simultanee

$$\sum_i^{1..n} \xi_i^2 - \xi_0^2 = 1\,, \quad \sum_i x_i\, \xi_i - x_0\, \xi_0 = 0\,, \quad \sum_i \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u_r} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_r} = 0 \tag{31}$$

$$(r = 1, 2, \ldots n - 1),$$

Un calcolo simile a quello eseguito nel paragrafo precedente dà pei coefficienti Ω_{ik} della seconda forma fondamentale

$$\Omega_{ik} = \mathrm{R} \left\{ \sum_t^{1..n} \xi_t \frac{\partial^2 x_t}{\partial u_i\, \partial u_k} - \xi_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial u_i\, \partial u_k} \right\} = \mathrm{R} \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial u_i} \frac{\partial x_0}{\partial u_k} - \sum_t^{1..n} \frac{\partial x_t}{\partial u_i} \frac{\partial \xi_t}{\partial u_k} \right\}, \tag{32}$$

e per le formole corrispondenti alle (E) dello spazio ellittico :

$$(E') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l^{1..n-1} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}_b \dfrac{\partial x}{\partial u_l} + \dfrac{b_{ik}}{R^2} x + \dfrac{\Omega_{ik}}{R} \xi \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1) \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u_i} = - R \sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu}\, \Omega_{\mu i} \dfrac{\partial x}{\partial u_\lambda}, \end{cases}$$

le quali sono nuovamente soddisfatte per tutte le coppie (ξ_ν, ξ_ν) $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$.

Le equazioni (F) di Gauss diventano qui

$$(F') \qquad \Omega_{\alpha\beta}\,\Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\,\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta, \beta\gamma)_b + \frac{1}{R^2}(b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\delta}),$$

mentre quelle (G) di Codazzi restano immutate di forma.

Anche in questo caso iperbolico si possono considerare le formole di un secondo gruppo che corrispondono alle (E'), (F') secondo una legge metrica di dualità vigente in questo spazio quando al ds^2 dell'ipersuperficie si associ la considerazione *dell'elemento angolare* $d\varphi$ di due successivi iperpiani tangenti dato, secondo la formola (34) § 458 (pag. 503) da

$$d\varphi^2 = \sum_i^{1..n} d\xi_i^2 - d\xi_0^2$$

Esprimendo le ξ per $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, introduciamo come terza forma fondamentale

$$R^2\, d\varphi^2 = \sum_{i,k}^{1..n-1} b'_{ik}\, du_i\, du_k,$$

avendo posto

$$(33) \qquad b'_{ik} = R^2 \left(\sum_\nu^{1..n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_k} - \frac{\partial \xi_0}{\partial u_i} \frac{\partial \xi_0}{\partial u_k} \right).$$

Potremo allora esprimere le derivate

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_k}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

linearmente ed omogeneamente per

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial \xi}{\partial u_{n-1}}, \xi, x$$

e si otterranno così, come formole duali delle (E'), le seguenti :

$$(F'') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \, \partial u_k} = \sum_{l}^{1..n-1} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}_{b'} \dfrac{\partial \xi}{\partial u_l} - \dfrac{b'_{ik}}{R^2} \xi - \dfrac{\Omega_{ik}}{R} x \quad (i, k = 1, 2 \ldots n-1) \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_i} = - R \sum_{\lambda,\mu}^{1..n-1} B'_{\lambda\mu} \Omega_{\mu i} \dfrac{\partial \xi}{\partial u_\lambda} . \end{cases}$$

Quanto alle condizioni d'integrabilità, esse si riducono nuovamente alle equazioni (G) di CODAZZI nella solita forma coi simboli $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}_{b'}$ costruiti per le b'_{ik}, e le equazioni di GAUSS sono sostituite dalle altre

$$(F''') \qquad \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma} \Omega_{\beta\delta} = - (\alpha\delta, \beta\gamma)_{b'} + \frac{b'_{\alpha\beta} b'_{\gamma\delta} - b'_{\alpha\gamma} b'_{\beta\delta}}{R^2} .$$

§ 483.

Le linee di curvatura in geometria ellittica ed iperbolica.

Abbiamo osservato, al § 476, che le linee di curvatura di un'ipersuperficie nello spazio euclideo a più dimensioni possono ricevere una definizione analoga alla ordinaria. Ora dimostriamo che la medesima cosa accade per uno spazio qualunque a curvatura costante, e cioè: *Una linea* L *tracciata sopra un'ipersuperficie* V_{n-1} *di uno spazio* S_n *a curvatura costante è linea di curvatura quando le normali all'ipersuperficie lungo* L *riescono tangenti ad una curva* C *nello spazio.*

Cominciando dal caso ellittico, supponiamo la curvatura di S_n eguale a $\dfrac{1}{R^2}$, e indichiamo con w la porzione di normale a V_{n-1} lungo L, compresa ra il piede (x_i) ed il punto (x'_ν) ove la detta normale tocca la curva C ; avremo

$$x'_\nu = x_\nu \cos\left(\frac{w}{R}\right) - \xi_\nu \operatorname{sen}\left(\frac{w}{R}\right),$$

e lungo L tutte le quantità saranno funzioni dell'arco s di L. Derivando rapporto ad s, abbiamo

$$\frac{dx'_\nu}{ds} = \frac{dx_\nu}{ds} \cos\left(\frac{w}{R}\right) - \frac{d\xi_\nu}{ds} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{R}\right) - \frac{1}{R} \left\{ x_\nu \operatorname{sen}\left(\frac{w}{R}\right) + \xi_\nu \cos\left(\frac{w}{R}\right) \right\} \frac{dw}{ds} .$$

Ora le quantità $\frac{dx'_\nu}{ds}$ sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente in (x'_ν) alla curva C, cioè per ipotesi alle coordinate dell'iperpiano normale in (x'_ν) alla congiungente (x_ν), $(x'_{\nu\,\frac{w}{2}})$, che sono date dai binomii

$$x_\nu \operatorname{sen}\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right) + \xi_\nu \cos\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right).$$

Le precedenti si mutano quindi nelle altre

$$\frac{dx_\nu}{ds}\cos\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right) - \frac{d\,\xi_\nu}{ds}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right) = \lambda\left\{x_\nu \operatorname{sen}\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right) + \xi_\nu \cos\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right)\right\}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

dove λ è un fattore di proporzionalità indipendente dall'indice ν. Moltiplicando le precedenti pei binomii stessi, e sommando rispetto a ν, si vede subito che si ha $\lambda = 0$, onde si conclude che, spostandosi lungo una linea L, hanno luogo le equazioni caratteristiche

$$dx_\nu = tg\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right) d\xi_\nu .$$

Supponendo riferita l'ipersuperficie V_{n-1} ad un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \ldots u_n$, queste si scrivono

$$\sum_i \left\{\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} - tg\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right)\frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_i}\right\} du_i = 0,$$

e col solito processo si cangiano nelle equivalenti

$$\sum_k \left\{b_{ik} + \mathrm{R}\, tg\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right)\Omega_{ik}\right\} du_i = 0 ,$$

le quali paragonate colle formole generali del § 445 dimostrano appunto l'identità della nuova definizione delle linee di curvatura colla antica ed assegnano di più al corrispondente raggio (ridotto) ρ di curvatura il significato geometrico

$$\rho = \mathrm{R}\, tg\left(\frac{w}{\mathrm{R}}\right).$$

Corrispondentemente agli $n-1$ raggi principali di curvatura

$$\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}$$

avremo quindi sulla normale all'ipersuperficie V_{n-1} $n-1$ centri di curvatura distanti dal piede delle lunghezze $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$ definite dalle formole

$$\rho_i = R\, tg\left(\frac{w_i}{R}\right), \tag{34}$$

ove (la retta chiudendosi nello spazio ellittico dopo un giro di πR) potrà assumersi w_i fra o e πR. Se invece dello spazio ellittico si prende a considerare quello iperbolico di curvatura $K = -\frac{1}{R^2}$, si trovano risultati affatto analoghi ; soltanto la relazione (34) fra ρ_i e w_i deve modificarsi sostituendo alla tangente circolare l'iperbolica per cui è da scriversi

$$\rho_i = R\, tgh\left(\frac{w_i}{R}\right), \tag{34*}$$

ove ρ_i avrà il segno di w_i. Per altro w_i sarà reale soltanto quando $|\rho_i| < R$ e nel caso contrario w_i sarà immaginario e con esso il centro corrispondente di curvatura. Ma nella rappresentazione geodetica, colla metrica del CAYLEY, l'incontro della normale (non euclidea) colla successiva avviene ancora, però in un punto *esterno* all' assoluto, irraggiungibile (ideale) nella metrica iperbolica.

Volendo definire qui le linee di curvatura in modo sempre reale, basta porre la condizione che le normali all'ipersuperficie lungo una tale linea L formino una superficie (a due dimensioni) sviluppabile, cioè di curvatura assoluta eguale in ogni punto a quella dello spazio ambiente.

§ 484.

Le superficie nella geometria ellittica ed iperbolica a tre dimensioni.

Volgiamoci ora al caso particolare degli spazii a curvatura costante con tre dimensioni, all'oggetto di estendere a questi spazii i principali teoremi dell'ordinaria teoria delle superficie.

Consideriamo nello spazio a tre dimensioni di curvatura costante K_0 una superficie qualunque S, e per migliore confronto colle formole dell'ordinaria teoria, indichiamo con u, v le variabili indipendenti, o coordinate curvilinee sulla S, e usiamo le solite notazioni :

$$(35) \qquad \begin{cases} E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \end{cases}$$

per la prima e seconda forma fondamentale. Introduciamo anche la terza forma fondamentale

$$(36) \qquad E'du^2 + 2\,F'\,du\,dv + G'\,dv^2,$$

che rappresenterà il quadrato dell'elemento angolare della primitiva S, ovvero anche, nel caso della geometria ellittica, il ds'^2 della superficie S' polare di S.

I coefficienti delle due prime forme fondamentali sono legati in primo luogo dalle equazioni di Codazzi sotto la solita forma (I pag. 175), che qui trascriviamo :

$$(VII) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial D'}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} D + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] D' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} D'' = 0 \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} - \dfrac{\partial D'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} D + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] D' - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} D'' = 0, \end{cases}$$

o sotto l'equivalente (I pag. 176) :

$$(VII^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} - \dfrac{\partial \Delta'}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta'' = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta''}{\partial u} - \dfrac{\partial \Delta'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta'' = 0, \end{cases}$$

ove

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Quanto alla equazione di Gauss, indicando con K la curvatura *assoluta* della S, essa si scrive :

$$(VIII) \qquad \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K - K_0,$$

dove sarà $K_0 = \dfrac{1}{R^2}$ nel caso ellittico, e $K_0 = -\dfrac{1}{R^2}$ nel caso iperbolico.

Il primo membro della (VIII) è il prodotto delle due curvature principali della superficie, che già al § 446 abbiamo indicato come *la curvatura relativa* della S. Denotandola con k abbiamo

$$k = K - K_0,$$

conforme alla formola più generale del paragrafo ora citato.

Insieme alla curvatura relativa k, ci converrà considerare anche la curvatura *media* H, somma delle due curvature principali:

$$H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Siccome l'equazione di secondo grado in ρ le cui radici sono i raggi principali (ridotti) di curvatura è la solita (I pag. 190)

$$(DD'' - D'^2)\,\rho^2 + (E\,D'' + GD - 2\,FD')\,\rho + EG - F^2 = 0,$$

avremo anche qui la formola:

$$(VIII^*) \qquad H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2\,FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

Le relazioni fra E, F, G ; D, D', D'', espresse dalle equazioni (VII), o (VII*) di Codazzi e dalla (VIII) di Gauss, dànno le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista la corrispondente superficie S, come si è osservato più in generale al § 481. Date le due prime forme fondamentali (soddisfacenti alle dette condizioni), per trovare la superficie, abbiamo il sistema completamente integrabile (F) od (E') §§ 481, 482, che nel caso ellittico $K_0 = \frac{1}{R^2}$ si scrive:

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{E}{R^2}\,x + \dfrac{D}{R}\,\xi \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{F}{R^2}\,x + \dfrac{D'}{R}\,\xi \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{G}{R^2}\,x + \dfrac{D''}{R}\,\xi, \end{cases}$$

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = R\left(\dfrac{FD' - GD}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v} \right) \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = R\left(\dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2} \dfrac{\partial x}{\partial v} \right). \end{cases}$$

Per lo spazio iperbolico con $K_0 = -\frac{1}{R^2}$ abbiamo un sistema del tutto simile *nel quale anzi le* (38) *rimangono le medesime e le* (37) *cangiano solo in questo che nei termini lineari in x bisogna cangiare il segno del coefficiente nell'opposto* (E, F, G in — E, — F, — G).

Osserviamo che ancora qui la terza forma fondamentale

$$E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2$$

è una combinazione lineare delle prime due, anzi è data dalla formola perfettamente analoga a quella del caso Euclideo:

$$(39) \qquad \frac{1}{R^2}(E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2) =$$

$$= -k(E du^2 + 2 F du dv + G dv^2) - H(D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2).$$

Applicando infatti la formola generale (26*) § pag. 572 che vale tanto per lo spazio ellittico che per l'iperbolico abbiamo

$$\frac{b'_{ik}}{R^2} = \frac{b_{22}\,\Omega_{1i}\,\Omega_{1k} - b_{12}(\Omega_{1i}\,\Omega_{2k} + \Omega_{1k}\,\Omega_{2i}) + b_{11}\,\Omega_{2i}\,\Omega_{2k}}{b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2},$$

e di qui deduciamo appunto:

$$-\frac{E'}{R^2} = \frac{2FDD' - ED'^2 - GD^2}{EG - F^2} = \frac{E(DD'' - D'^2) + D(2FD' - ED'' - GD)}{EG - F^2} = kE + HD$$

$$-\frac{F'}{R^2} = \frac{F(DD'' + D'^2) - ED'D'' - GDD'}{EG - F^2} = \frac{F(DD'' - D'^2) + D'(2FD' - ED'' - GD)}{EG - F^2} = kF + HD'$$

$$-\frac{G'}{R^2} = \frac{2FD'D'' - ED''^2 - GD'^2}{EG - F^2} = \frac{G(DD'' - D'^2) + D''(2FD' - ED'' - GD)}{EG - F^2} = kG + HD'',$$

onde la (39) è dimostrata.

§ 485.

I sistemi coniugati e le linee asintotiche.

Le definizioni di tangenti coniugate ad una superficie S nello spazio euclideo (§ 75) si trasportano invariate alle superficie degli spazî di curvatura costante; anzi si può osservare che la rappresentazione geodetica de-

gli spazî a curvatura costante nell'euclideo (metrica del CAYLEY) trasforma senz'altro i sistemi coniugati della superficie obiettiva nei sistemi coniugati della superficie immagine.

Se ora, col processo medesimo del § 75 (I pag. 199), si ricerca la condizione affinchè due elementi lineari ds, δs, spiccati sulla superficie da un medesimo punto, siano coniugati, si trova subito che questa si scrive

$$\sum_{\nu} dx_\nu \, \delta\xi_\nu = 0$$

nel caso ellittico, e invece

$$\sum_{i}^{1..3} dx_i \, \delta\xi_i - dx_0 \, \delta\xi_0 = 0$$

nello spazio iperbolico. Introducendo coordinate curvilinee u, v, questa si esprime in ambedue i casi, come nello spazio euclideo, coll'annullarsi della forma bilineare

$$\mathrm{D}\, du\, \delta u + \mathrm{D}'\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \mathrm{D}''\, dv\, \delta v.$$

E così, in particolare, le linee coordinate (u, v) formeranno un sistema coniugato quando sia $\mathrm{D}' = 0$; allora dalla media delle (37) risulta il teorema :

Le funzioni x_0, x_1, x_2, x_3 di u, v sono quattro soluzioni di una medesima equazione di LAPLACE.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}^2}\, \theta\,,$$

legate dall'identità $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ *nel caso ellittico o dall'altra* $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ *nel caso iperbolico.*

Da questa osservazione fondamentale, che si può immediatamente invertire, si traggono le stesse conseguenze come nel caso euclideo.

Colla nozione di sistemi coniugati viene introdotto nel medesimo tempo quella delle linee *asintotiche*, con tangenti coniugate a sè stesse, caratterizzate dalla proprietà di avere in ogni punto il piano osculatore coincidente col piano tangente della superficie. L'equazione differenziale delle asintotiche è ancora qui

$$\mathrm{D}du^2 + 2\,\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2 = 0,$$

onde le asintotiche sono reali od immaginarie secondo che la curvatura *relativa* k è negativa ovvero positiva. Esse coincidono soltanto quando $k = 0$, vale a dire $K = K_0$, e in tal caso la superficie è applicabile sul piano del corrispondente spazio ellittico od iperbolico. Chiamiamo in tal caso la superficie *sviluppabile* e dimostriamo facilmente che la superficie è un luogo di rette tangenti ad una curva dello spazio (spigolo di regresso), la quale però può anche essere, nel caso iperbolico, totalmente immaginaria. Assumiamo infatti sulla sviluppabile S a linee coordinate v=cost.te le asintotiche e le loro trajettorie ortogonali per linee u = costte; avremo

$$F = 0 \ , \quad D = D' = 0$$

e naturalmente $D'' \neq 0$, altrimenti la superficie, a causa delle (38), avrebbe le ξ costanti cioè sarebbe un piano, caso evidente.

Ora la prima formola (VII) di Codazzi si riduce a $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$ e dice che le asintotiche v=cost.te sono inoltre geodetiche, e per ciò linee rette. (*) Distendendo la sviluppabile sul piano, queste rette avranno un inviluppo che nel caso iperbolico potrà anche tutto trovarsi nella regione inacessibile della metrica. Alla curva corrispondente sopra S sono dunque tangenti tutte le generatrici, c. d. d.

Ritornando alle linee asintotiche sopra una superficie qualunque, estendiamo il teorema di Beltrami Enneper (§ 77) che qui assume la forma

---

(*) A questo punto la dimostrazione si potrebbe proseguire analiticamente ricercando la condizione affinchè una semplice infinità di normali ad una curva formino una sviluppabile. Servendosi delle formole di Frenet (§ 468) si trova che indicando con τ l'angolo d'inclinazione della normale richiesta sulla normale principale, bisogna prendere come in geometria euclidea (§ 120)

$$\tau = \int \frac{ds}{T} \ ,$$

la quale formola include tutta la teoria delle evolute.

La distanza w che intercede fra l'evolvente C e l'evoluta Γ si calcola dalla formola

$$tg\left(\frac{w}{R}\right) = \frac{\rho}{R\cos\tau} \quad \text{o} \quad tg\,h\left(\frac{w}{R}\right) = \frac{\rho}{R\cos\tau} \ ,$$

secondo che siamo nel caso ellittico o nell'iperbolico.

In questo secondo caso l'evoluta Γ è reale solo quando il secondo membro ha un valore assoluto < 1.

seguente: *Il quadrato della torsione delle linee asintotiche in ogni punto eguaglia la curvatura relativa k della superficie, presa col segno contrario.*

Per dimostrarlo ricordiamo che i coseni di direzione della binormale all'asintotica coincidono con quelli della normale alla superficie e si ha quindi

$$\frac{1}{T^2} = \mathop{S}_{\nu}\left(\frac{d\xi_\nu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\,\frac{E'\,du^2 + 2\,F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Ma, siccome la linea è asintotica, si ha lungo di essa

$$D du^2 + 2\,D' du\,dv + D''\,dv^2 = 0$$

e per ciò la precedente si muta, secondo la (39), nella formola

$$\frac{1}{T^2} = -k,$$

ciò che dimostra il teorema. Si potrebbe precisare anche qui il teorema in riguardo ai segni, provando che le due asintotiche uscenti da un punto hanno sempre ivi torsioni eguali e di segno contrario, cioè differiscono per il senso, sinistrorso nell'una destrorso nell'altra.

§ 486.

La superficie S riferita alle sue linee di curvatura.

Le formole fondamentali stabilite ci permetterebbero di riprendere l'intera teoria delle superficie e svolgerla nel caso ellittico ed iperbolico parallelamente al caso ordinario euclideo. Ci limiteremo a rilevare alcuni punti principali della facile ricerca e in primo luogo ci occuperemo di estendere (*) al caso ellittico ed iperbolico il celebre teorema di WEINGARTEN sulle evolute delle superficie W (§§ 163, 164), come quello che dà uno dei più importanti risultati della teoria.

Cominciando dal caso dello spazio ellittico, riferiamo la superficie data S alle sue linee di curvatura (u, v), e siano

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \quad D du^2 + D''\,dv^2$$

(*) Estensione data la prima volta dall'autore nel 1887 nella memoria: *Sui sistemi di* WEINGARTEN *negli spazî a curvatura costante* (Acc. dei Lincei Serie IV Vol. IV, pag. 221).

rispettivamente la prima e seconda forma fondamentale, e ρ_1, ρ_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura. Indichino al solito x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate del punto (u, v) di S e ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 quelle del piano tangente. Avremo in primo luogo le formole (§ 483)

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{R}{\rho_2}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{R}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial v},$$

omettendo per brevità gli indici alle lettere x, ξ, e di qui deduciamo intanto.

$$D = -RS\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{E}{\rho_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -RS\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{G}{\rho_1}.$$

Ora introduciamo anche i coseni di direzione delle tangenti alle linee di curvatura $v =$ cost.te, $u =$ cost.te, che indicheremo rispettivamente con

$$\eta_0, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3$$
$$\zeta_0, \ \zeta_1, \ \zeta_2, \ \zeta_3,$$

e rappresenteranno anche le coordinate dei due piani principali, normali in (u, v) alle dette linee di curvatura. I valori effettivi delle η, ζ saranno

$$\eta = \frac{R}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \zeta = \frac{R}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

ed applicando le formole (37) pag. 578, potremo scrivere il quadro delle formole seguenti, fondamentali per la nostra ricerca:

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{R}\eta, \ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\eta, \ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{E}}{R}x - \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\xi - \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\zeta, \ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\eta \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{R}\zeta, \ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\zeta, \ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\zeta, \ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}}{R}x - \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\xi - \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\eta. \end{cases}$$

Affatto analogamente si procederà nel caso iperbolico e si avrà l'altro quadro affatto simile al precedente:

$$(40^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{R}\eta, \ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\eta, \ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{R}x - \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\xi - \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\zeta, \ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\eta \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{R}\zeta, \ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\zeta, \ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\zeta, \ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{R}x - \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\xi - \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\eta, \end{cases}$$

e che ne differisce soltanto pel segno mutato nei termini lineari in x nei secondi membri.

Notiamo poi che le equazioni di CODAZZI conservano in ambedue i casi la stessa forma che per l'euclideo e cioè si scrivono:

$$(41)\qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial lg\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)=0 \\ \left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial lg\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)=0. \end{cases}$$

Quanto all'equazione di GAUSS, essa prende la forma

$$(42)\qquad \frac{1}{\rho_1\,\rho_2}=K-K_0=K\pm\frac{1}{R^2},$$

valendo il segno superiore pel caso ellittico, l'inferiore per l'iperbolico.

§ 487.

Le due falde dell'evoluta.

Come in geometria euclidea, abbiamo anche in geometria ellittica, sopra ogni normale della superficie S, due punti M_1, M_2 (sempre reali) che sono i centri principali di curvatura. Il luogo di questi punti M_1, M_2 è l'evoluta S composta di due falde Σ_1, Σ_2, che sono altresì le due falde focali della congruenza delle normali ad S. Per le distanze w_1, w_2 dei centri di curvatura dal piede M della normale si hanno le formole

$$\rho_1=R\,tg\left(\frac{w_1}{R}\right),\quad \rho_2=R\,tg\left(\frac{w_2}{R}\right).$$

Anche in geometria iperbolica valgono formole analoghe; ma siccome w_1, w_2 sono allora da calcolarsi colle formole

$$\rho_1=R\,tgh\left(\frac{w_1}{R}\right),\quad \rho_2=R\,tgh\left(\frac{w_2}{R}\right),$$

così un centro di curvatura è reale soltanto quando il corrispondente ρ è, in valore assoluto, $<R$, e può quindi darsi che una o tutte due le falde dell'evoluta siano nella regione inaccessibile della metrica.

Calcoliamo ora gli elementi relativi alle due falde dell'evoluta, precisamente come al Cap. IX § 157 per il caso euclideo. Sviluppiamo i calcoli pel caso ellittico indicando le modificazioni da introdursi nel caso iperbolico. Denotiamo con

$$\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3$$

le coordinate di un centro di curvatura, sia M_1, ed avremo (§ 483)

$$\bar{x} = x\cos\left(\frac{w_1}{R}\right) - \xi\,\mathrm{sen}\left(\frac{w_1}{R}\right),$$

da cui derivando ed osservando le (40), deduciamo :

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{R}\left[\cos\left(\dfrac{w_1}{R}\right) - \dfrac{R}{\rho_2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{w_1}{R}\right)\right]\eta - \dfrac{1}{R}\left[x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{w_1}{R}\right) + \xi\cos\left(\dfrac{w_1}{R}\right)\right]\dfrac{\partial w_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\dfrac{1}{R}\left[x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{w_1}{R}\right) + \xi\cos\left(\dfrac{w_1}{R}\right)\right]\dfrac{\partial w_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Le coordinate $\bar{\xi}$ del piano tangente in $(\bar{x})$ alla prima falda Σ_1 dell'evoluta coincidono quindi colle ζ, e questo piano coincide col secondo piano principale della evolvente S, come poteva vedersi geometricamente colle considerazioni del § 154.

Se indichiamo con

$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$$
$$D_1\,du^2 + 2\,D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2$$

le due forme fondamentali di Σ_1, osservando le (40), (43), troviamo :

$$(44)\quad \begin{cases} E_1 = E\dfrac{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_1 - w_2}{R}\right)}{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_2}{R}\right)} + \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \dfrac{\partial w_1}{\partial u}\dfrac{\partial w_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2 \\ D_1 = \dfrac{1}{R}\dfrac{E}{\sqrt{G}}\dfrac{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_1}{R}\right)}{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_2}{R}\right)}\dfrac{\partial w_2}{\partial v}, \quad D'_1 = 0, \quad D''_1 = -\dfrac{\sqrt{G}}{R}\dfrac{1}{\mathrm{sen}\left(\dfrac{w_1}{R}\right)}\dfrac{\partial w_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Ne deduciamo intanto :

$$ds_1^2 = dw_1^2 + E\frac{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_1 - w_2}{R}\right)}{\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{w_2}{R}\right)}du^2,$$

onde segue che sopra Σ_1 le linee u = cost.te sono geodetiche, e le loro trajettorie ortogonali sono le w_1 = cost.te, (o ρ_1 = cost.te). Per la seconda falda avremo similmente

$$(44^*) \qquad D_2 = -\frac{\sqrt{E}}{R}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{w_2}{R}\right)}\frac{\partial w_2}{\partial u}, \quad D'_2 = 0, \quad D''_2 = \frac{1}{R}\frac{G}{\sqrt{E}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_2}{R}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1}{R}\right)}\frac{\partial w_1}{\partial u}$$

$$ds_2^2 = dw_2^2 + G\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1}{R}\right)}dv^2.$$

Indicando poi con k_1, k_2 le curvature *relative* delle due falde, se ne traggono le formole notevoli:

$$(45) \qquad k_1 = -\frac{1}{R^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)}\frac{\frac{\partial w_2}{\partial v}}{\frac{\partial w_1}{\partial v}}, \quad k_2 = -\frac{1}{R^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)}\frac{\frac{\partial w_1}{\partial u}}{\frac{\partial w_2}{\partial u}}.$$

Non staremo a scrivere le formole corrispondenti pel caso iperbolico, che si deducono dalle precedenti cangiando i seni circolari in iperbolici quando le due falde sono reali, e reali quindi w_1, w_2. Se invece p. e w_1 è reale, ma w_2 immaginario per essere $|\rho_2| > R$, converrà lasciare nelle formole precedenti il valore ρ_2 invece di introdurvi w_2.

Osserviamo infine che, se si calcola la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_{w_1}}$ delle linee w_1 = cost.te sulla Σ_1, p. e colla formola di BONNET (I pag. 269), si trova la semplice formola

$$(46) \qquad \frac{1}{\rho_{w_1}} = \frac{1}{R}\cot\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right).$$

§ 488.

La superficie W ed il teorema di Weingarten.

Come nel caso euclideo (§ 160), siamo condotti anche qui alle *superficie* W dal ricercare: *quando accade che sulle due falde dell' evoluta si corrispondono le asintotiche* ?

Le formole (44), (44*) dànno subito per la condizione richiesta l'annullarsi del determinante funzionale $\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(u, v)}$, e quindi, come nel caso euclideo : *la condizione necessaria e sufficiente perchè sulle due falde della evoluta si corrispondano le asintotiche è che la superficie evolvente* S *abbia i raggi principali di curvatura legati da una relazione, sia cioè una superficie* W.

Per una tale superficie W le (45) diventano

$$k_1 = -\frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)} \frac{dw_2}{dw_1}, \quad k_2 = -\frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)} \frac{dw_1}{dw_2},$$

e moltiplicate dànno la formola corrispondente al teorema di HALPEN (§ 160) :

$$k_1 k_2 = \left(\frac{1}{R \operatorname{sen}\left(\frac{w_1 - w_2}{R}\right)}\right)^4. \tag{47}$$

Dalla formola (46) applicata al caso di una superficie W risulta che in tal caso $\frac{1}{\rho_{w_1}}$ è funzione di w_1 soltanto e questa funzione dipende unicamente dalla relazione $\varphi(\rho_1 \rho_2) = 0$ che lega i raggi di curvatura della evolvente. L'elemento lineare della prima falda dell'evoluta assume quindi la forma:

$$ds_1^2 = dw_1^2 + \psi^2(w_1)\, du^2,$$

che possiamo realizzare, nello spazio ellittico ed iperbolico, con superficie di rotazione (*). Abbiamo così esteso agli spazî di curvatura costante il teorema di WEINGARTEN :

(*) Se nello spazio ellittico si fa rotare una curva piana attorno ad un asse nel suo piano, e si indica con α l'arco di meridiano, con r il raggio del parallelo che sarà una funzione della sola α, per il ds^2 della superficie di rotazione si trova subito

$$ds^2 = d\alpha^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{R}\right) d\beta^2,$$

indicando con β la longitudine. Nello spazio iperbolico vale la formola analoga

$$ds^2 = d\alpha^2 + R \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{R}\right) d\beta^2.$$

Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie W è applicabile sopra una superficie di rotazione la cui forma dipende unicamente dalla relazione che lega i raggi di curvatura ρ_1, ρ_2 *della evolvente* W.

Ora le considerazioni geometriche di Beltrami per dimostrare il teorema reciproco (§ 164) si trasportano inalterate al caso attuale, sicchè vale anche qui il secondo teorema di WEINGARTEN, quando si escludano le superficie rigate applicabli sopra superfici di rotazione in guisa che le generatrici si distendano sui meridiani. Come si è visto al paragrafo 470, tutte le superficie luogo delle binormali alle curve a torsione costante appartengono a questa classe ; ma è facile vedere che esse l' esauriscono completamente. Per dimostrarlo supponiamo di avere, p. es. nello spazio ellittico, una superficie rigata che, riferite alle generatrici v = cost.te ed alle traiettorie ortogonali, abbia il ds^2 della forma tipica

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2 .$$

Le v = cost.te essendo qui asintotiche, avremo $D = 0$, e la prima equazione (VII*) di CODAZZI ci dà

$$\frac{D'}{\varphi} = \frac{c}{\varphi^2},$$

con c costante e la (VIII) di GAUSS

$$\frac{D'^2}{\varphi^2} = \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{R^2},$$

ossia

$$\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{R^2} = \frac{c^2}{\varphi^4}.$$

Moltiplicando per $2\,\varphi\,\varphi'$ e integrando una prima volta, ne risulta

$$\varphi'^2 = h^2 - \frac{\varphi^2}{R^2} - \frac{c^2}{\varphi^2},$$

con h nuova costante. Se poniamo $\varphi^2 = \theta$ possiamo scrivere

$$\theta'^2 = 4h^2\theta - 4c^2 - \frac{4\theta^2}{R^2},$$

ossia

$$\theta' = \sqrt{(h^4 R^2 - 4c^2) - \left(\frac{2\theta}{R} - h^2 R\right)^2},$$

da cui integrando nuovamente

$$\theta = \varphi^2 = \frac{R}{2}\left\{h^2 R + \sqrt{h^4 R^2 - 4c^2}\cos\left(\frac{2u}{R}\right)\right\}.$$

Confrontando questa formola colla (52*) § 470 (pag. 537) si vede che la rigata è applicabile su quella delle binormali di una curva a torsione costante, ed è quindi essa stessa una rigata di tale specie. (*) Pel caso iperbolico la dimostrazione è affatto analoga onde concludiamo che sussiste per qualunque spazio a curvatura costante il teorema reciproco di WIENGARTEN :

Escluse le superficie rigate delle binormali alle curve di torsione costante, ogni altra superficie applicabile sopra una superficie di rotazione può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie W.

§ 489.

Le superficie riferite alle loro linee asintotiche.

Applichiamo ora le formole generali del § 481 al caso in cui la superficie S dello spazio ellittico od iperbolico sia riferita alle sue linee asintotiche u, v, che supponiamo reali distinte, per il che occorre e basta che la curvatura relativa $k = K - K_0$ sia negativa. Se poniamo

$$k = -\frac{1}{\rho^2},$$

avremo

$$D = D'' = 0, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\rho}$$

e le formole (VII*) di CODAZZI diventano

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}. \tag{48}$$

(*) Sulla rigata luogo delle binormali di una curva C la C è geodetica e deformando la rigata, con generatrici rigide, queste restano le binormali della curva C che conserva la medesima torsione.

Viceversa se la curvatura K della forma differenziale

$$(48^*) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

è tale che ponendo

$$(49) \qquad \mathrm{K} = \mathrm{K}_0 - \frac{1}{\rho^2},$$

sussistano le (48), esisterâ una superficie dello spazio ellittico od iperbolico secondo che $\mathrm{K}_0 > 0$ o $\mathrm{K}_0 < 0$, il cui ds^2 riferito alle asintotiche u, v sarà dato dalla (48*).

Applichiamo queste osservazioni generali a due casi particolari.

1° Cerchiamo le superficie d'area minima o a curvatura media nulla. Siccome qui

$$\mathrm{H} = \frac{2\,\mathrm{F}\,\mathrm{D}'}{\mathrm{E}\,\mathrm{G} - \mathrm{F}^2}$$

sarà $\mathrm{F} = 0$, le asintotiche sono ortogonali. Ma per le (48) deve essere

$$\frac{\partial\, log\, \rho}{\partial u} = 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = \frac{\partial\, log\, \mathrm{G}}{\partial\, u}, \qquad \frac{\partial\, log\, \rho}{\partial\, v} = 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = \frac{\partial\, log\, \mathrm{E}}{\partial\, v},$$

e si potrà fare quindi, cangiando i parametri u, v:

$$\mathrm{E} = \mathrm{G} = \rho.$$

Ne segue : *Su tutte le superficie minime degli spazii a curvatura costante le linee asintotiche formano un sistema ortogonale isotermo.*

Formano quindi anche su queste superficie un sistema isotermo le linee di curvatura, onde le immagini di queste superficie nella rappresentazione conforme dello spazio curvo sullo spazio euclideo, sono particolari superficie isoterme.

Quanto alla ricerca effettivà di queste supeficie minime in geometria ellittica od iperbolica, si vede che, ponendo $\rho = e^{2\theta}$, dipendono secondo la (49) dall'equazione di 2.° ordine per θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\, u} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial\, v^2} = e^{-2\theta} - \mathrm{K}_0\, e^{2\theta}.$$

Nel caso ellittico $K_0 > 0$, cangiando θ in $\theta +$ cost.te, questa si riduce in sostanza all'equazione stessa

$$\frac{\partial^2(2\,\omega)}{\partial\, u^2} + \frac{\partial^2(2\,\omega)}{\partial\, v^2} + \operatorname{senh}(2\,\omega) = 0$$

da cui abbiamo visto dipendere la ricerca dalle deformate della sfera (o delle superficie a curvatura media costante) nello spazio euclideo; e nel caso iperbolico $K_0 < 0$ dall' altra equazione

$$\frac{\partial^2(2\omega)}{\partial\, u^2} + \frac{\partial^2(2\omega)}{\partial\, v^2} = \cosh(2\,\omega)\,.$$

2.° Consideriamo in secondo luogo le superficie a curvatura costante dello spazio ellittico od iperbolico. Siccome ora $\rho =$ cost.te, segue

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$$

e le asintotiche (u, v) formano, come nel caso euclideo, una rete di Teheby-chef. Scrivendo il ds^2 sotto la forma tipica

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\,\omega\, du\, dv + dv^2, \tag{50}$$

valgono le conseguenze stesse del caso ordinario. Ed anche l'equazione a derivate parziali da cui dipendono le superficie a curvatura costante, con asintotiche reali, in geometria ellittica od iperbolica, è la stessa come nel caso euclideo. La (49) applicata al caso attuale dà infatti

$$\frac{\partial^2(2\omega)}{\partial\, u\, \partial\, v} = \left(\frac{1}{\rho^2} - K_0\right)\operatorname{sen}2\,\omega = -\,K\operatorname{sen}(2\omega)\,, \tag{51}$$

che è la solita equazione dai cui dipendono le superficie pseudosferiche nello spazio euclideo.

§ 490.

Le superficie a curvatura nulla in geometria ellittica (*).

Applichiamo le formole sopra stabilite alla ricerca di una notevole classe di superficie dello spazio ellittico, alle superficie di cui è nulla la cur-

(*) Cf. la memoria dell'A. citata al § 467.

vatura *assoluta* K, che hanno cioè la geometria del piano euclideo. Abbiamo g à studiato al § 467, una classe di queste superficie, le rigate di CLIFFORD, che sono altresì le rigate delle binormali delle curve colla torsione costante $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$ (§ 470). Cominciamo ora dal provare che queste sono le uniche rigate dello spazio ellittico a curvatura assoluta nulla. (*) Riferendo la rigata supposta a curvatura nulla alle sue asintotiche, di cui le v=cost.te, siano le rettilinee, avremo per il ds^2 la forma (50) e di più, le v = cost.te essendo geodetiche, sarà $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$, onde avremo

$$ds^2 = du^2 + 2\,V'\,du\,dv + dv^2,$$

con V funzione di v, $V' = \frac{dV}{dv}$. Ma allora ponendo $u_1 = u + V$ viene

$$ds^2 = du_1^2 + (1 - V'^2)\,dv^2,$$

e le trajettorie ortogonali delle generatrici sono tutte geodetiche onde hanno per binormali le generatrici stesse. Le formole (52*) § 470, pag. 537 dimostra che esse sono curve (congruenti) a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$.

Dunque: *le rigate a curvatura nulla dello spazio ellittico sono tutte e sole le rigate di* CLIFFORD.

Passiamo ora a considerare le più *generali* superficie a curvatura K nulla dello spazio ellittico. La (51), essendo K = 0, s'integra immediatamente e dà

$$2\,\omega = U + V,$$

dove U, V sono due funzioni arbitrarie l'una di u, l'altra di V. Il ds^2 prende quindi la forma caratteristica.

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(U + V)\,du\,dv + dv^2 \tag{52}$$

delle reti di TCHEBYCHEF sul piano ordinario (§ 63), sul quale le curve u, come le v, sono congruenti fra loro per traslazione. Ma ora dimostriamo

(*) La dimostrazione seguente nel testo prova anzi di più che: *soltanto nello spazio ellittico esistono rigate a curvatura costante, e queste sono a curvatura nulla (rigate di* CLIFFORD*).*

che la stessa cosa ha luogo nello spazio ellittico, dove le asintotiche u o v di un medesimo sistema sono congruenti fra loro *per uno scorrimento*. Per questo cominciamo dal dimostrare il teorema: *Le tangenti condotte per i punti di un'asintotica* $u=cost.^{te}$, *della superficie a curvatura nulla alle asintotiche dell'altro sistema sono rette fra loro parallele* (*nel senso di* CLIFFORD). Questo si può dedurre dalla formola (α) calcolata al § 470 pag.537); ma per evitare un'incertezza di segno che potrebbe rimanere riconduciamo la dimostrazione a quella antecedente provando che la rigata di queste tangenti è a curvatura nulla.

Indichiamo con t il tratto di generatrice contato a partire da $u=u_0$, con x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 le coordinate dell' estremo. I coseni di direzione della tangente alla linea v = cost.^{te} essendo $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, avremo

$$x'_i = x_i \cos\left(\frac{t}{R}\right) + \frac{\partial x_i}{\partial u} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{R}\right),$$

da cui derivando rispetto a v coll'osservare che a causa della media delle (37) pag. 578 è

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{R^2}(-\cos\omega\, x + \operatorname{sen}\omega\, \xi),$$

risulta

$$\frac{\partial x'_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v}\cos\left(\frac{t}{R}\right) + \frac{1}{R^2}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{R}\right)(-\cos\omega x + \operatorname{sen}\omega\, \xi).$$

E poichè inoltre

$$\frac{\partial x'_i}{\partial t} = \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial u}\cos\left(\frac{t}{R}\right) - x_i \operatorname{sen}\left(\frac{t}{R}\right)\right\},$$

per il ds'^2 della rigata abbiamo

$$ds'^2 = dt^2 + 2\,\frac{\cos(U+V)}{R}\,dt\,dv + \frac{dv^2}{R^2},$$

e la forma del secondo membro è appunto a curvatura nulla.

§ 491.

Le superficie a curvatura nulla come superficie di scorrimento.

Dopo ciò è facile dimostrare che due asintotiche di uno stesso sistema sulla superficie a curvatura nulla sono curve congruenti fra loro per scorrimento. Per ciò osserviamo che le flessioni di queste asintotiche coincidono colle rispettive curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$, per le quali dalla (52) abbiamo

$$\frac{1}{\rho_u} = 2\frac{\partial \omega}{\partial v} = V', \quad \frac{1}{\rho_v} = 2\frac{\partial \omega}{\partial u} = U'.$$

Se confrontiamo allora due asintotiche del medesimo sistema p. e. $u = u_0$ ed $u = u_1$, vediamo che queste, ad eguale arco v, hanno la medesima torsione $\frac{1}{T} = \pm \frac{1}{R}$, ed anche la medesima flessione

$$\frac{1}{\rho_{u_1}} = \frac{1}{\rho_{u_0}} = V',$$

e per ciò sono curve congruenti (§ 468). Ma nel movimento continuo che porta a coincidere successivamente un'asintotica con tutte quelle del medesimo sistema i varii punti descrivono archi di asintotica di eguale lunghezza. In particolare nel movimento infinitesimo che porta un'asintotica nella successiva i punti descrivono tratti eguali in direzioni parallele ; quel movimento infinitesimo è adunque uno scorrimento, c. d. d.

È poi da osservarsi che le asintotiche dell'un sistema sono tutte a torsione positiva $+\frac{1}{R}$, quelle dell'altro sistema con torsione opposta $-\frac{1}{R}$, e la superficie a curvatura nulla si genera sia collo scorrimento continuo di un'asintotica del primo sistema nel quale un suo punto descriva un'asintotica del secondo, sia collo scorrimento continuo di senso contrario di un'asintotica del secondo lungo una del primo

Le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico appartengono perciò ad una classe di superficie, assimilabile a quelle di traslazione dello spazio euclideo, che indichiamo col nome di *superficie di scorrimento*. Per definirle prendiamo le formole (VII) del § 463 (pag. 517) relative ad uno

scorrimento p. e. destrorso :

$$(53)\qquad \begin{cases} x'_0 = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3 \\ x'_1 = Bx_0 + Ax_1 - Dx_2 + Cx_3 \\ x'_2 = Cx_0 + Dx_1 + Ax_2 - Bx_3 \\ x'_3 = Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 + Ax_3 , \end{cases}$$

nelle quali per le x, poniamo quattro funzioni arbitrarie di un parametro u, sicchè le equazioni

$$x_i = x_i\,(u)$$

definiscono parametricamente una curva Γ nello spazio, e le (53) la curva stessa dopo lo scorrimento (A, B, C, D). Supponiamo ora che i quattro coefficienti A, B, C, D siano variabili, e funzioni di un paramento v

$$A = y_0\,(v),\quad B = y_1\,(v),\quad C = y_2\,(v),\quad D = y_3\,(v) ,$$

le quali alla loro volta definiscono parametricamente una curva Γ' colle equazioni

$$y_i = y_i\,(v).$$

Sostituendo nelle (53), avremo definita parametricamente una superficie che nasce dallo scorrimento continuo *destrorso* della curva Γ lungo la curva Γ'. Ma se ordiniamo le (53) rapporto a y_0, y_1, y_2, y_3, scrivendo

$$(53^*)\qquad \begin{cases} x'_0 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \\ x'_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 \\ x'_2 = x_2 y_0 - x_3 y_1 + x_0 y_2 + x_1 y_3 \\ x'_3 = x_3 y_0 + x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_0 y_3 , \end{cases}$$

vediamo che queste per u costante e v variabile definiscono uno scorrimento della specie opposta (sinistrorso), pel quale la curva Γ' scorre lungo Γ. Le superficie definite da queste formole sono appunto le generali superficie di scorrimento delle quali chiamiamo Γ, Γ' le curve generatrici. A definire una tale superficie basta dare le due curve generatrici Γ, Γ' uscenti da un medesimo punto.

Tutte le superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico si ottengono dunque colla costruzione geometrica seguente: *Prese due curve* Γ, Γ' *a tor-*

sione costante $+\frac{1}{R}$ *l'una,* $-\frac{1}{R}$ *per l'altra, e del resto arbitrarie, si collochino nello spazio in guisa che abbiano un punto comune* M *ed ivi lo stesso piano osculatore: se si dà a* Γ *uno scorrimento continuo destrorso lungo* Γ', *ovvero a* Γ' *uno scorrimento continuo sinistrorso lungo* Γ, *si ottiene la più generale superficie a curvatura nulla.*

Le curve a torsione costante $\pm\frac{1}{R}$ essendo tutte note, come trajettorie ortogonali delle generatrici in una rigata di CLIFFORD, ne risultano così determinate, in termini finiti, tutte le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico.

Osserviamo in fine che se delle due curve arbitrarie Γ, Γ' $\left(\text{con torsione} = \pm\frac{1}{R}\right)$, una si riduce ad una retta, per il che basta prendere costante una delle due funzioni U, V, la superficie diventa una rigata di CLIFFORD, e più in particolare se ambedue la curve Γ, Γ' si riducono a rette, si ha la superficie di CLIFFORD.

§ 492.

Ulteriori proprietà delle superficie a curvatura nulla.

Troviamo altre notevoli proprietà delle nostre superficie applicando le formole dei §§ 486, 487.

Se diciamo ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura, essendo $K = 0$, indi $\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{1}{R^2}$, abbiamo

$$tg\left(\frac{w_1}{R}\right) tg\left(\frac{w_2}{R}\right) = -1,$$

cioè

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi R}{2}.$$

E viceversa da $w_1 - w_2 = \frac{\pi R}{2}$ segue $\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{1}{R^2}$, $K = 0$, onde concludiamo: *La superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico sono caratterizzate dalla proprietà che, sopra ogni normale, i due centri principali di curvatura distano di un quadrante* $\frac{\pi R}{2}$.

Ne risulta in particolare: *le superficie parallele ad una superficie a curvatura nulla sono tutte a curvatura nulla.*

Osserviamo ora che, nella metrica Cayleyana, la congruenza delle normali ad una superficie qualsivoglia è rappresentata da una congruenza in cui i due piani focali di ogni raggio sono coniugati rispetto all'assoluto; e di più, nel caso speciale che ci occupa, anche i due fuochi sopra ogni raggio sono coniugati. Così: *nella metrica Cayleyana la congruenza delle normali ad una superficie a curvatura nulla gode della proprietà (caratteristica) che i due fuochi sopra ogni raggio sono coniugati rispetto all'assoluto, come i piani focali pel raggio.*

Consideriamo poi le due falde focali dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla. Le loro curvature (relative) k_1, k_2 calcolate dalle (45) § 487 (pag. 586) sono

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{R^2},$$

e in queste formole è contenuto il teorema:

Le due falde dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla sono ancora a curvatura nulla.

Ora i valori (44) pag. 585 pei coefficienti D_1, D'_1, D''_1 della prima falda dell'evoluta sono:

$$D_1 = \frac{1}{R}\frac{E}{\sqrt{G}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1}{R}\right)\partial w_1}{\cos^2\left(\frac{w_1}{R}\right)\partial v}, \quad D'_1 = 0, \quad D''_1 = -\frac{\sqrt{G}}{R}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1}{R}\right)}\frac{\partial w_1}{\partial v},$$

e siccome

$$D = -\frac{E}{\rho_2} = \frac{E}{R}\operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{R}\right), \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{\rho_1} = -\frac{G}{R}\cot\left(\frac{w_1}{R}\right),$$

ne segue la proporzione

$$D : D' : D'' = D_1 : D'_1 : D''_1,$$

indi il teorema: *Alle asintotiche della evolvente a curvatura nulla corrispondono le asintotiche sulle due falde dell'evoluta.* (*)

(*) Come nello spazio euclideo questa proprietà vale più in generale (quale proprietà caratteristica) per evolventi a curvatura costante.

Applicando ora la formola (46) pag. 586 al caso attuale, abbiamo $\frac{1}{\rho_{w_1}} = 0$, cioè le $w_1 = \text{cost.}^{te}$ sono geodetiche sulla prima falda dell'evoluta (come sulla seconda); e poichè le $u = \text{cost.}^{te}$ sono geodetiche ortogonali a queste, le une e le altre formano un sistema di geodetiche parallele nel senso ordinario euclideo. Viceversa, se prendiamo sopra una superficie a curvatura nulla un sistema di geodetiche parallele nel senso euclideo, esse costituiranno, pel teorema reciproco di Weingarten, le normali di una superficie W, la quale, come risulta dalla (46), ha ancora curvatura nulla. Dunque: *tracciando sopra una superficie a curvatura nulla un sistema qualunque di geodetiche parallele nel senso euclideo, le rette tangenti a queste geodetiche hanno per superficie normali (evolventi) altrettante superficie a curvatura nulla.*

Osserviamo poi che, mentre la superficie di partenza S è la prima falda dell'evoluta della evolvente Σ, la seconda falda se ne ottiene staccando sulle dette tangenti, a partire dal punto di contatto, un segmento $= \frac{\pi R}{2}$ (*).

Abbiamo quindi il teorema:

Staccando sulle rette tangenti alle geodetiche di un sistema parallelo sopra una superficie S *a curvatura nulla, a partire dal punto di contatto, un segmento eguale ad un quadrante* $\frac{\pi R}{2}$, *il luogo* S′ *degli estremi è una nuova superficie a curvatura nulla.*

Con questa costruzione, da una superficie S a curvatura nulla ne deriviamo una semplice infinità di complementari S′, le quali facilmente vediamo che sono parallele ed hanno per normali le rette polari, rispetto all'assoluto, delle normali alla primitiva S. Ed infatti la normale in un punto M′ alla S′ giace nel piano tangente alla S nel punto corrispondente M ed è perpendicolare in M′ al segmento $MM' = \frac{\pi R}{2}$ per ciò essa è, sul detto piano tangente, la polare del punto di contatto, vale a dire la polare rispetto all'assoluto della normale in M alla S. Ne concludiamo: *La congruenza delle normali ad una superficie di curvatura nulla ha per congruenza polare una congruenza della medesima specie.*

Si vede subito del resto, con considerazioni di metrica Cayleyana, che è questa una proprietà caratteristica di siffatte congruenze, poichè se una congruenza normale ha per congruenza polare un'altra congruenza nor-

(*) Il senso è indifferente tornandosi al medesimo punto.

male, nell'una e nell'altra i fuochi sono coniugati rispetto all'assoluto, e distano quindi in metrica Cayleyana di un quadrante $\frac{\pi R}{2}$.

§ 493.

Preliminari sulla rappresentazione sferica. Formole del Fubini.

Ci proponiamo di proseguire ancora il confronto della geometria ellittica ed iperbolica colla euclidea in riguardo alla *rappresentazione sferica* di GAUSS delle superficie, di cui conosciamo l'importanza fondamentale nella geometria ordinaria. E in primo luogo dobbiamo domandarci in quale senso tale estensione debba farsi. È ben naturale che si debba per ciò modificare la costruzione di GAUSS secondo le corrispondenti definizioni di parallelismo, nel nuovo senso della geometria ellittica od iperbolica. Se si ha adunque una superficie qualunque Σ, nello spazio ellittico od iperbolico, si sceglierà una sfera col centro in un punto O dello spazio, sulla quale si rappresenterà Σ conducendo alla normale in un punto generico M di Σ le due parallele per O, nel senso di CLIFFORD nel primo caso, e nel senso non euclideo nel secondo. Così ogni punto M sulla superficie avrà due punti immagini M_1, M_2 sulla sfera rappresentativa (i punti ove le dette parallele incontrano la sfera), e quando M descrive S, i due punti M_1, M_2 descriveranno le *due immagini sferiche* di Σ.

Descritto il principio comune della rappresentazione, conviene ora trattare i due casi separatamente, poichè le proprietà della rappresentazione sferica ordinaria dànno luogo a proprietà di natura ben differente, secondo la diversa natura del parallelismo.

Cominciando dal caso ellittico, (*) osserveremo che, cangiando il raggio della sfera rappresentativa, le due immagini sferiche subiscono soltanto un'ordinaria similitudine. Prendiamo allora il raggio della sfera eguale ad un quadrante $\frac{\pi R}{2}$, e la sfera sarà ridotta al piano polare del suo centro. Le due immagini così ottenute si diranno le *immagini di* CLIFFORD della superficie Σ. Per stabilire le formole relative occorre in primo luogo trasformare le formole fondamentali (40) pag. 583 in altre, dovute al FUBINI,

(*) La rappresentazione di cui ora andiamo a trattare venne studiata dal FUBINI nella sua tesi (citata al § 466) e denominata rappresentazione di CLIFFORD.

nelle quali figurano i parametri di scorrimento, destrorsi o sinistrorsi, per gli spigoli del triedro principale della superficie. Indichiamo rispettivamente con

$$(X_1, Y_1, Z_1),\ (X_2, Y_2, Z_2),\ (X_3, Y_3, Z_3)$$

i parametri di scorrimento *destrorsi* della tangente alla linea $v = \text{cost}^{\text{te}}$, 2° della tangente alla linea $u = \text{cost}^{\text{te}}$, 3° della normale alla superficie, ed avremo (§ 466)

$$(54)\quad X_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \eta_0 & \eta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \eta_2 & \eta_2 \end{vmatrix},\ X_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \zeta_0 & \zeta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

$$X_3 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

colle analoghe per (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3), che si deducono da quelle ora scritte tenendo fisso l'indice zero e permutando circolarmente (1, 2, 3). Se ora deriviamo le (54) rapporto ad u, v, tenendo conto delle (40) e delle proprietà del determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = 1,$$

troviamo subito le seguenti formole :

$$(IX)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2} X_3,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \dfrac{\sqrt{E}}{R} X_3,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2} X_1 - \dfrac{\sqrt{E}}{R} X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 - \dfrac{\sqrt{G}}{R} X_3,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{\rho} X_3,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{R} X_1 + \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1} X_2. \end{cases}$$

Se, insieme ai parametri destrorsi, introduciamo anche i sinistrorsi, indicandoli con un soprassegno :

$$(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

abbiamo le formole :

$$(54)\quad \overline{X}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \eta_0 & \eta_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix},\quad \overline{X}_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \zeta_0 & \zeta_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

$$\overline{X}_3 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

e lo stesso calcolo sopra eseguito ci dà le formole corrispondenti :

$$(IX^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\overline{X}_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\overline{X}_3, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\overline{X}_1 - \dfrac{\sqrt{E}}{R}\overline{X}_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2}\overline{X}_1 + \dfrac{\sqrt{E}}{R}\overline{X}_2 \\ \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\overline{X}_2 + \dfrac{\sqrt{G}}{R}\overline{X}_3, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\overline{X}_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\overline{X}_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}}{R}\overline{X}_1 + \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1}\overline{X}_2. \end{cases}$$

§ 494.

Le due rappresentazioni di Clifford.

Applichiamo le formule (IX), (IX*), al calcolo degli elementi lineari ds_3, $\overline{ds}_3$ delle due immagini di CLIFFORD della nostra superficie Σ, prendendo come centro O di projezione il punto (1, 0, 0, 0) indi per piano rappresentativo il suo piano polare $x_0 = 0$. Su questo piano (ellittico), a causa del significato dei parametri di scorrimento (§ 466), le coordinate dei due punti immagini del punto (u, v) sulla superficie sono precisamente

$$(X_3, Y_3, Z_3),\ (\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3),$$

e si ha quindi

$$ds_3^2 = dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2$$

$$\overline{ds}_3^2 = d\overline{X}_3^2 + d\overline{Y}_3^2 + d\overline{Z}_3^2.$$

Questi due ds_3 appartengono alla sfera ordinaria (di raggio = 1), la cui geometria è appunto quella del piano ellittico e calcolandoli secondo

le (IX) (IX*) risulta

$$(55)\quad ds_3^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)du^2 + \frac{2\sqrt{\mathrm{EG}}}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)du\,dv + \mathrm{G}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)dv^2$$

$$(55^*)\quad \bar{ds}_3^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)du^2 - \frac{2\sqrt{\mathrm{EG}}}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)du\,dv + \mathrm{G}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)dv^2.$$

Da queste semplici formole andiamo a dedurre alcune conseguenze. In primo luogo osserviamo che le due forme quadratiche (55), (55*) differiscono solo per il segno del coefficiente medio ed hanno per discriminante comune

$$\mathrm{E\,G}\left(\frac{1}{\rho_1\,\rho_2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)^2,$$

il quale si annulla soltanto per le superficie a curvatura nulla, avendosi allora

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2}\,(*).$$

Come dunque nella rappresentazione sferica di Gauss delle ordinarie superficie bisognava escludere le sviluppabili, così qui, nel caso ellittico, bisogna escludere le superficie a curvatura assoluta nulla perchè le loro immagini di Clifford non occupano più un'estensione superficiale ma si restringono a due curve, come era evidente *a priori* dalla proprietà, esclusiva di queste superficie, che le loro normali si ordinano lungo le asintotiche in due serie di rigate (di Clifford) a generatrici parallele.

Escluso il caso delle superficie a curvatura nulla, le (55*) pongono in evidenza le proprietà seguenti :

Le due immagini di Clifford *di una superficie* Σ *(a curvatura non nulla) sul piano ellittico dànno una rappresentazione equivalente di questo piano*

(*) Si osservi che il rapporto del discriminante comune delle due immagini di Clifford a quello per la superficie obiettiva Σ è dato da

$$\left(\frac{1}{\rho_1\,\rho_2} \div \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)^2,$$

la cui radice quadrata è la curvatura assoluta di Σ. Per le superficie a curvatura costante, e per queste soltanto, l'area dell'immagine è proporzionale all'area della superficie.

(*della sfera ordinaria*) *sopra sè stesso. Alle linee di curvatura della superficie* Σ *corrispondono le linee isoperimetre della rappresentazione.*

Non è difficile invertire questo risultato e dimostrare che due figure sferiche in rappresentazione equivalente possono sempre considerarsi come le due immagini di CLIFFORD di una superficie Σ dello spazio ellittico le cui linee di curvatura hanno per immagini le linee isoperimetre della rappresentazione. (*)

Consideriamo in particolare il caso che la superficie Σ sia una superficie W, cioè abbia i raggi principali di curvatura legati da una relazione. Le formole di CODAZZI essendo le stesse come nello spazio euclideo, valgono le formole di WEINGARTEN (I § 165, pag. 435) e si potrà quindi porre

$$E = \frac{1}{\beta^2}\,, \quad G = \frac{1}{\theta'^2(\beta)}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \theta(\beta)\,, \quad \frac{1}{\rho_1} = \theta(\beta) - \beta\,\theta'(\beta)\,,$$

onde nelle immagini di CLIFFORD (55), (55*) i coefficienti estremi e, g sono dati da

$$e = \frac{1}{\beta^2}\left(\theta^2(\beta) + \frac{1}{R^2}\right)\,, \quad g = \frac{1}{\theta'^2}\left\{(\theta\,\beta) - \beta\,\theta'(\beta))^2 + \frac{1}{R^2}\right\}\,,$$

e per il medio f si ha

$$f = \pm\frac{1}{R}\,.$$

Come per lo spazio euclideo, i coefficienti e, g sono funzioni l'uno dell'altro, ed il medio f (nullo nel caso euclideo), è ora una costante $= \pm\frac{1}{R}$. Viceversa se l'elemento lineare

$$ds''^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$

appartiene alla sfera ed è $f = \text{cost.}^{te}$ ed e funzione di g, lo stesso avviene cangiando il segno di f, ed i due ds^2 sferici dànno le due immagini di CLIFFORD di una superficie W dello spazio ellittico (FUBINI *l. c.*).

(*) Cf. FUBINI *l. c* e la nota nei Rendiconti dei Lincei del 5 Gennaio 1904.

§ 494 *.

Applicazione alle coppie di superficie applicabili dello spazio euclideo (*).

Delle formole (IX), (IX*) per le due rappresentazioni di CLIFFORD di una superficie nello spazio ellittico si può fare un'applicazione alle coppie di superficie applicabili dell'ordinario spazio euclideo fondata sulle osservazioni seguenti.

Cerchiamo quattro funzioni

$$\xi, \eta ; \xi_1, \eta_1$$

di u, v tali che risultino differenziali esatti le espressioni

$$(\alpha) \qquad (\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv$$

colle altre due per Y, Z, come anche le analoghe

$$(\alpha') \qquad (\xi \overline{X_1} + \eta \overline{X_2})\, du + (\xi_1 \overline{X_1} + \eta_1 \overline{X_2})\, dv$$

per gli scorrimenti di senso contrario. Le condizioni d'integrabilità, calcolate mediante le (IX), (IX*), dànno luogo alle quattro equazioni seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} - \dfrac{\eta}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \dfrac{\eta_1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} + \dfrac{\xi}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{\xi_1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ \xi \sqrt{G} + \eta_1 \sqrt{E} = 0 \\ \eta \dfrac{\sqrt{G}}{\rho_1} = \xi_1 \dfrac{\sqrt{E}}{\rho_2} . \end{cases}$$

In forza delle ultime due possiamo esprimere $\xi, \eta ; \xi_1, \eta_1$ per due sole funzioni incognite λ, μ ponendo

$$\xi = \lambda \sqrt{E},\ \eta_1 = -\lambda \sqrt{G},\ \xi_1 = \mu \frac{\sqrt{G}}{\rho_1},\ \eta = \mu \frac{\sqrt{E}}{\rho_2},$$

(*) Cf. la nota dell'A. citata sopra.

e sostituendo nelle prime due, coll'aver riguardo alle formole di CODAZZI

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_2}\right) = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

vediamo che λ, μ debbono unicamente soddisfare al sistema seguente del 1° ordine :

$$(\beta) \quad \begin{cases} \sqrt{E}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + 2\lambda\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{\rho_1}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{2\mu}{\rho_2}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ \sqrt{G}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + 2\lambda\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\rho_2}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{2\mu}{\rho_1}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Si hanno dunque infinite soluzioni del problema dipendenti da due funzioni arbitrarie. Scelta una qualunque coppia (λ, μ) soddisfacente alle (β), le espressioni (α), (α') colle analoghe diventano differenziali esatti. Noi ne indichiamo rispettivamente con x, y, z ; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ gli integrali, ponendo dunque

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = \int\left\{\sqrt{E}\left(\lambda X_1 + \frac{\mu}{\rho_2}X_2\right)du + \sqrt{G}\left(\frac{\mu}{\rho_1}X_1 - \lambda X_2\right)dv\right\} \\ \bar{x} = \int\left\{\sqrt{E}\left(\lambda \overline{X_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\overline{X_2}\right)du + \sqrt{G}\left(\frac{\mu}{\rho_1}\overline{X_1} - \lambda \overline{X_2}\right)dv\right\}, \text{ ecc.} \end{cases}$$

Se riguardiamo x, y, z ; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ rispettivamente come coordinate cartesiane ortogonali di due punti P, $\overline{P}$ mobili nello spazio euclideo, questi descrivono due superficie S, $\overline{S}$ applicabili, coll'elemento lineare comune

$$ds^2 = E\left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\rho_2^2}\right)du^2 + 2\sqrt{EG}\,\lambda\mu\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)du\,dv + G\left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\rho_1^2}\right)dv^2,$$

e X_3, Y_3, Z_3 sono i coseni di direzione della normale per S, similmente $\overline{X_3}, \overline{Y_3}, \overline{Z_3}$ quelli per la $\overline{S}$.

Calcolando ora i coefficienti D, D′, D″ ; $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$ delle seconde forme fondamentali per S, $\overline{S}$, (*) troviamo

(*) Dalle formole

$$D = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u}, \quad \overline{D} = -S\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial \overline{X_3}}{\partial u}, \text{ ecc.}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} D = \dfrac{E}{\rho_2}\left(\dfrac{\mu}{R} - \lambda\right),\ D' = -\sqrt{EG}\left(\dfrac{\lambda}{R} + \dfrac{\mu}{\rho_1\rho_2}\right),\ D'' = \dfrac{G}{\rho_1}\left(\lambda - \dfrac{\mu}{R}\right) \\ \overline{D} = -\dfrac{E}{\rho_2}\left(\dfrac{\mu}{R} + \lambda\right),\ \overline{D'} = \sqrt{EG}\left(\dfrac{\lambda}{R} - \dfrac{\mu}{\rho_1\rho_2}\right),\ \overline{D''} = \dfrac{G}{\rho_1}\left(\lambda + \dfrac{\mu}{R}\right), \end{cases}$$

e da queste seguono le due identità :

$$\frac{E}{\rho_2} D'' + \frac{G}{\rho_1} D = 0\,,\quad \frac{E}{\rho_2} \overline{D''} + \frac{G}{\rho_1} \overline{D} = 0\,,$$

le quali esprimono che alle asintotiche di Σ corrisponde un sistema coniugato tanto su S che su $\overline{S}$, cioè il sistema coniugato comune delle due superficie applicabili S, $\overline{S}$. Così : *le due immagini di* CLIFFORD *delle asintotiche di una qualunque superficie* Σ *dello spazio ellittico dànno le immagini sferiche del sistema coniugato comune di infinite coppie di superficie applicabili dello spazio euclideo.*

E il risultato può anche invertirsi dimostrando (Cf. n. c.) che da ogni coppia (S, $\overline{S}$) di superficie applicabili dello spazio euclideo resta individuata una superficie Σ dello spazio ellittico, che ha per immagine di CLIFFORD delle asintotiche quella del sistema coniugato comune a S, $\overline{S}$. Anche si può dedurre di qui che i sistemi coniugati *permanenti* di una qualunque superficie S sono caratterizzati da ciò che la loro imagine sferica dà altresì una delle immagini di CLIFFORD delle asintotiche per una superficie Σ dello spazio ellittico.

