BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR1998
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B50718
035/2: : |a (CaOTULAS)160123326
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Bianchi, Luigi, |d 1856-1928.
245:00: |a Lezioni di geometria differenziale.
250: : |a 3. ed. interamente rifatta.
260: : |a Pisa, |b E. Spoerri, |c 1922-[1924]
300/1: : |a 2 v. in 3. |b diagrs. |c 24 cm.
500/1: : |a Vol.2, pt.2 has imprint: Bologna, N. Zanichelli, [1924]
650/1: 0: |a Geometry, Differential
998: : |c RAS |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

TERZA EDIZIONE INTERAMENTE RIFATTA

VOLUME II - PARTE I

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Terza edizione interamente rifatta

IN DUE VOLUMI

VOLUME II. PARTE PRIMA.

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1923

PREFAZIONE

Ho diviso questo secondo volume del trattato in due parti, delle quali la prima, che ora licenzio per le stampe, facendo seguito alle teorie fondamentali ed alle complementari contenute nel primo volume, svolge ulteriori argomenti della geometria infinitesimale delle superficie sì da presentare un quadro, che ho cercato di rendere completo, dei principali risultati fin qui acquisiti in questo campo.

Alla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie e degli enti geometrici che a questa si collegano, in particolare alla teoria delle congruenze rettilinee W, *sono dedicati i due primi capitoli 17 e 18. Una nuova esposizione della teoria del rotolamento di superficie applicabili, considerata come un caso particolare delle proprietà delle congruenze di sfere, forma l' oggetto dei due seguenti capitoli 19 e 20, nel quale ultimo poi viene fatto uno studio accurato dei teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche rotonde. E qui i relativi problemi d' inversione conducono a trattare, in penerale, delle trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di sfere e del teorema fondamentale di permutabilità, con applicazione alle superficie d' area minima, alle superficie a curvatura costante, ed in fine alle trasformazioni* D_m *di Darboux delle superficie isoterme.*

Strettamente collegata con questo capitolo è la teoria dei sistemi ciclici (o congruenze normali di circoli) esposta nel capitolo 21, insieme col nuovo metodo di Weingarten per il problema dell' applicabilità.

Gli ultimi tre capitoli (22, 23, 24) della prima parte trattano la teoria delle trasformazioni B_k *per le superficie applicabili sulle quadriche generali e riproducono, nelle parti principali, la trattazione che questa teoria ha ricevuto, con maggiore ampiezza, nel terzo volume della seconda edizione di questo libro.*

La seconda parte del presente volume (la cui stampa spero potrà essere ultimata fra breve) è tutta dedicata alla geometria metrica infinitesimale degli spazî pluridimensionali, comunque curvi. Dopo un primo capitolo (Cap. 25) nel quale si pongono le nozioni fondamentali relative alla metrica degli iperspazii, delle ipersuperficie e delle curve in essi tracciate, tratto nel seguente Cap. 26 degli spazî

a curvatura costante e dei loro gruppi di movimenti fermandomi particolarmente al caso degli spazî a tre dimensioni. Le ipersuperficie negli spazî a curvatura costante formano l'oggetto del Cap. 27, con maggiore sviluppo pel caso delle superficie in metrica ellittica ed iperbolica a tre dimensioni.

Segue nel Capitolo 28 la teoria generale dei sistemi n.^{pli} di ipersuperficie ortogonali nello spazio S_n *euclideo (o in quelli a curvatura Riemanniana costante), ed a questi sistemi si estendono le trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di ipersfere ed il teorema di permutabilità per queste trasformazioni.*

Gli ultimi Capitoli 29, 30 particolarizzano infine questi studî per lo spazio Euclideo a tre dimensioni e nel Cap. 30 è esposta la teoria dei sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante.

In una nota finale sul parallelismo vincolato *negli spazî curvi ho voluto informare il lettore dei nuovi ed importanti concetti introdotti dal* Levi - Civita *in epoca recente (1917) e che non hanno potuto trovar posto nella redazione anteriore di queste Lezioni.*

Chiude il libro un' appendice sui fondamenti della geometria projettiva differenziale che il prof. Guido Fubini ha voluto scrivere espressamente per queste Lezioni del suo antico maestro. Sono nuovi orizzonti che negli ultimi tempi, in diversi indirizzi, si sono schiusi alla geometria infinitesimale, e il prof. Fubini, che nella costruzione delle nuove teorie ha preso, colle sue recenti ricerche, una parte cosi importante, era particolarmente indicato per introdurre nel nuovo campo projettivo i lettori del presente trattato, che si occupa soltanto di geometria metrica *infinitesimale.*

Pisa, Febbraio 1923.

CAPITOLO XVII.

Deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili.

Deformazioni infinitesime e corrispondenza per ortogonalità d'elementi. - Equazione caratteristica e superficie associate. - Forme normali dell'equazione caratteristica. - Sistema coniugato permanente in una deformazione infinitesima. - Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi. - Congruenze rettilinee di RIBAUCOUR. - Secondo metodo per il problema delle deformazioni infinitesime. - Superficie isoterme e trasformazione di CHRISTOFFEL. - Superficie associate alle deformate della sfera. - Sistemi coniugati permanenti in deformazioni finite. - Teoremi di PETERSON.

§ 281.

Deformazioni infinitesime e corrispondenza per ortogonalità d'elementi.

Riprendiamo nel presente Capitolo lo studio della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili per considerarne le deformazioni *infinitamente piccole*. Le molteplici relazioni di questa teoria colla teoria generale delle superficie, e con quella dei sistemi di raggi, come d'altra parte il suo intimo nesso colle equazioni a derivate parziali della forma di LAPLACE rendono questo studio sommamente interessante e ricco di nuovi risultati per la geometria infinitesimale.

Per la superficie S di cui studiamo le deformazioni infinitesime riteniamo le nostre solite notazioni. Il punto generico $P \equiv (x, y, z)$ di S riceva, nella deformazione infinitesima che si considera, uno spostamento le cui componenti, secondo gli assi coordinati, siano

$$\varepsilon\bar{x}, \quad \varepsilon\bar{y}, \quad \varepsilon\bar{z},$$

dove $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ indicano determinate funzioni finite e continue di u, v (colle derivate che occorre considerare), ed ε indica una *costante infinitesima le cui potenze superiori alla prima vengono trascurate*. Dopo la deformazione, il punto P si trasporta nel punto P′ che ha per coordinate

$$x' = x + \varepsilon\bar{x}, \; y' = y + \varepsilon\bar{y}, \; z' = z + \varepsilon\bar{z},$$

e dovendo aversi per ipotesi

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ne segue la relazione fondamentale

$$dx\,d\bar{x} + dy\,d\bar{y} + dz\,d\bar{z} = 0, \tag{1}$$

che è suscettibile di una semplice ed importante interpretazione geometrica dovuta a MOUTARD. Si considerino $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ come coordinate di un punto $\overline{P}$ nello spazio. Mentre P descrive S, il punto $\overline{P}$ descriverà una superficie $\overline{S}$ (*) corrispondente punto per punto alla S e per la (1): *due elementi lineari qualunque corrispondenti di* S, $\overline{S}$ *saranno sempre fra loro ortogonali.*

Si può dunque presentare il problema delle deformazioni infinitesime sotto questo primo aspetto finito : *Trovare le superficie* $\overline{S}$ *che corrispondono ad una data* S *per ortogonalità d'elementi.*

È bene osservare subito che ad una qualunque superficie S può farsi corrispondere per ortogonalità d'elementi *un piano*, p. e. il piano xy, e ciò nel modo più semplice assoggettando la S ad una rotazione infinitesima attorno all'asse Oz rappresentata da

$$x' = x + \varepsilon y,\ y' = y - \varepsilon x,\ z' = z,$$

onde

$$\bar{x} = y \quad \bar{y} = -x \quad \bar{z} = 0.$$

Questo si interpreta colla costruzione evidente : *si proietti la* S *ortogonalmente sul piano e si faccia rotare di un angolo retto l' immagine attorno all'origine.* Si aggiunga che questa costruzione, combinata con una traslazione ed una omotetia nel piano, dà la costruzione più generale che faccia corrispondere alla S un piano per ortogonalità d'elementi. (*)

Un secondo aspetto finito sotto cui può presentarsi il problema delle deformazioni infinitesime rilevasi dalle osservazioni seguenti. Supposte le S, $\overline{S}'$ corrispondenti per ortogonalità d'elementi, pongasi

$$\xi = x + t\,\bar{x}\ ,\ \eta = y + t\,\bar{y}\ ,\ \zeta = z + t\,\bar{z}$$

dando a t un qualunque valore costante e si riguardino ξ, η, ζ come coordinate di un punto che descriverà una superficie Σ. Per l' elemento lineare di Σ abbiamo

$$\mathrm{S}d\xi^2 = \mathrm{S}dx^2 + t^2\,\mathrm{S}d\bar{x}^2,$$

e questo non cangia mutando t in $-t$. La seconda superficie Σ' data da

$$\xi' = x - t\bar{x}\ ,\ \eta' = y - t\bar{y}\ ,\ \zeta' = z - t\bar{z}$$

è dunque applicabile sopra Σ, corrispondendosi i punti (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') ; il punto medio della loro congiungente è il punto $P \equiv (x, y, z)$ che descrive S e la direzione di questa congiungente segna appunto quella dello spostamento di P nella deformazione infinitesima.

Inversamente se (Σ, Σ') è una coppia qualunque di superficie applicabili, e (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), due loro punti corrispondenti, posto

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \xi'),\quad y = \frac{1}{2}(\eta + \eta'),\quad z = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta')$$

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \xi'),\quad \bar{y} = \frac{1}{2}(\eta - \eta'),\quad \bar{z} = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$$

sussiste la (1), cioè :

(*) Se $\overline{P}$ descrivesse soltanto una curva C, la superficie S avendo i suoi piani tangenti normali alle tangenti di C, sarebbe una sviluppabile, *caso ovvio che trascureremo sempre in seguito.* Se ulteriormente P rimanesse immobile, sarebbero $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ costanti e la S subirebbe soltanto una traslazione, riteniamo dunque nel testo che la matrice $\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} \end{vmatrix}$ abbia caratteristica 2

(*) Preso infatti questo piano per piano xy, la (1) diventa

$$dx\,d\bar{x} + dy\,d\bar{y} = 0,$$

onde considerando $\bar{x}$, $\bar{y}$ come funzioni di x, y, dovrà essere soddisfatto il sistema

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = 0\quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = 0.$$

da cui

$$\bar{x} = ay + b,\qquad \bar{y} = -ax + c\ \ (a, b, c \text{ costanti}).$$

Se due superficie Σ, Σ' *sono applicabili, la superficie* S *luogo dei punti medii delle congiungenti i punti corrispondenti è suscettibile di una deformazione infinitesima, nella quale ciascun punto di* S *si sposta nella direzione di quelle congiungenti.*

Un'altra conseguenza geometrica dell'equazione fondamentale (1) è degna di essere osservata.

Consideriamo quelle linee L della superficie S che sono ortogonali alle direzioni degli spostamenti dei punti nella supposta deformazione infinitesima. (*) Lungo una tale linea L (mantenendo le consuete notazioni del Cap. I) abbiamo

$$\bar{x}\,\alpha + \bar{y}\,\beta + \bar{z}\,\gamma = 0,$$

ed anche per la (1)

$$\alpha\, d\bar{x} + \beta\, d\bar{y} + \gamma\, d\bar{z} = 0,$$

onde differenziando la precedente lungo L

$$\xi\,\bar{x} + \bar{y}\,\eta + \bar{z}\,\zeta = 0.$$

Ne risulta

$$\bar{x} : \bar{y} : \bar{z} = \lambda : \mu ; \nu,$$

cioè il teorema: *In ogni deformazione infinitesima di una superficie* S *le linee di questa superficie che sono ortogonali alle direzioni degli spostamenti dei punti hanno le direzioni medesime per binormali.*

§ 282.

Equazione caratteristica di Weingarten.

Veniamo ora alla trattazione analitica del problema seguendo dapprima il metodo di WEINGARTEN (Crelle Bd. 100). Secondo la (1) la questione è

(*) Queste linee L formano un sistema ∞^1 perfettamente determinato, a meno che tutti gli spostamenti avvengano *normalmente* alla superficie S, ciò che può avvenire soltanto se la S è un piano. E invero se $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sono proporzionali ai coseni di direzione della normale X, Y, Z la (1) diventa

$$dx\,d\mathrm{X} + dy\,d\mathrm{Y} + dz\,d\mathrm{Z} = 0$$

e la superficie, avendo nulla identicamente la seconda forma fondamentale, è un piano.

di determinare le tre funzioni incognite $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di u, v in guisa da soddisfare le tre equazioni del 1° ordine:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0\ , \quad \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0 \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Per trattare simmetricamente questo sistema introduciamo con WEINGARTEN la funzione ausiliaria φ che dà *l'invariante* dell'espressione differenziale del 1° ordine

$$\mathrm{S}\,\bar{x}\,dx = \left(\mathrm{S}\,\bar{x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)du + \left(\mathrm{S}\,\bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv$$

rispetto alla prima forma fondamentale della superficie S

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2\ ;\ (*)$$

poniamo cioè

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{S}\,\bar{x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{S}\,\bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

ossia

$$(2^*)\qquad \varphi = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{S}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{S}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Questa funzione φ detta da WEINGARTEN la *Verschiebungs-function* sarà qui chiamata la funzione *caratteristica*. Essa rappresenta cinematicamente la componente secondo la normale della rotazione che subisce

(*) In generale se una forma differenziale lineare

$$\mathrm{M}du + \mathrm{N}dv,$$

cangiando le variabili u, v nelle nuove u', v' si muta in $\mathrm{M}'\,du' + \mathrm{N}'\,dv'$ si ha

$$\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial v'} - \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial u'} = \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)\frac{\partial (u', v')}{\partial (u, v)}$$

e per ciò l'espressione

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)$$

è invariante (irrazionale) del sistema delle due forme

$$\mathrm{M}du + \mathrm{N}dv\ ,\ \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2$$

nella deformazione un elemento superficiale di S (Volterra. Rendiconti Lincei 1884).

Così l'ultima della (2) si scinde nelle due equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} S\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\varphi\sqrt{EG-F^2} \\ S\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \varphi\sqrt{EG-F^2}\,. \end{cases}$$

Dalla seconda di queste formiamo

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi\sqrt{EG-F^2}),$$

osservando che per la prima delle (2)

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial u\partial v} = -S\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} =$$

$$= -S\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}+D'X\right]$$

$$S\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = S\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+DX\right],$$

e ricordando la formula (I pag. 175)

$$\frac{\partial\, lg\sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

troveremo

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{DSX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}-D'SX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

e analogamente operando sulla prima delle (3)

$$(4^*)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{D'SX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}-D''SX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Se escludiamo, come sopra, il caso ovvio di una S sviluppabile indi supponiamo

$$DD''-D'^2 \neq 0,$$

possiamo risolvere le (4), (4*) rapporto a

$$SX\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\ ,\quad SX\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}$$

e troviamo

$$(5)\qquad \begin{cases} SX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u} = -\dfrac{D\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}} \\ SX\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v} = \dfrac{D''\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}, \end{cases}$$

dove K indica, come al solito, la curvatura totale di S. Ed ora possiamo risolvere le (2), (3), (5) rispetto alle derivate parziali di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ così che otteniamo :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \dfrac{\left(D\dfrac{\partial X}{\partial v}-D'\dfrac{\partial X}{\partial u}\right)\varphi-\left(D\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)X}{K\sqrt{EG-F^2}} \\ \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v} = \dfrac{-\left(D''\dfrac{\partial X}{\partial u}-D'\dfrac{\partial X}{\partial v}\right)\varphi+\left(D''\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)X,}{K\sqrt{EG-F^2}} \end{cases}$$

colle analoghe in $\bar{y}$, $\bar{z}$. Si vede intanto che, appena nota la funzione caratteristica φ, si ha per quadrature la superficie $\bar{S}$ corrispondente alla S per ortogonalità d'elementi.

Dalle (5), derivando la seconda rispetto ad u, la prima rispetto a v e sottraendo si trova

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right) = S\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}-S\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},$$

e sostituendo per $\dfrac{\partial X}{\partial u}$, $\dfrac{\partial X}{\partial v}$ i valori tratti dalle equazioni fondamentali (I pag. 170), abbiamo il risultato fondamentale :

La funzione caratteristica φ della deformazione infinitesima deve soddisfare all' equazione lineare omogenea del secondo ordine :

$$(I)\qquad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}\varphi.$$

Questa si dirà *l'equazione caratteristica*, esprimendo, come ora dimostreremo, la condizione non solo necessaria ma anche sufficiente perchè φ sia funzione caratteristica. E invero si osservi che alla particolare deformazione infinitesima data da

$$\bar{x}=y,\ \bar{y}=-x,\ z=0$$

corrisponde $\varphi = X$, onde : X, Y, Z *sono tre soluzioni particolari della* (*I*). Dopociò si verifica subito che, se φ è un'altra soluzione della (I), la condizione d'integrabilità per le (6) è soddisfatta.

Risulta altresì dalle osservazioni superiori che le deformazioni infinitesime della S consistenti *in puri movimenti* corrispondono a una funzione caratteristica φ della forma

$$\varphi = a\,X + b\,Y + c\,Z \quad (a,\ b\ c \text{ costanti})$$

§ 283.

Trasformazione della equazione caratteristica. Superficie associate.

Alle formole fondamentali (6) ed alla equazione caratteristica (I) possiamo dare un altro aspetto introducendo in calcolo i coefficienti e, f, g della rappresentazione sferica di S (della terza forma fondamentale). Ricordando che

$$|K|\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{eg-f^2}$$

le (6) si possono scrivere sotto la forma equivalente

$$(6^*)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=-\frac{D'\varphi}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{D\varphi}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial X}{\partial v}+\left(\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)X \\ \frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=-\frac{D''\varphi}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{D'\varphi}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial X}{\partial v}+\left(\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)X. \end{cases}$$

Ora a causa delle equazioni fondamentali (I pag. 170)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}=\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial v}-eX \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial v}-fX \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}=\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial X}{\partial v}-gX \end{cases}$$

e dalle equazioni di Codazzi (I pag. 233) (*)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}'\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}-2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\frac{D}{\sqrt{eg+f^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}=0 \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}-2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}=0, \end{cases}$$

si trova subito che le condizioni d'integrabilità delle (6) si riducono a quest'unica equazione del secondo ordine per φ :

$$(I^*)\qquad D''(\varphi_{11}+e\varphi)-2D'(\varphi_{12}+f\varphi)+D(\varphi_{22}+g\varphi)=0,$$

dove

$$\begin{cases} \varphi_{11}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \varphi_{12}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \varphi_{22}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{cases}$$

sono le derivate seconde covarianti di φ (calcolate rispetto alla terza forma fondamentale). Manifestamente la (I*) è una nuova forma dell'equazione caratteristica (I), essa, pone in immediata evidenza che X, Y, Z ne sono soluzioni particolari.

Siamo condotti ad una notevole interpretazione geometrica della (I*) riferendo la superficie S a coordinate tangenziali

$$X,\ Y,\ Z\ ;\ \bar{\varphi},$$

(*) I simboli di Christoffel $\left\{\begin{matrix}i\,k\\l\end{matrix}\right\}'$ si riferiscono alla terza forma fondamentale $e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2$.

avendo indicato con $\bar{\varphi}$ la distanza (algebrica) dell'origine dal piano tangente di S. Per le formale di WEINGARTEN in coordinate tangenziali (I pag. 259) abbiamo

$$-\mathrm{D} = \bar{\varphi}_{11} + e\bar{\varphi}, \quad -\mathrm{D}' = \bar{\varphi}_{12} + f\bar{\varphi}, \quad -\mathrm{D}'' = \bar{\varphi}_{22} + g\bar{\varphi},$$

sicchè la (I*) può scriversi sotto la forma

$$(\bar{\varphi}_{22} + g\bar{\varphi})(\varphi_{11} + e\varphi) - 2(\bar{\varphi}_{12} + f\bar{\varphi})(\varphi_{12} + f\varphi) + (\bar{\varphi}_{11} + e\bar{\varphi})(\varphi_{22} + g\varphi) = 0$$

che è simmetrica in φ, $\bar{\varphi}$. Questo porta a considerare la superficie S_0 inviluppo del piano

$$x\,\mathrm{X} + y\,\mathrm{Y} + z\,\mathrm{Z} = \varphi,$$

cioè la superficie di coordinate tangenziali $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \varphi)$; e vediamo che mentre φ è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S, così $\bar{\varphi}$ è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S_0. Quale è la relazione geometrica fra le due superficie S, S_0 ? Esse si corrispondono intanto per *parallelismo di normali* (hanno a comune la terza forma fondamentale) e indicando con

$$\begin{cases} \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \\ \mathrm{D}_0\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'_0\,du\,dv + \mathrm{D}''_0\,dv^2 \end{cases}$$

le loro rispettive seconde forme fondamentali, si ha per la (I*)

$$\mathrm{D}\,\mathrm{D}''_0 - 2\,\mathrm{D}'\,\mathrm{D}'_0 + \mathrm{D}''\,\mathrm{D}_0 = 0, \tag{7}$$

cioè è nullo il loro invariante simultaneo. Questo s'interpreta geometricamente così: *alle linee asintotiche dell'una superficie corrisponde sull'altra un sistema coniugato.* E infatti se supponiamo p. e. $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' = 0$ la (7) ci da $\mathrm{D}'_0 = 0$. Inversamente se due superficie S, S_0 si corrispondono per parallelismo di normali ed alle asintotiche dell'una corrisponde sull'altra un sistema coniugato, sussisterà la (7), ossia indicando con $\bar{\varphi}$, φ le rispettive distanze dall'origine dei piani tangenti di S, S_0 sarà φ funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S, e analogamente $\bar{\varphi}$ per S_0. Ad ogni tale coppia (S, S_0) di superficie daremo il nome di superficie *associate*, quando cioè si corrispondono per parallelismo di normali e alle asintotiche dell'una corrisponde un sistema coniugato sull'altra. Abbiamo dunque:

In ogni coppia di superficie associate la distanza di un punto fisso dello spazio dal piano tangente di una delle due superficie è funzione caratteristica per una deformazione infinitesima dell'altra.