Di questi risultati generali limitiamoci qui a fare un'applicazione alle notevoli *coppie di superficie applicabili del* BONNET (*) con conservazione dei raggi principali di curvatura. Per questo prendiamo nello spazio ellittico una qualunque superficie Σ *isoterma*, onde nelle formole precedenti potremo fare

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = e^{\theta}\,.$$

Nel caso attuale si ha subito una soluzione (λ, μ) delle (β) prendendo

$$\lambda = e^{-2\theta}\,,\quad \mu = 0\,,$$

(*) V. Journal de l'École Polytechnique (42ème Cahier 1867).

ed il ds^2 delle due superficie applicabili S, $\overline{S}$ diventa

$$ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2),$$

e le formole (δ) dànno

$$\begin{cases} D = -\dfrac{1}{\rho_2}, \quad D' = -\dfrac{1}{R}, \quad D'' = \dfrac{1}{\rho_1} \\ \overline{D} = -\dfrac{1}{\rho_2}, \quad D' = +\dfrac{1}{R}, \quad \overline{D''} = \dfrac{1}{\rho_1}. \end{cases}$$

Le due superficie applicabili S, $\overline{S}$ hanno quindi, in punti corrispondenti, la stessa curvatura media

$$H = \overline{H} = e^{2\theta}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right),$$

e per ciò anche gli stessi raggi principali di curvatura. E viceversa si può dimostrare che ogni coppia di superficie applicabili del BONNET nello spazio euclideo deriva in questo modo dalle superficie isoterme dello spazio ellittico (*).

E' manifesto di qui che le trasformazioni D_m di DARBOUX delle superficie isoterme (nello spazio euclideo o nell'ellittico) possono anche interpretarsi come trasformazioni delle coppie di superficie applicabili del BONNET.

§ 495.

Rappresentazione sferica nella geometria Iperbolica.

Le ricerche precedenti hanno posto in evidenza che le proprietà della rappresentazione di CLIFFORD in geometria ellittica diversificano notevolmente da quelle della rappresentazione sferica ordinaria; a queste si avvicinano molto più le altre che ora andiamo ad esaminare in geometria iperbolica.

Qui la rappresentazione sferica, il cui principio abbiamo descritto al § 493, si connette immediatamente colle trasformazioni di RIBAUCOUR

(*) Cf. *Servant* Comptes Rendus t. 134 (2 Juin 1901) e la nota dell'A. nei Rendiconti dei Lincei (6 Dic. 1903).

delle figure sferiche. (§ 345), nel modo che ora andiamo ad indicare. Ricorriamo alla rappresentazione conforme dello spazio iperbolico nel semispaz o euclideo ed anzi, con un'inversione per raggi vettori reciproci, cangiamo questa rappresentazione entro una sfera limite (Cf. § 228); le rette non euclidee vengono allora rappresentate dai circoli ortogonali alla sfera limite e i due punti A, B ove un tale cerchio incontra la sfera limite sono le immagini dei due punti all' infinito della retta. In particolare le rette per il centro O della sfera rappresentano rette non euclidee e le sfere ordinarie concentriche e interne alla sfera limite rappresentano sfere non euclidee, ed è da osservare che i ds^2 di queste sfere, misurati in metrica non euclidea ovvero euclidea sono proporzionali per fattori costanti (*). Prendiamo una qualunque S di queste sfere e sopra di essa effettuiamo la doppia rappresentazione del § 493, conducendo pel punto O le due parallele alla normale (non euclidea) della superficie Σ in considerazione in un suo punto generico M. Questa normale è rappresentata, come si è detto, da un circolo normale a Σ in M ed alla sfera limite nei due punti A, B, e le parallele in questione sono rappresentate dai raggi OA, OB. Questi incontrano la sfera S in due punti A', B' che sono le due immagini di M. E siccome A', B' descrivono due figure rispettivamente simili (nel senso ordinario) a quelle descritte da A e B possiamo concludere:

Nella rappresentazione conforme dello spazio iperbolico entro la sfera limite le due rappresentazioni sferiche di una superficie Σ *si formano semplicemente conducendo i circoli* C *normali a* Σ *ed alla sfera limite*; *i due punti* A, B *ove ogni tale circolo incontra la sfera limite descrivono le due immagini sferiche di* Σ.

Dalla teoria dei sistemi ciclici sappiamo che questi ∞^2 circoli formano un sistema ciclico, cioè ammettono una serie ∞^1 di superficie ortogonali, proposizione che nell'attuale interpretazione non euclidea dà

(*) In coordinate polari il ds^2 dello spazio euclideo è

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\sigma^2,$$

essendo ds^2 il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria. In metrica non euclidea, prendendo questa sfera come sfere limite si ha (§ 452)

$$\overline{ds^2} = du^2 + \mathrm{R}^2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{u}{\mathrm{R}}\right) d\sigma^2,$$

formole dal cui confronto risultano subito le osservazioni del testo.

la serie di superficie parallele geodeticamente a Σ, ed è quindi alla sua volta deducibile da questa proposizione nota. Ed ora, se interpretiamo nel nuovo senso non euclideo i risultati del § 364 relativi ai sistemi ciclici normali ad una sfera (congruenze rettilinee normali non euclideo), troviamo le seguenti proprietà della doppia rappresentazione sferica:

Se di una superficie Σ nello spazio iperbolico si fa la doppia rappresentazione sferica, alle linee di curvatura di Σ corrisponde, in ciascuna delle due immagini sferiche, un sistema ortogonale, e le due figure sferiche sono trasformate di RIBAUCOUR *l'una dell'altra. Viceversa se due figure sferiche sono trasformate di* RIBAUCOUR *l'una dell'altra, esse dànno le due immagini di una serie di superficie parallele non euclidee, alle cui linee di curvutura corrispondono le linee principali della rappresentazione sferica.*

Cerchiamo ora le formole effettive della doppia rappresentazione sferica, il che ci darà la conferma analitica dei risultati precedenti, e condurrà insieme a nuove conseguenze. Riprendiamo per ciò la rappresentazione colla metrica del CAYLEY e utilizziamo le formole del § 486 per la superficie Σ, riferite alle sue linee di curvatura (u, v). Come centro O della sfera, su cui effettuiamo la doppia rappresentazione sferica, prendiamo il centro stesso dell'assoluto

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 ,$$

cioè il punto $(1; 0, 0, 0)$. Una retta $r \equiv (x, \xi)$ rappresenta una geodetica della metrica e i due punti A, B in cui incontra l'assoluto sono le immagini dei suoi due punti all'infinito, talchè i raggi OA, OB dànno le due parallele alla r condotte per O. Se la retta r descrive una congruenza, i due punti A, B descrivono, nella metrica ordinaria, due figure sferiche che sono appunto le immagini della nostra congruenza. Troviamo le coordinate ordinarie X, Y, Z dell'uno o dell'altro di questi due punti A, B cercandone dapprima le coordinate omogenee X_0, X_1, X_2, X_3 e ponendo

$$X = \frac{X_1}{X_0} , \quad Y = \frac{X_2}{X_0} , \quad Z = \frac{X_3}{X_0} .$$

Ora abbiamo

$$X_i = \lambda x_i + \mu \xi_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

e da $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$, essendo

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 - x_0\xi_0 = 0 \quad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2 = 1$$

risulta $\lambda^2 = \mu^2$, indi $\mu = \varepsilon\lambda$, con $\varepsilon = \pm 1$, e per le formole cercate di rappresentazione sferica

$$(56) \qquad X = \frac{x_1 + \varepsilon\,\xi_1}{x_0 + \varepsilon\,\xi_0}, \quad Y = \frac{x_2 + \varepsilon\,\xi_2}{x_0 + \varepsilon\,\xi_0}, \quad Z = \frac{x_3 + \varepsilon\,\xi_3}{x_0 + \varepsilon\,\xi_0}$$

$$\varepsilon = \pm 1\,;$$

secondo che prendiamo $\varepsilon = +1$, ovvero $\varepsilon = -1$, avremo l'una o l'altra delle due rappresentazioni sferiche. Applichiamo queste formole al caso che la retta r descriva la congruenza delle normali alla superficie Σ, riferita alle sue linee di curvatura. Per calcolare il $ds''^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ della rappresentazione sferica deriviamo rapporto ad u, v le (56) colle formole (40*) § 486 ; troviamo

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\sqrt{E}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\eta_1 - (x_1 + \varepsilon\,\xi_1)\,\eta_0\Big\} \\
\frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{\sqrt{E}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\eta_2 - (x_2 + \varepsilon\,\xi_2)\,\eta_0\Big\} \\
\frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\sqrt{E}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\eta_3 - (x_3 + \varepsilon\,\xi_3)\,\eta_0\Big\}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\sqrt{G}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\zeta_1 - (x_1 + \varepsilon\,\xi_1)\zeta_0\Big\} \\
\frac{\partial Y}{\partial v} &= \frac{\sqrt{G}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\zeta_2 - (x_2 + \varepsilon\,\xi_2)\zeta_0\Big\} \\
\frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\sqrt{G}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)}{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)^2}\Big\{(x_0 + \varepsilon\,\xi_0)\,\zeta_3 - (x_3 + \varepsilon\,\xi_3)\zeta_0\Big\}\,.
\end{aligned}\right.$$

Di qui, tenendo conto delle solite identità, troviamo facilmente

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = \frac{E}{(x_0+\varepsilon\xi_0)^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^2, \quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \frac{G}{(x_0+\varepsilon\,\xi_0)^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^2,$$

e separando le due rappresentazioni $\varepsilon = +1$ ed $\varepsilon = -1$, i cui ds^2 indi chiamo con ds_1^2, ds_2^2, avremo per le formole richieste

$$(57) \qquad ds_1^2 = \frac{1}{(x+\xi_0)^2}\left\{E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho_1}\right)^2 dv^2\right\}$$

$$(57^*) \qquad ds_2^2 = \frac{1}{(x_0-\xi_0)^2}\left\{E\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2 dv^2\right\}.$$

Come si vede, conformemente alle considerazioni geometriche premesse, le immagini sferiche delle linee di curvatura u, v sono ortogonali nell'una e nell'altra rappresentazione di cui formano le linee principali.

§ 496.

Applicazione alle due classi di superficie

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{1}{R^2}, \quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \pm\frac{2}{R}.$$

Delle formole (57), (57*) facciamo due applicazioni che permettono di trovare tutte le superficie W di due particolari classi in metrica iperbolica.

a) Domandiamo in primo luogo : quando è che le due immagini sferiche di una superficie Σ sono fra loro in rappresentazione conforme? Dalle formole (57), (57*) abbiamo come condizione necessaria e sufficiente

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho_2}\right)^2 = 0,$$

ossia

$$\frac{4}{R}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{\rho_1\rho_2}\right) = 0.$$

Escludendo il caso ovvio $\rho_1 = \rho_2$ delle sfere, resta quindi quale condizione :

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{R^2},$$

ossia, a causa della formola generale (42) § 486

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = K + \frac{1}{R^2},$$

$K = 0$. Dunque : *le superficie dello spazio iperbolico le cui due immagini sferiche sono in rappresentazione conforme sono tutte e sole le superficie a curvatura nulla.*

Si è dimostrato, al § 345 (pag. 184), che due figure sferiche in rappresentazione conforme (diretta) sono sempre trasformate di RIBAUCOUR l'una dell'altra, onde risulta che esse individuano una corrispondente superficie a curvatura nulla della metrica iperbolica. Così le superficie a curvatura nulla in questa geometria sono tutte note, come associate alle rappresentazioni conformi della sfera in sè medesima.

Osserviamo poi che, se questa sfera si assume come assoluto della metrica del CAYLEY, la congruenza delle normali alla superficie Σ di curvatura nulla è rappresentata dalle corde AB che uniscono due punti corrispondenti A, B delle due figure in rappresentazione conforme e le sviluppabili di questa congruenza corrispondenti alle linee di curvatura di Σ, tagliano sulla sfera le linee principali della rappresentazione costituenti un sistema isotermo. Pel teorema generale di COSSERAT al § 351, i due fuochi F_1, F_2 sopra ogni raggio dividono armonicamente il segmento AB, e quindi concludiamo come al § 492 pel caso ellittico, che : *nella metrica Cayleyana iperbolica le congruenze delle normali alle superficie di curvatura nulla sono date da tutte e sole le congruenze i cui fuochi ed i cui piani focali per ogni raggio sono coniugati rispetto alla quadrica fondamentale.*

b) Domandiamoci ora in secondo luogo: Per quali superficie Σ della metrica iperbolica accade che Σ sia rappresentata conformemente in una delle sue immagini sferiche ?

Dalle (55), (55*) abbiamo, quale condizione necessaria e sufficiente per questo, la proporzione

$$E : G = E\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^2 : G\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^2,$$

ossia

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{\rho_1}\right)^2 = 0,$$

che si scrive

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left[\frac{2}{R}+\varepsilon\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\right]=0\,.$$

Escludendo nuovamente il caso ovvio della sfera, abbiamo di qui

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\pm\frac{2}{R}\,, \tag{58}$$

cioè : *le superficie domandate sono tutte e sole le superficie a curvatura media costante* $\pm\frac{2}{R}$. Se si considera ora che la superficie Σ e la sfera su cui Σ viene ad essere rappresentata conformemente sono trasformate l'una dell'altra per una trasformazione di RIBAUCOUR, vale a dire per una D_m di DARBOUX, siamo ricondotti ai risultati del § 351 e le superficie Σ di curvatura media costante $\pm\frac{2}{R}$ vengono ad essere rappresentate dalle trasformate della sfera o del piano per trasformazioni D_m.

Le formole che dànno in *termini finiti* tutte le superficie di questa classe non sono altro che le formole del CALO' (§ 328) colle quali si è risoluto il problema di trovare, in geometria euclidea, tutte le generazioni del piano o della sfera quale superficie di rotolamento. Riferendosi p. e alla rappresentazione conforme della metrica iperbolica possiamo formulare l'identità dei due problemi colla proposizione seguente (cf. nota § 328) :

Se in metrica ordinaria euclidea rotolando la superficie S_0 *sopra una sua applicabile* S, *un punto* O *satellite di* S_0 *descrive un piano* π, *si considerino le sfere coi centri sopra* S *che toccano* π. *La seconda falda* Σ *dell' inviluppo, riguardata in metrica iperbolica di curvatura* $-\frac{1}{R^2}$ *di cui sia* π *il piano limite, è una superficie a curvatura media costante* $\pm\frac{2}{R}$; *e viceversa ogni tale superficie con* $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\pm\frac{2}{R}$ *si ottiene nel modo descritto.*

Analogamente nel caso in cui il piano limite sia sostituito da una sfera limite. In sostanza adunque le formole del CALO' § 328 dànno in termini finiti le superficie della metrica iperbolica di curvatura media costante $\pm\frac{2}{R}$, come le formole di WEIESTRASS le ordinarie superficie minime, colle quali le prime superficie hanno a comune la proprietà di avere una rappresentazione sferica conforme.

§ 497.

Formole per le superficie nello spazio curvo in rappresentazione conforme coll'euclideo.

Nello stabilire le formole per le superficie in metrica ellittica ed iperbolica ci siamo serviti della rappresentazione geodetica colla metrica del CAYLEY. Vogliamo ancora aggiungere le formole relative al caso che si adoperi invece la rappresentazione conforme sullo spazio ordinario. Più in generale, le formole che andiamo a scrivere valgono per le superficie di tutti gli spazï curvi S_3 che consentono una rappresentazione conforme sull'euclideo, e per conseguenza ammettono un ds^2 della forma

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\lambda^2}, \tag{59}$$

con $\lambda = \lambda(x, y, z)$.

Basta al nostro scopo riprendere la formola generale (42) del § 447 (pag. 468) che lega le curvature principali corrispondenti $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$, di due ipersuperficie corrispondenti in due spazii rappresentati conformemente l'uno sull'altro. Indicando qui con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della superficie immagine nello spazio euclideo, con $\rho_1\ \rho_2$ quelli della superficie obiettiva nello spazio curvo (59), dovremo sostituire (pel modo come sono ora misurati i raggi di curvatura) nella detta formola a R, R′ rispettivamente $-r, -\rho$ e al posto di U dovremo porre $\frac{1}{\lambda}$. Ne risulta la formola fondamentale

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{r} - \frac{\partial \lambda}{\partial n}, \tag{60}$$

dove $\frac{\partial \lambda}{\partial n}$ indica la derivata di λ presa nel senso della normale positiva alla superficie considerata, cioè

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = X\frac{\partial \lambda}{\partial x} + Y\frac{\partial \lambda}{\partial y} + Z\frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Se scriviamo l'equazione della superficie immagine nello spazio euclideo sotto la forma

$$z = z(x, y),$$

e adoperiamo le consuete notazioni di MONGE avremo

$$X = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

indi

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - p\frac{\partial \lambda}{\partial x} - q\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right).$$

Ed ora dalla (60) abbiamo

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1 \rho_2} = \dfrac{\lambda^2}{r_1 r_2} - \lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right) + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial n}\right)^2 \\ \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \lambda\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right) - 2\dfrac{\partial \lambda}{\partial n}, \end{cases}$$

ossia (§ 83 I pag. 221)

$$(62)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1 \rho_2} = \lambda^2 \dfrac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} + \lambda\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z} - p\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - q\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\dfrac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z} - p\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - q\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2}{1+p^2+q^2} \\ \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \lambda \dfrac{2pqs - (1+q^2)r - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\dfrac{p\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} + q\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial z}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Se applichiamo queste formole al caso della metrica iperbolica, nella rappresntazione conforme nel semispazio euclideo, avremo da porre

$$\lambda = \frac{z}{R},$$

e le formole diventeranno :

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1\rho_2} = \dfrac{z^2}{R^2}\dfrac{rt-s^2}{(1+p^2q^2)^2} + \dfrac{z}{R^2}\dfrac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2} + \dfrac{1}{R^2(1+p^2+q^2} \\ \dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{z}{R}\dfrac{2pqs-(1+q^2)r-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{R(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Consideriamo *p.* e. le superficie a curvatura media costante dello spazio iperbolico e per le loro immagini nello spazio euclideo avremo l'equazione caratteristica del 2° ordine :

$$(64)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(z\frac{(1+q^2)\,r+(1+p^2)\,t-2\,pqs}{1+p^2+q^2}+2\right) = \text{cost.}^{\text{te}}.$$

Ora le superficie a curvatura media costante dello spazio iperbolico (od ellittico) hanno linee di curvatura isoterme come accade nello spazio euclideo ; anche le loro immagini conformi nell'euclideo hanno quindi linee di curvatura isoterme. Si ha per ciò il risultato: *Le superficie integrali dell'equazione a derivate parziali* (64) *formano una classe di superficie isoterme.*

Particolarizziamo ancora e consideriamo le superficie a curvatura media nulla, o superficie minime, dello spazio iperbolico che abbiamo visto dipendere (§ 489) dalla equazione a dirivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \cosh\theta\,.$$

Le loro immagini nello spazio euclideo sono gli integrali dell'equazione a derivate parziali

$$z\frac{2\,p\,q\,s-(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ossia indicando con H la curvatura media di questa immagine

$$(65)\quad z = \frac{2}{H}\,Z\,.$$

Per interpretare questa geometricamente si introduca con *Thybaut* (*)

(*) *Surfaces isothermiques* Annales de l'École Normale 3.ème Sèrie t. 17 (1900).

la nozione di *evoluta armonica* di una data superficie S come luogo, sopra ogni normale in M alla S, del punto $\overline{M}$ coniugato armonico di $\overline{\overline{M}}$ rispetto ai due centri principali di curvatura ; per le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ si ha subito

$$\bar{x} = x - \frac{2}{H} X , \quad \bar{y} = y - \frac{2}{H} Y , \quad \bar{z} = z - \frac{2}{H} Z .$$

Dunque la (65) esprime la seguente proprietà : *Le superficie dello spazio euclideo che hanno per evoluta armonica un piano* π *sono superficie isoterme ; esse sono le immagini delle superficie minime di una metrica iperbolica avente* π *per piano limite.*

Se questo piano π si allontana all'infinito le dette superficie diventano le superficie minime ordinarie.

§ 498.

Notizie circa le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche in geometria non euclidea.

Terminiamo questi studi sulle superficie in geometria ellittica ed iperbolica coll'indicare come si possono estendere a questi spazï le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche, studiate nei tre Capitoli XXII a XXIV pel caso ordinario euclideo.

Per questo cominciamo ad estendere la nozione di coppie di superficie S, $\overline{S}$ coniugate in deformazione (§§ 423-424) al caso in cui le due superficie appartengono, anzichè allo spazio euclideo, a due spazï diversi, ciascuno di curvatura costante. La discussione dei paragrafi citati, fondata sulle equazioni di Codazzi e di Gauss, conserva il suo valore in questo caso più generale, solo che alle curvature assolute delle due superficie si sostituiscano le loro curvature relative per lo spazio in cui sono immerse. Due tali superficie S, $\overline{S}$ saranno dunque coniugate in deformazione quando si corrispondano per sistemi coniugati e per linee geodetiche ; e allora i due problemi di deformare l'una o l'altra superficie nel relativo spazio saranno intrinsecamente equivalenti.

Ciò premesso, prendiamo nell'ordinario spazio euclideo due quadriche Q, Q′ omofocali, delle quali p. e. la seconda si assuma come *assoluto* di una metrica Caylelyana. Allora la quadrica Q euclidea è al tempo stesso una

quadrica della metrica di CAYLEY, ed è chiaro che i sistemi coniugati nel senso euclideo sono anche tali nel senso non euclideo, e viceversa. Ma vi ha di più: *la quadrica* Q *ha le stesse geodetiche euclidee come non-euclidee.* (*) Per vedere questo basta ricordare che il piano tangente in un punto p alla quadrica Q ha il suo polo, *rispetto alla quadrica confocale* Q', situato sulla normale in p e perciò ogni normale a Q nel senso euclideo è anche normale nel senso non-euclideo. Dunque ogni geodetica euclidea di Q avendo il piano osculatore normale a Q nel senso euclideo, lo ha anche nel senso non-euclideo e per ciò è anche geodetica di Q nella metrica del CAYLEY.

Di qui risulta : Il problema di deformare la quadrica Q nel senso euclideo equivale all'altro di deformarla nel senso non-euclideo.

Ed ora si presenta ben naturale la domanda se dalle deformate dalle quadriche euclidee si ottengono così tutte le deformate delle quadriche non euclidee. Considerando la questione dal punto di vista reale, distinguiamo secondo che si tratta di metrica ellittica od iperbolica ; nel primo caso la quadrica Q' sarà un ellissoide immaginario, nel secondo una quadrica reale a punti ellittici.

Per quanto precede la questione è riportata alla elementare seguente : esiste un'omografia reale che cangi le due quadriche Q, Q' in quadriche omofocali ?

Se siamo in metrica ellittica e scriviamo l'equazione dell'assoluto Q' in coordinate di WEIERSTRASS

$$(Q') \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 ,$$

con una sostituzione ortogonale reale su x_0, x_1, x_2, x_3 che rappresenta una trasformazione delle coordinate di WEIERSTRASS (o un movimento nello spazio ellittico (§ 463)), possiamo ridurre l'equazione della quadrica Q alla forma normale

$$(Q) \qquad \frac{x_0^2}{A} + \frac{x_1^2}{B} + \frac{x_2^2}{C} + \frac{x_3^2}{D} = 0 ,$$

dove le costanti A, B, C, D non saranno tutte eguali perchè Q non coincide con Q'. Escludiamo inoltre il caso in cui queste costanti siano a coppie eguali ; allora la quadrica (reale) Q avrebbe l'equazione

---

(*) DARBOUX sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873).

$$x_0^2 + x_1^2 - tg^2\,\sigma\,(x_2^2 + x_3^2)$$

con σ costante reale e sarebbe la *superficie di* CLIFFORD. (*) Nelle nostre ipotesi vi sarà dunque una almeno delle quattro costanti diversa da tutte le altre tre, poniamo A. Introduciamo allora coordinate Cartesiane ortogonali x, y, z, ponendo

$$x = a\,\frac{x_1}{x_0}\,, \quad y = b\,\frac{x_2}{x_0}\,, \quad z = c\,\frac{x_3}{x_0}$$

con a, b, c costanti. Le equazioni delle due quadriche diventano

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\,\mathrm{B}}{\mathrm{A}}} + \frac{y^2}{\frac{b^2\,\mathrm{C}}{\mathrm{A}}} + \frac{z^2}{\frac{c^2\,\mathrm{D}}{\mathrm{A}}} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

e queste saranno omofocali prendendo le costanti a, b, c in modo che si abbia

$$a^2 - \frac{a^2\,\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = b^2 - b^2\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = c^2 - c^2\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\,,$$

ossia

$$a^2\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = b^2\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}) = c^2\,(\mathrm{A} - \mathrm{D})\,,$$

ciò che è sempre possibile con valori reali per le costanti a, b, c se le tre differenze A—B, A—C, A—D hanno il medesimo segno. Ora se B, C, D sono disuguali fra loro, e da A come si è supposto, basterà prendere per A la maggiore di esse ed A—B, A—C, A—D saranno tutte tre positive. Egual segno hanno pure le tre differenze se B=C=D, sicchè resta da considerare solo il caso che sia p. e. B=C e le differenze

$$\mathrm{A} - \mathrm{B},\ \mathrm{A} - \mathrm{D}$$

abbiano segno contrario. Ma allora le due

$$\mathrm{D} - \mathrm{A},\ \mathrm{D} - \mathrm{B}$$

(*) Parametricamente si può scrivere

$$x_0 = \cos\sigma\cos u\,, \quad x_1 = \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,u\,, \quad x_2 = \mathrm{sen}\,\sigma\cos v\,, \quad x_3 = \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,v\,,$$

equazioni che definiscono la superficie di CLIFFORD riferita alle sue linee di curvatura (circoli).

hanno egual segno e basta quindi scambiare A con D per ritrovarsi nel caso precedente. Ne concludiamo : *Esclusa la superficie di* CLIFFORD, *ogni altra quadrica dello spazio ellittico trova la sua quadrica (a centro) coniugata in deformazione nello spazio euclideo e quindi il problema di deformare una quadrica (diversa dalla superficie di* CLIFFORD) *in metrica ellittica equivale a quello per le quadriche a centro dello spazio euclideo.*

Ma al contrario la superficie di CLIFFORD, essendo a curvatura nulla e con asintotiche reali, non può possedere una quadrica Q coniugata in deformazione nello spazio euclideo. Infatti questa quadrica Q sarebbe rappresentabile geodeticamente sul piano ordinario, quindi (pel teorema di BELTRAMI) una superficie a curvatura costante, vale a dire o una sfera o un cono o cilindro ; ma sulla sfera le asintotiche sono immaginarie, sul cono o cilindro reali e coincidenti mentre sulle superficie di CLIFFORD sono reali e distinte. D'altra parte ricordiamo che tutte le deformate della superficie di CLIFFORD sono note in termini finiti (§ 490 s. s.).

La questione proposta è così risoluta pel caso ellittico. Per il caso iperbolico le cose procedono in modo alquanto diverso perchè, a causa della realtà dell'assoluto, non è più possibile ridurre in ogni caso l'equazione della quadrica Q a somme di quadrati.

Ed ora, venendo alle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche in geometria ellittica od iperbolica, aggiungiamo che esse valgono qui come nello spazio euclideo fondandosi sui medesimi principii descritti al § 376, e l'affinità d'IVORY fra le quadriche omofocali dà ancora qui la legge d'applicabilità delle due falde focali per le corrispondenti congruenze W.

Del resto poi la trasformazione H che cangia una quadrica dello spazio euclideo nella coniugata in deformazione dello spazio ellittico od iperbolico serve ancora qui per cangiare le trasformazioni B_k dello spazio euclideo in quelle corrispondenti per la metrica ellittica od iperbolica. (*)

(*) I principii indicati nel presente paragrafo vennero sviluppati dal Signorini pel caso ellittico nella sua tesi di laurea: Sulle trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche in geometria ellittica (Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa.

V. anche Annali di matematica.

CAPITOLO XXVIII.

I sistemi n.pli ortogonali nello spazio euclideo a n dimensioni.

Formole fondamentali. - Rotazioni β_{ik} di un sistema n.plo ortogonale e relative equazioni caratteristiche. - Trasformazioni di COMBESCURE e inversioni. - Trasformazioni di RIBAUCOUR. - Teorema generale di permutabilità. - Sistemi n.pli ortogonali E simmetrici nelle rotazioni. - Trasformazioni T_m e teorema speciale di permutabilità. - Sistemi di rotazioni associate ($\beta_{i\,k}$, $\beta_{k\,i}$) e relative trasformazioni T_m. - Sistemi H di GUICHARD-DARBOUX. - Sistemi n.pli ortogonali Q e loro trasformazioni R_m. - Sistemi n.pli ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante. - Estensione ai ds^2 indefiniti.

§ 499.

Formole fondamentali pei sistemi n.pli ortogonali nell'S_n euclideo. (*)

Nel presente Capitolo noi ci andiamo ad occupare sistematicamente dei sistemi n.pli ortogonali di ipersuperficie nello spazio euclideo ad n dimensioni, ed è subito da notarsi che tale ricerca comprende anche l'analoga per ogni altro spazio curvo a n dimensioni rappresentabile conformemente sull'euclideo ; questo vale in particolare per gli spazï di curvatura costante, che abbiamo visto appunto rappresentarsi conformemente sull'euclideo (§ 435).

In queste ricerche sarà utile che ci serviamo di speciali notazioni il cui significato andiamo subito a spiegare. Le n coordinate cartesiane ortogonali di un punto generico delle spazio si denoteranno, anzichè con lettere affette da indici, con lettere diverse : $x, y, z, \ldots t$, e il simbolo sommatorio S si userà sempre per una somma estesa agli n assi coordinati ; così avremo

$$ds^2 = \mathrm{S}\, dx^2 = dx^2 + dy^2 + \ldots + dt^2 , \tag{1}$$

(*) Cf. particolarmente: DARBOUX Leçons sur les systèmes orthogonaux (2.ème Edition 1910).

e per la distanza d di due punti $(x, y, \ldots t)$, $(x', y', \ldots t')$

$$d^2 = \mathrm{S}\,(x - x')^2.$$

Si otterrà un sistema n^{plo} ortogonale nell'S_n ogni qualvolta si esprimano $x, y, \ldots t$ per n nuove variabili indipendenti $u_1, u_2 \ldots u_n$ in guisa che la forma differenziale (1) si cangi in un'altra di forma normale

$$(2) \qquad ds^2 = \mathrm{H}_1^2\, du_1^2 + \mathrm{H}_2^2\, du_2^2 + \ldots + \mathrm{H}_n^2\, du_n^2 = \sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda^2\, du_\lambda^2 ,$$

e le ipersuperficie costituenti il sistema n^{plo} ortogonale saranno le $u_1 = \text{cost}^{\text{te}}$, $u_2 = \text{cost.}^{\text{te}} \ldots u_n = \text{cost.}^{\text{te}}$. Useremo il simbolo $\sum_\lambda$ per una somma in cui l'indice variabile λ percorre *tutti* i valori nella serie degli indici $1, 2, 3 \ldots n$; ma spesso accadrà che λ dovrà percorrere questi valori, *escluso uno particolare* i, ovvero esclusi due i, k, ecc. ed allora adotteremo la notazione

$$\sum_\lambda^{(i)} \quad \text{(escluso } i\text{)}, \qquad \sum_\lambda^{(i,k)} \quad \text{(esclusi } i, k\text{)}, \text{ ecc.}$$

a) Il sistema n^{plo} ortogonale corrispondente alla (2) è individuato, a meno di movimenti, dalle espressioni di $\mathrm{H}_1\, \mathrm{H}_2, \ldots \mathrm{H}_n$ (*) in funzione di $u_1\, u_2, \ldots u_n$. Le condizioni *necessarie e sufficienti* a cui debbono soddisfare le H_i per definire un sistema n^{plo} ortogonale (2), consistono, come sappiamo, nell'annullarsi di tutti i simboli Riemanniani a quattro indici $(r\,k, i\,h)$, costruiti per la forma di differenziale (2). Sviluppando queste condizioni colle formole (17) del § 435 (pag. 433), si trova il sistema seguente di equazioni a derivate parziali del secondo ordine cui debbono soddisfare le H_i

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_l}{\partial u_i\, \partial u_k} = \dfrac{1}{\mathrm{H}_i} \dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} \dfrac{\partial \mathrm{H}_l}{\partial u_i} + \dfrac{1}{\mathrm{H}_k} \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial u_i} \dfrac{\partial \mathrm{H}_l}{\partial u_k} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(\dfrac{1}{\mathrm{H}_i} \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial u_i}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_k}\left(\dfrac{1}{\mathrm{H}_k} \dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k}\right) + \sum_\lambda^{(i,k)} \dfrac{1}{\mathrm{H}_\lambda^2} \dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_\lambda} \dfrac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial u_\lambda} = 0 \\ (i \neq k \neq l = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

nelle quali formole i, k, l indica una qualunque terna di indici *diversi*, presi nella serie $1, 2, \ldots u$, e il simbolo $\sum_\lambda^{(i,k)}$ ha il significato spiegato sopra.

(*) Con H_i intenderemo la radice quadrata *positiva* di H_i^2.

Il problema dei sistemi n^pli ortogonali dell'S_n euclideo dipende adunque dal sistema (3) di equazioni a derivate parziali del secondo ordine $\left(\text{in numero di } \frac{n(n-1)}{2}\right)$ per le n funzioni incognite $H_1, H_2, \ldots H_n$ di $u_1, u_2, \ldots u_n$. Ma per lo studio analitico di un siffatto sistema, allo scopo principale di riconoscerne la compatibilità ed il grado di arbitrarietà delle soluzioni, come anche per l'interpretazione geometrica, conviene (conforme ai principii generali dell'analisi) ridurre il sistema ad uno *del primo ordine* aumentando convenientemente il numero delle funzioni incognite. Per questo si introducano con DARBOUX, quali nuove funzioni incognite, le derivate prime delle H_i che figurano nelle (3), e precisamente le $n(n-1)$ quantità β_{ik} che diremo le *rotazioni* del sistema e saranno definite dalle posizioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}. \tag{4}$$

Allora il sistema (3), viene a scindersi in due sistemi, il primo dei quali vincola le sole rotazioni e si scrive:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \end{cases} \qquad (i \neq k \neq l)$$

Successivamente, supposte note le β_{ik} soddisfacenti a queste, le H_i debbono poi soddisfare al sistema lineare omogeneo

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,H_k \quad (i \neq k).$$

b) Supposte soddisfatte queste equazioni (I), (II), o ciò che è lo stesso le (3); risulta individuato un sistema n^{plo} ortogonale (Σ) corrispondente alla forma (2) del ds^2. In ogni punto $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ dello spazio abbiamo una n^{plo} *ortogonale* formata dalle direzioni ivi tangenti alle linee coordinate $(u_1)(u_2)\ldots(u_n)$, cioè alle linee di curvatura delle ipersuperficie di (Σ); queste direzioni formano l'n^{edro} *principale* relativo al detto punto. Consideriamo una qualunque di queste n direzioni principali, sia la i^{ma}, e denotiamo

$$X_i, Y_i, \ldots T_i$$

i relativi coseni di direzione cogli assi coordinati ; avremo

$$(5) \qquad \frac{\partial x}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \, \mathrm{X}_i \, , \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \, \mathrm{Y}_i \, , \ldots \frac{\partial t}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i \, \mathrm{T}_i$$

e sarà

$$\mathrm{S} \, \mathrm{X}_i \, \mathrm{X}_k = \varepsilon_{ik} \ (*).$$

Ora le formole di CHRISTOFFEL per l'equivalenza delle due forme differenziali (1), (2) :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \, \partial u_k} = \sum_{\lambda} \begin{Bmatrix} i \, k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_\lambda} \, ,$$

si traducono pei coseni di direzione dell'n^{edro} principale nelle formole seguenti :

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \, \mathrm{X}_k \, , \quad \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \, \mathrm{X}_\lambda \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
$$(i \neq k)$$

colle analoghe per $\mathrm{Y}_i \ldots \mathrm{T}_i$. Questo è, per le incognite $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n$, un sistema di equazioni *ai differenziali totali* illimitatamente integrabile, poichè appunto, in grazia delle (I), le condizioni d'integrabilità per le (6) sono identicamente soddisfatte.

Introduciamo altresì le $n + 1$ funzioni

$$(7) \qquad \mathrm{W}_i = \mathrm{S} \, x \, \mathrm{X}_i \, , \ 2 \rho = \mathrm{S} \, x^2 \, ,$$

delle quali le prime n, $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2 \ldots \mathrm{W}_n$, sono le distanze (algebriche) dell'origine delle coordinate dalle n facce dell'n^{edro} principale, mentre ρ è il semiquadrato della distanza del vertice dell'origine, ed è anche

$$2 \rho = \sum_{\lambda} \mathrm{W}_\lambda^2 .$$

Se si derivano le (7), osservando le (5) e le (6) si hanno subito le formole

$$(8) \qquad \frac{\partial \mathrm{W}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \, \mathrm{W}_k \quad (\text{per} \quad (i \neq k)$$

(*) Si ricordi che $\varepsilon_{ik} = 0$ se è $i \neq k$, $\varepsilon_{ii} = 1$.

$$(8^*) \qquad \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} W_\lambda = H_i$$

$$(9) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial u_i} = H_i W_i .$$

In fine dalle formole generali al § 448 per i raggi principali di curvatura r_{ik} delle ipersuperficie coordinate, nelle quali però, conformemente alle convenzioni fatte al § 476 per lo spazio euclideo, introdurremo un cangiamento di segno, avremo

$$\frac{1}{r_{ik}} = \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} ,$$

ovvero

$$(10) \qquad \frac{1}{r_{ik}} = \frac{\beta_{ik}}{H_k} ,$$

e la formola (46) ibid (pag. 472) per la flessione $\frac{1}{R_i}$ della linea coordinata (u_i) si scriverà

$$\frac{1}{R_i^2} = \sum_{\lambda}^{(i)} \frac{1}{r_{\lambda i}^2} ,$$

cioè

$$(11) \qquad \frac{1}{R_i^2} = \frac{1}{H_i^2} \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}^2 .$$

§. 500.

Richiamo dei teoremi d'esistenza per classi di sistemi differenziali.

Prima di procedere oltre nei nostri studi troviamo conveniente richiamare dall'analisi i teoremi di esistenza per quelle classi di equazioni simultanee alle derivate parziali che si presentano più frequentemente nelle applicazioni alla geometria infinitesimale, particolarmente in quella n dimensionale.

Sistemi A) di DARBOUX. Abbiasi un sistema di equazioni a derivate parziali del 1° ordine per m funzioni incognite

$$u_1, u_2, \ldots u_m$$

di n variabili indipendenti, che supponiamo risolubile rispetto a *tutte* le derivate prime che vi figurano, riducibile cioè alla forma

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}(u, x)$$

in modo che di ciascuna delle funzioni incognite sia data una o più delle derivate, e i secondi membri siano funzioni finite e continue delle u e delle x, insieme alle derivate rispetto a questi argomenti. Per ciascuna u_i diremo variabili *principali* quelle rispetto alle quali figurano le derivate nel sistema, variabili *parametriche* le altre. Delle derivate d'ordine superiore delle u_i, quando si suppongono esistenti, si diranno principali quelle in cui le variabili di derivazione sono principali, in particolare avremo da considerare le derivate principali seconde *miste* $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k}$, supposto che per la u_i siano x_h, x_k due variabili principali diverse ($h \neq k$). Ora supponiamo che il sistema (A) sia così costituito che il calcolo delle derivate seconde principali miste non introduca, eseguito a destra, alcuna nuova derivata prima delle u oltre quelle che figurano già in (A), ed in secondo luogo che le condizioni d'integrabilità ottenute dall'eguagliare i due valori $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_h}$ delle derivate miste principali siano *identicamente soddisfatte* in virtù del sistema (A) stesso.

Quando queste condizioni siano verificate diremo che siamo in presenza di un *sistema* A) *di* DARBOUX. Per un tale sistema vale allora il teorema fondamentale d'esistenza degli integrali : (*)

Scelto un sistema iniziale di valori $(x_i^{(0)})$ *per le variabili indipendenti, esiste uno ed un solo sistema integrale* $(u_1, u_2, \ldots u_m)$ *del sistema* (A) *tale che ciascuna* u_i *si riduca ad una funzione arbitrariamente data delle sue variabili parametriche quando le rispettive variabili principali assumono i valori iniziali.*

La dimostrazione di questo importante teorema si compie col metodo delle approssimazioni successive, supponendo soltanto verificate le abituali condizioni di continuità e le condizioni di Lipschitz pei rapporti incrementali (DARBOUX l. c.).

(*) V. DARBOUX Systèmes orthogonaux (2.ème E'dition) Livre III. Chap. I n. 180 s. s.

Sistemi B) *di* BOURLET (*). Il successivo caso che andiamo a considerare sarà di sistemi della forma

$$(B) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}\left(u, x, \frac{\partial u}{\partial x_l} \ldots\right)$$

dove nei secondi membri figurano anche *linearmente* derivate parametriche, però sotto queste condizioni che le derivate parametriche nei secondi membri abbiano un indice l di derivazione $\geq k$, e se $l = k$ l'indice della rispettiva u sia superiore a i. Inoltre nel presente caso la dimostrazione del teorema d' esistenza si compie nell' ipotesi di funzioni analitiche olomorfe ed i secondi membri delle (B) si supporranno funzioni olomorfe dei rispettivi argomenti.

Il sistema differenziale (B) si dirà allora *un sistema* B) (di BOURLET) quando, come nel caso precedente, le condizioni d'integrabilità ottenute dall'eguagliare i due valori di ogni derivata seconda mista principale sieno verificate in forza del sistema (B). Vale in tale ipotesi il teorema di esistenza

Esiste uno ed un solo sistema integrale olomorfo $(u_1, u_2, \ldots u_m)$ nell' intorno dei valori iniziali $(x_1'^{(0)}\ x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$, *tale che ciascuna* u_i *si riduca ad una funzione olomorfa arbitrariamente data delle sue variabili parametriche quando le sue variabili principali assumono i valori iniziali.*

§ 501.

Applicazione ai sistemi differenziali (I), (II).

Esaminiamo, colla scorta dei principii sopra ricordati, i sistemi differenziali (I), (II), dai quali dipende la ricerca dei sistemi n^{pli} ortogonali, e cominciamo dal sistema (I) caratteristico pel sistema delle n $(n-1)$ rotazioni β_{ik}. Se dalle (I) isoliamo quelle della prima linea soltanto

$$(a) \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk}$$

queste formano, per sè, un sistema del tipo A) di DARBOUX, nel quale per ciascuna incognita β_{ik} tutte le variabili sono principali salvo le due u_i, u_k, che sono parametriche, e le condizioni di coincidenza dei due valori di

(*) Annales de l'E'cole Normale Supérieure T. 8 Serie 3. (Suppl. 1892).

una derivata seconda mista principale

$$\frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_l \, \partial u_m}$$

sono verificate, perchè calcolandola dalla (a) stessa, derivata rapporto ad u_m $(m \neq i, k, l)$, troviamo

$$\frac{\partial^2 \beta_{ki}}{\partial u_l \, \partial u_m} = \beta_{im} \beta_{ml} \beta_{lk} + \beta_{il} \beta_{lm} \beta_{mk}$$

ed il secondo membro non muta per lo scambio di l con m. In effetto adunque le (a) formano un sistema differenziale del tipo A) e nella sua soluzione generale (β_{ik}) si possono prendere *affatto ad arbitrio* (*) le funzioni $\psi_{ik}(u_i, u_k)$ a cui si riducono le β_{ik} quando tutte le variabili principali u_λ $(\lambda \neq i, k)$ assumono i valori iniziali $(u_\lambda^{(0)})$.

Ma se ora aggreghiamo alle (a) anche le (I) della seconda linea, siamo in presenza di un sistema differenziale del secondo tipo B), al quale daremo la forma canonica di BOURLET risolvendo le (I) della seconda linea rispetto alla derivata con indice di derivazione minore, p. e supposto $i < k$ scriveremo

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = -\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} - \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \quad (i < k).$$

Ora se deriviamo la (a) rispetto ad u_i, la superiore rispetto ad u_l, il confronto fra i due valori della derivata seconda mista $\frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_l \, \partial u_i}$, esige per la loro coincidenza l'annullarsi dell'espressione

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il} \beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_l} \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda\delta} \beta_{\lambda k},$$

e questa, facendo uso delle (I) stesse, si trasforma nell'altra

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{il} \beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{kl} \beta_{li}) + \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li} \beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_l} \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k}$$

$$= \beta_{lk} \left\{ \frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l} + \beta_{ki} \beta_{kl} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda l} \right\} +$$

$$+ \beta_{li} \left\{ \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l} + \beta_{il} \beta_{ik} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{\lambda k} \beta_{\lambda l} \right\},$$

(*) Purchè soddisfino alle condizioni di continuità del § precedente.

che possiamo scrivere

$$\Omega = \beta_{lk}\left\{\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,l)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda l}\right\} +$$

$$+ \beta_{li}\left\{\frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(k,l)} \beta_{\lambda k}\,\beta_{\lambda l}\right\};$$

ma i coefficienti di β_{lk}, β_{li} si annullano separatamente in causa delle (I) nella seconda linea. Il sistema (I) è dunque un sistema della classe B), e risulta così accertata l' esistenza delle sue soluzioni e fissata la loro arbitrarietà.

Ora se le rotazioni β_{ik}, soddisfacenti alle (I), sono fissate, il sistema (II) nelle n funzioni incognite $H_1, H_2, \ldots H_n$, è nuovamente un sistema A), dove le condizioni d'integrabilità :

$$\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{ik}\,H_k) = \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{li}\,H_l)$$

sono soddisfatte in virtù delle (II) e delle (I) della prima linea, poichè

$$\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{ki}\,H_k) = \beta_{kl}\,\beta_{li}\,H_k + \beta_{ki}\,\beta_{lk}\,H_l$$

ed il secondo membro non muta scambiando l con k. In questo sistema (II) per ciascuna H_i vi ha la sola variabile parametrica u_i, le altre sono principali, onde la soluzione generale

$$(H_1, H_2, \ldots H_n)$$

dipende da n funzioni arbitrarie, di una variabile ciascuna.

Insieme al sistema (II), conviene considerare l'altro dato dalle equazioni (8) cui soddisfano le W_i e che scriviamo, indicando con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ n funzioni incognite

$$\text{(II*)} \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k \quad (i \neq k).$$

Questo chiamiamo il sistema *aggiunto* del sistema (II) ; esso è un sistema A) come il primitivo (II) (*) e gode, in relazione con esso, delle proprietà seguenti :

(*) Si ha

$$\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{ik}\,\gamma_k) = \beta_{il}\,\beta_{lk}\,\gamma_k + \beta_{ik}\,\beta_{kl}\,\gamma_l\,,$$

espressione simmetrica in (k, l).

α) *Se* $(H_1, H_2, \ldots H_n)$ *è un sistema qualunque di soluzioni delle* (II) *e* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ *una soluzione dell' aggiunto* (II*), *l'espressione*

$$\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda du_\lambda$$

è un differenziale esatto.

Difatti

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(H_i \gamma_i) = \beta_{ki} H_k \gamma_i + \beta_{ik} H_i \gamma_k$$

non muta scambiando i con k

β) *Se da un sistema qualunque* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ *di soluzioni delle* (II*) *si formano le n espressioni*

$$\Theta_k = \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda ,$$

queste sono soluzioni del sistema (II), *cioè*

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial u_i} = \beta_{ik} \Theta_i .$$

Difatti

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki} \gamma_i) + \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik} \gamma_i) + \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{\lambda k} \gamma_\lambda) =$$

$$= \gamma_i \left\{ \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda k} \beta_{\lambda i} \right\} +$$

$$+ \beta_{ik} \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \beta_{ki} \gamma_k + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\} .$$

Il coefficiente di γ_i a destra è zero per le (I) e quello di β_{ik} è appunto Θ_i, da cui in effetto

$$\frac{\partial \Theta_k}{\partial u_i} = \beta_{ik} \Theta_i .$$

γ) Dal confronto delle due proprietà α), β) risulta questa terza: *Se* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$, $(\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \gamma'_n)$ *sono due sistemi di soluzioni delle* (II*) l'e-

spressione

$$\sum_{\lambda} \left\{ \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial u_\lambda} + \sum_{j}^{(\lambda)} \beta_{j\lambda}\, \gamma_\lambda \right\} \gamma'_\lambda\, du_\lambda$$

è un differenziale esatto.

In particolare se si fanno le γ' eguali alle γ, l'espressione precedente è il differenziale esatto di $\frac{1}{2}$ A, avendo posto

$$A = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda^2.$$

§ 502.

Trasformazioni di Combescure-Inversioni.

Nelle formole fondamentali (§ 499) pei sistemi n^{pli} ortogonali si distinguono le proprietà inerenti soltanto all'orientazione dell'n^{edro} principale, le quali dipendono unicamente dalle rotazioni β_{ik}, da quelle individuali del sistema Σ) in considerazione. Le prime sono contenute nelle equazioni (I) caratteristiche delle rotazioni e nelle (6) cui soddisfano i coseni X_i delle direzioni principali. Si può anche dire che queste prime proprietà dipendono unicamente dalla rappresentazone ipersferica delle ipersuperficie coordinate. Così p. e. le ipersuperficie coordinate u_n = cost.$^{\text{te}}$ hanno per coseni di direzione della normale $X_n, Y_n, \ldots T_n$, pei quali sussistono le (6)

$$\frac{\partial X_n}{\partial u_i} = \beta_{ni}\, X_i \quad (i \neq n)$$

e il ds_n^2 della loro immagine ipersferica è quindi dato da

$$ds_n^2 = \beta_{n1}^2\, du_1^2 + \beta_{n2}^2\, du_2^2 + \ldots + \beta_{n,n-1}^2\, du_{n-1}^2, \tag{11}$$

formola che implica soltanto le rotazioni. Si osservi che se qualcuna delle rotazioni si annulla, poniamo la β_{n1}, ciò significa che l'immagine ipersferica della u_n = cost.$^{\text{te}}$ occupa meno di $n-1$ dimensioni.

Date le rotazioni β_{ik}, soddisfacenti alle condizioni (I), esistono per quanto si è visto sopra, infinite soluzioni ($H_1, H_2, \ldots H_n$) del sistema (II) dipendenti da n funzioni arbitrarie e quindi infiniti sistemi n^{pli} ortogonali aventi a

comune le rotazioni β_{ik}, vale a dire l'immagine ipersferica. Per ogni singola soluzione $(H_1, H_2 \ldots H_n)$ delle (II) si ha secondo le (5) il corrispondente sistema (Σ) per quadratura delle formole

$$x = \int \sum_{\lambda} H_\lambda \, X_\lambda \, du_\lambda \,, \tag{12}$$

dove in effetto per la proprietà α) l'espressione sotto il segno $\int$ è un differenziale esatto. Un secondo modo equivalente di determinare questi sistemi (Σ), con rotazioni assegnate, è di ricorrere invece alle soluzioni $(W_1, W_2, \ldots W_n)$ del sistema aggiunto (II*); allora si hanno i sistemi (Σ) in *termini finiti* colle formole

$$x = \sum_{\lambda} W_\lambda \, X_\lambda \,. \tag{12*}$$

Si vede adunque che ogni sistema n^{plo} ortogonale (Σ) ne determina infiniti altri, dipendenti da n funzioni arbitrarie, colle medesime rotazioni β_{ik}, cioè aventi a comune con (Σ) l'orientazione dell'n^{edro} principale (l'immagine ipersferica). Tutti questi sistemi (Σ) si diranno *trasformati di* Combescure l'uno dell'altro, od anche qualche volta più brevemente, col Darboux, sistemi *paralleli* per significare che in punti corrispondenti i loro n^{edri} principali hanno eguale orientazione.

Accanto alle trasformazioni di Cambescure, le quali richiedono l'integrazione del sistema (II) o dell'aggiunto (II*), abbiamo le altre più semplici ed elementari date dalle trasformazioni conformi di tutto lo spazio, che si riducono appena $n \geq 3$, secondo il teorema di Liouville (§ 447), alle inversioni (per raggi vettori reciproci) combinate con omotetie e movimenti. Queste trasformazioni, appunto per la proprietà di conservare gli angoli, cangiano manifestamente ogni sistema n^{plo} ortogonale Σ in un altro sistema n^{plo} ortogonale Σ'.

Ora, per le proprietà elementari delle inversioni, si ha immediatamente:

In due sistemi n^{pli} *ortogonali* Σ, Σ' *dedotti per inversione l'uno dall'altro, se si considera una coppia qualunque* P, P′ *di punti corrispondenti, nei due* n^{edri} *principali coi vertici in* P, P′, *ogni coppia di spigoli corrispondenti consta di due rette incidenti in un punto equidistante da* P, P′.

È manifesto che gli n punti d'incontro $P_1, P_2 \ldots P_n$ delle coppie di spigoli corrispondenti determinano un iperpiano (un S_{n-1}) rispetto al quale

i due n^{edri} principali di Σ, Σ' sono simmetrici. (*) Per ciò le n ipersfere che hanno i centri punti nei P_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ e passano per P, P′ toccano in questi punti le due ipersuperficie coordinate $u_i = \text{cost.}^{te}$.

§ 503.

Trasformazioni di Ribaucour di sistemi n^{pli} ortogonali.

Le semplici proprietà sopra osservate per le inversioni conducono naturalmente ad estendere la nozione di *trasformazioni di* RIBAUCOUR delle ordinarie superficie (§ 340 s. s.) ai sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n. Diremo che due sistemi n^{pli} ortogonali Σ, Σ' sono trasformati di RIBAUCOUR l'uno dell'altro quando si corrispondono punto per punto in guisa che abbiano luogo le proprietà sopra descritte e cioè: *in due* n^{edri} *principali corrispondenti* Σ, Σ' *ogni coppia di spigoli omologhi è formata di rette incidenti in un punto equidistante dai due vertici.*

Dato un sistema n^{plo} ortogonale qualunque Σ, tutti quelli che se ne deducono per inversioni sono certamente suoi trasformati di RIBAUCOUR; ma come ora vedremo ne esistono infiniti altri, dipendenti da n funzioni arbitrarie. Per la loro ricerca serve l' analisi stessa adoperata nei citati § 340-342 per le superficie, debitamente estesa ad n variabili, e l'estensione è abbastanza semplice perchè possiamo limitarci ad indicarne i punti principali.

Il sistema n^{plo} ortogonale Σ sia individuato dalle formole dal § 499 e pei sistemi Σ' trasformati di RIBAUCOUR di Σ adoperiamo le stesse notazioni con accenti ; avremo le formole

$$x + R_i X_i = x' + R_i X'_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ossia

$$X'_i = X_i + \frac{1}{R_i}(x - x') \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dove R_i è il raggio dell'ipersfera che tocca simultaneamente in $P \equiv (x, y, \ldots t)$, $P' \equiv (x', y', \ldots t')$ le due ipersuperficie $u_i = \text{cost.}^{te}$.

(*) L'esempio più semplice si ha quando questo iperpiano è fisso, cioè Σ, Σ' sono simmetrici rispetto a qnesto iperpiano che rappresesenta allora la sfera d'inversione.

Procedendo come al § 340, introduciamo i coseni di direzione $\xi, \eta, \ldots \tau$ della congiungente $\overline{PP'} = T$ due punti corrispondenti scrivendo

$$\xi = \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda , \quad \eta = \sum_\lambda \alpha_\lambda Y_\lambda , \ldots \tau = \sum \alpha_\lambda T_\lambda ,$$

e le formole pel sistema trasformato saranno

$$x' = x + T\xi = x + T \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda , \quad \text{ecc.}$$

dove assumiamo per funzioni incognite

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n ; T ,$$

le prime n legate dalla relazione

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1 .$$

Se ne deduce

$$R_i = \frac{T}{2\alpha_i} , \quad X'_i = X_i - 2\alpha_i \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

e le seconde formole, comunque siano prese le α purchè $\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1$, dànno una sostituzione ortogonale di determinante $= -1$.

Assoggettando ora le $n + 1$ funzioni incognite

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n ; T$$

alle condizioni del problema che si traducono nelle equazioni

$$S\, X'_k \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0 , \quad \text{per } i \neq k ,$$

troviamo (cf. § 341)

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i\right) = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki}\, \alpha_i\right) ,$$

che deve valere per tutti i valori degli indici i, k. Il primo membro essendo indipendente da i, se introduciamo le nuove n funzioni ausiliarie ω, ponendo

$$\omega_i = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i\right),$$

dovranno sussistere insieme le equazioni

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u_i} = \omega_i T - 2 H_i \alpha_i \\ \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} = \omega_i \alpha_k + \beta_{ki} \alpha_i \quad (i \neq k = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

che esprimono (insieme alla $\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1$) tutte le condizioni del problema. Ma se paragoniamo due equazioni della prima linea nelle (13) e costruiamo la corrispondente condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\omega_i T - 2 H_i \alpha_i) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\omega_k T - 2 H_k \alpha_k),$$

troviamo subito per le (13) medesime a causa delle (II) pag. 623

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial u_i}.$$

Dunque intanto l'espressione $\sum_\lambda \omega_\lambda \, du_\lambda$ deve essere un differenziale esatto e possiamo quindi esprimere le ω $(i = 1, 2, \ldots n)$ per un'unica funzione incognita A che scegliamo (a meno di un fattore costante) ponendo

$$\omega_i = -\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial u_i},$$

cosicchè le prime (13) diventano

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial u_i}(T\sqrt{A}) = -2 H_i \sqrt{A} \, . \, \alpha_i .$$

Ed ora alle n funzioni incognite α_i sostituiamo le n definitive γ_i definite da

$$(15) \qquad \gamma_i = \sqrt{A}\, \alpha_i ,$$

per cui la condizione $\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1$ si traduce nell' altra

(16) $$A = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2$$

che esprime la A per le γ_i.

Ed ora se introduciamo i valori (15) delle γ_i nelle seconde equazioni (13), queste diventano

(17) $$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\, \gamma_k$$

e combinano colle equazioni del sistema aggiunto (II*) pag. 629. Se in fine alla funzione incognita T sostituiamo l'altra φ definita da

$$\varphi = -\frac{1}{2}\, T \sqrt{A}\,,$$

le (14) diventano

(18) $$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i\, \gamma_i\,.$$

Ma in effetto, per la proprietà α) pag. 630, soddisfacendo le γ_i al sistema aggiunto (17), le condizioni d'integrabilità per le (18) sono soddisfatte e ne risulta definita φ *a meno di una costante additiva* :

Inversamente se le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, soddisfano al sistema aggiunto (II*), e φ si calcola con una quadratura dalle (18), basta prendere

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{A}}\,, \quad T = -\frac{2\,\varphi}{\sqrt{A}} \quad \left(A = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2\right)$$

e tutte le nostre condizioni sono soddisfatte.

§ 504.

Elementi relativi al sistema trasformato Σ'.

Coll'analisi sopra sviluppata la ricerca di tutte le trasformazioni di RIBAUCOUR di un dato sistema n^{plo} ortogonale) è ridotta in sostanza alla integrazione del sistema aggiunto (II*) cioè equivale analiticamente alla ricerca delle trasformazioni di COMBESCURE, circostanze che preciseremo fra breve geometricamente. Fissiamo intanto che :

Si ottengono tutte le trasformazioni di RIBAUCOUR *di un dato sistema* n^{plo} *ortogonale* Σ *prendendo* $n + 1$ *funzioni trasformatrici.*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n\,;\, \varphi$$

che soddisfano al sistema differenziale lineare omogeneo

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k\,, \quad \frac{\partial\,\varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\gamma_i\,, \qquad (i \neq k)$$

(che appartiene alla classe A) § 500). Diremo le (III) le equazioni di trasformazione e le $n+1$ funzioni (γ_i, φ) le funzioni *trasformatrici ;* da queste risulta individuata la trasformazione che indicheremo col simbolo medesimo (γ_i, φ) avvertendo che non cangia la trasformazione alterando le funzioni trasformatrici per un medesimo fattore costante.

Fissate le funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n\,;\,\varphi)$, il sistema trasformato Σ' è definito, per i calcoli del paragrafo precedente, dalle formole

$$\text{(19)} \qquad x' = x - \frac{2\,\varphi}{\mathrm{A}} \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\mathrm{X}_\lambda\,, \quad \mathrm{A} = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2$$

e l'orientazione del nuovo n^{dro} principale dalle altre

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{X}'_i = \mathrm{X}_i - \frac{2\gamma_i}{\mathrm{A}} \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\mathrm{X}_\lambda\,.$$

Per calcolare gli altri elementi del sistema Σ' trasformato (*) cominciamo dall'osservare che, essendo le γ_i soluzioni del sistema aggiunto (II*) ,se poniamo

$$\text{(21)} \qquad \bar{x} = \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\mathrm{X}_\lambda\,, \quad \bar{y} = \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\mathrm{Y}_\lambda\,, \ldots$$

queste definiscono un sistema n^{plo} ortogonale, che diremo $\bar{\Sigma}$, trasformato di Combescure di Σ (§ 502), o parallelo a Σ. Siccome si ha

$$\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\,(\gamma_i\,\mathrm{X}_i) + \sum_\lambda^{(i)} \frac{\partial}{\partial u_i}\,(\gamma_\lambda\,\mathrm{X}_\lambda)\,,$$

eseguendo le derivazioni colle (III) e colle (6) § 499, si ha

$$\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda\right) . \mathrm{X}_i\,,$$

(*) Cf. § 342 i calcoli analoghi relativi al caso particolare delle trasformazioni di Ribaucour delle superficie.

od anche, essendo (§ 501)

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda \right),$$

possiamo scrivere

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_i} = \frac{1}{2\gamma_i} \frac{\partial A}{\partial u_i} \cdot X_i \,. \tag{22}$$

Con queste formole si ha la verifica che il sistema $\bar{\Sigma}$ è trasformato di COMBESCURE di Σ e i nuovi valori dei coefficienti H_i, che indichiamo con un soprassegno, sono dati da :

$$\bar{H}_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda = \frac{1}{2\gamma_i} \frac{\partial A}{\partial u_i} \,. \tag{23}$$

Ora le formole (19), si scrivono

$$x' = x - \frac{2\varphi}{A} \bar{x}$$

e derivate rapporto ad u_i dànno per le precedenti

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \left(H_i - \frac{2\varphi}{A} \bar{H}_i \right) \left(X_i - \frac{2\gamma_i}{A} \bar{x} \right) = \left(H_i - \frac{2\varphi_i}{A} \bar{H}_i \right) X'_i \,.$$

Queste confermano che Σ' è un nuovo sistema n^{plo} ortogonale e pei valori H'_i dei corrispondenti coefficienti del ds^2 forniscono le formole

$$H'_i = H_i - \frac{2\varphi}{A} \bar{H}_i = H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i} \frac{\partial A}{\partial u_i}$$

ossia

$$H'_i = H_i - \frac{2\varphi}{A} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda \right). \tag{IV}$$

Similmente derivando rispetto ad u_k la formola

$$X'_i = X_i - \frac{2\gamma_i}{A} \bar{x}$$

si troverà subito che le rotazioni β'_{ik} del sistema trasformato Σ' sono date dalle formole

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i}{A} \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} \beta_{\lambda k}\, \gamma_\lambda \right) \tag{V}$$

§ 505.

Composizione mediante trasformazioni di Combescure e inversioni.

L'equivalenza analitica osservata fra la ricerca delle trasformazioni di RIBAUCOUR e quella delle trasformazioni di COMBESCURE viene espressa geometricamente colla proposizione seguente:

Se (Σ, Σ') *è una coppia qualunque di sistemi* n^{pli} *ortogonali in trasformazione di* RIBAUCOUR, *esiste una coppia* $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma'})$ *di sistemi inversi l'uno dell'altro, rispettivamente trasformati di* COMBESCURE *di* Σ, Σ'.

La dimostrazione, affatto analoga a quella del § 344 pel caso delle superficie, risulta dalle considerazioni seguenti. Si è visto che le formole (21) definiscono un sistema n^{plo} ortogonale $\overline{\Sigma}$ trasformato di COMBESCURE di Σ ed avente quindi a comune con Σ le rotazioni. Possiamo dunque subito trovare un sistema $\overline{\Sigma'}$ trasformato di RIBAUCOUR di $\overline{\Sigma}$ colle stesse prime n funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ determinando la $(n+1)^{\text{ma}}$ $\overline{\varphi}$ dalle equazioni

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H_i}\,\gamma_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial u_i},$$

da cui integrando risulta

$$2\overline{\varphi} = A - c,$$

con c costante arbitraria. Ma allora, applicando a Σ la trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n; \overline{\varphi})$, avremo con notazioni evidenti:

$$\bar{x}' = \bar{x} - \frac{2\overline{\varphi}}{A}\bar{x} = \frac{C\bar{x}}{A}$$

$$\overline{X'_i} = X_i - \frac{2\gamma_i}{A}\bar{x} = X'_i.$$

E siccome dalle (21) segue

$$S\,\bar{x}^2 = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = A,$$

possiamo scrivere

$$\bar{x}' = \frac{C\,\bar{x}}{S\bar{x}^2}, \quad \bar{y}' = \frac{C\,\bar{y}}{S\bar{x}^2} \ldots$$

Il sistema $\bar{\Sigma}'$ è dunque trasformato per raggi vettori reciproci di $\bar{\Sigma}$ rispetto alla sfera

$$x^2 + y^2 + \ldots + t^2 = C$$

e nello stesso tempo trasformato di COMBESCURE di Σ', c. d. d. Risulta altresì da queste formole che, reciprocamente, se $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Sigma}'$ sono due sistemi n^{pli} ortogonali inversi l'uno dell'altro, e del sistema $\bar{\Sigma}$ si prende un qualunque trasformato di COMBESCURE Σ, esiste *una serie* ∞^1 di sistemi Σ' che sono ad un tempo trasformati di RIBAUCOUR di Σ, e trasformati di COMBESCURE di $\bar{\Sigma}$.

Così in sostanza: *le trasformazioni di* RIBAUCOUR *si compongono con inversioni e trasformazioni di* COMBESCURE.

Le inversioni sono del resto particolari trasformazioni di RIBAUCOUR; più precisamente la trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2) \ldots \gamma_n ; \varphi)$ di RIBAUCOUR per Σ è un'inversione quando le γ_i eguaglino rispettivamente le distanze algebriche W_i di un punto fisso dello spazio dalle n facce dell'n^{edro} principale di Σ. Importa ancora che, analogamente a quanto abbiamo fatto al § 342 nel caso delle superficie, risolviamo la questione seguente. Siccome la relazione fra i due sistemi Σ, Σ' è perfettamente involutoria saranno determinate, a meno di un fattore costante, le funzioni trasformatrici nel passaggio inverso da Σ' a Σ, che indichiamo con

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n ; \Phi.$$

Per calcolarle si osservi che i raggi R_i, delle n ipersfere invlluppanti essendo dati da

$$R_i = -\frac{\varphi}{\gamma_i}, \quad (i = i\,1, 2, \ldots n)$$

quindi anche da

$$R_i = -\frac{\Phi}{\Gamma_i},$$

si avrà certamente

$$\Gamma_i = M\,\gamma_i, \quad \Phi = M\,\varphi \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

essendo M un fattore di proporzionalità che si tratta di determinare. Per questo prendansi le formole

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = H'_i\,\Gamma_i,$$

che osservando le (III) e le (IV) diventano

$$\frac{\partial M}{\partial u_i}\varphi + M H_i \gamma_i = \left(H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\right) M \gamma_i ,$$

ossia

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial u_i} = -\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

A meno di un fattore costante risulta quindi integrando

$$M = \frac{1}{A} ,$$

e quindi : *Le funzioni trasformatrici inverse* Γ_i, Φ *pel passaggio da* Σ' *a* Σ *sono date dalle formole*

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A} , \quad \Phi = \frac{\varphi}{A} . \tag{24}$$

Si osservi che da queste formole seguono subito le altre

$$\sum_\lambda \Gamma^2_\lambda = \frac{1}{A} , \quad \sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda = -\frac{1}{A}\Sigma \gamma_\lambda X_\lambda$$

onde le (19), (20) possono anche scriversi

$$x = x' - \frac{2\Phi}{\sum_\lambda \Gamma^2_\lambda}\sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda$$

$$X_i = X'_i - \frac{2\Gamma_i}{\sum_\lambda \Gamma^2_\lambda}\sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda ,$$

che sono le formole stesse (19), (20) scambiati fra loro i due sistemi Σ, Σ'. (*)

§ 506.

Il teorema generale di permutabilità.

Andiamo ora ad estendere alle trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi n^{pli} ortogonali i risultati e le formole del teorema di permutabilità svi-

(*) Inversamente dalle formole superiori, paragonate colle (19) , (20) , possono trarsi le formole d'inversione (24).

luppati nei §§ 352-354 pel caso particolare delle trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie. Basterà in queste ultime formole sostituire, alla quaderna di funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, w\,;\,\varphi)$, le $n+1$ funzioni della trasformazione in n variabili

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n; \varphi)$$

e si avranno le nuove formole di facile verifica.

a) In primo luogo poniamo, come al § 352, la nozione di fascio di trasformazioni, osservando che da due sistemi

$$(\gamma_i; \varphi) \qquad (\gamma'_i; \varphi')$$

di funzioni trasformatrici, soddisfacenti alle equazioni fondamentali (III), si compone linearmente una serie ∞^1 (o fascio) di soluzioni

$$\overline{\gamma_i} = c_1 \gamma_i + c_2 \gamma'_i\,, \quad \overline{\varphi} = c_1 \varphi + c_2 \varphi'\,, \tag{25}$$

nella quale il rapporto $c_1 : c_2$ delle due costanti arbitrarie rappresenta il paramentro t nel fascio. Escscluderemo però il caso eccezionale che $\gamma'_1, \gamma'_2 \ldots \gamma'_n$ siano proporzionali a $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, nel qual caso il fattore di proporzionalità, a causa delle (III), sarebbe necessariamente costante.

Se diciamo Σ', Σ'' i due sistemi n^{pli} ortogonali contigui a Σ per le rispettive trasformazioni (γ_i, φ), (γ'_i, φ'), indicheremo con $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ il sistema variabile nel fascio, corrispondente alla trasformazione

$$(\overline{\gamma'_i}, \overline{\varphi}) \equiv (c_1 \gamma_i, + c_2 \gamma'_i\,, \quad c_1 \varphi + c_2 \varphi').$$

Poniamo

$$\mathrm{A} = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2\,, \ \mathrm{B} = \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda\,, \ \mathrm{A}' = \Sigma\, \gamma'^2_\lambda \tag{26}$$

ed avremo dalle (25)

$$\overline{\mathrm{A}} = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = \mathrm{A}\, c_1^2 + 2\,\mathrm{B}\, c_1 c_2 + \mathrm{A}'\, c_2^2. \tag{27}$$

Indicando con $\xi, \eta, \ldots$ le coordinate del punto generico $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ nel sistema variabile $x_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ nel fascio, avremo le formole corrispondenti alle (74) pag. 201

$$\xi = x - \frac{2\,(c_1\varphi + c_2\varphi')}{\mathrm{A}\, c_1^2 + 2\,\mathrm{B}\, c_1 c_2 + \mathrm{A}'\, c_2^2} \left\{ c_1 \sum_\lambda \gamma_\lambda\, \mathrm{X}_\lambda + c_2\, \Sigma\, \gamma'_\lambda\, \mathrm{X}_\lambda \right\}. \tag{28}$$

Fissati i valori di $u_1, u_2, \ldots u_n$, queste sono le equazioni parametriche di un circolo C luogo del punto $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ nel sistema $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$. (*) Questo circolo passa pel punto corrispondente $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ del sistema iniziale Σ e le coordinate $\xi_0, \eta_0 \ldots$ del suo centro sono date dalle formole (78) § 353 pag. 204

$$\xi_0 = x + \frac{B\varphi' - A'\varphi}{AA' - B^2}\bar{x} + \frac{B\varphi - A\varphi'}{AA' - B^2}\bar{x}', \quad \text{ecc.} \tag{29}$$

$$\bar{x} = \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda\,, \quad \bar{x}' = \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda\,,$$

dove il denominatore

$$AA' - B^2 = \begin{vmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \\ \gamma'_1 \gamma'_2 \ldots \gamma'_n \end{vmatrix}^2$$

è differente da zero, non essendo le γ'_i proporzionali alla γ_i. Il raggio del circolo C è dato dalla (79) pag. 204

$$r = \sqrt{\frac{A'\varphi^2 - 2B\varphi\varphi' + A\varphi'^2}{AA' - B^2}}\,. \tag{30}$$

Vediamo adunque che: *Due sistemi n^{pli} ortogonali Σ', Σ'', contigui per trasformazioni di* RIBAUCOUR *ad un medesimo Σ determinano un fascio $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ di tali sistemi tutti contigui a Σ. Il luogo dei punti corrispondenti nei sistemi del fascio è un circolo C che contiene anche il punto corrispondente di Σ.*

Nel caso escluso che siano le γ'_i proporzionali alle γ_i si può prendere senz'altro $\gamma'_i = \gamma_i$, indi

$$\varphi' = \varphi + k \quad (k \text{ costante}),$$

e le formole (19) provano che i circoli C degenerano in rette ed i sistemi del fascio sono per le (20) tutti paralleli.

b) Stabilita la nozione di fasci di sistemi trasformati, possiamo ora e-

---

(*) Il lettore verificherà subito queste asserzioni riprendendo gli sviluppi del § 352 coll'osservare che nel secondo mambro delle (28) figurano linearmente i due parametri

$$l = -\frac{2c_1(c_1\varphi + c_2\varphi')}{A c_1^2 + 2B c_1 c_2 + A'_1 c_2^2}\,, \quad m = -\frac{2c_2(c_1\varphi + c_2\varphi')}{A c_1^2 + 2B c_1 c_2 + A' c_2^2}\,,$$

onde il luogo descritto da $(\xi, \eta, \ldots.)$ giace in un piano (in un S_2), ecc.

nunciare il teorema *generale* di permutabilità nella sua forma completa (Cf. § 354 pag. 207):

Il fascio $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ *di sistemi* n^{pli} *ortogonali, tutti trasformati di* RIBAUCOUR *dell'iniziale* Σ, *individua un secondo fascio, a cui appartiene* Σ *stesso, ed ogni sistema* $\overline{\Sigma}$ *del secondo fascio è legato ad uno qualunque del primo fascio da una trasformazione di* RIBAUCOUR; *inoltre i circoli* C *del secondo fascio coincidono con quelli del primo.*

Due tali fasci, in relazione perfettamente involutoria fra loro, si diranno *fasci coniugati.* Noto uno di essi, l'altro si ha con una quadratura mediante le formole seguenti perfettamente analoghe a quelle per le superficie (§ 354).

Posto come al § 501

$$\Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda\,,\quad \Theta'_i = \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma'_\lambda\,, \tag{31}$$

l'espressione

$$\sum_{\lambda} \Theta_\lambda\,\gamma'_\lambda\,du_\lambda\,,$$

per la proprietà γ) ibid. è un differenziale esatto, pongasi

$$\tau = -2\int \sum_{\lambda} \Theta_\lambda\,\gamma'_\lambda\,du_\lambda\,, \tag{32}$$

dove per la costante additiva arbitraria in τ intenderemo fissato un valore qualunque. Allora le formole corrispondenti alle (V) § 354

$$\Gamma_i = \frac{c\,\gamma_i}{A} + a\left(\frac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i\right),\quad \Phi = \frac{c\,\varphi}{A} + a\left(\frac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi'\right), \tag{33}$$

dove a, c sono costanti arbitrarie dànno un fascio $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n; \Phi)$ di funzioni trasformatrici pel sistema Σ'. Questo è precisamente il secondo fascio coniugato del teorema di permutabilità. Si osservi che per $a = 0$ le (33) si riducono precisamente alle formole (24) d'inversione che da Σ' riconducono a $\overline{\Sigma}$, il quale ultimo sistema appartiene, come sappiamo, al secondo fascio (Σ). Escluso questo valore speciale $a = 0$, possiamo fare $a = 1$ e includendo la costante c arbitraria in τ, data dalle (32) con una quadratura, scriveremo le formole del teorema di permutabilità sotto la forma definitiva

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} \Gamma_i = \dfrac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i\,, \quad \Phi = \dfrac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi' \\ \tau = -2\displaystyle\int \sum_{\lambda} \Theta_\lambda\,\gamma'_\lambda\,du_\lambda \end{cases}$$

Quanto alle verifiche geometriche delle proprietà enunciate, esse si compiono con facile estensione alle n variabili di quelle effettuate al § 354; qui ci limitiamo ad alcune verifiche analitiche utili per il seguito.

§ 507.

Verifiche relative al teorema di permutabilità per le rotazioni.

Importa specialmente confermare il contenuto analitico del teorema di permutabilità in quanto riguarda l'integrazione del sistema differenziale (I) caratteristico per le rotazioni

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0\ , \end{cases}$$

dove dunque delle $n+1$ funzioni trasformatrici (γ_i, φ) entrano in considerazione le prime n soltanto

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n,$$

assoggettate a soddisfare al sistema (completamente integrabile)

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k.$$

Fissato un sistema $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ di tali soluzioni, si ottiene un nuovo sistema di rotazioni β'_{ik}, cioè un nuovo integrale del sistema (I) dalle formole (V)

$$(34)\qquad \beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i \Theta_k}{A}\ .$$

Se prendiamo ora un secondo sistema di funzioni trasformatrici $(\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \gamma'_n)$ ne dedurremo similmente un secondo sistema di rotazioni β''_{ik} dalle formole

$$(34^*)\qquad \beta''_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\,\gamma'_i\,\Theta'_k}{A'}\ .$$

Poniamo, secondo le formole (VI) del teorema di permutabilità :

$$\Gamma_i = \frac{\tau \gamma_i}{A} + \gamma'_i \,, \tag{35}$$

la funzione τ essendo determinata (a meno di una costante additiva) dalle equazioni compatibili :

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_t} = -2\,\Theta_i\,\gamma'_i \,. \tag{36}$$

Se deriviamo la (35) rapporto ad u_k $(k \neq i)$ osservando le formole precedenti e l'altra

$$\frac{\partial A}{\partial u_k} = 2\,\gamma_k\,\Theta_k \,, \tag{37}$$

troviamo

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k} = \left(\beta_{ik} - \frac{2\gamma_i\Theta_k}{A}\right)\left(\gamma'_k + \frac{\tau\gamma_k}{A}\right) = \beta'_{ik}\,\Gamma_k \,,$$

onde la verfica che $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n)$ sono funzioni trasformatrici per il nuovo sistema di rotazioni (β'_{ik}). Si osservi ora che, derivando rispetto ad u_i l'espressione media nelle (26)

$$B = \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda \,,$$

si ottiene

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma'_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \gamma_i \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_\lambda^{(i)} \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda =$$

$$= \gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma'_\lambda \right\} + \gamma'_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\beta_\lambda \right\} ,$$

ossia

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma_i\,\Theta'_i + \gamma'_i\,\Theta_i \,. \tag{38}$$

Ne segue che ponendo

$$\tau' = -(\tau + 2\,B) \,, \tag{39}$$

questa nuova funzione τ' soddisferà alle equazioni analoghe alle (36)

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u_i} = -2\,\Theta'_i\,\gamma_i \,, \tag{36*}$$

e sarà per ciò l'analoga della τ, scambiate fra loro le γ_i, γ'_i. Per ciò le formole

$$\Gamma'_i = \frac{\tau' \gamma'_i}{A'} + \gamma_i , \tag{35*}$$

corrispondenti alle (35), daranno un sistema di funzioni trasformatrici pel passaggio dalle rotazioni (β'_{ik}) ad un nuovo sistema di rotazioni. Il risultato analitico del teorema di permutabilità, in quanto concerne le rotazioni, consiste appunto in questo che si ottiene il medesimo sistema di rotazioni trasformando le (β'_{ik}) colle $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n)$, ovvero le (β''_{ik}) colle $(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots \Gamma'_n)$.

Per verificare questo indichiamo con $(\overline{\beta}_{ik})$ il sistema di rotazioni ottenute p. e, nel primo modo ; avremo per le (34)

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta'_{ik} - \frac{2\Gamma_i \overline{\Theta}_k}{\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2} , \quad \overline{\Theta}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta'_{\lambda k} \gamma_\lambda \tag{40}$$

Costruendo dapprima colle formole precedenti $\overline{\Theta}_k$ troviamo

$$\overline{\Theta_k} = \frac{\tau}{A} \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} - \frac{\gamma_k}{A} . 2\, \Theta_k\, \gamma'_k - \frac{\tau \gamma_k}{A^2} . 2\, \gamma_i\, \Theta_k + \frac{\partial \gamma'_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \left(\beta_{\lambda k} - \frac{2\gamma_\lambda\, \Theta_k}{A} \right) \frac{\tau \gamma_\lambda}{A} +$$

$$+ \sum_\lambda^{(k)} \left(\beta_{\lambda k} - \frac{2\, \gamma_\lambda\, \Theta_k}{A} \right) \gamma'_\lambda ,$$

e riducendo

$$\overline{\Theta_k} = \Theta'_k - \frac{\tau + 2\, B}{A} \Theta_k ,$$

ovvero anche

$$\overline{\Theta_k} = \Theta'_k + \frac{\tau' \Theta_k}{A} . \tag{41}$$

D'altra parte abbiamo dalle (35)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{\tau^2}{A} + \frac{2\, B \tau}{A} + A' = -\frac{\tau \tau'}{A} + A' = \frac{A\, A' - \tau \tau'}{A}$$

e sostituendo nelle (40) otteniamo

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{1}{A\, A' - \tau \tau'} \left\{ A\, \gamma'_i\, \Theta'_k + A' \gamma_i\, \Theta_k + \tau\, \gamma_i\, \Theta'_k + \tau\, \gamma'_i\, \Theta_k \right\} , \tag{42}$$

dove il secondo membro resta invariato permutando fra loro le γ colle γ', indi A con A', τ con τ', Θ con Θ'. Per tal modo è ottenuta la richiesta verifica.

§ 508.

I sistemi n.pli ortogonali E simmetrici nelle rotazioni ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$).

Passiamo ora a trattare alcune classi particolari notevoli di sistemi n^{pli} ortogonali per le quali il teorema di permutabilità, ulteriormente *specializzato*, consente di dedurre *con operazioni in termini finiti* un numero illimitato di sistemi della classe, come abbiamo visto accadere in molte altre teorie di trasformazioni della geometria infinitesimale. (*)

Cominciamo da una classe caratterizzata dalla proprietà che, *per una scelta conveniente dei parametri* u_i, presentano la *simmetria* nelle rotazioni, cioè $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Pel caso dello spazio ordinario ($n = 3$) questi sistemi vennero studiati da varii autori: DARBOUX EGOROV ecc, e dal primo denominati *sistemi* E, (**) denominazione che qui conserveremo per n qualunque.

Per accertare l'esistenza ed il grado di arbitrarietà di questi sistemi E, basta introdurre nelle equazioni fondamentali (I) l'ipotesi $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Allora abbiamo nelle $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni incognte β_{ik} $(i < k)$ il sistema differenziale seguente:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{ik}\,\beta_{lk}\,, \quad \sum_\lambda \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} = 0\,.$$

Questo appartiene alla classe B) § 500; per ogni incognita β_{ik} $(i < k)$ tutte le variabili sono principali, salvo la u_k parametrica, e le due espressioni delle derivate seconde miste principali sono identiche. Il sistema (VII)

(*) Citiamo in primo luogo la teoria delle trasformazioni (asintotiche) di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche, poi la teoria estesa alle trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche; le trasformazioni di RIBAUCOUR per le superficie minime, per le superficie a curvatura costante, per le superficie isoterme, ecc.

(**) DARBOUX S. O. 2.ª ediz. Chap.

ha quindi un integrale generale dipendente da $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni arbitrarie.

Si osservi ora che, essendo $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, le equazioni (6) pag... dimostrano che ciascuno dei coseni X_i soddisfa l'equazione a derivate parziali

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial F}{\partial u_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0 ,$$

ed è per ciò funzione delle sole differenze $u_i - u_k$. Ne segue che ciascuna X_i resta invariata se tutte le variabili u_i aumentano di una stessa costante, onde l'n^{edro} principale di un sistema E conserva la medesima orientazione assoggettando le variabili u alla trasformazione continua $\bar{u}_i = u_i +$ $+$ cost^{te}; in altre parole : *Ogni sistema* E *ammette un gruppo continuo* G_1 *ad un parametro di trasformazioni di* COMBESCURE *in sè medesimo.* (*)

Osserviamo poi che le condizioni di simmetria $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ si scrivono anche

$$\frac{\partial H_i^2}{\partial u_k} = \frac{\partial H_k^2}{\partial u_i}$$

e sotto questa forma dimostrano che l'espressione $d\Theta = \sum_{\lambda} H_\lambda^2 \, du_\lambda$ è un differenziale esatto. La ricerca dei sistemi E equivale adunque all'altra : *ridurre l'elemento lineare dello spazio* S_n *euclideo alla forma*

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_2^2 + \ldots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2 .$$

Da ultimo osserviamo che, nel caso dei sistemi E, il sistema differenziale (II) pag. 623 coincide col proprio aggiunto (II*) e da questa osservazione si ottiene subito il procedimento ricorrente di EGOROV (DARBOUX S. O. nn. 242 s. s) che permette di ottenere da ogni sistema E infiniti altri suoi trasformati di COMBESCURE. Ma ora, applicando trasformazioni di RIBAUCOUR, potremo passare ad altri sistemi E *con diverse rotazioni* .

(*) Nelle notazioni di LIE la trasformazione infinitesima generatrice del G_1 è appunto la $XF = \sum_{\lambda} \frac{\partial F}{\partial u_\lambda}$ e lungo le trajettorie del grupo l'n^{edro} principale non varia di orientazione.

§ 509.

Trasformazione T_m dei sistemi E.

Dato un sistema E (o meglio un sistema di rotazione β_{ik} simmetriche), domandiamo se esistono trasformazioni di RIBAUCOUR che lo cangino in un altro sistema E′, tale cioè che le nuove rotazioni β'_{ik} soddisfino, alla loro volta, alle condizioni di simmetria $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$. Per questo occorre e basta, secondo la (34), che le funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ siano tali da rendere

$$\gamma_i \Theta_k = \gamma_k \Theta_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Dovremo dunque avere, indicando con μ un fattore di proporzionalità

$$\Theta_i = \mu \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ma allora siccome $\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k$ e per la proprietà β) § 501

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k = \beta_{ik} \cdot \mu \gamma_k ,$$

derivando la precedente rispetto ad u_k risulta

$$\gamma_i \frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0 ,$$

da cui $\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0$ (*) onde si vede intanto che μ sarà necessariamente una costante m.

Le funzioni trasformatrici γ_i, a volere che il sistema trasformato sia ancora un sistema E, dovranno soddisfare al sistema (lineare omogeneo)

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m \gamma_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda .$$

Questo è, per le γ_i, un sistema ai differenziali totali completamente integrabile, a causa delle (VII), come subito si verifica, per qualunque va-

(*) Escludiamo qui, come sempre in seguito, i casi di ovvia trattazione in cui si annulli qualche rotazione o qualcuna delle funzioni trasformatrici.

lore della costante m. E inversamente se $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ è una soluzione delle (VIII), il sistema derivato è nuovamente un sistema E, perchè le (34) essendo $\Theta_k = m\gamma_k$, dànno

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - 2\frac{2\,m\,\gamma_i\,\gamma_k}{A},$$

e ne risulta $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$.

Si osservi che se nelle (VIII) poniamo $m = 0$, queste si riducono alle equazioni (6) pag. 624 cui soddisfono i coseni di una direzione fissa nello spazio colle direzioni principali ; questo caso $m = 0$ si intenderà escluso perchè le rotazioni non verrebbero allora cangiate e si avrebbe il caso ovvio di un sistema E′ simmetrico del primitivo rispetto ad un iperpiano fisso.

Importa anche osservare che, inversamente, se un sistema n^{plo} ortogonale Σ ammette una trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n ; \varphi)$ nella quale le γ_i soddisfano le (VIII) *con* $m \neq 0$, questo è necessariamente un sistema E. Poichè infatti avendosi $\Theta_i = m\,\gamma_i$ sarà

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = m\,\beta_{ik}\,\gamma_k \quad (i \neq k)$$

e d'altra parte per la (β pag. 630)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,\Theta_k = m\,\beta_{ki}\,\gamma_k\,,$$

da cui

$$m\,\gamma_k\,(\beta_{ik} - \beta_{ki}) = 0\,,$$

o $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

Fissato il valore della costante m (non nulla) nelle (VIII) ogni corrispondente trasformazione di RIBAUCOUR si dirà per abbreviare una *trasformazione* T_m. Essa contiene, oltre m, altre n costanti omogenee, cioè dipende, come trasformazione delle rotazioni, da $n - 1$ costanti essenziali.

È chiaro che la trasformazione inversa dalle rotazioni (β'_{ik}) alle (β_{ik}) sarà una trasformazione della medesima specie ed ora andiamo a constatare che : *la trasformazione inversa è una* T_{-m} *col valore opposto del parametro* m.

E infatti se nelle formole generali (41) (pag. 647) poniamo nulle tutte le γ'_i, indi prendiamo secondo le (VI) e la (39)

$$\tau = 1, \qquad \tau' = -1,$$

dopo di che le Γ_i diventano le funzioni trasformatrici inverse, ne risulta

$$\overline{\Theta_k} = -\frac{\Theta_k}{A} = -m\frac{\gamma_k}{A} = -m\,\Gamma_k,$$

ciò che prova la nostra assersione.

§ 510.

Il terema speciale di permutabilità per le T_m.

Andiamo ora a dimostrare che il teorema generale di permutabilità (§ 506), applicato al gruppo dei sistemi E e delle loro trasformazioni T_m, dà luogo ad un teorema *speciale* di permutabilità affatto analogo a quello che sussiste nelle altre teorie citate in nota al § 508.

Il teorema si enuncia: *Se da un sistema* E *sono dedotti due sistemi contigui* E′, E″ *per le rispettive trasformazioni* T_m, $T_{m'}$ *non opposte* ($m' \neq -m$), *nel fascio del teorema generale di permutabilità, coniugato al fascio* $c_1 E' + c_2 E''$, *esiste uno ed un solo quarto sistema* $\overline{E}$: *Questo è legato rispettivamente ad* E′, E″ *da due trasformazioni* $T_{m'}$, T_m *colle costanti* m, m' *invertite ed il sistema* E *si ha in termini finiti.*

Per dimostrarlo applichiamo la formola generale (42) pag. 647 che dà le rotazioni $\overline{\beta_{ik}}$ di uno qualunque dei sistemi $\overline{\Sigma}$ nel fascio coniugato; nel caso attuale avendosi

$$\Theta_i = m\gamma_i\,, \quad \Theta' = m'\gamma'_i\,,$$

risulta

$$\overline{\beta_{ik}} = \beta_{ik} - \frac{2}{AA' - \tau\tau'}\left\{m' A\,\gamma'_i\gamma'_k + m A'\gamma_i\gamma_k + m'\tau\,\gamma_i\gamma'_k + m\tau'\,\gamma'_i\gamma_i\right\}.$$

Affinchè questo sistema $\overline{\Sigma}$ sia un sistema E occorre che si abbia $\overline{\beta_{ik}} = \overline{\beta_{ki}}$, cioè

$$(m'\tau - m\tau')(\gamma_i\gamma'_k - \gamma_k\gamma'_i) = 0\,,$$

e siccome le γ'_i non sono proprorzionali alle γ_i, dovremo avere

$$m' \tau - m \tau' = 0 ,$$

ossia per la (39)

$$m + m' \tau + m 2 . B = 0 . \tag{43}$$

Di qui, essendo per ipotesi $m + m' \neq 0$, si trae per τ il valore unico e determinato

$$\tau = - \frac{2 m B}{m + m} , \tag{44}$$

del quale resterà a dimostrare che soddisfa in effetto alle equazioni (36) che definiscono τ

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = - 2 \Theta_i = - 2 m \gamma_i \gamma'_i .$$

Ma dalle (38) abbiamo nel caso nostro

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = (m + m') \gamma_i \gamma'_i \tag{45}$$

e le equazioni per τ sono dunque verificate, onde risulta provata la prima parte della nostra proposizione. (*)

Per provare anche la seconda si applichi la formola generale (41), la quale dà nel caso nostro

$$\overline{\Theta}_k = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} \beta_{\lambda k} \Gamma_\lambda = m' \gamma'_k + \frac{m \tau'}{A} \gamma_k ,$$

cioè, a causa di $m \tau' = m' \tau$.

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} \beta'_{\lambda k} \Gamma_\lambda = m' \left(\gamma'_k + \frac{\tau \gamma_k}{A} \right) = m' \Gamma_k ,$$

e questo prova appunto che il quarto sistema $\overline{E}$ è legato ad E′ da una $T_{m'}$,

(*) Si osservi che mentre nel caso generale la determinazione del fascio coniugato del teorema di permutabilità richiede la quadratura (32), nel caso attuale questa quadratura è già eseguita in termini finiti. La stessa circostanza si ripeterà nei casi seguenti del testo ove sussiste un teorema *speciale* di permutabilità.

e per la ragione analoga (scambiando le γ_i colla γ'_i), sarà legato ad E'' da una T_m, secondo l'ultima parte dell'enunciato.

Le conseguenze che si deducono da questo teorema *speciale* di permutabilità, per l'applicazione indefinitamente ripetuta delle attuali trasformazioni T_m ai sistemi E, sono le medesime come negli altri casi analoghi incontrati in questo libro, in particolare nel caso tipico (Cap. XVI) delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche. Esse si riassumono nel risultato : *Se di un sistema* n^{plo} *ortogonale* E *si conoscono tutti i contigui per trasformazioni* T_m, *l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione ai nuovi sistemi, ai derivati di questi, e così via, si compie senza alcun calcolo d'integrazione.*

È questo in sostanza un risultato analitico che riguarda l'integrazione del sistema differenziale (VII), caratteristico per le rotazioni dei sistemi E.

Le stesse circostanze si presentano per gli altri sistemi differenziali analoghi che ora tratteremo e pei quali sussiste ancora un teorema speciale di permutabilità.

Osserviamo in fine che, nell'enunciato e nella dimostrazione superiore, si è escluso il caso $m' = -m$; ma i calcoli eseguiti sino alla formola (43) sussistono ancora in questo caso e la (45) dimostra che allora B = cost.^{te}. Se questa costante è diversa da zero la (43) non è soddisfatta e nel fascio coniugato l'unico sistema E è l'iniziale, col quale viene a coincidere il quarto $\overline{E}$. Ma quando sia B = 0, vale a dire quando le funzioni trasformatrici (γ_i), (γ'_i) siano legate dalla relazione

$$\gamma_1 \gamma'_1 + \gamma_2 \gamma'_2 + \ldots + \gamma_n \gamma'_n = 0,$$

allora la (43) è un'identità *e tutti i sistemi del fascio coniugato sono sistemi* E.

§ 511.

Sistemi a rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}).

Si ottiene una notevole generalizzazione dei sistemi E colle considerazioni seguenti. Nel sistema differenziale caratteristico (I) pag. 623 per le rotazioni β_{ik} di un sistema n^{plo} ortogonale Σ qualunque, le equazioni della prima linea sono simmetriche negli indici, cioè restano invariate scambiando in ciascuna β i due indici, mentre ciò non avviene per le equazioni della seconda linea. Se si pone adunque

$$\overline{\beta_{ik}} = \beta_{ki} ,$$

queste nuove $\overline{\beta}_{ik}$ soddisfano le (I) della prima linea, ma in generale non quelle della seconda. Se queste si aggiungono alle (I) come nuove condizioni, si forma il sistema seguente:

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \\ \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\,\beta_{k\lambda} = 0\,. \end{cases}$$

Supposto che le β_{ik} soddisfino a questo sistema, insieme alle β_{ik} formano un altro sistema di rotazioni, per una classe di sistemi n^{pli} ortogonali paralleli, le $\overline{\beta}_{ik}=\beta_{ki}$ In tal caso diremo che si ha un sistema di rotazioni *associate* (β_{ik}, β_{ki}). Che esistano effettivamente di tali coppie di rotazioni associate lo dimostra già il caso dei sistemi E, ove $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ e l'integrale generale del sistema (A) dipende in questa ipotesi $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (§ 508) da $\dfrac{n(n-1)}{2}$ funzioni arbitrarie.

Ma ora andiamo a provare che il sistema (A) possiede un integrale generale molto più ampio, dipendente cioè da un numero doppio $n\,(n-1)$ di funzioni arbitrarie. Se si applicano infatti a questo sistema (A) le osservazioni generali del § 500, e si risolvono le equazioni delle due ultime linee, supposto p. e $i < k$, rispetto alle due derivate

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}\,,\ \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}$$

con indice di derivazione minore, il sistema acquista la forma canonica e per ciascuna incognita β_{ik} si hanno $n-1$ variabili principali ed una sola parametrica, e cioè le u_k se $i < k$, la u_i se $i > k$. Se verifichiamo che coincidono le due espressioni di ogni derivata seconda mista doppiamente principale sarà provato che il sistema appartiene alla seconda classe B) § 500, e ne seguirà appunto l'esistenza dell'integrale generale con altrettante funzioni arbitrarie $n\,(n-1)$ quante sono le incognite. Per questo, essendo l un terzo indice qualunque diverso da i, k, deriviamo rapporto ad u_l l'equazioni aggiunte della terza linea in (A) e formiamo così l'espressione

$$U = \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}\right) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{i\lambda}\,\beta_{k\lambda}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{kl}\,\beta_{li}) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{il}\,\beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{il}\,\beta_{kl}) + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{i\lambda}\,\beta_{\lambda k}) .$$

Eseguendo le derivazioni colle (A) della prima linea e raccogliendo i termini risulta

$$U = \beta_{kl}\left(\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l} + \frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{i\lambda}\,\beta_{l\lambda} + \beta_{ik}\,\beta_{lk}\right) +$$

$$+ \beta_{il}\left(\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{k\lambda}\beta_{l\lambda} + \beta_{ki}\,\beta_{li}\right).$$

Ma i coefficienti di β_{kl}, β_{ik} a destra sono nulli, in virtù delle (A) della terza linea, e per ciò $U = 0$, onde il sistema (A) è illimitatamente integrabile c. d. d.

Quanto al problema della integrazione effettiva del sistema (A), esso appare ancora più complicato che nel caso particolare dei sistemi E ; ma anche in questo caso le trasformazioni di RIBAUCOUR, convenientemente applicate, ci forniranno dei metodi di *integrazione successiva* semplificati dal teorema di permutabilità.

§ 512.

Trasformazioni T_m dei sistemi (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate.

Estendendo ora la ricerca del § 509 pel caso particolare dei sistemi E, proponiamoci la questione seguente. Supponiamo noto un sistema iniziale di rotazioni associate

$$\beta_{ik} \quad , \quad \overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki} ,$$

e domandiamo se è possibile applicare alle prime rotazioni (β_{ik}) una trasformazione di RIBAUCOUR $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ e alle seconde rotazioni $(\overline{\beta}_{ik})$ un'altra $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots \overline{\gamma}_n)$, in guisa che le rotazioni derivate (β'_{ik}), $(\overline{\beta'}_{ik})$ formino un nuovo sistema di rotazioni associate, ove cioè sia $\overline{\beta'}_{ik} = \beta'_{ki}$?

Per questo le $2n$ funzioni incognite

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n \; ; \; \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots \overline{\gamma}_n ,$$

dovranno in primo luogo soddisfare alle equazioni (II*) § 501 del rispettivo sistema aggiunto :

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\, \gamma_k , \qquad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, \overline{\gamma}_k ,$$

e in secondo luogo, ponendo

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 , \qquad \overline{A} = \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2$$

$$\Theta_k = \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k}\, \gamma_\lambda , \quad \overline{\Theta}_k = \frac{\partial \overline{\gamma}_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{k\lambda}\, \overline{\gamma}_\lambda ,$$

avremo per la (34) pag. 645

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\,\gamma_i \Theta_k}{A} , \quad \overline{\beta}'_{ik} = \beta_{ki} - \frac{2\,\overline{\gamma}_i\, \overline{\Theta}_k}{\overline{A}} ,$$

e la condizione $\overline{\beta}'_{ik} = \beta'_{ki} = \beta_{ki} - \dfrac{2\gamma_k\, \Theta_i}{A}$, ci darà le ulteriori condizioni

$$\frac{\Theta_i}{A\,\overline{\gamma}_i} = \frac{\overline{\Theta}_k}{\overline{A}\,\gamma_k} ,$$

che debbono sussistere per tutte le coppie (i, k) con $i \neq k$. Ne risulta che, indicando con μ, $\overline{\mu}$ due convenienti fattori di proporzionalità, avremo

$$\Theta_i = \mu\, \overline{\gamma}_i , \quad \overline{\Theta}_i = \overline{\mu}\, \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{46}$$

$$\mu\, \overline{A} = \overline{\mu}\, A. \tag{46*}$$

Ma ora se applichiamo la formola (pag. 630)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, \Theta_k , \quad \frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\, \overline{\Theta}_k ,$$

ne segue

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\mu\,\overline{\gamma_i}) = \frac{\partial \mu}{\partial u_k}\overline{\gamma_i} + \mu\,\beta_{ki}\,\overline{\gamma_k} = \beta_{ki}\,\mu\,\overline{\gamma_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\overline{\mu}\,\gamma_i) = \frac{\partial \overline{\mu}}{\partial u_k}\gamma_i + \overline{\mu}\,\beta_{ik}\,\gamma_k = \beta_{ik}\,\overline{\mu}\,\gamma_k\,,$$

e per ciò

$$\overline{\gamma_i}\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0\,, \quad \gamma_i\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0\,,$$

indi $\dfrac{\partial \mu}{\partial u_k} = \dfrac{\partial \overline{\mu}}{\partial u_k} = 0$: *i fattori* $\mu, \overline{\mu}$ *sono necessariamente due costanti* $m, \bar{m}$. Ma vi ha di più : senza alterare la generalità possiamo prendere eguali queste due costanti m, $\bar{m}$ che, a causa della (46*)

$$m\sum_\lambda \overline{\gamma_\lambda^2} = \bar{m}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2\,,$$

hanno certamente il medesimo segno. E infatti se moltiplichiamo p. e. tutte le γ_i per un fattore costante b, cioè equivale per le (46) a cangiare m, $\bar{m}$ rispettivamente in $b\,m$, $\dfrac{\bar{m}}{b}$, costanti che si rendono eguali prendendo $b = \sqrt{\dfrac{\bar{m}}{m}}$.

La soluzione più generale del problema proposto si ottiene adunque assumendo le $2n$ incognite γ, $\overline{\gamma}$ in guisa da soddisfare al sistema di equazioni ai differenziali totali

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k\,, & \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\,\gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda \\ \dfrac{\partial \overline{\gamma_i}}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,\overline{\gamma_k}\,, & \dfrac{\partial \overline{\gamma_i}}{\partial u_i} = m\,\gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}\,\overline{\gamma_\lambda} \end{cases}$$

(m costante arbitaria),

al quale sia aggregata per la (46*) l'equazione in termini finiti

$$\text{(B*)}\qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 - \sum_\lambda \overline{\gamma_\lambda^2} = 0\,.$$

Ora dai calcoli stessi eseguiti risulta che, essendo verificate le (A) il sistema (B) è completamente integrabile. Di più essendo

$$\Theta_i = m\,\overline{\gamma_k}\,, \quad \overline{\Theta}_i = m\,\gamma_i\,,$$

risulta (§ 501)

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\,\Theta_i\,\gamma_i = 2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma_i}$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial u_i} = 2\,\overline{\Theta}_i\,\overline{\gamma_i} = 2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma_i}\,,$$

cioè $\dfrac{\partial A}{\partial u_i} = \dfrac{\partial \overline{A}}{\partial u_i}$, onde il sistema (B) ammette l'integrale quadratico

$$A - \overline{A} = \text{cost.}^{\text{te}}\,,$$

e si può quindi soddisfare alla (B*) vincolando corrispondentemente i valori iniziali delle γ_i, $\overline{\gamma_i}$.

Concludiamo quindi: *Dato un sistema iniziale* (β_{ik}, β_{ki}) *di rotazioni associate, se ne ottiene uno nuovo* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ *integrando il sistema lineare ai differenziali totali* (B) *nelle* $2n$ *funzioni incognite* $(\gamma_i\ \overline{\gamma_i})$, *colla condizione ai limiti* (B*) *e le nuove rotazioni* β'_{ik} *si calcolano da le formole*

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\,m\,\gamma_i\,\overline{\gamma_k}}{A}\,.$$

Indicheremo ancora con T_m la trasformazione di RIBAUCOUR che conduce dal sistema di rotazioni associate (β_{ik}, β_{ki}) al nuovo $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, ponendo in evidenza come nel caso particolare $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ dei sistemi E (§ 509) la costante m (diversa da zero) contenuta nella trasformazione. In T_m sono inoltre contenute, a causa della omogeneità, altre $2n - 2$ costanti arbitrarie.

Se si osserva poi che nel passaggio inverso da $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ *a* (β_{ik}, β_{ki}) le funzioni trasformatrici sono

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A}\,, \quad \overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\gamma_i}}{A}\,,$$

si troverà subito colle formole precedenti

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda = -\,m\,\overline{\Gamma}_i\,,$$

il che dimostra (cf. § 509) che: *la trasformazione inversa di una* T_m *è una* T_{-m}.

Questi risultati si applicano anche evidentemente al caso in cui il sistema iniziale associato (β_{ik}, β_{ki}) sia un sistema E dal quale, mediante la T_m ora considerata, si derivano ∞^{2n-2} sistemi di rotazioni associate, ed entro questa moltiplicità soltanto una moltiplicità subordinata ∞^{n-1} è composta di sistemi E.

§ 513.

Il teorema speciale di permutabilità per le nuove T_m.

Anche il teorema speciale di permutabilità, che al § 510 abbiamo stabilito per le particolari T_m dei sistemi E, può ora estendersi alle T_m dei sistemi associati di rotazioni (β_{ik}, β_{ki}). Da questo sistema iniziale, con due diverse trasformazioni T_m, $T_{m'}$ siansi ottenuti i due nuovi $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$, *e supponiamo che sia* $m'^2 \neq m^2$. Dimostriamo che: *esiste un quarto sistema di rotazioni* (B_{ik}, B_{ki}) *legato a* $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ *da una* $T_{m'}$ *e all'altro* $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ *da una* T_m.

Per questo cerchiamo le effettive formole che individuano questo quarto sistema, sulle quali sarà poi facile compiere le verifiche. Indichiamo con $(\gamma_i, \overline{\gamma'}_i)$ le funzioni trasformatrici per la prima T_m, e con $(\gamma'_i, \overline{\gamma'}_i)$ quello per la $T_{m'}$, onde le $(\gamma_i, \overline{\gamma}_i)$ soddisferanno alle (B), (B*) e le $\gamma'_i, \overline{\gamma'}_i$ alle analoghe:

$$\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma'_k, \quad \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} = m'\overline{\gamma'}_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda$$

$$\frac{\partial \overline{\gamma'}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\overline{\gamma'}_k, \quad \frac{\partial \overline{\gamma'}_i}{\partial u_i} = m'\gamma'_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\overline{\gamma'}_\lambda$$

$$\sum_{\lambda} \overline{\gamma'}^2_\lambda = \sum_{\lambda} \gamma'^2_\lambda .$$

Ora applichiamo ai tre sistemi di rotazioni (β_{ik}), (β'_{ik}), (β''_{ik}) il teorema generale di permutabilità (§ 506) e siano $(\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_n)$ le funzioni trasformatrici nel passaggio da (β'_{ik}) al quarto sistema (B_{ik}), e similmente $(\overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2, \ldots \overline{\Gamma}_n)$ quelle pel passaggio dal sistema (β'_{ki}) associato al primo, all'altro (B_{ki}) associato al secondo. A causa delle (VI) pag. 644 avremo

$$\Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i \quad , \quad \overline{\Gamma}_i = \frac{\overline{\tau}\,\overline{\gamma}_i}{A} + \overline{\gamma'}_i \quad , \tag{47}$$

dove $\tau, \bar{\tau}$ dovranno soddisfare alle condizioni

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\,\gamma'_i\,\Theta_i\,, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial u_i} = -2\,\bar{\gamma}'_i\,\bar{\Theta}_i\,,$$

cioè

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\,m\,\gamma'_i\,\bar{\gamma}_i\,, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial u_i} = -2\,m\,\bar{\gamma}'_i\,\gamma_i\,. \tag{48}$$

D'altra parte si passa, per ipotesi, dal sistema associato di rotazioni $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ all'altro (B_{ik}, B_{ki}) mediante una $T_{m'}$ e dovranno quindi essere verificate le relative equazioni (B), (B*), fra le quali dopo le verifiche effettuate in generale al § 507, basta tener conto delle seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda = m'\,\bar{\Gamma}_i \\ \dfrac{\partial \bar{\Gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{i\lambda}\,\bar{\Gamma}_\lambda = m'\,\Gamma_i \end{cases} \tag{49}$$

$$\sum_{\lambda} \bar{\Gamma}_\lambda^2 - \sum_{\lambda} \Gamma_\lambda^2 = 0. \tag{49*}$$

Ma per la (41)

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{i\lambda}\,\Gamma_\lambda = \Theta'_i + \frac{\tau'\,\Theta_i}{A} = m'\,\bar{\gamma}'_i + \frac{m\tau'}{A}\,\bar{\gamma}_i$$

e similmente

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{i\lambda}\,\bar{\Gamma}_\lambda = m'\,\gamma'_i + \frac{m\,\bar{\tau}'}{A}\,\gamma_i\,,$$

onde le (49), osservando le (47), restano

$$\begin{cases} m\,\tau' = m'\,\bar{\tau} \\ m\,\bar{\tau}' = m'\,\tau\,. \end{cases} \tag{50}$$

Ma, colle posizioni

$$\mathfrak{B} = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda\,, \quad \bar{\mathfrak{B}} = \sum_{\lambda} \bar{\gamma}_\lambda\,\bar{\gamma}'_\lambda\,,$$

si ha (§ 507)

$$\tau' = -(\tau + 2\,\mathrm{B}), \quad \bar{\tau}' = -(\bar{\tau} + 2\,\bar{\mathrm{B}})$$

e le (50 diventano le due equazioni lineari in τ, $\bar{\tau}$:

$$(50^*) \qquad \begin{cases} m\,\tau + m'\,\bar{\tau} = -2\,m\,\mathrm{B} \\ m'\,\tau + m\,\bar{\tau} = -2\,m\,\bar{\mathrm{B}}, \end{cases}$$

da cui, essendo per ipotesi $m'^2 - m^2 \neq 0$, risultano per τ, $\bar{\tau}$ i valori

$$(51) \qquad \tau = \frac{2\,m}{m'^2 - m^2}(m\,\mathrm{B} - m'\,\bar{\mathrm{B}}), \quad \bar{\tau} = \frac{2\,m}{m'^2 - m^2}(m\,\bar{\mathrm{B}} - m'\,\mathrm{B})$$

e conseguentemente per τ', $\bar{\tau}'$ gli altri

$$(51^*) \qquad \tau' = \frac{2\,m'}{m'^2 - m^2}(m\,\bar{\mathrm{B}} - m'\,\mathrm{B}), \quad \bar{\tau}' = \frac{2\,m'}{m'^2 - m^2}(m\,\mathrm{B} - m'\,\bar{\mathrm{B}}).$$

Resta a provare : 1° che i valori (51) di τ, $\bar{\tau}$ soddisfano alle (48), 2° che è soddisfatta l'equazione in termini finiti (49*). Per la prima cosa basta osservare che dalle (38) segue

$$(52) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{B}}{\partial\,u_i} = m'\,\gamma_i\bar{\gamma}'_i + m\,\bar{\gamma}_i\gamma'_i \\ \dfrac{\partial\,\bar{\mathrm{B}}}{\partial\,u_i} = m'\,\bar{\gamma}_i\gamma'_i + m\,\gamma_i\,\bar{\gamma}'_i \end{cases}$$

e da queste per le (51) seguono le (48). Quanto alla seconda si ha dalle (47)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{\tau^2}{\mathrm{A}} + \frac{2\,\mathrm{B}\,\tau}{\mathrm{A}} + \mathrm{A}' \qquad \left(\mathrm{A}' = \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = \sum_\lambda \bar{\gamma}'^2_\lambda\right)$$

$$\sum_\lambda \bar{\Gamma}_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}^2}{\mathrm{A}} + \frac{2\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\tau}}{\mathrm{A}} + \mathrm{A}',$$

e la (49*) diventa

$$\bar{\tau}^2 - \tau^2 + 2\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\tau} - 2\,\mathrm{B}\,\tau = 0,$$

o anche

$$\bar{\tau}\,(\bar{\tau} + 2\,\bar{\mathrm{B}}) = \tau\,(\tau + 2\,\mathrm{B})$$

$$\bar{\tau}\,\bar{\tau}' = \tau\,\tau'$$

che è un'identità.

Se si osserva in fine che le (51*) sono le (51) stesse scambiate (m, m'), (τ', τ) $(\bar{\tau}, \bar{\tau}')$ ne risulta evidente che dal sistema associato $(\beta''_{ik}, \beta''_{ki})$ si passa al medesimo finale (B_{ik}, B_{ki}) con una T_m. Quanto ai valori effettivi delle rotazioni (B_{ik}) del quarto sistema, risultano dalla formola generale (42) pag. 647, che dànno :

$$(53)\quad B_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2}{A\,A' - \tau\,\tau'}\left\{mA'\gamma_i\bar{\gamma}_k + m'A\gamma'_i\bar{\gamma}'_k + m'\tau\gamma_i\bar{\gamma}'_k + m\,\tau'\gamma'_i\bar{\gamma}_k\right\}.$$

In questi risultati è essenziale l'ipotesi che sia diverso da zero $m^2 - m^2$; però anche in questo caso sussiste in una certa misura pei sistemi associati di rotazioni il teorema di permutabilità. Supponiamo p. e. $m' = m$, chè l' altro caso $m' = -m$ si riconduce a questo cangiando di segno tutte le γ'_i. In tal caso le (50*) si riducono a

$$\tau + \bar{\tau} = -2\,B,\ \tau + \bar{\tau} = -2\,\bar{B}$$

e dànno come condizione *necessaria*

$$\bar{B} = B.$$

Ma siccome le (52) dimostrano che $\frac{\partial \bar{B}}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i}$, ne viene che è certamente

$$\bar{B} - B = \text{cost.}^{\text{te}}$$

e basta quindi, una volta scelto il primo sistema trasformato $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$, disporre del secondo in guisa che i valori *iniziali* delle γ'_i, $\bar{\gamma}'_i$ soddisfino alla condizione

$$\Sigma\,\bar{\gamma}_\lambda\,\bar{\gamma}'_\lambda = \Sigma\,\gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda\,.$$

Dopo ciò non resta più che prendere τ in guisa da soddisfare alla (48_1)

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\,m\,\gamma'_i\,\bar{\gamma}_i\,,$$

ciò che lascia in τ una costante arbitraria. Ed allora prendendo $\bar{\tau} = -(\tau + 2\,B) = \tau'$ tutte le condizioni sono soddisfatte e si ha quindi una semplice infinità di sistemi trasformati (B_{ik}, B_{ki}) di rotazioni associate, nelle condizioni del teorema di permutabilità.

§ 514.

Sistemi H di Guichard Darboux e loro trasformazioni T_m.

Ad ogni sistema (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate corrispondono infiniti sistemi n^{pli} ortogonali trasformati di COMBESCURE l'uno dell'altro. Fra questi ve ne ha una classe particolarmente notevole studiata (pel caso $n = 3$) prima da GUICHARD, poi in modo più completo da DARBOUX, (*) e noi li diremo sistemi di GUICHARD-DARBOUX, o *sistemi* H.

Definiamo sistema H un sistema n^{plo} ortogonale

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \ldots + H_n^2\, du_n^2$$

che soddisfi alla condizione

$$H_1^2 + H_2^2 + \ldots + H_n^2 = \text{cost.}^{\text{te}} \tag{54}$$

È facile vedere che le rotazioni β_{ik} di un sistema H soddisfano necessariamente alle equazioni (A) pag. 655 caratteristiche pei sistemi (β_{ik}, β_{ki}) di rotazioni associate. E infatti, se deriviamo la (54) rapporto ad u_i, abbiamo

$$H_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} H_\lambda \frac{\partial H_\lambda}{\partial u_i} = H_i \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda \right\} = 0,$$

e dividendo per H_i.

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda . \tag{55}$$

Derivando ancora rispetto ad u_k $(k \neq i)$, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_k) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{i\lambda} H_\lambda) = 0,$$

ed eseguendo

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ki} H_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_k) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{ik}\beta_{k\lambda} H_\lambda + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda} H_k =$$

$$= H_k\left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}\right) + \beta_{ik}\left(\frac{\partial H_k}{\partial u_i} + \beta_{ki} H_i + \sum_{\lambda}^{i,k} \beta_{k\lambda} H_\lambda\right) = 0.$$

(*) Systémes orthogonaux Chap. X Livre III (2.ème Édition 1910).

Ma il coefficiente di β_{ik} è nullo per la (55) stessa, onde deve essere pure nullo quello di H_k ciò che dà precisamente le equazioni della terza linea in (A).

Viceversa, se (β_{ik}, β_{ki}) è un sistema di rotazioni associate, esistono sempre dei sistemi H con queste rotazioni. E infatti, aggregando le (55) alle generali (II), si forma il sistema ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_i , \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{ki} H_\lambda , \tag{56}$$

che è completamente integrabile a causa delle (A), e possiede l'integrale quadratico

$$\sum_{\lambda} H_\lambda^2 = \text{cost.}^{\text{te}}$$

Determinando le H_i dalle (56) si ha quindi in effetto un sistema H (dipendente da n costanti arbitrarie). A causa della simmetria delle condizioni (A), sarà pure completo il sistema ai differenziali totali per n funzioni incognite $\overline{H}_1, \overline{H}_2 \ldots \overline{H}_n$ che si ottiene dalle (56) collo scambio degli indici nelle rotazioni

$$\frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \overline{H}_i , \quad \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \overline{H}_\lambda , \tag{56*}$$

e diremo ancora *associati* due tali sistemi di GUICHARD-DARBOUX:

$$H \equiv (H_1, H_2, \ldots H_n) , \quad \overline{H} \equiv (\overline{H}_1, \overline{H}_2 \ldots \overline{H}_n),$$

con rotazioni associate.

Ora le trasformazioni T_m dei sistemi associati di rotazioni (§ 512), che portano da un primo sistema (β_{ik}, β_{ki}) ad un secondo $(\beta'_{ik}, \beta'_{ki})$ possono estendersi alle coppie associate $(H, \overline{H})$ di sistemi H, che da una tale T_m verranno convertite in altre coppie associate $(H', \overline{H}')$ per modo che H' sarà trasformata di RIBAUCOUR di H e medesimamente $\overline{H}'$ di $\overline{H}$. Per questo basta completare le n^{ple} di funzioni trasformatrici

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n) , \quad (\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2 \ldots \overline{\gamma}_n)$$

con due rispettive $(n+1)^{\text{me}}$ funzioni $\varphi, \overline{\varphi}$, tali che sussistano le equazioni:

$$(57)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\gamma_i\ , \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_i} = \bar{\mathrm{H}}_i\,\bar{\gamma}_i\ ,$$

e insieme le altre

$$(58)\qquad \sum_\lambda \mathrm{H}'^2_\lambda = \sum_\lambda \mathrm{H}^2_\lambda\ , \quad \sum_\lambda \bar{\mathrm{H}}'^2_\lambda = \sum_\lambda \bar{\mathrm{H}}^2_\lambda\ .$$

Ma si ha in generale per le (IV) pag. 638

$$\begin{cases} \mathrm{H}'_\lambda = \mathrm{H}_\lambda - \dfrac{2\varphi}{\mathrm{A}}\,\Theta_\lambda = \mathrm{H}_\lambda - \dfrac{2m\varphi}{\mathrm{A}}\,\gamma_\lambda \\ \bar{\mathrm{H}}'_\lambda = \bar{\mathrm{H}}_\lambda - \dfrac{2\bar{\varphi}}{\mathrm{A}}\,\Theta_\lambda = \bar{\mathrm{H}}_\lambda - \dfrac{2m\bar{\varphi}}{\mathrm{A}}\,\gamma_\lambda \end{cases}$$

e per ciò

$$\sum_\lambda (\mathrm{H}'^2_\lambda - \mathrm{H}^2_\lambda) = \frac{4m\varphi}{\mathrm{A}}\left(m\varphi - \sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda\,\bar{\gamma}_\lambda\right),$$

$$\sum_\lambda (\bar{\mathrm{H}}'^2_\lambda - \bar{\mathrm{H}}^2_\lambda) = \frac{4m\bar{\varphi}}{\mathrm{A}}\left(m\bar{\varphi} - \sum_\lambda \bar{\mathrm{H}}_\lambda\,\gamma_\lambda\right).$$

Per soddisfare le (58) bisogna dunque prendere

$$(59)\qquad \varphi = \frac{1}{m}\sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda\,\bar{\gamma}_\lambda\ , \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_\lambda \bar{\mathrm{H}}_\lambda\,\gamma_\lambda\ ,$$

e resterà a vedere se questi valori di φ, $\bar{\varphi}$ verificano le (57). Ora abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda\,\bar{\gamma}_\lambda = \bar{\gamma}_i\left(\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda{}^{(i)}\,\beta_{i\lambda}\,\mathrm{H}_\lambda\right) + \mathrm{H}_i\left(\frac{\partial \bar{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda{}^{(i)}\,\beta_{i\lambda}\,\bar{\gamma}_\lambda\right);$$

ma per le (56) il coefficiente di $\bar{\gamma}_i$ è nullo, e quello di H_i per le formole (B) eguaglia $m\,\gamma_i$, onde

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda\,\bar{\gamma}_\lambda = m\,\mathrm{H}_i\,\gamma_i$$

e la prima delle (57) è verificata dal valore (58) di φ; similmente la seconda.

Il risultato ottenuto, per quanto riguarda la trasformazione T_m di un sistema H in un nuovo H′ (indipendentemente dagli associati $\bar{\mathrm{H}}$, $\bar{\mathrm{H}}'$) può formularsi nel modo seguente :

Si determinino le $2n$ *funzioni incognite* $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$ *dal sistema ai differenziali totali* (B), *al quale sia aggregata la* (B*) *in termini finiti, e si prenda*

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_{\lambda} H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda .$$

La trasformazione di RIBAUCOUR $(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n ; \varphi)$ *cangia il sistema* H *di* GUICHARD-DARBOUX *in un altro* H′ *definito da*

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2 m \varphi}{A} \bar{\gamma}_\lambda .$$

Una tale T_m contiene evidentemente (oltre m) $2n - 2$ costanti arbitrarie.

In fine dimostriamo che per queste trasformazioni T_m dei sistemi H sussiste ancora il teorema speciale di permutabilità :

Se ad un sistema H *sono contigui due nuovi sistemi* H′, H″, *per rispettive trasformazioni* T_m, $T_{m'}$, *supposto* $m'^2 \neq m^2$, *esiste un quarto sistema* H *contiguo ad* H′ *per una* $T_{m'}$ *e ad* H″ *per una* T_m.

Siano

$$\gamma_i , \bar{\gamma}_i , \varphi = \frac{1}{m} \sum_{\lambda} H_\lambda \bar{\gamma}_\lambda$$

le funzioni trasformatrici per la T_m nel passaggio da H ad H′, e medesimamente

$$\gamma'_i , \bar{\gamma}'_i , \varphi' = \frac{1}{m'} \sum_{\lambda} H_\lambda \bar{\gamma}'_\lambda$$

quelle per la $T_{m'}$, da H ed H″. Secondo le formole (47) abbiamo

$$\Gamma_\lambda = \frac{\tau \gamma_\lambda}{A} + \gamma'_\lambda , \quad \bar{\Gamma}_\lambda = \frac{\bar{\tau}\, \bar{\gamma}_\lambda}{A} + \bar{\gamma}'_\lambda ,$$

le funzioni $\tau, \bar{\tau}$ essendo determinate dalle (51). Se a queste $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_n$ aggiungiamo la $(n+1)^{ma}$ funzione trasformatrice Φ del teorema generale di permutabilità

$$\Phi = \frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'$$

sarà provato che il quarto sistema n^{plo} ortogonale dopo (H, H′, H″) è an-

cora un sistema $\overline{H}$ di GUICHARD-DARBOUX, ove si provi che questa Φ verifica l'equazione corrispondente alle (59)

$$\Phi = \frac{1}{m'} \sum_{\lambda} H'_\lambda \overline{\Gamma}_\lambda ,$$

ossia

$$m' \left(\frac{\tau \varphi}{A} + \varphi' \right) = \sum_{\lambda} \left(H_\lambda - \frac{2 m \varphi}{A} \overline{\gamma}_\lambda \right) \left(\frac{\overline{\tau} \overline{\gamma}_\lambda}{A} + \overline{\gamma'}_\lambda \right) .$$

Ma questa sviluppata diventa

$$m' \tau + m \overline{\tau} = -2 m \overline{B}$$

ed è verificata, come seconda delle (50*).

Anche qui il caso $m' = \pm m$ si presenta come eccezionale ; ma se pei due sistemi si verifica la condizione

$$\sum_{\lambda} \gamma_\lambda \gamma'_\lambda = \pm \sum_{\lambda} \overline{\gamma}_\lambda \overline{\gamma'}_\lambda ,$$

allora l'intero fascio (H', H'') è composto di sistemi di GUICHARD-DARBOUX e lo stesso accade del fascio coniugato del teorema generale di permutabilità.

§ 515.

Sistemi H traslatori. — Loro trasformazioni T_m.

Supponiamo in particolare che le rotazioni associate coincidano ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$) cioè il sistema H sia al tempo stesso un sistema E. In tal caso dimostriamo che : *esiste una direzione fissa nello spazio tale che una traslazione continua in questa direzione trasforma il sistema* H *in sè medesimo, scambiando fra loro le ipersuperficie di una medesima serie.*

Per dimostrarlo osserviamo che in questo caso alla equazione

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial F}{\partial u_\lambda} = 0$$

soddisfano non soltanto i coseni X_i (§ 508), ma ancora le H_i, a causa delle (56), e per ciò anche le H_i sono funzioni delle differenze $u_i - u_k$, cioè sono

invarianti del gruppo G_1 ad un parametro $XF = \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial u_\lambda}$ di trasformazioni di COMBESCURE del sistema E in sè stesso. Nel caso attuale questo gruppo G_1 è un gruppo di movimenti, anzi è un gruppo *traslatorio* come proviamo dimostrando che le trajettorie del gruppo sono rette parallele. Queste trajettorie hanno le equazioni differenziali

$$du_1 = du_2 = \ldots = du_n ,$$

e se supponiamo per semplicità $\sum_\lambda H_\lambda^2 = 1$, vediamo subito che i coseni di direzione $\xi, \eta, \ldots$ delle tangenti a queste trajettorie sono

$$\xi = \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda \ , \ \eta = \sum_\lambda H_\lambda Y_\lambda , \ldots$$

Ora, se formiamo le derivate di queste espressioni abbiamo

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = X_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + H_i \frac{\partial X_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_i X_\lambda + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda X_\lambda ,$$

cioè per le (6) pag. 624 e per le (56)

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = X_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{\lambda i} - \beta_{i\lambda}) H_\lambda + H_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) X_\lambda , \tag{60}$$

espressione nulla perchè $\beta_{i\lambda} = \beta_{\lambda i}$. Dunque i coseni $\xi, \eta, \ldots$ sono costanti e la direzione è fissa nello spazio, c. d. d.

Per questa proprietà daremo a questi particolari sistemi H il nome di sistemi *traslatorii*. Inversamente dimostriamo : *Se un sistema* n^{plo} *ortogonale* Σ *ammette un gruppo traslatorio ad un parametro in sè, che scambii fra loro le ipersuperficie di una medesima serie (senza lasciarle singolarmente invariate), esso è un sistema* H *traslatorio* (*). *Sia infatti*

$$XF = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial u_i}$$

la traslazione infinitesima supposta generatrice del gruppo. Dovendo la XF cangiare in sè medesimo il sistema delle ipersuperficie $u_i = \text{cost.}^{te}$, sarà ξ_i funzione solo di u_i, senza ridursi a zero, e allora, con un cangiamento di parametri u_i, possiamo rendere

(*) Cf. pel caso $n = 3$ DARBOUX S. O. n. 237.

$$\xi_1 = \xi_n = \ldots = \xi_n = 1.$$

Ora il movimento infinitesimo porta il punto $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ in $(u_1 + \delta t, u_2 + \delta t, \ldots u_n + \delta t)$ alla distanza δs data da

$$\delta s^2 = \delta t^2 \sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda^2 ,$$

ed, essendo costante, si tratta di un sistema H avendosi $\sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda^2 = \text{cost.}^{\text{te}}$. Valgono quindi le formole

$$\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} \mathrm{H}_\lambda ,$$

e d'altra parte dovendo essere $\mathrm{XH}_i = 0$, perchè la traslazione XF trasforma il sistema in sè stesso, valgono anche le altre

$$\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \mathrm{H}_\lambda ,$$

e per ciò

$$\sum_\lambda^{(i)} (\beta_{\lambda i} - \beta_{i\lambda}) \mathrm{H}_\lambda = 0 .$$

E siccome i coseni di direzione $\xi, \eta, \ldots$ della traslazione debbono essere costanti, le formole (60) ci danno

$$\sum_\lambda^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) \mathrm{X}_\lambda = 0 , \quad \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) \mathrm{Y}_\lambda = 0, \ldots .$$

Se queste si moltiplicano ordinatamente per

$$\mathrm{X}_k , \mathrm{Y}_k , \ldots$$

e si eseguisce la somma S, ricordando che $\mathrm{S}\, \mathrm{X}_\lambda \mathrm{X}_k = \varepsilon_{\lambda k}$, ne deduciamo subito $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, ed il sistema H è un sistema E, c. d. d.

Combiniamo ora i risultati dei §§ 509, 510 relativi alle trasformazioni T_m dei sistemi E di rotazioni con quelli del paragrafo precedente pei sistemi H.

Se il sistema H è traslatorio, valgono le proprietà dell'uno e dell'altro caso e quindi se alle n funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ del sistema

(VIII), ovvero del sistema (B), ove si facciano le $\overline{\gamma_i} = \gamma_i$, aggreghiamo la $(n+1)^{ma}$ φ data, secondo la (59), da

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda \ , \tag{61}$$

dal sistema H traslatorio otterremo un nuovo sistema H′ che sarà ancora traslatorio. Anzi è facile constatare che la direzione della traslazione è rimasta la medesima, che cioè i coseni di direzione della nuova :

$$\xi' = \sum_\lambda H'_\lambda X'_\lambda \ , \ \eta' = \sum_\lambda H'_\lambda Y'_\lambda \ , \ldots$$

coincidono con quelle $\xi, \eta, \ldots$ dell'antica. Difatti abbiamo p. e.

$$\xi' - \xi = \sum_\lambda \left(H_\lambda - \frac{2 m \gamma_\lambda \varphi}{A} \right) \left(X_\lambda - \frac{2 \gamma_\lambda}{A} \sum_j \gamma_j X_j \right) - \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda =$$

$$= \frac{2}{A} (m \varphi - \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda) \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda \ ,$$

e l'espressione a destra è nulla per le (51).

Similmente dal teorema speciale di permutabilità per i generali sistemi H si avrà qui un teorema speciale pel gruppo dei sistemi H traslatorii.

Se dal sistema traslatorio H *sono stati dedotti i due nuovi traslatorii* H′,H′ *colle trasformazioni*

$$T_m = \left(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n \ ; \ \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda \right)$$

$$T_{m'} = \left(\gamma'_1 \gamma'_2 \ldots \gamma'_n \ ; \ \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \gamma \right),$$

supposto $m'^2 \neq m^2$, *il quarto* E *dopo* (H, H′, H″) *del teorema al* § 510 *sarà esso stesso un sistema* H *traslatorio.* (*)

(*) Nel caso $n = 3$ le superficie delle tre serie capaci di generare per traslazione una famiglia di LAMÈ sono caratterizzate geometricamente per questa proprietà che : *la congiungente i due centri di curvatura geodetica è ortogonale ad una direzione fissa, la direzione della traslazione* (Teorema dovuto a PETOT Comptes Rendus t. 118 pag, 1411. Cf. DARBOUX S. O. n. 53). Manifestamente le nostre T_m sono traformazioni di RIBAUCOUR per queste superficie. (Cf. più oltre § 526).

§ 516.

Sistemi n.pli ortogonali Q.

Passiamo ora a considerare una terza classe di sistemi n^{pli} ortogonali, che definiamo nel modo seguente. Supponiamo che un sistema n^{plo} ortogonale Σ ammetta una trasformazione di RIBAUCOUR $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n ; \varphi)$ nella quale le $n+1$ funzioni trasformatrici sono legate fra loro dalla identità quadratica omogenea

$$c_1 \gamma_1^2 + c_2 \gamma_2^2 + \ldots + c_n \gamma_n^2 + a \varphi^2 = 0,$$

con $(c_1, c_2 \ldots c_n ; a)$ costanti, o più generalmente da un'identità della forma

$$(\alpha) \qquad U_1 \gamma_1^2 + U_2 \gamma_2^2 + \ldots + U_n \gamma_n^2 + a \varphi^2 = 0$$

con a costante ed U_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ funzione della sola u_i. Diremo allora per abbreviare che il sistema n^{plo} ortogonale è un *sistema* Q, e si tratterà in primo luogo di dimostrare l'effettiva esistenza di questi sistemi Q e valutarne il grado di arbitrarietà. Intanto osserviamo che le formole (24) § 505 per le trasformatrici $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n ; \Phi)$ della trasformazione inversa dimostrano che queste soddisfano alla medesima identità e perciò : *se ad un sistema* Q *si applica la trasformazione relativa* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \varphi)$ *il sistema trasformato è un altro sistema* Q'.

Per compiere la ricerca indicata dobbiamo aggregare la (α) alle altre equazioni di trasformazione (III) § 504 ed esaminare la compatibilità del sistema. Effettuando una prima derivazione della (α) rapporto ad u_i, otteniamo

$$(62) \qquad U_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} U_\lambda \gamma_\lambda + a H_i \varphi + \frac{1}{2} U'_i \gamma_i = 0 ,$$

dove $U'_i = \dfrac{dU_i}{du_i}$. Deriviamo nuovamente rapporto ad u_k $(k \neq i)$ ed avremo

$$U_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + U_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \beta_{ki} \gamma_k U'_k + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda k} U_\lambda \gamma_\lambda +$$

$$+ \gamma_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} U_\lambda + a \beta_{ki} H_k \varphi + a H_i H_k \gamma_k + \frac{1}{2} U'_i \beta_{ik} \gamma_k = 0 ,$$

formola che, eseguendo le derivazioni e raccogliendo i termini, si scrive

$$\gamma_k \Big\{ U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k}\, U_\lambda + \beta_{ki}\, U'_k + \frac{1}{2}\beta_{ik}\, U'_i + a\, H_i\, H_k \Big\} +$$
$$+ \beta_{ki} \Big\{ \beta_{ik}\, U_i\, \gamma_i + U_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda k}\, U_\lambda\, \gamma_\lambda + a H_k\, \varphi \Big\} = 0 .$$

Ma, per la (62) medesima, il coefficiente di β_{ki} entro la seconda parentesi eguaglia $-\frac{1}{2}\gamma_k\, U'_k$, e la precedente si cangia nell'altra

$$(63)\quad U_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + U_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k}\, U_\lambda + \frac{1}{2}(\beta_{ik} U'_i + \beta_{ki} U'_k) + a H_i H_k = 0,$$

condizione simmetrica in i, k. Se a questa associamo l' equazione generale per le rotazioni nella seconda linea delle (I) § 499:

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i)k,} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} = 0 ,$$

possiamo risolvere rispetto alle due derivate $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}$, $\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}$, *escludendo il caso eccezionale che si abbia* $U_i = U_k$, la qual cosa può avvenire soltanto quando U_i, U_k si riducano ad una medesima costante.