Si osservi subito che in ogni coppia reale di superficie associate S, S_0 ve ne ha *una almeno* a curvatura negativa. E invero se p. e. S è a curvatura positiva, facendo $\mathrm{D}' = 0$ (coll' assumere il sistema $(u\ v)$ coniugato su S), avranno D, D'' egual segno e la (7), che si riduce alla

$$\mathrm{D}\,\mathrm{D}''_0 + \mathrm{D}''\,\mathrm{D}_0 = 0, \tag{8}$$

dimostra che D_0, D''_0 hanno segno contrario, quindi S_0 è a curvatura negativa. Dalla considerazione stessa risulta che: *se per due superficie associate* S, S_0 *il sistema coniugato comune è reale, le due superficie hanno curvature di segno contrario.* Difatti, preso a sistema coordinato (u, v) il sistema coniugato comune, sarà $\mathrm{D}' = \mathrm{D}'_0 = 0$ e, sussistendo la (8), i rapporti $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''}$, $\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{D}''_0}$ avranno segno contrario.

§ 284.

Le forme normali dell'equazione caratteristica.

Riferendo la superficie S, di cui studiamo le deformazioni infinitesime, a convenienti sistemi curvilinei (u, v), possiamo ridurre l' equazione caratteristica a semplici forme, che riguarderemo come *forme normali.*

a) Se la superficie S è a curvatura negativa, riferiamola alle sue asintotiche reali (u, v) ed avremo

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}'' = 0,$$

e l'equazione caratteristica (I*) diventerà

$$\varphi_{12} + f\varphi = 0,$$

ossia sviluppando colle formole del § 88 (I, pag. 239):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0. \tag{9}$$

Essendo φ una qualunque soluzione della (9), le formule (6*) che definiscono la superficie $\bar{\mathrm{S}}$, corrispondente per ortogonalità elementi alla S, diventano

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \rho\left(\mathrm{X}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \rho\left(-\mathrm{X}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Ora applichiamo la trasformazione stessa impiegata al § 91 (I, pag. 246), per stabilire le formole di LELIEUVRE, poniamo cioè

$$\varphi\sqrt{\rho} = \theta\,,$$

e l'equazione (9) diventerà

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\,\theta, \quad \text{con } \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v} - f\,,$$

mentre le (10) prenderanno la forma :

$$(11)\qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \theta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} & \dfrac{\partial \theta}{\partial v} \end{vmatrix},$$

colle analoghe ottenute permutando circolarmente le lettere $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, (ξ, η, ζ). È da ricordarsi che ξ, η, ζ sono esse stesse soluzioni particolari della (II), mentre θ è una quarta soluzione qualunque che definisce una corrispondente deformazione infinitesima, la quale per altro si riduce ad un puro movimento *se* θ *è una combinazione lineare di* ξ, η, ζ.

b) Se la S è a curvatura positiva, riferiamola, come al § 94 (I, pag. 253), ad un sistema *isotermo-coniugato* e l'equazione caratteristica diventerà

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + (e+g)\,\varphi = 0.$$

ossia

$$(12)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial\, log\,\rho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial\, log\,\rho}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + (e+g)\,\varphi = 0\,,$$

mentre lI (6*) diventano

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \rho\left(\varphi\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{X}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \rho\left(-\varphi\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} + \mathrm{X}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Colla solita trasformazione

$$\varphi\sqrt{\rho} = \theta$$

l'equazione caratteristica (12) diventa

$$(\mathrm{II}^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v} = \mathrm{M}\,\theta \\ \mathrm{M} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\dfrac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial v^2}\right) - (e+g)\,; \end{cases}$$

e la superficie $\bar{\mathrm{S}}$ corrispondente ad S per ortogonalità d' elementi è definita per quadrature dalle formole

$$(14)\qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \theta & \xi \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \theta & \xi \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

e dalle due analoghe. Abbiamo così stabilito il risultato :

L'equazione caratteristica da cui dipende la ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie S *si riduce alla forma normale*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\,\theta\,,$$

o all'altra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \mathrm{M}\theta\,,$$

secondo che la S *è a curvatura negativa o positiva.*

§ 285.

Sistema coniugato permanente nella deformazione infinitesima.

Consideriamo una coppia S, S_0 di superficie associate, delle quali una almeno, poniamo S_0, ha linee asintotiche reali (§ 283), che prendiamo a linee coordinate (u, v), onde avremo

$$\mathrm{D}_0 = 0,\ \mathrm{D''}_0 = 0,\ \mathrm{D'} = 0.$$

La superficie $\bar{\mathrm{S}}$ corrispondente ad S per ortogonalità d' elementi nella deformazione infinitesima considerata sarà definita per la (6*) dalle formole :

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\left(\varphi \dfrac{\partial X}{\partial v} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\left(-\varphi \dfrac{\partial X}{\partial u} + X\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right), \end{cases}$$

ed avendosi $D_0 = D''_0 = 0$ la funzione φ soddisferà alle due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - e\varphi \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - g\varphi. \end{cases}$$

Dopo ciò se deriviamo la prima delle (15) rapporto a v (o la seconda rispetto ad u) ricordando le equazioni di Codazzi, già invocate al § 283, e le altre

$$X_{11} + eX = 0, \quad X_{22} + gX = 0.$$

troviamo :

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\, \partial v} = -\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{D''}{D} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{D}{D''} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Ma per le formole che legano i simboli di CHRISTOFFEL per la prima e terza forma fondamentale di una superficie si ha (I, pag 231)

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{D''}{D}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{D}{D''},$$

e la precedente si scrive così :

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\, \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

formula che vale similmente per $\bar{y}, \bar{z}$. Questa è la stessa equazione di LAPLACE cui soddisfano x, y, z riferite al sistema coniugato (u, v) di S. Dunque : *Il sistema* (u, v) *è quello coniugato comune alle due superficie* $S, \bar{S}$ *corrispondenti per ortogonalità d'elementi e la relativa equazione di* LAPLACE *è la stessa per le due superficie.*

È da notarsi che della medesima equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

insieme alle (x, y, z), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, è anche soluzione

$$x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z},$$

come risulta subito dall'identità

$$S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0.$$

Dopo ciò, se ritorniamo alla seconda interpretazione finita data al § 281 del problema delle deformazioni infinitesime, e consideriamo le due superficie applicabili Σ, Σ' date da

$$\begin{matrix} \Sigma) \ \xi = x + t\bar{x}\ , & \eta = y + t\bar{y}\ , & \zeta = z + t\bar{z} \\ \Sigma') \ \xi' = x - t\bar{x}\ , & \eta' = y - t\bar{y}\ , & \zeta' = z - t\bar{z}, \end{matrix} \qquad (t \text{ cost}^{te})$$

vediamo che anche sopra Σ, Σ' il sistema (u, v) è il sistema coniugato comune e l'equazione di LAPLACE resta la medesima, e ne è ancora soluzione (*) :

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 4t(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}).$$

Questo vale in particolare se si dà a t un valore ε infinitesimo, onde si conclude che sulla deformata S' infinitesima di S il sistema (u, v) si è conservato coniugato, cioè : *Il sistema coniugato* (u, v) *di una superficie* S *che corrisponde alle asintotiche di una superficie* S_0 *associata alla* S *in una deformazione infinitesima è quello che si conserva coniugato dopo la deformazione. Sulla superficie* $\bar{S}$ *corrispondente per ortogonalità d' elementi vi corrisponde il sistema coniugato omologo.*

(*) L'osservazione è dovuta a Koenigs (Comptes Rendus t. 116 p. 569). Direttamente risulta dall'osservare che in due superficie applicabili Σ, Σ' riferite al sistema coniugato comune l'equazione di Laplace (dipendendo dai coefficienti del ds^2) è la medesima. Di più, posto

$$\rho = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad \rho' = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$

si ha (I pag. 220)

$$\rho_{12} = \rho'_{12} = F,$$

onde possono trarsi inversamente i risultati del presente paragrafo.

Viceversa se consideriamo una deformazione infinitesima della S ed il relativo sistema coniugato *permanente*, sulla associata S_0 il sistema corrispondente sarà quello delle asintotiche. Di qui si vede che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema coniugato di una superficie* S *sia permanente in una deformazione infinitesima è che la sua immagine sferica, di* GAUSS *coincida con quella delle asintotiche di una superficie* S_0. *Questa è allora associata alla* S *in quella deformazione infinitesima.*

Come corollario si ha il risultato di WEINGARTEN:

Le superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura e queste soltanto ammettono una deformazione infinitesima che conserva le linee di curvatura.

§ 286.

Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi.

Supposto che (S, $\overline{S}$) sia una coppia di superficie che si corrispondono per ortogonalità d'elementi, diamo alcune proprietà generali di siffatta corrispondenza.

a) Sia dapprima la S a curvatura positiva e scegliamo come al § 284 il sistema (u, v) sulla S isotermo-coniugato, onde varranno le (14) che possiamo scrivere

$$\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right), \quad \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right),$$

e dalla condizione d'integrabilità abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = \frac{2}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

colle formole analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$. D'altronde, indicando con un soprassegno le quantità relative alla superficie $\overline{S}$, abbiamo dalle formole fondamentali della teoria

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\bar{2}\bar{2}\\1\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left[\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + (\overline{D} + \overline{D''})\,X,$$

e confrontando colla precedente risulta

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\bar{2}\bar{2}\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial lg\,\theta^2}{\partial u}, \quad \left\{\begin{matrix}\bar{2}\bar{2}\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial log\,\theta^2}{\partial v},$$

e inoltre

$$\overline{D} + \overline{D''} = 0. \tag{16}$$

Quest'ultima prova che $\overline{D}, \overline{D''}$ hanno necessariamente segno contrario, e perciò la curvatura della $\overline{S}$ è certamente negativa (se la $\overline{S}$ non è un piano nel qual caso $\overline{D}, \overline{D'}, \overline{D''}$ sono nulli); di più, essendo $D' = 0$, $D = D''$, la (16) dice che alle linee asintotiche di $\overline{S}$ corrisponde un sistema coniugato su S. Vediamo intanto che: *Le superficie corrispondenti per ortogonalità d'elementi a superficie di curvatura positiva hanno curvatura negativa* (come accade per le associate § 283).

b) Suppongasi ora che la S sia a curvatura negativa e riferimola alle sue asintotiche reali (u, v), onde avremo per le (11):

$$\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right), \quad \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right),$$

e dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = 0$$

deduciamo

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\, lg\,\theta}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{\partial\, lg\,\theta}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

che è un'equazione di LAPLACE *a invarianti eguali.* (*) Dunque: *Alle linee*

(*) Si sa che in una equazione di Laplace

$$s + ap + bq + cz = 0$$

gli invarianti h, k sono

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

Essi sono eguali quando $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$ (Cf. Darboux Leçons 2^{due} partie p-23 (2^a edizione).

asintotiche di una superficie S *corrisponde sopra ogni superficie* $\bar{S}$, *in relazione d' ortogonalità d'elementi con* S, *un sistema coniugato ad invarianti eguali.*

Viceversa se di una superficie $\bar{S}$ conosciamo un sistema coniugato (u, v) ad invarianti eguali, potremo porre.

$$\left\{\begin{matrix}1\bar{2}\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial\, lg\,\theta}{\partial v} \quad , \quad \left\{\begin{matrix}1\bar{2}\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial\, lg\,\theta}{\partial u} ,$$

essendo θ una conveniente funzione di u, v. Ma allora, determinando per quadrature ξ, η, ζ dalle equazioni compatibili

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

e dalle analoghe per η, ζ, saranno ξ, η, ζ tre soluzioni della equazione in Φ.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 lg\theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right).\Phi$$

Conseguentemente le formole di LELIEUVRE (I pag. 246)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

definiscono una superficie S colle linee asintotiche (u, v) che corrisponde per ortogonalità d'elementi alla $\bar{S}$. Vediamo quindi che :

La ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie equivale a quella dei suoi sistemi coniugati ad invarianti eguali.

§ 287.

Le congruenze rettilinee di Ribaucour.

Le proprietà delle coppie $(S, \bar{S})$ di superficie che si corrispondono per ortogonalità d' elementi trovano la loro interpretazione geometrica più espressiva introducendo le congruenze rettilinee che si formano conducendo pei punti di una di esse, p. e. della $\bar{S}$, i raggi paralleli alle normali nei punti corrispondenti dell' altra S. Tali congruenze vennero considerate da

RIBAUCOUR e si diranno *congruenze di* RIBAUCOUR ; la superficie S alle cui normali sono paralleli i raggi prenderà il nome di *superficie generatrice* della congruenza.

Calcoliamo gli elementi della congruenza di RIBAUCOUR riferendoci alle formole generali del § 282 e introducendo i coefficenti i KUMMER (I pag. 456)

$$\bar{e} = S\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} \quad , \quad \bar{f} = S\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} \quad , \quad \bar{f}' = S\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} \quad , \quad \bar{g} = S\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Dalle (6), § 282 troviamo

$$\bar{e} = \frac{f\mathrm{D} - e\mathrm{D}'}{\sqrt{eg - f^2}}.\varphi \, , \; \bar{f} = \frac{f\mathrm{D}' - e\mathrm{D}''}{\sqrt{eg - f^2}}.\varphi \, , \; \bar{f}' = \frac{g\,\mathrm{D} - f\,\mathrm{D}'}{\sqrt{eg - f^2}}.\varphi \, , \; \bar{g} = \frac{g\mathrm{D}' - f\mathrm{D}''}{\sqrt{eg - f^2}}.\varphi,$$

e indicando con d l' ascissa dei punti limiti, con ρ quella dei fuochi e con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della S, dalle formole del Vol.^{e} I (§§ 176, 178) deduciamo (*)

$$(17) \qquad d^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4}\varphi^2 \, , \; \rho^2 = -\, r_1 r_2 \,.\, \varphi^2 \, ,$$

mentre l'equazione differenziale delle sviluppabili (I pag. 468) diventa

$$\mathrm{D}\, du^2 + 2\,\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2 = 0$$

e combina con quella delle asintotiche sopra S.

Abbiamo quindi : *In ogni congruenza di* RIBAUCOUR *la superficie* S *di partenza, corrisponde per ortogonalità d' elementi alla superficie generatrice media della congruenza. Le sviluppabili della congruenza corrispondono alle linee asintotiche della superficie generatrice* S *e tagliano la superficie media* $\bar{S}$ *secondo un sistema coniugato ad invarianti eguali.*

Quest' ultima proprietà, che discende dalle osservazioni al paragrafo precedente, è *caratteristica* per le congruenze di RIBAUCOUR, come ha dimostrato GUICHARD ; anzi possiamo dire di più :

(*) Si tengano presenti le formule

$$r_1 + r_2 = \frac{2\, f\mathrm{D}' - e\,\mathrm{D}'' - g\,\mathrm{D}}{eg - f^2}$$

$$r_1 r_2 = \frac{\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2}{eg - f^2}.$$

Ogni congruenza le cui sviluppabili tagliano la superficie media secondo un sistema coniugato è una congruenza di RIBAUCOUR, *ed il sistema coniugato è ad invarianti eguali.*

Per dimostrarlo ricorriamo alle formole del § 183 (I, pag. 484) che dànno le coordinate del punto medio (x, y, z) della congruenza

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right] X - \rho\dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right] X + \rho\dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

dove ρ è una soluzione dell'equazione di LAPLACE

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + f\right]\rho = 0.$$

Esprimiamo ora che sulla superficie media S le sviluppabili della congruenza tracciano un sistema (u, v) coniugato, per la qual cosa è necessario e sufficiente che x, y, z siano soluzioni di una medesima equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

con P, Q convenienti funzioni di u, v. Formando effettivamente $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ dalla prima (o dalla seconda) delle (18), osservando la (19) e la formula

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial X}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial X}{\partial v} - f\,X,$$

troviamo

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right]\frac{\partial X}{\partial u} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right]\frac{\partial X}{\partial v} + \\ + \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right)\rho + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial u}\right] X,$$

che deve sussistere colle analoghe in y, z. Le funzioni supposte P, Q saranno quindi date da

$$(20)\qquad P = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},\quad Q = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},$$

e dovrà sussistere fra P e Q la relazione

$$P\left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right] - Q\left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right] = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\rho + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

la quale, a causa delle (20), si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$$

ed esprime che le immagini sferiche delle sviluppabili della congruenza sono le immagini delle asintotiche di una superficie, che diremo $\overline{S}$.

Abbiamo dunque intanto. *Condizione necessaria e sufficiente perchè le sviluppabili di una congruenza taglino la superficie media* S *secondo un sistema coniugato è che le loro immagini sferiche coincidano colle immagini delle asintotiche di un' altra superficie* $\overline{S}$.

Siccome poi $\dfrac{\partial P}{\partial v} = \dfrac{\partial Q}{\partial u}$, il detto sistema coniugato (u, v) sopra S è ad invarianti eguali. Ed ora facilmente constatiamo che la seconda superficie $\overline{S}$ corrisponde per ortogonalità d'elementi alla superficie media S della congruenza, che è adunque una congruenza di RIBAUCOUR. E infatti se con $K = -\dfrac{1}{R^2}$ indichiano la curvatura di $\overline{S}$, sussistono le formule (I pag. 239)

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} = -2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},\quad \frac{\partial \log R}{\partial v} = -2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$$

e per le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di un punto di $\overline{S}$ si ha

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{R}{\sqrt{eg - f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial u} - e\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{R}{\sqrt{eg - f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial v} - g\frac{\partial X}{\partial u}\right).$$

Dal confronto colle (18) si trae

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0,\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) = 0,$$

le quali formule provano appunto che le due superficie S, $\overline{S}$ si corrispondono per ortogonalità d' elementi.

§ 288.

Esempi di congruenze di Ribaucour.

Consideriamo ora alcune classi speciali notevoli di congruenze di RIBAUCOUR.

a) Una prima classe di congruenze di RIBAUCOUR si ha nelle congruenze isotrope (I § 175) ; si ha infatti: *Le congruenze isotrope sono le speciali congruenze di* RIBAUCOUR *avente una sfera per superficie generatrice.* Questo è posto in evidenza anche dalle attuali formole (17), la prima delle quali, supponendo $r_1 = r_2$, dà $d = 0$. La rappresentazione analitica delle congruenze isotrope si ottiene ora subito osservando che alle asintotiche della superficie media (necessariamente reali secondo il § 286) corrisponde sulla sfera un sistema coniugato ad invarianti eguali, cioè un sistema *ortogonale isotermo*. Viceversa, partendo da un sistema ortogonale isotermo arbitrario sulla sfera, colle formole allà fine del § 286, avremo per quadrature la più generale congruenza isotropa, ossia la più generale deformazione infinitesima della sfera.

b) Le congruenze di GUICHARD (I § 186), le cui sviluppabili tagliano le superficie focali secondo le linee di curvatura, sono caratterizzate dall'avere per immagine sferica delle sviluppabili l'immagine delle asintotiche di una superficie pseudosferica. Per ciò : *le congruenze di* GUICHARD sono congruenze di RIBAUCOUR aventi una superficie pseudosferica per superficie generatrice.

È da notarsi che le superficie *associate* alle pseudosferiche nelle loro deformazioni infinitesime non sono altro che le superficie di Voss, sulle quali il sistema coniugato (u, v) corrispondente alle asintotiche della pseudosferica è formato di linee geodetiche (§ 186).

c) Se si cercano le congruenze *normali* di RIBAUCOUR, l'immagine sferica delle sviluppabili dovrà essere un sistema ortogonale e la superficie generatrice avrà le asintotiche ortogonali e sarà quindi una superficie d'area minima. Sotto forma equivalente abbiamo: *Per tutte e sole le superficie con rappresentazione isoterma delle linee di curvatura la congruenza delle normali è una congruenza di* RIBAUCOUR.

d) Si è visto (§ 281) che ad una qualunque superficie S può farsi corrispondere per ortogonalità d'elementi un piano S, che sarà dunque la superficie media della congruenza ottenuta colla relativa costruzione di RIBAUCOUR. Siccome poi sul piano qualunque sistema è da riguardarsi come coniugato, ne segue : *Ogni congruenza che ha per superficie media un piano è una congruenza di* RIBAUCOUR. La stessa cosa segue del resto anche dalle formole (18) ove si supponga p. e. che la superficie media si riduca al piano $z = 0$, onde segue

$$\frac{\partial \log Z}{\partial u} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad \frac{\partial \log Z}{\partial v} = \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\},$$

e per ciò

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}.$$

Rammentando la costruzione al § 281 abbiamo quindi: *Per costruire la più generale congruenza di* RIBAUCOUR *con superficie media piana si prenda una supèrficie arbitraria* S *e se ne projettino ortogonalmente i punti sul piano, indi rotata nel piano l'immagine di un angolo retto attorno ad un centro fisso, si conducano pei nuovi punti i raggi paralleli alle normali di* S *nei punti corrispondenti.*

Segue di qui che le projezioni ortogonali sopra un piano delle asintotiche di qualunque superficie formano un sistema piano ad invarianti eguali, e viceversa ogni tale sistema piano è la projezione ortogonale delle asintotiche di una superficie.

In particolare, se per superficie S della costruzione precedente prendiamo una superficie d'area minima, la congruenza di RIBAUCOUR risulterà normale, e le superficie normali ai raggi sono in tal caso le *superficie di* BONNET, per le quali il luogo dei punti medii fra i centri di curvatura è un piano.

e) Come ultimo esempio di congruenze di RIBAUCOUR consideriamo le congruenze le cui due falde focali si riducono a curve C, Γ arbitrarie. La superficie media è una superficie (qualunque) di traslazione le cui curve generatrici formano un sistema coniugato ad invarianti eguali (corrispondente a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$). Colle formole alla fine del § 286 ove si ponga

$$\bar{x} = U + V\,,\ \bar{y} = U_1 + V_1,\ \bar{z} = U_2 + V_2\,;\ \theta = \text{cost}^a$$

si avrà subito la superficie S corrispondente per ortogonalità d'elementi alla superficie $\overline{S}$ di traslazione, colle linee asintotiche (u, v).

§ 289.

Secondo metodo per la ricerca delle deformazioni infinitesime.

Passiamo ora ad esporre un secondo metodo per la ricerca delle deformazioni infinitesime che deriva immediatamente dalle formole generali del Cap. IV ed è collegato del resto al primo per mezzo delle superficie associate.

Riteniamo la superficie S definita intrinsecamente dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E du^2 + 2\,F du\,dv + G dv^2 \\ D du^2 + 2\,D' du\,dv + D'' dv^2\,; \end{cases}$$

in ogni sua deformazione infinitesima i coefficienti E. F, G della prima forma rimarranno inalterati e quelli della seconda subiranno variazioni infinitesime che indicheremo con

$$\delta D = \varepsilon\,\Gamma\,, \quad \delta\,D' = \varepsilon\,\Gamma'\,, \quad \delta\,D'' = \varepsilon\,\Gamma''\,,$$

dove ε rappresenta una costante infinitamente piccola e Γ, Γ', Γ'' tre funzioni di u, v da determinarsi. Le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare Γ, Γ', Γ'' si ottengono manifestamente *variando*, l'equazione di Gauss e le due equazioni di Codazzi e si scrivono

$$D\,\Gamma'' - 2\,D'\,\Gamma' + D''\,\Gamma = 0 \tag{20}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Gamma}{\partial v} - \dfrac{\partial\Gamma'}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\Gamma + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right]\Gamma' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\Gamma'' = 0 \\ \dfrac{\partial\Gamma''}{\partial u} - \dfrac{\partial\Gamma'}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\Gamma + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\Gamma' - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\Gamma'' = 0\,, \end{cases} \tag{21}$$

alle quali ponendo

$$\frac{\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}} = \gamma\,, \quad \frac{\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} = \gamma'\,, \quad \frac{\Gamma''}{\sqrt{EG - F^2}} = \gamma''\,,$$

possiamo dare la forma equivalente

$$D\gamma'' - 2\,D'\gamma' + D''\gamma = 0 \tag{20*}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma}{\partial v} - \dfrac{\partial\gamma'}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\gamma - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\gamma' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\gamma'' = 0 \\ \dfrac{\partial\gamma''}{\partial u} - \dfrac{\partial\gamma'}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\gamma - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\gamma' + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\gamma'' = 0. \end{cases} \tag{21*}$$

Da queste e dalle formole fondamentali risulta che l'espressione

$$\left(\gamma'\frac{\partial x}{\partial u} - \gamma\frac{\partial x}{\partial v}\right)du + \left(\gamma''\frac{\partial x}{\partial u} - \gamma'\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv\,,$$

e le due analoghe per y, z sono differenziali esatti, e indicandone con x_0, y_0, z_0 gli integrali, questi si hanno per quadrature dalla formola

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \gamma'\dfrac{\partial x}{\partial u} - \gamma\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \gamma''\dfrac{\partial x}{\partial u} - \gamma'\dfrac{\partial x}{\partial v}\,, \end{cases} \tag{22}$$

e dalle due analoghe per y_0, z_0. Ora, riguardando x_0, y_0, z_0 come coordinate di un punto dello spazio, questo punto descrive una superfice S_0 che diciamo essere *l'associata* alla S nella corrispondente deformazione infinitesima. In primo luogo infatti vediamo dalle (22) che S_0 corrisponde alla S per parallelismo di normali, e in secondo luogo pei coefficienti D_0, D'_0, D''_0 della seconda forma fondamentale di S_0, abbiamo :

$$D_0 = D\gamma' - D'\gamma,\ D'_0 = D'\gamma' - D''\gamma = D\gamma'' - D'\gamma',\ D''_0 = D'\gamma'' - D''\gamma. \tag{23}$$

Siccome ne segue

$$D\,D''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'\,D'_0 = 0\,,$$

vediamo che (S, S_0) è una coppia di superficie associate. Che poi la deformazione infinitesima corrispondente sia quella a cui competono le variazioni $\varepsilon\Gamma$, $\varepsilon\Gamma'$, $\varepsilon\Gamma''$ di D, D', D'' si verifica nel modo più semplice assumendo sopra S a sistema (u, v) il sistema coniugato permanente in questa deformazione. Allora $D' = 0$, $\gamma' = 0$, e per ciò dalle (23)

$$D_0 = D''_0 = 0\,,$$

cioè : *sulla* S_0 *le linee* (u, v) *sono asintotiche, il* che dimostra l'asserto.

Si noti poi che, conosciuti i valori di γ γ', γ'', colle (22) si avranno x_0, y_0, z_0 per quadrature, e calcolata la funzione caratteristica :

$$\varphi = \mathrm{S}\, X x_0,$$

colle formole del § 282, avremo subito con quadrature la corrispondente deformazione infinitesima.

Dalle formole (22) possiamo trarre anche un'altra conseguenza assumendo a sistema coordinato (u, v) il sistema coniugato (reale od immaginario) comune; allora avremo insieme

$$\mathrm{D}' = 0,\ \mathrm{D}'_0 = 0,$$

e perciò dalle (23)

$$\gamma = \gamma'' = 0.$$

Così le (22) diventano

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \gamma' \frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\gamma' \frac{\partial x}{\partial v},$$

che possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0 - \gamma' x}{1-\gamma'}\right) = \frac{\partial \gamma'}{\partial u}(x_0 - x),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_0 + \gamma' x}{1+\gamma'}\right) = -\frac{\partial \gamma'}{\partial v}(x_0 - x).$$

Queste ci dimostrano che nella congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti $\mathrm{P}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, di S, S_0 le sviluppabili sono le $v = \text{cost}^{\text{te}}$, $u = \text{cost}^{\text{te}}$ e i due fuochi hanno le rispettive coordinate

$$\left(\frac{x_0 - \gamma' x}{1-\gamma'},\ \frac{y_0 - \gamma' y}{1-\gamma'},\ \frac{z_0 - \gamma' z}{1-\gamma'}\right)$$
$$\left(\frac{x_0 + \gamma' x}{1+\gamma'},\ \frac{y_0 + \gamma' y}{1+\gamma'},\ \frac{z_0 + \gamma' z}{1+\gamma'}\right),$$

e dividono per ciò armonicamente il segmento PP_0, Dunque : *Le congiungenti i punti corrispondenti* P, P_0 *di due superficie associate* S, S_0 *formano una congruenza le cui sviluppabili tagliano* S, S_0 *secondo il sistema coniugato comune (ad invarianti eguali); sopra ogni raggio i due fuochi dividono armonicamente il segmento* P P_0.

§ 290

Applicazioni varie del secondo metodo.

Colle formole del paragrafo precedente risolviamo alcune questioni particolari.

α) In primo luogo torniamo a considerare le deformazioni infinitesime della sfera. I coefficienti D, D′, D″ essendo in tal caso proporzionali, per un fattore costante, ad E, F, G le equazioni (20) e (21) esprimono che le due forme quadratiche

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma\, du^2 + 2\,\Gamma'\, du\, dv + \Gamma''\, dv^2 \\ \mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2 \end{array}\right.$$

appartengono, quali seconda e terza forma fondamentale, ad una superficie d'area minima. E viceversa se le dette due forme appartengono, nel senso spiegato, ad una qualunque superficie minima, le formole (22) dànno per quadrature la più generale superficie associata alla sfera che è alla sua volta una seconda superficie minima,precisamente la coniugata in applicabilità della primitiva.

β) Riprendiamo, col secondo metodo, il problema già risoluto al § 285 di caratterizzare sopra una superficie qualunque S i sistemi coniugati (u, v) permanenti in deformazioni infinitesime. Avremo in questo caso simultaneamente

$$\mathrm{D}' = 0,\ \Gamma' = 0,$$

indi dalla (20)

$$\Gamma = \lambda\, \mathrm{D},\ \Gamma'' = -\lambda\, \mathrm{D}'',$$

il fattore λ essendo da determinarsi dalle (21), le quali, osservando che D, D″ (D′ = 0) soddisfano alle equazioni di Codazzi, ci dànno

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = 2\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''}\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\},\quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 2\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}.$$

Queste, ricorrrendo alle formole del Vol. I, si scrivono

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -2\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}',\quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = -2\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}',$$

i nuovi simboli di Cristoffel riferendosi all' imagine sferica. La condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}'$$

ci riporta al risultato del § 285.

γ) Ricerchiamo le deformazioni infinitesime di una rigata R qualunque. Se conosciamo della R anche le asintotiche curvilinee, prendiamole per linee coordinate $u = \text{cost}^{te}$ insieme alle generatrici $v = \text{cost}^{te}$ ed avremo

$$D = 0,\ D'' = 0,\ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Dalla (20) risulta $\Gamma' = 0$ e le (21) si riducono a

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma \\ \dfrac{\partial \Gamma''}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma'' = 0, \end{cases}$$

che per la loro forma lineare s'integrano subito per quadrature. Il risultato vale in particolare per le quadriche, come superficie doppiamente rigate, di cui si avranno subito con quadrature le deformazioni infinitesime.

Se le asintotiche curvilinee di R non sono note, basterà per ottenerle integrare un'equazione di RICCATI (I pg. 393), e con successive quadrature si avranno tutte le deformazioni infinitesime.

Osserviamo ancora, che, volendo trovare quelle particolari deformazioni infinitesime delle rigate *nelle quali si mantengono rigide le generatrici*, basterà supporre nelle (α) anche $\Gamma = 0$, e le deformazioni richieste dipenderanno da una funzione arbitraria. Le formole (22) mostrano poi che nel caso attuale la superficie associata S_0 si riduce ad una linea Γ_0.

§ 291

Trasformazione di Christoffel delle superficie isoterme.

Risolviamo colle nostre formole il problema:

Quali sono le superficie S che ammettono una deformazione infinitesima nella quale non variano i singoli raggi principali di curvatura ?

Siccome, in qualsiasi deformazione, la curvatura totale non varia, basterà aggiungere la condizione che non varii nemmeno la curvatura media. Prendendo a linee coordinate $(u\ v)$ sopra S quelle di curvatura, l'ultima condizione

$$\delta\,(E\,D'' + G\,D - 2\,F\,D') = 0$$

diventa

$$E\,\gamma'' + G\,\gamma = 0,$$

che unita alla (20*)

$$\frac{E}{r_2}\,\gamma'' + \frac{G}{r_1}\,\gamma = 0$$

ed escludendo il caso della sfera, ci dà

$$\gamma = \gamma'' = 0.$$

Per ciò le (21*) diventano

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\, log\,\gamma'}{\partial u} = -2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\dfrac{\partial\, log\, G}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\, log\,\gamma'}{\partial v} = -2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\dfrac{\partial\, log\, E}{\partial v}, \end{cases}$$

onde per la condizione necessaria e sufficiente richiesta

$$\frac{\partial^2\, log\left(\dfrac{E}{G}\right)}{\partial u \partial v} = 0.$$

Questa esprime che le linee di curvatura (u,v) della S debbono formare un sistema isotermo. Le superficie di questa classe si dicono *superficie isoterme*, esse sono dunque le uniche superficie suscettibili delle deformazioni infinitesime richieste.

Esaminiamo ora con le formole (22) quale è la superficie S_0 associata ad una superficie isoterma S nella detta deformazione infinitesima. Prendendo per u, v parametri isometrici, possiamo porre

$$E = G = e^{2\theta},$$

e le (24) dànno a meno di un fattore costante

$$\gamma' = e^{-2\theta},$$

e la superficie S_0 associata è definita per le (22) da

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = e^{-2\theta}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\,e^{-2\theta}\frac{\partial x}{\partial v},$$

onde vediamo che le linee (u, v) sono ancora linee di curvatura sulla S_0 e formano un sistema isotermo avendosi

$$ds_0^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2);$$

le due superficie isoterme associate S, S_0 si corrispondono per parallelismo di normali e linee di curvatura in una rappresentazione conforme. Vediamo quindi che: *Ogni superficie isoterma* S *ne determina una seconda associata* S_0 *che corrisponde in rappresentazione conforme alla prima per parallelismo di normali.*

Questa trasformazione involutoria delle superficie isoterme è dovuta a CHRISTOFFEL, che vi giunse proponendosi in generale il problema: *Quali sono le coppie di superficie che si corrispondono per parallelismo di normali in una rappresentazione conforme* ?

CHRISTOFFEL ha dimostrato che, se si prescinde dal caso ovvio di superficie omotetiche, e dall'altro che S, S_0 sia una qualunque coppia di superficie minime (nel qual caso la rappresentazione per parallelismo di normali è sempre conforme), le due superficie sono necessariamente isoterme e nella relazione sopra studiata.

Stabiliamo il risultato di CHRISTOFFEL supponendo di avere una tale coppia (S, S_0) di superficie corrispondentisi per parallelismo di normali in rappresentazione conforme, con esclusione dei due casi summenzionati, e proviamo anzitutto che *le loro linee di curvatura debbono corrispondersi.* Riferite le due superficie S, S_0 alle rispettive loro linee di curvatura (u, v), (u_0, v_0), abbiasi

$$ds^2 = E\,du^2 + G dv^2$$

$$ds_0^2 = E_0\,du_0^2 + G_0\,dv^2$$

e siano

$$u_0 = u_0(u, v),\quad v_0 = v_0(u, v) \tag{25}$$

le formole della supposta rappresentazione. Detti r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di S′ e ρ_1, ρ_2 quelli di S_0 saranno

$$\begin{cases} ds'^2 = \dfrac{E}{r_2^2}\,du^2 + \dfrac{G}{r_2^2}\,dv^2 \\ ds_0'^2 = \dfrac{E_0}{\rho_2^2}\,du_0^2 + \dfrac{G_0}{\rho_1^2}\,dv_0^2 \end{cases}$$

le rispettive terze forme fondamentali. Colla sostituzione (25) deve mutarsi per ipotesi $ds_0'^2$ in ds'^2 e contemporaneamente ds_0^2 in una forma proporzionale. Ne deduciamo in particolare che debbono sussistere insieme le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{E_0}{\rho_2^2}\dfrac{\partial u_0}{\partial u}\dfrac{\partial u_0}{\partial v} + \dfrac{G_0}{\rho_1^2}\dfrac{\partial v_0}{\partial u}\dfrac{\partial v_0}{\partial v} = 0 \\ E_0\dfrac{\partial u_0}{\partial u}\dfrac{\partial u_0}{\partial v} + G_0\dfrac{\partial v_0}{\partial u}\dfrac{\partial v_0}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

e quindi, se escludiamo dapprima il caso

$$\rho_1^2 = \rho_2^2,$$

dovremo avere simultaneamente

$$\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial v} = 0,\quad \frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} = 0,$$

cioè: *le linee di curvatura di* S, S′$_0$ *si corrispondono, come si era enunciato.* Quanto al caso escluso, esso può presentarsi o perchè $\rho_1 = \rho_2$, ovvero $\rho_1 = -\rho_2$. Ma il primo non fa veramente eccezione, perchè allora S_0 è una sfera e qualunque suo sistema ortogonale può riguardarsi come quello delle linee di curvatura. L'unica eccezione si ha soltanto quando insieme $\rho_1 = -\rho_2$, $r_1 = -r_2$, cioè quando S, S_0 sono ambedue superficie minime, Escluso questo caso e riferite S, S_0 alle linee di curvatura corrispondenti u, v, avremo formole del tipo

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \lambda\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \mu\frac{\partial x}{\partial v}$$

colle analoghe per gli altri due assi, essendo λ, μ convenienti moltiplicatori. Ma siccome per ipotesi $E_0 : G_0 = E : G$, sarà $\mu^2 = \lambda^2$ e però

$$\mu = \lambda,\ \text{ovvero}\ \mu = -\lambda.$$

Nel primo caso dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

deriva subito

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0\ ,\ \lambda = \text{cost}^{\text{te}},$$

e ci troviamo nel caso ovvio di superficie S, S_0 omotetiche. Nell'altro caso $\mu = -\lambda$ abbiamo

$$D_0 = \lambda D,\ D'_0 = 0,\ D''_0 = -\lambda D''$$

e per ciò

$$D D''_0 + D'' D_0 - 2 D' D'_0 = 0 ;$$

le due superficie S, S'_0 sono associate, e valgono le (22) con $\gamma = \gamma'' = 0$, $\gamma' = \lambda$, e per quanto si è visto al principio del paragrafo formano una coppia di superficie isoterme trasformate di CHRISTOFFEL.

§ 292

Criterio di Weingarten per le superficie isoterme.

I risultati ottenuti conducono facilmente a stabilire un criterio per riconoscere se una superficie *data* S appartiene alla classe delle superficie isoterme e ad altri teoremi dovuti a WEINGARTEN.

Definita la superficie S dalle sue due forme fondamentali

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2, \end{cases}$$

la superficie sarà isoterma se è possibile determinare le incognite Γ, Γ', Γ'' in guisa da soddisfare alle (20), (21) ed insieme all'altra

$$E\,\Gamma'' - 2\,F\,\Gamma' + G\,\Gamma = 0 ,$$

la quale, associata alla (20), dà

$$\Gamma = \mu\,(E\,D' - FD),\quad \Gamma' = \frac{1}{2}\,\mu\,(E\,D'' - GD),\quad \Gamma'' = \mu\,(F\,D'' - G\,D'),$$

indicando con μ un fattore di proporzionalità da determinarsi. Introdotti questi valori nelle (21), ne dedurremo

$$\frac{\partial\, log\,\mu}{\partial\, u} = \alpha ,\quad \frac{\partial\, log\,\mu}{\partial\, v} = \beta$$

con α, β funzioni note di u, v, e la richiesta condizione d'isotermia per le linee di curvatura si tradurrà quindi nella relazione

$$\frac{\partial\,\alpha}{\partial\, v} = \frac{\partial\,\beta}{\partial\, u} . \tag{26}$$

È facile dedurre di qui il teorema dovuto a WEINGARTEN : *La ricerca delle superficie isoterme dipende da un'equazione alle derivate parziali quarte.*

Scrivendo l'equazione ordinaria della superficie S in coordinate cartesiane $z = z\,(x, y)$, abbiamo (I pag. 221)

$$E = 1 + p^2,\ F = pq,\ G = 1 + q^2$$

$$D = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ,\quad D' = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ,\quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ,$$

e la condizione (26) si cangia appunto nell'indicata equazione alle derivate parziali quarte per la funzione incognitä z.

Ora osserviamo che, supposta la superficie isoterma, la forma differenziale quadratica

$$\Gamma\,du^2 + 2\,\Gamma'\,du\,dv + \Gamma''\,dv^2 ,$$

i cui coefficienti si calcolano, come si è visto, con quadrature è a *curvatura nulla* ed indefinita.

E infatti, pei calcoli eseguiti al paragrafo precedente, riferendoci ai parametri isometrici α, β delle linee di curvatura con

$$ds^2 = e^{-2\theta}\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

abbiamo $\gamma = \gamma'' = 0$, $\gamma' = e^{-2\theta}$, cioè

$$\Gamma = \Gamma'',\ \Gamma' = 1$$

talchè la forma $\Gamma\,du^2 + 2\,\Gamma'\,du\,dv + \Gamma''\,dv^2$ è equivalente alla forma di curvatura nulla

$$2\,d\,\alpha\,d\,\beta.$$

Si ha dunque il risultato: *Sopra una superficie isoterma nota le linee di curvatura si determinano con quadrature.*

Il problema delle superficie isoterme, non si sa risolvere in generale, ma si conoscono varie classi particolari di tali superficie, esse sono : 1° le superficie di rotazione, 2° le quadriche, 3° le superficie minime e più in generale quelle a curvatura media costante. E siccome ogni inversione per raggi vettori reciproci cangia una superficie isoterma in un'altra isoterma, da questa osservazione, combinata colla trasformazione di CHRISTOFFEL, abbiamo un facile mezzo per trovarne infinite altre classi.

Riserbiamo ad ulteriore Capitolo (Cap. XX) lo studio delle importanti trasformazioni di DARBOUX che ci daranno nuovi mezzi per la ricerca delle superficie isoterme.

§ 293.

Le superficie associate alle deformate della sfera.

Si è già osservato (§ 288) che le superficie associate alle superficie pseudosferiche nelle loro deformazioni infinitesime sono le superficie di Voss, con sistema coniugato di linee geodetiche. Meritano pure particolare attenzione, per le loro proprietà geometriche, le analoghe superficie associate alle superficie di curvatura costante positiva o deformate della sfera, di cui ci vogliamo ora brevemente occupare.

Supponiamo nelle formole del § 289 che la superficie S_0 associata alla S' sia a curvatura costante K_0 positiva e poniamo per semplicità $K_0 = +1$.

Abbiamo per le (22)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

e quindi:

$$(27)\quad \begin{cases} E_0 = \dfrac{E\Gamma'^2 - 2F\Gamma'\Gamma + G\Gamma^2}{EG-F^2}, \quad F_0 = \dfrac{E\Gamma'\Gamma'' - F(\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2) + G\Gamma\Gamma'}{EG-F^2}, \quad G_0 = \dfrac{E\Gamma''^2 - 2F\Gamma'\Gamma'' + G\Gamma'^2}{EG-F^2} \\ D_0 = \dfrac{D\Gamma' - D'\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad D_0 = \dfrac{D'\Gamma' - D''\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{D\Gamma'' - D'\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad D''_0 = \dfrac{D'\Gamma'' - D''\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}, \end{cases}$$

dalle quali si trae facilmente

$$(28)\quad E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)^2}{EG-F^2}, \quad D_0 D''_0 - D'^2_0 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)(DD'' - D'^2)}{EG-F^2},$$

e per ciò

$$(29)\qquad K = \frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{E_0 G_0 - F_0^2} = \frac{DD'' - D'^2}{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}.$$

Se in queste formole generali, relative ad una coppia (S', S'_0) di superficie associate, introduciamo l'ipotesi che la S_0 sia a curvatura $K_0 = +1$,

la (29) dimostra che si avrà

$$\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 = DD'' - D'^2.$$

Per ciò se poniamo

$$\overline{D} = \Gamma, \quad \overline{D'} = \Gamma', \quad \overline{D''} = \Gamma'',$$

questi valori di D, D', D'' soddisferanno, rispetto alla prima forma fondamentale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

alle equazioni di GAUSS e CODAZZI. Ne risulta definita una deformata $\overline{S}$ della S nella quale, a causa di

$$D\overline{D''} + D''\overline{D} - 2D'\overline{D'} = 0,$$

le asintotiche di S corrispondono ad un sistema coniugato di S (e viceversa). Dunque ogni superficie S associata ad una superficie a curvatura costante positiva S_0 è suscettibile di una deformazione finita nella quale le asintotiche si convertono in un sistema coniugato E in questo risultato non fa nemmeno eccezione il caso che la S_0 sia una sfera; allora ogni sua associata S è una superficie d'area minima e la deformazione corrispondente è quella che la converte nella sua coniugata in applicabilità.

Inversamente se una superficie S (a curvature opposte) ammette una deformata $\overline{S}$ sulla quale le asintotiche siano convertite in un sistema coniugato, indicando con $\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D'}\,du\,dv + \overline{D''}\,dv^2$ la seconda forma fondamentale di $\overline{S}$ e ponendo

$$\Gamma = \overline{D}, \quad \Gamma' = \overline{D'}, \quad \Gamma'' = \overline{D''},$$

saranno soddisfatte le equazioni (20), (21) per le deformazioni infinitesime, e dalla formola (29) risulterà $K_0 = +1$, onde la superficie associata S_0 sarà una deformata della sfera. Concludiamo quindi: *Nelle superficie associate alle deformate della sfera si ha la classe completa di superficie suscettibili di una deformazione finita che converte le linee asintotiche in un sistema coniugato.*

Osserviamo ora che se $(S, \overline{S})$ è una coppia di tali superficie applicabili per modo che le asintotiche dell'una si distendano in un sistema coniugato dell'altra, come alla prima S è associata una deformata S_0 della sfera, così

alla seconda $\overline{S}_0$ sarà associata un'altra tale deformata $\overline{S}_0$, ed è facile vedere che : S_0, $\overline{S}_0$ *sono trasformate di* HAZZIDAKIS *l'una dell'altra*. Difatti, calcolando dalle (27) l'elemento lineare ds_0^2 della S_0 e paragonandolo con quello che si ha per l' imagine sferica $d\overline{s}'^2$ della $\overline{S}$, o ciò che è lo stesso della $\overline{S}_0$, si trova che essi coincidono.