Risolvendo otteniamo

$$(64)\quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{U_k - U_\lambda}{U_i - U_k}\, \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} - \frac{\beta_{ki}\, U'_k + \beta_{ik}\, U'_i + 2\, a\, H_i\, H_k}{2\,(U_i - U_k)} ,$$

insieme alla formola simmetrica che si ha scambiando i con k. Aggregando questa alle altre equazioni fondamentali (I), (II) pag 623), otteniamo nelle n^2 funzioni incognite (H_i, β_{ik}) il sistema seguente :

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, H_k , \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \displaystyle\sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{U_k - U_\lambda}{U_i - U_k}\, \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} - \frac{\beta_{ki}\, U'_k + \beta_{ik}\, U'_i + 2\, a\, H_i\, H_k}{2\, U_i - U_k)} . \end{cases}$$

Esso ha la forma risoluta rispetto alle derivate, e per ciascuna funzione incognita vi è una sola variabile parametrica la u_i per H_i, la u_k, per β_{ik},

sicchè, se proviamo che le condizioni di integrabilità rientrano nel sistema stesso, sarà provato che il sistema è della più semplice classe A) § 500 e possiede quindi un integrale con n^2 funzioni arbitrarie.

Tenendo conto delle verifiche già effettuate in generale, sarà dimostrata l'illimitata integrabilità del sistema (65) se, paragonando le equazioni della terza linea colle seconde della prima, proviamo che l'espressione

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}\right) - \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\,\beta_{lk}) +$$

$$+ \frac{1}{U_i - U_k}\frac{\partial}{\partial u_l}\sum_{\lambda}^{(i,k)}(U_\lambda - U_k)\,\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} + \frac{1}{2\,(U_i - U_k)}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{ki}\,U'_k + \beta_{ik}U'_i) +$$

$$+ \frac{a}{U_i - U_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(H_i\,H_k)$$

si annulla in virtù delle (65) medesime. Ora scriviamo

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\,\beta_{lk}) + \frac{U_l - U_k}{U_i - U_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li}\,\beta_{lk}) + \frac{U'_l}{U_i - U_k}\beta_{li}\beta_{lk}) +$$

$$+ \frac{1}{U_i - U_k}\sum_{\lambda}^{(i,k,l)}(U_\lambda - U_k)\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k}$$

$$+ \frac{U'_k}{2\,(U_i - U_k)}\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_l} + \frac{U'_i}{2\,(U_i - U_k)}\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} + \frac{a}{U_i - U_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(H_i\,H_k).$$

Eseguendo le derivazioni colle (65) e raccogliendo i termini, troviamo che si può scrivere

$$\Theta = \beta_{li}\Big\{\beta_{il}\,\beta_{ik} + \frac{U_l - U_k}{U_i - U_k}\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\frac{U_\lambda - U_k}{U_i - U_k}\beta_{\lambda k}\beta_{\lambda l} +$$

$$+ \frac{\beta_{kl}\,U'_k + \beta_{lk}\,U'_l}{2\,(U_i - U_k)} + \frac{a\,H_k\,H_l}{U_i - U_k}\Big\}$$

$$+ \beta_{lk}\Big\{\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \frac{U_l - U_k}{U_i - U_k}\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\frac{U_\lambda - U_k}{U_i - U_k}\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda l} +$$

$$+ \frac{\beta_{il}\,U'_i + \beta_{li}\,U'_l}{2\,(U_i - U_k)} + \frac{a\,H_i\,H_l}{U_i - U_k}\Big\}.$$

Ora se nel coefficiente di β_{li} entro la prima parentesi sostituiamo per $\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l}$ il valore dato dalla corrispondente (65) dell'ultima linea, vediamo

che identicamente si annulla, e se calcoliamo nello stesso modo il coefficiente di β_{lk} nella seconda parentesi troviamo che esso si riduce alla quantità

$$\frac{1}{(U_i - U_k)(U_i - U_l)} \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \Big\{ (U_l - U_\lambda)(U_i - U_k) + \\ + (U_l - U_k)(U_\lambda - U_i) + (U_l - U_i)(U_k - U_\lambda) \Big\} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} + \\ + \frac{1}{2}(\beta_{il} U'_i + \beta_{li} U'_l + 2a H_i H_l) \left(\frac{1}{U_i - U_k} + \frac{1}{U_l - U_i} + \frac{U_k - U_l}{(U_i - U_k)(U_l - U_\lambda)} \right);$$

ma il coefficiente di $\beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k}$ è nullo, in virtù di una identità elementare, ed anche l'ultimo termine manifestamente si annulla.

Concludiamo quindi: *il sistema differenziale* (65) *è completamente integrale* (sistema A) § 500).

Esiste dunque una classe di sistemi n^{pli} ortogonali, dipendenti da n^2 funzioni arbitrarie, pei quali i coefficienti H_i e le rotazioni β_{ik} soddisfano alle condizioni (65); ma per accertarsi che si tratta di sistemi Q bisogna risalire alle equazioni (62) per le (γ_i, φ) ed esaminare se possono soddisfarsi. Per ciò, in aggiunta alla condizione già ammessa, che le U_i siano fra loro diseguali, dobbiamo supporre ancora questa che: *nessuna delle* U_i *si annulli.*

§ 517.

Le trasformazioni R_m dei sistemi Q.

Siccome $U_i \neq 0$ dividendo la (62) per U_i, ed aggregandola alle altre equazioni (III) di trasformazione, si ha il sistema di equazioni ai differenziali totali per le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n ; \varphi$ (lineare omogeneo)

$$(66) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\, \gamma_k, \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \dfrac{\beta_{\lambda i}\, U_\lambda}{U_i}\, \gamma_\lambda - \dfrac{a H_i \varphi}{U_i} - \dfrac{U'_i\, \gamma_i}{2 U_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i , \end{cases}$$

e si verifica subito che questo sistema, in virtù delle (65), è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$U_1 \gamma_1^2 + U_2 \gamma_2^2 + \ldots + U_n \gamma_n^2 + a \varphi^2 = \text{cost.}^{\text{te}}$$

talchè, disponendo dei valori inziali, possiamo annullare la costante del secondo membro e rendere così soddisfatta la (α) : *i sistemi* n^{pli} *ortogonali soddisfacenti alle* (65) *sono dunque in effetto sistemi* Q.

Ma si osservi di più che le (65) restano inalterate se si aumentano le n funzioni U_i di una medesima costante, sicchè un sistema ortogonale soddisfacente alle (65) è *in infiniti modi* un sistema Q. Per porre meglio in evidenza tale circostanza, introduciamo una costante arbitraria m diversa da zero e poniamo

$$U_i = 1 - m V_i, \quad a = -mb,$$

dove V_i sarà una funzione della sola u_i, e b una nuova costante. Le equazioni differenziali (65), caratteristiche pei sistemi Q, assumono la forma affatto indipendente dalla costante m :

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k , \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \dfrac{V_\lambda - V_k}{V_k - V_i}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \dfrac{\beta_{ki} V'_k + \beta_{ik} V'_i + 2b H_i H_k}{2(V_k - V_i)} . \end{cases}$$

Invece la relazione quadratica (α) diventa

$$(67)\qquad \sum_{\lambda} (1 - m V_\lambda) - \gamma_\lambda^2 - m b \varphi^2 = 0$$

ed involge la costante m, che è pure contenuta nelle relative equazioni differenziali (66), le quali si scrivono

$$(C^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k , \quad \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \dfrac{1 - m V_\lambda}{1 - m V_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda - \dfrac{m b}{1 - m V_i} H_i \varphi = \dfrac{m V'_i \gamma_i}{2(1 - m V_i)} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i . \end{cases}$$

Una trasformazione di RIBAUCOUR del sistema Q, corrispondente a queste formole, si dirà una *trasformazione* R_m, ponendo anche qui in evidenza la costante m in essa contenuta ; la R_m contiene, oltre m, altre n costanti arbitrarie. La sua inversa è ancora manifestamente una R_m.

Dimostriamo che vale per queste trasformazioni R_m dei sistemi Q il teorema speciale di permutabilità: *Se ad un sistema* Q *sono contigui due sistemi* Q′, Q″ *per le rispettive trasformazioni* R_m, $R_{m'}$ *con* $m \neq m'$, *nel fa-*

scio coniugato al fascio (Q', Q'') *esiste un quarto sistema* $\bar{Q}$ *legato a* Q' *da una* $R_{m'}$, *e a* Q'' *da una* R_m.

Siano (γ_i, φ) le trasformatrici della prima R_m soddisfacenti alla (67) e alle (C*) ; e siano (γ'_i, φ') le trasformatrici per l'altra $R_{m'}$, che soddisferanno alla loro volta all'equazione in termini finiti :

$$\sum_{\lambda} (1 - m' V_\lambda) \gamma'^2_\lambda - m' b \varphi'^2 = 0 \tag{67*}$$

ed alle altre differenziali :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma'_k, \dfrac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \overset{(i)}{\sum_{\lambda}} \dfrac{1 - m' V_\lambda}{1 - m' V_i} \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda - \dfrac{m' b}{1 - m' V_i} H_i \varphi' = \dfrac{m' V'_i \gamma'_i}{2(1 - mV)} \\ \dfrac{\partial \varphi'}{\partial u_i} = H_i \gamma'_i . \end{cases} \tag{68}$$

Secondo le (VI) § 506, le trasformatrici (Γ_i, Φ) dal sistema Q ad un qualunque quarto sistema $\bar{Q}$ del teorema generale di permutabilità (dopo Q, Q', Q'') sono

$$\Gamma_i = \frac{\tau}{A} \gamma_i + \gamma'_i , \quad \Phi = \frac{\tau}{A} \varphi + \varphi' , \tag{69}$$

dove τ soddisfa alle condizioni

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = - 2 \gamma'_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \overset{(i)}{\sum_{\lambda}} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\} . \tag{70}$$

Secondo l'enunciato dovranno inoltre le Γ_i, Φ soddisfare alla relazione quadratica

$$\sum_{\lambda} (1 - m' V_\lambda) \Gamma^2_\lambda - m' b \Phi^2 = 0,$$

ed allora la trasformazione $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \Phi)$ da Q' a $\bar{Q}$ sarà appunto una $R_{m'}$. Ora se in questa sostituiamo i valori (69), avendo riguardo alle (67*), risulta :

$$\frac{\tau^2}{A^2} \left\{ \sum_{\lambda} (1 - m' V_\lambda) \gamma^2_\lambda - m' b \varphi^2 \right\} + \frac{2\tau}{A} \left\{ \sum_{\lambda} (1 - m' V_\lambda) \gamma_\lambda \gamma'_\lambda - m' b \varphi \varphi' \right\} = 0.$$

Ma, a causa della (67), si ha

$$\sum_\lambda (1 - m' V_\lambda) \gamma_\lambda^2 - m' b \varphi^2 = (m - m') \left\{ \sum_\lambda V_\lambda \gamma_\lambda^2 + b \varphi^2 \right\} =$$

$$= \frac{m - m'}{m} \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = \frac{m - m'}{m} A$$

e quindi se si pone

$$S = \sum_\lambda (1 - m' V_\lambda) \gamma_\lambda \gamma'_\lambda - m' b \varphi \varphi' , \tag{71}$$

dobbiamo avere

$$\tau = \frac{2m}{m' - m} S , \tag{72}$$

e perchè siano soddisfatte le (70) occorre che S soddisfi alle altre

$$m \frac{\partial S}{\partial u_i} + (m' - m) \gamma'_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right) = 0. \tag{73}$$

Ora in effetto dalla (71), derivando, risulta

$$\frac{\partial S}{\partial u_i} = \gamma_i \left\{ \sum_\lambda^{(i)} 1 - m' V_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda + (1 - m' V_i) \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} - m' b H_i \varphi' - \frac{m' V'_i \gamma'_i}{2} \right\}$$

$$+ \gamma'_i \left\{ \sum_\lambda^{(i)} (1 - m' V_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + (1 - m' V_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} - m' b H_i \varphi - \frac{m' V'_i \gamma_i}{2} \right\} .$$

ed il coefficiente di γ_i nel secondo membro è nullo per le (68). Sostituendo nella (73) e sopprimendo il fattore γ'_i, resta da verificarsi l'equazione

$$m \left\{ \sum_\lambda^{(i)} (1 - m' V_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + (1 - m' V_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} - m' b H_i \varphi - \frac{m' V'_i \gamma_i}{2} \right\} +$$

$$+ (m' - m) \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right) = 0 ,$$

che si riduce alla

$$m' \left\{ (1 - m V_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} (1 - m V_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda - m b H_i \varphi - \frac{m V'_i \gamma_i}{2} \right\} = 0 ,$$

e questa è appunto un'identità a causa delle (C*). Se ne conclude che prendendo

$$\tau = \frac{2m}{m' - m}\left\{\sum_\lambda (1 - m' V_\lambda)\gamma_\lambda \gamma'_\lambda - m' b \varphi \varphi'\right\}, \tag{74}$$

si ha in effetto una trasformazione

$$R_{m'} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n ; \Phi) .$$

In fine avendosi

$$\tau' = -(\tau + 2B) = -(\tau + 2\sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda),$$

risulta

$$\tau' = \frac{2m'}{m - m'}\left\{\sum (1 - m V_\lambda)\gamma_\lambda \gamma'_\lambda - m b \varphi \varphi'\right\},$$

che è la (74) stessa scambiate le (γ_i, φ) colle (γ'_i, φ') ed m con m' ; e questo dimostra che il sistema $\overline{Q}$ è legato a Q'' da una $R_{m'}$, c. d. d.

Dal calcolo stesso eseguito risulta che nel caso escluso $m' = m$ il quarto sistema $\overline{Q}$ viene a coincidere con Q stesso, a meno che la quantità

$$\sum_\lambda (1 - m V_\lambda)\gamma_\lambda \gamma'_\lambda - m b \varphi \varphi' ,$$

la quale è generalmente una costante, *non si riduca a zero*. In questo caso tutti i sistemi del fascio coniugato sono sistemi Q.

§ 518.

I sistemi n.pli ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante.

Tutte le teorie che abbiamo svolto fin qui nel presente Capitolo trovano le loro analoghe pei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante K_0, della qual cosa è facile rendersi ragione *a priori* ricordando che questi spazî sono rappresentabili conformemente sull'euclideo. Giova per altro estendere le formole sviluppate pel caso euclideo al caso non-euclideo, specialmente perchè si giunge per tal modo ad una generalizzazione dei varii sistemi speciali, come sistemi E, sistemi H, o sistemi Q che, interpretati nuovamente nello spazio ordinario, dànno luogo ad altre classi di distemi n^{pli} ortogonali che ammettono un *teorema speciale di permutabilità*.

Cominciamo dall'estendere le formole fondamentali del § 499 al caso dello spazio S_n colla curvatura costante $K_0 = \frac{\varepsilon}{R^2}$, dove sarà $\varepsilon = +1$ nel caso ellittico ed $\varepsilon = -1$ nel caso iperbolico. Supponiamo di avere in questo spazio un sistema n^{plo} ortogonale Σ di ipersuperficie che dia al ds^2 la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \ldots + H_n^2\, du_n^2 \tag{75}$$

e scriviamo in primo luogo le condizioni a cui debbono per ciò soddisfare le H_i, sviluppando le formole

$$(rk, ih) = \frac{\varepsilon}{R^2}\,(a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh}\, a_{ik})$$

mediante le (17) § 435. Introducendo anche qui le rotazioni β_{ik}, le equazioni per le H_i assumono la forma seguente:

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, H_k\,, \qquad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} + \dfrac{\varepsilon}{R^2}\, H_i\, H_k = 0\,, \end{cases}$$

le quali si riducono naturalmente alle (I), (II) per lo spazio euclideo se si suppone $\frac{1}{R^2} = 0$.

Prendiamo ora in S_n un sistema di $n+1$ coordinate di WEIERSTRASS che, per non moltiplicare le notazioni degli indici, denotiamo qui con

$$x, y, z, \ldots t.$$

Queste sono legate fra loro dall'identità quadratica

$$\varepsilon\,(x^2 + y^2 + \ldots) + t^2 = 1, \tag{76}$$

e il ds^2 è dato da

$$ds^2 = R^2\,(dx^2 + dy^2 + \ldots + \varepsilon\, dt^2). \tag{77}$$

Introduciamo anche qui in ogni punto $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ dello spazio l'n^{edro} principale, relativo al sistema Σ, formato dalle direzioni delle linee di curvatura coordinate (u_1), (u_2), $\ldots$ (u_n). Denotando con $X_i, Y_i, \ldots T_i$, i

coseni della i^{ma} direzione principale, dal confronto delle (75), (77) abbiamo

$$(78)\qquad \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{H_i}{R} X_i \,, \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{H_i}{R} Y_i \,, \ldots \frac{\partial t}{\partial u_i} = \frac{H_i}{R} T_i \,,$$

e quindi per le relazioni d'ortogonalità

$$(79)\qquad \begin{cases} x X_i + y Y_i + \ldots + \varepsilon t T_i = 0 \\ X_i X_k + Y_i Y_k + \ldots + \varepsilon T_i T_k = \varepsilon_{ik} \end{cases}$$

Le $n+1$ coordinate di WEIERSTRASS $x, y, \ldots t$ sono altrettante soluzioni del sistema differenziale di WEINGARTEN (§ 459) :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i k \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial u_\lambda} - \frac{\varepsilon a_{ik}}{R^2} \theta \,,$$

e nel caso nostro ove $a_{ii} = H_i^2$, $a_{ik} = 0$, per $i \neq k$, si traducono nelle equazioni fondamentali pei coseni X_i, Y_i, $\ldots$ T_i :

$$(80)\qquad \frac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \,, \quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda - \frac{\varepsilon H_i}{R} x \,,$$

colle analoghe per le altre coppie

$$(Y, y) \ldots (T, t).$$

§ 519.

Le formole per le trasformazioni di Ribaucour.

Per presentare le formole per le trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n a curvatura costante sotto la forma analoga a quella trovata per lo spazio euclideo, collochiamoci dapprima dal punto di vista intrinseco e, supposto dato un sistema Σ definito dalle formole del paragrafo precedente, prendiamo $n+1$ funzioni trasformatrici

$$\gamma_1 \,, \gamma_2 \,, \ldots \gamma_n \,; \varphi$$

assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$(D)\qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{H_i \gamma_i}{R}$$

$$(i \neq k) \,.$$

Questo è un sistema illimitatamente integrabile a causa delle (IX), e se (γ_i, φ) ne è una soluzione, ponendo

$$\Theta_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda + \frac{\varepsilon\, \mathrm{H}_i \varphi}{\mathrm{R}} \tag{81}$$

$$\mathrm{A} = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda^2 + \varepsilon\, \varphi^2 , \tag{82}$$

si trovano subito le formole

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, \gamma_k \quad (i \neq k) \tag{83}$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u_i} = 2\, \gamma_i\, \Theta_i . \tag{84}$$

Ora dalle funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n ; \varphi)$ risulta definito un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ', i cui elementi, indicati con accenti, si calcolano dalle formole

$$\begin{cases} \mathrm{H}'_i = \mathrm{H}_i - \dfrac{2\, \mathrm{R}\, \varphi}{\mathrm{A}}\, \Theta_i \\ \beta'_{ik} = \beta_{ik} - \dfrac{2\, \gamma_i}{\mathrm{A}}\, \Theta_k . \end{cases} \tag{85}$$

Mediante le formole precedenti si verifica subito in effetto che questi valori delle H'_i, β'_{ik} soddisfano alle equazioni (IX).

Così il sistema Σ' è intrinsecamente definito; ma se vogliamo di più costruire Σ' come trasformato di RIBAUCOUR di Σ, nella sua effettiva posizione nello spazio, dovremo ricorrere alle formole seguenti. Se poniamo

$$\Omega_x = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda\, \mathrm{X}_\lambda + \varepsilon\, \varphi\, x , \quad \Omega_y = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda\, \mathrm{Y}_\lambda + \varepsilon\, \varphi\, y, \ldots \Omega_t = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda\, \mathrm{T}_\lambda + \varepsilon\, \varphi\, t , \tag{86}$$

le coordinate di VEIERSTRASS $x', y', \ldots t'$ del nuovo sistema Σ' saranno date dalle formole

$$x' = x - \frac{2\varphi}{\mathrm{A}}\, \Omega_x , \quad y' = y - \frac{2\varphi}{\mathrm{A}}\, \Omega_y \ldots t' = t' - \frac{2\varphi}{\mathrm{A}}\, \Omega_t , \tag{87}$$

e i coseni di direzione $X'_i, Y_i, \ldots T'_i$ delle nuove direzioni principali dalle altre

$$(88)\qquad X'_i = X_i - \frac{2\gamma_i}{A}\Omega_x\ ,\ Y'_i = Y_i - \frac{2\gamma_i}{A}\Omega_y, \ldots T'_i = T_i - \frac{2\gamma_i}{A}\Omega_t.$$

Osserviamo ancora che i raggi $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ delle n ipersfere tangenti a Σ, Σ' si calcolano nel caso ellittico dalle formole

$$(89)\qquad tg\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}$$

e nel caso iperbolico dalle altre

$$(89^*)\qquad tgh\left(\frac{\rho_i}{R}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i}\ .$$

Naturalmente, in quest'ultimo caso, l'ipersfera avrà centro reale soltanto se il valore assoluto del secondo membro nella (89*) sarà < 1, altrimenti sarà a centro ideale o eventualmete col centro all'infinito.

In fine presentiamo le formole relative al teorema generale di permutabilità. Dal sistema Σ supponiamo dedotti due nuovi sistemi Σ', Σ'' colle rispettive trasformazioni di RIBAUCOUR

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n\ ;\ \varphi)\ ,\ (\gamma'_1, \gamma'_2 \ldots \gamma'_n : \varphi')$$

Si determini, con una quadratura, la funzione τ dalle condizioni *compatibili*

$$(90)\qquad \frac{\partial\,\tau}{\partial u_i} = -2\,\gamma'_i\,\Theta_i\ ,$$

e nelle funzioni

$$(91)\qquad \Gamma_i = \frac{\tau\gamma_i}{A} + \gamma'_i\ ,\ \Phi = \frac{\tau\varphi}{A} + \varphi'$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

si avranno le $n + 1$ funzioni trasformatrici

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n\ ;\ \Phi)$$

pel passaggio da Σ' al quarto sistema $\overline{\Sigma}$ del teorema di permutabilità. Questo sistema, al variare della costante arbitraria contenuta in τ, descriverà il fascio coniugato al fascio (Σ', Σ'') (Cf. § 506).

§ 520.

Estensione ai ds^2 indefiniti.

Accenneremo da ultimo ad un'ulteriore estensione che si può dare alle ricerche del presente Capitolo, ove accanto ai ds^2 definiti positivi, di curvatura Riemanniana nulla o costante, si introducano dei ds^2 *indefiniti* a curvatura Riemanniana costante. Limitandoci al caso della curvatura nulla (l'estensione al caso della curvatura costante qualunque compiendosi in modo analogo), consideriamo nelle n variabili $x, y, \ldots t$ la forma differenziale indefinita

$$ds^2 = \varepsilon_1\, dx^2 + \varepsilon_2\, dy^2 + \ldots + \varepsilon_n\, dt^2, \tag{92}$$

dove ciascuna delle ε_i rappresenta l'unità positiva o negativa, forma che diremo della segnatura

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n).$$

Supponiamo che, esprimendo le n variabili $x, y, \ldots t$ per le n nuove $u_1, u_2, \ldots u_n$, la forma differenziale nelle u_i trasformata della (92) conservi la forma canonica (o ortogonale).

$$ds^2 = \varepsilon_1\, \mathrm{H}_1^2\, du_1^2 + \varepsilon_2\, \mathrm{H}_2^2\, du_2^2 + \ldots + \varepsilon_n\, \mathrm{H}_n^2\, du_n^2\,, \tag{93}$$

dove $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots \mathrm{H}_n$ sono funzioni *reali* delle u_i, mentre la segnatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)$ a causa della legge d'inerzia, è rimasta necessariamente la stessa.

Le formole per l'equivalenza delle due forme differenziali (92), (93) si deducono subito dalle generali di CHRISTOFFEL, ovvero semplicemente dalle ordinarie del § 499 corrispondenti alla segnatura $(1, 1, \ldots 1)$, cangiando in queste H_i in $\mathrm{H}_i \sqrt{\varepsilon_i}$. Introducendo pertanto anche qui le rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{\mathrm{H}_i} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial u_i}\,,$$

si avranno in primo luogo le equazioni per le β_{ik} corrispondenti alle (1) pag. 623

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\ \varepsilon_i \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda\, \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} = 0\,, \end{cases}$$

mentre le equazioni (II) per le H_i serberanno la stessa forma

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k . \tag{X*}$$

Le *trasformazioni di* RIBAUCOUR per le rotazioni β_{ik} si otterranno nel caso attuale come segue. Prendansi n funzioni trasformatrici

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n ,$$

soddisfacenti al solito sistema

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k ,$$

e si consideri la quantità

$$A = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \gamma_\lambda^2 , \tag{94}$$

che dovremo sempre supporre *diversa da zero.* Pongasi

$$\Theta_i = \varepsilon_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda , \tag{95}$$

e si avrà subito per le (X)

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \Theta_k , \quad \frac{\partial A}{\partial u_i} = 2 \gamma_i \Theta_i . \tag{96}$$

Con queste formole si verifica immediatamente che, ove si prenda

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2 \gamma_i \Theta_k}{A} , \tag{97}$$

queste nuove rotazioni β'_{ik} soddisfano al sistema (X). Se infine consideriamo un determinato sistema n^{plo} ortogonale (93) nell'S_n euclideo indefinito, colle rotazioni β_{ik}, ne troveremo ∞^1 trasformati di RIBAUCOUR calcolando con una quadratura la $(n+1)^{\text{ma}}$ funzione trasformatrice φ da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \tag{98}$$

e ponendo quindi

$$H'_i = H_i - \frac{2 \varphi}{A} \Theta_i . \tag{99}$$

In modo analogo si procederebbe nel caso in cui il ds^2 indefinito dato dalla (93) avesse curvatura Riemanniana costante non nulla.

Dopo ciò le proprietà delle varie classi di sistemi n^{pli} ortogonali, considerate nel presente Capitolo, possono estendersi facilmente al caso di un ds^2 indefinito a curvatura costante. In particolare la nozione di sistemi di rotazioni associate (§ 511) si estende al caso in cui ponendo $\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ki}$, le $\overline{\beta}_{ki}$ dànno le rotazioni di un ds^2 euclideo indefinito. Corrispondentemente quella dei sistemi H (§ 514) nell'ordinario spazio euclideo si estenderà al caso in cui la relazione quadratica fra le H sia

$$\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \ldots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cos.}^{\text{te}}$$

Per questi sistemi H generalizzati esistono pure trasformazioni T_m e vale un teorema speciale di permutabilità come nel caso ordinario.

CAPITOLO XXIX.

I sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo.

Triedro principale e curvature delle linee coordinate. - Linee d'equidistanza ed equazione del CAYLEY per le famiglie di LAMÈ. - Sistemi ciclici osculatori di RIBAUCOUR. - Equazione alle derivate parziali terze per le famiglie dl LAMÉ. - Famiglie di LAMÉ che ammettono un gruppo continuo G_1 ad un parametro di movimenti o di trasformazioni conformi. - Famiglie elicoidali e soluzioni permanenti dell'equazione del CAYLEY. - Teorema generale di DARBOUX per gli elementi caratteristici di un sistema triplo ortogonale. - Famiglie particolari di LAMÉ di sfere, piani o superficie di rotazione. - Sistemi ciclici e famiglie a trajettorie piane. - Sistema confocale di quadriche. - Teoremi di CHASLES e di LIOUVILLE e geodetiche delle quadriche.

§ 521.

Triedro principale e curvature delle linee coordinate.

Dopo avere studiato, nel Capitolo precedente, le proprietà generali dei sistemi $n.^{\text{pli}}$ ortogonali, veniamo ora ad occuparci particolarmente dei *sistemi tripli ortogonali* nello spazio ordinario, supponendo qui dunque $n = 3$.

Pei coseni di direzione (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ degli spigoli del triedro principale, avremo le formole:

$$(1) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k , \quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\beta_{ki} X_k - \beta_{li} X_l ,$$

indicando (i, k, l) una qualunque permutazione degli indici $(1, 2, 3)$. Le curvature principali $\frac{1}{r_{ik}}$ delle superficie coordinate saranno date dalle formole (§ 499)

$$(2) \qquad \frac{1}{r_{ik}} = \frac{\beta_{ik}}{H_k} = \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} ,$$

e le curvatura assolute $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_3}$ delle linee coordinate avranno i valori:

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{31}^2}, \quad \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{r_{32}^2} + \frac{1}{r_{12}^2}, \quad \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}.$$

Troviamo ora gli altri elementi delle linee coordinate, p. e. della (u_1), ossia $u_2 = \text{cost.}^{\text{te}}$, $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$, per i quali useremo le solite notazioni del Cap. I, affette dal corrispondente indice *1*. L'elemento d'arco delle (u_1) è

$$ds_1 = \mathrm{H}_1 \, du_1$$

e i suoi coseni di direzione della tangente

$$(4) \qquad \alpha_1 = \mathrm{X}_1, \quad \beta_1 = \mathrm{Y}_1, \quad \gamma_1 = \mathrm{Z}_1.$$

Se deriviamo queste rapporto ad u_1, a sinistra colle formole di FRENET, a destra colle (1), troviamo

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} = -\frac{\mathrm{X}_2}{r_{21}} - \frac{\mathrm{X}_3}{r_{31}},$$

colle analoghe per η_1, ζ_1. Quadrando e sommando ne risulta nuovamente la prima delle (3), e se poniamo

$$(5) \qquad \operatorname{sen} \omega_1 = -\frac{\rho_1}{r_{21}}, \quad \cos \omega_1 = -\frac{\rho_1}{r_{31}},$$

avremo

$$(6) \qquad \xi_1 = \operatorname{sen} \omega_1 \, \mathrm{X}_2 + \cos \omega_1 \, \mathrm{X}_3,$$

onde il significato geometrico di ω_1 come angolo d'inclinazione della normale principale della curva (u_1), nel suo verso positivo, sulla tangente alla curva (u_3). Dalle (4), (6) seguono ora i valori dei coseni di direzione della binormale della (u_1)

$$(7) \qquad \lambda_1 = -\cos \omega_1 \mathrm{X}_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \, \mathrm{X}_3.$$

Se deriviamo nuovamente queste rapporto ad u_1, abbiamo per le formole di FRENET:

$$\frac{\xi_1}{\mathrm{T}_1} = \frac{1}{\mathrm{H}_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (-\cos \omega_1 \, \mathrm{X}_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \, \mathrm{X}_3)$$

e ricorrendo nuovamente alle (1), siccome per le (5)

$$\cos\omega_1 \frac{\partial X_2}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\omega_1 \frac{\partial X_3}{\partial u_1},$$

resta semplicemente

$$\frac{\xi_1}{T_1} = \xi_1 \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1}, \quad \text{ecc.}$$

da cui

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1}.$$

Riepilogando dunque le formole ottenute, abbiamo il quadro seguente

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_1 = X_1, \quad \beta_1 = Y_1, \quad \gamma_1 = Z_1 \\ \xi_1 = \operatorname{sen}\omega_1 X_2 + \cos\omega_1 X_3, \ \eta_1 = \operatorname{sen}\omega_1 Y_2 + \cos\omega_1 X_3, \ \zeta_1 = \operatorname{sen}\omega_1 Z_2 + \cos\omega_1 Z_3 \\ \lambda_1 = -\cos\omega_1 X_2 + \operatorname{sen}\omega_1 X_3, \ \mu_1 = -\cos\omega_1 Y_2 + \operatorname{sen}\omega_1 Y_3, \ \nu_1 = -\cos\omega_1 Z_2 + \operatorname{sen} Z_3, \end{cases}$$

colle analoghe dedotte per permutazione circolare degli indici 1, 2, 3, gli angoli $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ essendo dati dalle formole

$$(b)\qquad tg\,\omega_1 = \frac{r_{31}}{r_{21}}, \quad tg\,\omega_2 = \frac{r_{12}}{r_{32}}, \quad tg\,\omega_3 = \frac{r_{23}}{r_{13}}$$

e in fine alle formole (3) per le flessioni delle linee coordinate sono da aggiungersi le seguenti per le torsioni:

$$(c)\qquad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial u_2}, \quad \frac{1}{T_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial u_3}$$

§ 522.

Linee d'equidistanza ed equazione del Cayley. Sistemi ciclici osculatori.

a) *Equazione del* CAYLEY. L'elemento d'arco

$$ds_3 = H_3\, du_3$$

delle curve coordinate (u_3) può anche riguardarsi come la porzione infinitesima di normale alla superficie coordinata u_3 (o $u_3 = \text{cost.}^{te}$), intercetta dalla successiva $u_3 + du_3$ nel medesimo sistema. Sulla superficie u_3 le li-

nee H_3= cost.te sono dunque quelle lungo le quali è costante questa porzione infinitesima di normale, e si diranno per ciò *le linee di equidistanza* della u_3 = cost.te (*)

Ora osserviamo che i coseni di direzione della tangente alle linee di equidistanza H_3 = cost.te sulla u_3, di equazione differenziale

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial H_3}{\partial u_2} du_2 = 0,$$

sono proporzionali ai binomii

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} = H_1 H_2 (\beta_{23} X_1 - \beta_{13} X_2),$$

coi due analoghi, ossia per le (5), (7) a λ_3, μ_3, ν_3. Ne deduciamo il teorema: *La normale principale della linea coordinata* (u_3) *è diretta normalmente alla linea di equidistanza.*

Osserviamo di più che la formola (3_3) per la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ si può scrivere

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial u_2}\right)^2,$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\Delta_1\, lg\, H_3} = \sqrt{\Delta_1\, log\, \psi}, \tag{8}$$

dove con Δ_1 indichiamo il parametro differenziale primo calcolato rispetto al ds^2 della u_3 = costte, e con $\varepsilon\,\psi$, essendo ε una costante infinitesima, denotiamo la porzione di normale alla u_3 intercetta dalla successiva nel sistema. È notevole che il teorema superiore, come anche la formola (8), valgono più in generale, come ha osservato il MORERA (**) per un qualun-

---

(*) Solo nel caso in cui H_3 fosse assolutamonte costante, o funzione della sola u_3, le linee di equidistanza sarebbero indeterminate. Ma allora avremmo

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{23}} = 0, \quad \frac{1}{\rho_3} = 0,$$

onde le linee coordinate (u_3) sarebbero rette e si avrebbe il caso ovvio di superficie u_3 = cos.te parallele.

(**) Rendiconti dell' Istituto Lombardo marzo 1886.

que sistema ∞^1 di superficie e le loro trajettorie ortogonali. Anzi tali proprietà sussistono ancora in qualunque spazio curvo S_3 a tre dimensioni (*).

Ma nel caso attuale in cui le superficie u_3=cost.te formano (secondo la locuzione già introdotta al § 450) una *famiglia di Lamé*, la distanza infinitesima $\varepsilon\psi$ deve soddisfare ancora ad un'altra importante condizione che risulta dalla formola di LAMÉ (3) § 499) (pag. 622)

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_2},$$

e cioè alla equazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}.$$

(*) Tanto deducesi facilmente dalle formole generali al § 443, numerate (35), (36), procedendo nel modo seguente. Prendasi nello spazio curvo S_3 il dato sistema ∞^1 di superficie come superficie coordinate x_3 e le loro trajettorie ortogonali per linee coordinate (x_3), onde avremo

$$ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2,$$

indi per l'elemento d'arco dt delle (x_3)

$$dt = ds_3 = \sqrt{a}_{33}\,dx_3 \quad , \quad \sqrt{a}_{33} = \Psi.$$

Posto nelle citate formole (36) pag. 456

$$\eta_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt},$$

se ne trae

$$\eta_i = -\sum_{k=1}^{k=2} A_{ik}\frac{\partial log\,\psi}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2)$$

$$\eta_3 = 0,$$

e per ciò

$$\frac{1}{\rho^2}\sum_{l,m}^{1,2} A_{lm}\frac{\partial lg\,\psi}{\partial x_l}\frac{\partial lg\,\psi}{\partial x_m} = \Delta_1 lg\,\psi,$$

che è appunto la formola (8) generalizzata. Inoltre dalle formole superiori per le η_i, considerando che le costanti di direzione delle linee di equidistanza ψ = cost.te sono proporzionali alle tre quantità

$$\frac{\partial lg\,\psi}{\partial x_2}, \quad -\frac{\partial lg\,\psi}{\partial x_2}, \quad 0$$

segue l'ortogonalità di questa direzione a quella della normale principale delle linee (x_3) c. d. d.

Questa è l'equazione stessa che abbiamo incontrato nella teoria dei sistemi ciclici al § 362. Nel significato attuale, come equazione a cui soddisfa la distanza normale infinitesima, in una famiglia di Lamè, fra una superficie del sistema e la successiva, venne data dal CAYLEY e si dirà per ciò *l'equazione del* CAYLEY. Se la superficie in discorso S, anzichè alle linee di curvatura, è riferita ad un sistema curvilineo qualunque (u, v), adottando le solite notazioni, abbiamo già visto (§ 363) che l'equazione del CAYLEY si scrive:

$$(I^*) \qquad \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0 .$$

b) Sistemi ciclici osculatori. L'identità sopra notata dell'equazione del CAYLEY con quella del § 362 per la determinazione dei sistemi ciclici normali ad una data superficie S trova la sua espressione geometrica nell'elegante teorema di RIBAUCOUR:

Se in un sistema triplo ortogonale si considera una superficie S *di uno dei tre sistemi e nei punti di essa si costruiscono i circoli osculatori delle trajettorie ortogonali delle superficie del sistema di* S, *questa doppia infinità di circoli forma un sistema ciclico.*

Questo si dirà il sistema ciclico *osculatore* del sistema triplo lungo la superficie S.

Per dimostrare analiticamente questo teorema basta paragonare le formole precedenti con quelle del § 362, in particolare le formole

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial\, u_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial\, u_2}\right)^2$$

$$\cos\omega_3 = -\frac{\rho_3}{H_1}\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial\, u_1}, \quad \operatorname{sen}\omega_3 = -\frac{\rho_3}{H_2}\frac{\partial\, lg\, H_3}{\partial\, u_2},$$

colle (16), (16*) del § 362 (pag. 232), colle quali, salvo le mutate notazioni, vengono a coincidere.

Geometricamente si arriva al medesimo risultato utilizzando le proprietà generali del § 195 (I pag. 517) relative ai circoli osculatori delle linee di curvatura. Se si considera infatti la doppia infinità di circoli osculatori delle linee (u_3) lungo una superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$, ne risulta che associando questi circoli lungo le linee di curvatura (u_1), ovvero lungo le (u_2), si

hanno due sistemi di superficie (Σ_1), (Σ_2) che hanno questi circoli per linee di curvatura e lungo ogni circolo C del sistema si tagliano ortogonalmente, poichè le loro normali nel punto M ove C incontra ortogonalmente la $u_3 = \text{cost.}^{te}$ sono precisamente le tangenti alle due linee di curvatura della $u_3 = \text{cost.}^{te}$ Dunque, pel teorema inverso di DUPIN (DARBOUX), i circoli C costituiscono un sistema ciclico.

§ 523.

Formole del Weingarten.

Consideriamo un qualunque sistema ∞^1 di superficie $w(x, y, z) = \text{cost.}^{te}$ e le loro trajettorie ortogonali (w), e sulle superficie S del sistema w riguardiamo come punti corrispondenti quelli segnati dalle loro trajettorie ortogonali. Indichiamo al solito con

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \\ \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \end{cases}$$

le due forme quadratiche fondamentali della superficie generica S del sistema, dove dunque E, F, G ; D, D′, D″ saranno funzioni di u, v e di w.

Stabiliamo le formole che dànno le derivate *normali* di questi coefficienti, cioè

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial w}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}, \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial w}; \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial w}, \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial w}, \frac{\partial \mathrm{D}''}{\partial w}$$

espresse per la distanza normale infinitesima $\varepsilon\psi$ fra la superficie S e la successiva.

L'elemento lineare dello spazio nelle coordinate u, v, w essendo

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2 + \psi^2\,dw^2 \tag{9}$$

noi troveremo queste formole esprimendo che questo ds^2 appartiene allo spazio ordinario, che cioè sono nulli i *6* relativi simboli Riemanniani

$$(\alpha\,\beta\,,\,\gamma\,\delta)$$

per la forma ternaria (9). Ora qui abbiamo

$$a_{11} = \mathrm{E},\ a_{12} = \mathrm{F},\ a_{22} = \mathrm{G},\ a_{33} = \psi^2,\ a_{13} = a_{23} = 0,$$

indi

$$A_{33} = \frac{1}{\psi^2}, \quad A_{73} = A_{23} = 0.$$

Le costanti di direzione della normale alla superficie S (w = cost.te), secondo le formole del § 472, sono

$$X_1 = X_2 = 0, \quad X_3 = \frac{1}{\psi},$$

e quindi pei coefficienti Ω_{ik} ($i, k = 1, 2$) della seconda forma fondamentale abbiamo

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{\psi}\begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\psi}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_3},$$

ossia nelle attuali notazioni

$$\frac{\partial E}{\partial w} = -2\psi D, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -2\psi D', \quad \frac{\partial G}{\partial w} = -2\psi D'',$$

che sono le prime formole domandate. Per calcolare ora i valori dei simboli Riemanniani per la (9) cominciamo dall'osservare che i simboli di CHRISTOFFEL di 1.ª specie $\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ in cui uno almeno dei tre indici è = 3 hanno, per le precedenti, questi valori:

$$(10) \quad \begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix} = \psi\Omega_{ik}, \quad \begin{bmatrix} i3 \\ k \end{bmatrix} = -\psi\Omega_{ik}, \begin{bmatrix} i3 \\ 3 \end{bmatrix} = \psi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \begin{bmatrix} 33 \\ i \end{bmatrix} = -\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$$

$$\begin{bmatrix} 33 \\ 3 \end{bmatrix} = \psi\frac{\partial\psi}{\partial x_3}.$$

È da notarsi poi che i simboli di CHRISTOFFEL tanto di prima che di seconda specie $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}$ quando *nessuno degli indici sia* = 3 hanno gli stessi valori per la forma ternaria (9) come per la binaria:

$$E\,du^2 + 2\,F du\,dv + G\,dv^2.$$

Ciò premesso distinguiamo i 6 simboli Riemanniani $(\alpha\beta,\gamma\delta)$ secondo che il simbolo stesso:

a) non contiene alcun indice = 3

b) ha un solo indice = 3

c) due indici = 3.

L'eguagliare a zero i simboli Riemanniani nei due casi *a*) e *b*) dà precisamente l'equazione di GAUSS e le due equazioni di CODAZZI (Cf. § 442).

Resta solo da considerare il terzo caso *c*) dei simboli del tipo

$$(3k,\ i\,3)\ ,\ i,\ k = 1,\ 2.$$

Ma si ha (I pag. 92)

$$(3k,\ i3) = \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} 3i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} 33 \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{\psi^2}\left\{\begin{bmatrix} 33 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3i \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3k \\ 3 \end{bmatrix}\right\} +$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu}^{1,2} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} 33 \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3i \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3k \\ \mu \end{bmatrix}\right\};$$

indi per le (10)

$$(3k,\ i3) = -\frac{\partial}{\partial x_3}(\psi\ \Omega_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{\psi^2}\left\{\psi^2\,\Omega_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \psi^2\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right\} -$$

$$- \psi\sum_{\lambda,\mu}^{1,2} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda} - \psi^2\sum_{i,k}^{1,2} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\Omega_{k\mu}\,.$$

Eseguendo le riduzioni e introducendo i simboli di seconda specie viene

$$(3k,\ i3) = \psi\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_{\lambda}^{1,2}\begin{Bmatrix} ik \\ \gamma \end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda} - \psi\sum_{\lambda,\mu}^{1,2} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\Omega_{k\mu} - \frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_3}\right\},$$

ed eguagliando a zero abbiamo, colle notazioni delle derivate seconde covarianti :

$$\frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_3} = \psi_{ik} - \psi\sum_{\lambda,\mu}^{1,2} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\psi_{k\mu}\,.$$

Ed ora, riprendendo le notazioni usuali anche in queste formole, ed associandovi quelle già sopra calcolate, abbiamo le formole domandate :

(II)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial w} = -2\psi D\ ,\quad \dfrac{\partial F}{\partial w} = -2\psi D'\ ,\quad \dfrac{\partial G}{\partial w} = -2\psi D'' \\ \dfrac{\partial D}{\partial w} = \psi_{11} + (KE + HD)\psi,\ \dfrac{\partial D'}{\partial w} = \psi_{12} + (KF + HD')\psi,\ \dfrac{\partial D''}{\partial w} = \psi_{22} + (KG + HD'')\psi \ (*) \end{cases}$$

(*) H, K hanno qui il solito significato di curvatura media e totale della superficie S.

Esse possono considerarsi come formole infinitesimali che dànno le variazioni subite dai coefficienti delle due forme fondamentali di una superficie S quando ciascun punto di S subisce uno spostamento infinitesimo in direzione normale alla S e variabile da punto a punto, ed in questo senso furono stabilite da WEINGARTEN.

Nelle nostra deduzione esse hanno perduto il loro carattere infinitesimale e, pel modo stesso come furono dedotte, esprimono, *insieme alle equazioni di* GAUSS e CODAZZI, le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè l'elemento lineare (9) appartenga allo spazio ordinario. (*)

Dalle (II) seguono le altre formole notevoli

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial w}\, log\,(E\,G - F^2) = 2\,\psi\,H \\ \dfrac{\partial H}{\partial w} = (2K - H^2)\,\psi - \Delta_2\,\psi \\ \dfrac{\partial K}{\partial w} = \dfrac{D\,\psi_{22} + D''\,\psi_{11} - 2\,D'\,\psi_{12}}{EG - F^2} - H\,K\,\psi. \end{cases}$$

La prima di queste, nell'ipotesi $H = 0$, dimostra: *Sopra una serie* ∞^1 *qualunque di superficie d'area minima le trajettorie ortogonali segnano rappresentazioni equivalenti; e inversamente se le trajettorie ortogonali segnano rappresentazioni equivalenti le superficie della serie sono ad area minima*

All'ultima si può anche dare la forma

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\dfrac{\partial \psi}{\partial u} - D'\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\dfrac{\partial \psi}{\partial v} - D'\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\} - H\,K\,\psi$$

ed è qui interessante l'osservazione (già fatta da WEINGARTEN) che supponendo la superficie della serie colla curvatura K assolutamente costante, l'equazione che ne risulta per ψ coincide con quella per le deformazioni infinitesime (§ 282 equazione (I) pag. 8).

(*) Per la generalizzazione di queste formole agli spazi di un numero qualunque di dimensioni, a curvatura nulla o costante, V. la nota dell'A. nei Rendiconti dei Lincei (gennaio 1911).

§ 524.

Applicazione alle famiglie di Lamé.

Le formole (II) consentono di dimostrare nuovamente il teorema di DUPIN sui sistemi tripli ortogonali coll'inverso di DARBOUX, ed ancora di stabilire il significato completo dell'equazione del CAYLEY, nel modo seguente.

1° Suppongasi che il sistema (u, v, w) sia triplo ortogonale e quindi nella (9) sia $F=0$. Allora, per la media delle (II), nella prima linea è anche $D'=0$, cioè su ciascuna superficie w le linee (u, v) sono quelle di curvatura, e questo dimostra il teorema di DUPIN.

2° In secondo luogo suppongasi che sulle superficie $w = \text{cost.}^{te}$ le linee $v = \text{cost.}^{te}$ siano di curvatura, ossia che i due sistemi di superficie $u = \text{cost.}^{te}$ $w = \text{cost.}^{te}$ si taglino ortogonalmente lungo linee di curvatura. Siccome l'equazione differenziale delle linee di curvatura sulle $w = \text{cost.}^{te}$ è data da

$$(12) \qquad (ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (FD'' - GD')\,dv^2 = 0$$

sarà per la nostra ipotesi

$$ED' - FD = 0.$$

Ne risulta dalle prime equazioni (11)

$$F\frac{\partial E}{\partial w} - E\frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

cioè $\frac{F}{E}$ è indipendente da w, e per ciò l'equazione differenziale delle linee di curvatura del secondo sistema

$$E\,du + F\,dv = 0$$

è anche indipendente da w. Dunque nella corrispondenza segnata sulle superficie $w = \text{cost.}^{te}$ dalle loro trajettorie ortogonali l'ipotesi che si corrispondano le linee di curvatura del primo sistema porta che si corrispondano anche quelle del secondo. È così nuovamente dimostrato il teorema inverso di DUPIN (DARBOUX): *Se due sistemi di superficie si tagliano orto-*

gonalmente lungo linee di curvatura, esiste un terzo sistema ortogonale ad ambedue (*).

3.° Cerchiamo ora di esprimere la condizione perchè una serie ∞^1 di superficie w=cost^{te} costituisca una famiglia di LAMÈ. Occorre e basta per ciò che nell'equazione differenziale (12) delle linee di curvatura i rapporti dei tre coefficienti $ED' - FD$, $ED'' - GD$, $FD'' - GD'$ siano indipendenti da w, ossia che questi tre binomii siano proporzionali alle loro derivate rapporto a w. Ma dalle equazioni (II) di WEINGARTEN abbiamo :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial w}(ED' - FD) = E\,\psi_{12} - F\,\psi_{11} + H(ED' - FD)\,\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial w}(ED'' - GD) = E\,\psi_{22} - G\,\psi_{11} + H(ED'' - GD)\,\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial w}(FD'' - GD') = F\,\psi_{22} - G\,\psi_{12} + H(FD'' - GD')\,\psi. \end{cases}$$

Nei secondi membri gli ultimi termini sono già proporzionali ai detti binomii e per ciò il sussistere delle proporzioni richieste equivale all'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}.$$

Così troviamo di nuovo l'equazione del CAYLEY sotto la sua forma generale (I*), ma questa volta in significato più completo come *caratteristica* per le famiglie di LAMÈ :

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie ∞^1 *di superficie formi una famiglia di* LAMÈ *è che la distanza normale infinitesima fra una superficie generica* S *del sistema e la sua successiva soddisfi all' equazione* (I*) *del* CAYLEY.

Riferendoci ai sistemi ciclici osculatori di RIBAUCOUR (§ 522), possiamo dare a questa condizione anche l'altra forma :

Una famiglia ∞^1 *di superficie* (S) *è una famiglia di* LAMÈ *allora ed allora soltanto che i circoli osculatori delle trajettorie ortogonali, lungo ogni superficie* S *formano un sistema ciclico.*

(*) Si confronti la dimostrazione data al § 449 che vale per un S_3 curvo qualunque.

E infatti, che la condizione sia necessaria risulta dal teorema di RIBAUCOUR. D'altronde, se si suppone soddisfatta, il raggio ρ_3 del circolo sarà dato dalla (8) § 522, e poichè il sistema è ciclico, dovrà ψ soddisfare pel § 362 alla equazione del CAYLEY e le superficie (S) formeranno quindi una famiglia di LAMÈ.

§ 525.

L'equazione alle derivate parziali terze per le famiglie di Lamé.

Si è già visto in generale, al § 450, che le famiglie di LAMÈ, in uno spazio qualunque curvo a tre dimensioni, sono caratterizzate da un'equazione alle derivate parziali terze. Per il caso dello spazio euclideo questa equazione del terzo ordine si ottiene facilmente dall'equazione del CAYLEY.

Sia $$w(x, y, z) = w \qquad \text{(costante)}$$

l'equazione della serie ∞^1 di superficie, che vogliamo riconoscere se forma una famiglia di LAMÈ. Riferiamo lo spazio ad un sistema di coordinate curvilinee qualunque u, v, w, di cui le superficie $w =$ cost.^{te} siano quelle della nostra serie:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

e denotiamo nel solito modo, per la superficie $w =$ cost.^{te} le due forme fondamentali, i cui coefficienti E, F, G ; D, D′, D″ saranno funzioni note di u, v, w. Nel passaggio dalla superficie w alla $w + dw$, le componenti dello spostamento del punto x, y, z sono

$$\frac{\partial x}{\partial w} dw, \quad \frac{\partial y}{\partial w} dw, \quad \frac{\partial z}{\partial w} dw,$$

e quindi la componente secondo la normale sarà

$$\psi\, dw = \left(X \frac{\partial x}{\partial w} + Y \frac{\partial y}{\partial w} + Z \frac{\partial z}{\partial w}\right) dw,$$

da cui

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

ovvero

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}. \tag{13}$$

Se si scrive che questa ψ soddisfa all'equazione del CAYLEY

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

si ha la condizione perchè le superficie $w = \text{cost.}^{te}$ formino una famiglia di LAMÈ. È chiaro che, siccome ψ contiene già dalla (13) le derivate prime, questa è un'equazione alle derivate parziali terze.

In particolare se per variabili u, v prendiamo le x, y stesse, scrivendo l'equazione della serie ∞^1 di superficie

$$z = z(x, y ; w)$$

avremo nelle solite notazioni di MONGE (§ 83):

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

$$D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D' = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{p}{1 + p^2 + q^2} r, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{p}{1 + p^2 + q^2} s, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{p}{1 + p^2 + q^2} t$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{q}{1 + p^2 + q^2} r, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{q}{1 + p^2 + q^2} s, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{q}{1 + p^2 + q^2} t$$

D'altronde dalla (13) si ha subito

$$\psi = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial w}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{15}$$

e sostituendo nell'equazione (14) del CAYLEY si ha

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ 1+p^2, & pq, & 1+q^2 \\ r, & s, & t \end{vmatrix} = 0$$

che pei valori scritti dei simboli di CHRISTOFFEL si semplifica nella

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ 1+p^2, & pq, & 1+q^2 \\ r, & s, & t \end{vmatrix} = 0 .$$

Scrivendo per disteso si ha la formola

$$\text{(III)} \quad \left\{pqt-(1+q^2)s\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + \left\{(1+p^2)s-pqr\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 ,$$

nella quale, ponendo per ψ il valore (15), risulta l'equazione alle derivate parziali del 3° ordine sotto la forma che venne data da M. LÈVY. (*)

§ 526.

Famiglie di Lamé con un gruppo continuo G_1 di movlmenti o di trasformazoni conformi.

Applichiamo questi risultati generali alla ricerca delle superficie Σ che generano una famiglia di LAMÈ quando siano assoggettate ad un gruppo continuo ad un parametro di movimenti. Distinguiamo i due casi ben noti che il guppo sia traslatorio, ovvero elicoidale (in particolare rotatorio).

(*) Cf. DARBOUX S. O. pag 83.

a) *Gruppo traslatorio.* Prendiamo l'asse delle z nel senso della traslazione e l'equazione della serie ∞^1 di superficie si potrà scrivere

$$z = z\,(x,\, y) + w,$$

onde la (15) diventerà semplicemente

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{15}$$

e sostituendo nella equazione (II) di M. LÈVY avremo un'equazione a derivate parziali *del terzo ordine* di cui tutte le superficie integrali godranno della proprietà richiesta. Questa equazione esprime soltanto che la distanza normale infinitesima fra la superficie Σ e quella che ne risulta per traslazione infinitesima nel senso Oz soddisfa all'equazione del CAYLEY.

Basta dunque che la circostanza voluta si presenti per la traslazione infinitesima e la superficie Σ, assoggettata alla traslazione *continua*, genererà una famiglia di LAMÈ. Se si considera poi che la traslazione continua che scambia fra loro le superficie delle serie muta anche le trajettorie ortogonali in trajettorie ortogonali, risulta evidente che anche le superficie delle altre due serie nel sistema triplo ortogonale godranno della medesima proprietà e saranno per ciò altrettanti integrali della equazione del 3° ordine. (*) Si osserverà che i sistemi tripli ortogonali qui considerati sono un caso particolare, per $n = 3$, dei sistemi H traslatorii del § 515 per n qualunque.

Le singole superficie nel sistema traslatorio sono caratterizzate dalla proprietà geometrica già rilevata nella nota al § 515.

b) *Gruppo elicoidale.* Prendiamo per asse Oz l'asse del movimento elicoidale, di parametro m. Se la superficie iniziale Σ è la $z = z\,(x\,y)$, le equazioni parametriche della serie ∞^1 generata nel movimento elicoidale saranno

$$\bar{x} = x\cos w - y\,\mathrm{sen}\, w,\quad \bar{y} = x\,\mathrm{sen}\, w + y\cos w,\quad \bar{z} = z + m\,w$$

e prendendo nuovamente per parametri u, v le x, y stesse avremo

(*) Qui escludiamo il caso ovvio di superficie che striscino in sè medesime per la traslazione, cioè di cilindri paralleli all'asse 0_z .

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \cos w & \operatorname{sen} w & p \\ -\operatorname{sen} w & \cos w & q \\ -\bar{y} & \bar{x} & m \end{vmatrix} = m + py - qx ,$$

indi dalla (13)

$$\psi = \frac{py - qx + m}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} . \tag{16}$$

Le superficie cercate sono quindi tutte e sole le superficie integrali della equazione del 3° ordine che si ottiene dalla (13), ove per ψ si ponga il valore dato dalla (16). Colle considerazioni medesime del caso precedente, si vede che anche le altre due serie di superficie, completanti il sistema triplo ortogonale, apparterranno alla medesima classe, a meno che il movimento elicoidale non le faccia strisciare in sè medesime, vale a dire siano *elicoidi coassiali del medesimo passo* Questo caso, non più ovvio come quello dei cilindri in *a*), considereremo a parte nel § seguente.

c) *Gruppi* G_1 *conformi.* Consideriamo più in generale una trasformazione infinitesima *conforme* dello spazio sia

$$\mathrm{X}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} ,$$

dove dunque la $\mathrm{X}f$ è composta linearmente, con coefficienti costanti, colle 10 trasformazioni infinitesime indipendenti generatrici del gruppo conforme G_{10} (*).

(*) Queste sono le 6 generatrici del gruppo dei movimenti

$$\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} , \frac{\partial f}{\partial z} , z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} , x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial z} , y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} ,$$

l'omotetia infinitesima

$$\mathrm{U}f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

e le altre tre

$$2x\,\mathrm{U} - \rho^2\frac{\partial f}{\partial x} , \; 2y\,\mathrm{U} - \rho^2\frac{\partial f}{\partial y} , \; 2x\,\mathrm{U} - \rho^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

Cf. LIE-ENGEL Theorie der Transformationsgruppen Bol. II. p. 459, Bol. III. p. 237.

Cerchiamo le superficie Σ che assoggettate al gruppo conforme G_1 ad un parametro, generato dalla Xf, descrivono una famiglia di LAMÈ. La distanza normale infinitesima Σ fra la superficie Σ e la successiva si trova subito data da

$$\psi = \frac{p\xi + q\eta - \zeta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{17}$$

dove ξ, η, ζ sono le dette funzioni note di x, y, z.

Introducendo questo valore di ψ nella equazione (III) di M. LÈVY, si ha l'equazione a derivate parziali del 3° ordine caratteristica per queste superficie Σ (**). E, per le ragioni stesse addotte nei due casi particolari precedenti, è chiaro che anche le superficie delle altre due serie saranno della stessa classe *ovvero saranno congiate in sè stesse dal gruppo* G_1 come luoghi di ∞^1 trajettorie del gruppo.

d) Che esistano in effetto sistemi tripli ortogonali nei quali il gruppo conforme G_1 fa strisciare ciascuna in sè le superficie di una delle tre serie, mentre permuta fra loro quelle di ciascuna delle altre due, lo riconosciamo subito nel modo seguente. Prendiamo una qualunque superficie S le cui linee di curvatura *di un sistema* taglino ortogonalmente le trajettorie del gruppo G_1 uscenti dai suoi punti. Queste superficie S sono gli integrali di un'equazione *del secondo ordine* come si trova esprimendo che lungo le linee di curvatura di un sistema di S deve essere verificata la condizione

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0,$$

ossia

$$dx : dy = \eta + q\,\zeta : -(\xi + p\,\zeta),$$

valori che introdotti nella equazione differenziale delle linee di cur-

---

(**) Si può osservare il caso particolare che si ottiene dalle superficie integrali della equazione del 1.° ordine

$$\frac{p\xi + q\eta - \zeta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = k \text{ (cost.te)}.$$

In questo caso la famiglia di LAMÈ è composta di superficie parallele e le dette superficie godono *d)* della proprietà (caratteristica) che si passa da una superficie della classe ad ogni sua parallela con una trasformazione conforme dello spazio.

vatura (in coordinate cartesiane (I pag. 222) dànno l'equazione del secondo ordine cercata :

$$(18)\ (\eta + q\zeta)^2 \{(1+p^2)\, s - p\, q\, r\} + (\eta + q\zeta)(\xi + p\,\zeta)\{(1+q^2)\, r - (1+p^2)t\} +$$
$$+ (\xi + p\,\zeta)^2 \{p\, q\, t - (1+q^2)s\} = 0. \ (*)$$

Ciò posto, prendiamo una tale superficie S e assoggettiamola al gruppo continuo G_1 di trasformazioni conformi. Siccome queste trasformazioni conservano gli angoli e le linee di curvatura, ogni linea Γ di *seconda* curvatura di S genererà una superficie Σ che taglia le S ortogonalmente lungo linee di curvatura. La famiglia (S) è dunque in effetto, pel teorema di DARBOUX, una famiglia di LAMÈ, ed una delle tre serie, la (Σ), è formata di superficie che strisciano in sè medesime pel gruppo conforme G_1, come composte ciascuna di trajettorie del gruppo.

Osserviamo in fine che il sistema ciclico osculatore lungo una superficie Σ viene pure cangiato in sè medesimo dal gruppo conforme G_1 e si hanno così sistemi tripli ortogonali *ciclici* della nostra classe.

§ 527.

Famiglie elicoidali di Lamé. (**)

Proseguiamo queste ultime ricerche pel caso *b*) di un gruppo G_1 elicoidale, nel quale la famiglia (Σ) sarà composta di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo. Risulta dalle nostre considerazioni che queste famiglie elicoidali di LAMÈ dipendono da un' equazione del 2° ordine e contengono due funzioni arbitrarie. Sopra abbiamo già dato una prima forma a questa equazione del 2° ordine, la (18) ove si ponga $\xi = y$, $\eta = -x$, $\zeta = -m$, ma giova anche ricercare direttamente la legge di variazione del profilo meridiano dell'elicoide nella famiglia di LAMÈ. Per questo scriviamo le equazioni parametriche dell'elicoide variabile nella famiglia :

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \operatorname{sen}\omega, \quad z = \varphi(\rho, w) + m\,\omega),$$

(*) Dalla dimostrazione seguente risulta altresì che gli integrali di questa equazione del secondo ordine sono integrali particolari dell' equazione del terzo ordine.

(**) Cf. la memoria dell'A. nel T. XIII. Serie II.ª degli Annali di matematica (1885).

dove w è il parametro che individua le singole elicoidi e $\varphi(\rho, w)$ indica una funzione di ρ, w.

Per l'elemento lineare dell'elicoide in coordinate ρ, ω abbiamo

$$E = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2, \quad F = m \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \quad G = \rho^2 + m^2,$$

onde

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}.$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\rho, \omega, w)} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

e quindi dalla (13)

$$\psi = \frac{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}}, \tag{19}$$

valore che dobbiamo sostituire nell'equazione del CAYLEY per esprimere che la famiglia elicoidale è di LAMÈ.

Ma ora si osservi che il valore (19) di ψ non contiene ω e basta quindi calcolare i simboli

$$\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

che hanno i valori:

$$\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}}{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}, \quad \left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\} = -\frac{m \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2},$$

$$\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\} = -\frac{\rho (\rho^2 + m^2)}{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2},$$

mentre D, D′, D″ risultano proporzionali a

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad -m, \quad \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}.$$

Sostituendo nel determinante dell'equazione del CAYLEY, con una riduzione evidente, risulta l'equazione (*) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} = \frac{\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \rho\left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2\right]}{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial \rho} log \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho} log \left\{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2\right\}.$$

Integrando risulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \mathrm{F}(w)\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2},$$

con F (w) funzione di w. Escludiamo il caso F $(w) = 0$, che conduce evidentemente al caso ovvio di elicoidi paralleli, e senza alterare la generalità, disponendo del parametro w, potremo fare F $(w) = 1$, e la precedente diventa per la (19)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}}\right) = \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}.$$

Questa è l'equazione del 2° ordine che determina la legge di variazione del profilo meridiano nelle elicoidi della famiglia di LAMÈ.

Come esempio notevole cerchiamo se la famiglia può constare di elicoidi congruenti per traslazione lungo l'asse (o ciò che è lo stesso per rotazione attorno all'asse). Dovremo porre allora

$$\varphi(\rho, w) = \varphi(\rho) + f(w)$$

e la (4) che diventa

$$f'(w)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}\right) = \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}$$

(*) Si osservi però che se le superficie elicoidali si riducono a superficie di rotazione, per essere $m = 0$, l'equazione del CAYLEY risulta identicamente soddisfatta (Cf. più oltre § 531).

dimostra che $f'(w)$ è necessariamente una costante k (non nulla) e dobbiamo avere

$$-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\varphi'^2(\rho)}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\varphi'^2(\rho)}}\right)=-\frac{1}{h}=\text{cost.}^{\text{te}}$$

Ma il primo membro esprime la curvatura della superficie elicoidale, onde il risultato :

Le elicoidi che per rotazione attorno all'asse generano una famiglia di LAMÈ *sono tutte e sole le elicoidi di curvatura costante.*

Ritorneremo nel prossimo Capitolo su questi notevoli sistemi tripli ortogonali dimostrando che anche le altre due serie constano di elicoidi a curvatura costante (V. § 549).

§ 528.

Soluzioni permanenti dell'equazione del Cayley.

In generale osserveremo ancora che le famiglie elicoidali di LAMÈ si connettono col problema seguente :

Quali sono le superficie che posseggono una soluzione ψ *(non costante) dell'equazione del* CAYLEY *permanente in tutte le flessioni ?*

Se si ha riguardo al significato dell'equazione del CAYLEY per la determinazione dei sistemi ciclici ortogonali ad una data superficie, si può anche enunciare il problema sotto quest'altra forma :

In quali casi un sistema ciclico di circoli normali ad una superficie, legato invariabilmente alla superficie, rimane ciclico in tutte le deformazioni di questa ?

Dovendo l'equazione del CAYLEY

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0$$

essere soddisfatta in tutte le flessioni, come relazione lineare in D, D', D'', dovrà ridursi ad un'identità (Cf. § 318). La questione si riconduce quindi alla ricerca di quelle forme del ds^2 per le quali esiste una funzione ψ che soddisfa alle proporzioni

$$\psi_{11} : \psi_{12} : \psi_{22} = E : F : G.$$

e si risolve subito col procedimento stesso usato al citato paragrafo (pag. 109). Prendasi un sistema coordinato ortogonale (u, v) di cui le linee $u = \text{cost.}^{te}$ coincidano colle $\psi = \text{cost.}^{te}$, onde sarà $F = 0$, $\psi = \psi(u)$, e le proporzioni superiori si riducono alle condizioni seguenti :

$$(19^*) \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\psi''}{\psi'} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Scegliendo convenientemente i parametri u, v possiamo fare

$$\sqrt{E} = 1 \quad \sqrt{G} = \varphi(u) = r,$$

nel qual caso si soddisfa, per le (19*), alle condizioni richieste prendendo

$$\psi = \int r\, du.$$

Dunque : *Le superficie richieste sono tutte e sole quelle applicabili sopra superficie di rotazione con*

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2,$$

e la soluzione permanente dell'equazione del CAYLEY *è data da*

$$\psi = \int r\, du.$$

In questo caso i circoli del sistema ciclico hanno raggio invariabile lungo le deformate dei paralleli e le traccie dei loro piani sui piani tangenti sono le tangenti alle deformate dei meridiani. Per ciò i circoli stessi sono tracciati nei piani tangenti della superficie complementare e questa circostanza, ricordando il teorema generale di RIBAUCOUR al § 359, rende ora evidente che il sistema rimane ciclico in qualunque deformazione.

Se applichiamo questi risultati al caso in cui la superficie Σ assuma la forma elicoidale e sulla normale a Σ riportiamo il segmento infinitesimo $\varepsilon\,\psi\left(\psi = \int r\, du\right)$, che è costante lungo le eliche, la superficie Σ' luogo degli estremi sarà pure elicoidale, ed essendo soddisfatta l'equazione del CAYLEY, sarà successiva a Σ in una famiglia di LAMÈ. Procedendo sopra Σ' nel medesimo modo, e così di seguito, si viene a generare, per costruzione infinitesimale, le famiglie elicoidali di LAMÈ sopra studiate.

§ 529.

Elementi caratteristici dei sistemi tripli ortogonali secondo Darboux.

Ritornando alla teoria generale, veniamo ora ad occuparci di una bella proposizione stabilita dal DARBOUX, che fissa nel modo più espressivo il grado d'arbitrarietà dei sistemi tripli ortogonali. (*) La proposizione si enuncia.

Esiste uno ed un solo sistema triplo ortogonale che comprende tre superficie date ad arbitrio, una per ciascuna famiglia, purchè queste si taglino ortogonalmente in un punto e (conformemente al teorema di DUPIN) *lungo linee di curvatura.*

Aggiungiamo però subito che, nel caso eccezionale in cui qualcuna delle tre superficie date si riducesse ad un piano o ad una sfera, converrebbe fissare, in modo del resto arbitrario, il sistema doppio ortogonale di linee da riguardarsi come quello delle linee di curvatura.

a) La parte del teorema che si riferisce *all'unicità* del sistema si dimostra facilmente colle considerazioni seguenti. Siano Σ_1, Σ_2, Σ_3 le tre superficie iniziali soddisfacenti alle condizioni enunciate, e per maggiore chiarezza scegliamo a parametri u_1, u_2, u_3 gli archi delle tre curve coordinate C_1, C_2, C_3 secondo cui si segano Σ_1, Σ_2, Σ_3, misurati a partire dal punto O ove si incrociano, e siano $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ le tre rispettive superficie. Noi conosciamo *per* $u_3 = 0$ le funzioni di u_1, u_2 cui si riducono H_1, H_2 ; quindi anche

$$\beta_{12} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u_2} \qquad \text{per} \quad u_3 = 0 ;$$

similmente

$$H_2, H_3, \quad \beta_{23}, \beta_{32} \qquad per \ u_1 = 0$$

$$H_3, H_1, \quad \beta_{31}, \beta_{13} \qquad per \ u_2 = 0 ,$$

Se ora delle equazioni a cui debbono soddisfare le rotazioni β_{ik} prendiamo quelle del primo gruppo $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk}$, o scritte per disteso :

(*) DARBOUX S. O. pag. 386 s. s.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13}\,\beta_{32} \;, & \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\,\beta_{13} \;, & \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\,\beta_{21} \\ \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23}\,\beta_{31} \;, & \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = \beta_{31}\,\beta_{12} \;, & \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\,\beta_{23} \;, \end{cases}$$

queste formano un sistema del tipo A) § 500, e quindi dai valori iniziali prescritti restano individuati i valori delle 6 rotazioni β_{ik} per *tutti i valori di* u_1, u_2, u_3. Ma allora le equazioni per le H_i

$$\begin{cases} * & \dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21}\,H_2 \;, & \dfrac{\partial H_1}{\partial u_3} = \beta_{31}\,H_3 \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12}\,H_1 & * & \dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} = \beta_{32}\,H_3 \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} = \beta_{13}\,H_1 \;, & \dfrac{\partial H_3}{\partial u_2} = \beta_{23}\,H_2 & * \end{cases}$$

formano alla loro volta un sistema A) e dalle condizioni iniziali $H_1 = 1$ per $u_2 = u_3 = 0$, $H_2 = 1$ per $u_3 = u_1 = 0$, $H_3 = 1$ per $u_1 = u_2 = 0$, restano individuate le H_1, H_2, H_3 per tutti i valori di u_1, u_2, u_3. Il sistema triplo ortogonale, supposto esistente, è dunque certamente unico, c. d. d.

b) La dimostrazione rigorosa del teorema d'esistenza richiede l'uso di ulteriori proprietà relative alle equazioni per le rotazioni del secondo gruppo (DARBOUX l. c). Qui ci limitiamo ad illustrare il procedimento colle seguenti considerazioni infinitesimali. Se cerchiamo di passare dalla superficie data Σ_1 alla successiva Σ'_1 nella famiglia e indichiamo con $\varepsilon\psi$ la distanza normale infinitesima fra Σ_1, Σ'_1, la funzione incognita ψ dovrà soddisfare all'equazione (I) del CAYLEY. E siccome i dati del problema fissano i valori di ψ lungo le caratteristiche (u_1, u_2), esisterà una ed una sola funzione ψ soddisfacente. La superficie Σ'_1, luogo dei termini dei segmenti normali $\varepsilon\psi$, viene ora a tagliare ortogonalmente le due Σ_2, Σ_3 lungo le due successive linee di curvatura e si trova quindi, rispetto a Σ_2, Σ_3 nelle medesime condizioni come prima Σ_1. Per la medesima ragione la Σ'_1 determinerà una terza superficie successiva Σ''_1 nella famiglia, e così via. Ammessa la convergenza del processo, la serie (Σ_1), essendo soddisfatta l'equazione del CAYLEY, sarà una famiglia di LAMÉ, e due superficie delle altre due serie saranno appunto le Σ_2, Σ_3 prescritte.

§ 530.

Le tre equazioni del 1°. ordine di Bonnet per gli angoli d'Eulero.

Si è già esposto il metodo di DARBOUX, che riduce la ricerca dei sistemi tripli ortogonali ad un'equazione del 3° ordine a cui soddisfa il parametro w di una famiglia di LAMÉ.

La riduzione ad un'equazione del 3° ordine era già stata ottenuta anteriormente da O-BONNET, (*) in un modo del tutto diverso che ora andiamo ad esporre, e che conduce dapprima a tre semplici equazioni del 1° ordine per tre funzioni incognite, i tre angoli d'EULERO.

Esponiamo dapprima il metodo sotto la forma seguente che permette di formare direttamente le tre equazioni indicate, senza ricorrere alle proprietà note dei sistemi tripli ortogonali.

Supposto di avere un qualunque sistema triplo ortogonale, in ogni punto (x, y, z) dello spazio avremo il triedro principale delle normali, i cui nove coseni di direzione

$$(X_i, Y_i, Z_i)$$

potremo esprimere per i tre angoli d'EULERO φ, θ, ψ, p. e colle formole del quadro seguente:

$$(20)\quad \begin{cases} X_1 = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi, & Y_1 = -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi, & Z_1 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ X_2 = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, & Y_2 = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi, & Z_2 = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ X_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, & Y_3 = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, & Z_3 = \cos\theta\,. \end{cases}$$

Pensiamo φ, θ, ψ come funzioni incognite di x, y, z e noi avremo le condizioni *necessarie e sufficienti* a cui debbono soddisfare, esprimendo che sono illimitatamente integrabili le tre equazioni ai differenziali totali

$$(21)\qquad X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Le tre equazioni che ne risultano

$$X_i\left(\frac{\partial Y_i}{\partial z} - \frac{\partial Z_i}{\partial y}\right) + Y_i\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x} - \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) + Z_i\left(\frac{\partial X_i}{\partial y} - \frac{\partial Y_i}{\partial x}\right) = 0\,,$$

(*) Comptes Rendus t. 54 (1862).

introducendovi i valori (20) per le X_i, Y_i, Z_i, dànno manifestamente tre equazioni a derivate parziali del 1° ordine per le tre funzioni incognite φ, θ, ψ e queste sono le equazioni del problema.

Formiamo queste equazioni nel modo più semplice (BONNET) assumendo come variabili indipendenti i parametri u_1, u_2, u_3 del sistema triplo ortogonale, cioè gli integrali delle equazioni (21). Calcolando in primo luogo le rotazioni β_{ik} dalle formole

$$\beta_{ik} = \frac{1}{Z_k}\frac{\partial Z_i}{\partial u_k}, \tag{22}$$

troviamo per le (20)

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_{12} = -\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} - tg\,\varphi\cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u_2}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \cot\varphi\cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\\
&\beta_{13} = \cos\varphi\, tg\,\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3}, \quad \beta_{31} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\\
&\beta_{23} = \operatorname{sen}\varphi\, tg\,\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} - \cos\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3}, \quad \beta_{32} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial u_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{22*}$$

Esprimendo ora che alle stesse relazioni (22) soddisfano le X_i, Y_i, troviamo le tre equazioni del BONNET

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1} = -\frac{\cot\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u_2} = \frac{tg\,\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u_3} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}, \tag{V}$$

che rappresentano tutte le condizioni del problema.

La riduzione di questo sistema ad un'equazione del 3° ordine si può effettuare assumendo per variabili indipendenti ψ, u_1, u_2 ed immaginando φ espressa in funzione di queste

$$\varphi = f(\psi, u_1, u_2).$$

Allora se si trae θ dall'ultima che dà

$$\cos\theta = -\frac{\partial f}{\partial\psi}$$

e si sostituisce nelle prime due, la condizione d'integrabilità dà un' equazione del 3° ordine per f (*).

(*) DARBOUX l. c. p. 409.

Dalle (V) si può ritornare al sistema del primo ordine nelle variabili x, y, z indicato da principio, osservando che si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} = \frac{1}{H_i}\left(X_i \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y_i \frac{\partial \psi}{\partial y} + Z_i \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

e analogamente per θ, φ. Sostituendo nelle (V), restano eliminate le H_i, e si hanno le equazioni del 1° ordine richieste.

§ 531.

Famiglie di Lamé di piani o sfere e di superficie di rotazione.

Dopo queste generalità sui sistemi tripli ortogonali passiamo a trattare di alcune classi più semplici e notevoli di famiglie di LAMÈ.

a) I piani e le sfere, come superficie a linee di curvatura indeterminate, godono della proprietà che qualunque loro famiglia ∞^1 è una famiglia di LAMÈ. Analiticamente questo segue subito p. e dall'equazione (III) di M. LÈVY, che si risolve in un'identità (annullandosi i tre coefficienti) qualunque sia ψ, quando le superficie sono piani o sfere. (*)

Geometricamente risulta dal considerare che se sopra una sfera (o piano) iniziale della famiglia si traccia una linea arbitraria L, quelle trajettorie ortogonali che escono dai punti di L formano una superficie Σ che da tutte le sfere (piani) viene tagliata ortogonalmente e quindi lungo linee di curvatura ; ne segue che tracciando ad arbitrio sopra una sfera iniziale un doppio sistema ortogonale di linee (L), (L') le due serie di superficie (Σ), (Σ') corrispondenti, insieme alle sfere, formano un sistema triplo ortogonale. Dunque: *Ogni famiglia* ∞^1 *di sfere o piani è, in infiniti modi, una famiglia di* LAMÈ.

Al Cap. I (§§ 24,25) abbiamo esposto i risultati di DARBOUX relativi alle trajettorie ortogonali di una famiglia di sfere e abbiamo dimostrato che queste famiglie, insieme alle loro trajettorie ortogonali, si hanno con quadrature. Bastano quindi quadrature per ottenere tutti i sistemi tripli ortogonali che contengono una famiglia di sfere. (**)

(*) Oppure si osservi che l'equazione (I*) del CAYLEY è un'identità, le due ultime linee del determinante essendo proporzionali.

(**) Per ulteriori sviluppi V.i DARBOUX S. O. Livre I. Chap. II.

Ricordiamo anche (I pag. 60) che la corrispondenza segnata sulle sfere dalle loro trajettorie ortogonali è una corrispondenza conforme (un'affinità circolare). Tale proprietà è caratteristica delle famiglie di sfere (o piani), cioè: *Se sopra le superficie di un sistema* ∞^1 *le trajettorie ortogonali segnano una corrispondenza conforme, le superficie sono sfere o piani.*

Questa è una conseguenza immediata delle formole (II) § 523 della prima linea, poichè in tale ipotesi deve essere

$$\frac{\partial E}{\partial w} : \frac{\partial F}{\partial w} : \frac{\partial G}{\partial w} = E : F : G ,$$

cioè

$$E : F : G = D : D' : D'' ,$$

proporzione che sussiste solo per le sfere.

Geometricamente risulta dal considerare che se si ha una famiglia (Σ) di superficie dotata della proprietà supposta, e sopra una di esse Σ si traccia un qualunque doppio sistema ortogonale di linee (L', L'') le superficie Σ', Σ'' luogo delle trajettorie ortogonali uscenti dai punti delle L', L'' completano con (Σ) un sistema triplo ortogonale. Pel teorema di DUPIN, le linee L', L'' sono dunque linee di curvatura di Σ, onde questa superficie, avendo linee di curvatura indeterminate, è una sfera (o un piano).

b) Consideriamo ora il caso particolare in cui la famiglia di LAMÈ si riduce ad un fascio di piani. In tal caso, tracciamo sopra uno dei piani un sistema doppio ortogonale arbitrario di curve (L', L''), ed il sistema triplo ortogonale sarà composto: 1° dai piani del fascio, 2° dai due sistemi Σ', Σ'' di superficie di rotazione attorno all'asse del fascio aventi per curve meridiane le curve assegnate L', L''.

Ricerchiamo se è questo il più generale sistema triplo ortogonale contenente una famiglia di superficie di rotazione, escluso il caso ovvio di sfere già sopra considerato. Supponiamo dunque che nel sistema triplo ortogonale definito da

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2 ,$$

le superficie p. e. del sistema $u_2 =$ cost.te siano superficie di rotazione e le curve (u_3) ne siano i meridiani. Poichè queste sono geodetiche avremo

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0 ,$$

indi $\beta_{31} = 0$. Ora dalla

$$\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \gamma_{32}\,\beta_{21}\,,$$

segue che avremo insieme

a) $$\beta_{31} = 0\,, \qquad \beta_{32} = 0$$

ovvero

b) $$\beta_{31} = 0\,, \qquad \beta_{32} = 0.$$

Nel caso *a*), dalle formole fondamentali (2) pag. 687 abbiamo

$$\frac{1}{r_{31}} = 0\,, \quad \frac{1}{r_{32}} = 0$$

e le superficie $u_3 =$ cost.^{te} (avendo nulle le due curvature principali) sono piani, e cioè i piani delle curve meridiane delle superficie di rotazione $u_2 =$ cost.^{te}, le quali hanno per conseguenza il medesimo asse. Ed allora anche le $u_1 =$ cost.^{te}, sono superficie di rotazione, e siamo nel caso sopra considerato.

Notiamo poi che nel caso attuale, avendosi per le *a*)

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = 0,$$

i coefficienti H_1, H_2 sono indipendenti da u_3. Ma anche le curvature principali

$$\frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\,, \quad \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\,,$$

come curvature dei meridiani (u_3) nelle superficie $u_2 =$cost.^{te}, $u_1 =$ cost.^{te} sono indipendenti da u_3, per ciò anche

$$\frac{\partial\, log\, H_3}{\partial u_2}\,, \quad \frac{\partial\, log\, H_3}{\partial u_1}\,.$$

Dunque H_3 ha la forma

$$H_3 = \psi\,(u_3)\,.\,f\,(u_1, u_2),$$

e cangiando il parametro u_3 si può fare anche H_3 indipendente da u_3. Così

il ds^2 ha la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2,$$

con H_1, H_2, H_3 indipendenti da u_3 ; e viceversa è immediato che se H_1, H_2, H_3 non contengono u_3, il sistema triplo è della specie considerata.

Resta da esaminare il secondo caso *b*) ove abbiamo

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0\,, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0\,,$$

ed H_1 essendo indipendente da u_1 si può fare senz'altro $H_1 = 1$. Qui avevendosi $\frac{1}{\rho_1} = 0$ le linee (u_1) sono rette e le superficie $u_1 =$ cost.^{te} sono parallele, indi gli altri due sistemi di sviluppabili; onde le $u_2 =$ cost.^{te} essendo per ipotesi di rotazione, saranno o ciindri o coni circolari retti. Nel primo caso le $u_1 =$ cost.^{te} sono manifestamente piani paralleli, nel secondo superficie parallele a linee di curvatura circolari. Viceversa si vede subito che qualunque sistema ∞^1 di cilindri circolari retti a generatrici parallele, o di coni circolari retti i cui assi siano le tangenti della curva luogo dei vertici è una famiglia di LAMÉ Questi due, ed il caso di una famiglia (qualunque) di sfere, sono gli unici casi di famiglie di LAMÈ costituite da superficie di rotazione non aventi lo stesso asse.

§ 532.

I sistemi tripli ciclici ortogonali.

Una classe importante di sistemi tripli ortogonali è quella dei sistemi ciclici di RIBAUCOUR, già studiati al Cap. XXI. Ivi abbiamo dimostrato (Cf. § 360) che ogni sistema ciclico dà luogo ad un sistema triplo ortogonale, ossia: *ogni sistema* ∞^1 *di superficie le cui trajettorie ortogonali siano circoli è una famiglia di* LAMÈ. (*)

Alla considerazione di questi sistemi accresce importanza il risultato di RIBAUCOUR (§ 522), secondo il quale a qualunque sistema triplo di su-

(*) Nel caso in cui i circoli degenerano in rette abbiamo il caso limite di superficie parallele.

perficie ortogonali sono coordinati infiniti sistemi ciclici osculatori, da riguardarsi quindi come sistemi elementari.

Andiamo ora a ricercare la forma che prende il ds^2 dello spazio, riferito ad un sistema triplo ciclico ortogonale. In questo converrà tenere separati dagli altri gli elementi che si riferiscono all'immagine sferica della congruenza degli assi dei circoli, secondo le formole del § 368. Mantenendo le notazioni di questo paragrafo, per le coordinate ξ, η, ζ di un punto mobile sopra una delle superficie normali ai circoli abbiamo

$$\xi = x + \rho \operatorname{sen} \sigma (X_1 \cos t + X_2 \operatorname{sen} t) + \rho \cos \sigma X_3, \tag{23}$$

colle analoghe per η, ζ. Ricordiamo che in queste formole t indica la soluzione generale della equazione ai differenziali totali (36) pag. 249

$$dt = \left\{ \sqrt{E}\, tg \frac{\sigma}{2} \cos(t+\omega) + A \right\} du - \left\{ \sqrt{G} \cot \frac{\sigma}{2} \cos (t - \omega) + B \right\} dv, \tag{24}$$

che contiene una costante arbitraria da riguardarsi come terza variabile, che indicheremo con w. Le altre quantità

$$E, G, \omega, \sigma, \rho$$

$$A = \frac{\partial \omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} 2\omega$$

$$B = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} 2\omega$$

sono tutte funzioni delle due sole variabili u, v, e le formole (23) esprimono le coordinate (ξ, η, ζ) di un punto mobile nello spazio in funzione di tre parametri (u, v, w) che sappiamo già appartenere ad un sistema triplo ortogonale. Questo confermiamo ora calcolando direttamente in coordinate (u, v, w) il ds^2 dello spazio

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Se deriviamo le (23) rapporto ad u, v, w colle formole del § 368 e § 307, ponendo per brevità

$$\begin{cases} L = \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \sqrt{E}\, tg \dfrac{\sigma}{2} \operatorname{sen} (t+\omega) \cdot \rho + \dfrac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot \rho \\ M = \dfrac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{G} \cot \dfrac{\sigma}{2} \operatorname{sen} (t - \omega) \cdot \rho - \dfrac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \rho, \end{cases} \tag{25}$$

troviamo

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \operatorname{sen}\sigma\, \mathrm{L}\,(\mathrm{X}_1 \cos t + \mathrm{X}_2 \operatorname{sen} t) + (\cos\sigma + 1)\,\mathrm{L}\,\mathrm{X}_3 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \operatorname{sen}\sigma\, \mathrm{M}\,(\mathrm{X}_1 \cos t + \mathrm{X}_2 \operatorname{sen} t) + \cos\sigma - 1)\,\mathrm{M}\,\mathrm{X}_3 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = \operatorname{sen}\sigma\,\rho\,\dfrac{\partial t}{\partial w}(-\mathrm{X}_1 \operatorname{sen} t + \mathrm{X}_2 \cos t). \end{cases}$$

Da queste formole risultano subito le identità

$$\mathrm{S}\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0\,,\quad \mathrm{S}\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial w} = 0\,,\quad \mathrm{S}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial w} = 0\,,$$

le quali pongono in evidenza il sistema triplo ortogonale (u, v, w). E se indichiamo con

$$ds^2 = h_1^2\,du^2 + h_2^2\,dv^2 + h_3^2\,dw^2$$

l'elemento lineare dello spazio, pei valori di h_1, h_2, h_3 ne deduciamo :

$$(27)\qquad h_1 = 2\cos\frac{\sigma}{2}\,.\,\mathrm{L}\,,\quad h_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\,.\,\mathrm{M}\,,\quad h_3 = \rho\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial t}{\partial w}\,,$$

formole che raggiungono lo scopo prefisso.

Importa altresì calcolare i valori delle 6 rotazioni β_{ik}, nella qual cosa, tenendo conto delle formole del § 368, si trova :

$$(28)\qquad \begin{cases} \beta_{12} = \sqrt{\mathrm{G}}\operatorname{sen}(t-\omega) - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cot\dfrac{\sigma}{2}\,,\quad \beta_{21} = -\sqrt{\mathrm{E}}\operatorname{sen}(t+\omega) - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} tg\,\dfrac{\sigma}{2} \\ \beta_{13} = \operatorname{sen}\dfrac{\sigma}{2}\dfrac{\partial t}{\partial w}\,, \qquad \beta_{31} = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{E}}\cos(t+\omega)}{\cos\dfrac{\sigma}{2}} \\ \beta_{23} = \cos\dfrac{\sigma}{2}\dfrac{\partial t}{\partial w}\,, \qquad \beta_{32} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{G}}\cos(t-\omega)}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma}{2}}\,. \end{cases}$$

Si osservi che questi valori delle rotazioni nel sistema ciclico sono affatto indipendenti da ρ, cioè dalla soluzione scelta della equazion di LAPLACE a cui soddisfa ρ (la (32) pag. 248), ciò che si interpreta nel teorema :

Tutti i sistemi ciclici aventi a comune l'immagine sferica delle sviluppabili per la congruenza degli assi dei circoli sono trasformati di Combescure l'uno dell'altro.

La stessa cosa segue anche dalle formole (26) le quali dànno pei coseni di direzione $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$ del triedro principale :

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}(X_1 \cos t + X_2 \operatorname{sen} t) + \cos\frac{\sigma}{2} X_3 \\ \overline{X}_2 = \cos\frac{\sigma}{2}(X_1 \cos t + X_2 \operatorname{sen} t) - \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2} X_3 \\ \overline{X}_3 = -X_1 \operatorname{sen} t + X_2 \cos t , \end{cases}$$

formole che non contengono ρ.

§ 533.

Famiglie di Lamé a trajettorie ortogonali piane.

Se ad un sistema triplo ciclico ortogonale applichiamo una qualunque trasformazione di COMBESCURE (§ 502), nel sistema derivato le linee coordinate (w) saranno manifestamente curve piane. Ma è anche facile dimostrare inversamente che si ottengono tutte le famiglie di LAMÈ a trajettorie ortogonali piane applicando le trasformazioni di COMBESCURE ai sistemi ciclici. Suppongasi infatti che nel sistema triplo ortogonale (u, v, w) le linee (w) siano piane. Consideriamo una qualunque superficie w=cost.^{te} del terzo sistema ed il sistema ciclico osculatore lungo di essa, secondo il teorema di RIBAUCOUR (§ 522). Le superficie a linee di curvatura circolari del sistema ciclico hanno le stesse immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie u=cost.^{te}, v=cost.^{te} nel sistema triplo dato (u, v, w), col quale il sistema ciclico viene quindi ad avere l'immagine sferica a comune. Dunque : *Se in un sistema triplo ortogonale* (u, v, w) *le curve* (w) *sono piane, i sistemi ciclici osculatori lungo le superficie* w=cost.^{te} *derivano da questo sistema triplo con trasformazione di* COMBESCURE.

Ora andiamo a dimostrare che l'integrazione del sistema differenziale per le trasformazioni di COMBESCURE si riduce, nel caso dei sistemi ciclici, all'unica equazione di LAPLACE in ρ, e la ricerca delle famiglie di LAMÈ trajettorie ortogonali piane, con un assegnato sistema ciclico osculatore,

si risolve conseguentemente per quadrature. Sappiamo che la ricerca dei sistemi tripli, ortogonali, con assegnate rotazioni, si riduce in generale all'integrazione del sistema seguente :

$$\begin{cases} * & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} = \beta_{21} H_2 , & \dfrac{\partial H_1}{\partial w} = \beta_{31} H_3 \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u} = \beta_{12} H_1 , & * & \dfrac{\partial H_2}{\partial w} = \beta_{32} H_3 \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial u} = \beta_{13} H_1 , & \dfrac{\partial H_3}{\partial v} = \beta_{23} H_2 & * \end{cases}$$

ovvero anche del sistema del secondo ordine nell' unica funzione incognita H_3 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} = \dfrac{\beta_{12}\beta_{23}}{\beta_{13}} \dfrac{\partial H_3}{\partial u} + \dfrac{\beta_{21}\beta_{13}}{\beta_{23}} \dfrac{\partial H_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial w} = \dfrac{1}{\beta_{13}} \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial w} \dfrac{\partial H_3}{\partial u} + \beta_{13}\beta_{31} H_3 \\ \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial v \partial w} = \dfrac{1}{\beta_{23}} \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial w} \dfrac{\partial H_3}{\partial v} + \beta_{23}\beta_{32} H_3 . \end{cases}$$

Ora, considerando che a questo sistema soddisfa

$$h_3 = \rho \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial t}{\partial w} ,$$

siamo condotti a sostituire alla funzione incognita H_3 l'altra R ponendo

$$H_3 = R \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial t}{\partial w}$$

e le equazioni precedenti si mutano allora per la $R = R(u, v, w)$ nel sistema :

$$(29) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial R}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \cos 2\omega \sqrt{EG}\, R = 0$$

$$(30) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial u \partial w} = \left\{ \sqrt{E}\, tg \dfrac{\sigma}{2} \operatorname{sen} (t + \omega) - \dfrac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right. \cdot \dfrac{\partial R}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial v \partial w} = \left\{ - \sqrt{G} \cot \dfrac{\sigma}{2} \operatorname{sen} (t - \omega) + \dfrac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right. \cdot \dfrac{\partial R}{\partial w} . \end{cases}$$

Ma le ultime due possono anche scriversi

$$\frac{\partial}{\partial u} log\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right) = -\frac{\partial}{\partial u} log\left(\text{sen } \sigma \frac{\partial t}{\partial w}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} log\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right) = -\frac{\partial}{\partial v} log\left(\text{sen } \sigma \frac{\partial t}{\partial w}\right),$$

e integrate dànno

$$\frac{\partial R}{\partial w} = \frac{W}{\text{sen } \sigma \dfrac{\partial t}{\partial w}},$$

dove W indica una funzione arbitraria di w.

Integrando rispetto a w p. e da $w = 0$, abbiamo

$$R = \frac{1}{\text{sen } \sigma} \int_0^w \frac{W\, dw}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \psi(u, v), \tag{31}$$

dove $\psi(u, v,)$ è una funzione di u, v, da determinarsi in guisa che R soddisfi all'equazione (29) di LAPLACE. Ma si verifica subito che la funzione

$$\frac{1}{\text{sen } \sigma \dfrac{\partial t}{\partial w}}$$

è una soluzione della (29), e poichè i coefficienti di questa equazione (lineare omogenea) non contengono w, vi soddisfa quindi anche

$$\frac{1}{\text{sen } \sigma} \int_0^w \frac{W\, dw}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}.$$

Così dunque, nella (31), la $\psi(u, v)$ può essere una qualunque soluzione della equazione (29) di LAPLACE da cui dipende la ricerca delle congruenze cicliche aventi per immagine sferica delle sviluppabili le linee (u, v).

Ora se in particolare prendiamo $\psi(u, v) = \rho$, la (31) definirà una famiglia di LAMÈ a trajettorie ortogonali piane, che avrà a sistema ciclico osculatore lungo la superficie $w = 0$ precisamente il sistema dato e la pre-

senza della funzione arbitraria W di w ci permetterà di dare ad una delle trajettorie piane una forma prefissata ad arbitrio. (*).

§ 534.

Sistema triplo di quadriche omofocali e coordinate ellittiche.

Uno dei più semplici ed importanti sistemi tripli ortogonali è quello delle quadriche omofocali, che dà luogo alle coordinate ellittiche, introdotte nell'analisi da LAMÈ.

Consideriamo il sistema di quadriche a centro confocali definito dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1\,, \tag{32}$$

dove u indica un parametro variabile e a^2, b^2, c^2 sono costanti, che supporremo ordinate per grandezza decrescente:

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

La quadrica (32) è reale soltanto finchè u giace nell'intervallo $(-a^2,+\infty)$ e precisamente essa è

un ellissoide . . . . . se $+\infty > u > -c^2$
un iperboloide a una falda » $-c^2 > u > -b^2$
un iperboloide a due falde » $-b^2 > u > -a^2$.

Per $u=\infty$ si ha una sfera di raggio infinito, e decrescendo u fino a $-c^2$, l'asse minore $\sqrt{c^2+u}$ dell'ellissoide va sempre e continuamente diminuendo ed al limite per $u=-c^2$ l'ellissoide si riduce a coprire due volte la porzione di piano xy interna all'ellisse focale

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1.$$

(*) V.i per maggiori sviluppi la memoria dell'A. nel Tomo XIV. serie II.a degli Annali di matematica (1891), e DARBOUX Leçons IVème. Partie n. 971, 972, dove viene assegnata una notevole costruzione geometrica di questi sistemi per mezzo di una sviluppabile isotropa.

Appena u ha, descrescendo, oltrepassato $-c^2$, la quadrica è un iperboloide ad una falda, e se si pone

$$u = -c^2 - \varepsilon,$$

con ε positivo, poi si fa tendere ε a zero, si riconosce che, per $\varepsilon = 0$, l'iperboloide si riduce alla regione di piano xy esterna all'ellisse focale ; questa ellisse forma dunque il passaggio dalla serie degli ellissoidi a quella degli iperboloidi ad una falda. In modo simile si vede che il passaggio da quest'ultima serie a quella degli iperboloidi a due falde avviene attraverso all'iperbola focale

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1\,, \qquad \text{nel piano } xz.$$

Per ogni punto (ξ, η, ζ) dello spazio passano tre quadriche del sistema (32), corrispondenti ai tre valori di u radici dell'equazione di terzo grado:

$$f(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u) - (b^2+u)(c^2+u)\xi^2$$
$$-(c^2+u)(a^2+u)\eta^2 - (a^2+u)(b^2+u)\zeta^2 = 0,$$

e siccome

$$f(+\infty) > 0,\ f(-c^2) < 0,\ f(-b^2) > 0,\ f(-a^2) < 0,$$

vediamo che in ciascuno dei tre intervalli

$$(+\infty, -c^2),\ (-c^2, -b^2),\ (-b^2, -a^2)$$

giace una radice. Queste sono adunque tutte tre reali, e indicandole rispettivamente con u_1, u_2, u_3, le tre quadriche corrispondenti della serie, passanti per (ξ, η, ζ), avranno le equazioni :

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+u_1} + \dfrac{y^2}{b^2+u_1} + \dfrac{z^2}{c^2+u_1} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+u_2} + \dfrac{y^2}{b^2+u_2} + \dfrac{z^2}{c^2+u_2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2+u_3} + \dfrac{y^2}{b^2+u_3} + \dfrac{z^2}{c^2+u_3} = 1, \end{cases}$$

e saranno la prima un ellissoide, la seconda un iperboloide ad una falda, la terza un iperboloide a due falde.

Ora possiamo definire la posizione di un punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio per mezzo dei tre parametri u_1, u_2, u_3 delle tre quadriche del sistema (32) che vi passano ; queste diconsi (LAMÈ) le *coordinate ellittiche* del punto e sono legate alle cartesiane (x, y, z) dalle formole (33).

Per calcolare il ds^2 dello spazio in coordinate ellittiche, cominciamo dal risolvere le (33) rispetto a x^2, y^2, z^2, ciò che si fa nel modo più semplice osservando che, dall'essere u_1, u_2, u_3 le radici dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0 ,$$

segue che si ha identicamente, qualunque sia u :

$$(34) \qquad \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = \frac{(u_1-u)(u_2-u)(u_3-u)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)} .$$

Moltiplicando dalle due parti per

$$(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u),$$

indi facendo successivamente

$$u = -a^2, -b^2, -c^2,$$

si ottiene per le formole cercate :

$$(35) \quad x^2 = \frac{(a^2+u_1)(a^2+u_2)(a^2+u_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2+u_1)(b^2+u_2)(b^2+u_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u_1)(c^2+u_2)(c^2+u_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} .$$

Da queste, derivate logaritmicamente rispetto ad u_1, u_2, u_3, seguono le altre

$$(36) \quad \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{1}{2}\frac{x}{a^2+u_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{1}{2}\frac{y}{b^2+u_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{1}{2}\frac{z}{c^2+u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

e dalle (33), sottratte due a due, risulta per le superiori

$$S\frac{\partial x}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_3}=0\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial u_3}\frac{\partial x}{\partial u_1}=0\,,\quad S\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}=0\,,$$

le quali confermano trattarsi di un sistema triplo ortogonale.

In fine, derivando la (34) rapporto ad u, e ponendo poi successivamente $u = u_1, u_2, u_3$, si deduce per le (36):

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}{(a^2+u_1)(b^2+u_1)(c^2+u_1)}\,,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{(u_2-u_3)(u_2-u_1)}{(a^2+u_2)(b^2+u_2)(c^2+u_2)}\,,$$

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(a^2+u_3)(b^2+u_3)(c^2+u_3)}\,,$$

onde concludiamo:

L'elemento lineare dello spazio, in coordinate ellittiche u_1, u_2, u_3, assume la forma:

$$37)\quad ds^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}{(a^2+u_1)(b^2+u_1)(c^2+u_1)}du_1^2+\frac{(u_2-u_3)(u_2-u_1)}{(a^2+u_2)(b^2+u_2)(c^2+u_2)}du_2^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(a^2+u_3)(b^2+u_3)(c^2+u_3)}du_3^2\right\}.$$

Questa forma del ds^2 dimostra nuovamente che le quadriche sono superficie a linee di curvatura isoterme. Esistono però altri sistemi tripli ortogonali con superficie tutte isoterme. (*)

§ 535.

Corrispondenza delle asintotiche.

Nel sistema triplo ortogonale delle quadriche confocali si presenta un'altra proprietà che conviene osservare. Riguardiamo nelle quadriche di una stessa famiglia, come corrispondenti, i punti ove sono incontrate da una medesima trajettoria ortogonale; diciamo che: *La corrispondenza segnata sulle quadriche di una medesima serie dalle loro trajettorie ortogonali conserva i sistemi coniugati (le linee asintotiche).*

(*) V. DARBOUX S. O. Livre II. Chap. III. a V.

E infatti tale corrispondenza è una projettività, precisamente l'affinità d'Ivory (cf. § 386), ciò che rende la cosa evidente. In particolare per la schiera degli iperboloidi ad una falda vengono a corrispondersi le generatrici per *tratti di eguale lunghezza.*

Di qui la proprietà che il reticolo formato dalle generatrici rettilinee di una quadrica può trasportarsi senza alterazione delle lunghezze nel doppio reticolo omologo di una qualunque delle quadriche omofocali (iperboloide articolato).

La proprietà della corrispondenza dei sistemi coniugati in una famiglia di quadriche confocali si presenta anche in una qualunque famiglia di sfere (§ 531), giacchè la corrispondenza tracciata dalle traiettorie ortogonali è conforme, e nel caso delle sfere i sistemi coniugati non sono altro che sistemi ortogonali. Nel Capitolo seguente vedremo che tale circostanza si presenta altresì in tutte le famiglie di Lamé costituite di superficie a curvatura costante.

Ora noi vogliamo dimostrare in generale che :

Se le trajettorie ortogonali di una famiglia ∞^1 *di superficie tracciano sulle superficie stesse una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati, le superficie costituiscono una famiglia di Lamé.*

Ed anzi proveremo che tale proprietà sussiste *indipendentemente dalla curvatura dello spazio.* Abbiasi infatti uno spazio S_3 curvo qualunque, che riferiamo alle superficie della supposta famiglia, come a superficie coordinate $u_3 =$ cost.te ed alle loro trajettorie ortogonali come a curve coordinate (u_3), onde il ds^2 avrà la forma

$$ds^2 = a_{11}\,du_1^2 + 2\,a_{12}\,du_1\,du_2 + a_{22}\,du_2^2 + a_{33}\,du_3^2.$$

I coefficienti Ω_{11}, Ω_{22}, Ω_{22} della seconda forma fondamentale per la superficie $u_3 =$ cost.te sono dati dalle formole (§ 449).

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix},$$

in particolare si ha

$$(\alpha) \qquad \Omega_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{a_{33}}}\frac{\partial a_{12}}{\partial u_3}.$$

Ora sopra una superficie iniziale del sistema, p. e la $u_3 = 0$, prendiamo a linee coordinate (u_1), (u_2) quelle di curvatura, ed avremo

$$a_{12} = 0,\ \Omega_{12} = 0 \qquad per\ u_3 = 0.$$

Per ipotesi il sistema (u_1, u_2) sarà coniugato su qualunque delle superficie u_3, cioè $\Omega_{12} = 0$ *per tutti i valori di* u_1, u_2 u_3. Ma allora si ha dalla (α)

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial u_3} = 0 \quad \text{o} \quad a_{12} = f(u_1, u_2) ,$$

e siccome per $u_3 = 0$ deve annullarsi a_{12}, sarà identicamente $a_{12} = 0$, ciò che dimostra la proposizione enunciata.

§ 536.

Teorema di Chasles.

La proprietà già segnalata alla fine del Cap. VI (I pag. 317) che: *le linee di curvatura di una quadrica costituiscono un sistema isotermo di ellissi e iperbole geodetiche* risulta anche dalla forma (37) del ds^2, che per ciascuna delle tre serie ha la forma di LIOUVILLE. La determinazione delle linee geodetiche sulle quadriche, come particolari superficie di LIOUVILLE, si compie quindi per quadrature. Geometricamente tale determinazione si lega al seguente notevole teorema dovuto a CHASLES: *Se si considerano due quadriche omofocali, la congruenza di raggi formata dalle loro tangenti comuni è una congruenza normale.*

Per dimostrarlo, indichiamo con u', u'' i valori del parametro u nella (32) che convengono alle due quadriche omofocali considerate, e siano x', y', z' ; x'', y'', z'' le coordinate dei rispettivi punti di contatto sopra un raggio della congruenza (fuochi), onde avremo

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2+u'} + \dfrac{y'^2}{b^2+u'} + \dfrac{z'^2}{c^2+u'} = 1 \\ \dfrac{x''^2}{a^2+u''} + \dfrac{y''^2}{b^2+u''} + \dfrac{z''^2}{c^2+u''} = 1. \end{cases}$$

Le normali alle due quadriche (u'), (u'') nei punti (x', y', z'), (x'', y'', z'') hanno per le (36) coseni di direzione rispettivamente proporzionali a

$$\frac{x'}{a^2+u'} , \quad \frac{y'}{b^2+u'} , \quad \frac{z'}{c^2+u'} ,$$

$$\frac{x''}{a^2+u''} , \quad \frac{y''}{b^2+u''} , \quad \frac{z''}{c^2+u''} ,$$

e ne risulta per ipotesi

$$\begin{cases} \dfrac{x'(x''-x')}{a^2+u'} + \dfrac{y'(y''-y')}{b^2+u'} + \dfrac{z'(z''-z')}{c^2+u'} = 0 \\ \dfrac{x''(x''-x')}{a^2+u''} + \dfrac{y''(y''-y')}{b^2+u''} + \dfrac{z''(z''-z')}{c^2+u''} = 0, \end{cases}$$

ossia per le (38)

$$\begin{cases} \dfrac{x'x''}{a^2+u'} + \dfrac{y'y''}{b^2+u'} + \dfrac{z'z''}{c^2+u'} = 1 \\ \dfrac{x'x''}{a^2+u''} + \dfrac{y'y''}{b^2+u''} + \dfrac{z'z''}{c^2+u''} = 1. \end{cases}$$

Queste ultime sottratte dànno :

$$\frac{x'x''}{(a^2+u')(a^2+u'')} + \frac{y'y''}{(b^2+u')(b^2+u'')} + \frac{z'z''}{(c^2+u')(c^2+u'')} = 0,$$

onde segue che le due normali considerate sono fra loro perpendicolari, c. d. d.

Ora sulla quadrica (u') le linee inviluppate dai raggi della congruenza considerata sono linee geodetiche e se, tenendo fissa la (u'), facciamo variare l'altra (u'') nel sistema confocale, otteniamo tutte le geodetiche della quadrica fissa.

§ 537.

Superficie di Liouville le cui due falde dell'evoluta sono quadriche omofocali.

LIOUVILLE ha dato il modo di formare effettivamente, in coordinate ellittiche u_1, u_2, u_3, l'equazione del sistema (Σ) di superficie parallele normali ai raggi di una congruenza di CHASLES, per le quali adunque l'evoluta si compone delle due quadriche omofocali (u'), (u'').

Per stabilire il risultato di LIOUVILLE ricordiamo che se la funzione $\Theta(x, y, z)$ soddisfa all'equazione

$$\Delta_1 \Theta = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

le superficie

$$\Theta(x, y, z) = \text{cost.}^{\text{te}}$$

costituiscono un sistema di superficie parallele (§ 432). Ora, in coordinate curvilinee ortogonali (u_1, u_2, u_3), quando si abbia

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2,$$

il parametro differenziale primo prende la forma

$$\Delta_1 \Theta = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_3}\right)^2,$$

e se adoperiamo coordinate ellittiche, ponendo per brevità

$$f(u) = 4\,(a^2 + u)\,(b^2 + u)\,(c^2 + u) \tag{39}$$

$$\varphi(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \tag{40}$$

la formola (37) pel ds^2 si scrive

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\varphi'(u_i)}{f(u_i)}\, du_i^2,$$

indi le superficie $\Theta(u_1\, u_2,\, u_3) = \text{cost.}^{\text{te}}$ formeranno un sistema parallelo se Θ soddisfa all'equazione

$$\sum_i \frac{f(u_i)}{\varphi'(u_i)}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_i}\right)^2 = 1. \tag{41}$$

Ma se si osserva che dalle formole di decomposizione della frazione

$$\frac{(u - \alpha)(u - \beta)}{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)},$$

essendo α, β costanti arbitrarie, risulta l'identità

$$\sum_i \frac{(u_i - \alpha)(u_i - \beta)}{\varphi'(u_i)} = 1,$$

segue che prendendo

$$\Theta = \sum_{i=1}^{i=3} \int \sqrt{\frac{(u_i - \alpha)(u_i - \beta)}{f(u_i)}}\, du_i \tag{42}$$

si ha una soluzione particolare della (41). Andiamo ora a verificare che il sistema di superficie parallele $\Theta(u_1, u_2, u_3) = \text{cost.}^{te}$, avendo Θ il valore superiore, ha appunto per le due falde dell'evoluta le due quadriche omofocali $u = \alpha$, $u = \beta$.

Per questo si osservi che valendo l'equazione

$$\Delta_1 \Theta = 1,$$

qualunque siano i parametri α, β, derivando rapporto a questi, risultano le identità

$$(a) \qquad \nabla\left(\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}\right) = 0\,, \quad \nabla\left(\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Ed inoltre, a causa dell'identità

$$\sum_i \frac{1}{\varphi'(u_i)} = 0,$$

vale anche l'altra

$$(b) \qquad \nabla\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}\,,\ \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Queste tre equazioni (a), (b) esprimono che i due sistemi di superficie

$$(43) \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \text{cost.}^{te}\,, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \text{cost.}^{te}$$

completano, colle superficie parallele

$$\Theta = \text{cost.}^{te},$$

un sistema triplo ortogonale. Dunque i due sistemi (43) sono quelli delle sviluppabili delle normali alle superficie $\Theta = \text{cost.}^{te}$. Ma se si osserva che la prima delle (43) differenziata dà

$$\sum_i \sqrt{\frac{u_i - \beta}{(u_i - \alpha) f(u_i)}}\, du_i = 0$$

e quindi facendo $u_i = \alpha$ ne viene $du_i = 0$, si vede che le sviluppabili $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \text{cost.}^{te}$ sono circoscritte alla quadrica $u = \alpha$ del sistema confocale e similmente le $\frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \text{cost.}^{te}$ alla quadrica $u = \beta$.

Dopo questi risultati possiamo scrivere facilmente l'equazione delle linee geodetiche sulla quadrica di parametro α, che per fissare le idee supporremo sia un ellissoide. Facendo $u_1 = \alpha$ nella

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{cost.}^{\text{te}},$$

avremo per l'equazione richiesta

$$(44) \qquad \int \sqrt{\frac{u_2 - \alpha}{(u_2 - \beta) f(u_2)}}\, du_2 + \int \sqrt{\frac{u_3 - \alpha}{(u_3 - \beta) f(u_3)}}\, du_3 = \text{cost.}^{\text{te}},$$

che rappresenterà sull'ellissoide $u_1 = \alpha$ le geodetiche inviluppate dalle tangenti comuni a questo ellissoide ed alla quadrica omofocale di parametro β. Per avere geodetiche reali bisogna che β sia il parametro di un iperboloide ad una, ovvero a due falde, e facendo nella (44), nel primo caso $u_2 = \beta$, nel secondo $u_3 = \beta$, ne risulta rispettivamente $du_2 = 0$, o $du_3 = 0$. Le geodetiche che si ottengono dalla (44) tenendo fisso β e facendo variare la costante del secondo membro sono dunque tutte tangenti alla linea di curvatura

$$u_2 = \beta \quad \text{o} \quad u_3 = \beta$$

dell'ellissoide. Facendo poi variare nella (44) anche il parametro β, si avranno così tutte le geodetiche dell'ellissoide.

CAPITOLO XXX.

Le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante.

Sistemi tripli ortogonali pseudosferici. - Loro esistenza ed elementi caratteristici. - Caso delle famiglie di LAMÉ a curvatura costante positiva. - La trasformazione di BÄCKLUND dei sistemi pseudosferici e il teorema di permutabilità. - I sistemi di WEINGARTEN. - Linee di equidistanza. - Sistemi di WEINGARTEN a flessione costante. - Sistema triplo elicoidale. - La trasformazione di BÄCKLUND e la trasformazione complementare pei sistemi di WEINGARTEN. - I sistemi tripli ortogonali generali con superficie a curvatura costante come sistemi Q. - Loro trasformazioni di RIBAUCOUR e teorema di permutabilità. - La distanza normale infinitesima in una famiglia di LAMÉ a curvatura costante. - Superficie inviluppo dei piani dei sistemi ciclici osculatori come applicabili sopra una medesima quadrica.

§ 538.

Sistemi tripli ortogonali pseudosferici.

I sistemi ciclici di RIBAUCOUR a raggio costante, collegati alla trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche (Cap. XI § 257), ci dànno un primo e più semplice esempio di superficie di LAMÈ composte di superficie colla (medesima) curvatura costante. In quest'ultimo capitolo ci proponiamo di costruire e di studiare in generale quei sistemi tripli ortogonali che contengono una famiglia di superficie a curvatura costante, sia questa curvatura la stessa per tutte le superficie della famiglia, oppure variabile dall'una all'altra. Escluderemo per altro il caso ovvio e ben noto dal § 531 in cui le superficie a curvatura costante siano di rotazione, sistemi che si formano prendendo un qualunque sistema ∞^1 di superficie di rotazione a curvatura costante (collo stesso asse), ed altresì il caso di famiglie di sfere affatto arbitrarie. Per questi casi che escludiamo non varrebbero *in generale* le formole che andiamo ora a sviluppare.

Cominciamo dal considerare una famiglia di LAMÈ composta di superficie pseudosferiche di raggio R, variabile in generale dall'una all'altra superficie della famiglia. Supponiamo che nel sistema triplo ortogonale corrispondente, definito dalla formola pel ds^2

$$ds^2 = \mathrm{H}_1^2 du_1^2 + \mathrm{H}_2^2 du_2^2 + \mathrm{H}_3^2 du_3^2 ,$$

le superficie $u_3 = \text{cost,}^{te}$ siano superficie pseudosferiche di raggio R, che supponiamo una funzione della sola u_3, finita e continua colla derivata. Dalle formole per le curvature principali $\frac{1}{r_{31}}$, $\frac{1}{r_{32}}$ delle superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} , \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial u_3} ,$$

e dall'ipotesi

$$\frac{1}{r_{31}} \cdot \frac{1}{r_{32}} = -\frac{1}{R^2} ,$$

risulta che si può porre

$$(1) \qquad \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = -\frac{tg\,\omega}{R} , \quad \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\cot\omega}{R} ,$$

dove $2\,\omega$ è un angolo ausiliario, che misura l'angolo delle due asintotiche uscenti da un punto generico (u_1, u_2, u_3) delle superficie pseudosferiche $u_3 = \text{cost.}^{te}$ Sostituendo i valori di $\frac{\partial H_1}{\partial u_3}$, $\frac{\partial H_2}{\partial u_3}$ tratti dalle (1) nelle due prime equazioni di LAMÈ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{1}{H_2} \dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} \dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} + \dfrac{1}{H_3} \dfrac{\partial H_3}{\partial u_2} \dfrac{\partial H_1}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial u_1 \partial u_3} = \dfrac{1}{H_3} \dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} \dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} + \dfrac{1}{H_1} \dfrac{\partial H_1}{\partial u_3} \dfrac{\partial H_2}{\partial u_1} \end{cases}$$

risulta

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u_2} , \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u_1} ,$$

da cui integrando viene

$$(2) \qquad H_1 = \cos\omega \cdot \psi(u_1, u_3) , \quad H_2 = \operatorname{sen}\omega\, \varphi(u_2, u_3),$$

la ψ non contenendo u_2, e la φ non contenendo u_1.

È essenziale ora per la nostra ricerca provare che (essendo escluso il caso di superficie pseudosferiche di rotazione) tanto ψ che φ sono indipendenti da u_3, cioè si ha necessariamente

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = 0 , \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_3} = 0.$$

Suppongasi il contrario, e dalle (1), (2) ricaviamo

$$(3^*)\quad H_3 = R\, tg\,\omega\left(\cot\omega\,\frac{\partial\,\omega}{\partial u_3} + \frac{\partial\, log\,\varphi}{\partial\, u_3}\right) = R\cot\omega\left(tg\,\omega\,\frac{\partial\,\omega}{\partial u_3} - \frac{\partial\, log\,\psi}{\partial\, u_3}\right)$$

e per ciò

$$tg\,\omega\,\frac{\partial\, log\,\varphi}{\partial\, u_3} + \cot\omega\,\frac{\partial\, log\,\psi}{\partial\, u_3} = 0.$$

Se non sussistessero le (3), da questa si ricaverebbe

$$(4)\qquad tg\omega = \frac{M\,(u_1,\, u_3)}{N\,(u_2,\, u_3)},$$

con M indipendente da u_2, N indipendente da u_1. Se consideriamo allora una qualunque superficie pseudosferica $u_3 = c$ e cangiamo i parametri u_1, u_2 rispettivamente in

$$\int \psi\,(u_1,\, c)\, du_1\,, \quad \int \varphi\,(u_2,\, c)\, du_2,$$

le (2) dànno per l'elemento lineare della $u_3 = c$

$$(5)\qquad ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2$$

e sarebbe per la (4)

$$(6)\qquad tg\,\omega = \frac{U\,(u_1)}{V\,(u_2)}\,,$$

con U funzione della sola u_1, V della sola u_2. Ma poichè l'elemento lineare (5) appartiene ad una superficie pseudosferica di raggio R, dovrà ω soddisfare all'equazione

$$(6^*)\qquad \frac{\partial^2\,\omega}{\partial\, u_1^2} - \frac{\partial^2\,\omega}{\partial\, u_2^2} = \frac{\operatorname{sen}\omega\,\cos\omega}{R^2}\,.$$

Se dimostriamo che, per la forma (6) di ω, questo è compatibile soltanto quando o la funzione U o la V si riduca ad una costante, ne seguirà che le u_3 = cost.te sono superficie di rotazione contro l'ipotesi.

Ma in effetto, indicando con apici le derivate, le (6), (6*) dànno

$$(a)\qquad \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V}\right)(U^2 + V^2) = \frac{U^2 + V^2}{R^2} + 2\,U'^2 + 2\,V'^2\,,$$

e quindi formando la derivata seconda di queste rapporto a u_1, u_2 avremo

$$\left(\frac{U''}{U}\right)' V V' + \left(\frac{V''}{V}\right)' U U' = 0,$$

da cui

$$\left(\frac{U''}{U}\right)' = k\, U U', \quad \left(\frac{V''}{V}\right)' = -k\, V V' \qquad (k \text{ costante}).$$

Integrando abbiamo successivamente

$$\frac{U''}{U} = \frac{k U^2}{2} + C, \quad \frac{V''}{V} = -\frac{k V^2}{2} + C',$$

$$2 U'^2 = \frac{k U^4}{2} + 2 C U^2 + C_1, \quad 2 V'^2 = -\frac{k V^4}{2} + 2 C' V^2 + C_1',$$

con C, C', C_1, C'_1 nuove costanti. Dopo di ciò la (*a*) diventa

$$\left(C' - C - \frac{1}{R^2}\right) U^2 + \left(C - C' - \frac{1}{R^2}\right) V^2 = C_1 + C'_1$$

e non può essere soddisfatta che riducendosi o la U o la V ad una costante, c. d. d.

Sussistono dunque le (3), e cangiando i parametri u_1, u_2 in $\int \psi\, du_1$, $\int \varphi du_2$ rispettivamente, avremo dalle (2), (3*):

$$H_1 = \cos\omega, \quad H_2 = \operatorname{sen}\omega, \quad H_3 = R\frac{\partial\omega}{\partial u_3}, \tag{7}$$

e quindi pel ds^2 la forma notevole

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2. \tag{7*}$$

§ 539.

Il sistema di equazioni a derivate parziali per ω.

La forma (7*) del ds^2 dello spazio, riferito ad un sistema triplo ortogonale pseudosferico, nella quale R è pensata come una data funzione di u_3, viene così a dipendere da un'unica funzione incognita $\omega = \omega(u_1, u_2, u_3)$. Ma

ora, affinchè il ds^2 appartenga allo spazio euclideo, occorre e basta che siano soddisfatte le *sei* equazioni di LAMÈ. Le due prime di queste, pel calcolo stesso sopra eseguito, sono identicamente soddisfatte, e le rimanenti *quattro* si traducono per ω nel seguente sistema di equazioni a derivate parziali del secondo e del terzo ordine.

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R^2} \\ \dfrac{\partial^3\omega}{\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3} = \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} - tg\,\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_2}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \dfrac{1}{R}\,\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) = -\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} - \dfrac{1}{R}\,\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\cos\omega}{R}\right). \end{cases}$$

Dobbiamo dunque esaminare se questo sistema possiede soluzioni, ed in quale arbitrarietà.

Compiamo la ricerca nel modo più semplice con una trasformazione delle variabili u_1, u_2 nelle nuove

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad v = \frac{1}{2}(u_1 - u_2),$$

e indicando per simmetria la terza variabile u_3 con w, la formola (7*) pel ds^2 diventa :

$$(8)\qquad ds^2 = du^2 + 2\cos\Omega\,du\,dv + dv^2 + \frac{R^2}{4}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

avendo posto $\Omega = 2\omega$; allora le equazioni differenziali (I) si mutano nel sistema seguente :

$$(I^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen}\Omega}{R^2} \\ \dfrac{\partial^3\Omega}{\partial u^2\,\partial w} = \cot\Omega\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial w} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial v\,\partial w} + \dfrac{1}{R^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^3\Omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \dfrac{\cos\Omega}{R^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} - 2\,\dfrac{R'}{R^3}\operatorname{sen}\Omega \qquad \left(R' = \dfrac{dR}{dw}\right) \\ \dfrac{\partial^3\Omega}{\partial v^2\,\partial w} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\,\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial w} + \cot\Omega\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\,\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial v\,\partial w} + \dfrac{1}{R^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}, \end{cases}$$

che si ottiene del resto direttamente esprimendo che il ds^2 dato dalla (8) appartiene allo spazio euclideo (per l'annullarsi dei simboli Riemanniani). Ora il sistema (I*) si riduce al primo ordine assumendo, oltre Ω, quali nuove funzioni incognite le *cinque* :

$$\Omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad \Omega_3 = \frac{\partial \Omega}{\partial w}; \quad \Theta_1 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial w}, \quad \Theta_2 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v \partial w}.$$

Allora il sistema assume la forma seguente, risoluta rispetto a tutte le derivate :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} = \Omega_1 & \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega_2 & , \quad \dfrac{\partial \Omega}{\partial w} = \Omega_3 \\ * & , \quad \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen} \Omega}{R^2} & , \quad \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial w} = \Theta_1 \\ \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial u} = \dfrac{\operatorname{sen} \Omega}{R^2} & * & , \quad \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial w} = \Theta_2 \\ \dfrac{\partial \Omega_3}{\partial u} = \Theta_1 & , \quad \dfrac{\partial \Omega_3}{\partial v} = \Theta_2 & * \\ \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial u} = \dfrac{\Omega_1}{\operatorname{sen} \Omega}(\Theta_1 \cos \Omega - \Theta_2) + \dfrac{\Omega_3}{R^2}, & \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \dfrac{\Omega_3 \cos \Omega}{R^2} - \dfrac{2R'}{R^3} \operatorname{sen} \Omega, & * \\ \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial u} = \dfrac{\Omega_3 \cos \Omega}{R^2} - \dfrac{2R'}{R^3} \operatorname{sen} \Omega, & \dfrac{\partial \Theta_2}{\partial v} = \dfrac{\Omega_2}{\operatorname{sen} \Omega}(\Theta_2 \cos \Omega - \Theta_1) + \dfrac{\Omega_3}{R^2} & * \end{cases}.$$

Verifichiamo subito che questo è un sistema A) di DARBOUX (§ 500), poichè per ciascuna derivata seconda mista principale i due valori che seguono dalle (II) sono eguali in virtù delle (II) stesse. (*) (I secondi membri sono funzioni finite continue e derivabili di Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Θ_1, Θ_2 ed è quindi applicabile il teorema di esistenza ed unicità del citato § 500. Siccome poi per la prima funzione incognita Ω tutte tre le variabili sono principali,

(*) Per le equazioni delle prime quattro linee nel quadro (II) questo è immediato. Per quelle delle ultime due formando p. e.

$$\psi = \frac{\partial}{\partial v}(\Omega_1 \Theta_1 \cot \Omega) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Omega_1 \Theta_2}{\operatorname{sen} \Omega}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial u}(\Omega_3 \cos \Omega) + \frac{2R'}{R^3}\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sen} \Omega) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial \Omega_3}{\partial v}$$

ed eseguendo le derivazioni colle (II) stesse si trova identicamente $\psi = 0$, e medesimamente per la condizione d'integrabilità dell'ultima linea.

per le ultime cinque due soltanto ciascuna e cioè

$$\begin{aligned} &v, w && \text{per la } \Omega_1 \\ &u, w && \text{per la } \Omega_2 \\ &u, v && \text{per } \Omega_3, \Theta_1, \Theta_2, \end{aligned}$$

l'arbitrarietà nella soluzione generale del sistema (II) si computa facilmente. Scelto un sistema iniziale di valori per le variabili indipendenti u, v, w, diciamo $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, noi possiamo dare ad arbitrio la costante $\Omega\,(0, 0, 0)$ e le cinque funzioni di una variabile ciascuna

$$\Omega_1\,(u, 0, 0),\ \Omega_2\,(0, v, 0),\ \Omega_3\,(0, 0, w),\ \Theta_1\,(0, 0, w)\ \Theta_2\,(0, 0, w).$$

Una di queste cinque funzioni arbitrarie è però soltanto apparente e dipende dall' arbitrarietà lasciata ancora al parametro w. Se adunque R è un'effettiva funzione di w, i nostri sistemi tripli ortogonali pseudosferici dipendono da *cinque* funzioni arbitrarie effettive, e da *quattro* soltanto quando R sia costante.

§ 540.

Interpretazione geometrica. - Elementi caratteristici.

Questi risultati, interpretati geometricamente, assumono la forma più espressiva seguente :

Esiste uno ed un solo sistema triplo ortogonale pseudosferico (u_1, u_2, u_3) *di cui siano dati gli elementi caratteristici seguenti* :

1.° *una superficie pseudosferica del sistema p. e. la* $u_3 = 0$.

2.° *una delle trajettorie ortogonali* (u_3) *della famiglia, sia la* $u_1 = u_2 = 0$.

3.° *la legge come varia il raggio* R *della superficie pseudosferica lungo questa curva.*

Le cinque funzioni arbitrarie da cui dipende il sistema sono evidentemente *a*) le *due* da cui dipende la superficie pseudosferica, *b*) le due funzioni arbitrarie da cui dipende la forma della trajettoria ortogonale $u_1 = u_2 = 0$, *c*) la funzione R arbitraria lungo questa trajettoria.

Per maggiore chiarezza della dimostrazione fissiamo il parametro w come arco della trajettoria ortogonale iniziale C ($u_1 = u_2 = 0$), contato a partire dal punto $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Dalla (7*) o dalla (8) conosceremo

per $u = v = 0$ $(u_1 = u_2 = v)$ la

$$\Omega_3 (0, 0, w) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial w}\right)_0 = \frac{2}{R}.$$

Ora, per la superficie pseudosferica iniziale $w = 0$, il dare i valori iniziali

$$\Omega_1 (u, 0, 0), \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} \quad \text{per} \quad v = w = 0$$

$$\Omega_1 (0, v, v), \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} \quad \text{per} \quad u = w = 0,$$

significa fissare (arbitrariamente) le due asintotiche $v = 0, u = 0$; e inversamente da questi dati iniziali è individuata la superficie pseudosferica.

Indicando poi con $\frac{1}{\rho_3}$, $\frac{1}{T_3}$ le due curvature della curva $u_1 = u_2 = 0$ queste sono date, secondo le formole del § 521, da

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_3^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2} \left\{ \dfrac{1}{\cos^2 \omega} \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3}\right)^2 \right\} \\ \dfrac{1}{T_3} = \dfrac{1}{R \dfrac{\partial \omega}{\partial u_3}} \dfrac{\partial \omega_3}{\partial u_3}, \quad tg\, \omega_3 = \dfrac{\beta_{13}}{\beta_{23}} = tg\, \omega \dfrac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3}}{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3}} \end{cases}$$

Mä si ha inizialmente per ipotesi $\frac{\partial \omega}{\partial u_3} = \frac{1}{R}$, e d'altronde

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} \right) = \frac{1}{4} (\Theta_1 + \Theta_2)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} \right) = \frac{1}{4} (\Theta_1 - \Theta_2) ;$$

quindi, fissando i valori iniziali di Θ_1, Θ_2 per $u = v = 0$, si viene a fissare, per le (9), la flessione e la torsione della curva C in funzione dell'arco w, e questa trajettoria ortogonale ne resta così fissata di forma. Inversamente, data la curva C e fissata l'orientazione della sua normalə principale nel punto iniziale (0, 0, 0) (tangente alla super-

ficie pseudosferica), si conosce il valore iniziale di ω_3 per $u = v = w = 0$, indi dal valore assegnato di $\frac{1}{T_3}$ in funzione di w, avendosi

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial w} = \frac{1}{T_3},$$

si conosce ω_3 $(0, 0, w)$, ossia Θ_1, Θ_2. In fine dall'espressione nota di $\frac{1}{\rho_3}$ per w vengono fissati i valori iniziali

$$\Theta_1 (0, 0, w), \Theta_2 (0, 0, w).$$

La proposizione geometrica enunciata risulta così stabilita.

§ 541.

Famiglie di Lamé con superficie a curvatura costante positiva.

Passiamo ora a considerare le famiglie di LAMÈ composte di superficie a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$, variabile in generale dall'una all'atra superficie della famiglia. Intendiamo escluse, come già si è detto sopra (§ 538), le famiglie di sfere e quelle di superficie di rotazione. Sia

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$$

l'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale supposto, nel quale le superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$ abbiano la curvatura $\frac{1}{R^2}$ dove R è una funzione della sola u_3. Procedendo come al § 538, osserveremo che avendosi

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial u_3}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{u_3},$$

ed essendo per ipotesi

$$\frac{1}{r_{31}} \cdot \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{R^2},$$

potremo porre, indicando con θ una funzione incognita:

$$\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \frac{\coth \theta}{R}, \quad \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{tgh\,\theta}{R}.$$

Con osservazioni del tutto analoghe a quelle del paragrafo citato, si troverà così per la forma del ds^2.

$$(10) \qquad ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

dove la funzione $\theta\,(u_1, u_2, n_3)$ deve soddisfare al seguente sistema di equazioni a derivate parziali che tiene qui il luogo delle (I) del caso pseudosferico.

$$(III) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} + \dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\theta}{R^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3} = tgh\,\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3} + \coth\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\cosh\theta}{R}\right) + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right) + \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = 0. \end{cases}$$

Inversamente ad ogni soluzione θ di questo sistema corrisponde un sistema triplo ortogonale (10) della specie richiesta.

Il sistema differenziale (III) con trasformazioni immaginarie si riconduce, come è facile intendere, al sistema (I) e la sua soluzione generale dipende, come nel caso pseudosferico, da cinque funzioni arbitrarie. Però dal punto di vista reale le sue proprietà sono ben differenti da quelle del sistema (I); Nel caso pseudosferico l'esistenza (e l'unicità) della soluzione corrispondente ai dati iniziali si stabiliva in grande generalità colle sole condizioni di continuità e derivabilità dei dati iniziali; nel caso attuale invece i dati iniziali debbono essere funzioni analitiche olomorfe e la soluzione individuata è essa pure analitica.