Anche la trasformazione continua di BONNET per le deformate della sfera (§ 249) riceve una nuova intepretazione geometrica, per le coppie attuali (S, $\overline{S}$) di superficie applicabili.

E invero è manifesto che cangiando rispettivamente (D, D′, D″), ($\overline{D}$, $\overline{D}'$, $\overline{D}''$) con una sostituzione ortogonale in

$$\begin{aligned} &D\cos\sigma - \overline{D}\,\mathrm{sen}\,\sigma\ ,\ D'\cos\sigma - \overline{D}'\mathrm{sen}\,\sigma,\ D''\cos\sigma - \overline{D}''\,\mathrm{sen}\,\sigma\\ &D\,\mathrm{sen}\,\sigma + \overline{D}\cos\sigma\ ,\ D'\,\mathrm{sen}\,\sigma + \overline{D}'\cos\sigma,\ D''\,\mathrm{sen}\,\sigma + \overline{D}''\cos\sigma\ , \end{aligned}$$

indicando con σ una costante arbitraria, otteniamo nuovamente una coppia (S_σ, S_σ) della medesima specie. Dunque: *ogni coppia* (S, $\overline{S}$) *di superficie applicabili della specie è suscettibile di una deformazione continua ad un parametro in cui si mantiene la detta proprietà ; tale deformazione corrisponde alla trasformazione di* BONNET *per le deformate della sfera.*

§ 294.

Sistemi coniugati permanenti in deformazioni finite.

Terminiamo il presente Capitolo col trattare per le deformazioni *finite* delle superficie il problema già risoluto ai §§ 285, 290 per le deformazioni infinitesime, e cioè il problema di caratterizzare i *sistemi coniugati permanenti*.

In primo luogo osserviamo che in una coppia qualunque (S, $\overline{S}$) di superficie applicabili distinte (non congruenti nè simmetriche) vi è sempre uno ed uno solo sistema coniugato comune alle due superficie. Questo è sempre formato di due sistemi di linee distinti (reali od immaginarie), salvo nel caso che si tratti di una coppia (R, $\overline{R}$) di rigate applicabili con corrispondenza delle generatrici, nel qual caso le dette linee coincidono nelle generatrici. Le due superficie S, $\overline{S}$ hanno infatti a comune la prima forma fondamentale

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e le due seconde

$$\begin{aligned} &D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2\\ &\overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2 \end{aligned}$$

non sono proporzionali, essendo escluso il caso di superficie congruenti o simmetriche. Le linee del sistema coniugato comune sono gli integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv\ , & D'\,du + D''\,dv \\ \overline{D}\,du + \overline{D}'\,dv\ , & \overline{D}'\,du + \overline{D}''\,dv \end{vmatrix} = 0$$

(V. Cap. II § 42) : Nel caso della curvatura positiva esse sono sempre *reali* e distinte, e nel caso della curvatura negativa, prendendo per sistema coordinato (u, v) le asintotiche p. e. della S, con che $D = D'' = 0$, l'equazione diventa

$$\overline{D}\,du^2 - \overline{D}''\,dv^2 = 0.$$

Le linee integrali sono ancora reali e distinte se $\overline{D}$, $\overline{D}''$ hanno egual segno, immaginarie coniugate nel caso contrario, e coincidono soltanto quando $\overline{D}$, $\overline{D}''$ si annullano. Ma in tal caso, pel teorema di BONNET (I pag. 380), si tratta di una coppia (R, $\overline{R}$) di rigate applicabili con corrispondenza delle generatrici.

Ciò premesso, suppongasi la S riferita al sistema coniugato (u, v) comune alla sua deformata $\overline{S}$, avremo

$$D' = \overline{D}' = 0,$$

e a causa dell'equazione di GAUSS

$$\overline{D}\,\overline{D}'' = D\,D'',$$

potremo porre

$$\overline{D} = \lambda\,D \quad \overline{D}'' = \frac{D''}{\lambda}\ ,$$

dove si tratterà di determinare λ. Per questo si tenga conto che $\overline{D}$, $\overline{D}''$ debbono soddisfare alle equazioni stesse di CODAZZI cui soddisfano D, D″

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} D - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} D'' \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} D'' - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} D, \end{cases}$$

onde deduciamo per λ le due equazioni simultanee

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{D}{D''}\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda\right)\ ,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{D''}{D}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)$$

ovvero, introducendo i simboli di CHRISTOFFEL per l'elemento lineare sferico

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\ ,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda\right).$$

Cangiamo la funzione incognita λ col porre

$$\lambda^2=1+\frac{1}{\nu}$$

e ne risulterà per la nuova incognita ν il sistema lineare

$$\frac{\partial\nu}{\partial u}=2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'(\nu+1)\ ,\quad \frac{\partial\nu}{\partial v}=2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\nu. \tag{30}$$

Dalla condizione d'integrabilità che si scrive

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\right].\nu=2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'-\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}',$$

supponendo dapprima

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\neq 0\ ,$$

avremo per ν un unico determinato valore e il sistema coniugato (u, v) di S sarà permanente in una e in una sola deformazione finita quando questo valore di ν soddisfi le (30). Se invece

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'$$

(ciò che caratterizza il sistema coniugato (u, v) come permanente in una deformazione infinitesima, secondo il § 285), la deformazione finita supposta esisterà soltanto quando si verifichino insieme le due condizioni

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'=2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'. \tag{31}$$

Ma in tal caso il sistema (30) sarà completamente integrabile e la superficie S ammetterà quindi una deformazione continua ad un parametro nella quale il sistema (u, v) si conserverà coniugato. Studieremo nel prossimo Capitolo (V. § 310) queste interessanti deformazioni continue. Qui intanto osserviamo che ne risulta : *Se un sistema coniugato (u, v) di una superficie è permanente in più di una deformazione, esso è permanente in una serie continua ad un parametro di deformazioni.*

In ogni caso si è visto che la possibilità di una deformazione isolata, o continua, che conservi coniugato un sistema coniugato dipende solo dalla sua immagine sferica e perciò :

Se il sistema coniugato (u, v) sopra un superficie S *è permanente in una deformazione (finita o infinitesima) lo stesso avviene sopra ogni altra superficie* S′ *avente la medesima immagine sferica del sistema coniugato (u, v).*

§ 295.

I teoremi di Peterson.

A quest'ultima osservazione colleghiamo la dimostrazione di importanti risultati trovati fin dal 1866 dal geometra russo PETERSON. (*)

Abbiasi una coppia $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili riferite al sistema coniugato comune (u, v), e sia S′ una qualunque superficie avente a comune con S l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v). Per quanto precede esiste sempre una nuova superficie $\overline{S}'$ applicabile sopra S′ con conservazione del sistema coniugato (u, v), ma di più possiamo dimostrare l'importante proprietà trovata da PETERSON : *Se è nota la coppia* $(S, \overline{S})$ *e inoltre la superficie* S′ *avente con* S *a comune l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v), la deformata* $\overline{S}'$ *di* S′ *si avrà con quadrature ed avrà alla sua volta comune con* $\overline{S}$ *l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v).*

Siano (x, y, z), $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, (x', y', z') tre punti corrispondenti di S, $\overline{S}$, S′; siccome S′ ha a comune con S l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v), le formole del § 93 (I pag. 252) provano che sussisteranno relazioni della forma

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x'}{\partial u}=P\dfrac{\partial x}{\partial u}\ ,\quad \dfrac{\partial y'}{\partial u}=P\dfrac{\partial y}{\partial u}\ ,\quad \dfrac{\partial z'}{\partial u}=P\dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x'}{\partial v}=Q\dfrac{\partial x}{\partial v}\ ,\quad \dfrac{\partial y'}{\partial v}=Q\dfrac{\partial y}{\partial v}\ ,\quad \dfrac{\partial z'}{\partial v}=Q\dfrac{\partial z}{\partial v},\end{cases} \tag{32}$$

(*) Cf. STÄCKEL Biegungen und coniugirte Systeme Math. Annalen Bd. 49

con P, Q convenienti funzioni di u, v. Ora le condizioni d' integrabilità per queste equazioni si scrivono

$$(33) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} (Q - P) \ , \ \frac{\partial Q}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} (P - Q)$$

e dipendono solo dai simboli $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ relativi al ds^2 della superficie S, che coincide col $\overline{ds}^2$ della $\overline{S}$. Saranno quindi tre differenziali esatti anche le tre espressioni

$$P \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} du + Q \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} dv \ , \ P \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} du + Q \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} dv \ , \ P \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} du + Q \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} dv \ ,$$

onde indicandone con $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ gli integrali avremo :

$$(32^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial u} = P \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} \ , \ \dfrac{\partial \bar{y}'}{\partial u} = P \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial u} \ , \ \dfrac{\partial \bar{z}'}{\partial u} = P \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \bar{x}'}{\partial v} = Q \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} \ , \ \dfrac{\partial \bar{y}'}{\partial v} = Q \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} \ , \ \dfrac{\partial \bar{z}'}{\partial v} = Q \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial v} \ . \end{cases}$$

Dopo ciò, se riguardiamo $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ come coordinate di un punto mobile nello spazio, questo descrive una superficie $\overline{S}'$ alla quale si riconoscono subito le proprietà seguenti :

1.° La $\overline{S}'$ è applicabile sulla S' avendo lo stesso $ds^2 \ \overline{ds}'^2 = ds'^2 = EP^2 du^2 + 2 FPQ \, du \, dv + GQ^2 dv^2$,

2.° La $\overline{S}'$ ha a comune con $\overline{S}$ l' immagine sferica del sistema coniugato (u, v).

Il teorema di PETERSON è così dimostrato, e le formole (32*) sono quelle che dànno per quadrature la quarta superficie S'.

Applichiamo questi risultati alla risoluzione del problema : *Quali sono le superficie che ammettono una deformazione finita che conservi le linee di curvatura ?*

Qui occorre distinguere due casi secondo che la superficie S supposta è suscettibile di una deformazione *continua* che conservi le linee di curvatura, ovvero di una sola deformazione finita. In ambedue i casi possiamo prendere per superficie S' nel teorema di PETERSON la sfera rappresentativa, onde esisterà una deformata $\overline{S}'$ della sfera sulla quale il sistema (u, v) sarà quello delle linee di curvatura. Nel primo caso il sistema (u, v) è necessariamente quello dei meridiani e paralleli e le superficie richieste sono superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica (I pag. 511). Si ha quindi il teorema stabilito dal CODAZZI nel 1856 : *Le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica sono le uniche suscettibili di una deformazione continua che conserva le linee di curvatura.*

Nell'altro caso di una sola deformazione si ha manifestamente il risultato :

Tutte e sole le superficie che hanno a comune colle deformate della sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura sono suscettibili di una deformazione finita che conserva le linee di curvatura.

E si vede anche subito che la deformazione in discorso corrisponde alla trasformazione di HAZZIDAKIS per le deformate delle sfera.

CAPITOLO XVIII.

Le congruenze rettilinee W.

La trasformazione di MOUTARD. - Sua interpretazione geometrica colle congruenze rettilinee W. - Il teorema generale di permutabilità. - Congruenze W. di DARBOUX. - Costruzione di tutte le deformate del paraboloide rotondo immaginarie o reale. - Le congruenze W a falde focali d'eguale curvatura. - Trasformazioni asintotiche delle relative falde focali. - Le superficie con sistema coniugato permanente in deformazione continua. -

§ 296.

La trasformazione di Moutard delle equazioni $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = M\theta$

Proseguiamo in questo nuovo Capitolo lo studio delle deformazioni infinitesime trasformando questa teoria nell'altra *essenzialmente proiettiva* delle congruenze rettilinee W, già definite al § 185 come quelle congruenze sulle cui falde focali si corrispondono le linee asintotiche. A base dellla nuova interpretazione geometrica sta l'elegante teorema di MOUTARD relativo alle equazioni della forma.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = M\theta\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = M\theta,$$

dalle quali abbiamo visto dipendere (§ 284) il problema delle deformazioni infinitesime.

Si consideri il primo caso, a cui si riduce analiticamente il secondo prendendo per variabili $u + iv$, $u - iv$. Della equazione di MOUTARD

$$\text{E)}\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta$$

prendiamo una soluzione generica θ ed una soluzione particolare fissa R, tale adunque che sia

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial u\partial v} = M R$$

Siccome si ha manifestamente

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix}\theta & R\\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix}\theta & R\\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix} = 0,$$

esiste una funzione ψ, determinata a meno di una costante additiva, tale che si abbia

$$(2)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = \theta\frac{\partial R}{\partial u} - R\frac{\partial\theta}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -\theta\frac{\partial R}{\partial v} + R\frac{\partial\theta}{\partial v}\,,$$

ovvero

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right),\quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right),$$

e la funzione ψ soddisfa quindi alla sua volta all' equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = 0.$$

Questa, congiando la funzione incognita ψ col porre

$$\psi = R\,\theta_1\,,$$

assume nuovamente la forma di MOUTARD

$$\text{E}_1)\qquad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} = M_1\,\theta_1\,,$$

avendo posto

$$(3)\qquad M_1 = R\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Questa nuova equazione E_1) si dirà *la trasformata della* E) *mediante la sua soluzione particolare* R ; ed è immediato che la loro relazione è reciproca, precisamente la E) è trasformata di MOUTARD della E_1) mediante la soluzione particolare $\frac{1}{R}$ di quest'ultima. I due problemi d'integrazione della E) o della E_1) si equivalgono perfettamente, poichè le formole (2) ossia

$$(4)\qquad \frac{\partial(R\,\theta_1)}{\partial u} = -R^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right),\quad \frac{\partial(R\,\theta_1)}{\partial v} = R^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right)$$

che scriviamo anche sotto la forma equivalente

$$(4^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial u} = (\theta-\theta_1)\dfrac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial v} = -(\theta+\theta_1)\dfrac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} \end{cases}$$

permettono di passare *con quadrature* dalla soluzione generale dell' una alla generale dell'altra, e diremo che si passa dall'una all'altra equazione mediante una *trasformazione integrale* di MOUTARD.

Scriviamo esplicitamente anche le formole relative al caso dell'altra forma normale

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\mathrm{M}\,\theta.$$

Se R ne è una soluzione particolare, talchè

$$\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial v^2}=\mathrm{M}\,\mathrm{R}\,,$$

ponendo

$$\mathrm{M}_1=\mathrm{R}\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)\right\},$$

la nuova equazione

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2}=\mathrm{M}_1\,\theta_1$$

sta colla primitiva nella relazione che la trasformazione integrale data dalle formole

$$(6)\qquad \frac{\partial(\mathrm{R}\,\theta_1)}{\partial u}=\mathrm{R}^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{\mathrm{R}}\right),\quad \frac{\partial(\mathrm{R}\,\theta_1)}{\partial v}=-\mathrm{R}^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{\mathrm{R}}\right)$$

fa passare dalle soluzioni dell'una alle soluzioni dell'altra.

Si osservi che, date due equazioni di MOUTARD

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}\theta\ ,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}_1\,\theta\ ,$$

con $\mathrm{M}=\mathrm{M}(u,v)$, $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_1(u,v)$ funzioni note di u, v, è facile riconoscere se sono *contigue* l'una all'altra per trasformazione di MOUTARD. Occorre e

basta per questo che esista una soluzione R della prima la cui inversa sia una soluzione della seconda. Posto

$$\mathrm{R}=e^{\varphi},$$

si tratta della facile ricerca delle eventuali soluzioni φ comuni alle due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{\mathrm{M}-\mathrm{M}_1}{2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\dfrac{\mathrm{M}+\mathrm{M}_1}{2}\,. \end{cases}$$

Così p. e. se supponiamo $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}$, ne segue che M deve essere il prodotto di una funzione della u per una funzione della v, il che, cangiando i parametri, conduce solo ai due casi distinti $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{M}=1$, cioè alla equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0,$$

o all'altra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\theta\ ,$$

come contigue per trasformazione di MOUTARD a sè medesime.

§ 297.

Il teorema di permutabilità per le equazioni di Moutard.

Di un'equazione E) di MOUTARD consideriamo le due contigue E_1) E_2) ottenute con due trasformazioni T_1, T_2 di MOUTARD corrispondenti alle rispettive soluzioni R_1, R_2 della E). Calcoliamo quella soluzione R'_1 della E_2) *dipendente da una costante arbitraria*, che si ottiene trasformando colla T_1 la soluzione R_2 della E) colle formole (4), nelle quali porremo dunque $\mathrm{R}=\mathrm{R}_1$, $\theta=\mathrm{R}_2$, da cui

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}'_1)=\mathrm{R}_2\frac{\partial\mathrm{R}_1}{\partial u}-\mathrm{R}_1\frac{\partial\mathrm{R}_2}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}'_1)=\mathrm{R}_1\frac{\partial\mathrm{R}_2}{\partial v}-\mathrm{R}_2\frac{\partial\mathrm{R}_1}{\partial v}\,.$$

Posto

$$\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}'_1=\lambda,$$

cioè

$$R'_1 = \frac{\lambda}{R_1}, \tag{7}$$

le precedenti dànno λ con quadrature :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = R_2 \frac{\partial R_1}{\partial u} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = R_1 \frac{\partial R_2}{\partial v} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v}. \tag{8}$$

Si osserva in queste formole che, scambiando R_1 con R_2 e cangiando λ in $-\lambda$ restano inalterate ; per ciò la formola

$$R'_2 = \frac{\lambda}{R_2}, \tag{7*}$$

conservando λ il medesimo valore che in (7), darà quella soluzione R'_2 della E_2) che si ottiene trasformando la R_1 della E) colla T_2). Ora dimostriamo che : *l'equazione* E') *trasformata di* E_1) *colla* R'_1 *coincide colla trasformata della* E_2) *mediante la* R'_2. Se indichiamo infatti la prima equazione E') con

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M' \theta,$$

avremo

$$M' = R'_1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{R'_1}\right) = \frac{\lambda}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{R_1}{\lambda}\right),$$

ossia

$$M' = \frac{\lambda}{R_1}\left\{R_1 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial v}\right\}.$$

Avendo riguardo alle (8) ed all'altra

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial v} = M R_1,$$

si ha la formola

$$M' - M = \lambda \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} - \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}\right), \tag{9}$$

ed il secondo membro resta invariato se si scambia R_1 con R_2, e si cangia λ in $-\lambda$, ciò che prova la nostra asserzione. Possiamo intanto enunciare il risultato : *Se due equazioni di* MOUTARD E_1), E_2) *sono contigue ad una medesima* E), *esiste una serie semplicemente infinita di equazioni* E') *di* MOUTARD *contigue, come la* E), *alle* E_1) E_2).

Ma ora possiamo spingere molto più in là la nostra ricerca e dimostrare : *Se* θ *è una qualunque soluzione della* E), *e* θ_1, θ_2 *due corrispondenti di* E_1) E_2), *legate alla* θ_1 *secondo le* (4*), *dalle trasformazioni* T_1, T_2

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial u} = (\theta-\theta_1)\dfrac{\partial\, lg\, R_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial(\theta_2+\theta)}{\partial u} = (\theta-\theta_2)\dfrac{\partial\, lg\, R_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial v} = -(\theta+\theta_1)\dfrac{\partial\, lg\, R_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial(\theta_2-\theta)}{\partial v} = -(\theta+\theta_2)\dfrac{\partial\, lg\, R_2}{\partial v}, \end{cases}$$

esiste una ed una sola soluzione θ' *della quarta equazione* E') *legata alle medesime* θ_1, θ_2 *dalle corrispondenti equazioni*

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta_1)}{\partial u} = (\theta_1-\theta')\dfrac{\partial\, lg R'_1}{\partial u} & \dfrac{\partial(\theta'+\theta^{2\prime})}{\partial u} = (\theta_2-\theta')\dfrac{\partial\, lg R'_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta_1)}{\partial v} = -(\theta_1+'\theta)\dfrac{\partial\, lg R'_2}{\partial v} & \dfrac{\partial(\theta'-\theta_2)}{\partial v} = -(\theta_2+\theta')\dfrac{\partial\, lg R'_2}{\partial v} \end{cases}$$

Questa quarta soluzione è calcolabile in termini finiti colla formola

$$\theta' - \theta = \frac{R_1 R_2}{\lambda}(\theta_2 - \theta_1). \tag{I}$$

Per dimostrare il teorema supponiamo dapprima sussistenti insieme le (*a*) e le (*b*), e sottratte le (*a*) della prima linea e medesimamente le (*b*), paragoniamo i due valori di $\dfrac{\partial(\theta_1-\theta_2)}{\partial u}$ che se ne ottengono, onde risulta

$$\theta \frac{\partial}{\partial u} lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \theta_2 \frac{\partial\, lg\, R_2}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial\, lg\, R_1}{\partial u} = \theta' \frac{\partial}{\partial u} lg\left(\frac{R'_2}{R'_1}\right) + \theta_1 \frac{\partial\, lg R'_1}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial\, lg R'_2}{\partial u}$$

cioè per le (7), (7*)

$$(\theta' - \theta)\frac{\partial}{\partial u} lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = (\theta_2 - \theta_1)\frac{\partial}{\partial v} lg\, \lambda,$$

che per la (8) si scrive

$$\frac{\theta' - \theta}{R_1 R_2}\left(R_2 \frac{\partial R_1}{\partial u} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}\right) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\lambda}\left(R_2 \frac{\partial R_1}{\partial u} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}\right). \tag{10}$$

Similmente procedendo colle (*a*), (*b*) della seconda linea, si trova

$$\frac{\theta' - \theta}{R_1 R_2}\left(R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial v}\right) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\lambda}\left(R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial v}\right),$$

e questa, colla precedente (10), conducono ambedue alla (I). D'altronde, se si deriva la formola (I) rispetto ad u, v e si tien conto delle (a) e delle precedenti (7), (7*), (8), si verifica facilmente che anche le formole (b) sono tutte soddisfatte. Così è provata la nostra proposizione dalla quale risulta che: *note le soluzoni generali* $\theta, \theta_1, \theta_2$ *delle equazioni* E), E_1) E_2), *dalla* (I) *si ha in termini finiti la soluzione generale* θ' *della* E').

§ 298.