Osserviamo ora una proprietà che avvicina le famiglie di LAMÈ di superficie a curvatura costante (negativa o positiva) alle famiglie di sfere ed a quelle di quadriche confocali:

In ogni famiglia di LAMÈ *composta di superficie a curvatura costante, positiva o negativa, le trajettorie ortogonali della famiglia segnano sulle singole superficie una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati (le linee asintotiche).*

E infatti nel caso pseudosferico, avendo il ds^2 la forma (7*), i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale di una superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$ sono

$$D = \operatorname{sen}\omega\cos\omega,\ D' = 0,\quad D'' = -\operatorname{sen}\omega\cos\omega\ ,$$

e nel caso della forma (10) si ha

$$D = \operatorname{senh}\theta\cosh\theta,\quad D' = 0,\quad D'' = \operatorname{senh}\theta\cosh\theta;$$

in ambedue i casi i rapporti $D : D' : D''$ sono costanti, ciò che dimostra il teorema.

Naturalmente per le famiglie di LAMÈ di superficie di rotazione a curvatura costante la proprietà non sussiste più *in generale*; ma quelle particolari per cui ha luogo l'anzidetta proprietà rientrano nelle forme (7*) (10), del ds^2.

Osserviamo poi che nel caso pseudosferico la proprietà è già stata posta in rilievo dalla forma (8) del ds^2 in coordinate asintotiche (u, v), la quale dimostra di più che: *gli archi corrispondenti di asintotiche sono eguali.* Questo risulta anche dall'osservare che sulle superficie luogo delle asintotiche corrispondenti queste sono linee geodetiche, poichè il loro piano osculatore, tangente alla superficie pseudosferica, è normale alla detta superficie. Del resto la formola (8) dimostra anche subito la cosa poichè ponendovi p. e. $v = \text{cost.}^{te}$, ne viene

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \frac{R^2}{4}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right)^2 dw^2;$$

le superficie dei due sistemi $u = \text{cost.}^{te}$, $v = \text{cost.}^{te}$ hanno quindi ciascuna un sistema di geodetiche a torsione costante. (*)

§ 542.

Classi particolari di famiglie a curvatura costante.

Per quanto colle ricerche precedenti siano riusciti a stabilire l'esistenza e a fissare il grado di arbitrarietà delle nostre famiglie di LAMÈ, è chiaro che

(*) Le superficie qui indicate per incidenza vennero studiate direttamente nella tesi di abilitazione del FIBBI (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. X, 1888).

il problema della effettiva integrazione dei corrispondenti sistemi differenziali (I) o (III) è di sua natura ben complicato. Tanto più interessante è che anche qui possono applicarsi i metodi d'integrazione successiva, che già abbiamo costruito per le superficie a curvatura costante isolate, colle trasformazioni di BÄCKLUND e di RIBAUCOUR. Per questo è essenziale conoscere di tali famiglie iniziali più semplici, a cui i metodi di trasformazione possono applicarsi.

a) Cerchiamo di soddisfare alle equazioni (I) con una funzione ω indipendente da u_2. Si vede facilmente che le (I) si riducono all'unica

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{\cos^2 \omega}{R^2} = \text{cost.}^{\text{te}}.$$

Questa si integra per funzioni ellittiche di JACOBI, a modulo k variabile (funzione di u_3), colle formole

$$\cos \omega = \operatorname{sen}(\tau, k), \quad \operatorname{sen} \omega = cn(\tau, k),$$

avendo posto

$$\tau = \frac{u_1}{c} + \psi(u_3), \quad k = \frac{c}{R},$$

dove c indica una costante arbitraria e $\psi(u_3)$, $R(u_3)$ funzioni arbitrarie di u_3, onde

$$ds^2 = sn^2 \tau \, du_1^2 + cn^2 \tau \, du_2^2 + R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 .$$

Le superficie $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$ sono *pseudosferiche* di rotazione, e l'altro sistema di superficie di rotazione è quella delle $u_1 = \text{cost.}^{\text{te}}$.

Notevole è il caso in cui sia R assolutamente costante; allora queste superficie pseudosferiche sono identiche di forma, cioè congruenti per traslazione lungo l'asse. Le $u_1 = \text{cost.}^{\text{te}}$ sono alla loro volta superficie congruenti di rotazione a curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$. Si ha quindi il teorema (caso particolare di un teorema di BELTRAMI (*)): *Se al meridiano di una superficie a curvatura costante si dà un moto di traslazione lungo l'asse, le trajettorie ortogonali delle* ∞^1 *posizioni di*

(*) BELTRAMI opere Tomo I pagg. 199-207.

questa curva (congruenti fra loro) sono ancora i meridiani di superficie a curvatura costante eguale ed opposta alla precedente.

Consideriamo un sistema ∞^1 di elicoidi pseudosferiche del DINI (§ 132), col medesimo asse, ed aventi per profilo meridiano la medesima trattrice, ma differenti fra loro per il passo e quindi per la curvatura. Siccome le sfere coi centri sull'asse, e di raggio eguale al segmento costante di tangente alla trattrice intercetto fra il punto di contatto e l'asintoto, tagliano le elicoidi ortogonalmente (lungo linee di curvatura), risulta dal teorema di DARBOUX (DUPIN) che ai due sistemi ∞^1 di elicoidi e di sfere può associarsi un terzo sistema ortogonale ad ambedue, e si ha quindi un sistema triplo ortogonale pseudosferico. Ponendo per semplicità $= 1$ il segmento costante di tangente, si trova facilmente che il corrispondente sistema è definito dalle formole

$$\cos\omega = tgh\,\tau,\ \operatorname{sen}\omega = \frac{1}{\cosh\tau},$$

dove

$$\tau = u_1 + u_2\,tgh\,u_3 + \psi(u_3),\quad R = \cosh u_3,$$

essendo $\psi(u_3)$ una funzione arbitraria di u_3.

c) Si è già visto (§ 527) che *qualunque* elicoide a curvatura costante, per rotazione attorno all' asse (o traslazione lungo l' asse), genera una famiglia di LAMÈ. Le superficie delle altre due serie sono egualmente elicoidi congruenti a curvatura costante (Cf. più oltre (549).

d) Ancora prendiamo una qualunque superficie d'ENNEPER a curvatura costante (I § 251 s. s.).

Le sue linee di curvatura di un sistema sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie e coi centri sull'asse. Ne segue che se facciamo rotare la superficie d'ENNEPER attorno all'asse, essa taglierà, in tutte le sue posizioni, ortogonalmente il detto sistema di sfere, e per ciò: *Ogni superficie d'*ENNEPER *a curvatura costante genera, per rotazione attorno all'asse, una famiglia di* LAMÉ *della nostra specie.*

§ 543.

La trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.

Venendo ora alla indicata teoria delle trasformazioni per le famiglie di LAMÈ a curvatura costante, cominciamo anche qui dalle trasforma-

zioni *reali* di BÄCKLUND, applicate alle famiglie pseudosferiche di LAMÈ. Supponiamo dunque di avere un qualunque sistema triplo ortogonale pseudosferico (u_1, u_2, u_3), che dia all'elemento lineare dello spazio la forma caratteristica (7*) pag. 736

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

soddisfacendo ω alle equazioni (I) pag. 737. A ciascuna superficie pseudosferica $u_3 =$ cost.te applichiamo una trasformazione semplice di BÄCKLUND (Cap. XVI). Indichiamo con k la distanza costante (funzione di u_3) dei fuochi nella corrispondente congruenza pseudosferica, e con σ il complemento dell'angolo dei piani focali, sicchè

$$k = R\cos\sigma, \tag{11}$$

dove anche σ sarà, come R, funzione di u_3.

Si indichi poi con φ l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza sopra le linee di curvatura $u_2 =$ cost.te. Le formole del § 260 (Vol. I, pag. 718) per la trasformazione di BÄCKLUND diventano nelle nuove notazioni : (*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{k} . \end{cases} \tag{12}$$

Prendiamo una determinata soluzione $\varphi(u_1\, u_2, u_3)$ di queste equazioni e domandiamo :

A quali ulteriori condizioni dovremo assoggettare la funzione $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ *affinchè le* ∞^1 *superficie pseudosferiche trasformate abbiano per trajettorie ortogonali le nuove curve* (u_3) ?

Ammmessa tale possibilità, basta ricordare che la trasformazione di BÄCKLUND conserva le linee di curvatura per concluderne che le superficie pseudesferiche trasformate (le loro trajettorie ortogonali segnando una corrispondenza che conserva le linee di curvatura) formeranno una nuova famiglia di LAMÈ.

(*) Evidentemente pel confronto colle notazioni attuali bisogna porre $\omega = 0$, $u_1 = R\,u$, $u_2\ R\,v$.

Si cominci intanto dall' osservare che l'ultima condizione imposta porta che due trajettorie ortogonali (u_3) corrispondenti nelle due famiglie taglino ad angolo retto i segmenti $= k$, che ne congiungono i punti corrispondenti, e per ciò intanto: *il segmento k deve essere assolutamente costante.*

Ora, per preparare le formole necessarie pei calcoli seguenti, cominciamo dallo scrivere i valori delle rotazioni β_{ik} nel sistema triplo pseudosferico iniziale (7*) che sono date dal quadro :

$$(13)\qquad \begin{cases} \beta_{12} = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}\,, \quad \beta_{21} = -\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2} \\ \beta_{13} = \dfrac{R}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\,, \quad \beta_{31} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R} \\ \beta_{23} = \dfrac{R}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\,, \quad \beta_{32} = \dfrac{\cos\omega}{R}\,. \end{cases}$$

E scriviamo altresì le formole per le derivate dei coseni delle direzioni principali :

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}X_2 + \dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R}X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}X_2\,, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}X_1\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}X_1 - \dfrac{\cos\omega}{R}X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R}X_1, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega}{R}X_2, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u_3} = -\dfrac{R}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}X_1 - \dfrac{R}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}X_2. \end{cases}$$

§ 544.

L'equazione a differenziali totali per la funzione φ.

Ciò premesso, indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto P dello spazio, riferito al sistema triplo primitivo, con x', y', z' quelle del punto P′ corrispondente a P per la trasformazione ; avremo

$$(15)\qquad x' = x + k\,(\cos\varphi\,.\,X_1 + \operatorname{sen}\varphi\,X_2)$$

e formole analoghe per y', z'. Derivando col tener conto delle (12) e (14) si trova :

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u_1} = \cos\varphi \left\{ (\cos\omega\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi)X_1 + (\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi)X_2 + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega X_3 \right\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\varphi \left\{ (\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi)X_1 + (\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\cos\varphi)X_2 - \cos\sigma\cos\omega X_3 \right\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_3} = -k\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}X_1 + k\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}X_2 + R\left(\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \dfrac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)X_3 . \end{cases}$$

Ne segue:

$$S\frac{\partial x'}{\partial u_1}\frac{\partial x'}{\partial u_2} = 0$$

$$S\frac{\partial x'}{\partial u_1}\frac{\partial x'}{\partial u_3} = k\cos\varphi\operatorname{sen}\omega\left\{\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right\}$$

$$S\frac{\partial x'}{\partial u_2}\frac{\partial x'}{\partial u_3} = -k\operatorname{sen}\varphi\cos\omega\left\{\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right\},$$

e siccome, per la nostra ipotesi, le nuove curve (u_3) devono essere trajettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche trasformate, dovranno annullarsi anche le due ultime somme. È dunque necessario e sufficiente che la funzione φ soddisfi all'ulteriore condizione

$$(17)\qquad \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3} = 0 ,$$

la cui compatibilità colle (12) resta da esaminarsi. Se per un momento l'ammettiamo, le (16) dànno subito, per l'elemento lineare dello spazio riferito al nuovo sistema triplo ortogonale (a causa della (17) e della (11):

$$(18)\qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \cos^2\varphi\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

che ha la forma stessa (7*), sostituito all'angolo ω l'angolo φ.

Ora dunque tutto si riduce a provare che la funzione incognita φ può determinarsi in guisa da soddisfare insieme le (12) e la (17), cioè l'equazione ai differenziali totali:

$$(\mathrm{IV})\quad d\varphi = \left(\frac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right)du_1 - \left(\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{k} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1}\right)du^2 -$$

$$- \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)du_3 .$$

Ma se si calcolano effettivamente le relative condizioni d'integrabilità, tenendo conto delle equazioni fondamentali (I) pag. 737 e della relazione (11) $\cos\sigma = \frac{k}{R}$, si verifica facilmente che esse sono *identicamente* soddisfatte. Dunque la (IV) è *illimitatamente* integrabile, e per ciò, fissata ad arbitrio la costante k, la (IV) ammette una soluzione generale contenente una nuova costante arbitraria C. Per fissare il valore di C basta fissare (ad abitrio) la trasformata di BÄCKLUND di *una* superficie pseudosferica iniziale, cioè la direzione di *uno* dei segmenti k normale ad una curva (u_3). Ne concludiamo :

Ad ogni famiglia di LAMÈ *composta di superficie pseudosferiche si può applicare, come alle superficie pseudosferiche isolate, la trasformazione di* BÄCKLUND. *Per fissare la famiglia trasformata basta dare, ad arbitrio, di una delle superficie la trasformata di* BÄCKLUND. *Così da ogni tale famiglia nota di* LAMÈ *derivano, per trasformazione di* BÄCKLUND, ∞^2 *nuove famiglie trasformate.*

La ricerca di queste famiglie trasformate dipende dall'integrazione dell'equazione (IV) ai differenziali totali, la quale al solito, nella incognita $\Lambda = tg\frac{\varphi}{2}$, prenderà la forma di RICCATI. Basterà quindi conoscere una particolare famiglia trasformata e con quadrature si avranno tutte le altre corrispondenti allo stesso valore della costante k ; successivamente l'applicazione ripetuta del processo di trasformazione richiederà solo nuove quadrature.

§ 545.

Il teorema di permutabilità.

Come nel caso delle superficie pseudosferiche e come in tante altre teorie svolte nel presente trattato, il metodo sopra esposto per *l'integrazione successiva* del sistema (I) riceve un'importante semplificazione ricorrendo al *teorema di permutabilità*, che vedremo subito essere applicabile alle attuali famiglie di LAMÈ.

Per questo, con un leggiero cambiamento nelle notazioni del Cap. XVI, usiamo nuovamente il simbolo B_k per la trasformazione di BÄCKLUND applicata ad una famiglia pseudosferica (Σ) di LAMÈ quando la distanza costante fra un punto qualunque P e il corrispondente P′ della superficie trasformata Σ' sia $= k$. Dimostriamo che sussiste il teorema di permutabilità :

Se (Σ') , (Σ'') *sono due famiglie pseudo-sferiche di Lamè legate alla medesima* (Σ) *da due trasformazioni di* BÄCKLUND B_k, $B_{k'}$ *esiste una quarta famiglia pseudo-sferica* (Σ'''), *perfettamente determinata, che è legata rispettivamente a* (Σ') , (Σ'') *da due trasformazioni di* BÄCKLUND *colle costanti invertite* k' , k.

Il teorema si riconduce a quello per le superficie pseudosferiche isolate colle considerazioni seguenti. Siano Σ, Σ', Σ'' tre superficie pseudosferiche corrispondenti nelle tre famiglie (Σ), (Σ'), (Σ''), e sia Σ''' la quarta superficie pseudosferica, perfettamente determinata e deducibile in termini finiti, che completa la quaderna $(\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma''')$ dell'ordinario teorema di permutabilità § 269. Proviamo che Σ''' percorre alla sua volta una quarta famiglia (Σ''') di LAMÈ E infatti se P, P', P'', P''', sono quattro punti corrispondenti di Σ Σ', Σ'', Σ''', e facciamo descrivere a P una delle curve C, trajettorie ortogonali della famiglia (Σ), i punti P', P'' descriveranno rispettivamente, per le proprietà della trasformazione, due curve, corrispondenti C', C'' trajettorie ortogonali delle rispettive famiglie (Σ'), (Σ''). Indicando con C''' la curva descritta da P''', siccome i segmenti P' P''', P'' P''' sono ambedue costanti (eguali a k', k) e normali rispettivamente a C', C'' essi saranno normali in P''' alla curva C''' ; ma questi due segmenti sono tangenti a Σ''' in P''' e per ciò: *le curve* C''' *sono trajettorie ortgonali della famiglia* (Σ'''). Se in fine si considera che la trasformazione di BÄCKLUND conserva la linee di curvatura, è chiaro che le C''' segnano sulle superficie Σ''' una corrispondenza che conserva le linee di curvatura (come anche i sisitemi coniugati); dunque la (Σ''') è una famiglia di LAMÈ, c. d. d.

Ed ora osserviamo che se i tre sistemi tripli ortogonali pseudosferici (Σ), (Σ'), $\Sigma'')$ sono definiti dalle formole

$$\Sigma) \qquad ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

$$\Sigma') \qquad ds'^2 = \cos^2\omega'\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega'\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega'}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

$$\Sigma'') \qquad ds''^2 = \cos^2\omega''\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega''\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega''}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

il quarto sistema (Σ'') pel quale indichiamo con ω''' il corrispondente valore di ω si otterrà con operazioni algebriche dalla formole (III*) Vol. I pag. 737 del

teorema di permutabilità

$$(19) \qquad tg\left(\frac{\omega''' - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma+\sigma'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\sigma'}{2}\right)} tg\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right),$$

dove

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}, \quad \cos\sigma' = \frac{k'}{R}.$$

Applicando anche qui le considerazioni del § 268 otteniamo l'importante conseguenza :

Se di una famiglia pseudosferica di LAMÉ *si conoscono tutte le* ∞^2 *famiglie contigue per trasformazione di* BÄCKLUND, *per ciascuna di queste ultime si potranno determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione tutte le nuove famiglie derivate.*

Come esempio semplice di sistemi pesudosferici nelle condizioni precedenti citiamo quello delle famiglie di elicoidi del DINI considerate in *b*) § 542.

Senza compiere i calcoli relativi ci limitiamo qui a constatarlo nel modo seguente. Il sistema fondamentale (I) pag. 737 ammette la soluzione evidente $\omega = 0$, alla quale possiamo applicare la trasformazione di BÄCKLUND B_k. Ma in questo caso si vede subito che basta soddisfare con φ alle due equazioni (12) cioè

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{k}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{k},$$

poichè da queste risultano come conseguenze differenziali le equazioni (I) per φ. Le precedenti integrate dànno

$$lg\ tg\frac{\varphi}{2} = \frac{u_1 - \operatorname{sen}\sigma\,.\,u_2}{k} + \psi(u_3),$$

con $\psi(u_3)$ funzione arbitraria di u_3 e basta fare in queste

$$k = 1, \quad \operatorname{sen}\sigma = -tgh\ u_3$$

per ritrovare le formole pei sistemi di elicoidi del DINI a pag. 745. Si vede dunque che della soluzione $\omega = 0$ delle (I) conosciamo tutte le trasformate di BÄCKLUND e si può quindi applicare il processo di integrazione

successiva illimitata. Così riconosciamo l'esistenza di un gruppo infinito di famiglie pseudosferiche di LAMÈ dipendenti da funzioni ordinarie (Cf. I § 270).

§ 546.

Caso particolare dei sistemi di Weingarten.

Fino ad ora abbiamo considerato il caso generale in cui le superficie della famiglia di LAMÈ sono, individualmente considerate, a curvatura costante, ma questa curvatura K è variabile dall'una all'altra superficie della famiglia. Veniamo ora a trattare particolarmente del caso notevole in cui la curvatura K è una *costante assoluta.*

Fu WEINGARTEN il primo a riconoscere l' esistenza di questi sistemi (*) mediante considerazioni infinitesimali che davano il passaggio da una superficie iniziale ad una *infinitamente vicina* colla stessa curvatura costante, in guisa che la distanza normale infinitesima fra le due superficie soddisfi all'equazione del CAYLEY. Diremo per ciò questi sistemi: *sistemi di* WEINGARTEN.

Per ricercare le proprietà speciali di questi sistemi porremo per semplicità per la curvatura comune K delle superficie $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$, il valore $K = 1$. Cominciando dal caso pseudosferico dovremo porre nelle (I) pag. 737 $R = 1$. e ne verrà per la funzione incognita ω il sistema

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial \omega}{\partial u^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega \\ \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial u_1\, \partial u_2\, \partial u_3} = \cot\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} - tg\,\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = \cos\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_3} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} \dfrac{\partial \omega}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = \operatorname{sen}\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_3} - \dfrac{1}{\cos\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} \dfrac{\partial \omega}{\partial u_1}, \end{cases}$$

alle quali aggiungeremo, per comodità dei calcoli seguenti, queste altre due forme della seconda delle (20):

(*) In una lettera dell'ottobre 1884 all'autore. Cf. le note dell'A. nei Rendiconti dei Lincei 1885 e la memoria: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di* WEINGARTEN Annali di matematica Serie II. T. XIII. (1885).

$$(20^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) = -\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} \end{cases} (*).$$

Ora, essendo

$$(21)\qquad ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

consideriamo l'espressione

$$(22)\qquad \Omega = \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2,$$

ovvero

$$(22^*)\qquad \Omega = \beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 - H_3^2.$$

Se deriviamo Ω rapporto ad u_1, u_2, applicando le (20), (20*), troviamo identicamente

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial u_2} = 0\,,$$

e per ciò

$$\Omega = \mathrm{F}(u_3) \qquad \text{(funzione di } u_3\text{)}.$$

Ora osserviamo che, cangiando il parametro u_3, ciò che non fa variare la forma (21) del ds^2, si può rendere $\mathrm{F}(u_3)$ costante, e questa costante potrà modificarsi di un fattore arbitrario positivo. Così le equazioni fondamentali (20) traggono seco (disponendo del parametro u_3) le due del secondo ordine

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 = \mathrm{C} \quad \text{(costante)}. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che inversamente dalle (A) seguono le (20), e per ciò le (A) caratterizzano i sistemi pseudosferici di WEINGARTEN. Anzi dimo-

(*) A causa dei valori (13) delle rotazioni, queste sono le equazioni

$$\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13}\,, \qquad \frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\beta_{23}$$

striamo di più che se in un sistema triplo ortogonale (di cui non facciano parte sviluppabili) sussiste la relazione

$$\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 - H_3^2 = F(u_3) \tag{23}$$

le superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$ sono pseudosferiche di raggio $= 1$. (*) Derivando le (23) rapporto ad u_1, u_2, tenendo conto delle equazioni fondamentali (I), (II) § 499 pag. 623 troviamo

$$\beta_{13}\left\{\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{21}\,\beta_{23} - H_1\,H_3\right\} = 0$$

$$\beta_{23}\left\{\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2} + \beta_{12}\,\beta_{13} - H_2\,H_3\right\} = 0,$$

e siccome le rotazioni β_{13}, β_{23} non debbono annullarsi (altrimenti comparirebbero sviluppabili nel sistema) avremo

$$\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1} = H_1\,H_3 - \beta_{23}\,\beta_{21}\,,\quad \frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2} = H_2\,H_3 - \beta_{13}\,\beta_{12}$$

e dalle citate equazioni a pag. 623

$$\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_3} = -\,H_1\,H_3\,,\quad \frac{\partial\beta_{32}}{\partial u_3} = -\,H_2\,H_3.$$

Ora se confrontiamo p. e. la prima di queste ultime due colla

$$\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\,\beta_{21}$$

e costruiamo la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_3}\right) = \frac{\partial}{\partial u_3}(\beta_{32}\,\beta_{21}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(H_1\,H_3) = 0$$

facendo uso delle precedenti, troviamo

$$\beta_{23}(H_1\,H_2 + \beta_{31}\,\beta_{32}) = 0,$$

(*) Nel caso di superficie pseudosferiche di raggio R alla (23) si sostituisce l'altra

$$R^2(\beta_{23}^2 + \beta_{13}^2) - H_3^2 = F(u_3)$$

ossia

$$\frac{\beta_{31}\,\beta_{32}}{H_1 H_2} = -1.$$

Ma il primo membro rappresenta la curvatura delle superficie $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$, che è dunque $= -1$, c. d. d.

In modo perfettamente analogo si tratta il caso dei sistemi di WEINGARTEN a curvatura positiva, ove il ds^2 prende la forma (10) pag. 742 con $R = 1$.

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2. \tag{24}$$

In virtù delle equazioni (III), ove $R = 1$, si trova che l'espressione

$$\Omega = \left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2$$

è una funzione di u_3, necessariamente positiva, che possiamo dunque fare $= 1$ disponendo del parametro u_3. Così pei sistemi di WEINGARTEN a curvatura positiva $= 1$, la funzione θ nella (24) dovrà soddisfare al sistema di secondo ordine:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 \\ \left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

E in modo simile al caso precedente si proverà che la seconda equazione, ossia la

$$\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 + H_3^2 = F(u_3),$$

basta già a caratterizzare questi sistemi, escluso che nel sistema si abbiano serie di sviluppabili.

§ 547.

Le linee di equidistanza nei sistemi di Weingarten.

In un sistema di WEINGARTEN si consideri una qualunque superficie $u_3 = \text{cost}^{\text{te}}$ della serie a curvatura costante e sopra di essa le linee di equidistanza (§ 522) $H_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$ Dimostriamo che sussiste il

teorema: *In ogni sistema di* WEINGARTEN *le linee di equidistanza sulle superficie a curvatura costante sono circoli geodetici paralleli.*

Prendiamo dapprima il caso pseudosferico, ove la distanza normale infinitesima $\varepsilon\,\psi$ fra due superficie pseudosferiche successive è data da

$$\psi = \frac{\partial\,\omega}{\partial\,u_3}.$$

La seconda delle (A) si scrive quindi

$$\Delta_1\,\psi = \psi^2 + C, \tag{25}$$

essendo $\Delta_1\,\psi$ il parametro differenziale primo di ψ rispetto al

$$ds^2 = \cos^2\omega\,du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\,du_2^2$$

della $u_3 = \text{cost.}^{te}$ La (25) ci dimostra intanto che le linee di equidistanza $\psi = \text{cost.}^{te}$ sono *geodeticamente parallele.* Calcoliamo ora, colla formola di BONNET (I pag. 269), la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\psi}$, di queste linee di equidistanza:

$$\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{\Delta_1\,\psi}}\cdot\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\,\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\,u_2}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{\Delta_1\,\psi}}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\,\psi}{\partial u_2}\right)\right\}.$$

Se si tien conto delle formole

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_1}\right) = \psi\cos\omega + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_2}\right) = \psi\operatorname{sen}\omega - \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_1}, \end{cases}$$

che seguono dalle (20) e delle altre

$$\frac{\partial\,\Delta_1\psi}{\partial\,u_1} = 2\,\psi\frac{\partial\,\psi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial\,\Delta_1\psi}{\partial\,u_2} = 2\,\psi\frac{\partial\,\psi}{\partial u_2},$$

conseguenze della (25), otteniamo

$$\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\Delta_1\,\psi}} = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + C}}. \tag{26}$$

Dunque le linee di equidistanza $\psi = \text{cost.}^{te}$, oltre che essere geodeticamente parallele, hanno anche curvatura geodetica costante, e per ciò sono circoli geodetici paralleli c. d. d.

Del tutto analoga è la dimostrazione pel caso della curvatura positiva. Valendo allora le formole (B), ed essendo

$$\psi = \frac{\partial \Theta}{\partial u_3}, \quad \Delta_1 \psi = 1 - \psi^2,$$

alla formola (25) si sostituisce l'altra

$$\frac{1}{\rho_\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}. \tag{25*}$$

Dal teorema dimostrato segue poi che: *Se un sistema di* WEINGARTEN *è noto, le linee geodetiche delle superficie della serie a curvatura costante si ottengono con quadrature.*

Infatti su queste superficie, nelle linee di equidistanza, conosciamo un sistema geodeticamente parallelo appartenente colle trajettorie ortogonali ad un sistema isotermo e con una quadratura, pel teorema di LIE (I pag. 131), si hanno le geodetiche ortogonali.

Così p. e. se ricordiamo (§ 542) che ogni superficie d' ENNEPER a curvatura costante genera, per rotazione attorno all'asse, una famiglia di LAMÉ, ne deduciamo : *Sulle superficie* d' ENNEPER *a curvatura costante le linee geodetiche si ottengono con quadrature.*

§ 548.

I sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante.

Consideriamo in particolare i sistemi *pseudosferici* di WEINGARTEN che conviene distinguere in tre specie secondo che nella (26) la costante C è positiva, negativa o nulla. Possiamo fare corrispondentemente

$$C = 1, \quad C = -1, \quad C = 0$$

e dalla (26) risulta ordinatamente

$$\frac{1}{\rho_\psi} < 1, \quad \frac{1}{\rho_\psi} > 1, \quad \frac{1}{\rho_\psi} = 1.$$

D' altra parte la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ delle trajettorie ortogonali (u_3) delle superficie pseudosferiche è data, secondo la (8) § 522, da

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{\sqrt{\Delta_1 \psi}}{\psi} = \rho_\psi \tag{27}$$

e si ha quindi rispettivamente nei tre casi

$$\frac{1}{\rho_3} > 1 \,, \quad \frac{1}{\rho_3} < 1 \,, \quad \frac{1}{\rho_3} = 1.$$

Diremo $\frac{1}{\rho_3}$ la *flessione* del sistema di WEINGARTEN, ed avremo quindi tre specie di questi sistemi secondo che la flessione sarà > 1, < 1 o $= 1$. Nel primo caso i circoli di equidistanza saranno a centro ideale (paralleli geodeticamente ad una medesima geodetica), nel secondo avranno centro reale a distanza finita, e nel terzo infine saranno *oricicli paralleli.*

Quest'ultimo caso è il più notevole. Basta che *una* delle curve (u_3) sia a flessione costante $= 1$ (ciò che pel teorema d'esistenza al § 540 possiamo sempre prescrivere) ed allora sopra una superficie pseudosferica del sistema, per le (26), (27), le linee di equidistanza sono oricicli paralleli e in conseguenza tutte le altre curve (u_3) sono a flessione costante $= 1$.

Diremo che in questo caso il sistema di WEINGARTEN è a *flessione costante.* Dal teorema generale al § 540 è manifesto che: *Date ad arbitrio una superficie pseudosferica* S *di raggio* R, *ed una curva* C *a flessione costante* $= \frac{1}{R}$ *uscente da un punto di* S *ortogonalmente alla superficie, è individuato un sistema di* WEINGARTEN *a flessione costante* $\frac{1}{R}$, *che contiene nella famiglia psudosferica la superficie* S *e fra le trajettorie ortogonali la curva* C. Come si vede, questi particolari sistemi dipendono da *tre* funzioni arbitrarie.

Nel caso di questi sistemi, essendo nulla la costante C delle formole (A), queste diventano:

$$\text{(A*)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega \\ \left(\dfrac{1}{\cos \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} \right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} \right)^2 = \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial u_3} \right)^2 . \end{cases}$$

Se ora indichiamo con θ l'angolo che la direzione positiva della normale principale alla curva (u_3) forma sulla superficie pseudosferica colla linea $u_2 = \text{cost.}^{te}$, abbiamo dalle formole al § 521

$$\cos\theta = -\frac{\rho_3}{r_{13}} = -\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\rho_3}{r_{23}} = -\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2},$$

ed al sistema (A*) può quindi sostituirsi l'altro equivalente:

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1 \partial u_3} = -\cos\theta\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2 \partial u_3} = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}. \end{cases}$$

Le formole (I), che seguono da queste, dànno allora

$$(28)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\omega}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega, \quad \frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\cos\theta\operatorname{sen}\omega,$$

e da queste eliminando ω risulta

$$(29)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

D'altronde, derivando le (28) rapporto a u_3, abbiamo

$$(30)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3} = \cos\theta\cos\omega\frac{\partial\theta}{\partial u_3}, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega\frac{\partial\theta}{\partial u_3},$$

e quindi anche

$$(31)\qquad \left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2.$$

Dalle (29), (31) si vede che θ soddisfa al medesimo sistema (A*), e perciò al primo sistema di WEINGARTEN a flessione costante se ne associa

un secondo corrispondente alla formola

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 .$$

I sistemi di WEINGARTEN a flessione costante si presentano quindi sempre associati in coppie, circostanza il cui significato geometrico apparirà più avanti (D § 551).

Fra i sistemi di WEINGARTEN a flessione costante i più semplici sono i sistemi ciclici di RIBAUCOUR a raggio costante, che ci sono già noti dal § 257. Le formole relative a questo caso particolare si ottengono dalle superiori nel modo seguente. La torsione $\frac{1}{T_3}$ delle curve (u_3) nel sistema di WEINGARTEN a flessione costante individuato dalle (C) è data, per la formola finale del § 521, da

$$\frac{1}{T_3} = \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}},$$

e per ciò, se θ è indipendente da u_3, sarà $\frac{1}{T_3} = 0$ e le curve (u_3) saranno tutte circoli di raggio $= 1$.

Per ottenere questi sistemi ciclici basta dunque partire da una superficie pseudosferica arbitraria S di raggio $= 1$, il cui ds^2 riferito alle linee di curvatura sia

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, du_2^2 ,$$

e determinando ω dal sistema completamente integrabile

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta}{\partial u_2} = -\cos\theta\operatorname{sen}\omega , \quad \frac{\partial\omega}{\partial u_2} + \frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega ,$$

basta prendere per terza variabile u_3 la costante arbitraria che entra in ω. Il sistema ciclico di RIBAUCOUR sarà definito da

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

e le superficie pseudosferiche $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$ di questo sistema saranno le

∞^1 *complementari* della S. Si osservi ancora che dalle (30), confrontate colle due ultime (C), risulta in generale

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_3}\frac{\partial \omega}{\partial u_3} = F(u_3) \quad \text{(funzione di } u_3\text{)},$$

onde segue che se per un sistema particolare di valori di u_1, u_2 è $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$, sarà sempre $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$, e le (u_3) saranno circoli. Dunque: *Se in un sistema di* WEINGARTEN *a flessione costante* $= 1$ *una delle trajettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche è un circolo di raggio* $= 1$, *tutte le altre sono circoli dallo stesso raggio.* (*)

In fine osserviamo il teorema che caratterizza i sistemi di WEINGARTEN a flessione costante:

Se in una famiglia di LAMÈ *le trajettorie ortogonali sono curve colla medesima flessione costante (non piane) le superficie della famiglia sono pseudosferiche di egual raggio.*

E infatti se si suppone questa flessione p. e $= 1$, si avrà

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{H_3^2}(\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2) = 1,$$

onde essendo

$$\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 - H_3^2 = 0$$

valgono le conclusioni del § 546.

§ 549.

Sistema triplo ortogonale di Weingarten composto di elicoidi.

Si è già visto, al § 527, che qualunque elicoide a curvatura costante genera, per rotazione attorno all'asse, una famiglia di LAMÈ (Cf. § 542) ed ora vogliamo trovare le semplici formole relative a questi sistemi di WEINGARTEN che sono composti, come si vedrà, di tre serie di elicoidi, coassiali, tutti a curvatura costante e congruenti in ciascuna serie.

(*) Questa proprietà segue anche dal teorema di unicità sopra dimostrato.

Per questo cerchiamo di soddisfare alle equazioni (A) pag. 753 con una funzione ω che sia funzione di una combinazione lineare

$$\tau = au_1 + b\,u_2 + u_3 \quad (a,\ b \text{ costanti})$$

delle variabili u_1, u_2, u_3. (*) Ponendo

$$\omega = f(\tau),$$

la prima delle (A) ci dà:

$$f'' = \frac{\operatorname{sen} f \cos f}{a^2 - b^2},$$

da cui integrando

$$f'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 f}{a^2 - b^2} + C' \qquad (C' \text{ costante}),$$

e la seconda delle (A) sarà pure soddisfatta prendendo

$$C = \frac{b^2}{(a^2 - b^2)^2} - C'.$$

Facciamo $C' = 1$ e supposto $b > a$ avremo

$$\tau = \int \frac{df}{\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 f}{b^2 - a^2}}},$$

indi

$$\operatorname{sen}\omega = sn(\tau, k), \quad \cos\omega = cn(\tau, k), \quad k = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Per l'elemento lineare dello spazio risulterà la formola notevole

$$ds^2 = cn^2\,\tau\, du_1^2 + sn^2\,\tau\, du_2^2 + dn^2\,\tau\, du_3^2 \tag{32}$$

$$\tau = au_1 + bu_2 + u_3,$$

le costanti a, b essendo legate al modulo k delle funzioni ellittiche di JACOBI

(*) Il seguito del calcolo proverà che si arriva al medesimo sistema colla ricerca analoga sulle (B) pag. 755.

dalla relazione

$$b^2 - a^2 = \frac{1}{k^2}. \tag{33}$$

Calcolando le curvature principali delle superficie delle tre serie, dalle formole del § 521, troviamo :

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{12}} = a\frac{dn\tau}{sn\tau}, \quad \frac{1}{r_{23}} = -bk^2\frac{cn\tau}{dn\tau}, \quad \frac{1}{r_{31}} = -\frac{sn\tau}{cn\tau} \\ \frac{1}{r_{13}} = -ak^2\frac{sn\tau}{dn\tau}, \quad \frac{1}{r_{21}} = -b\frac{dn\tau}{cn\tau}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{cn\tau}{sn\tau}, \end{cases} \tag{34}$$

e quindi per le rispettive curvature K_1, K_2, K_3 delle superficie $u_1 =$ cost.te, $u_2 =$ cost.te, $u_3 =$ cost.te :

$$K_1 = -a^2k^2, \quad K_2 = k^2b^2, \quad K_3 = -1,$$

con

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0.$$

Come si vede in questo sistema di WEINGARTEN tutte tre le famiglie di superficie sono a curvatura costante, due negative e la terza positiva. Di più siccome per ciascuna superficie della famiglia tanto i coefficienti della prima quanto quelli della seconda forma fondamentale sono funzioni di una combinazione lineare delle variabili, risulta che le superficie di ciascuna famiglia sono elicoidi congruenti fra loro. Le equazioni in termini finiti dell'attuale sistema triplo si ottengono per funzioni ellittiche, (*) e si vede che i tre sistemi di elicoidi hanno il medesimo asse. Come già si è detto, *qualunque* elicoide a curvatura costante dà luogo ad un tale sistema triplo elicoidale, la qual cosa risulta anche del resto dal confronto della formola (32) con quelle ottenute al § 250 per le elicoidi a curvatura costante.

Particolarizzando i valori delle costanti a, b, si può anche fare in modo che il sistema riesca a flessione costante. Per questo, siccome qui abbiamo

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2} = 1 + \frac{b^2k^4 - 1}{dn^2\tau},$$

basta prendere

$$b = \frac{1}{k^2}, \quad a = \frac{k'}{k^2}$$

(*) Cf. la memoria dell'A. citata a pag. 705.

perchè risulti $\frac{1}{\rho_3} = 1$. Il sistema è a flessione costante ma *non ciclico*, perchè le curve (u_3) hanno la torsione non nulla

$$\frac{1}{T_3} = \frac{k'}{dn^2\tau}.$$

È manifesto che per ottenere un tale sistema elicoidale a flessione costante basta scegliere un elicoide pseudosferico iniziale le cui eliche siano oriclici.

Notevole è ancora il caso particolare in cui nelle formole (32), (34) il modulo k delle funzioni ellittiche raggiunga il limite estremo *1*, con che le funzioni ellittiche degenerano in iperboliche e si ha

$$ds^2 = tgh^2\tau\, du_2^2 + \frac{1}{\cosh^2\tau}(du_1^2 + du_3^2).$$

Le superficie $u_1 = \text{cost.}^{te}$, $u_3 = \text{cost.}^{te}$ sono allora elicoidi del DINI congruenti in ciascuna serie e coassiali, mentre le $u_2 = \text{cost.}^{te}$ sono sfere di raggio costante $= \frac{1}{b}$ coi centri sull'asse.

In fine, rispetto alla forma (32) del ds^2 euclideo, osserveremo che se si considera in generale un ds^2 della forma

$$(35)\quad ds^2 = A^2 cn^2(u+v+w)\,du^2 + B^2 s n^2(u+v+w)\,dv^2 + C^2\, dn^2(u+v+w)\,dw^2,$$

rimanendo arbitrari il modulo k delle funzioni di JACOBI, come le tre costanti A, B, C, questo ds^2 appartiene (come si verifica subito colle formole (IX) del § 518, pag. 680) ad uno spazio di curvatura costante K data da

$$K = \frac{1}{C^2} + k^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right).$$

Le superficie di ciascuna delle tre serie sono a curvatura costante e congruenti, e le loro curvature (relative) K_1, K_2, K_3 sono date da

$$K_1 = -\frac{k^2}{A^2},\quad K_2 = \frac{k^2}{B^2},\quad K_3 = -\frac{1}{C^2},$$

e legate alla curvatura K dello spazio dalla relazione

$$K_1 + K_2 + K_3 + K = 0. \text{ (*)}$$

§ 550.

La trasformazione di Bäcklund pei sistemi di Weingarten.

Ai sistemi pseudosferici di Weingarten potremo applicare, secondo i risultati generali dei §§ 543, 544, la trasformazione elementare (reale) di BÄCKLUND per derivarne nuovi sistemi della medesima specie.

Le formole che legano le due funzioni caratteristiche ω, φ pel sistema primitivo

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

(*) Più in generale se

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

appartiene allo spazio euclideo, le superficie $u_3 = \text{cost.}^{te}$ essendo pseudosferiche di raggio R costante, l'altro

$$ds'^2 = a^2(\cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2) + b^2R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

ove a, b sono costanti, appartiene allo spazio a curvatura costante

$$K = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Analoga relazione si ha, pel caso dei sistemi di WEINGARTEN a curvatura positiva, fra i due elementi lineari

$$\begin{cases} ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 \\ ds'^2 = a^2(\operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2) + b^2R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 \end{cases}$$

appartenendo il secondo di essi ad uno spazio di curvatura costante

$$K = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

e per il trasformato

$$ds'^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

per la (IV) pag. 748, ove si ponga

$$R = 1, \quad k = \cos\sigma,$$

saranno

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \\ \operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \dfrac{\cos\sigma}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\cos\varphi + \dfrac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\operatorname{sen}\varphi + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} = 0. \end{cases}$$

È importante osservare che l'espressione

$$\Omega = \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2,$$

ovvero

$$\Omega = \beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 - H_3^2$$

già considerata al § 546, è un *invariante* della trasformazione, cioè si avrà

$$(36)\quad \left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2.$$

E infatti dalle (D), osservando le (20), (20*) pag. 752, 753, deriviamo le seguenti:

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\sigma}{\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\,\partial u_2} = \cos\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} + \\ + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cdot\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_2} - \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} \\ \dfrac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\,\partial u_3} = \operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} - \\ - \cos\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\cdot\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \cos\sigma\cos\omega\cos\varphi\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}, \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando, coll'aver riguardo alla terza delle (D), si deduce appunto la (36).

Stabilita questa formola (36), ne risulta che scelto il parametro u_3 in guisa che ω soddisfi le (A) pag. 753, anche la φ soddisferà le medesime equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ \left(\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 = C\,, \end{cases}$$

col medesimo valore della costante C. Dunque il sistema (φ) derivato avrà la flessione > 1, o < 1, ovvero $= 1$ insieme col primitivo (ω). In particolare. *La trasformazione di* BÄCKLUND *cangia i sistemi di* WEINGARTEN *a flessione costante in altri della medesima specie.*

Ponendo poi nel caso dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante (§ 548)

$$\cos\theta = -\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}}{\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}\,,\qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}}{\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}\,,$$

e corrispondentemente

$$\cos\psi = -\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\,\partial u_3}}{\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}}\,,\qquad \operatorname{sen}\psi = -\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\,\partial u_3}}{\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}}\,,$$

risulta dalle (37):

$$\cos\psi = \frac{\cos\omega\cos(\varphi-\theta) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \cos\sigma\cos\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)}$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\operatorname{sen}\omega\cos(\varphi-\theta) + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \cos\sigma\operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)}\,.$$

Derivando rapporto ad u_3 ne segue

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_3} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0\,,$$

onde si vede che se $\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0$ anche $\dfrac{\partial\psi}{\partial u_3} = 0$, cioè (§ 548). *I sistemi*

ciclici di WEINGARTEN *si cangiano per trasformazione di* BÄCKLUND *in nuovi sistemi ciclici.*

La dimostrazione dei due ultimi teoremi si può anche fare direttamente osservando la legge geometrica secondo cui la trasformazione di BÄCKLUND cangia una curva C traiettoria ortogonale delle superficie pseudosferiche in una famiglia di WEINGARTEN nella corrispondente curva C′ del sistema trasformato : *Il segmento* P P′ *che unisce due punti corrispondenti di* C, C′ è costante $= \cos\sigma$, *e normale ad ambedue le curve, e l'angolo delle rispettive tangenti in* P P′ *è costante* $= \frac{\pi}{2} - \sigma$.

Questa può riguardarsi come una trasformazione geometrica per curve C arbitrarie (*) dello spazio, e se si cercano direttamente le formole corrispondenti nella teoria delle curve, si trova che indicando con θ l'angolo d'inclinazione del segmento P P′ sulla normale principale in P alla C la funzione θ dell'arco s di C deve soddisfare all'equazione caratteristica (riducibile al tipo di RICCATI) :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\cos\sigma\cos\theta}{\rho} - 1\right),$$

dove al solito $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ sono le due curvature di C. Tenendo fisso l' angolo σ, si hanno così ∞^1 curve derivate C′, tutte tracciate sulla superficie canale coll'asse curvilineo C e di raggio $R = \cos\sigma$ e trajettorie isogonali dei circoli sotto l'angolo σ. Indicando con $\frac{1}{\rho'}$ la flessione C′ si trova la formola

$$\left(\frac{1}{\rho'^2} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos\sigma\cos\theta}{\rho}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\sigma\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right),$$

dalla quale segue appunto che $\frac{1}{\rho^2} - 1$, $\frac{1}{\rho'^2} - 1$ hanno il medesimo segno e insieme si annullano. Dunque se C è a flessione costante $= 1$ lo stesso accade per C′. Di più è facile vedere che se C è un circolo di raggio $= 1$ così anche C′.

(*) Che restino effettivamente arbitrarie risulta già dal teorema fondamentale al § 540.

§ 551.

La trasformazione complementare pei sistemi di Weingarten.

Nell'applicare le trasformazioni di BÄCKLUND ai sistemi di WEINGARTEN è ammissibile il caso speciale notevole, in cui l'angolo σ sia eguale a zero e quindi la trasformazione di BÄCKLUND si cangi nella *trasformazione complementare*, ciò che nel caso generale dei sistemi pseudosferici a raggio R variabile, essendo anche σ variabile, non poteva evidentemente aver luogo.

Esaminiamo ora la possibilità di questo caso, nel quale la terza delle (D) diventa un'equazione *in termini finiti* per φ, e cioè:

$$\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\cdot\cos\varphi+\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\cdot\operatorname{sen}\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial u_3}=0. \tag{38}$$

Ora per le formole del § 421, indicando con θ l'angolo che la normale principale della curva (u_3) forma colla linea $u_2 = \text{cost.}^{te}$, abbiamo

$$\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\rho}{r_{13}}=-\rho_3\dfrac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}}{\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}\\[2ex] \operatorname{sen}\theta=-\dfrac{\rho_3}{r_{23}}=-\rho_3\dfrac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}}{\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}},\end{cases}$$

e la (38) può scriversi

$$\cos(\varphi-\theta)=\rho_3. \tag{39}$$

Si vede quindi che si hanno per φ due valori reali e distinti se la flessione $\frac{1}{\rho_3}$ del sistema di WEINGARTEN è >1, immaginarii coniugati per $\frac{1}{\rho_3}<1$ e reali coincidenti pei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante $\frac{1}{\rho_3}=1$. Ora basta derivare la (38) rispetto ad u_1, u_2, tenendo conto delle formole (20), (20*) per accertarsi che la funzione φ così determinata soddisfa anche alle due prime (D).

Per interpretare geometricamente questo risultato, assumiamo sopra una superficie pesuosferica S del sistema, supposto a flessione > 1, per linee coordinate α, β i circoli di equidistanza e le geodetiche ortogonali, onde l'elemento lineare della S prenderà la forma iperbolica

$$ds^2 = d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha \, d\beta^2.$$

Se con Ω indichiamo l'angolo che la direzione definita dalla (38) forma colla geodetica $\beta = \text{cost.}^{te}$, abbiamo $\Omega = \varphi - \theta$, e la (39), avendosi per la (27) pag. 758

$$\frac{1}{\rho_3} = \rho_{\psi} = \coth \alpha \, ,$$

diventa

$$\cos \Omega = tgh \, \alpha, \tag{40}$$

dove α è la distanza geodetica del punto P che si considera su S dalla geodetica $d = 0$. Ma per la formola che dà *l'angolo di paralellismo* in geometria non euclidea (I pag. 621) la (40) definisce appunto l' angolo di parallelismo relativo al punto P ed alla geodetica $\alpha = 0$. Abbiamo dunque il teorema seguente :

Dato un sistema pseudosferico di WEINGARTEN *a flessione* $\frac{1}{\rho_3} > 1$, *si consideri sopra una superficie pseudosferica* S *del sistema quella determinata geodetica g che appartiene alle linee di equidistanza, e sopra* S *si traccino le geodetiche parallele, nell'uno o nell'altro senso, alla g. Se della* S *si prende la superficie complementare* S_1 *o l'altra* S_{-1}, *rispetto all'uno o all' altro dei due detti sistemi* ∞^1 *di geodetiche parallele, le* ∞^1 *superficie* S_1 (*corrispondenti alla* ∞^1 S), *come le* S_{-1} *daranno luogo a due nuovi sistemi di* WEINGARTEN.

Possiamo anche confermare il teorema precedente ricorrendo alle proprietà delle linee a doppia curvatura osservate al §13 (I pag. 29).

Se consideriamo una curva C del sistema (u_3) e le sue due trasformate C_1, C_{-1}, la formola

$$\cos \Omega = \rho_3 \tag{39}$$

dimostra che le due curve C_1, C_{-1} sono, sulla superficie canale di raggio $= 1$, avente la curva C per asse curvilineo, i due rami dello spigolo di regresso di questa superficie. Ne segue che le tangenti a C_1, C_{-1}

in due punti corrispondenti ad un medesimo punto di C sono perpendicolari alla tangente di C, onde ricordando le proprietà della trasformazione complementare, vediamo che la C_1 è trajettoria ortogonale delle superficie pseudosferiche S_1, e così la C_{-1} delle S_{-1}. E siccome sulle S_1, e sulle S_{-1}, si corrispondono le linee di curvatura, vediamo nuovamente che le (S_1), (S_{-1}) sono ancora famiglie di LAMÈ.

Così da ogni sistema pseudosferico (S) di WEINGARTEN a flessione $\frac{1}{\rho_3} > 1$ deduciamo due nuovi tali sistemi (S_1), (S_{-1}), che si diranno i contigui *complementari* di (S). Potremo quindi applicare tanto a (S_1) che a (S_{-1}) di nuovo la trasformazione complementare. Ma poichè ogni volta uno dei due sistemi complementari è il primitivo (S), così vediamo che il sistema noto (S) darà luogo, *con sole operazioni di derivazione*, ad una catena di sistemi di WEINGARTEN:

$$\ldots\ldots (S_{-2}),\ (S_{-1}),\ (S),\ (S_1),\ (S_2) \ldots\ldots$$

che si estende all'infinito nei due sensi, ciascuno dei sistemi avendo per complementari i due contigui nella catena.

Però se il sistema (S) diventa al limite un sistema a flessione costante $\frac{1}{\rho_3} = 1$, allora i due sistemi contigui vengono a coincidere in un solo (S_1) e la relazione fra (S), (S_1) è involutoria. *Ciascuna delle due famiglie di* LAMÈ *ha in tal caso per trajettorie ortogonali i luoghi dei centri di curvatura delle corrispondenti trajettorie ortogonali dell'altra.*

Così abbiamo l'interpretazione geometrica delle formole al § 448 per le coppie associate di sistemi di WEINGARTEN a flessione costante.

§ 552.

I sistemi tripli ortogonali con una serie a curvatura costante come sistemi Q.

Fino ad ora, nella teoria delle trasformazioni delle famiglie di LAMÈ a curvatura costante, ci siamo limitati alle trasformazioni *reali* di BÄCKLUND per le famiglie pseudosferiche. Ma come per le superficie isolate, così anche per le famiglie di LAMÈ si possono utilizzare le trasformazioni *immaginarie* di BÄCKLUND tanto pel caso della curvatura costante negativa come in quello

della curvatura positiva, e queste trasformazioni immaginarie, opportunamente composte, daranno luogo a *trasformazioni raeli* di RIBAUCOUR per inviluppi di sfere.

Otteniamo direttamente queste trasformazioni reali di RIBAUCOUR dei sistemi tripli ortogonali, contenenti una serie di superficie a curvatura costante, riguardando questi sistemi come casi limiti dei sistemi $n.^{\text{pli}}$ ortogonali Q studiati al § 516, e precisamente dovremo qui supporre $n = 3$, e considerare il caso *ivi escluso* dell'eguaglianza $U_1 = U_2$.

Enunciamo il problema che attualmente ci interessa sotto la forma seguente:

Trovare i sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) *dello spazio euclideo che ammettono trasformazioni di* RIBAUCOUR $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi)$ *le cui funzioni trasformatrici sono legate dalla relazione quadratica omogenea*

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + U_3 \gamma_3^2 + a \varphi^2 = 0, \tag{41}$$

dove a *è una costanie ed* U_3 *una funzione della sola* u_3.

Valgono qui i calcoli eseguiti in generale al principio del § 516, fino all'equazione ivi segnata (63) pag. 673, dalla quale ponendo $n = 3$, $U_1 = U_2 = 1$ deduciamo

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} U_3 + a H_1 H_2 = 0.$$

Ma d'altra parte si ha anche

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \beta_{31} \beta_{32} = 0,$$

indi

$$\beta_{31} \beta_{32} (1 - U_3) = a H_1 H_2,$$

e siccome la curvatura K_3 delle superficie $u_3 = \text{cost.}^{\text{te}}$ è data da

$$K_3 = \frac{\beta_{31} \beta_{32}}{H_1 H_2},$$

si avrà necessariamente

$$\frac{1}{K_3} = \frac{1 - U_3}{a} \tag{42}$$

e le superficie $u_3 =$ cost.te saranno, ciascuna, a curvatura costante. Dunque : *Se un sistema triplo ortogonale* (u_1, u_2, u_3) *ammette una trasformazione di* RIBAUCOUR *le cui funzioni trasformatrici* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; φ *siano legate dall'identità quadratica* (41), *le superficie della serie* $u_3 =$ cost.te *avranno ciascuna curvatura* K_3 *costante, data dalla* (42) .

Dimostreremo ora che tale condizione necessaria è anche sufficiente, che cioè ogni sistema triplo ortogonale con una serie $u_3 =$ cost.te di superficie a curvatura costante ammette in effetto trasformazioni di RIBAUCOUR della specie richiesta (41). Intanto, ammessa l'esistenza della trasformazione, siccome le funzioni trasformatrici inverse $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; Φ vengono a soddisfare alla *medesima* equazione (41) (a causa delle formole (24) § 505 pag. 641) le superficie $u_3 =$ cost.te del sistema trasformato avranno la medesima curvatura K_3 data dalla (42) e saranno ciascuna legata alla corrispondente del primitivo dalle trasformazioni di RIBAUCOUR del § 348.

Resta ora che dimostriamo l'effettiva esistenza delle trasformazioni, per la qual cosa dovremo provare la compatibilità delle equazioni generali di trasformazione

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i\,\gamma_i$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

colle tre che provengono dalla (62) § 516 (pag. 672), e cioè

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \beta_{21}\,\gamma_2 + \beta_{31}\,U_3\,\gamma_3 + a\,H_1\,\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \beta_{12}\,\gamma_1 + \beta_{32}\,U_3\,\gamma_3 + a\,H_2\,\varphi = 0 \\ U_3\dfrac{\partial \gamma_3}{\partial u_3} + \beta_{13}\,\gamma_1 + \beta_{23}\,\gamma_2 + a\,H_3\,\varphi + \dfrac{1}{2}\,U'_3\,\gamma_3 = 0\,. \end{cases}$$

§ 553.

Caso dei sistemi pseudosferici.

Separiamo ora i due casi della curvatura K_3 negativa o positiva, e cominciamo dal primo, ove valgono le formole del § 539 e le formole (13)

pag. 747. Siccome quì si ha

$$K_3 = -\frac{1}{R^2},$$

la (42) ci dà

$$U_3 = 1 + a\,R^2,$$

e riunendo le equazioni generali di trasformazione (α) alle (43), ove per le rotazioni β_{ik} si introducano i valori (13) e si ponga

$$H_1 = \cos\omega\,,\quad H_2 = \operatorname{sen}\omega\,,\quad H_3 = R\frac{\partial\omega}{\partial u_3},$$

si otterrà il sistema seguente:

$$\text{(E)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\gamma_2 + \dfrac{1+aR^2}{R}\operatorname{sen}\omega\,.\,\gamma_3 - a\cos\omega\,.\,\varphi \\ \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\,.\,\gamma_2\,,\quad \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\,.\,\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\,.\,\gamma_1\,,\quad \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_2} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\gamma_1 - \dfrac{1+aR^2}{R}\cos\omega\,.\,\gamma_3 - a\operatorname{sen}\omega\,.\,\varphi\,, \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\,.\,\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R}\gamma_1\,,\quad \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega}{R}\gamma_2\,,\quad (1+aR^2)\dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_3} = \\ = -\dfrac{R}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\,.\,\gamma_1 - \dfrac{R}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\gamma_2 - aR\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\,.\,\varphi - a\,R\,R'\,\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \cos\omega\,.\,\gamma_1\,,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\omega\,.\,\gamma_2\,,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = R\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\,.\,\gamma_3. \end{cases}$$

Questo è, nelle quattro funzioni incognite γ_1, γ_2, γ_3; φ, un sistema ai differenziali totali, le cui condizioni d'integrabilità si trovano identicamente soddisfatte come si verifica colle formole (I) pag. 737 (*). Esso è quindi illimitatamente integrabile, qualunque valore si attribuisca alla costante a; di più possiede l'Integrale quadratico

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (1 + a\,R^2)\,\gamma_3^2 + a\,\varphi^2 = \text{cost.}^{te}$$

(*) Per maggiore speditezza nelle verifiche si scriva la seconda delle (I) sotto le due forme equivalenti (20*) pag. 753.

poichè le derivate rapporto ad u_1, u_2, u_3 dell'espressione nel primo membro sono identicamente nulle, a causa delle (E). Si avranno quindi le trasformazioni cercate, assoggettando i valori iniziali arbitrarii delle funzioni trasformatrici alla condizione

$$(E^*) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (1 + a\,R^2)\,\gamma_3^2 + a\,\varphi^2 = 0,$$

la quale sarà in conseguenza soddisfatta per tutti i valori di u_1, u_2, u_3. Naturalmente, affinchè la trasformazione riesca reale, converrà attribuire alla costante arbitraria a un valore *negativo*. E siccome, oltre la costante a, figurano nell'integrazione del sistema (E), a causa della omogeneità e della relazione (E*), altre due costanti essenziali, abbiamo il risultato :

Ogni famiglia pseudosferica di LAMÈ *ammette* ∞^3 *trasformazioni di* RIBAUCOUR *in altre famiglie della medesima specie, che si ottengono integrando il sistema* (E) *colla condizione iniziale* (E*).

In sostanza noi abbiamo così estese le trasformazioni R_m dei sistemi Q del § 517 al caso ivi escluso di $U_1 = U_2$ (con $n = 3$).

Come nel caso delle superficie pseudosferiche isolate (Cap. XVI), queste trasformazioni di RIBAUCOUR possono decomporsi nel prodotto di due trasformazioni opposte di BÄCKLUND del § 543. Però queste componenti elementari di BÄCKLUND possono essere reali, ovvero immaginarie coniugate ; precisamente avviene il primo caso se $1 + a\,R^2 < 0$, il secondo quando $1 + a\,R^2 > 0$.

Consideriamo ancora particolarmente il caso dei sistemi di WEINGARTEN ove R è assolutamente costante, poniamo $R = 1$. S'intende facilmente che anche per le trasformazioni di RIBAUCOUR l'espressione

$$\Omega = \left(\frac{1}{\cos\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2,$$

ovvero

$$\Omega = \beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 - H_3^2$$

sarà un invariante (Cfr. § 546. Per verificarlo ricordiamo che dalle formole generali (IV), (V) § 504 (pag. 638) segue

$$\begin{cases} H'_3 = H_3 - \dfrac{2\,\varphi\,\Theta_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \\ \beta'_{13} = \beta_{13} - \dfrac{2\,\gamma_1\,\Theta_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \\ \beta'_{23} = \beta_{23} - \dfrac{2\,\gamma_2\,\Theta_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \end{cases}$$

dove si è posto

$$\Theta_3 = \frac{\partial \gamma_3}{\partial u_3} + \beta_{13}\,\gamma_1 + \beta_{23}\,\gamma_2\,, \tag{44}$$

ossia per la (E*) (ove si ponga R = 1)

$$H'_3 = H_3 + \frac{2\,\varphi\,\Theta_3}{a\,(\gamma_3^2+\varphi^2)}\,,\quad \beta'_{13} = \beta_{13} + \frac{2\,\gamma_1\,\Theta_3}{a\,(\gamma_3^2+\varphi^2)}\,,\quad \beta'_{23} = \beta_{23} + \frac{2\,\gamma_2\,\Theta_3}{a\,(\gamma_3^2+\varphi^2)}\,.$$

Da queste formole segue

$$(\beta'^{\,2}_{13}+\beta'^{\,2}_{23}-H'^{2}_3)-(\beta^2_{13}+\beta^2_{23}-H^2_3) = \frac{4\,\Theta_3}{a(\gamma_3^2+\varphi^2)}\left\{\beta_{13}\gamma_1+\beta_{23}\gamma_2-H_3\varphi+\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2-\varphi^2}{a\,(\gamma_3^2+\varphi^2}\,\Theta_3\right\}$$

ovvero siccome dalla (E*)

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2-\varphi^2 = -\,(a+1)\,(\gamma_3^2+\varphi^2)\,,$$

$$(\beta'^{\,2}_{13}+\beta'^{\,2}_{23}-H'^{2}_3)-(\beta^2_{13}+\beta^2_{23}-H^2_3) = \frac{4\,\Theta_3}{a^2(\gamma_3^2+\varphi^2)}\left\{a(\beta_{13}\gamma_1+\beta_{23}\gamma_2-H_3\varphi)-(a+1)\Theta_3\right\}. \tag{45}$$

Ma per la terza equazione della terza linea nel quadro (E), e pel significato di Θ_3 date dalla (44), si ha appunto

$$(a+1)\,\Theta_3 = a\,(\beta_{13}\,\gamma_1 + \beta_{23}\,\gamma_2 - H_3\,\varphi),$$

onde il secondo membro della (45) si annulla e ne risulta la formola

$$\beta'^{\,2}_{13} + \beta'^{\,2}_{23} - H'^{2}_3 = \beta^2_{13} + \beta^2_{23} - H^2_3$$

che dà la verifica richiesta.

Risulta di quì che le trasformazioni di RIBAUCOUR cangiano i sistemi di WEINGARTEN di flessione $\frac{1}{\rho_3} > 1$ in altri tali sistemi, e quelli di flessione $\frac{1}{\rho_3} < 1$ ancora in sistemi con $\frac{1}{\rho'_3} < 1$. E nel caso intermedio si ha: *Le trasformazioni di* RIBAUCOUR *cangiano i sistemi di* WEINGARTEN *a flessione costante in sistemi a flessione costante.* Aggiungiamo che in particolare: *i sistemi ciclici vengono cangiati in sistemi ciclici.*

In fine osserviamo che nel caso dei sistemi di WEINGARTEN, è anche ammissibile per la costante a il valore $a=-1$, caso in cui l'ultima equazione della terza linea in (E) si riduce alla relazione in termini finiti

$$\beta_{13}\,\gamma_1 + \beta_{23}\,\gamma_2 - H_3\,\varphi = 0.$$

Ma in tal caso spariscono le costanti arbitrarie dalla trasformazione, che si decompone in due successive complementari. Di queste trasforzioni ne esistono *due sole* per ogni sistema di WEINGARTEN e si ottengono in termini finiti. Però sono reali soltanto pei sistemi a flessione $\frac{1}{\rho_3} > 1$, e se torniamo ad usare le notazioni del § 551 per la catena dei sistemi complementari, vediamo che i due trasformati di RIBAUCOUR del sistema (S) per le due indicate trasformazioni sono (S_2) e (S_{-2}).

§ 554.

Caso dei sistemi a curvatura positiva. - Teorema di permutabilità.

Supponiamo ora K_3 positiva

$$K_3 = \frac{1}{R^2}, \quad R = R(u_3),$$

e dalla (42) avremo

$$U_3 = 1 - a R^2 .$$

Valendo allora le formole del § 541, dovremo introdurre nelle (43 i valori

$$H_1 = \operatorname{senh}\theta , \quad H_2 = \cosh\theta , \quad H_3 = R\frac{\partial\theta}{\partial u_3},$$

$$\beta_{12} = \frac{\partial\theta}{\partial u_1}, \ \beta_{21} = \frac{\partial\theta}{\partial u_2}; \ \beta_{13} = \frac{R}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}, \ \beta_{23} = \frac{R}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}; \ \beta_{31} = \frac{\cosh\theta}{R}, \ \beta_{32} = \frac{\operatorname{senh}\theta}{R},$$

ed il sistema differenziale (E) sarà ora sostituito dal segu nte

$$(F)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\cdot\gamma_2 + \dfrac{aR^2-1}{R}\cosh\theta.\gamma_3 - a\operatorname{senh}\theta.\varphi, \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\gamma_2, \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\cdot\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\gamma_1, \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_2} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\gamma_1 + \dfrac{aR^2-1}{R}\operatorname{senh}\theta.\gamma_3 - a\cosh\theta.\varphi, \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\cdot\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_1} = \dfrac{\cosh\theta}{R}\cdot\gamma_1, \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_2} = \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{R}\cdot\gamma_2, (aR^2-1)\dfrac{\partial\gamma_3}{\partial u_3} = \\ \qquad = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\cdot\gamma_1 + \dfrac{R}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\gamma_2 + aR\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\varphi - aRR'\gamma_3 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \operatorname{senh}\theta\cdot\gamma_1, \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} = \cosh\cdot\gamma_2, \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = R\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\gamma_3 . \end{cases}$$

In virtù delle formole (III), questo sistema ai differenziali totali nelle quattro funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ è completamente integrabile per qualunque valore della costante a. Esso possiede l'integrale quadratico

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (1 - a\,R^2)\gamma_3^2 + a\,\varphi^2 = \text{cost.}^{\text{te}},$$

e le trasformazioni cercate di RIBAUCOUR pei nostri sistemi si otterranno assoggettando i valori iniziali di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$ a rendere nulla la costante del secondo membro, onde sussisterà per tutti i valori di u_1, u_2, u_3, la relazione omogenea quadratica

$$(F^*) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (1 - a\,R^2)\,\gamma_3^2 + a\,\varphi^2 = 0.$$

L'esistenza delle trasformazioni di RIBAUCOUR è così stabilita anche per questo caso, e come per le superficie isolate a curvatura positiva si potrebb vedere che esse si risolvono in due trasformazioni imaginarie coniugate di BÄCKLUND.

Dimostriamo in fine che anche per queste trasformazioni di RIBAUCOUR delle famiglie di LAMÈ a curvatura costante sussiste un *teorema speciale di permutabilità*, che semplifica nel solito modo l'applicazione successiva delle trasformazioni. Riferiamoci per fissare le idee ai sistemi tripli ortogonali pseudosferici (Σ) ed alle formole di trasformazione (E), (E*). Supponiamo che si passi dal sistema (Σ) a due contigui (Σ'), (Σ'') colle trasformazioni rispettive

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi)$$

$$(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3; \varphi'),$$

la prima corrispondente al valore a della costante nelle (E), la seconda al valore a' diverso da a.

Dimostreremo che: *nel fascio coniugato al fascio* $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ *esiste uno ed un solo quarto sistema* (Σ''') *legato ai due medesimi* (Σ'), (Σ'') *da due trasformazioni di* RIBAUCOUR *della medesima specie* (E), *ma colle costanti* a', a *permutate.*

Per questo procediamo come nella ricerca analoga per le trasformazioni R_n dei sistemi Q al § 517, e nelle formole del generale teorema di permutabilità:

$$(46) \qquad \Gamma_i = \frac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i\ , \quad \Phi = \frac{\tau}{A}\,\varphi + \varphi'\ ,$$

$$i = 1, 2, 3$$

dove

$$(47)\qquad A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\,,\quad \frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\,\gamma'_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda \right\},$$

cerchiamo di assoggettare τ all'ulteriore condizione che Γ_1, Γ_2, Γ_3; Φ soddisfino all'equazione

$$(48)\qquad \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = -a'\,(R^2\,\Gamma_3^2 + \Phi^2).$$

Siccome si ha per ipotesi

$$(49)\qquad \begin{cases} A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = -a\,(R^2\,\gamma_3^2 + \varphi^2) \\ A' = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2 = -a\,(R^2\,\gamma_3'^2 + \varphi'^2)\,, \end{cases}$$

dalle (46) deduciamo

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = \frac{\tau^2}{A} + \frac{2\,\tau}{A}\,(\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + \gamma_3\,\gamma'_3) - a'\,(R^2\,\gamma_3'^2 + \varphi'_2)\,,$$

e sostituendo nella (48), coll'aver riguardo alle precedenti, si trova :

$$(50)\qquad \tau = \frac{2\,a}{a' - a}\left\{\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + (1 + a'\,R^2)\,\gamma_3\,\gamma'_3 + a'\,\varphi\,\varphi'\right\}.$$

Resta solo a provare che questo valore di τ soddisfa alle equazioni differenziali (47), ciò che si verifica facilmente tenendo conto delle equazioni (E) e delle analoghe cui soddisfano le γ'_1, γ'_2, γ'_3 ; φ' (Cf. § 517).

In fine se si forma dalla (50)

$$\tau' = -\tau - 2\,(\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + \gamma_3\,\gamma'_3),$$

si trova

$$(50^*)\qquad \tau' = \frac{2\,a'}{a - a'}\left\{\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + (1 + a\,R^2)\,\gamma_3\,\gamma'_3 + a\,\varphi\,\varphi'\right\},$$

formola simmetrica delle (50) e che completa le nostre verifiche.

Osservazione È essenziale nei calcoli eseguiti l'esclusione del caso $a' = a$, ove il denominatore della (50) verrebbe ad annullarsi. In tal caso il quarto sistema (Σ''') del teorema di permutabilità viene *generalmente* a coincidere con (Σ) stesso. Ma se avviene che si abbia nello stesso tempo

$$(51)\qquad \gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + (1 + a\,R^2)\,\gamma_3\,\gamma'_3 + a\,\varphi\,\varphi' = 0\,,$$

allora *tutti* i sistemi del fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$, come anche quelli del fascio coniugato, sono a curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$. Ora in effetto, siccome in virtù delle equazioni differenziali (E) il primo membro della (51) è una costante, basta che la (51) sia *inizialmente* soddisfatta. Si dimostra facilmente che in questo caso gli ∞^1 sistemi dei due fasci coniugati provengono per trasformazioni opposte di BÄCKLUND da un medesimo sistema centrale (S). Tutti i circoli C del teorema generale di permutabilità hanno ora lo stesso raggio r che dalla formola generale (30) §506 (pag. 643) si calcola in

$$r = \frac{1}{\sqrt{-a}}.$$

§ 555.

Equazioni per la distanza normale infinitesima $\varepsilon\,\psi$ in una famiglia di Lamé a curvatura costante.

In una qualunque famiglia di LAMÈ a curvatura costante K, essendo però K in generale variabile colla superficie S della famiglia, consideriamo la distanza normale infinitesima $\varepsilon\,\psi$ fra la S e la successiva. La funzione ψ soddisfa ad un sistema *caratteristico* di equazioni a derivate parziali del secondo ordine (generalizzazione di un sistema di WEINGARTEN che abbiamo più volte incontrato) che andiamo ora a stabilire.

Cominciando dal caso pseudosferico, nel quale valgono le formole (I) § 539 (pag. 737) e si ha

$$\psi = R\frac{\partial\,\omega}{\partial u_3},$$

le tre ultime di queste formole si traducono per la funzione ψ nel sistema simultaneo

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2} = -\,tg\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_1} + \cot\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_2} + \dfrac{\cos^2\omega}{R^2}\,\psi + \left(\dfrac{1}{R}\right)'\operatorname{sen}\,\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^2\,\psi}{\partial u_1\partial u_2} = -\,tg\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_1} + \cot\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2} = -\,tg\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_1} + \cot\,\omega\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\,\psi}{\partial u_2} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{R^2}\,\psi - \left(\dfrac{1}{R}\right)'\operatorname{sen}\,\omega\cos\omega, \end{cases}$$

dove

$$\left(\frac{1}{R}\right)^1 = \frac{d}{du_3}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Ora, per un'individuata superficie pseudosferica $u_3 = c$ del sistema, abbiamo nelle consuete notazioni

$$E = \cos^2\omega\,, \quad F = 0\,, \quad G = \operatorname{sen}^2\omega$$

$$D = \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R}\,, \quad D' = 0\,, \quad D'' = -\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R}$$

$$K = -\frac{1}{R^2}$$

e colle notazioni delle derivate seconde covarianti le formole (52) si scrivono

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} \psi_{11} = -KE\psi + aD \\ \psi_{12} = -KF\psi + aD' \\ \psi_{22} = -KG\psi + aD'', \end{cases}$$

dove a indica la costante $-\frac{R}{R'}$ per $u_3 = c$. Lo stesso sistema (G) si trova pel caso della curvatura positiva $K = \frac{1}{R^2}$ ricorrendo alle formole (III) § 541 Queste equazioni (G) possono compendiarsi nella formola

$$\psi\,du_1^2 + 2\,\psi_{12}\,du_1\,du_2 + \psi_{22}\,du_2^2 = -K\psi\,(E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2) +$$

$$+ a\,(D\,du_1^2 + 2D\,du_1\,du_2 + D''\,du_2^2)$$

che ne pone in evidenza la natura invariantiva rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Concludiamo quindi: *In qualsiasi famiglia* (S) *di* Lamè *composta di superficie a curvatura costante* K, *se si riferisce una superficie* S *della famiglia ad un qualunque sistema curvilineo* $(u\,v)$ *e con* $\varepsilon\psi$ *si indica la distanza normale infinitesima fra la* S *e la successiva nella famiglia, la funzione* ψ *soddisfa al sistema simultaneo* (G), *dove* a *è una costante proporzionale alla variazione della curvatura.*

Si possono del resto stabilire nuovamente, nella loro forma generale, le equazioni (G) ricorrendo alle formole di Weingarten § 523. Siccome ψ deve soddisfare all'equazione del Cayley:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0,$$

possiamo porre, indicando con λ, μ due convenienti moltiplicatori:

$$\psi_{11} = \lambda E + \mu D, \quad \psi_{12} = \lambda F + \mu D', \quad \psi_{22} = \lambda G + \mu D'',$$

onde avremo per le citate formole (II) pag. 695

$$\frac{\partial D}{\partial w} = (\lambda + K\psi) E + (\mu + H\psi) D, \quad \frac{\partial D'}{\partial w} = (\lambda + K\psi) F + (\mu + H\psi) D',$$

$$\frac{\partial D''}{\partial w} = (\lambda + K\psi) G + (\mu + H\psi) D'',$$

e siccome nelle nostre famiglie di LAMÈ sussistono, a causa della corrispondenza delle asintotiche, le proporzioni

$$\frac{\partial D}{\partial w} : \frac{\partial D'}{\partial w} : \frac{\partial D''}{\partial w} = D : D' : D'',$$

avremo intanto

$$\lambda = -K\psi$$

Ed ora dalla formola (11) pag. 696 per la derivata della curvatura K abbiamo

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{D(-KG\psi + \mu D'') + D''(-KE\psi + \mu D) - 2D'(-KF\psi + \mu D')}{EG - F^2} - HK\psi,$$

ossia riducendo

$$\frac{\partial K}{\partial w} = 2K\mu,$$

onde segue che μ è una costante $a = \frac{1}{2K}\frac{\partial K}{\partial w}$. Così le formole (G) sono nuovamente stabilite.

§ 556.

Integrazione del sistema (G).

Il sistema (G) di equazioni a derivate parziali, la cui *illimitata* integrabilità è assicurata dalle ricerche precedenti e può facilmente verificarsi

con calcolo diretto, si riduce, quando la costante a si annulla, al sistema omogeneo

$$(G^*) \qquad \psi_{11} = -\,K\,E\,\psi,\ \psi_{12} = -\,K\,F\,\psi,\ \psi_{22} = -\,K\,G\,\psi,$$

che è appunto il sistema di WEINGARTEN a cui soddisfano le coordinate di WEIESTRASS sulla moltiplicità S a curvatura costante (Cf. Cap. XIV § 238 e in generale Cap. XXVI § 451). Questo caso particolare $a = 0$ corrisponde ai sistemi di WEINGARTEN (K assolutamente costante), e di qui segue nuovamente che in questi sistemi le linee di equidistanza ψ = cost.te sono circoli geodetici paralleli.

L'integrazione del sistema (G*) equivale alla conoscenza delle linee geodetiche sulla superficie S a curvatura costante, e se la supponiamo effettuata, basteranno, in ordine ai teoremi generali, quadrature per integrare il sistema non omogeneo (G). Noi andiamo ora a stabilire effettivamente queste formole di quadratura, colla qual cosa veniamo anche a verificare l'illimitata integrabilità del sistema (G).

Prendiamo tre soluzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 del sistema omogeneo (G*), che siano linearmente indipendenti, per le quali dunque il determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. Formando le derivate di ∇ rapporto ad u, v, ed osservando le (G*) cui soddisfano ψ_1, ψ_2, ψ_3, troviamo subito

$$\frac{\partial \log \nabla}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad \frac{\partial \log \nabla}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\},$$

cioè (I pag. 175)

$$\frac{\partial \log \nabla}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log \nabla}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v}.$$

Di qui integrando abbiamo

$$\nabla = k \sqrt{EG - F_2},$$

con k costante *diversa da zero*, che potremo fare p. e. $= 1$, alterando una delle tre soluzioni per un fattore costante, onde avremo

$$\nabla = \sqrt{EG - F^2}. \tag{53}$$

Ciò premesso, applichiamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, ponendo la soluzione generale ψ del sistema non omogeneo (G) sotto la forma

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 , \tag{54}$$

e determinando C_1, C_2, C_3 in funzione di u, v in guisa che sussistano le sei equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial C_1}{\partial u}\psi_1 + \frac{\partial C_2}{\partial u}\psi_2 + \frac{\partial C_3}{\partial u}\psi_3 = 0 \\ &\frac{\partial C_1}{\partial u}\frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial C_2}{\partial u}\frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \frac{\partial C_3}{\partial u}\frac{\partial \psi_3}{\partial u} = a\,D \\ &\frac{\partial C_1}{\partial u}\frac{\partial \psi_1}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial u}\frac{\partial \psi_2}{\partial v} + \frac{\partial C_3}{\partial u}\frac{\partial \psi_3}{\partial v} = a\,D' \end{aligned}\right. \tag{55}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial C_1}{\partial v}\psi_1 + \frac{\partial C_2}{\partial v}\psi_2 + \frac{\partial C_3}{\partial v}\psi_3 = 0 \\ &\frac{\partial C_1}{\partial v}\frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial C_2}{\partial v}\frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \frac{\partial C_3}{\partial v}\frac{\partial \psi_3}{\partial u} = a\,D' \\ &\frac{\partial C_1}{\partial v}\frac{\partial \psi_1}{\partial v} + \frac{\partial C_2}{\partial v}\frac{\partial \psi_2}{\partial v} + \frac{\partial C_3}{\partial v}\frac{\partial \psi_3}{\partial v} = a\,D''. \end{aligned}\right. \tag{55*}$$

e, se ciò sarà possibile, la ψ data dalla (54) verrà a soddisfare al sistema (G).

Risolvendo le (55), (55*) rapporto alle derivate delle C_i, coll'osservare la (53), si trova

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial u} &= a\left\{\left(\psi_3\frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \psi_2\frac{\partial \psi_3}{\partial v}\right)\frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} + \left(\psi_2\frac{\partial \psi_3}{\partial u} - \psi_3\frac{\partial \psi_2}{\partial u}\right)\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} \\ \frac{\partial C_1}{\partial v} &= a\left\{\left(\psi_3\frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \psi_2\frac{\partial \psi_3}{\partial v}\right)\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} + \left(\psi_2\frac{\partial \psi_3}{\partial u} - \psi_3\frac{\partial \psi_2}{\partial u}\right)\frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

e formole analoghe per C_2, C_3, circolando sugli indici 1, 2, 3. Ma se si tien conto delle equazioni di CODAZZI sotto la seconda forma (I pag. 176) e delle (G*) cui soddisfano ψ_2, ψ_3 si verifica subito che la condizione d'integrabilità per le (56) è identicamente soddisfatta, onde si ha C_1 con una quadratura a

cui è da aggiungersi una costante assoluta arbitraria c_1; e medesimamente dicasi per C_2, C_3.

§ 557.

La superficie $\bar{S}$ inviluppo dei piani del sistema ciclico osculatore.

Le semplici proprietà analitiche che abbiamo riscontrato nel sistema differenziale (G) per le superficie a curvatura costante trovano un'interpretazione geometrica notevole, che andiamo ora a stabilire.

Consideriamo una qualunque superficie S di una famiglia (S) di LAMÈ a curvatura costante K ed il sistema ciclico osculatore lungo S. I piani dei circoli, cioè i piani normali alle linee di livello ψ = cost.te, inviluppano una superficie $\bar{S}$, che nel caso particolare dei sistemi di WEINGARTEN (quando K è una costante assoluta) è precisamente la complementare di S rispetto alle geodetiche normali alle linee ψ = cost.te ed *ha quindi un elemento lineare fisso dipendente unicamente dal valore* K *della curvatura.* Ora la proprietà rilevata in questo caso particolare ha luogo in generale, anche quando K varia colla superficie della famiglia, come andiamo a dimostrare.

Prendiamo per fissare le idee il caso pseudosferico, e riferiamoci alle formole (14) pag. 747 pei coseni delle direzioni principali, ed alle (52) pag. 780 per il sistema differenziale a cui soddisfa ψ. Introducendo le due nuove funzioni

$$\gamma_1 = \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\psi}{\partial u_2},$$

diamo alle (52) la forma di 1° ordine:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\gamma_2 + \dfrac{\cos\omega}{R^2}\psi - c\operatorname{sen}\omega, & \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\gamma_1, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} = \cos\omega\,.\,\gamma_1 \\ \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\gamma_2, & \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u_2} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\gamma_1 + \dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R^2}\psi + c\cos\omega, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\omega\,.\,\gamma_2, \end{cases}$$

dove c è una costante che è nulla soltanto nel caso dei sistemi di WEINGARTEN (R costante assoluta), mentre nel caso generale qui in considerazione, alterando ψ di un fattore costante, si può attribuire alla costante c un valore fisso qualunque (non nullo).

I coseni di direzione della tangente alla linea di livello ψ = cost.te sono

$$(58)\qquad \overline{X}=\frac{\gamma_2 X_1-\gamma_1 X_2}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}},\ \overline{Y}=\frac{\gamma_2 Y_1-\gamma_1 Y_2}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}},\ \overline{Z}=\frac{\gamma_2 Z_1-\gamma_1 Z_2}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}$$

e dànno altresì i coseni di direzione della normale alla superficie $\overline{S}$. Ora indicando con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le coordinate del punto $\overline{P}$ di $\overline{S}$, corrispondente al punto $P \equiv (x, y, z)$ di S, e ponendo per semplicità $R = 1$, $c = 1$, come è lecito, si trova subito:

$$(59)\qquad \bar{x} = x - \frac{1}{\psi}(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + X_3),$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$. Di qui derivando abbiamo:

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} = \dfrac{\gamma_1}{\psi^2}\Big\{(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2)\cos\omega\,. + (\psi \operatorname{sen}\omega + \cos\omega) X_3\Big\} \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} = \dfrac{\gamma_2}{\psi^2}\Big\{(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2)\operatorname{sen}\omega + (-\psi\cos\omega + \operatorname{sen}\omega) X_3\Big\}. \end{cases}$$

Ora dalle (57), fattovi $c = 1$, risulta

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(\gamma_1 \operatorname{sen}\omega) + \frac{\partial}{\partial u_1}(\gamma_2 \cos\omega) = 0,$$

e si può quindi introdurre una quarta funzione w, determinata a meno di una costante additiva, tale che si abbia

$$(60^*)\qquad \frac{\partial w}{\partial u_1} = \gamma_1 \operatorname{sen}\omega\,,\quad \frac{\partial w}{\partial u_2} = -\gamma_2 \cos\omega\,.$$

Si vede allora che l'espressione

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \psi^2 + 2w$$

è una costante, onde scegliendo la costante additiva in w possiamo fare

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \psi^2 - 2w.$$

Dopo ciò scrivendo le (60) sotto la forma:

$$d\bar{x} = \frac{1}{\psi^2}\Big\{(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2)\,d\psi + (\psi\,dw + d\psi) X_3\Big\}$$

e quadrando e sommando, si ha per l'elemento lineare $\bar{d}\bar{s}^2$ della superficie $\bar{S}$ inviluppo la forma

$$\text{(H)} \qquad \bar{d}\bar{s}^2 = \frac{(\psi^2 + 1 - 2w)\,d\psi^2 + 2\psi\,d\psi\,dw + \psi^2 dw^2}{\psi^4},$$

che non porta più traccia della speciale superficie pseudosferica S, nè della famiglia di LAMÈ a cui appartiene.

Questa forma (H) del ds^2 appartiene alla superficie (immaginaria), rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = \frac{w-1}{\psi}, \quad y - iz = -\frac{1}{\psi}, \quad y + iz = \frac{w^2+\psi^2}{\psi},$$

che è la quadrica Q di equazione ordinaria

$$(x - y + iz)^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Affatto analogamente si procederebbe nel caso della curvatura K positiva e, comprendendo i due casi, si può dire che la superficie $\bar{S}$ inviluppo dei piani del sistema ciclico osculatore è applicabile sulla quadrica immaginaria Q, *osculante il circolo immaginario all'infinito*, di equazione

$$(61) \qquad (x - y + iz)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{K}.$$

Riepiloghiamo questi risultati nel teorema finale:

In ogni famiglia (S) *di* LAMÈ *a curvatura costante* K (*variabile dall'una all'altra superficie della famiglia*) *i piani osculatori nei punti di una superficie* $\bar{S}$ *delle trajettorie ortogonali della famiglia* (S) *inviluppano una superficie* S *d'elemento lineare fisso con* K, *appartenente alla quadrica* (61).

Aggiungiamo in fine che le trasformazioni di BÄCKLUND per le famiglie di LAMÈ a curvatura costante si traducono per le deformate della quadrica (61) in trasformazioni subordinate alle trasformazioni generali B_k del Cap. XXIV.

(Fine della II.ª parte Volume II.º).

Nota sul parallelismo di Levi-Civita. (*)

Scopo di questa nota è d'informare il lettore di una nuova ed importante nozione, introdotta nel 1917 dal prof. Levi-Civita, nozione che già si è dimostrata feconda di utili risultati nella metrica generale degli spazî curvi, ed in altre ricerche ancora più generali. (**) Seguendo l'indirizzo generale a cui il presente libro è informato, presenteremo le nuove nozioni come conseguenze di formole differenziali concernenti le costanti di direzione.

§ 1.

Derivate delle costanti di direzione.

In uno spazio curvo qualunque a n dimensioni $S_n \equiv (x_1, x_2 \ldots . x_n)$, metricamente definito dalla espressione del suo ds^2:

$$ds^2 = \overset{(***)}{\underset{ik}{S}} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

(*) La presente nota viene riprodotta, colla debita autorizzazione, dai Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli (Vol. 28, 1922).

(**) Cf. particolarmente:
Levi-Civita. 1) Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. (Rendiconti del Circolo matematico T. 42). 2) Questions de mecànica clàssica i relativista (Conferencia III Barcelona 1922). Struik. Mehrdimensionale Differentialgeometrie (Berlin Springer 1922) II § 4. Blaschxe. Diffentialgeometrie II (§ 55) (Berlin Springer 1923).

(***) In questa nota il segno S indica sommazione degli indici variabili da 1 a n.

consideriamo in un suo punto (x_i) una direzione (ξ_i) colle costanti di direzione (pag. 417)

$$\xi_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad \xi_2 = \frac{dx_2}{ds} \ldots \xi_n = \frac{dx_n}{ds}$$

legate dall'identità quadratica:

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 1. \tag{2}$$

Pensiamo ora in S_n una curva Γ qualunque e siano

$$x_i = x_i\,(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

le sue equazioni parametriche, ove a parametro t assumeremo senz'altro l'arco di Γ. Fissiamo inoltre, in ogni punto (x_i) di Γ, una direzione $(\xi_i\,(t))$ coll'assegnare le costanti $\xi_i\,(t)$ di direzione quali funzioni di t, finite e continue colle derivate. Proponiamoci di calcolare, lungo Γ, le derivate $\frac{d\,\xi_i}{d\,t}$ ed il modo come queste si trasformano per un cangiamento qualunque di variabili indipendenti colle formole

$$x_i = x_i\,(x'_1, x'_2 \ldots x'_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

che cangi la (1) nella nuova forma

$$ds^2 = \sum_{ik} a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k. \tag{1'}$$

Se con ξ'_i indichiamo le nuove costanti delle primitive direzioni (ξ_i), rispetto alle nuove variabili x'_i, avremo

$$\xi_i = \sum_r \frac{\partial\, x_i}{\partial\, x'_r}\, \xi'_r \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

e derivando rapporto all' arco t risulterà

$$\frac{d\,\xi_i}{d\,t} = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\, \partial x'_s} \frac{dx'_s}{d\,t}\, \xi'_r + \sum_r \frac{\partial\, x_i}{\partial x'_r} \frac{d\,\xi'_r}{d\,t}.$$

Ma per le formole di trasformazione di CHRISTOFFEL (Vol. I pag. 81) abbiamo

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r\, \partial x'_s} = \sum_\mu \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \mu \end{matrix} \right\}' \frac{\partial\, x_i}{\partial x'_\mu} - \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_r} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_s},$$

col noto significato pei simboli di CRISTOFFEL, e sostituendo nella precedente, con semplici cangiamenti negli indici di sommazione, si ottiene:

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \cdot \sum_r \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_r} \xi'_r \cdot \sum_s \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_s} \frac{dx'_s}{dt} = \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \left[\frac{d\xi'_r}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ r \end{matrix} \right\} \xi'_\lambda \frac{dx'_\mu}{dt} \right].$$

Ma si ha per la (4)

$$\sum_r \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_r} \xi'_r = \xi_\lambda ,$$

mentre

$$\sum_s \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_s} \frac{dx'_s}{dt} = \frac{dx_\mu}{dt} ,$$

onde risultano le seguenti formole fondamentali:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda \frac{dx_\mu}{dt} = \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \left[\frac{d\xi'_r}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ r \end{matrix} \right\}' \xi'_\lambda \frac{\partial x'_\mu}{dt} \right].$$

Di qui si vede che, modificando lè derivate $\frac{d\xi_i}{dt}$ delle costanti di direzione coll'aggiunta della parte $\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda \frac{dx_\mu}{dt}$, che è lineare omogenea nelle ξ, nelle nuove formazioni

$$\text{(5)} \qquad \Omega_i = \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda \frac{dx_\mu}{dt} ,$$

ove con Ω'_i si indichino le formazioni analoghe per la forma trasformata (1'), le formole (A) si scrivono:

$$\text{(A*)} \qquad \Omega_i = \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \Omega'_r .$$

Risulta adunque:

Per qualunque cangiamento di variabili le formazioni Ω_i, *date dalle* (5), *si trasformano come i differenziali* dx_i (*hanno comportamento controvariante*).

§ 2.

Parallelismo per trasporto.

Le formole (A) o (A*) portano questa immediata conseguenza che se lungo Γ si annullano tutte le Ω'_i, si annullano anche le Ω_i (e viceversa) ossia:

L' annullarsi lungo la curva Γ *delle formazioni* Ω_i *ha carattere invariantivo* (*rispetto alle trasformazioni di coordinate*).

Ma bisogna in primo luogo vedere se tale circostanza può verificarsi, se cioè si può soddisfare al sistema differenziale lineare omogeneo nelle ξ_i

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{dt} \xi_\lambda = 0$$

mediante *costanti di direzione* ξ_i, che siano dunque legate dalla relazione quadratica caratteristica

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k = 1.$$

Deduciamo la risposta affermativa dalle considerazioni generali seguenti. Siano

$$\xi_i (t), \quad \overline{\xi}_i (t) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

due sistemi di funzioni *qualunque* di t (finite, continue e derivabili) e indichiamo rispettivamente con Ω_i $\overline{\Omega}_i$ le relative espressioni definite dalle (5), e posto

$$\Theta = \sum_{ik} a_{ik} \xi_i \overline{\xi}_i$$

andiamo a calcolare $\frac{d\Theta}{dt}$, tenendo presenti le formole (Vol. I pag. 82)

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_j \left\{ \begin{matrix} i\ l \\ j \end{matrix} \right\} a_{kj} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} k\ l \\ j \end{matrix} \right\} a_{ij} \ ;$$

si ottiene subito

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\Theta}{dt} = \sum_{ik} a_{ik} (\Omega_i \overline{\xi}_k + \overline{\Omega}_k \xi_i).$$

In particolare, ponendo le $\overline{\xi}_i$ eguali alle ξ_i, abbiamo

$$\frac{d}{dt} \sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k = 2 \sum_{ik} a_{ik} \Omega_i \xi_k \ ,$$

e se supponiamo che le $\xi_i (t)$ verifichino il sistema differenziale (I), annullandosi allora tutte le Ω_i, ne segue:

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi_i \xi_k = \text{cost.}^{\text{te}}$$

Di qui segue dunque la proposizione:

a) Il sistema differenziale (I) *possiede l'integrale quadratico*

$$\sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = \text{cost.}^{\text{te}}.$$

E allora per soddisfare il sistema (I) *con costanti di direzione*, basterà assegnarne ad arbitrio i valori iniziali $\xi_i^{(0)}$ in un punto $P_0 \equiv (x_i^{(0)})$ di Γ, e gli integrali $\xi_i\,(t)$ determinati da questi valori iniziali, si conserveranno sempre eguali a costanti di direzione. E di più è da osservare che, a causa della linearità del sistema (I), questi integrali si mantengono regolari lungo tutta la curva Γ. Vediamo quindi che:

Se in un punto iniziale P_0 *della curva* Γ *si fissa una direzione arbitraria* $(\xi_i^{(0)})$, *il sistema differenziale* (I) *verrà a fissare, univocamente, lungo tutto il cammino* Γ, *per un qualunque suo punto* P, *una conseguente direzione* $\xi_i\,(t)$.

Diremo allora, con Levi-Civita, che la direzione $(\xi_i^{(0)})$ iniziale è stata trasportata *per parallelismo* lungo la curva Γ, e questa si dirà la *curva di trasporto.*

Le equazioni differenziali (I), scritte per una data curva Γ, sono dunque quelle che reggono questo *parallelismo per trasporto*, e come ora si vedrà, la curva di trasporto Γ ha, in generale, un ufficio essenziale. Le equazioni (I) del parallelismo di Levi-Civita si possono anche scrivere, introducendo i simboli di Christoffel di 1ª. specie, in luogo di quelli di seconda, sotto la forma perfettamente equivalente:

$$(\text{I}^*) \qquad \sum_i a_{ik}\frac{d\xi_i}{dt} + \sum_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ k\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{dt}\,\xi_k = 0.$$

§ 3.

Parallelismo assoluto nel caso Euclideo.

A giustificazione del nome di parallelismo adottato da Levi-Civita, esaminiamo il caso particolare che lo spazio S_n sia euclideo, ed allora potremo supporre che la (1') sia del tipo normale $\sum_i dx_i^2$, che cioè le $x_1, x_2, \ldots . x_n$ siano coordinate cartesiane ortogonali. Le equazioni (I), o (I*), di parallelismo diventano allora $\frac{d\xi_i}{dt} = 0$ e dimostrano che le

ξ_i, le quali sono qui ordinarii coseni di direzione, debbono ridursi a costanti assolute. Pertanto qualunque direzione in S_n, trasportata per parallelismo di LEVI-CIVITA, lungo una curva Γ arbitraria, rimane parallela a sè stessa *nel senso ordinario*. In questo caso se A, B sono due punti arbitrarii, ed una direzione uscente da A si trasporta per parallelismo in B lungo un *qualunque* cammino che vada da A in B, la direzione finale in B resta sempre la stessa.

Dimostriamo che soltanto nel caso euclideo l'arco A B di trasporto non ha influenza sulla direzione finale in B, fissata che sia l'iniziale in A.

Per questo si osservi che il verificarsi della detta circostanza, brevemente della *monodromia* del parallelismo, richiede che le (I), scritte come equazioni ai differenziali totali

$$d\,\xi_i + \mathop{S}_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda\, dx_\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

nelle n funzioni ξ_i delle n variabili indipendenti x_i, costituiscano un sistema completamente integrabile. Calcolando le condizioni d' integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \mathop{S}_{r} \left\{ \begin{matrix} r\,i \\ \nu \end{matrix} \right\} \xi_r = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathop{S}_{r} \left\{ \begin{matrix} rh \\ \nu \end{matrix} \right\} \xi_r ,$$

con semplici cangiamenti degli indici di sommazione, troviamo:

$$\mathop{S}_{r} \left[\frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} r\,i \\ \nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} rh \\ \nu \end{matrix} \right\} + \mathop{S}_{\lambda} \left(\left\{ \begin{matrix} r\,i \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda h \\ \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} rh \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda i \\ \nu \end{matrix} \right\} \right) \right] \xi_r = 0.$$

Si ha dunque illimitata integrabilità solo quando si annullano tutti i simboli di CHRISTOFFEL a quattro indici (Vol. I pag. 90)

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} r\,i \\ \nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} rh \\ \nu \end{matrix} \right\} + \mathop{S}_{\lambda} \left(\left\{ \begin{matrix} r\,i \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda h \\ \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} rh \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda i \\ \nu \end{matrix} \right\} \right);$$

ma ciò equivale all'annullarsi di tutti i simboli di RIEMANN, e lo spazio è necessariamente euclideo c. d. d.

Vediamo dunque che, eccetto nel caso euclideo, il parallelismo di LEVI-CIVITA è essenzialmente vincolato alla curva di trasporto, e sembrerebbe quindi opportuno parlare di *parallelismo vincolato* o parallelismo *per trasporto*.

§ 4.

Proprietà del parallelismo per trasporto.

Fissiamo la curva Γ di trasporto ed un suo punto iniziale P_0. Una direzione qualsiasi $(\xi_i^{(0)})$ per P_0 dà luogo, per trasporto lungo Γ, a una serie ∞^1 di direzioni perfettamente determinate (ξ_i) emananti dai punti P di Γ. Facendo variare la $(\xi_i^{(0)})$ attorno a P_0 dimostremo ora che la stella di ∞^{n-1} direzioni per P_0 si trasporta per parallelismo lungo Γ *rigidamente.*

Per questo cominciamo dall'osservare che, essendo le (I) lineari omogenee nelle ξ, ed ammettendo l'integrale quadratico

$$\sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = \text{cost.}^{\text{te}} ,$$

ne derivano subito le proprietà seguenti:

Se (ξ_i), $(\bar{\xi}_i)$ sono due sistemi integrali delle (I), anche $(a\,\xi_i + b\,\bar{\xi}_i)$, con a, b costanti, è un sistema integrale, onde

$$\sum_{ik} a_{ik}\,(a\,\xi_i + b\,\bar{\xi}_i)(a\,\xi_k + b\,\bar{\xi}_k) = \text{cost.}^{\text{te}}$$

e in particolare

$$\sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,\bar{\xi}_k = \text{cost.}^{\text{te}} ,$$

come segue anche subito dalla formola (B).

Questa formola dimostra il teorema:

α) *Se due direzioni* $(\xi_i^{(0)})$ $(\bar{\xi}_i^{(0)})$ *emananti da* P_0 *si trasportano per parallelismo lungo* Γ, *l'angolo* ω *che esse formano fra loro rimane costante.*

Difatti, per la formola superiore,

$$\cos\omega = \sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,\bar{\xi}_k$$

rimane costante

Consideriamo ora di più che se prendiamo per P_0 una terza direzione $(\eta_i^{(0)})$ appartenente al fascio delle prime due, avremo

$$\eta_i^{(0)} = a\,\xi_i^{(0)} + b\,\bar{\xi}_i^{(0)}$$

con a, b costanti legate dalla relazione

$$a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\omega = 1.$$

Questa terza direzione, trasportata per parallelismo lungo Γ, dà luogo alla direzione generica

$$\eta_i = a\,\xi_i + b\,\bar{\xi}_i\,,$$

che rimane sempre nella giacitura (nell'S_2) individuata da $(\xi_i),(\bar{\xi}_i)$. In generale un numero qualunque r di direzioni indipendenti per P_0 fissano un S_r per P_0, ed ogni direzione in questo S_r, trasportata lungo Γ, rimane sempre nell'S_r individuato dalle r direzioni che provengono per trasporto dalle iniziali, e forma con queste angoli invariabili. Sussiste dunque la proprietà già accennata sopra:

β) *La stella di direzioni emanante da* P_0 *viene trasportata, per parallelismo lungo* Γ, *rigidamente.*

Domandiamo ora se esistono curve Γ in S_n per le quali una direzione inizialmente tangente a Γ, venga trasportata per parallelismo, sempre tangenzialmente a Γ. Per questo occorre e basta che le equazioni (I) di parallelismo risultino soddisfatte ponendo $\xi_i = \frac{dx_i}{dt}$, che cioè lungo Γ sussistano le equazioni:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{dt}\,\frac{dx_\mu}{dt} = 0\,.$$

Ma queste sono precisamente le equazioni differenziali delle geodetiche in S_n, onde vale il teorema:

γ) *Le linee geodetiche in* S_n, *e queste soltanto, hanno la proprietà di avere tutte le direzioni tangenti parallele nel senso di* Levi-Civita.

Si osservi che la nozione di parallelismo per trasporto, indipendente da quella di linee geodetiche come minimizzanti l'arco, dà così una nuova definizione di queste linee.

Ed ora, come corollario della proposizione α), abbiamo l'altra

δ) *Se una direzione qualunque si trasporta per parallelismo lungo una linea geodetica di* S_n, *essa rimane inclinata di un angolo costante su questa linea.*

Si può domandare più in generale come varia l'angolo ψ d'inclinazione sulla curva Γ di trasporto per una qualunque direzione (ξ_i). Siccome si ha

$$\cos\psi = \sum_{ik} a_{ik}\,\xi_i\,\frac{dx_i}{dt}\,,$$

basta applicare la formola (B) § 2, nella quale si ponga

$$\Omega_i = 0\ ,\ \overline{\Omega}_k = \frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{dt} \frac{dx_\mu}{dt}\ ,$$

e si avrà

$$\frac{d\cos\psi}{dt} = \sum_{ik} a_{ik} \left[\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} \right].$$

Ora indicando con $\frac{1}{\rho}$ la flessione della curva Γ e con η_k le costanti di direzione della sua normale principale, si ha (pag. 456)

$$\overline{\Omega}_k = \frac{\eta_k}{\rho}$$

e la formola superiore si cangia nell'altra

$$\frac{d\ \cos\psi}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{ik} a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k.$$

La somma a destra dà il coseno dell'angolo σ d'inclinazione della direzione (ξ_i) sulla normale principale di Γ, e ne risulta la formola finale di LEVI-CIVITA

$$\frac{d\cos\psi}{dt} = \frac{\cos\sigma}{\rho}\ . \tag{6}$$

Nel caso di una linea geodetica è $\frac{1}{\rho} = 0$ e si ritorna alla proposizione δ). Si osservi anche che se lo spazio S_n è Euclideo, e la curva Γ qualunque, la (6) ci dà le formole di FRENET per le derivate dei coseni di direzione della tangente.

§ 4.

Parallelismo subordinato.

Entro lo spazio S_n consideriamo una varietà V_m subordinata a m dimensioni $(1 < m < n)$ e presa una curva Γ di V_m, ed una serie (ξ_i) di direzioni emananti dai punti di Γ *ed appartenenti alla* V_m, domandiamoci *quando accade che queste direzioni* (ξ_i) *sono parallele nel senso di* LEVI-CIVITA, *rispetto alla varietà* V_m?

Cominciamo dallo stabilire la proposizione:

A) *Se le direzioni* (ξ_i) *sono già parallele rispetto allo spazio ambiente* S_n, *tali sono anche rispetto alla varietà subordinata* V_m.

Per dimostrarla col calcolo, prendiamo la V_m sotto forma parametrica:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots u_m), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

essendo $u_1, u_2 \ldots u_m$ coordinate arbitrarie in V_m, e scriviamo il ds^2 di V_m:

$$ds^2 = \sum_{i,k} b_{ik}\, du_i\, du_k, \tag{8}$$

dove il segno Σ indicherà sommazione rispetto ad indici variabili da *1* a *m* (l'altro segno sommatorio S serbando il significato del § 2). Conveniamo di distinguere i simboli di CHRISTOFFEL costruiti per la forma (1) da quelli costruiti per la (2), apponendovi l'indice *a* nel primo caso, l'indice *b* nel secondo. Ricordiamo che i coefficienti b_{ik} nella (8) si esprimono per i coefficienti $a_{\lambda\mu}$ colla formola

$$b_{ik} = \mathrm{S}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k}, \tag{9}$$

e inoltre che se la direzione (ξ_i) ha *rispetto alla* V_m, le costanti di direzione $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, valgono le formole

$$\xi_\lambda = \sum_i \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \eta_i \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n), \tag{10}$$

le quali derivate rispetto all'arco *t* di Γ dànno:

$$\frac{\partial \xi_\lambda}{dt} = \sum_{ik} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} \frac{du_k}{dt} \eta_i + \sum_i \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{d\eta_i}{dt}. \tag{11}$$

Introduciamo le formazioni Ω_λ date dalle (5)

$$\Omega_\lambda = \frac{d\xi_\lambda}{dt} + \mathrm{S}_{r,s} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \lambda \end{matrix} \right\}_a \xi_r \frac{dx_s}{dt},$$

che per le (11) e per le formole

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_k \frac{\partial x_s}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial t},$$

scriviamo

$$\Omega_\lambda = \sum_{ik} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} \eta_i \frac{du_k}{dt} + \sum_i \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{d\eta_i}{dt} + \mathop{\mathrm{S}}_{r,s} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \lambda \end{matrix} \right\}_a \xi_r \sum_\lambda \frac{\partial x_r}{\partial u_k} \frac{du_k}{dt}.$$

Questa si moltiplichi per

$$a_{j\lambda} \frac{\partial x_j}{\partial u_\mu},$$

con μ indice fisso e si sommi rispetto agli indici j, λ variabili da 1 a n, tenendo conto delle formole

$$\mathop{\mathrm{S}}_{j\lambda} a_{j\lambda} \frac{\partial x_j}{\partial u_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} = b_{i\mu}, \quad \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda} a_{j\lambda} \left\{ \begin{matrix} r\,s \\ \lambda \end{matrix} \right\}_a = \left[\begin{matrix} r\,s \\ j \end{matrix} \right]_a$$

$$\xi_r = \sum_i \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \eta_i,$$

e ne dedurremo:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{j\lambda} a_{j\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} \Omega_\lambda = \sum_i b_{i\mu} \frac{d\eta_i}{dt} + \sum_{ik} \eta_i \frac{du_k}{dt} \Big\{ \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda j} a_{\lambda j} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\mu} + \mathop{\mathrm{S}}_{r,s,i} \left[\begin{matrix} r\,s \\ j \end{matrix} \right]_a \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \times$$

$$\times \frac{\partial x_s}{\partial u_k} \frac{\partial u_j}{\partial u_\mu} \Big\}.$$

Ma a destra la quantita che sotto la somma doppia $\sum_{ik}$ moltiplica $\eta_i \frac{du_k}{dt}$ eguaglia precisamente (pag. 422) il valore del simbolo

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ \mu \end{matrix} \right]_b$$

costruito per la forma quadratica (8). La precedente acquista quindi la forma definitiva:

$$(12) \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{j\lambda} a_{j\lambda} \frac{\partial x_j}{\partial u_\mu} \Omega_\lambda = \sum_i b_{i\mu} \frac{d\eta_i}{dt} + \sum_{ik} \left[\begin{matrix} i\,k \\ \mu \end{matrix} \right] \eta_i \frac{du_k}{dt} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n),$$

dove a destra figurano appunto le m quantità che, eguagliate a zero simultaneamente, esprimono, secondo le (I*), che le direzioni (η_i) entro V_m sono parallele.

Ora se già queste direzioni sono parallele rispetto allo spazio ambiente, sono uulle tutte le Ω_λ e le (12) dicono appunto che ha luogo

parallelismo anche rispetto a V_m. In particolare se le direzioni (ξ_i) si suppongono tangenti alla Γ, che sarà geodetica di S_n, ne risulta come corollario la proposizione ben nota:

Ogni geodetica di S_n *è anche geodetica rispetto a qualunque varietà subordinata che la contenga.*

§ 6.

Direzioni associate.

Per rispondere completamente alla domanda formulata al principio del § precedente introduciamo una nuova nozione, suggerita spontaneamente dalle formole (12).

Sia Γ una curva qualunque di S_n, dai cui punti emana una serie ∞^1 di direzioni (ξ_i). Se queste *non sono parallele* nel senso di LEVI-CIVITA, le n relative quantità

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$$

non sono tutte nulle, e per ciò esiste in ogni punto di Γ una direzione (η_i), perfettamente individuata, con costanti di direzione proporzionali alle Ω_i, scriviamo

$$\eta_i = \mathrm{R}\,\Omega_i,$$

e la quantità R, che assumeremo positiva, sarà data da

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}\,\Omega_i\,\Omega_k}\,. \tag{13}$$

Le proprietà invariantive delle Ω_i, espresse dalle formole (A*) § 1, dimostrano che la direzione (η_i) non cangia per cangiamenti di coordinate, e la quantità $\frac{1}{\mathrm{R}}$ stessa è un invariante metrico *relativo alla curva* Γ *ed alla serie* ∞^1 *di direzioni* (ξ_i).

Chiameremo questa direzione (η_i) (meglio questa serie di direzioni) *l'associata* della (ξ_i) lungo Γ e la quantità $\frac{1}{\mathrm{R}}$ *curvatura associata* della Γ, rispetto alle direzioni (ξ_i). Questa misura, in certo modo, la rapidità di scostamento dal parallelismo delle direzioni (ξ_i). Se le (ξ_i) sono parallele si ha $\frac{1}{\mathrm{R}} = 0$ e la direzione associata è affatto *indeterminata*. In

ogni caso da $\underset{ik}{S} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = 1$, derivando rapporto a t, segue per la (B) § 2

$$\underset{ik}{S} a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0,$$

onde risulta che la direzione associata (η_i) è sempre normale alla primitiva (ξ_i).

Concludiamo: *Se da ciascun punto di una curva* Γ *in* S_n *emana una direzione* (ξ_i), *e queste direzioni non sono parallele in* S_n, *ne risulta univocamente determinata una seconda serie di direzioni* (η_i) *associate alle* (ξ_i) *e normali a queste.* (*)

In particolare, quando le direzioni (ξ_i) siano quelle delle tangenti alla Γ (non geodetica di S_n), le direzioni associate sono quelle delle normali principali e la curvatura associata coincide colla flessione della Γ.

Colla nozione di direzioni associate siamo in grado di rispondere in generale alla questione proposta relativa al parallelismo delle (ξ_i) rispetto alla varietà subordinata V_m. Questo avverrà allora ed allora soltanto che sussistano le m relazioni:

$$\underset{j\lambda}{S} a_{j\lambda} \frac{\partial x_j}{\partial u_\mu} \Omega_\lambda = 0\,, \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

le quali esprimono che la direzione associata alla (ξ_i) deve essere normale a tutte le m direzioni in V_m cioè al suo S_m tangente. Resta così stabilito il teorema.

B) *Se dai punti di una curva* Γ, *entro la varietà subordinata* V_m, *emanano le direzioni* (ξ_i), *la condizione necessaria e sufficiente pel parallelismo delle* (ξ_i) *in* V_m, *è che le direzioni* (η_i), *associata alle* (ξ_i), *rispetto allo spazio ambiente, siano normali lungo* Γ *alla* V_m.

In questa proposizione è inclusa la A) § 5, poichè quando le (ξ_i) sono già parallele nello spazio ambiente, le direzioni associate sono indeterminate e la condizione B) può riguardarsi come soddisfatta.

§ 7.

Conseguenze e casi particolari.

Dalle proposizioni generali stabilite possiamo dedurre varie conseguenze.

(*) Se lo spazio S_n è euclideo le direzioni associate alle (ξ_i) si hanno subito costruendo l' indicatrice sferica di queste direzioni, e le direzioni associate sono date dalle tangenti all'indicatrice.

In primo luogo prendiamo per le (ξ_i) le direzioni tangenti alla Γ, e le direzioni associate saranno quelle delle normali principali, ovvero resteranno indeterminate, se la Γ è geodetica di S_n. Come corollario della B), si ha la nota proprietà:

1) *Le geodetiche di ogni varietà subordinata* V_m, *quando non siano già geodetiche dello spazio ambiente, sono caratterizzate dalla proprietà di avere la direzione della normale principale ortogonale alla* V_m.

In secondo luogo prendiamo due varietà V_m, V'_m, dapprima dello stesso numero m di dimensioni, che passino per una curva Γ e lungo questa si tocchino (abbiano lungo Γ lo stesso S_m tangente). Dalla B) abbiamo:

2) *Per due varietà* V_m, V'_m *che si tocchino lungo* Γ *il parallelismo di trasporto è il medesimo*:

Si abbiano ora invece per Γ due varietà V_m, V_q di diverso numero di dimensioni per es. $q > m$, e lungo Γ la varietà minore V_m tocchi la maggiore V_q; (*) allora se dai punti di Γ emanano direzioni (ξ_i) appartenenti a V_m (e per ciò anche a V_q), quando esse siano parallele rispetto alla maggiore V_q, tali saranno anche rispetto alla minore V_m (**).

Ed ora proponiamoci quest'altra questione:

Data una curva Γ *in* S_n, *e una serie* ∞^1 *di direzioni* (ξ_i) *emananti dai suoi punti, come si riconosce se esistono varietà contenenenti* Γ *e le direzioni* (ξ_i) *in modo che queste siano parallele nella varietà?*

Se le direzioni (ξ_i) fossero quelle delle tangenti a Γ, la questione si risolve subito affermativamente conducendo per Γ una varietà, p. e. una V_2 che abbia Γ per geodetica.

Se le (ξ_i) non sono le direzioni tangenti, si costruisca la V_2 (la superficie) luogo delle geodetiche spiccate dai punti di Γ nelle direzioni (ξ_i). Per quanto precede, sarà necessario e sufficiente che *su questa* V_2 le direzioni (ξ_i) siano parallele, e per ciò la direzione associata (η_i), già normale alla (ξ_i), sia anche normale a Γ. Si ha dunque il teorema:

C) *Data una curva* Γ *e lungo di essa una serie* (ξ_i) *di direzioni, affinchè queste siano parallele rispetto a qualche varietà subordinata, con-*

(*) Cioè l'S_m tangente a V_m sia contenuto in quello S_q tangente a V_q.

(**) Per $q = n$ si ritorna alla proposizione A) § 4.

tenente Γ, *è necessario e sufficiente che la serie* (η_i) *di direzioni associate sia normale a* Γ (*).

Per interpretare questo risultato in un altro modo, rispetto alla V_2 sopra costruita, si osservi che le geodetiche g di S_n nelle direzioni (ξ_i) sono anche geodetiche di V_2, e per ciò siamo ricondotti alla questione seguente:

Sopra un'ordinaria superficie S è segnato un sistema ∞^1 di linee geodetiche g ed una loro linea trasversale Γ; quando è che lungo Γ le direzioni g sono parallele su S?

Ricorriamo alla nozione della *linea di stringimento* delle ∞^1 geodetiche g come della linea luogo dei punti ove ogni geodetica g è più vicina alla successiva, o meglio alla definizione di linea luogo dei puuti ove le trajettorie ortogonali delle g hanno curvatura geodetica nulla. Dimostreremo il teorema:

D) *La condizione necessaria e sufficiente perchè abbia luogo, lungo la trasversale* Γ, *l'indicato parallelismo è che la* Γ *sia la linea di stringimento delle geodetiche* g.

Cominciamo da una ricerca più generale. La superficie S sia riferita ad un sistema curvilineo qualunque (u_1, u_2) ed abbiasi

$$ds^2 = E\,du_1^2 + 2\,F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2.$$

Si domanda quando accade che lungo una linea $u_1 = \text{cost.}^{te}$, p. e. lungo la $u_1 = 0$ assunta come curva di trasporto, le direzioni tangenti alle $u_2 = \text{cost.}^{te}$ sono parallele (nel senso di Levi-Civita)?

Le relative costanti di direzione hanno qui i valori

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\,,\quad \xi_2 = 0$$

e le equazioni (I) di parallelismo che diventano

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{E}} = 0 \quad (i = 1,2)$$

(*) Nella C) è compreso anche il caso che le (ξ_i) siano tangenti a Γ, chè allora le direzioni associate sono quelle delle normali principali e la condizione d'ortogonalità è soddisfatta.

si riducono all'unica (*)

$$\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_{u_1=0} = 0.$$

Restituendo le consuete notazioni

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

abbiamo dunque:

Le direzioni delle linee $v = \text{cost.}^{\text{te}}$ *lungo la* $u = 0$ *sono parallele nel senso di* Levi-Civita *quando si annulla* $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ *per* $u = 0$.

Suppongasi ora di più che le v=cost.te siano geodetiche e si abbia quindi (Vol. I pag. 270.

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Indicando allora con $\frac{1}{\rho_g}$ la curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}^{\text{te}}$, proveremo il teorema D) dimostrando che le due condizioni

$$\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \frac{1}{\rho_6} = 0 \quad (\text{per } u = 0)$$

sono equivalenti. Calcoliamo per ciò la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ delle trajettorie ortogonali delle $v = \text{cost.}^{\text{te}}$ dalla loro equazione differenziale

$$\mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv = 0$$

mediante la formola di Bonnet (Vol. I pag. 270). Troviamo

$$\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_g} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$$

e qui, avendosi $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$, resta provata l'asserzione superiore e il teorema D).

(*) L'altra $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right) + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} = 0$ è una conseguenza di queste.

§ 8.

Problema inverso delle direzioni associate.

Proponiamoci ora, relativamente alle direzioni associate, il problema inverso:

Data una curva Γ, *e pei punti di* Γ *una serie* ∞^1 *di direzioni* (η_i), *trovare tutte le serie di direzioni* (ξ_i) *lungo* Γ, *che non siano già parallele nello spazio ambiente* S_n, (*) *e di cui le prescritte* (η_i) *siano le associate.*

Fissiamo ad arbitrio, in ogni punto di Γ, una n^{pla} *ortogonale* di direzioni

$$(\xi_i^{(1)}), (\xi_i^{(2)}) \ldots (\xi_i^{(n)}),$$

di cui la n^{ma} coincida coll'assegnata (η_i) e sia (ξ_i) una serie di direzioni (non parallele) con associata $(\eta_i) \equiv (\xi_i^{(n)})$. Siccome la (ξ_i) deve essere ortogonale alla $(\xi_i^{(n)})$, avremo

$$\xi_i = \lambda_1 \xi_i^{(1)} + \lambda_2 \xi_i^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-1} \xi_i^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{14}$$

dove i moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ saranno ordinarii coseni di direzione rispetto alla $(n-1)^{\text{pla}}$ ortogonale $(\xi_i^{(1)}), (\xi_i^{(2)}) \ldots (\xi_i^{(n-1)})$, e dovrà quindi aversi:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 = 1. \tag{15}$$

Indichiamo con Ω_i le formazioni (5) per la (ξ_i) e con $(\Omega_i^{(r)})$ le analoghe per le $(\xi_i^{(r)})$, e dalle (14) avremo

$$\Omega_i = \sum_{r=1}^{r=n-1} \xi_i^{(r)} \frac{d\lambda_r}{dt} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \Omega_i^{(r)} \lambda_r .$$

Per risolvere il problema occorre determinare le $n-1$ incognite $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \ldots \lambda_{n-1}(t)$ in guisa che sussista la (15) e le Ω_i risultino proporzionali alla $\xi_i^{(n)}$, cioè si abbia

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \xi_i^{(r)} \frac{d\lambda_r}{dt} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \Omega_i^{(r)} \lambda_r = \rho \, \xi_i^{(n)}, \tag{16}$$

(*) Se le ξ_i sono parallele nello spazio ambiente. la direzione associata è indeterminata.

con ρ conveniente fattore di proporzionalità. Ora, avendo s uno qualunque dei valori $1, 2, \ldots n-1$, si moltiplichino le (16) per

$$a_{ij}\,\xi_j^{(s)}$$

e si sommi rispetto agli indici i, j da 1 a n; così, a causa delle condizioni d'ortogonalità, si ottiene il sistema risoluto

$$\frac{d\lambda_s}{dt} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \left(\mathop{\mathrm{S}}_{ij} a_{ij}\,\xi_j^{(s)}\,\Omega_i^{(r)} \right) \lambda_r = 0\,,$$

che equivale perfettamente alle (16). Ponendo

$$b_{rs} = \mathop{\mathrm{S}}_{ij} a_{ij}\,\xi_j^{(s)}\,\Omega_i^{(r)} \tag{17}$$

il sistema differenziale per le λ si scrive

$$\frac{d\lambda_s}{dt} + \sum_{r=1}^{r=n-1} b_{rs}\,\lambda_r = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots n-1) \tag{III}$$

Ma i coefficienti b_{rs} soddisfano le condizioni di *emisimmetria*

$$b_{rs} + b_{sr} = 0\,,$$

come risulta dal derivare l'identità

$$\mathop{\mathrm{S}}_{ij} a_{ij}\,\xi_i^{(r)}\,\xi_j^{(s)} = \text{cost.}^{\text{te}}$$

coll'applicare la (B) § 2. Il sistema (III) è dunque un sistema ortogonale, coll'integrale quadratico

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 = \text{cost.}^{\text{te}},$$

e però tutte le condizioni possono soddisfarsi. Ne concludiamo:

Fissata una serie (η_i) *di direzioni lungo* Γ, *esistono* ∞^{n-2} *serie di direzioni* (ξ_i) *lungo* Γ *di cui la* (η_i) *è associata*; *ciascuna* (ξ_i) *risulta individuata fissando ad arbitrio in un punto iniziale di* Γ *la direzione* $(\xi_i^{(0)})$ *ortogonale alla* (η_i).

Inoltre dall'essere il sistema (III) ortogonale seguono, come al § 4, questi due corollari:

α') *Due diverse serie di direzioni, che abbiano lungo* Γ *la stessa serie associata, formano angolo costante fra loro.*

β') *La stella di* ∞^{n-2} *direzioni emanante da un punto iniziale* P_0 *di* Γ, *ortogonalmente alla* $(\eta_i^{(0)})$, *quando sia trasportata lungo* Γ *in guisa che le direzioni rimangano associate alla* (η_i), *si muove rigidamente.*

§ 9.

Linee trasversali di parallelismo.

Consideriamo ora particolarmente il caso delle due dimensioni per trattare il problema seguente:

Sopra una superficie S pensiamo tracciato un qualunque sistema ∞^1 di linee che prendiamo per linee $v = \text{cost.}^{te}$, e domandiamo di trovare quelle eventuali loro linee *trasversali* L lungo le quali le direzioni tangenti alle linee date $v = \text{cost.}^{te}$ riescono parallele nel senso di Levi-Civita. Prendendo comunque le altre linee coordinate $u = \text{cost.}^{te}$, abbiasi:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

e per le costanti ξ_1, ξ_2 di direzione delle $v = \text{cost.}^{te}$ avremo come sopra

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad \xi_2 = 0.$$

Indicando con d i differenziali presi lungo una supposta trasversale L, le equazioni (I) di parallelismo diventano

$$d\xi_i + \sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} 1\lambda \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda\, du + \sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} 2\lambda \\ i \end{matrix} \right\} \xi_\lambda\, dv = 0\,,$$

ovvero

$$\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ i \end{matrix} \right\} \right] du + \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ i \end{matrix} \right\} \right] dv = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Per $i = 2$ si ottiene l'equazione differenziale

(17
$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} du + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} dv = 0$$

e la stessa equazione si ha ponendo $i = 1$, a causa delle formole

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial E}{\partial u} = E \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + F \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial E}{\partial v} = E \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + F \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \end{cases}$$

Supposto dapprima che non si annullino insieme $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$, vediamo dunque:

Esistono ∞^1 *linee trasversali delle* $v = \text{cost.}^{te}$ *e sono le linee integrali dell'equazione differenziale* (17).

Si osservi che se $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$, le trasversali delle $v = \text{cost.}^{te}$ sono le $u = \text{cost.}^{te}$, e se invece $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$, allora le trasversali coincidono colle $v = \text{cost.}^{te}$ stesse, come è evidente da che (essendo $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$) le $v = \text{cost.}^{te}$ sono allora geodetiche. Nel caso eccezionale sopra escluso che siano insieme

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0 \,.\, \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0,$$

la superficie S è a curvatura K nulla (a causa della formola (V) Vol. I pag. 102), le $v = \text{cost.}^{te}$ sono geodetiche, insieme alle loro trajettorie ortogonali, perchè dal calcolo eseguito al § 7 risulta che la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ di queste ultime è pur nulla. In sostanza dunque questo è il caso ovvio di un piano ordiuario e di un sistema di rette parallele in esso, le cui trasversali sono affatto indeterminate.

La determinazione delle linee trasversali del sistema $v = \text{cost.}^{to}$ si può riguardare sotto un secondo aspetto quando la superficie S si pensi immersa in qualunque spazio S_n, p. e. nell'ordinario S_3 euclideo.

La proposizione D) del § 7 dimostra che se nei punti di una trasversale L si conducouo le geodetiche g dell'S_n tangenti alle linee $v = \text{cost.}^{te}$, sulla superficie V_2 luogo delle g la trasversale L è linea di stringimento. La determinazione delle trasversali L può dunque riguardarsi sotto quest'altro aspetto:

Nella congruenza delle geodetiche g *dello spazio tangenti alle linee* $v = \text{cost.}^{te}$ *della superficie* S, *trovare le superficie* V_2, *luogo di* ∞^1 *geodetiche* g, *che hanno le loro linee di stringimento sulla superficie* S (*).

Seguendo un metodo analogo a quello sopra descritto per la ricerca, sulla superficie S, delle trasversali delle linee $v = \text{cost.}^{te}$ si risolve in generale il problema seguente:

(*) Un secondo ordinamento è dato dal prendere le V_2 luogo delle g tangenti ungo una singola linea $v = \text{cost.}^{te}$.

Essendo data un'equazione differenziale del 1° *ordine*

$$(\alpha) \qquad M\,du + N\,dv = 0,$$

con M, N *funzioni date di* u, v, *formare l'equazione diffenzinle*

$$(\beta) \qquad A\,du + B\,dv = 0$$

delle loro trasversali in parallelismo.

Si trova che A, B si possono prendere proporzionali ai valori seguenti:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} A \equiv N\left[\dfrac{\partial M}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} M - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} N\right] - M\left[\dfrac{\partial N}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} M - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} N\right] \\ B \equiv N\left[\dfrac{\partial M}{\partial v} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} M - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} N\right] - M\left[\dfrac{\partial N}{\partial v} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} M - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} N\right] \text{(*)}. \end{cases}$$

Si può anche considerare un problema *inverso* delle trasversali, cioè: *dato un sistema* ∞^1 *di linee* L *trovare quei sistemi* L′ *di cui le* L *siano le trasversali.*

Si riconosce nel modo più semplice geometricamente, che la soluzione generale comporta questa volta una funzione arbitraria. potendosi scegliere ad arbitrio *una* delle curve L′, sia L'_0 da cui le altre restano individuate. E infatti basta trasportare per parallelismo, lungo ciascuna L, il corrispondente elemento lineare (la direzione) della L'_0. Così ad ogni punto di S viene associata una direzione determinata e le linee L′ si hanno come linee integrali di una corrispondente equazione differenziale del 1° ordine.

(*) Per es. nel caso del piano ordinario

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

le linee integrali dell'equazione differenziale

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

hanno per trasversali quelle determinate dall'equazione

$$\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx + \left(N\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial N}{\partial y}\right)dy = 0.$$

§ 10.

Sistemi doppiamente trasversali. Superficie di traslazione nell'S_n.

Ricerchiamo ora, sopra una qualunque superficie S, i doppi sistemi di linee (u, v), nei quali le linee di ciascun sistema siano trasversali per parallelismo di quelle dell' altre. Se assumiamo il sistema (u, v) a sistema coordinato, i risultati del § 7 dimostrano:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il sistema coordinato (u, v) *sia un sistema doppiamente trasversale è che si annullino insieme i due simboli* $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$.

Ora sappiamo che le condizioni

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0 , \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$$

caratterizzano su qualunque superficie le *reti di* TCHEBYCHEF (Vol. I, § 60 pag. 653), ed abbiamo quindi:

I sistemi doppiamente trasversali su qualunque superficie sono dati da tutte e da sole le reti di TCHEBYCHEF.

Si è dimostrato (Vol. I, § 62 D)) che su qualunque superficie esistono infinite reti di TCHEBYECHEF, dipendenti da due funzioni arbitrarie, e che la rete è individuata appena siano fissate due curve di diverso sistema nella rete. Le equazioni di SERVANT (ibid. § 61) che ci hanno servito allo scopo non esprimono appunto altro che il doppio parallelismo nel senso di LEVI-CIVITA.

Si deve al BOMPIANI una notevole estensione di questi risultati alle *superficie di traslazione* (per parallelismo) in uno spazio curvo qualunque S_n a n dimensioni, ed è di questa estensione di cui vogliamo qui da ultimo occuparci. Sostituiremo alle considerazioni infinitesimali del BOMPIANI, (*) una dimostrazione analitica perfettamente analoga a quello del Vol. I § 62, fondata sulle *equazioni di* SERVANT *generalizzate*.

(*) BOMPIANI. Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes (Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences t. 169 pag. 840).

In questa nota il BOMPIANI dimostra anche che le superficie minime in qualunque S_n sono superficie di traslazione le cui curve generatrici sono quelle di lunghezza nulla.

Diremo che una superficie V_2 dell'S_n è una superficie di traslazione (per parallelismo) quando possegga un doppio sistema di curve (u, v) tali che lungo ciascuna linea dell'uno e dell'altro sistema le direzioni tangenti alle linee del residuo sistema siano parallele nel senso di LEVI-CIVITA, *rispetto allo spazio ambiente.* Siccome il parallelismo ha luogo, a più forte ragione, rispetto alle V_2, ne segue, per quanto si è visto sopra, che sulla V_2 la rete (u, v) è certamente una rete di TCHEBYCHEF, e si possono quindi assumere a parametri (u, v) gli archi di queste linee. Ma allora, traducendo il doppio parallelismo secondo le formole (I) § 2, si trova immediatamente il seguente sistema differenziale:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + \sum_{r,s} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

a cui debbono soddisfare le n coordinate

$$x_i = x_i\,(u, v) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

nelle equazioni parametriche della V_2. Questo sistema (IV) ci da appunto le indicate equazioni generalizzate di SERVANT. Ed ora, precisamente come nel caso $n = 2$, dimostriamo:

Date ad arbitrio nello spazio S_n *due curve* C, Γ, *uscenti da un punto* O *dello spazio, esiste una ed una sola superficie di traslazione* V_2, *che contiene* C *e* Γ *come curve iniziali della rete di* TCHEBYCHEF.

Prendiamo a parametro u l'arco della C misurato da O, e a parametro v l'arco della Γ misurato medesimamente da O. Si sa dall'analisi che un sistema differenziale del tipo iperbolico, come (IV), possiede una ed una sola soluzione

$$\text{(18)} \qquad x_i = x_i\,(u, v),$$

tale che per $v=0$ le x_i si riducono a funzioni date della u, e per $u=0$ a funzioni egualmente date della v. Ma appunto le nostre condizioni geometriche fissano questi dati iniziali, e per ciò anche gli integrali (18). Ed ora resta solo da constatare, che sulla superficie V_2 colle equazioni parametriche (18) la rete (u, v) è una rete di TCHEBYCHEF, ed u, v sono effettivamente gli archi di curve qualunque della rete, dopo di che, essendo soddisfatte le (IV), avrà luogo il doppio parallelismo richiesto, e la V_2 sarà la superficie di traslazione domandata. Se scriviamo il ds^2 della V_2 sotto la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

avendo posto

$$E = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u}, \quad F = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v}$$

$$G = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial v},$$

dovremo dunque provare che si ha $E = G = 1$.

Intanto se deriviamo E rapporto a v abbiamo

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + \sum_{i,k,s} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v},$$

indi per le (IV), e per la formola $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_s} = \begin{bmatrix} is \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ks \\ i \end{bmatrix}$, si può scrivere

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \sum_{iks} \begin{bmatrix} is \\ k \end{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v}$$

$$- 2 \sum_{i,k,s} a_{ik} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_r}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v} =$$

$$= 2 \sum_{iks} \begin{bmatrix} is \\ k \end{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v} - 2 \sum_{rsk} \begin{bmatrix} rs \\ k \end{bmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_s}{\partial v}$$

Le due somme a destra non differiscono che per lo scambio dei due indici i,r, e si elidono, onde risulta $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, cioè $E = \varphi(u)$. Ma siccome l'arco della linea $v = 0$ è appunto u, deve aversi $E = 1$ per $v = 0$, e per ciò sempre $E = 1$. Similmente anche $G = 1$ e il teorema è dimostrato.

INTRODUZIONE

alla Geometria proiettiva differenziale d'una superficie.

Nota di GUIDO FUBINI.

I metodi usati in questo libro per lo studio delle proprietà metriche *di una superficie, cioè delle proprietà invarianti per movimenti, si possono, convenientemente modificati, applicare anche allo studio delle proprietà* proiettive. *Come si* inizii *un simile studio sarà rapidamente svolto in questa nota.*

§ 1.

Un lemma di geometria proiettiva.

Siano ξ_1, ξ_2 coordinate omogenee dei punti di una retta; siano

$$\varphi_2 = \sum_{1,2} a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s \qquad\qquad f_3 = \sum_{1,2} a_{rst}\, \xi_r\, \xi_s\, \xi_t$$

due forme, una quadratica, l'altra cubica, nelle ξ; il discriminante $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$ della prima sia differente da zero. La equazione $\varphi_2 = 0$ determinerà due punti (distinti) della retta; la $f_3 = 0$ una terna di punti. Anche la forma:

$$\varphi_3 = f_3 + (h\, \xi_1 + k\, \xi_2)\, \varphi_2, \qquad (h, k = \text{cost.}^{\text{ti}})$$

uguagliata a zero, individua una terna di punti variabile coi parametri h, k; la quale genera una schiera lineare.