Interpretazione geometrica del teorema di Moutard.

Di una equazione E) di MOUTARD prediamo tre soluzioni qualunque ξ, η, ζ (linearmente indipendenti) e colle formole di LELIEUVRE (§ 91, I pag 246)

$$(11) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e le altre due analoghe, determiniamo per quadrature la corrispondente superficie S riferita alle sue asintotiche (u, v). Di questa superficie S consideriamo una deformazione infinitesima qualunque, la quale corrisponderà ad una quarta soluzione R della medesima equazione E) di MOUTARD, e sarà definita dalle (11) § 292

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix},$$

colle altre due analoghe, le quali dànno la superficie $\overline{S}$ corrispondente per ortogonalità d'elementi alla S.

Poniamo ora

$$\bar{x} = R\,\xi_1, \ \bar{y} = R\,\eta_1, \ \bar{z} = R\,\zeta_1,$$

e secondo le formole (4) § 296, saranno ξ_1, η_1, ζ_1, tre soluzioni particolari della nuova equazione E_1) di MOUTARD

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u\,\partial v} = M_1\,\theta_1, \quad M_1 = R\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right),$$

trasformate delle tre prime ξ, η, ζ, mediante la soluzione R. Colle formole

stesse di LELIEUVRE costruiamo ora una nuova superficie S_1 riferita alle asintotiche u, v che sarà definita, a meno di una traslazione, dalle equazioni corrispondenti alle (11)

$$(11^*) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

Dimostriamo che, disponendo delle costanti additive arbitrarie in x_1, y_1, z_1, si può collocare S_1 in tale posizione nello spazio rispetto alla S che S, S_1 risultino le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti

$$F \equiv (x, y, z), \ F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1).$$

Per questo deduciamo dalle (11), (11*)

$$(12) \qquad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$(12^*) \qquad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ed osserviamo che per le (4) si ha

$$13) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\xi_1+\xi)}{\partial u} = (\xi - \xi_1)\frac{\partial lg R}{\partial u}, & \frac{\partial(\eta_1+\eta)}{\partial u} = (\eta - \eta_1)\frac{\partial lg R}{\partial u}, & \frac{\partial(\zeta_1+\zeta)}{\partial u} = (\zeta - \zeta_1)\frac{\partial lg R}{\partial u} \\ \frac{\partial(\xi_1-\xi)}{\partial v} = -(\xi + \xi_1)\frac{\partial lg R}{\partial v}, & \frac{\partial(\eta_1-\eta)}{\partial v} = -(\eta + \eta_1)\frac{\partial lg R}{\partial v}, & \frac{\partial(\zeta_1-\zeta)}{\partial v} = -(\zeta + \zeta_1)\frac{\partial lg R}{\partial v}, \end{cases}$$

e quindi in particolare

$$\begin{vmatrix} \eta - \eta_1 & \zeta - \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \eta_1}{\partial u}, & \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \eta + \eta_1, & \zeta + \zeta_1, \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}, & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

colle analoghe dedotte per permutazione circolare. Sottraendo queste ultime rispettivamente dalle (12), (12*), otteniamo

$$\frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

il che dimostra come le quadrature indicate nelle formole (11*) siano già eseguite, e disponendo delle tre costanti additive in x_1, y_1, z_1 si possono scrivere senz' altro *in termini finiti* le equazioni parametriche della S_1 sotto la forma :

$$(II)\quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix},\ y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix},\ z = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Con queste formole la superficie S_1 è collocata in una posizione perfettamente determinata rispetto alla S, e le formole

$$\xi\,(x_1 - x) + \eta\,(y_1 - y) + \zeta\,(z_1 - z) = 0$$
$$\xi_1(x_1 - x) + \eta_1(y_1 - y) + \zeta_1(z_1 - z) = 0,$$

essendo ξ, η, ζ proporzionali ai coseni di direzione della normale alla S, e similmente ξ_1, η_1, ζ_1 a quelli della S_1, dimostrano appunto che : ogni segmento FF_1 che unisce due punti corrispondenti F, F_1 di S, S_1 tocca in F la prima superficie, in F_1 la seconda. Queste superficie S, S_1 sono dunque le due falde focali della relativa congruenza, *che è una congruenza* W *perchè sulle due falde focali si corrispondono le linee asintotiche.*

In ciò che precede abbiamo supposto *reali* le asintotiche (u, v), cioè S quindi S_1 a curvatura negativa. Ma anche nel caso contrario possiamo scrivere, senza introdurre immaginarii, formole perfettamente analoghe servendoci dei sistemi (u, v) isotermo-coniugati. Riferita la superficie S ad un tale sistema, saranno ξ, η, ζ tre soluzioni della equazione di MOUTARD

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = M\theta$$

e la superficie S sarà definita per quadrature dalle formole

$$(15)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \xi \\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix},\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \end{vmatrix},\ \text{ecc.}$$

Una quarta soluzione qualunque R della (14) determina una deformazione infinitesima della S mediante le formole

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial v} \end{vmatrix},\ \frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

che definiscono la superficie $\bar{S}$ corrispondente alla S per ortogonalità d'elementi. Ed ora se si pone nuovamente

$$\bar{x} = R\xi_1,\ \bar{y} = R\eta_1,\ \bar{z} = R\,\zeta_1,$$

si hanno le formole di trasformazione

$$(16)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(R\xi_1) = R\frac{\partial\xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial R}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v}(R\xi_1) = -R\frac{\partial\xi}{\partial u} + \xi\frac{\partial R}{\partial u}, \end{cases}$$

e si verificherà subito che le stesse formole (II) definiscono ancora la seconda falda focale S_1 della congruenza formata dalle congiungenti FF_1. Di più avendosi

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix},\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix},$$

anche sulla S_1 il sistema (u, v) è isotermo coniugato e : *la congruenza colle falde focali* S, S_1 *è una congruenza* W.

Si osservi ora che la direzione del raggio FF_1 della congruenza si può perfettamente definire come quella che giace nel piano tangente in $F \equiv (x, y, z)$ alla superficie S, ed è normale alla direzione (ξ_1, η_1, ζ_1); cioè per le formole

$$\bar{x} = R\,\xi_1,\ \bar{y} = R\,\eta_1,\ \bar{z} = R\,\zeta_1,$$

alla direzione dello spostamento $(\varepsilon\bar{x}, \varepsilon\bar{y}, \varepsilon\bar{z})$ che subisce F nella deformazione infinitesima. Dopo ciò possiamo formulare i risultati del presente paragrafo colla costruzione geometrica seguente che ad ogni deformazione infinitesima di una superficie S coordina una corrispondente congruenza rettilinea W di cui S è la prima falda focale :

Nota una deformazione infinitesima qualunque di una superficie S, *si conduca per ogni punto* F *di* S, *nel piano tangente, il raggio normale alla direzione secondo cui* F *si sposta ; la congruenza di raggi così costruita è una congruenza* W, *cioè le asintotiche si corrispondono sulle due falde focali* S, S_1.

In quest'enunciato si è tacitamente supposto che i raggi così costruiti formino in effetto una doppia infinità. Può avvenire il caso eccezionale che questi raggi si riducano invece ad una semplice infinità, per il che oc-

corre e basta che : *la superficie* S *sia rigata e gli spostamenti dei singoli punti avvengano normalmente alle generatrici.* Però è da osservare che le formole precedenti per la S_1 continuano manifestamente a sussistere anche in questo caso ; soltanto la S_1 coincide allora colla rigata S, la quale viene riferita a sè medesima in una corrispondenza che conserva le generatrici rettilinee e scambia le asintotiche curvilinee fra loro. Si può dunque affermare che la proprietà fondamentale si mantiene anche in questo caso limite, colla particolarità che tutte le rigate della congruenza vengono a coincidere colla rigata S.

§ 299

Le più generali congruenze W.

GUICHARD, al quale sono dovute le formole del paragrafo precedente per le congruenze W derivate dalle deformazioni infinitesime della superficie, hadimostrato altresì che esse dànno *le piu generali congruenze* W. Sussiste cioè il teorema inverso : *Ciascuna falda di una congruenza rettilinea* W *è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale lo spostamento di ogni punto avviene parallelamente alla normale nel punto corrispondente all'altra falda.*

Per dimostrarlo ci riferiremo al caso in cui sulle due falde focali S, S_1 le linee asintotiche siano reali, l'altro caso trattandosi affatto analogamente. Indicando con (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) due punti corrispondenti di S, S_1, riteniamo la prima superficie S definita dalle formole di LELIEUVRE:

$$(17)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dove ξ, η, ζ sono i coseni *normalizzati* di direzione della normale alla S, similmente la seconda falda focale S_1 dalle formole

$$(17^*)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

e ricordiamo che posto

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho, \ \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \rho_1,$$

per le due curvature K, K_1 di S, S_1 si ha

$$(18)\qquad K = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad K_1 = -\frac{1}{\rho_1^2}.$$

Ora le nostre ipotesi portano che sussistano insieme le due equazioni

$$\begin{cases} \xi\ (x_1 - x) + \eta\ (y_1 - y) + \zeta\ (z_1 - z) = 0 \\ \xi_1 (x_1 - x) + \eta_1 (y_1 - y) + \zeta_1 (z_1 - z) = 0 \end{cases},$$

e potremo quindi porre, indicando con m un conveniente fattore di proporzionalità :

$$(19)\qquad x_1 - x = m\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \ y_1 - y = m\begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \ z_1 - z = m\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Se deriviamo queste rapporto ad u ed, avendo riguardo alle (17), (17*), moltiplichiamo ordinatamente per ξ, η, ζ, indi per ξ_1, η_1, ζ_1 e sommiamo ne risulta

$$-\Delta_1 = m\,\Delta\ , \qquad -\Delta = m\,\Delta_1\ ,$$

avendo posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix},$$

e per ciò anche

$$(a)\qquad \Delta = m^2\,\Delta\ .$$

Similmente procedendo sulle (19) colla derivazione rispetto a v si trova

$$(b)\qquad \Delta' = m^2\,\Delta'\ ,$$

con

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ora si osservi che non possono annullarsi insieme Δ, Δ', altrimenti dalle relazioni

$$\begin{cases} \xi_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \eta_1 \dfrac{\partial y}{\partial u} + \zeta_1 \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0 \\ \xi_1 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \eta_1 \dfrac{\partial y}{\partial v} + \zeta_1 \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

seguirebbero le proporzioni

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta :$$

e le due falde focali S, S_1 avendo in punti corrispondenti normali parallele coinciderebbero, ciò che naturalmente si esclude. Dunque dalle (a) (b) segue

$$m^2 = 1 , \quad m = \pm 1 ,$$

ma possiamo limitarci a supporre $m = 1$, l'altro caso equivalendo a cangiare simultaneamente il segno di ξ_1, η_1, ζ_1, ciò che non altera le (17*).

Così torneremo ad avere le formole (II)

$$x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta_1 \end{vmatrix} , \text{ ecc.},$$

le quali derivate rapporto ad u, v, osservando le (17), 17*), dànno le proporzioni

$$\frac{\partial(\xi + \xi_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\eta + \eta_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\zeta + \zeta_1)}{\partial u} = \xi - \xi_1 : \eta - \eta_1 : \zeta - \zeta_1 ,$$
$$\frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\eta - \eta_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\zeta - \zeta_1)}{\partial v} = \xi + \xi_1 : \eta + \eta_1 : \zeta + \zeta_1 .$$

Indicando con α, β due convenienti funzioni di u, v, possiamo quindi porre

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi+\xi_1)}{\partial u} = \alpha(\xi - \xi_1) , \dfrac{\partial(\eta+\eta_1)}{\partial u} = \alpha(\eta - \eta_1) , \dfrac{\partial(\zeta+\zeta_1)}{\partial u} = \alpha(\zeta - \zeta_1) \\ \dfrac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial v} = \beta(\xi + \xi_1) , \dfrac{\partial(\eta-\eta_1)}{\partial v} = \beta(\eta + \eta_1) , \dfrac{\partial(\zeta-\zeta_1)}{\partial v} = \beta(\zeta + \zeta_1) . \end{cases}$$

Derivando le prime tre rapporto a v, le seconde rapporto ad u e sommando col ricordare che ξ, η, ζ sono soluzioni di una stessa equazione di LAPLACE

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{M}\,\theta ,$$

otteniamo la formola

$$\left(2\,\mathrm{M} - 2\,\alpha\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\xi = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\xi_1 ,$$

colle due analoghe dedotte con permutazione circolare. Ma siccome è escluso il caso delle proporzioni $\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta$, ne dedurremo che dovrà aversi simultaneamente

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial u}$$
$$2\,\mathrm{M} = 2\,\alpha\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} .$$

Esisterà quindi una funzione $\mathrm{R} = \mathrm{R}(u, v)$ definita da

$$\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} = \alpha , \quad \frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} = \beta ,$$

e la seconda delle equazioni sopra scritte dimostra che R è una soluzione della stessa equazione di LAPLACE (21). Dopo ciò le (20) combinano perfettamente colle (13) del paragrafo precedente e la nostra proposizione ne risulta stabilita.

§ 300.

Conseguenze del teorema e caso eccezionale.

I risultati ottenuti stabiliscono la più elegante interpretazione geometrica del teorema di MOUTARD (§ 296). Data un'equazione E) di MOUTARD

$$\mathrm{E}) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{M}\,\theta ,$$

se ne consideri una trasformata E_1)

$$\mathrm{E}_1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{M}_1\,\theta ,$$

dedotta colle formole del § 296 mediante una sua soluzione particolare R, talchè

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{R}\,\frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right) .$$

Scelte ora tre soluzioni qualunque ξ, η, ζ della E) (linearmente indipendenti) si costruisca, mediante le formole di LELIEUVRE (11), la corrispondente superficie S riferita alle sue linee asintotiche (u, v), di cui la E) sarà precisamente l'equazione per le sue deformazioni infinitesime. Corrispondentemente alla soluzione R, avremo una particolare deformazione infinitesima e colla costruzione del § 298 determineremo la corrispondente congruenza W, la cui prima falda focale sarà la superficie S. *Per la seconda falda focale* S_1 *l'equazione delle deformazioni infinitesime sarà l'equazione* E_1) di MOUTARD *trasformata.*

Di qui risulta in particolare che *per le due falde focali di una congruenza* W *si equivalgono i due relativi problemi delle deformazioni infinitesime.*

In generale è da osservarsi che il problema *metrico* delle deformazioni infinitesime per le superficie flessibili ed inestendibili viene così cangiato, come si è enunciato nel § 296, in un problema essenzialmente *projettivo* : la costruzione delle congruenze, rettilinee W. È invero manifesto che ogni projettività dello spazio, ed ogni reciprocità, cangia qualunque congruenza W in un'altra congruenza W, o in altre parole: *Se due superficie* S, S' *si corrispondono in una projettività, o in una reciprocità, il problema delle deformazioni infinitesime è lo stesso per le due superficie.*

Completiamo queste generalità sulle congruenze W colle osservazioni seguenti. E ricordiamo in primo luogo che già al § 185 noi abbiamo riconosciuta una proprietà caratteristica delle congruenze W nella formola di RIBAUCOUR

$$\text{K K}_1 = \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\delta}\right)^4 \tag{22}$$

che assegna il prodotto delle curvature K, K_1 delle due falde in punti corrispondenti, dove σ è l'angolo dei due piani focali e δ la distanza dei fuochi F, F_1.

Questa formola segue ora anche facilmente dalle fondamentali (II), osservando che da

$$\xi = X\sqrt{\rho} \quad , \quad \xi_1 = X_1\sqrt{\rho_1}$$

risulta

$$S\,\xi^2 = \rho, \quad S\,\xi_1^2 = \rho_1$$

$$S\,\xi\,\xi_1 = \sqrt{\rho\rho_1}\cos\sigma,$$

indi dalle (II)

$$\delta^2 = S\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix}\rho_1 & \sqrt{\rho\rho_1}\cos\sigma\\ \sqrt{\rho\rho_1}\cos\sigma & \rho\end{vmatrix} = \rho\rho_1\operatorname{sen}^2\sigma\ \text{j}$$

e per ciò

$$\frac{\operatorname{sen}^4\sigma}{\delta^4} = \frac{1}{\rho^2\rho_1^2} = \text{K K}_1,$$

che è appunto la (22).

Si osservi che, indicando con d la distanza dei punti limiti, si ha

$$d^2 = \rho\rho_1$$

e siccome

$$\delta^2 = \rho\rho_1\operatorname{sen}^2\sigma$$

ne risulta

$$\sqrt{d^2-\delta^2} = \sqrt{\rho\rho_1}\cos\sigma,$$

ossia

$$\sqrt{d^2-\delta^2} = \xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1, \tag{A}$$

la quale formola ci dà dunque il parametro medio della congruenza.

Da ultimo ritorniamo sul caso eccezionale della fine del § 298 e domandiamo se effettivamente una rigata qualunque R possiede deformazioni infinitesime nelle quali ogni punto si sposti normalmente alle generatrici. Per questo consideriamo una qualunque trasformazione della rigata in sè alla quale appartengano le proprietà seguenti :

1.° *ad ogni punto* F *di* R *corrisponda un punto* F_1 *sulla medesima generatrice.*

2.° *quando* F *descrive un'asintotica curvilinea di* R, *il punto* F_1 *descriva un'asintotica curvilinea corrispondente* (*).

È manifesto che esistono infinite tali rappresentazioni della rigata R sopra sè medesima e dipendono da una funzione arbitraria di una variabile. Basta infatti stabilire per una *generatrice iniziale* g_0 della rigata una corrispondenza affatto arbitraria dei suoi punti $(F^{(0)}, F_1^{(0)})$ e ne risulta individuata una delle nostre rappresentazioni facendo corrispondere all'asintotica curvilinea uscente da $F^{(0)}$ quella uscente da $F_1^{(0)}$ Ciò posto, è facile vedere : *Esiste una deformazione infinitesima della rigata* R *nella quale ogni punto* F *della rigata si sposta nella direzione della normale del punto corrispondente* F_1 *sulla stessa generatrice.* E infatti l'analisi sviluppata al paragrafo precedente resta ancora applicabile, essendo (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) le coordinate di due punti corrispondenti F, F_1 e (ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) i coseni normalizzati di direzione delle rispettive normali.

(*) In altre parole consideriamo la più generale trasformazione della rigata in sè che lascia fisse le singole generatrici e scambia le asintotiche curvilinee.

§ 301.

Il teorema generale di permutabilità per le congruenze W.

Passiamo ora ad interpretare geometricamente il teorema di permutabilità per le equazioni di MOUTARD (§ 297) colla teoria delle congruenze W, ciò che ci permetterà di riconoscerne il significato completo nella proposizione seguente : *Se di una superficie* S *qualunque si considerano due diverse deformazioni infinitesime e si costruiscono le due rispettive seconde falde* S_1, S_2 *delle due relative congruenze* W *ottenute colla costruzione del* § 298 *esiste una semplice infinità di superficie* S′, *deducibili con una quadratura, ciascuna delle quali ammette, come la* S, *la medesima coppia fissa* (S_1, S_2) *di superficie trasformate.*

Per fissare le idee, riferiamoci al caso di asintotiche (u, v) reali e riprendiamo le formole del § 297. Siano R_1, R_2 le soluzioni della equazione E) di MOUTARD corrispondenti alle deformazioni infinitesime considerate, e siano $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$, $(\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2)$ i coseni normalizzati di direzione per le normali alle S_1, S_2 nei punti corrispondenti $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ $F_2 \equiv (x_2\ y_2\ z_2)$, talchè avremo

$$(23) \qquad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}\ , \quad x_2 = x + \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \text{ ecc.}$$

e le relazioni di trasformazione

$$(24) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi_1+\xi)}{\partial u} = (\xi-\xi_1)\dfrac{\partial lg\, R_1}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial(\xi_1-\xi)}{\partial v} = -(\xi+\xi_1)\dfrac{\partial lg\, R_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(\xi_2+\xi)}{\partial u} = (\xi-\xi_2)\dfrac{\partial lg\, R_2}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial(\xi_2-\xi)}{\partial v} = -(\xi+\xi_2)\dfrac{\partial lg\, R_2}{\partial v}. \end{cases}$$

Se colla formola (I) § 297 del teorema di permutabilità per le equazioni di MOUTARD costruiamo le tre espressioni

$$(25) \quad \xi' = \xi + \frac{R_1R_2}{\lambda}(\xi_2-\xi_1),\ \eta' = \eta + \frac{R_1R_2}{\lambda}(\eta_2-\eta_1),\ \zeta' = \zeta + \frac{R_1R_2}{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1),$$

saranno ξ', η', ζ' tre soluzioni della quarta equazione di MOUTARD :

$$\text{E}') \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M'\,\theta\ ,$$

legate rispettivamente alle (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) dalle relazioni di trasformazione (*b*) § 297. Ne segue che le formole

$$(26) \qquad x' = x_1 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix},\ y' = y_1 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_1 & \xi_1 \end{vmatrix},\ z' = z_1 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix}$$

definiranno una quarta superficie S′ trasformata di MOUTARD della S_1, che formerà cioè colla S_1 le due falde focali di una congruenza W. Ma in virtù delle (23) e delle (25), queste si scrivono anche

$$(26^*) \qquad x' = x_2 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},\ y' + y_2 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix},\ z' = z_2 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix},$$

e sotto questa forma dimostrano che la S′ è legata medesimamente alla S_2 da una trasformazione di MOUTARD, come nell'enunciato del teorema.

È bene osservare che alle formole (26) o (26*), per le (23) e per le (25), si può anche dare la forma equivalente

$$(27) \quad x' = x + \frac{R_1R_2}{\lambda}\begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix},\ y' = y + \frac{R_1R_2}{\lambda}\begin{vmatrix} \zeta_2 & \xi_2 \\ \zeta_1 & \xi_1 \end{vmatrix},\ z' = z + \frac{R_1R_2}{\lambda}\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix},$$

i cui secondi sembri restano inalterati permutando S_1 con S_2 e cangiando λ in $-\lambda$ (Cf. § 297). 10

Fissiamo in λ la costante additiva arbitraria (secondo le formole (8) che dànno λ con una quadratura) e consideriamo le quattro superfiie

$$(S, S_1, S_2, S')$$

del teorema di permutabilità. Quattro loro punti corrispondenti F, F_1, F_2, F' formano i vertici di una doppia infinità di quadrilateri sghembi così costituita che ciascun lato descrive una congruenza W, i cui due fuochi sono i due vertici, e i piani focali i piani per questo lato e i due contigui. Anche possiamo dire che due lati opposti del quadrilatero generano, due congrugruenze W trasformate l'una dell'altra per trasformazione di MOUTARD. Se ora facciamo variare nelle (27) la costante additiva in λ, il punto F_1 descriverà le ∞^1 superficie S′ i cui piani tangenti descriveranno, per ogni coppia fissata (u, v), un fascio avente per asse la retta F_1F_2 e variando (u, v) si avrà: *Le rette* FF′ *sono divise projettivamente dalle* ∞^1 *superficie* S′, *i cui piani tangenti descrivono fasci projettivi alle punteggiate descritte dai punti di contatto.*

Ma di più se consideriamo che le due superficie S, S′ sono contigue alla medesima S_1 (o S_2) per trasformazioni di MOUTARD, e applichiamo nuovamente il teorema stesso di permutabilità, risulta che esisterà una seconda serie di superficie (fra le quali (S_1,S_2) legate ciascuna alle due S, S′ da una trasformazione di MOUTARD ; i punti di questa seconda serie di superficie saranno distribuiti sulle rette F_1F_2 e i loro piani tangenti passeranno tutti per la retta FF′. Le due serie ∞^1 di superficie sono manifestamente in relazione perfettamente invertibile.