Noi ci chiediamo: *Tra queste* ∞^2 *terne di punti possiamo noi sceglierne una e una sola in modo intrinseco* (cioè indipendente dal particolare sistema di coordinate, da noi usato) *ed invariante* (cioè che si conservi per trasformazioni proiettive)? *Evidentemente sì;* basterà scegliere tra le precedenti quella unica forma

$$\varphi_3 = \sum \beta_{rst}\, \xi_r\, \xi_s\, \xi_t$$

che è *coniugata* od *apolare alla* φ_2 (che ha cioè la forma φ_2 proporzionale allo HESSIANO), ossia quella forma φ_3 tale che valgano per $t = 1, 2$ le

$$\sum_{r,s} \beta_{rst} A_{rs} = 0$$

ove A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante $A = |a_{rs}|$, diviso per A. Infatti le forme apolari a φ_2 sono tutte e sole le forme

$$\lambda(-a_{11}^2 \xi_1^3 + 3 a_{11} a_{22} \xi_1 \xi_2^2 + 2 a_{12} a_{22} \xi_2^3) + \mu(2 a_{12} a_{11} \xi_1^3 + 3 a_{11} a_{22} \xi_1^2 \xi_2 - a_{22}^2 \xi_2^3)$$

$$(\lambda, \mu \quad \text{qualsiasi});$$

la precedente forma φ_3 è di questo tipo soltanto se:

$$h = \frac{3}{4} \frac{2 a_{12} b_{112} - a_{11} b_{122} - a_{22} b_{111}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad k = \frac{3}{4} \frac{2 a_{12} b_{122} - a_{22} b_{112} - a_{11} b_{222}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Le forme precedenti si possono ridurre a tipo *canonico* nel modo seguente.

Usiamo coordinate tali che i due punti, per cui $\varphi_2 = 0$, siano i punti ove $\xi_1 : \xi_2$ vale 0, oppure ∞; allora la forma φ_2 si ridurrà alla $2 a_{12} \xi_1 \xi_2$, perchè $a_{11} = a_{22}$ risultano nulli, mentre la forma φ_3 si ridurrà alla $\beta_{111} du^3 + \beta_{222} dv^3$. Accanto alla forma φ_3 si considererà anche la sua forma covariante cubica

$$\bar{\varphi}_3 = \beta_{111} du^3 - \beta_{222} dv^3,$$

la quale, uguagliata a zero, dà i tre punti coniugati armonici dei punti che annullano φ_3 rispetto ai due punti che annullano φ_2.

Alla precedente forma φ_3 si può giungere in altro modo. Tra le forme

$$f_3 + (h \xi_1 + k \xi_2) \varphi_2$$

ve ne sono soltanto tre, le quali siano un cubo perfetto, e precisamente il cubo di un binomio $\sqrt[3]{b_{111}}\, \xi_1 + \sigma \sqrt[3]{b_{222}}\, \xi_2$ ove σ è radice cubica dell'unità: la forma φ_3, apolare alla φ_2, è precisamente il prodotto di questi tre binomi di primo grado.

In altro modo ancora si osservi che, considerato $\xi_1 : \xi_2$ come parametro, il punto del piano, le cui coordinate omogenee sono:

$$x_1 = f_3, \quad x_2 = \xi_1 \varphi_2, \quad x_3 = \xi_2 \varphi_2,$$

genera, al variare di $\xi_1 : \xi_2$ una cubica razionale con punto doppio nel punto $x_2 = x_3 = 0$. I valori di $\xi_1 : \xi_2$ che annullano $f_3 + (h\,\xi_1 + k\,\xi_2)\,\varphi_2$ danno i punti, in cui la cubica è incontrata dalla retta $x_1 + h\,x_2 + k\,x_3 = 0$. La forma φ_3 apolare alla φ_2 corrisponde a quella retta del piano che incontra la cubica nei tre flessi. E, per confrontare con la precedente osservazione, si noti che i flessi sono i punti, per cui passa una retta che incontra la cubica in tre punti coincidenti.

* * *

Se le forme iniziali f_3, φ_2 sono date, a meno di uno *stesso* fattore σ, anche le forme φ_2, φ_3 restano determinate a meno di un fattore *comune* σ. Ponendo $\varphi_2 = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s$, $\varphi_3 = \Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$, le relazioni di apolarità danno:

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, a_{rst} = 0 \qquad \text{per } t = 1, 2.$$

Posto

$$A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2\,; \quad R = \textit{discriminante di } \varphi_3 = 3\, a_{112}^2\, a_{221}^2 + 6\, a_{111} a_{222}\, a_{112}\, a_{221} -$$

$$- a_{111}^2\, a_{222}^2 - 4\, a_{111}\, a_{122}^3 - 4\, a_{222}\, a_{112}^3$$

$$= 4\,(a_{121}\, a_{222} - a_{122}^2)\,(a_{121}\, a_{122} - a_{112}^2) - (a_{111}\, a_{222} - a_{112}\, a_{221})^2$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} : A^2$$

si ha l'identità tra tutti questi invarianti algebrici

$$R = J^2\, A^3$$

che il lettore può verificare facilmente nel caso canonico ($a_{11} = a_{22} = 0$, e quindi $a_{112} = a_{221} = 0$), e che valgono perciò in generale, perchè A, R, J sono invarianti algebrici del sistema delle due forme φ_2, φ_3. Si noti che le uguaglianze $R = 0$, $J = 0$ sono equivalenti (*perchè* $A \neq 0$); e che, se esse sono soddisfatte, la φ_3 è cubo perfetto di uno dei fattori lineari delle φ_2, come si riconosce dalla *forma canonica*. Se $J \neq 0$, allora la teoria delle forme ci dice che J ha significato intrinseco, indipendente

cioè dal particolare sistema di coordinate introdotto nel calcolo ; mentre è ben evidente che, moltiplicando φ_2, φ_3 per uno stesso fattore σ, la frazione J si moltiplica per σ^{-1}. Noi dunque faremo una convenzione di carattere *intrinseco* e che determina completamente il fattore σ, imponendo che J valga -1, o un altro valore numerico prefissato ad arbitrio.

Diremo in tal caso che le *forme* φ_2, φ_3 *sono normali. L'unico caso di eccezione è quello che le due forme* φ_2, φ_3 *abbiano un fattore comune, e quindi sia* $J = R = 0$. Le forme φ_2, φ_3 nel caso *normale* sono del tipo $\varphi_2 = 2\beta\gamma\xi_1\xi_2$ e $\varphi_3 = \beta\gamma(\beta\xi_1^3 + \gamma\xi_2^3)$ con $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, nel caso anormale sono del tipo $\varphi_2 = 2a_{12}\xi_1\xi_2$ e $\varphi_3 = a_{12}\beta\xi_1^3$, ove $\beta \neq 0$, se la forma φ_3 non è identicamente nulla, cioè se la forma f_3 iniziale non è divisibile per φ_2.

§ 2.

Le asintotiche e le direzioni di Darboux e Segre.

Tra i piani uscenti da un punto O di una superficie S ve n'è generalmente uno solo che taglia S in una linea con punto doppio : il piano π tangente ad S in O. Le direzioni comuni ad S ed a π sono le direzioni *asintotiche.* Assunte a coordinate non omogenee x, y, z coordinate tali che gli assi delle x, y siano le tangenti asintotiche in O, verrà uno sviluppo del tipo seguente :

$$z = \varphi_2 + f_3 + \ldots, \text{ ove } \varphi_2 = 2lxy,\ f_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \text{ ecc.}$$

e i termini non scritti sono almeno del quarto ordine in x, y. Il più generale cambiamento di coordinate non omogenee, che lasci inalterati gli assi delle x, y si ottiene scrivendo $x + kz$ al posto di x ed $y + hz$ al posto di y, ove h, k sono costanti arbitrarie, e poi moltiplicando le x, y, z per altre costanti arbitrarie. Prescindendo da questa ultima trasformazione, il nuovo sviluppo della z sarà:

$$z = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots \quad \text{ove} \quad \varphi_3 = f_3 + (hx + ky)\varphi_2 .$$

Coi metodi del § 1 potremo scegliere h e k in uno e in un solo modo in guisa che φ_3 sia apolare a φ_2. Le direzioni definite dalla $\varphi_3 = 0$ si diranno *le direzioni di* Darboux. Unico caso *eccezionale* a tutto questo è il caso che in O le *direzioni asintotiche coincidano*: caso che considereremo

come singolare ed escluderemo senz'altro. Le precedenti considerazioni si possono esporre anche nel seguente modo di carattere più geometrico. Le quadriche tangenti in O ad S hanno una equazione del tipo:

$$0 = z + l x^2 + m x y + n y^2 + p z^2 + 2 l (h x + k y) z.$$

Ponendovi $z = \varphi_2 + f_3 + \ldots$ si ha l'equazione della proiezione sul piano xy dell'intersezione della superficie S con tale quadrica:

$$0 = [\varphi_2 + l x^2 + m x y + n y^2] + [f_3 + (h x + k y) \varphi_2] + \ldots .$$

Scelte l, m, n in guisa che $\varphi_2 + l x^2 + m x y + n y^2$ sia identicamente nullo, la linea d'intersezione avrà in O un punto triplo, le cui tangenti avrenno le direzioni determinate dalla

$$f_3 + (h x + k y) \varphi_2 = 0.$$

Soltanto per tre sistemi di valori di h, k avviene che la terna di direzioni corrispondente si riduce a una direzione tripla; abbiamo così tre direzioni, che sono appunto le tre direzioni che annullano quella delle forme

$$\varphi_3 = f_3 + (h x + k y) \varphi_2 ,$$

che è apolare a φ_2. Queste *tre direzioni sono dunque quelle che possono essere unica tangente al punto triplo di una cubica intersezione della superficie* S *e di una quadrica tangente ad* S *in* O.

Se poi f_3 non è divisibile per φ_2, la forma φ_3 non è identicamente nulla. E, se φ_3 e φ_2 non hanno alcun fattore lineare comune, allora i fattori di φ_3 sono distinti, ed alle φ_{21}, φ_3 possiamo sostituire forme *normali* proporzionali.

Le direzioni definite dalla $\overline{\varphi_3} = 0$, coniugate delle direzioni di Darboux, furono per tutt'altra via studiate dal Prof. Segrè.

§ 3.

Le forme fondamentali.

Sia una superficie S definita dando le coordinate omogenee x, y, z, t dei suoi punti in funzione di due parametri u, v. Escludiamo il caso delle sviluppabili, e anche i punti isolati di una superficie non svilup-

pabile, in cui le direzioni asintotiche coincidono. Indicheremo un punto con la sua prima coordinata x. E di un determinante, le cui righe si ottengono dalla prima sostituendo alla x le y, z, t, si scrive la sola prima riga.

Sia λ una funzione arbitraria delle u, v. Consideriamo le forme

$$F_2 = \lambda(x, x_u, x_v, d^2 x) \quad (*) \qquad \Phi_3 = \lambda(x, x_u, x_v, d^3 x) - \frac{3}{2} d F_2$$

che dipendono dai soli differenziali primi. Data la superficie S, tali forme non sono determinate; esse variano

a) quando si esegua sulle x una trasformazione lineare intera a coefficienti *costanti*,

b) quando si moltiplicano le x, y, z, t per una stessa funzione $\rho(u, v)$,

c) quando si muti la funzione λ,

d) quando si cambino le variabili coordinate u, v.

(Le *a*, *b* equivalgono ad eseguire una collineazione, o, ciò ch'è lo stesso, a cambiare il tetraedro di riferimento). Calcoli semplicissimi provano immediatamente che a tutte queste operazioni corrispondono formole di trasformazione del seguente tipo:

$$\overline{F}_2 = \sigma F_2 \qquad \overline{\Phi}_3 = \sigma [\Phi_3 + (h\, du + k\, dv) F_2]$$

Se dunque F_3 è quella delle forme $\Phi_3 + (h\, du + k\, dv) F_2$, che è apolare ad F_2, varranno le:

$$\overline{F}_2 = \sigma F_2 \qquad \overline{F}_3 = \sigma F_3.$$

Dunque *tali forme* F_2, F_3 *sono dalla superficie* S *determinate a meno di un fattore comune, cosicchè* $\frac{F_3}{F_2}$ (a cui, per ragioni che vedremo, diamo il nome di *elemento lineare proiettivo*) *è completamente determinato da* S. Noi ci chiediamo: *Come si può scegliere* λ *in guisa che già* Φ_3 *sia apolare ad* F_2, *ossia che* $\Phi_3 = F_3$?

Poniamo:

$$(x\, x_u\, x_v\, d^2 x) = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s$$

$$B = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 \quad ; \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{|B|}}$$

(*) Con questo simbolo indichiamo dunque il determinante di cui tra ( ) è scritta la prima riga, e le cui altre 3 righe se ne deducono sostituendo alla x e sue derivate rispettivamente le y, z, t e loro derivate omologhe. Simboli analoghi per espressioni analoghe.

e quindi:

$$\Phi_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|B|}} \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \qquad (b_{rst} \text{ simmetrica nei 3 indici})$$

ove:

$$\Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t = (x, x_u, x_v, x_{uuu}\, du^3 + 3\, x_{uuv}\, du^2 dv + 3\, x_{uvv}\, du\, dv^2 + x_{vvv} dv^3)$$

$$- \frac{3}{2} \Sigma\, d b_{rs}\, du_r\, du_s + \frac{3 dB}{8B} \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s$$

Sarà

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}) + (x\, x_u\, x_{uv}\, x_{uu})$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial v} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) + (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uu}) + (x\, x_{uv}\, x_v\, x_{uu})$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial u} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) + (x\, x_{uu}\, x_v\, x_{uv})$$

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial v} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uvv}) + (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uv})$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial u} = (x\, x_u\, x_v\, x_{vvu}) + (x\, x_{uu}\, x_v\, x_{vv}) + (x\, x_u\, x_{uv}\, x_{vv})$$

$$b_{111} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuu}) - \frac{3}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial u} + \frac{3}{8B} \frac{\partial B}{\partial u} b_{11}$$

$$b_{121} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} + \frac{1}{8B} \left(\frac{\partial B}{\partial v} b_{11} + 2 \frac{\partial B}{\partial u} b_{12} \right)$$

$$b_{221} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uvv}) - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial u} - \frac{\partial b_{12}}{\partial v} + \frac{1}{8B} \left(\frac{\partial B}{\partial u} b_{22} + 2 \frac{\partial B}{\partial v} b_{12} \right)$$

E quindi:

$$b_{22}\, b_{111} + b_{11}\, b_{221} - 2\, b_{12}\, b_{121} =$$

$$= b_{22} \left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uuu} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u} \right] + b_{11} \left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uvv}) - \frac{\partial b_{12}}{\partial v} \right]$$

$$- 2\, b_{12} \left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uuv}) - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} \right]$$

$$= - (x\, x_u\, x_v\, x_{vv})\, (x\, x_u\, x_{uv}\, x_{uu}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uu})(x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uv}) +$$

$$+ 2\, (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})\, (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uu}),$$

che è identicamente nullo (*). In modo simile si prova che:

$$b_{22}\, b_{112} + b_{11}\, b_{222} + 2\, b_{12}\, b_{122} = 0.$$

Cosichè, con tale valore di λ, la forma Φ_3 è apolare ad F_2, cioè coincide con F_3. Si hanno dunque le:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_2 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2|}} (x\, x_u\, x_v\, d^2x)\,; \\ F_3 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2|}} (x\, x_u\, x_v\, d^3x) - \dfrac{3}{2}\, dF_2 \end{cases}$$

ove è posto

$$(1)_{bis}\qquad (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s\,.$$

Noi ora proveremo: *Come evidentemente* $F_2 = 0$ *è l' equazione delle asintotiche, così* $F_3 = 0$ *è l'equazione delle linee di* DARBOUX, *cioè delle linee tangenti in ogni punto ad una delle direzioni di* DARBOUX. Poichè collineazioni e cambiamenti di variabili mutano F_3 tutt'al più per un fattore, potremo supporre $t = 1$, $x = u$, $y = v$ e che di più nell' intorno del punto $u = v = 0$ valga lo sviluppo $z = 2\, l\, u\, v + (a\, u^3 + b\, v^3) + \ldots$. Si riconosce, applicando le (1) che per $u = v = 0$ la $F_3 = 0$ equivale alla $a\, du^3 + b\, dv^3 = 0$, e che per ciò definisce appunto le direzioni di DARBOUX. Ecco dunque *risoluto nel modo più semplice il problema di scrivere le equazioni delle linee di* DARBOUX *in coordinate curvilinee* u, v *qualsiasi!*

Si dimostra che: *Se* F_3 *è identicamente nullo, la superficie è una quadrica; soltanto se il determinante di* F_3 è *nullo, unico caso in cui* F_2, F_3

(*) Ciò si verifica tosto, portando con una collineazione i punti x, x_u, x_v, x_{uv} nei vertici del tetraedro di riferimento. Si può anche procedere nel modo seguente. Il determinante ottenuto dalla matrice $(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv})$ aggiungendo una 5.ª riga uguale alla prima x, x_u ecc. è identicamente nullo. E perciò

$$x\,(x_u\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv}) - x_u\,(x\, x_{uu}\, x_{uv}\, x_{vv}) + x_{uu}\,(x\, x_u\, x_{uv}\, x_{vv}) -$$
$$- x_{uv}\,(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{vv}) + x_{vv}\,(x\, x_u\, x_{uu}\, x_{uv}) = 0.$$

Analoghe si ottengono sostituendo alle x e derivate rispettivamente la y, la z, o la t e derivate. Moltiplicando queste 4 identità rispettivamente per i complementi di X, Y, Z, T in $(x\, x_u\, x_v\, X)$ e sommando, si ottiene l'identità del testo.

hanno un fattore comune, allora F_3 *è un cubo perfetto* ; *la superficie è rigata, e le sue generatrici annullano tale fattor lineare.* Questi teoremi, facili a dimostrarsi anche con un metodo puramente proiettivo, appariranno evidenti a chi espliciti le forme F_2, F_3 coi simboli della geometria metrica.

Posto $t = 1$, considerate x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali soddisfacenti perciò alle equazioni fondamentali (I) e (II) pag. 170 Cap. IV Vol. I, si trova immediatamente che F_2, F_3 sono, (se le u=cost^{te} e le v = cost.^{te} sono le asintotiche) proporzionali a $2\,D'\,du\,dv$ e $D'\left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} du^3 + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} dv^3\right)$. Ora se $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$, le asintotiche v = cost^{te} sono anche geodetiche e quindi rette; se $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$, le u = cost.^{te} sono rette. Se $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$ la superficie è doppiamente rigata, e quindi è una quadrica.

Dunque: *Se la superficie non è rigata* (caso che richiede un'analisi più minuta), *allora*, coi metodi dei precedenti §§, *potremo alle forme* F_2, F_3 *sostituire due forme proporzionali* φ_2, φ_3 *completamente determinate dalla superficie. Tali forme si diranno normali.* Se le u, v sono asintotiche, esse valgono

$$\varphi_2 = 2\,\beta\,\gamma\,du\,dv \qquad \varphi_3 = \beta\,\gamma\,(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)$$

ove $\beta = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}, \gamma = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}$ (calcolati per l'elemento lineare di Gauss).

§ 4.

Coordinate di punto e di piano tangente.

Una trasformazione lineare intera omogenea a determinante -1, così come una trasformazione di variabili u, v a jacobiano -1 *cambia il segno* delle F_2, F_3; del significato geometrico di questo fatto non ci possiamo qui occupare. Invece sia le trasformazioni lineari intere omogenee a determinante 1, che i cambiamenti di variabili u, v a jacobiano positivo *lasciano inalterate le forme* F_2, F_3; le quali saranno dette perciò (impropriamente) *intrinseche* e *invarianti per le collineazioni a modulo* 1. Se invece moltiplichiamo le x, y, z, t per uno stesso fattore ρ le b_{rs} restano moltiplicate per ρ^4 e quindi le F_2, F_3 per ρ^2.

Viceversa, se sono date le F_2, F_3, le corrispondenti coordinate $x, y, \ldots$ sono determinate a meno di una trasformazione lineare intera a determinante 1. Alle forme *normali* φ_2, φ_3 corrisponderanno le coordinate, che chiameremo *normali*. Una collineazione fa subire a queste soltanto *una trasformazione lineare intera omogenea a modulo* 1.

Queste considerazioni ricevono un complemento essenziale, quando si considerino anche le coordinate ξ, η, ζ, τ, di piano tangente.

Queste soddisfano alle (*)

(1) $\mathrm{S}\,\xi\,x = 0 \quad \mathrm{S}\xi\,x_u = \mathrm{S}\,\xi\,x_v = 0$ e quindi anche $\mathrm{S}x\,\xi_u = \mathrm{S}\,x\,\xi_v = 0.$

Queste equazioni determinano le ξ a meno di un fattore comune, che noi sceglieremo in guisa che

(2) $\mathrm{F}_2 = \mathrm{S}\,\xi\,d^2x$ e quindi per le (1) $\mathrm{F}_2 = -\mathrm{S}\,d\,x\,d\,\xi = \mathrm{S}\,x\,d^2\,\xi$

Ciò equivale a porre le ξ, ζ, ζ, τ *uguali ai complementi algebrici di*

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{T} \; in \; \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2|}}(x, x_u, x_v, \mathrm{X}).$$

Le (2) sono affatto analoghe alla formola

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = -\mathrm{S}\,dx\,d\mathrm{X} = \mathrm{S}\mathrm{X}\,d^2x.$$

della geometria metrica. Si deduce poi per la regola del prodotto di due determinanti

$$(x\,x_u\,x_v\,d^2x)\,(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,d^2\xi) = -\,\mathrm{A}\,\mathrm{F}_2^2$$

se è posto

(3) $$\mathrm{F}_2 = \Sigma\,a_{r,s}\,du_r\,du_s \quad , \qquad \mathrm{A} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$$

Poichè

$$(x\,x_u\,x_v\,d^2x) = \mathrm{F}_2\sqrt[4]{|b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2|} = \mathrm{F}_2\sqrt{|\mathrm{A}|}\,,$$

sarà

(4) $$(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,d^2\xi) = \varepsilon\,(x\,x_u\,x_v\,d^2x) = \varepsilon\,\mathrm{F}_2\sqrt{|\mathrm{A}|}$$

(*) Col simbolo S indichiamo somme, i cui addendi si deducono l'uno dall'altro rotando le coordinate x, y, z, t di punto o ξ, η, ζ, τ di piano.

ove

$$\varepsilon = -\operatorname{sgn} A$$

Se ne trae che x, y, z, t *sono i complementi di* Ξ, H, Z, T in $\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(\xi, \xi_u, \xi_v, \Xi)$.

Con questo metodo ad ogni scelta *delle coordinate omogenee di punto corrisponde una particolare scelta di coordinate per il piano tangente*, che lo sviluppo della teoria dimostra estremamente opportuna. Le coordinate di piano corrispondenti a coordinate *normali* di punto diconsi pure *normali*; *se* $t = 1$ *ed* x, y, z *sono coordinate cartesiane, è facile riconoscere che* ξ, η, ζ *sono le coordinate di* LELIEUVRE, che qui si presentano pertanto nel modo più spontaneo.

Si ha poi

$$(5)\quad F_3 = S\xi d^3x - \frac{3}{2} dF_2 = -S d\xi d^2x - \frac{1}{2} dF_2 = S dx d^2\xi + \frac{1}{2} dF_2 = -S x d^3\xi + \frac{3}{2} dF_2$$

donde p. es. si trae la formola di Čech:

$$(5)_{bis}\qquad F_3 = \frac{1}{2} S(\xi\, d^3x - x\, d^3\xi) = \frac{1}{2} S(dx\, d^2\xi - d\xi\, d^2x)$$

[purchè naturalmente le ξ e le x siano legate dalla (4)].

Porremo

$$(5)_{ter}\qquad F_3 = \Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \qquad \text{con } a_{rst} \text{ simmetrico in } r, s, t.$$

Le relazioni di coniugio danno, se A_{rs} è il complemento di a_{rs} in A:

$$(6)\qquad \sum_{r,s} A_{rs}\, a_{rst} = 0 \qquad \text{per} \quad t = 1, 2.$$

§ 5.

Le equazioni fondamentali.

Si ha dunque:

$$(1)\qquad S\,\xi\,x = S\,\xi\,x_u = S\,\xi_v = S\,x\,\xi_u = S\,x\,\xi_v = 0$$

$$(2)\qquad \begin{cases} S\xi\, x_{uv} = -S\xi_v\, x_u = S\, x\, \xi_{uv} = -S\,\xi_u\, x_v = a_{12} \\ S\xi\, x_{uu} = -S\xi_u\, x_u = S\, x\, \xi_{uu} = a_{11} \\ S\xi\, x_{vv} = -S\xi_v\, x_v = S\, x\, \xi_{vv} = a_{22}\,. \end{cases}$$

Indicando con $\begin{pmatrix} r\,s \\ i \end{pmatrix}$ i simboli di CRISTOFFEL di seconda specie per la forma F_2, e ponendo (coi noti simboli del calcolo assoluto)

$$x_{rs} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} - \begin{pmatrix} r\,s \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} - \begin{pmatrix} r\,s \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad \text{(derivate seconde covarianti,}$$

queste formole si possono scrivere con le x_{rs} anzichè con le derivate x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} e si trova:

$$(3) \qquad S\xi\, x_{rs} = -Sx_r\, \xi_s = -Sx_s\, \xi_r = Sx\xi_{rs} = a_{rs}.$$

Porremo anche:

$$x_{rst} = \frac{\partial x_{rs}}{\partial u_t} - \sum_i \begin{pmatrix} r\,t \\ i \end{pmatrix} x_{si} - \sum_i \begin{pmatrix} s\,t \\ i \end{pmatrix} x_{ri} \quad \text{(derivate terze covarianti).}$$

Se ne deduce facilmente che *le espressioni*

$$(4) \qquad S\,\xi\, x_{rst} = -S\,\xi_t\, x_{rs} = S_a' x_r \xi_{ts} = -S\, x\, \xi_{rst}$$

sono simmetriche in r, s, t *e valgono* a_{rst}.

Poniamo

$$(5) \qquad X = \frac{1}{2}\Delta_2 x = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, x_{rs} \qquad \Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi = \frac{1}{2}\Sigma A_{rs}\, \xi_{rs}.$$

Sarà:

$$(6) \quad S\,\xi X = 1 \quad S\,\xi_u X = S\xi_v X = 0 \quad S\,\Xi x = 1, \quad Sx_u \Xi = S\,x_v\,\Xi = 0.$$

I punti x, x_u, x_v, X non sono complanari; potremo perciò determinare delle quantità λ, μ, p, ρ tali che

$$x_{rs} = \lambda_{rs}\, x_u + \mu_{rs}\, x_v + p_{rs}\, x + \rho_{rs}\, X \quad \text{(e analoghe in } y, z, t).$$

Moltiplicando per ξ e sommando con le analoghe si trova $a_{rs} = \rho_{rs}$. Moltiplicando per ξ_u e sommando, oppure per ξ_v e sommando si ha:

$$a_{irs} = \lambda_{rs}\, a_{is} + \mu_{rs}\, a_{i2} \quad \text{per} \quad i = 1, 2. \qquad \text{Sarà pertanto}$$

$$(I) \qquad x_{rs} = \sum_{i,j} a_{rsi}\, A_{ij}\, x_j + a_{rs}\, X + p_{rs}\, x.$$

Similmente si trova:

$$\text{(II)} \qquad \xi_{rs} = -\sum_{ij} a_{rsi}\, A_{ij}\xi_j + a_{rs}\,\Xi + \pi_{rs}\,\xi.$$

Se ne deduce anehe:

$$\text{(7)} \qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x,\ x_{11}\,du + x_{12}\,dv,\ x_{21}\,du + x_{22}\,dv,\ dx).$$

Moltiplicando (I) per A_{rs} e sommando con le omologhe, si trova

$$\Sigma\, A_{rs}\, p_{rs} = 0 \qquad \text{e analogamente} \qquad \Sigma\, A_{rs}\, \pi_{rs} = 0.$$

Cioè *le forme* $P = \Sigma\, p_{rs}\, du_r\, du_s$, $II = \Sigma\, \pi_{rs}\, du_r\, du_s$ *sono coniugate ad* F_2, *ossia, uguagliate a zero, definiscono sistemi coniugati.*

Si può anche provare: *Date le forme* F_2, F_3, *è individuata la differenza* $P - II$.

Le (I) *e* (II) *sono le equazioni che nella geometria proiettiva corrispondono alle equazioni* I.° e II.° pag. 170 Vol. I.° Cap. IV°, *fondamentali della geometria metrica. Le condizioni d'integrabilità non solo permettono di determinare* X_u, X_v *come combinazioni lineari di* x, x_u, x_v e Ξ_u, Ξ_v *come combinazioni lineari di* ξ, ξ_u, ξ_v, *ma danno anche le altre equazioni, che si debbono considerare come l'analogo delle equazioni di* Gauss *e* Codazzi.

Le forme F_2, F_3 e P (oppure II), *o più precisamente, le forme* φ_2, φ_3, P *corrispondenti nel caso* **normale**, *determinano completamente (a meno di omografie) la superficie.* La retta (x, X) è la *normale proiettiva.* Si può *dimostrare* che questo è il modo *più semplice* di generalizzare il concetto di retta normale.

§ 6.

Applicabilità proiettiva - sua definizione.

Nella geometria metrica due superficie sono uguali (trasformate l'una dell' altra mediante un movimento), se hanno comune l' elemeuto lineare ds^2 e la seconda forma di Gauss.

Se invece due superficie S ed S' hanno comune solo l'elemento lineare, esse non sono uguali; ma tra esse passa una corrispondenza che abbiamo chiamato *applicabilità.* Questa corrispondenza si può chiaramente definire nel modo seguente:

Date sulle due superficie S, S *due punti omologhi* A, A' *qualsiasi* (aventi cioè le stesse coordinate curvilinee u, v), *esiste un movimento, che porta il punto* A *e i punti infinitamente vicini del* 1° *ordine* (di coordinate $u+du, v+dv$ *nei punti omologhi* A' *e* B' *della* S'. (cioè la figura formata dai punti A, B è uguale all'omologa).

Ogni coppia di punti omologhi A, A' determina un siffatto movimento M, che generalmente varierà al variare della coppia di punti considerata. Se M non variasse, esso allora porterebbe tutta la S in S'; e le due superficie sarebbero uguali e avrebbero comune anche la seconda forma di Gauss.

Se noi imponessimo ad M la condizione meno restrittiva di portare A in A' e ogni curva Γ tangente in A ad una curva C di S uscente da A in una curva Γ' tangente in A' alla curva C', che su S' è la omologa di C, allora la corrispondenza tra S, S' sarebbe soltanto una *corrispondenza conforme.*

(Ricordo che curve tangenti sono due curve che hanno un contatto bipunto, cioè dell'ordine 1). A questa stessa definizione si giungerebbe, ricorrendo a similitudini, anzichè a movimenti.

Tutte queste definizioni si possono estendere alla geometria non euclidea; come si possono estendere alla geometria proiettiva?

Enunciamo quì senza dimostrazione, per cui rinviamo alle Mem. originali, che si giunge *agli stessi risultati* estendendo le definizioni di applicabilità o di corrispondenza conforme; e noi pertanto ci occupere o soltanto della seconda.

Cominciamo ad osservare che nella geometria proiettiva potremo chiamare *uguali* due superficie, trasformate l'una dell'altra mediante una collineazione, e che hanno perciò comuni le tre forme fondamentali. Noi porremo poi la definizione seguente:

Diremo proiettivamente applicabili di ordine n due superficie S *ed* S' *in corrispondenza biunivoca, se per ogni coppia di punti omologhi* A, A' *esiste una collineazione* P *che porti* A *in* A' *e ogni curva* Γ *che abbia un contatto di ordine n con una curva* C *di* S *uscente da* A *in un'altra curva* Γ' *che abbia contatto di ordine n con la curva* C' *omologa di* C *su* S'.

Se poniamo $n = 1$, e alla collineazione P sostituiamo i movimenti M, ritorniamo alle superficie in corrispondenza conforme. Invece, se la P è una collineazione che non varia col variare della coppia A, A', ritorniamo alle superficie proiettivamente uguali.

Osserviamo che nella precedente definizione non si deve porre $n = 1$; perchè due superficie in corrispondenza biunivoca sono sempre proiettivamente applicabili di ordine 1 secondo la precedente definizione; infatti in tal caso i fasci di direzioni tangenti ad S, S' in due punti omologhi A, A' sono sempre collineari. Porremo perciò $n = 2$, chiamando *proiettivamente applicabili* due superficie, che siano proiettivamente applicabili di ordine 2.

§ 7.

Formole preliminari relative al contatto di due superficie.

In coordinate x, y, z non omogenee due curve C, $\overline{C}$ hanno in un punto un contatto del secondo ordine se ivi è:

$$x = \bar{x}\,,\quad y = \bar{y}\,,\quad z = \bar{z}\,,\quad \frac{d^i y}{dx^i} = \frac{d^i \bar{y}}{d\bar{x}^i}\,,\quad \frac{d^i z}{dx^i} = \frac{d^i \bar{z}}{d\bar{x}^i} \qquad (i = 1, 2)$$

Se le due curve sono definite dando le $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ in funzione di uno stesso parametro t (ciò che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le due curve), allora, notando che p. es.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

e analoghe, si riconosce che, invece di scrivere le precedenti equazioni, possiamo dire che esistono due costanti σ, τ tali che:

$$x = \bar{x},\ x'_t = \sigma\,\bar{x}'_t \quad , \qquad x''_t = \sigma^2\,\bar{x}''_t + \tau\,\bar{x}'_t$$

(e analoghe in y, z).

Se due superficie S, $\overline{S}$, luogo una del punto $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, l'altra del punto $\bar{x}(u, v)$, $\bar{y}(u, v)$, $\bar{z}(u, v)$, sono tali che in un loro punto comune O due curve omologhe qualsiasi sono osculatrici, le precedenti equazioni dovranno valere per ogni coppia di curve omologhe definite dando u, v come funzioni di un parametro t. Dovrà cioè essere in O

$$(1)\quad \begin{cases} x = \bar{x}\,,\ x_u\,u' + x'_v\,v' = \sigma\,(\bar{x}_u\,u' + \bar{x}_v\,v') \qquad \left(u' = \dfrac{du}{dt}\,,\ \text{ecc.}\right) \\ x_u\,u'' + x_v\,v'' + x_{uu}\,u'^2 + 2x_{uv}\,u'\,v' + x_{vv}\,v'^2 = \\ = \sigma^2\,[\bar{x}_u\,u'' + \bar{x}_v\,v'' + \bar{x}_{uu}\,u'^2 + 2\,\bar{x}_{uv}\,u'\,v' + \bar{x}_{vv}\,v'^2] + \tau\,[\bar{x}_u\,u' + \bar{x}_v\,v'] \\ \text{(e analoghe in } y, z) \end{cases}$$

per qualunque scelta delle funzioni $u(t), v(t)$. Naturalmente τ potrà esser funzione dei valori di u', v', u'', v'', nel punto O, mentre σ è funzione dei valori delle sole u', v'. Derivando rispetto a u' ed u'' l'ultima delle (1) si ha:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u''} \bar{x}_u + \frac{\partial^2 \tau}{\partial u' \partial u''} (\bar{x}_u u' + \bar{x}_v v') = 0 \qquad \text{(e analoghe in } y, z).$$

Non potendo essere le $\bar{x}_u, \bar{y}_u, \bar{z}_u$ proporzionali alle $\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v$ (perchè altrimenti $\bar{S}$ si ridurrebbe a una curva, o almeno avrebbe in O un punto singolare), la $\frac{\partial \tau}{\partial u''}$ sarà nulla; perciò τ non dipenderà da u'', e similmente neanche da v''. L'ultima delle (1) è dunque un'identità in u'', v'', quando si tengano fisse u', v'; perciò x_u, x_v sono rispettivamente uguali a $\sigma^2 \bar{x}_u$, $\sigma^2 \bar{x}_v$; donde, confrontando con la penultima delle (1), si deduce $\sigma = 1$, ossia

$$(2) \qquad x = \bar{x}, \; x_u = \bar{x}_u, \; x_v = \bar{x}_v \text{ (e alle analoghe in } y, z).$$

Se 2μ, 2ν, λ sono i valori di τ per $u' = 1$, $v' = 0$ oppure $u' = 0$, $v' = 1$, oppure $u' = v' = 1$, avremo successivamente, sostituendo in (1) tali valori delle u', v'

$$x_{uu} = \bar{x}_{uu} + 2\mu \bar{x}_u \qquad x_{vv} = \bar{x}_{vv} + 2\nu \bar{x}_v$$

$$x_{uv} = \bar{x}_{uv} + (\lambda - \mu) \bar{x}_u + (\lambda - \nu) \bar{x}_v$$

Sostituendo questi valori delle x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} nell'ultima delle (1), ed escludendo il caso che le x_u, y_u, z_u siano proporzionali alle x_v, y_v, z_v si trae:

$$\frac{\tau}{2} = (\lambda - \mu) v' + \mu u' = (\lambda - \nu) u' + \nu v'$$

cioè $\lambda = \mu + \nu$, $\tau = 2(\mu u' + \nu v')$. Cosicchè in conclusione si avrà, indicando con μ, ν delle costanti:

$$(2)_{bis} \quad \begin{cases} x = \bar{x}, \; x_u = \bar{x}_u, \; x_v = \bar{x}_v \\ x_{uu} = \bar{x}_{uu} + 2\mu \bar{x}_u \; ; \; x_{uv} = \bar{x}_{uv} + \mu \bar{x}_v + \nu \bar{x}_v + \nu \bar{x}_u \; ; \; x_{vv} = \bar{x}_{vv} + 2\nu \bar{x}_v. \\ \qquad \text{(e analoghe in } y, z) \end{cases}$$

Sostituendo alle x, y, z le $x : t$, $y : t$, $z : t$, cioè sostituendo loro coordinate omogenee x, y, z, t si riconosce che le (2), $(2)_{bis}$ equivalgono alle:

$$(3)\quad \begin{cases} x = \lambda\,\bar{x} \quad ; \quad x_u = \lambda\,(\bar{x}_u + m\,\bar{x}) \quad ; \quad x_v = \lambda\,(\bar{x}_v + n\,\bar{x}) \\ x_{uu} = \lambda\,(\bar{x}_{uu} + 2\,\beta\,\bar{x}_u + a\,\bar{x}) \quad ; \quad x_{vv} = \lambda\,(\bar{x}_{vv} + 2\,\gamma\,\bar{x}_v + c\,\bar{x}) \\ \bar{x}_{uv} = \lambda\,(x_{uv} + \beta\,x_v + \gamma\,x_u + b\,x) \\ \text{(e analoghe in } y, z, t \text{ con } \lambda, m, n, \beta, \gamma, a, b, c, \text{ costanti)} \end{cases}$$

Queste equazioni sono naturalmente di carattere *intrinseco* ed *invarianti* per collineazioni.

§ 8.

Condizioni per l'applicabilità proiettiva di due superficie.

Due superficie S, S′ in corrispondenza biunivoca sono proiettivamente applicabili in due punti omologhi O, O′, se possiamo trasformare con una collineazione la S′ in una superficie $\bar{S}$ tale che in tale punto valgano le (3) del § 7. Ne segue tosto che le forme F_2 per le due superficie S ed $\bar{S}$, ossia per S ed S′ differiranno l'una dall'altra per il solo fattore λ^4; cosicchè sulle due superficie *si corrisponderanno in* O, O′ *le direzioni asintotiche.* Supponiamo questa condizione soddisfatta non solo in O, O′, ma in ogni coppia di punti omologhi. Essendo $\bar{S}$ ed S′ collineari, potremo, con conveniente scelta delle coordinate omogenee, supporre senz'altro che le forme $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ calcolate, per la superficie $\bar{S}$ siano uguali alle forme omologhe F'_2 ed F'_3 calcolate per S′. Dalla corrispondenza tra le asintotiche di tutte queste superficie, che noi abbiamo ammesso, segue che potremo supporre $\bar{F}_2 = F'_2$ uguale alla forma F_2 calcolata per S. Assumiamo la (7) del § 5 per calcolare le forme F_3, $\bar{F}_3$, F'_3: ricordando le (3) del § 7 deduciamo tosto che $\bar{F}_3 - F_3$ è divisibile per F_2, ossia che (essendo $\bar{F}_3$ ed F_3 apolari ad F_2) è proprio $\bar{F}_3 = F_3 = F'_3$. Dunque:

Condizione necessaria per l'applicabilità proiettiva di due superficie S, S′ (in ogni coppia di punti omologhi) *è che le forme* F_2, F_3 *relative alla prima siano proporzionali e quindi si possano rendere uguali alle forme* F'_2, F'_3 *per la seconda.*

Proveremo che *tale condizione è anche sufficiente*; ecco perchè al rapporto $F_3 : F_2$ abbiamo dato il nome di *elemento lineare proiettivo.*

Supponiamo infatti $F_2 = F'_2$, $F_3 = F'_3$; e siano O, O′ due punti omologhi. Consideriamo i valori in O′ delle quaterne:

$$(x', y', z', t') \ , \quad (x'_u, y'_u, z'_u, t'_u) \ , \quad (x'_v, y'_v, z'_v, t'_v) \qquad (X', Y', Z', T')$$

e le quaterne omologhe (x, y, z, t), ecc.

Con una unica trasformazione lineare T intera omogenea a coefficienti costanti potremo portare le prime quaterne, calcolate in O', nelle omologhe.

La T definirà una collineazione che, porta O' in O, le tangenti alle linee $v = \text{cost.}^{\text{te}}$ ed $u = \text{cost.}^{\text{te}}$ di S' nelle tangenti omologhe per la superficie S, e infine la retta (x', X') nella retta (x, X).

Ma dall'uguaglianza delle forme F_2 ed F'_2 per le superficie S ed S' segue che i determinanti

$$(x' \; x'_u \; x'_v \; X') = (x \; x_u \; x_v \; X)$$

sono uguali, e perciò il determinante di T vale 1. Se perciò applichiala T alla S', otteniamo una superficie S'' (identica ad S' dal punto di vista della geom. proiettiva) e che ha le stesse forme F''_2, F''_3 di S' (cioè $F''_2 = F'_2$, $F''_3 = F'_3$). Sostituendo quindi senz'altro S'' ad S', potremo supporre che in O, O' sia:

$$x = x' \,, \quad x_u = x'_u \,, \quad x_v = x'_v, \quad X = X' \quad \text{(e analoghe in } y, z, t).$$

Basta allora ricordare le (I) del § 5 per verificare che $x_{rs} - x'_{rs}$ e analoghe differenze per y, z, t sono proporzionali alle x, y, z, t, donde segue tosto la applicabilità proiettiva delle S, S'.

§ 8.

Metrica proiettiva nello spazio.

Nel problema dell'applicabilità proiettiva le forme normali φ_2 e φ_3 tengono il luogo che l'elemento lineare di Gauss ha nella applicabilità metrica (almeno per superficie non rigate).

In particolare, se noi poniamo

$$ds^2 = \varphi_2 = \Sigma \, a_{ik} \, du_i \, du_k,$$

e assumiamo questa forma come elemento lineare, avremo definito sulla superficie S le distanze, e quindi tutta *una geometria metrica*; *la quale è invariante sia per collineazioni*, sia per *deformazioni proiettive.* (*)

(*) In questa geometria metrica le asintotiche hanno l'ufficio di linee di lunghezza nulla. In successive ricerche l'A. ha riconosciuto l'opportunità di considerare anche una geometria per cui $\varphi_3 : \varphi_2$ è elemento lineare, ossia $\int \frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ rappresenta le lunghezze.

È notevole e troverà nel seguito qualche applicazione il riconoscere che questa geometria metrica si può estendere anche allo spazio nel seguente modo. Il punto di coordinate $x + w\,X, y + w\,Y$, ecc. giace in un intorno alla superficie S; noi potremo assumere w come lunghezza del segmento corrispondente di normale proiettiva, e considerare poi questa normale come incontrante ad angolo retto la superficie. Se si osserva che in un piccolo intorno di S si possono adottare u, v, w come coordinate di un punto, le precedenti convenzioni equivalgono ad assumere

$$\varphi_2 + dw^2 = dw^2 + a_{11}\,du^2 + 2\,a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

come elemento lineare dello spazio ambiente. Dunque: *Una superficie* S *determina così una geometria metrica dello spazio, che è di carattere intrinseco ed è invariante, se si trasforma* S *con una collineazione.*

In questa geometria metrica la normale incontra S ad angolo retto; si può definire con essa l'angolo di due direzioni qualsiasi uscenti da un punto di una superficie, ecc. E tutto questo può essere utile per chi voglia studiare gli invarianti proiettivi delle curve tracciate sulla superficie, estendendo i metodi analoghi usati nella geometria metrica. Ne daremo qualche esempio nel prossimo paragrafo.

§ 9.

Curvatura asintotica, linee e raggi proiettivi di curvatura. Geodetiche proiettive.

Noi possiamo trovare un primo invariante proiettivo delle curve tracciate su una superficie, nella *curvatura asintotica*, quando così si chiami la curvatura geodetica calcolata per l'elemento lineare φ_2; e chiamare poi *geodetiche proiettive* quelle per cui tale curvatura è nulla.

Siano per semplicità u, v le asintotiche, così che sia:

$$\varphi_2 = 2\,\beta\,\gamma\,du\,dv \qquad \varphi_3 = \beta\,\gamma\,(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)$$

$$X = \frac{x_{uv}}{\beta\gamma},\ x_{11} = \beta\,x_v + p_{11}\,x \quad , \qquad x_{22} = \gamma\,x_u + p_{22}\,x$$

(e analoghe in y, z, t).

Il piano osculatore a una linea contiene i punti x, dx, d^2x ove (posto $\delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{r,s} \binom{rs}{i} du_r\, du_s$) è:

$$d^2 x = x_u\ \delta^2 u + x_v\ \delta^2 v + x_{11}\ du^2 + 2\, x_{12}\ du\, dv + x_{22}\, dv^2.$$

Indicando con ξ, η, ζ, τ coordinate correnti, l'equazione di tale piano sarà pertanto:

$$(\xi, x, x_u, x_v)\,\{[du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u] + (\beta\, du^3 - \gamma\, dv^3)\} +$$
$$+ 2\,[(\xi, x, x_u, x_{uv})\, du + (\xi, x, x_v, x_{uv})\, dv]\, du\, dv = 0.$$

Ora *una geodetica proiettiva* è caratterizzata dalla $du\,\delta v^2 - dv\,\delta u^2 = 0$. Limitandoci pertanto a tali geodetiche, riconosciamo facilmente che il loro piano osculatore genera al variare di $\frac{du}{dv}$, un cono razionale di terza classe (e non un fascio, come nel caso metrico). Ma per questo cono vi è una retta particolarmente importante: la retta in cui si incontrano i tre piani cuspidali del cono, cioè la retta:

$$(\xi, x, x_u, x_{uv}) = 0 \qquad (\xi, x, x_v, x_{uv}) = 0.$$

Questa retta è precisamente *la normale proiettiva*; la quale dunque ha intime relazioni con le linee geodetiche proiettive, così come avviene per la normale e le geodetiche della geometria metrica.

Si noti ancora che *il precedente cono*, inviluppo dei piani osculatori alle geodetiche uscenti da un punto O di S, *è bitangente al piano tangente lungo le direzioni assintotiche e i tre piani cuspidali, che si incontrano sulla normale proiettiva, incontrano il piano tangente proprio nelle linee* $\tau_3 = 0$, *che è uno dei due sistemi di linee di* Darboux-Segre.

Ecco un altro legame geometrico tra tutti gli enti da noi introdotti. Cerchiamo ora i fuochi $x + w\,X = x + w\frac{x_{uv}}{\beta\gamma}$ della congruenza descritta dalle normali alla curva. Basterà esprimere che esistono dei valori λ, μ tali che:

$$d\left(x + w\,\frac{x_{uv}}{\beta\,\gamma}\right) = \lambda\, x + \mu\, x_{uv} \qquad \text{(e analoghe in } y, z, t).$$

Ricordando le equazioni differenziali per le x, y, ecc. troviamo facilmente il primo membro sotto forma di combinazione lineare delle

x, x_u, x_v, x_{uv}. Annullando i coefficienti di x_u, x_v, si ha:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{w}+1+\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 log\,\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}\right)du+\frac{1}{\beta\gamma}\left(p_{22}\gamma+\frac{\partial log\,\beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv=0 \\ \frac{1}{\beta\gamma}\left(p_{11}+\beta\frac{\partial log\,^2\gamma}{\partial v}\right)du+\left(\frac{1}{w}+1+\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 log\,\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}\right)dv=0. \end{cases}$$

Eliminando $\frac{1}{w}$ si trovano le equazioni delle sviluppabili

$$(2)\qquad \left(p_{11}+\beta\frac{\partial log\,\beta^2\gamma}{\partial v}\right)du^2-\left(p_{22}+\gamma\frac{\partial log\,\beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv^2=0$$

Eliminando $du:dv$ si trova l'equazione

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{w}+1+\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 log\,\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}\right)^2=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\left(p_{11}+\beta\frac{\partial log\,\beta^2\gamma}{\partial v}\right)\left(p_{22}+\gamma\frac{\partial log\,\beta\gamma^2}{\partial u}\right)$$

che dà i valori di w corrispondenti ai due fuochi.

La (2) *è l' equazione delle linee che in geom. proiettiva corrispondono alle linee di curvatura; le quali*, come in geometria metrica, *formano un sistema coniugato; il primo membro di* (2) *si potrebbe*, volendo, *assumere al posto di* $p_{11}\,du^2+p_{22}\,dv^2$ *come terza forma fondamentale della superficie.*

La (3) *dà quelli che chiameremo i raggi proiettivi* w *di curvatura* (restando in ciò fedeli alla metrica introdotta al precedente §). Se noi li indichiamo con w_1 e w_2, *troviamo che* $\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+2$ (che potremmo chiamare la *curvatura media proiettiva* della nostra superficie) vale $-\frac{2}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 log\,\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}$, cioè *vale il doppio della curvatura totale dell' elemento lineare proiettivo* Φ_2.

Teorema, che ricorda il teorema di GAUSS per l'elemento lineare metrico (*).

§ 10.

Cenno di altre ricerche.

Si potrebbe per le curve di una superficie introdurre come *torsione proiettiva* per es. la $\frac{1}{\varphi_2^3}(x, dx, d^2x, d^3x)$, espressione intrinseca e invariante,

(*) Di altre notevolissime proprietà godono le *pangeodetiche*, cioè le estremali di $\int (F_3 : F_2) = \int (\varphi_3 : \varphi_2)$.

nulla soltanto per le sezioni piane, e si potrebbe generalizzare la *torsione geodetica*. Si potrebbero cercare le superficie analòghe a quelle di rotazione: quelle cioè per cui esiste un gruppo continuo di applicabilità proiettive in sè stesse (cioè trasformanti in sè le forme φ_2, φ_3). Si potrebbe costruire la teoria delle congruenze W, usando soltanto di elementi proiettivi, col che la teoria diventa di estrema semplicità.

E si troverebbe che (*) solo le superficie *isotermo - asintotiche* (quelle per cui $\beta = \gamma$) sono falde focali di congruenze, tali che sulle due falde si corrispondano le linee di DARBOUX - SEGRE; e questo risultato potrebbe condurre a una trasformazione per congruenze W di tali superficie. Infine si potrebbero estendere tutte queste ricerche alle congruenze, ai complessi di rette ed agli iperspazii, si potrebbe, invece del gruppo proiettivo generale, studiare qualche sotto gruppo, p. es. il gruppo delle affinità, di cui specialmente si sono occupati i geometri tedeschi. Ma per tutto questo rinviamo senz'altro il lettore alle Memorie originali.

(*) Escluso il caso banale delle congruenze W di un complesso. lineare.

INDICE DEL VOLUME II. — PARTE II.

CAPITOLO XXV.

Spazî a n dimensioni — Ipersuperficie e curve di questi spazî

§ 429. — Spazî curvi generali a n dimensioni definiti dal ds^2 — Metrica lineare . . . . . *pag.* 413
§ 430 — Metrica angolare — Costanti di direzione . . . . » 415
§ 431 — Linee geodetiche — Loro equazione differenziale . . » 420
§ 432 — Forma geodetica del ds^2 . . . . . » 423
§ 433 — La curvatura in una data orientazione secondo Riemann » 426
§ 434 — La formola per la curvatura Riemanniana . . . » 428
§ 435 — Spazî di curvatura costante . . . . . » 432
§ 436 — Applicabilità di due spazî S_n colla medesima curvatura costante . . . . . » 435
§ 437 — Il teorema di Schur . . . . . » 438
§ 438 — Le tre curvature principali in un S_3 . . . . . » 441
§ 439 — Triedro principale in S_3 . . . . . » 444
§ 440 — Congruenze principali — Spazî S_3 normali . . . » 446
§ 441 — Le ipersuperficie negli spazî curvi . . . . . » 449
§ 442 — La generalizzazione delle equazioni di Gauss e di Codazzi » 451
§ 443 — Le curve nello spazio S_{n+1} . . . . . » 455
§ 444 — Le curvature delle linee tracciate sopra un' ipersuperficie » 457
§ 445 — Curvature principali di un' ipersuperficie e formola d'Eulero . . . . . » 460
§ 446 — Casi particolari $n = 2$, $n = 3$ . . . . . » 463
§ 447 — Spazî in rappresentazione conforme — Teorema di Liouville . . . . . » 466
§ 448 — Sistemi n^{pli} ortogonali negli spazî curvi a n dimensioni . » 470
§ 449 — Caso degli spazî a tre dimensioni . . . . . » 473
§ 450 — Sistemi tripli ortogonali in un S_3 — Famiglie di Lamé . » 475

CAPITOLO XXVI.

Geometria degli spazî a curvatura costante

§ 451 — Equazioni simultanee di Weingarten . . . . . *pag.* 480
§ 452 — Forme tipiche del ds^2 per gli spazî a curvatura costante . » 482
§ 453 — Rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sul semispazio euclideo . . . . . » 486
§ 454 — Immagini delle geodetiche e delle varietà geodetiche . » 488
§ 455 — Rappresentazione geodetica di Beltrami . . . . » 492
§ 456 — Metrica del Cayley . . . . . » 495
§ 457 — Metrica ellittica e coordinate di Weierstrass . . . » 497
§ 458 — Metrica iperbolica (o non euclidea) . . . . . » 500

§ 459 — Le equazioni di Weingarten per le coordinate di Weierstrass *pag.* 504
§ 460 — Rappresentazione della metrica iperbolica a tre dimensioni nel semispazio . . . . . » 507
§ 461 — Movimenti nello spazio iperbolico a tre dimensioni. Formole di Poincaré . . . . . » 509
§ 462 — Classificazione dei movimenti nello spazio iperbolico . » 513
§ 463 — Movimenti in geometria ellittica — Scorrimenti . . » 515
§ 464 — I movimenti come omografie dell'assoluto in sè . . » 519
§ 465 — Il parallelismo di Clifford . . . . . » 521
§ 466 — Parametri di scorrimento e angolo di parallelismo . . » 522
§ 467 — Le rigate a curvatura nulla e la superficie di Clifford . » 526
§ 468 — Le formole di Frenet in geometria ellittica ed iperbolica » 528
§ 469 — Formole del Fubini pei parametri di scorrimento principali . . . . . » 532
§ 470 — Applicazione alle curve di torsione costante . . . » 535
§ 471 — Eliche in geometrica ellittica — Curve di Bertrand . . » 538

CAPITOLO XXVII.

Le ipersuperficie negli spazî di curvatura costante.

§ 472 — Le ipersuperficie nello spazio euclideo . . . . *pag.* 543
§ 473 — Indeformabilità delle ipersuperficie in generale. . . » 547
§ 474 — Le equazioni dell'applicabilità . . . . . » 550
§ 475 — Spazî V_n a curvatura costante entro l'S_{n+1} euclideo — Ipersfere . . . . . » 554
§ 476 — Linee di curvatura e ipersuperficie evolute . . . » 556
§ 477 — Rappresentazione ipersferica delle ipersuperficie . . » 558
§ 478 — Relazioni caratteristiche fra la seconda e la terza forma fondamentale . . . . . » 561
§ 479 — Coordinate tangenziali — Estensione delle formole di Weingarten. . . . . » 563
§ 480 — Ipersuperficie normali e loro rappresentazione ipersferica » 565
§ 481 — Formole generali per le ipersuperficie nello spazio ellittico » 568
§ 482 — Formole per le ipersuperficie nello spazio iperbolico . » 572
§ 483 — Le linee di curvatura in geometria ellittica ed iperbolica » 574
§ 484 — Le superficie nella geometria ellittica ed iperbolica a tre dimensioni . . . . . » 576
§ 485 — I sistemi coniugati e le linee asintotiche . . . . » 579
§ 486 — La superficie S riferita alle sue linee di curvatura . . » 582
§ 487 — Le due falde dell'evoluta . . . . . » 584
§ 488 — Le superficie W ed il teorema di Weingarten . . . » 586
§ 489 — Le superficie riferite alle loro linee asintotiche . . » 589
§ 490 — Le superficie a curvatura nulla in geometria ellittica . » 591
§ 491 — Le superficie a curvatura nulla come superficie di scorrimento . . . . . » 594
§ 492 — Ulteriori proprietà delle superficie a curvatura nulla . » 596

§ 493 — Preliminari sulla rappresentazione sferica — Formole del Fubini . . . . . *pag.* 599
§ 494 - La rappresentazione di Clifford . . . . . » 601
§ 494* — Applicazione alle coppie di superficie applicabili nello spazio euclideo . . . . . » 604
§ 495 — Rappresentazione sferica in geometria iperbolica . . » 607
§ 496 — Le due classi di superficie $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{R^2}$, $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{R}$. » 611
§ 497 — Formole per le superficie nello spazio curvo in rappresentazione conforme sull'euclideo . . . . . » 614
§ 498 — Notizie circa le trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche in geometria ellittica ed iperbolica . . » 617

CAPITOLO XXVIII

I sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio euclideo a n dimensioni

§ 499 — Formole fondamentali pei sistemi n^{pli} ortogonali nell' S_n euclideo . . . . . *pag.* 621
§ 500 — Richiamo di teoremi d' esistenza per classi di sistemi differenziali . . . . . » 625
§ 501 — Applicazione ai sistemi differenziali pei sistemi n^{pli} ortogonali » 627
§ 502 — Trasformazioni di Combescure — Inversioni . . . » 631
§ 503 — Trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali . » 633
§ 504 — Elementi relativi ai sistemi trasformati . . . . . » 636
§ 505 — Composizione mediante trasformazioni di Combescure e inversioni . . . . . » 639
§ 506 — Il teorema generale di permutabilità . . . . . » 641
§ 507 — Verifiche relative al teorema di permutabilità . . . » 645
§ 508 — I sistemi n^{pli} ortogonali E simmetrici nelle rotazioni . » 648
§ 509 — Trasformazioni T_m dei sistemi E . . . . . » 650
§ 510 — Il teorema speciale di permutabilità per le T_m dei sistemi E » 652
§ 511 — Sistemi a rotazioni associate (β_{ik}, β_{hi}) . . . . . » 654
§ 512 — Trasformazioni T_m pei sistemi (β_{ih}, β_{hi}) di rotazioni associate . . . . . » 656
§ 513 — Il teorema speciale di permutabilità per le nuove T_m . » 660
§ 514 — Sistemi H di Guichard-Darboux e le loro trasformazioni T_m » 664
§ 515 — Sistemi H traslatorii — Loro trasformazioni T_m . . » 668
§ 516 — Sistemi n^{pli} ortogonali Q . . . . . » 672
§ 517 — Le trasformazioni R_m dei sistemi Q . . . . . » 675
§ 518 — I sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n a curvatura costante . . . . . » 679
§ 519 — Le formole per la trasformazione di Ribaucour . . » 681
§ 520 — Estensione ai ds^2 indefiniti . . . . . » 684

CAPITOLO XXIX

Sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo

§ 521 — Triedro principale e curvature delle linee coordinate . *pag.* 687

§ 522 — Linee d' equidistanza — Equazione del Cayley — Sistemi ciclici osculatori . . . . . *pag.* 689
§ 523 — Formole di Weingarten per le derivate normali di E, F, G, D, D', D'' . . . . . » 693
§ 524 — Applicazione alle famiglie di Lamé . . . . . » 697
§ 525 — L' equazione alle derivate parziali terze per le famiglie di Lamé . . . . . » 699
§ 526 — Famiglie di Lamé con un gruppo continuo G_1 di movimenti o di trasformazioni conformi . . . . » 701
§ 527 — Famiglie elicoidali di Lamé . . . . . » 705
§ 528 — Soluzioni permanenti dell' equazione del Cayley . . » 708
§ 529 — Elementi caratteristici dei sistemi tripli ortogonali secondo Darboux . . . . . » 710
§ 530 — Le tre equazioni del 1° ordine di Bonnet per gli angoli d' Eulero . . . . . » 712
§ 531 — Famiglie di Lamè di piani o sfere e di superficie di rotazione . . . . . » 714
§ 532 — I sistemi tripli ciclici ortogonali . . . . . » 717
§ 533 — Famiglie di Lamé a trajettorie ortogonali piane . . » 720
§ 534 — Sistema triplo ortogonale di quadriche omofocali e coordinate ellittiche . . . . . » 723
§ 535 — Corrispondenza delle asintotiche (dei sistemi coniugati) . » 726
§ 536 — Teorema di Chasles sulla congruenza delle tangenti a due quadriche confocali . . . . . » 728
§ 537 — Superficie di Liouville e geodetiche delle quadriche . » 729

CAPITOLO XXX

Le famiglie dl Lamé composte di superficie a curvatura costante

§ 538 — Sistemi tripli ortogonali pseudosferici . . . . *pag.* 733
§ 539 — Il sistema di equazioni a derivate parziali per la funzione ω » 736
§ 540 — Interpretazione geometrica — Elementi caratteristici . » 739
§ 541 — Famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva . . . . . » 741
§ 542 — Classi particolari di famiglie di Lamé a curvatura costante » 743
§ 543 — La trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici . . . . . » 745
§ 544 — L' equazione a differenziali totali per la funzione φ . . » 747
§ 545 — Il teorema di permutabilità . . . . . » 749
§ 546 — Caso particolare dei sistemi di Weingarten . . . » 752
§ 547 — Le linee d' equidistanza nei sistemi di Weingarten . . » 755
§ 548 — I sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante » 757
§ 549 — Sistema triplo ortogonale di Weingarten composto di elicoidi . . . . . » 761
§ 550 — La trasformazione di Bäcklund pei sistemi di Weingarten » 765
§ 551 — La trasformazione complementare . . . . . » 769
§ 552 — I sistemi tripli ortogonali con superficie a curvatura costante come sistemi Q . . . . . » 761

§ 553 — Caso dei sistemi pseudosferici e relative trasformazioni di Ribaucour. . . . . *pag.* 773
§ 554 — Caso dei sistemi a curvatura positiva — Teorema di permutabilità . . . . . » 777
§ 555 — Equazioni per la distanza normale infinitesima $\varepsilon\,\psi$ . . . » 780
§ 556 — Integrazione del sistema (G) . . . . . » 782
§ 557 — La superficie $\overline{S}$ inviluppo dei piani del sistema ciclico osculatore . . . . . » 785

Nota sul parallelismo di Levi-Civita.

§ 1. — Derivate delle costanti di direzione . . . . . *pag.* 788
§ 2. — Parallelismo per trasporto . . . . . » 790
§ 3. — Parallelismo assoluto nel caso Euclideo. . . . . » 792
§ 4. — Proprietà del parallelismo per trasporto . . . . » 794
§ 5. — Parallelismo subordinato . . . . . » 796
§ 6. — Direzioni associate . . . . . » 799
§ 7. — Conseguenze e casi particolari . . . . . » 800
§ 8. — Problema inverso delle direzioni associate . . . . » 804
§ 9. — Linee trasversali di parallelismo . . . . . » 806
§ 10. — Sistemi doppiamente trasversali. Superficie di traslazione nell'S_n . . . . . » 809

Introduzione alla Geometria proiettiva differenziale d'una superficie.

Nota di Guido Fubini

§ 1. — Un lemma di geometria proiettiva . . . . . *pag.* 812
§ 2. — Le asintotiche e le direzioni di Darboux e Segre . . » 815
§ 3. — Le forme fondamentali . . . . . » 816
§ 4. — Coordinate di punto e di piano tangente . . . . » 820
§ 5. — Le equazioni fondamentali . . . . . » 822
§ 6. — Applicabilità proiettiva — Sua definizione . . . . » 824
§ 7. — Formole preliminari relative al contatto di due superficie . » 826
§ 8. — Condizione per l'applicabilità proiettiva di due superficie . » 828
§ 8. — Metrica proiettiva nello spazio . . . . . » 829
§ 9. — Curvatura asintotica, linee e raggi proiettivi di curvatura — Geodetiche proiettive . . . . . » 830
§ 10. — Cenno di altre ricerche . . . . . » 832

BOLOGNA - NICOLA ZANICHELLI - EDITORE

PINCHERLE SALVATORE e U. AMALDI — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi* . . . . . L. 15 —

PORRO FRANCESCO — *Trattato di astronomia* — Volume Primo . . . . » 45 —

TONELLI LEONIDA — *Fondamenti di calcolo delle variazioni.*

Volume Primo . . . . . » 55 —

Volume Secondo . . . . . » 80 —

PERIODICO DI MATEMATICHE

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA « MATHESIS »

Direttori: F. ENRIQUES - G. LAZZERI - *Redattori:* E. BORTOLOTTI - E. DANIELE A. PERNA - C. ROSATI - *Segretario di Redazione:* O. CHISINI

Prezzo di abbonamento per il 1924: Italia: L. 25 - Estero L. 40

Fascicoli di saggio gratis a richiesta

"SCIENTIA" RIVISTA INTERNAZIONALE DI SINTESI SCIENTIFICA

Si pubblica ogni mese in fascicoli di circa 100 pagine ciascuno

DIRETTORE: EUGENIO RIGNANO

ABBONAMENTO: Italia L. 60 - Estero L. 90.

UFFICI DELLA RIVISTA: Via A. Bertani, 14 - Milano (26).

Segretario Generale: Dott. PAOLO BONETTI

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

Comitato di direzione: L. BIANCHI, a Pisa; T. LEVI-CIVITA, a Roma; S. PINCHERLE, a Bologna; C. SEGRE, a Torino.

ABBONAMENTO al volume I della Serie IV: Italia L. 50 - Estero L. 80.

BOLLETTINO DELL' UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Pubblicazione bimestrale distribuita gratuitamente ai Soci dell' U. M. I.

Per i non soci, abbonamento annuo per il 1924: Italia L. 25 - Estero L. 40.

Ufficio di Presidenza dell' U. M. I.: S. PINCHERLE, *presidente* - P. BURGATTI, *vice-presidente* - L. TONELLI, *tesoriere* - E. BORTOLOTTI, *segretario generale.*

Consiglio direttivo: L. AMOROSO - L. BIANCHI - G. COLONNETTI - O. M. CORBINO M. DE FRANCHIS - R. MARCOLONGO - O. POMINI - U. PUPPINI - C. SEGRE V. VOLTERRA.