Si può dare una forma più semplice a queste conseguenze geometriche del teorema di permutabilità introducendo la nozione di *fascio* di deformazioni infinitesime di una superficie S, e la conseguente di *fascio* di congruenze W con una falda focale S a comune. (*) Tale nozione risulta semplicemente dall'osservare che due soluzioni particolari R_1, R_2 della equazione E) di MOUTARD definiscono un *fascio* $\overline{R}$ di tali soluzioni

$$\overline{R} = m\,R_1 + n\,R_2$$

loro combinazione lineare a coefficienti costanti m, n. Siano ora

$$(\varepsilon\,R_1\,\xi_1,\ \varepsilon\,R_1\,\eta_1,\ \varepsilon\,R_1\,\zeta_1)\ (\varepsilon\,R_2\,\xi_2,\ \varepsilon\,R_2\,\eta_2,\ \varepsilon\,R_2\,\zeta_2)$$

gli spostamenti infinitesimi del punto (x, y, z) di S in due deformazioni infinitesime corrispondenti, e con questi componiamo linearmente il fascio $(\varepsilon\overline{R}\,\overline{\xi}\,,\ \varepsilon\,\overline{R}\,\eta\,,\ \overline{\varepsilon}\,\overline{R}\,\overline{\zeta}\,)$

con

$$(28)\quad \overline{R}\,\overline{\xi} = m\,R_1\xi_1 + n\,R_2\xi_2,\ \overline{R}\,\overline{\eta} = m\,R_1\eta_1 + n\,R_2\eta_2,\ \overline{R}\,\overline{\zeta} = m\,R_1\zeta_1 + n\,R_2\zeta_2.$$

Se colle formole fondamentali (II) § 298 costruiamo la seconda falda focale S della congruenza W del fascio abbiamo

$$\bar{x} = x + \begin{vmatrix} \overline{\eta} & \overline{\zeta} \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = x + \frac{1}{m\,R_1 + n\,R_2} \begin{vmatrix} m R_1\eta_1 + n R_2\eta_2, & m R_1\zeta_1 + n\,R_2\zeta_2 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

ovvero per le (23)

(*) Le considerazioni seguenti nel testo vennero svolte dal Sig. TORTORICI nella sua tesi di laurea (V. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Vol. 35° 1913).

$$\bar{x} = \frac{m\,R_1\,x_1 + n\,R_2\,x_2}{m\,R_1 + n\,R_2},\ \text{ecc.}$$

che ponendo

$$\mu = \frac{R_2}{R_1}\quad,\quad \frac{n}{m} = c\ (\text{cost}^{\text{te}})$$

possiamo scrivere

$$(29)\qquad \bar{x} = \frac{c\,\mu\,x_2 + x_1}{c\,\mu + 1},\ \bar{y} = \frac{c\,\mu\,y_2 + y_1}{c\,\mu + 1},\ \bar{z} = \frac{c\,\mu\,z_2 + z_1}{c\,\mu + 1}.$$

Le ∞^1 superficie $\overline{S}$, seconde falde focali nel fascio di congruenze W, si ottengono dalle (28) facendo variare il parametro c, i valori particolari $c = 0$, $c = \infty$ corrispondendo alle due particolari superficie S_1, S_2 del fascio. Nelle formole (28) e (29) si legge : *Il punto* $\overline{F}$ *generico della superficie* $\overline{S}$ *nel fascio descrive una retta* r *nel piano tangente in* F *alla* S *e il piano tangente in* $\overline{F}$ *alla* $\overline{S}$ *descrive un fascio (projettivo), il cui asse* r' *passa pel punto* F.

È ora manifesto che la serie ∞^1 di superficie S′ del teorema di permutabilità date dalle (27) formano a loro volta un secondo fascio perfettamente definito dal primo e in relazione invertibile con esso ; una superficie qualunque $\overline{S}$ nel primo fascio e una qualunque S′ nel secondo sono le due falde focali di una congruenza W.

§ 302.

Superficie con deformazioni infinitesime in sè stesse.

Per le importanti applicazioni che andiamo ora a svolgere della teoria generale delle congruenze W occorre risolvere la questione preliminare seguente : *Quali sono le superficie* S *che ammettono deformazioni infinitesime in sè medesime* ? È chiaro che tutte le deformate delle superficie di rotazione godono di tale proprietà, ed applicando i primi principii della teoria dei gruppi continui di Lie, si può anche facilmente stabilire che non ne esistono altre ; poichè dall'esistenza di una trasformazione *infinitesima* in sè del ds^2 segue quella di un gruppo continuo ad un parametro di tali trasformazioni (applicabilità), onde ci troviamo nel caso considerato al § 129.

Ma qui conduciamo la ricerca per una via diretta, che ha il vantaggio di fornirci insieme il valore *della funzione caratteristica* φ di WEINGARTEN per la detta deformazione infinitesima. La superficie S ammetta una deformazione infinitesima nella quale ogni punto (u, v) si sposta tangenzial-

mente alla superficie. Prendiamo a linee coordinate $u=$ cost^{te} quelle inviluppate sopra S dalle direzioni degli spostamenti, a linee $v=$ cost^{te} le loro trajettorie ortogonali, ed abbiasi

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2.$$

Indicando, come al § 281, con

$$\varepsilon\bar{x}\ ,\ \varepsilon\bar{y}\ ,\ \varepsilon\bar{x}$$

le componenti dello spostamento, saranno per ipotesi $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ proporzionali ai coseni di direzione della tangente alla $u =$ cost^{te}, onde avremo

$$\bar{x} = \lambda\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \bar{y} = \lambda\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \bar{z} = \lambda\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

essendo λ un fattore di proporzionalità. Ora le condizioni (2) § 282 (pag. 5) dànno

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} = 0\quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,\ \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}.$$

Ne segue che possiamo porre

$$\mathrm{E} = 1,\qquad \lambda = \sqrt{\mathrm{G}} = r\,(u),$$

essendo r una funzione della sola u, dunque, *la superficie* S *è applicabile sopra una superficie di rotazione.* Ed ora se calcoliamo la funzione caratteristica φ di WEINGARTEN corrispondente allo strisciamento infinitesimo, dalla (3) § 282 (pag. 6,

$$\varphi = -\frac{1}{2r}\mathrm{S}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2r}\mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v},$$

troviamo subito $\varphi = -\dfrac{dr}{du} = -r'$. Ne concludiamo : *Per ogni superficie* S *applicabile sopra una superficie di rotazione, d'elemento lineare*

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2,\ (r = \psi\,(u))$$

il valore della funzione caratteristica φ, che dà lo strisciamento infinitesimo della superficie in sè medesima, è proporzionale per un fattore costante alla derivata $\dfrac{dr}{du} = r'$.

Da questi risultati possono dedursi nuovamente i teoremi di WEINGARTEN sulle evolute delle superficie W (I §§ 163, 164). Per una superficie W si corrispondono sulle due falde dell'evoluta le linee asintotiche e quindi (§ 299) ciascuna di esse ammette una deformazione infinitesima in cui ogni punto si sposta parallelamente alla normale dell'altra falda, cioè tangenzialmente alla superficie. Questa è dunque applicabile sopra una superficie di rotazione, conformemente al teorema diretto di WEINGARTEN. Inversamente per una superficie deformata di una superficie di rotazione, ammettendo la superficie una deformazione infinitesima in sè nel senso dei paralleli, le tangenti alle deformate dei meridiani formano una congruenza normale W, e le superficie ortogonali ai raggi sono superficie W, conformente al teorema reciproco di WEINGARTEN.

§ 303

Congruenze W di Darboux.

Della semplice equazione di MOUTARD

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0 \tag{30}$$

consideriamo tre soluzioni particolari

$$\xi = f_1\,(u) + \varphi_1\,(v),\ \eta = f_2\,(u) + \varphi_2\,(v),\ \zeta = f_3\,(u) + \varphi_3\,(v) \tag{31}$$

(linearmente indipendenti) e costruiamo con queste, mediante le formole di LELIEUVRE, la corrispondente superficie S di cui le (u, v) sono le asintotiche, e ξ, η, ζ i coseni normalizzati di direzione della normale. La superficie S sarà definita dalle formole

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} f_2\,(u) + \varphi_2\,(v) & , & f_3\,(u) + \varphi_3\,(v) \\ f'_2\,(u) & , & f'_3\,(u) \end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} f_2\,(u) + \varphi_2\,(v) & , & f_3\,(u) + \varphi_3\,(v) \\ \varphi'_2\,(v) & , & \varphi'_3\,(v) \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{32}$$

colle analoghe per y, z. Ora, assumendo della (30) la soluzione particolare $\mathrm{R} = 1$, mediante la quale la trasformata di MOUTARD coincide colla (30)

stessa, costruiamo la corrispondente congruenza W di cui la S è la prima falda focale (§ 198). Le formole (13) pag. 49 dànno

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = -\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \text{ecc.}$$

onde, senza alterare la generalità, possiamo porre

$$\xi_1 = \varphi_1(v) - f_1(u),\ \eta_1 = \varphi_2(v) - f_2(u),\ \zeta_1 = \varphi_3(v) - f_3(u),$$

e conseguentemente la seconda falda S_1 è definita dalle formole (II) § 298 pag. 50), che diventano

$$(33) \quad x_1 = x + 2\begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix},\ y_1 = y + 2\begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ f_3 & f_1 \end{vmatrix},\ z = z + 2\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}.$$

Per la superficie media S_0 della nostra congruenza W, indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto medio del raggio, avremo

$$x_0 = \frac{x + x_1}{2}, \quad y_0 = \frac{y + y_1}{2}, \quad z_0 = \frac{z + z_1}{2},$$

e dalle formole precedenti risulta

$$(34) \quad \frac{\partial x_0}{\partial u} = -\begin{vmatrix} f_2(u), & f_3(u) \\ f'_2(u), & f'_3(u) \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \begin{vmatrix} \varphi_2(v), & \varphi_3(v) \\ \varphi'_2(v), & \varphi'_3(v) \end{vmatrix}, \quad \text{ecc.}$$

Queste dimostrano che la superficie media S_0 è attualmente una superficie di traslazione di cui le linee (u, v) sono le curve generatrici. Di più dalle identità

$$S\, f_1(u)\frac{\partial x_0}{\partial u} = 0, \quad S\, f_1(u)\frac{\partial^2 x_0}{\partial u^2} = 0$$

$$S\, \varphi_1(v)\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0, \quad S\, \varphi_1(v)\frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} = 0$$

segue che f_1, f_2, f_3 sono proporzionali ai coseni di direzione della binormale alla curva $v = \text{cost}^{te}$ sopra S_0, similmente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ a quelli della binormale alla $u = \text{cost}^{te}$. Ed ora dalle (33) segue che il raggio (u, v) della congruenza, uscente dal punto medio P_0 su S'_0, è normale all'una ed all'altra binormale, cioè coincide colla intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici (u, v).

Inversamente prendiamo una superficie S_0 di traslazione affatto arbitraria, colla sola condizione (necessaria per la realità delle due falde focali) che le torsioni delle curve generatrici abbiano segno contrario. Siano

$$(35) \quad x_0 = F_1(u) + \Phi_1(v),\ y_0 = F_2(u) + \Phi_2(v),\ z_0 = F_3(u) + \Phi_3(v)$$

le equazioni parametriche della S_0, dove supporremo per fissare le idee che u, v siano rispettivamente gli archi delle $v = \text{cost}^{te}$, $u = \text{cost}^{te}$, sicchè

$$\begin{cases} F'^2_1 + F'^2_1 + F'^2_3 = 1 \\ \Phi'^2_1 + \Phi'^2_2 + \Phi'^2_3 = 1. \end{cases}$$

Indicando con λ_v, μ_v, ν_v i coseni di direzione della binormale alla $v = \text{cost}^{te}$, con $\frac{1}{T_v}$ la torsione e adottando notazioni analoghe per la $u = \text{cost}^{te}$, si vede subito che per far coincidere le (34) colle (35) basta prendere

$$f_1(u) = \lambda_v\sqrt{T_v}\ ,\ f_2(u) = \mu_v\sqrt{T_v}\ ,\ f_3(u) = \nu_v\sqrt{T_v}$$
$$\varphi_1(v) = \lambda_u\sqrt{-T_u}\ ,\ \varphi_2(v) = \mu_u\sqrt{-T_u}\ ,\ \varphi_3(v) = \nu_u\sqrt{-T_u}$$

Basta quindi supporre $\frac{1}{T_v} > 0, \frac{1}{T_u} < 0$ per avere formole reali. Per tal modo abbiamo dimostrato il teorema di DARBOUX:

Se per ogni punto di una superficie S_0 *di traslazione si conduce il raggio intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano, si forma una congruenza* W, *sulle cui falde focali le asintotiche corrispondono alle curve generatrici di* S_0. *Le due falde focali sono reali soltanto quando le curve generatrici di* S_0 *hanno torsioni di segno contrario.*

A queste congruenze daremo il nome di *congruenze di* DARBOUX. Si osservi che, secondo la formola (A) pag. 57, il loro parametro medio è dato da $\sqrt{d^2 - \delta^2} = \sqrt{T_v + T_u}$ ed è quindi costante allora ed allora soltanto che le due curve generatrici abbiano ciascuna torsione costante.

§ 304.

Costruzione di Darboux per le deformate del paraboloide rotondo immaginario.

Dei risultati sopra ottenuti facciamo ora l'applicazione più importante ricercando le congruenze di DARBOUX *normali*, di parametro medio nullo.

Queste si avranno quando le due curve generatrici della superficie S_0 di traslazione abbiano torsioni costanti eguali e di segno contrario. La congruenza essendo allora W e normale, le due falde focali saranno applicabili sopra una superficie di rotazione e noi dimostreremo ora che questa è precisamente il paraboloide rotondo di parametro puramente immaginario, di cui già al § 166 (I pag. 438) abbiamo determinato, col procedimento analitico di WEINGARTEN, tutte le deformate. Per questo osserviamo che le due falde focali hanno per equazione di MOUTARD delle deformazioni infinitesime la (30)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0$$

e la soluzione di questa che corrisponde allo strisciamento p. e. della falda S_1 in sè è precisamente la $R = 1$; quindi (§ 284) il corrispondente valore della funzione φ caratteristica è

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}},$$

essendo $K_1 = -\frac{1}{\rho^2}$ la curvatura della S_1. Ora indicando con

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2\,d\beta^2,\ r = \psi(\alpha)$$

l'elemento lineare della S_1, sappiamo dal § 302 che la funzione φ caratteristica dello strisciamento è

$$\varphi = k\frac{d\,r}{d\,\alpha} \quad (k \text{ costante})$$

d'altronde

$$K_1 = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\,\alpha^2}.$$

Dal confronto risulta per determinare la funzione r di α l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 r}{d\,\alpha^2} = k^4\,r\left(\frac{d\,r}{d\,\alpha}\right)^2$$

che scriviamo

$$\frac{d}{d\,\alpha}\left(\frac{1}{\left(\frac{d\,r}{d\,\alpha}\right)^2}\right) = -\,k^4\,2r\,\frac{d\,r}{d\,\alpha}.$$

Una prima integrazione porge

$$\left(\frac{d\,r}{d\,\alpha}\right)^2 = \frac{1}{a^2 - k^4\,r^2} \quad (a \text{ costante})$$

e quindi pel ds^2

$$ds^2 = (a^2 - k^4\,r^2)\,dr^2 + r^2\,d\,\beta^2.$$

Senza alterare la generalità si può porre $a = 1$, e vediamo che questo coincide col ds^2 del paraboloide rotondo di parabola meridiana

$$z = \frac{i\,k^2}{2}\,r^2$$

col parametro puramente immaginario $\frac{i}{k^2}$ (Cf. § 166).

Ma inversamente, pel calcolo stesso sopra eseguito, qualunque deformata S_1 del paraboloide immaginario rotondo ammette come funzione caratteristica dello strisciamento in sè: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, onde la corrispondente equazione di MOUTARD ha la soluzione $\theta = 1$, e coincide quindi colla $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0$.

Ne segue che la costruzione dà *tutte* le deformate del paraboloide rotondo immaginario, Per tal modo siamo giunti a stabilire la proposizione di DARBOUX :

Per costruire le deformate del paraboloide rotondo immaginario si consideri una qualunque superficie S_0 *di traslazione con curve generatrici di torsione costante eguale di segno contrario e per ogni punto di* S_0 *si conduca il raggio d'intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano. La congruenza di raggi così ottenuti è normale e le sue falde focali dànno le superficie richieste.*

Questa elegante costruzione di DARBOUX completa nel modo più espressivo geometrico, i risultati già noti per le ricerche di WEINGARTEN, fin dal 1863, relativi a questa classe completa di superficie applicabili, o ciò che è lo stesso alle superficie W della classe

$$a\,(r_1 - r_2) = \operatorname{sen} a\,(r_1 + r_2)$$

la cui immagine sferica delle linee di curvatura è data da ellissi ed iperbole confocali.

Di più la costruzione stessa si applica ancora al caso in cui le due curve generatrici siano *coniugate immaginarie* e conduce a trovare tutte le deformate reali del paraboloide rotondo reale, come ora andiamo a constatare. Non lascieremo di osservare che da queste ricerche risulta: *Tutte*

le deformate del paraboloide rotondo immaginario hanno la medesima equazione per le deformazioni infinitesime e cioè la $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$. Questa proprietà è tanto più notevole che essa è affatto caratteristica di questa classe di superficie applicabili, mentre per ogni altra classe l' equazione delle deformazioni infinitesime cangia colla superficie della classe. (*)

§ 305.

Le deformate del paraboloide rotondo reale.

Per presentare le nuove formole sotto forma reale prendiamo l'equazione

(B) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0,$$

della quale scegliamo tre soluzioni particolari ξ, η, ζ (tre funzioni armoniche). Colle formole

(36) $$\frac{\partial x}{\partial u}=\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\ \text{ecc.}$$

costruiamo una corrispondente superficie S su cui il sistema (u, v) è isotermo coniugato. Di questa superficie S consideriamo la deformazione infinitesima corrispondente alla soluzione R=1 della (B), e costruiamo la relativa congruenza W. La seconda falda focale S_1 sarà definita dalle formole

(37) $$x_1=x+\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix},\quad y_1=y+\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \zeta & \xi\end{vmatrix},\quad z_1=z+\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi & \eta\end{vmatrix},$$

essendo ξ_1, η_1, ζ_1 le soluzioni della (B) coniugate di ξ, η, ζ che soddisfano alle equazioni (16) § 298

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\frac{\partial\xi}{\partial v},\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial v}=-\frac{\partial\xi}{\partial u},\ \text{ecc.},$$

(*) Per la dimostrazione V. la memoria dell'autore nel Tomo XXII Serie 3ª degli Annali di matematica (1914).

talchè

$$\xi_1+i\,\xi,\ \eta_1+i\eta,\ \zeta_1+i\,\zeta$$

sono tre funzioni della variabile complessa $u+i\,v$.

Se imponiamo alla nostra congruenza W la condizione di essere normale, dovremo avere

$$\xi\,\xi_1+\eta\,\eta_1+\zeta\,\zeta_1=0,$$

cioè la funzione

$$(\xi_1+i\,\xi)^2+(\eta_1+i\,\eta)^2+(\zeta_1+i\,\zeta)^2$$

della variabile complessa $u+i\,v$ dovrà essere reale e ridursi quindi ad una costante reale a : *La congruenza* W *costruita sarà normale se le tre funzioni* $\xi_1+i\,\xi$, $\eta_1+i\,\eta$, $\zeta_1+i\zeta$ di $u+iv$ *soddisfano alla condizione* (*)

(38) $$(\xi_1+i\,\xi)^2+(\eta_1+i\,\eta)^2+(\zeta_1+i\,\zeta)^2=a\ \text{(costante reale)}.$$

Ciascuna delle falde focali di questa congruenza normale W sarà applicabile sopra una superficie di rotazione, di cui si tratta ora di determinare la forma. A questo perveniamo con un procedimento analogo a quello usato nel paragrafo precedente osservando che per una tale superficie S di curvatura $K=\frac{1}{\rho^2}$ il valore della funzione caratteristica φ corrispondente allo strisciamento della superficie in sè è dato da

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

Per determinare anche qui la funzione r di α nel ds^2 della forma normale

$$ds^2=d\alpha^2+r^2\,d\beta^2$$

abbiamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2r}{d\,\alpha^2}=-k^4\,r\left(\frac{d\,r}{d\,\alpha}\right)^4\ (k\ \text{costante})$$

e con una prima integrazione

(*) In generale se $(\xi+i\,\xi_1)^2+(\eta+i\,\eta_1)^2+(\xi+i\,\xi_1)^2$ è costante complessa qualunque, la congruenza sarà a parametro medio costante (e viceversa) e sarà pure costante $\rho-\rho_1\equiv S\,\xi^2-S\,\xi_1{}^2$.

$$\frac{1}{\left(\frac{d\,r}{d\,\alpha}\right)^2} = k^4\,r^2 - b\,,$$

essendo b una nuova costante, onde risulta per l'elemento lineare di S

(39) $$ds^2 = (k^4\,r^2 - b)\,dr^2 + r^2\,d^2.\,\beta$$

Inversamente, per ogni superficie S con questo elemento lineare, è $\rho = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ il valore corrispondente della funzione caratteristica nello strisciamento, e quindi la corrispondente equazione di MOUTARD, ammettendo la soluzione $R = 1$, sarà

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0.$$

Si vede dunque che le congruenze W ora costruite dànno nelle loro falde focali *tutte le superficie d'elemento lineare* (39).

Per riconoscere ora la forma della superficie di rotazione d'elemento lineare (39) conviene suddistinguere a seconda del segno della costante b, che vedremo corrispondere al segno della a nella formola (38). Per questo osserviamo che essendo

$$K = \frac{1}{\rho^2}\quad,\quad K_1 = \frac{1}{\rho_1^2}$$

le curvature delle due falde (complementari) S, S_1, la (38) si scrive

(40) $$\rho_1 - \rho = a.$$

Consideriamo dapprima il caso $b = 0$, nel quale la (39) si può scrivere

$$ds^2 = du^2 + u\,d\beta^2$$

e dà l'elemento lineare delle evolute delle superficie minime (I, pag. 436). Ma in questo caso le due falde focali hanno in punti corrispondenti egual curvatura, e quindi insieme con b è nulla la costante a nella (40). In questo caso : *la nostra congruenza è quella delle normali ad una superficie minima, che è la superficie media* S_0

Sia ora b negativa ; possiamo fare senza alterare la generalità $b = -1$ e il corrispondente

(41) $$ds^2 = (1 + k^4\,r^2)\,dr^2 + r^2\,d\beta^2$$

appartiene al *paraboloide rotondo reale* colla parabola meridiana

$$z = \frac{k^2\,r^2}{2}.$$

D'altra parte per la curvatura K del paraboloide abbiamo dalla (41)

$$K = \frac{k^4}{(1+k^4r^2)^2}$$

e la curvatura K_1 della superficie complementare può calcolarsi p. e. dalla formola di HALPHEN

$$K\,K_1 = \frac{1}{d^4}\,,$$

dove $\frac{1}{d}$ è la curvatura geodetica dei paralleli $r = \text{cost}^{\text{te}}$ sul paraboloide, cioè

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r\sqrt{1 + k^2\,r^2}}\,,$$

onde segue

$$K_1 = \frac{1}{k^4r^4}.$$

Qui abbiamo dunque

$$\rho = k^2\,r^2 + \frac{1}{k^2}\,,\quad \rho_1 = k^2\,r^2\,,$$

le quali formole dimostrano che il corrispondente valore della costante a nella (40) è negativo $= -\frac{1}{k^2}$. Dopo ciò è manifesto che il supporre in terzo luogo la costante b positiva avrebbe per solo effetto di scambiare la deformata del paraboloide rotondo colla sua complementare.

Possiamo dunque formulare i risultati conseguiti da DARBOUX colla proposizione seguente : *Se*

$$\xi_1 + i\,\xi,\ \eta_1 + i\eta,\ \zeta_1 + i\zeta$$

sono tre funzioni della variabile complessa $u+iv$, assoggettate alla condizione che la somma dei loro quadrati sia una costante reale a, le formole (36) *dànno per quadrature la più generale deformata del paraboloide reale rotondo se questa costante si assume negativa, invece la complementare se $a > 0$. Nel caso $a = 0$ le stesse formole dànno tutte le evolute delle superficie minime.*

Risulta dalla nostra analisi che le deformate del paraboloide rotondo e le loro complementari, insieme alle evolute delle superficie minime, godono della notevole proprietà di avere tutte a comune l'equazione delle deformazioni infinitesime nella :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0 ;$$

e si potrebbe dimostrare (Cf. § prec. nota) che tale proprietà è esclusiva a queste tre classi di superficie applicabili.

Infine osserveremo che le superficie evolventi delle deformate del paraboloide rotondo (ortogonali ai raggi della congruenza W) sono caratterizzate dalla relazione

$$c\,(r_1 - r_2) = \operatorname{senh}\,(c\,(r_1 + r_2))$$

fra i raggi principali di curvatura. L'elemento lineare sferico rappresentativo delle linee di curvatura di queste superficie assume la forma caratteristica

$$ds^2 = \frac{du^2}{\operatorname{senh}^2 \omega} + \frac{dv^2}{\cosh^2 \omega} \quad \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{E} = 1\right).$$

Sappiamo dunque risolvere con quadrature il problema di ridurre, nel modo più generale, l'elemento linare sferico a questa forma.

§ 306.

Le congruenze W a falde focali d' egual curvatura.

Fra le congruenze W tengono un posto notevole le congruenze *pseudosferiche* le cui proprietà, sviluppate nell'ultimo Capitolo del precedente Volume (Cap.XVI), dànno luogo alla teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Ora noi andiamo a generalizzare questa teoria fissando l'attenzione sulla proprietà delle congruenze pseudosferiche che le due falde focali hanno in punti corrispondenti egual curvatura e domandiamo di *trovare tutte le congruenze* W, *le cui falde focali hanno in punti corrispondenti curvature eguali* : (*)

(*) Il problema è stato posto e risoluto nella memoria dell'A. (1890) : *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* Annali di mat. t. XVIII della serie 2ª).

Ci limiteremo a trattare esplicitamente il caso di superficie focali *con linee asintotiche reali*. Nel caso della curvatura positiva valgono gli stessi risultati analitici ma le trasformazioni elementari che ne derivano per le superficie di questa classe conducono da superficie reali a superficie immaginarie, e soltanto colla *duplicazione* si ottengono trasformazioni reali, come abbiamo sviluppato in particolare al Cap. XVI) § 274 s. s) per le deformate della sfera.

Supponiamo adunque reali le asintotiche (u, v), che prendiamo a linee coordinate, e serviamoci delle formole di Guichard al § 298, supponendo $K = K_1$, ossia

$$\rho = \rho_1 = S\,\xi^2 = S\,\xi_1^2 , \tag{42}$$

e indicando con σ l'angolo dei piani focali avremo

$$S\,\xi\,\xi_1 = \sqrt{\rho\,\rho_1}\cos\sigma = \rho\cos\sigma. \tag{43}$$

Ora prendiamo le equazioni (13) della prima linea § 298 (pag. 49) e moltiplicandole ordinatamente una prima volta per ξ, η, ζ, una seconda per ξ_1, η_1, ζ_1 sommiamo avendo riguardo alle (42), (43) ; così otteniamo

$$\begin{cases} \rho\,(1 - \cos\sigma)\dfrac{\partial\, log\, R}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + S\,\xi\dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} \\ -\rho\,(1 - \cos\sigma)\dfrac{\partial\, log\, R}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + S\,\xi_1\dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \end{cases}$$

e sommando

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}(\rho\cos\sigma) = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -(1 + \cos\sigma)\frac{\partial\, log\, \rho}{\partial u}. \tag{44}$$

Similmente procedendo sulle (13) della seconda linea, risulta

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = (1 - \cos\sigma)\frac{\partial\, log\, \rho}{\partial v}, \tag{44*}$$

e dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(1 - \cos\sigma)\frac{\partial\, log\, \rho}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[(1 + \cos\sigma)\frac{\partial\, log\, \rho}{\partial u}\right] = 0,$$

segue semplicemente per le (44), (44*) stesse

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

ossia

$$\rho = \varphi(u) + \psi(v),$$

con $\varphi(u)$ funzione di u, $\psi(v)$ funzione di v. Dunque intanto : *Se in una congruenza* W *le due falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura la curvatura* K *espressa pei parametri* u, v *delle linee asintotiche assume la forma caratteristica*

$$\text{(C)} \qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}.$$

Dalle formole di LELIEUVRE risulta che: *la ricerca delle superficie di questa classe* (C) *si traduce analiticamente nell'altra delle equazioni di* MOUTARD

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta$$

con terne (ξ, η, ζ) *di soluzioni legate dalla relazione quadratica*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi(u) + \psi(v).$$

Le superficie della classe (C) si possono distinguere in tre sottoclassi, secondo che :

a) le funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sono ambedue costanti

b) una sola delle due funzioni p. e. la $\psi(v)$ è una costante nel qual caso, cangiando il parametro u, si può fare $\varphi(u) = u$.

c) tutte due le funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sono variabili e allora si può fare

$$\varphi(u) = u, \quad \psi(v) = v.$$

È manifesto che le superficie corrispondenti al caso *a*) sono tutte e sole le superficie pseudosferiche.

Quelle corrispondenti al caso *b*) sono le superficie nelle quali le linee di egual curvatura K= cost^te sono asintotiche della superficie, ciò che equivale a dire (pel teorema di BELTRAMI. ENNEPER) che le asintotiche di un sistema sono curve la cui torsione è costante per ciascuna ma variabile dall'una all'altra. Queste superficie sono gli integrali di un'equazione a de-

rivate parziali *terze* di evidente formazione. (*) Appartiene p. e. a questa classe l'elicoide rigata d'area minima le cui asintotiche curvilinee sono le eliche.

Come superficie semplici della classe generale (C) citiamo le conoidi rette (I pag. 248), ove si prende

$$\xi = v, \quad \eta = \psi(v), \quad \zeta = u,$$

indi

$$K = -\frac{1}{[u^2 + v^2 + \psi^2(v)]^2}.$$

Dimostreremo nei prossimi paragrafi che la condizione (C), trovata sopra come *necessaria* perchè una superficie S possa essere falda focale di una congruenza W della specie richista, è anche *sufficiente*, più precisamente si proverà che ogni tale superficie S è falda focale di ∞^2 congruenze della specie, e nelle loro seconde falde focali avremo quindi nuove superficie della classe richiesta. Per tal modo i risultati del Cap. XVI relativi alle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche verranno generalizzati a trasformazioni delle superficie della classe (C).

Analiticamente ciò significa che ogni equazione di MOUTARD con terne (ξ, η, ζ) di *soluzioni quadratiche* legate dalla relazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi(u) + \psi(v)$$

ammette ∞^2 trasformate di MOUTARD della stessa specie ove le terne trasformate (ξ_1, η_1, ζ_1) conservano lo stesso valore per la somma dei loro quadrati. Del resto questo risultato si estende alle equazioni di MOUTARD con un numero qualunque n di soluzioni particolari $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ legate da un'identità quadratica

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2 = \varphi(u) + \psi(v),$$

le quali si presentano in altri problemi di geometria infinitesimale. (**)

(*) In coordinate cartesiane ordinarie $z = z(x, y)$, posto $K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, la detta equazione si scrive

$$t\left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)^2 - 2s\,\frac{\partial K}{\partial x}\,\frac{\partial K}{\partial y} + r\left(\frac{\partial K}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

(**) Cf. la prima parte della Memoria dell'autore : *Varietà a tre dimensioni deformabili entro l'*S_4 *euclideo* (Memorie della società Italiana delle Scienze Serie 3ª T. XIII 1905).

§ 307.

Digressione sopra alcune formole relative al ds'^2 sferico.

Si riferisca la sfera unitaria ad un qualunque sistema coordinato curvilineo (u, v), ed abbiasi pel suo elemento lineare ds'

$$(45) \qquad ds'^2 = E du^2 + 2\cos 2\omega \sqrt{EG}\, du\, dv + G\, dv^2 ,$$

dove 2ω è l'angolo delle linee cordinate. In ogni punto della sfera come vertice, si consideri un triedro trirettangolo il cui terzo spigolo abbia la direzione (X_3, Y_3, Z_3) della normale esterna alla sfera e gli altri due, coi rispettivi coseni di direzione (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) quelle delle bisettrici delle linee coordinate, onde potremo porre

$$(46)\ X_1 = \frac{1}{2\operatorname{sen}\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\right),\ X_2 = \frac{1}{2\cos\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\right)$$

colle analoghe per gli altri due assi. Scriviamo le formole che esprimono le derivate rapporto ad u, v dei nove coseni di direzione

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_3 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

linearmente pei coseni stessi e pei coefficienti del ds'^2. (*)

Intanto dalle (46) abbiamo

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{E}\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \sqrt{E}\cos\omega\, X_2$$
$$\frac{\partial X_3}{\partial v} = -\sqrt{G}\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \sqrt{G}\cos\omega\, X_2$$

e quindi per le *rotazioni* p, q, p_1, q_1 le formole.

$$\begin{cases} p = S\, X_3 \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -S' X_2 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\sqrt{E}\cos\omega,\ q = S' X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -S X_3 \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \sqrt{E}\operatorname{sen}\omega \\ p_1 = S X_3 \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -S' X_3 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\sqrt{G}\cos\omega,\ q_1 = S' X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -S X_3 \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = -\sqrt{G}\operatorname{sen}\omega \end{cases}$$

(*) Le formole che andiamo a scrivere nel testo sono casi particolari di quelle relative al *triedro mobile* date nella nota alla fine del Vol.e I.°

Restano da calcolare le due ultime rotazioni

$$r = S\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -S\, X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u}$$
$$r_1 = S\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = -S\, X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} ,$$

e per questo formiamo dalle (46) p. e.

$$S\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{1}{2\operatorname{sen} 2\omega} S\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial u}\right) - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\right\} .$$

Ma dalla formola

$$\cos 2\omega = S\, \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v} ,$$

derivando rapporto ad u risulta

$$S\, \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u}\right) = -2\operatorname{sen} 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} - S\, \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\right) ,$$

onde la precedente può scriversi

$$r = S\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{2\operatorname{sen} 2\omega}\left\{2\operatorname{sen} 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{2}{\sqrt{E}} S' \frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X_3}{\partial v}\right)\right\} .$$

Se si sviluppa osservando la formola

$$\frac{\partial^2 X_3}{\partial u\, \partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial X_2}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial X_3}{\partial v} - F\, X_3 ,$$

ne viene

$$S X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{2\operatorname{sen} 2\omega}\left\{2\operatorname{sen} 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{2}{\sqrt{EG}}\left[E\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + F\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\right\} .$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\left[\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right] = 2F\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + 2G\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} ,$$

indi

$$E\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + F\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{EG - F^2}{G}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = E\operatorname{sen}^2(2\omega) \cdot \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} ,$$

per cui otteniamo finalmente

$$r = S\,X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} - \sqrt{\frac{E}{G}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} . \operatorname{sen}(2\omega) ,$$

ed in modo analogo

$$r_1 = S\,X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \operatorname{sen}(2\omega) . \quad (*)$$

Dopo ciò abbiamo subito per le formole richieste il quadro :

$$(A) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -A X_2 - \sqrt{E} \operatorname{sen}\omega\, X_3 \quad , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = B X_2 + \sqrt{G} \operatorname{sen}\omega\, X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = A X_1 - \sqrt{E} \cos\omega\, X_3 \quad , \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -B X_1 - \sqrt{G} \cos\omega\, X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{E} \operatorname{sen}\omega\, X_1 + \sqrt{E} \cos\omega\, X_2 , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\sqrt{G} \operatorname{sen}\omega\, X_1 + \sqrt{G} \cos\omega\, X_2 , \end{cases}$$

dove si è posto

$$(47) \quad \begin{cases} A = -r = \dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \sqrt{\dfrac{E}{G}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \operatorname{sen} 2\omega \\ B = r_1 = \dfrac{\partial \omega}{\partial v} + \sqrt{\dfrac{G}{E}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \operatorname{sen} 2\omega . \end{cases}$$

Fra le condizioni d'integrabilità segnaleremo la formola

$$(48) \quad \frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} + \sqrt{EG} \operatorname{sen}(2\omega) = 0 ,$$

che corrisponde alla

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v} + pq_1 - qp_1 = 0.$$

(*) Queste formole per r, r_1 si deducono anche facilmente da quelle della nota citata.

§ 308.

Costruzione delle particolari congruenze W da una falda della superficie focale.

Partiamo ora da una particolare superficie S della classe (C), supposta nota, e cerchiamo di costruire le ∞^2 congruenze W (la cui esistenza abbiamo affermato al § 306) delle quali le seconde falde S′ hanno, in punti corrispondenti, la stessa curvatura della S. Riferiamo la S alle sue linee asintotiche u, v e sia la (45) la forma del corrispondente elemento lineare sferico.

Dalle formole (44), (44*), essendo

$$\rho = \varphi(u) + \psi(v) ,$$

abbiamo integrando

$$(49) \quad tg\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\varphi(u) + k}{\psi(v) - k}} \quad (k \text{ costante})$$

ed ora dimostreremo che : *Fissata comunque la costante k, corrispondentemente a questo valore di σ esistono ∞^1 congruenze* W *della specie richiesta che hanno la superficie* S *per prima falda focale.*

Per le coordinate x, y, z di un punto F della S, dalle formole del § 88 (I pag. 239) abbiamo

$$(50) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \rho \sqrt{E}(\cos\omega\, X_1 - \operatorname{sen}\omega\, X_2) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\rho \sqrt{G}(\cos\omega\, X_1 + \operatorname{sen}\omega\, X_2). \end{cases}$$

Ora la distanza focale FF′ nella nostra congruenza, a causa della formola di RIBAUCOUR, deve essere

$$\delta = \rho \operatorname{sen}\sigma$$

e se indichiamo con x', y', z' le coordinate del secondo fuoco F′, avremo

$$(51) \quad x' = x + \rho \operatorname{sen}\sigma (X_1 \cos\varphi + X_2 \operatorname{sen}\varphi),$$

colle analoghe per y', z', avendo indicato con φ l'angolo d'inclinazione del raggio FF′ sulla direzione (X_1, Y_1, Z_1). Dobbiamo ora assoggettare la fun-

zione incognita $\varphi = \varphi(u,v)$ alle condizioni del problema secondo le quali la direzione (X′, Y′, Z′) della normale in F′ alla superficie S′ luogo di questo punto deve essere perpendicolare al raggio FF′ e formare l'angolo σ colla normale (X, Y, Z) alla S ; per ciò possiamo porre

$$X' = \operatorname{sen}\sigma\,(X_2\cos\varphi - X_1)\operatorname{sen}\varphi) + \cos\sigma\, X_3, \text{ ecc.} \tag{52}$$

Dovranno dunque sussistere le due equazioni

$$S\,X'\frac{x'}{\partial u} = 0\ ,\quad S\,X'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

le quali, calcolate colle formole precedenti, dànno per φ il sistema differenziale :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - A = \sqrt{E}\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}(\varphi+\omega) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + B = -\sqrt{G}\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}(\varphi-\omega). \end{cases} \tag{53}$$

Ora questo sistema è *completamente integrabile*, ciò che si verifica tenendo conto della (48) e delle equazioni

$$\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\ ,\quad \frac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2(1+\cos\sigma)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\ ,\quad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = -2(1-\cos\sigma)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\ , \tag{54}$$

dalle quali seguono le altre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right) = \sqrt{E}\cos 2\omega\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \sqrt{G}\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right) = \sqrt{G}\cos 2\omega\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \sqrt{E}\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\ , \end{cases}$$

Dunque le equazioni (53) ammettono una soluzione φ contenente una seconda costante arbitraria, oltre k; e si osserverà che, assumendo come incognita $tg\,\frac{\varphi}{2}$, ci troviamo in presenza di un'equazione del tipo di RICCATI come nel caso particolare delle congruenze pseudosferiche. Resta ora soltanto a dimostrare che la congruenza costruita a falde focali S, S′ è una

congruenza W, cioè le u, v sono asintotiche sulla S′, per la qual cosa basta verificare le due equazioni:

$$S\frac{\partial X'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial u} = 0\ ,\quad S\frac{\partial X'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial v} = 0\ ;$$

ma queste, calcolate colle precedenti, si riducono appunto alle (54). In fine la proprietà K′ = K risulta ora subito dalla formola di RIBAUCOUR $K\,K' = \frac{1}{\rho^4}$.

Per le trasformazioni delle superficie della classe (C) così ottenute valgono ora manifestamente le considerazioni stesse svolte al Cap. XVI per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche.

§ 309.

Il teorema speciale di permutabilità per le superficie della classe (C).

Andiamo ora a dimostrare che per le superficie S della classe (C) in generale sussiste, come nel caso particolare delle superficie pseudosferiche, un teorema *speciale* di permutabilità delle relative trasformazioni per congruenze W, o *trasformazioni asintotiche* (*) di queste superficie.

Della superficie data S della classe (C) consideriamo due particolari trasformate S_1, S_2 corrispondenti ai valori k_1, k_2 della costante k nella (49) e siano σ_1, σ_2, φ_1, φ_2 i relativi valori degli angoli σ, φ; diremo per abbreviare che la S_1 è dedotta da S con una trasformazione T_{k_1}, e similmente S_2 con una T_{k_2}. Ora, secondo il teorema generale di permutabilità al § 301, esiste una semplice infinità di superficie S′ trasformate asintotiche comuni di S'_1, S'_2 ; ma nel caso attuale sussiste il teorema *speciale* di permutabilità :

Fra queste ∞^1 *superficie* S′ *ve ne ha, oltre* S, *una ed una soltanto che ha in ogni punto la curvatura comune con* S, S_1, S_2 ; *essa è legata alla* S_1 *da una trasformazione* T_{k_2} *a costante* k_2, *alla* S'_2 *da una* T_{k_1}.

Per dimostrarlo cerchiamo quale valore sarà da attribuirsi a λ nella formola (25):

(*) In generale indicheremo col nome di *trasformazione asintotica* il passaggio dall'una all'altra falda di una congruenza W.

$$\xi' = \xi + \frac{R_1 R_2}{\lambda}(\xi_2 - \xi_1)$$

affinchè si abbia, secondo l'enunciato del teorema

$$S\,\xi'^2 = \rho\ .$$

Dalle precedenti, tenendo presente che si ha

$$S\,\xi^2 = S\,\xi_1^2 = S\,\xi_2^2 = \rho\ ,$$

risulta per λ il valore

$$\lambda = R_1 R_2 \frac{S\,\xi_1\xi_2 - \rho}{S\,\xi\,\xi_2 - S\,\xi\,\xi_1}\ , \tag{55}$$

e tutto si riduce a provare che questo valore di λ soddisfa in effetto le due equazioni (8) pag. 46.

Ora abbiamo per le (52)

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{\rho}\,\{\cos\sigma_1\,X_3 - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\varphi_1\,X_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\varphi_1\,X_2\}\\ \xi_2 &= \sqrt{\rho}\,\{\cos\sigma_2\,X_3 - \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\varphi_2\,X_1 + \operatorname{sen}\sigma_2\cos\varphi_2\,X_2\}\end{aligned}\right.$$

e inoltre

$$\xi = \sqrt{\rho}\,X_3\ ,$$

indi

$$\left.\begin{aligned}S\,\xi_1\,\xi_2 &= \rho\,\{\cos\sigma_1\cos\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\}\\ S\,\xi\,\xi_1 &= \rho\cos\sigma_1\ ,\qquad S\,\xi\,\xi_2 = \rho\cos\sigma_2\end{aligned}\right.$$

e la (55) diventa per ciò

$$\lambda = R_1 R_2 \frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2 - 1 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}\ .$$

Se poniamo

$$\mu = \frac{\lambda}{R_1 R_2} = \frac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2 - 1 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1} \tag{56}$$

le equazioni (8) per λ si traducono per μ nelle altre

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\,\mu}{\partial\,u} + \left(\frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,u} + \frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,u}\right)\mu + \frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,u} - \frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,u} = 0\\ &\frac{\partial\,\mu}{\partial\,v} + \left(\frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,v} + \frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,v}\right)\mu + \frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,v} - \frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,v} = 0.\end{aligned}\right. \tag{57}$$

Ora dalle formole (24) § 301, moltiplicando ordinatamente per ξ_1, η_1, ζ_1, e sommando, si ottiene facilmente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,u} &= \frac{1+\cos\sigma_1}{2\,(1-\cos\sigma_1)}\frac{\partial\,lg\,\rho}{\partial\,u} + \frac{\sqrt{E}\,\operatorname{sen}\sigma_1}{1-\cos\sigma_1}\cos(\varphi_1 + \omega)\ ,\\ \frac{\partial\,lg\,R_1}{\partial\,v} &= -\frac{1-\cos\sigma_1}{2\,(1+\cos\sigma_1)}\frac{\partial\,lg\,\rho}{\partial\,v} + \frac{\sqrt{G}\,\operatorname{sen}\sigma_1}{1+\cos\sigma_1}\cos(\varphi_1 - \omega)\end{aligned}\right.$$

e analogamente per $\frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,u}$, $\frac{\partial\,lg\,R_2}{\partial\,v}$. Se deriviamo il valore (56) di μ rapporto ad u, v colle formole (53), (54) indi sostituiamo nelle (57), troviamo che queste sono *identicamente verificate*, e la nostra proposizione resta così stabilita.

Dopo ciò tutte le conseguenze che nel Cap. XVI abbiamo dedotto dal teorema di permutabilità per la ripetuta applicazione delle trasformazioni di Bäcklund alle superficie pseudosferiche valgono manifestamente, più in generale, per le trasformazioni asintotiche T_k delle superficie S della classe (C). Così p. e. partendo dall'elicoide rigata ad area minima, o dal paraboloide iperbolico equilatero come superficie iniziale S della classe (C), si vede che il primo sistema di Riccati (53) s'integra subito con quadrature e l'ulteriore applicazione del processo di trasformazione alle nuove superficie della classe (C) si continuerà indefinitamente in termini finiti.

§ 310.

Superficie con sistema coniugato permanente in deformazione continua. (*)

Colle superficie della classe (C) sopra studiate si connette il problema, già accennato al § 294, delle superficie con sistema coniugato permanente in una deformazione continua. Ivi abbiamo visto che nell'immagine *sfe-*

(*) Delle superficie qui considerate si è occupato per primo Peterson. Più completamente vennero trattate da Cosserat (Comptes Rendus octobre 1891).

rica di un tale sistema coniugato debbono essere soddisfatte dai simboli $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ di CHRISTOFFEL le relazioni *caratteristiche*

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}. \tag{58}$$

In conseguenza esiste una corrispondente superficie S la cui immagine sferica delle asintotiche è il nostro sistema (u, v), e posto come al solito

$$K = -\frac{1}{\rho^2}$$

si ha

$$\frac{\partial \lg \rho}{\partial u} = -2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}, \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = -2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},$$

indi per le (58)

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \log \rho}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial v} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = 0, \ \rho = \varphi(u) + \psi(v).$$

Si ha dunque il risultato :

Le superficie Σ *che posseggono un sistema coniugato permanente in una deformazione continua sono tutte e sole le superficie associate nelle deformazioni infinitesime alle superficie* S *della classe*

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2}. \tag{C}$$

Ne consegue che la ricerca delle superficie Σ si riduce a quella delle superficie S della classe (C) e delle loro deformazioni infinitesime. Così i metodi di trasformazione delle superficie S sopra studiati possono tradursi in metodi di trasformazione per le superficie Σ ; in particolare partendo da una superficie S e da una sua associata Σ, ed applicando alla S le trasformazioni T_k si potranno subito determinare con *quadrature* le nuove Σ associate alle superficie S′ derivate.

È da osservare poi che per trovare le ∞^1 superficie deformate Σ' di una superficie Σ, occorre risalire dalle equazioni intrinseche delle Σ' alle loro forme effettive nello spazio, ciò che richiede l' integrazione di un sistema di RICCATI. Ma se tale integrazione è stata eseguita per una *particolare* Σ, per tutte le altre Σ colla stessa immagine sferica del

sistema coniugato permanente (u, v) la questione si risolve con quadrature, secondo le formole di PETERSON al § 295.

Osserviamo in fine alcune classi particolari di superficie Σ con sistema coniugato permanente in una deformazione continua.

a) Come primo esempio adduciamo quello, già considerato alla fine del § 295, delle superficie modanate di MONGE a sviluppabile direttrice cilindrica, le quali sono deformabili con continuità conservando le loro linee di curvatura. Le immagini sferiche di queste sono i meridiani e i paralleli, e le superficie sono tutte le associate dell'elicoide rigata ad area minima.

b) Si prenda ora come superficie S della classe (C) il paraboloide iperbolico equilatero. Le immagini sferiche delle sue asintotiche (generatrici) sono qui circoli massimi, cioè geodetiche della sfera e per ciò i simboli $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'$ per la sfera sono nulli, ossia sono nulli pel sistema coniugato (u, v) sulla superficie associata Σ gli altri $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$. Ne segue che le superficie Σ associate al paraboloide iperbolico equilatero sono superficie *di traslazione* per le quali inoltre le curve generatrici sono in piani paralleli ai piani direttori del paraboloide e per ciò ortogonali fra loro. Viceversa: *ogni superficie di traslazione con curve generatrici in piani fra loro perpendicolari è associata al paraboloide iperbolico equilatero, e quindi applicabile sopra* ∞^1 *superficie della stessa classe.*

c) Come superficie S della classe (C) prendasi una qualunque superficie pseudosferica. Le sue superficie associate Σ sono le superficie di Voss (I § 186), sulle quali le linee (u, v) corrispondenti alle linee asintotiche di S formano un sistema coniugato di linee geodetiche. Si vede quindi che :

Ogni superficie di Voss *ammette una deformazione continua ad un parametro nella quale il sistema geodetico coniugato si conserva coniugato.*

E facilmente si dimostra che questa deformazione continua della superficie di Voss corrisponde alla trasformazione di Lie della superficie pseudosferica S associata.

§ 311.

Proprietà caratteristica delle congruenze W a falde focali d'egual curvatura.

Consideriamo una congruenza W a falde focali d'egual curvatura (§ 308) e facciamone l'immagine sferica; dimostriamo che ha luogo la notevole proprietà :

Alle linee asintotiche (u, v) *delle due falde focali corrisponde sulla sfera un sistema ortogonale.*

Indicando con α, β, γ i coseni di direzione del raggio della congruenza, abbiamo

$$\alpha = \cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2, \tag{59}$$

colle analoghe per β, γ e derivando rapporto ad u, v, colle formole del § 307 risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - A\right)(-\operatorname{sen}\varphi\, X_1 + \cos\varphi\, X_2) - \sqrt{E}\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\, X_3 \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + B\right)(-\operatorname{sen}\varphi\, X_1 + \cos\varphi\, X_2) - \sqrt{G}\operatorname{sen}(\varphi-\omega)\, X_3 \end{cases} \tag{60}$$

e per ciò

$$S\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - A\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + B\right) + \sqrt{EG}\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\operatorname{sen}(\varphi-\omega)\,, \tag{61}$$

Questa espressione si annulla, a causa delle formole (53) di trasformazione, e ne risulta dimostrato il teorema.

Ma ora andiamo ad invertire la proposizione stabilendo che la proprietà osservata è *caratteristica* per le congruenze W a falde focali d'egual curvatura cioè:

Se nell'immagine sferica di una congruenza rettilinea W (*falde focali distinte*) *alle linee asintotiche delle due falde corrisponde un sistema ortogonale sulla sfera la congruenza è necessariamente a falde focali d'egual curvatura.*

Riferiamo la prima falda S alle sue asintotiche u, v, colle formole del § 307 per l'immagine sferica, e sia $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ la sua curvatura. Denotiamo inoltre con σ l'angolo dei piani focali, con λ la distanza dei punti limiti, onde sarà $\lambda\operatorname{sen}\sigma$ la distanza focale e per le coordinate x', y', z' del secondo fuoco F', avremo

$$x' = x + \lambda\operatorname{sen}\sigma\,\alpha\,, \tag{62}$$

colle altre analoghe, essendo α, β, γ date dalle (59). Sussisteranno inoltre le formole (50) per le derivate di x, y, z, e le (52) pei coseni di direzione X′, Y′, Z′ della normale alla seconda falda S′. Dalle (62) derivando, abbiamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial u}\alpha + \lambda\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial v}\alpha + \lambda\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\,, \end{cases}$$

e dobbiamo avere per ipotesi

$$S\,X'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0\,,\quad S\,X'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0\,. \tag{63}$$

Siccome dalle (52), e dalle (50), (59) e (60) risulta

$$S\,X'\frac{\partial x}{\partial u} = -\rho\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\,,\quad S\,X'\frac{\partial x}{\partial v} = \rho\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\varphi-\omega)$$

$$S\,X'\,\alpha = 0\,,\quad S\,X'\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - A\right) - \sqrt{E}\cos\sigma\operatorname{sen}(\varphi+\omega)$$

$$S\,X'\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + B\right) - \sqrt{G}\cos\sigma\operatorname{sen}(\varphi-\omega)\,,$$

le equazioni (63) si risolvono nelle due seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - A = \dfrac{\sqrt{E}\,(\rho + \lambda\cos\sigma)\operatorname{sen}(\varphi+\omega)}{\lambda\operatorname{sen}\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + B = \dfrac{\sqrt{G}\,(-\rho + \lambda\cos\sigma)\operatorname{sen}(\varphi-\omega)}{\lambda\operatorname{sen}\sigma}\,. \end{cases} \tag{64}$$

Queste formole valgono per *qualunque* congruenza rettilinea W riferita alle linee asintotiche (u, v) dell'una falda focale. Ma supponiamo ora che si abbia, conforme all'enunciato del teorema,

$$S\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0\,,$$

e in tal caso dovremo avere per la (61)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - A\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + B\right) + \sqrt{EG}\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\operatorname{sen}(\varphi-\omega) = 0\,,$$

ossia per le (64)

$$\operatorname{sen}(\varphi+\omega)\operatorname{sen}(\varphi-\omega)(\lambda^2 - \rho^2) = 0\,.$$

Il fattore sen $(\varphi+\omega)$ sen $(\varphi-\omega)$ non può annullarsi, altrimenti i raggi della congruenza sarebbero, per le (50), le tangenti alle asintotiche di un sistema, e le due falde focali coinciderebbero, caso per ora escluso; dunque si dovrà avere

$$\lambda^2 = \rho^2,$$

e siccome, pel teorema di RIBAUCOUR

$$K\,K' = \frac{1}{\lambda^4} = \frac{1}{\rho^4},$$

sarà anche $K' = -\frac{1}{\rho^2}$, $K' = K$, c. d. d.

Completiamo in fine questa ricerca considerando anche il caso delle congruenze a falde focali coincidenti e domandiamo: *Per quali superficie* S *accade che nella congruenza formata dalle tangenti alle linee asintotiche di un sistema l'immagine sferica delle asintotiche dei due sistemi sia un sistema ortogonale?*

Supponiamo che la congruenza in discorso sia quella delle tangenti alle asintotiche u=cost^{te} della S, le quali supponiamo naturalmente non rettilinee. Per le formole (50) i coseni di direzione α, β, γ del raggio della congruenza saranno

$$\alpha = \cos\omega\, X' + \operatorname{sen}\omega\, X_2, \text{ ecc.}$$

onde le (60), essendo qui $\varphi = \omega$, diventano

$$(65)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial u} - A\right)(-\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \cos\omega\, X_2) - \sqrt{E}\operatorname{sen}(2\omega)\, X_3 \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v} + B\right)(-\operatorname{sen}\omega\, X_1 + \cos\omega\, X_2). \end{cases}$$

Per ciò la condizione $S\,\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0$ ci dà

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial u} - A\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial v} + B\right) = 0,$$

e siccome il secondo fattore $\frac{\partial\omega}{\partial v} + B$ non può annullarsi, altrimenti per la seconda delle (65), sarebbero α, β, γ funzioni di u, cioè le asintotiche

u= cost^{te} della S rettilinee, avremo necessariamente $\frac{\partial\omega}{\partial u} = A$, ossia per la (47)

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} = 0\,.$$

Dunque deve essere ρ funzione di u soltanto, e viceversa se ciò accade, la nostra condizione è soddisfatta, onde concludiamo: *Le superficie* S *domandate sono tutte e sole quelle in cui le asintotiche* u = cost^{te} *sono curve a torsione costante, cioè le superficie della classe* 1) § 306.

In particolare per le superficie pseudosferiche la circostanza richiesta si verifica per ambedue le congruenze formate dalle tangenti alle linee asintotiche.

CAPITOLO XIX (*)

Deformazione delle congruenze di sfere e rotolamento di superficie applicabili.

Congruenze di sfere. - Le due falde dell'inviluppo e calcolo dei loro elementi. - Congruenze di sfere di RIBAUCOUR sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura). - Rotolamento di superficie applicabili. - Direzioni cinematicamente coniugate e le loro proprietà. - Superficie ed inviluppi di rotolamento. - Il piano e la sfera come superficie di rotolamento. - Formole risolutive del CALÒ. - Le congruenze rettilinee di rotolamento e le loro proprietà. - La superficie di PETERSON. -

§ 312.

Congruenze di sfere.

Consideriamo una doppia infinità di sfere, distribuite con legge continua nello spazio, che diremo anche una *congruenza di sfere*. Per definire analiticamente una tale congruenza assegneremo le coordinate ortogonali x, y, z del centro della sfera mobile ed il suo raggio R in funzione di due

dovrà avere caratteristica 2. Per questa superficie dei centri S_0 adotteremo le consuete notazioni coi doppi indici, e così le due forme fondamentali di S_0 saranno denotate con

$$(1) \qquad S\,dx^2 = a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

$$(2) \qquad -S\,dx\,dX = c_{11}\,du^2 + 2c_{12}\,du\,dv + c_{22}\,dv^2,$$

ed i coefficienti a_{ik}, c_{ik} saranno legati dalla equazione di GAUSS

$$(A) \qquad \frac{c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} = K \ , \ (K \text{ curvatura di } S_0)$$

e dalle due equazioni di CODAZZI

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial c_{11}}{\partial v} - \dfrac{\partial c_{12}}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} c_{11} + \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] c_{12} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} c_{22} \\ \dfrac{\partial c_{22}}{\partial u} - \dfrac{\partial c_{12}}{\partial v} = -\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} c_{11} + \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] c_{12} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} c_{22} \ . \end{cases}$$

Varranno inoltre le formole fondamentali

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + c_{11}\,X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + c_{12}\,X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + c_{22}\,X \end{cases}$$

e le altre

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\left\{ (A_{11}\,c_{11} + A_{12}\,c_{12}) \dfrac{\partial x}{\partial u} + (A_{21}\,c_{11} + A_{22}\,c_{12}) \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\left\{ (A_{11}\,c_{21} + A_{12}\,c_{22}) \dfrac{\partial x}{\partial u} + (A_{21}\,c_{21} + A_{22}\,c_{22}) \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\} \ , \end{cases}$$

avendo posto

$$(3) \quad A_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} \ , \ A_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} \ , \ A_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} \ .$$

Domandiamo ora di trovare la superficie *inviluppo* della congruenza di sfere. Per questo bisognerà segnare, sopra ogni sfera (u,v) della congruen-

za *un punto* P in modo che la superficie Σ luogo di P tocchi in P la sfera Indichiamo con α, β, γ i coseni di direzione del raggio PO diretto verso il centro $O \equiv (x, y, z)$ e con ξ, η, ζ le coordinate di P, onde avremo

$$\xi = x - R\alpha \ , \ \eta = y - R\beta \ , \ \zeta = z - R\gamma. \tag{4}$$

Converrà determinare α, β, γ in guisa da soddisfare alla relazione

$$S\alpha^2 = 1 \tag{5}$$

e alle altre due

$$S\,\alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0 \ , \ S\,\alpha \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0 \, , \tag{6}$$

le quali esprimono che la normale alla superficie Σ, definita parametricamente dalle (4), coincide col raggio PO. Ora avendosi dalla (5)

$$S\,\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \quad S\,\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

e dalle (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} - \alpha \dfrac{\partial R}{\partial u} - R \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v} - \alpha \dfrac{\partial R}{\partial v} - R \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} \, , \end{cases}$$

le (6) equivalgono alle altre

$$S\,\alpha \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial u} \ , \ S\,\alpha \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial v}. \tag{6*}$$

Se poniamo i valori α, β, γ sotto la forma

$$\begin{cases} \alpha = A \dfrac{\partial x}{\partial u} + B \dfrac{\partial x}{\partial v} + C\,X \\ \beta = A \dfrac{\partial y}{\partial u} + B \dfrac{\partial y}{\partial v} + C\,Y \\ \gamma = A \dfrac{\partial z}{\partial u} + B \dfrac{\partial z}{\partial v} + C\,Z \, , \end{cases}$$

dovremo determinare i coefficienti A, B, C dalle condizioni (5), (6*). Queste ultime dànno

$$\begin{cases} a_{11} A + a_{12} B = \dfrac{\partial R}{\partial u} \\ a_{21} A + a_{22} B = \dfrac{\partial R}{\partial v} \, , \end{cases} \tag{7}$$

da cui risolvendo abbiamo

$$\begin{cases} A = A_{11} \dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{12} \dfrac{\partial R}{\partial v} \\ B = A_{12} \dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22} \dfrac{\partial R}{\partial v} \end{cases} \tag{7*}$$

poi dalla (5)

$$a_{11} A^2 + 2\, a_{12} A B + a_{22} B^2 = 1 - C^2,$$

ovvero

$$(a_{11} A + a_{12} B) A + (a_{12} A + a_{22} B) B = 1 - C^2.$$

Ne segue per le (7), (7*)

$$A_{11} \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 + 2 A_{12} \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v} + A_{22} \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 = 1 - C^2,$$

che possiamo scrivere

$$\Delta_1 R = 1 - C^2,$$

il parametro differenziale $\Delta_1 R$ essendo calcolato rispetto alla forma quadratica (1). Abbiamo dunque

$$C = \pm \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, , \tag{8}$$

e sostituendo i valori (7*) di A, B in α, β, γ, ne risultano le formole

$$\begin{cases} \alpha = \nabla (x, R) \pm \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, X \\ \beta = \nabla (y, R) \pm \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, Y \\ \gamma = \nabla (z, R) \pm \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, Z \, , \end{cases}$$

i parametri differenziali misti $\Delta (x, R)$, ecc. essendo calcolati rispetto alla (1). Le formole (4) diventano così:

$$\begin{cases} \xi = x - R \nabla (x, R) \mp R \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, X \\ \eta = y - R \nabla (y, R) \mp R \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, Y \\ \zeta = z - R \nabla (z, R) \mp R \sqrt{1 - \Delta_1 R} \, . \, Z \end{cases} \tag{10}$$

e forniscono le equazioni parametriche dell'inviluppo di sfere composto di due falde, in generale distinte, che diremo Σ, $\overline{\Sigma}$. Queste saranno reali distinte quando sia $\Delta_1 R < 1$, immaginarie coniugate per $\Delta_1 R > 1$ e reali coincidenti quando $\Delta_1 R = 1$. In quest'ultimo caso sulla superficie S dei centri le linee R=cost^{te} sono geodeticamente parallele ed è R l'arco delle geodetiche ortogonali, contato a partire da una linea iniziale R=cost^{te}.

Distinguendo le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo e denotando le quantità relative alla seconda con un soprassegno, avremo

$$(9^*) \qquad \begin{cases} \alpha = \nabla(x, R) + \sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.\,X \\ \overline{\alpha} = \nabla(x, R) - \sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.\,X \end{cases}$$

$$(10^*) \qquad \begin{cases} \xi = x - R\,\nabla(x, R) - R\sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.\,X \\ \overline{\xi} = x - R\,\nabla(x, R) + R\sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.\,X\,. \end{cases}$$

Nel seguito scriveremo le sole formole relative alla prima falda Σ, dalle quali si avranno subito le corrispondenti per $\overline{\Sigma}$, cangiando dappertutto il segno del radicale $\sqrt{1 - \Delta_1 R}$ nell'opposto. Dalle formole

$$\frac{\overline{\xi} - \xi}{2} = R\sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.\,X\,, \quad \frac{\overline{\xi} + \xi}{2} = x - R\,\nabla\,(x, R)$$

risulta che: *L'inviluppo della congruenza di sfere consta in generale di due falde* Σ, $\overline{\Sigma}$. *Ogni sfera della congruenza di centro* O *tocca le due falde* Σ, $\overline{\Sigma}$ *in due punti* $\overline{P} \equiv (\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta})$ $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *corrispondenti, che sono simmetrici rispetto al piano tangente in* O *alla superficie* S *luogo dei centri.*

Nel caso eccezionale $\Delta_1 R = 1$ le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ coincidono in una *evolvente* della superficie dei centri, colle equazioni parametriche

$$\xi = x - R\,\nabla(x, R), \text{ ecc.},$$

che ha per normali le tangenti alle geodetiche ortogonali alle R = cost^{te}, ed aumentando R di una costante si avrà l'intera serie delle evolventi parallele. Perciò questo caso $\Delta_1 R = 1$ s'intenderà nel seguito generalmente escluso.

§. 313.

Deformazione delle congruenze di sfere. Nuovo aspetto dei teoremi di Beltrami e Dupin.

Consideriamo la prima falda Σ dell'inviluppo di sfere e indichiamo con ω_1, ω_2, σ gli angoli che la direzione (α, β, γ) della normale a Σ forma rispettivamente colle tangenti sulla superficie S dei centri alle linee coordinate v =cost^{te}, u=cost^{te} rispettivamente e colla normale alla S medesima, onde avremo

$$\cos\omega_1 = S\,\frac{\alpha}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial x}{\partial u}\,, \quad \cos\omega_2 = S\,\frac{\alpha}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial x}{\partial v}\,, \quad \cos\sigma = S\,\alpha\,X\,,$$

cioè per le (9):

$$(11) \qquad \cos\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial R}{\partial u}\,, \quad \cos\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial R}{\partial v}\,, \quad \cos\sigma = \sqrt{1 - \Delta_1 R}\,.$$

In queste formole entrano a destra elementi che dipendono solo dalla prima forma fondamentale (I) della S e non variano quindi per flessione della superficie S dei centri. Per ciò se questa superficie S si deforma senza trasportando invariabilmente le sfere, gli angoli ω_1, ω_2, σ non variano, cioè il raggio OP che dal punto O di S va al punto P di contatto della sfera di centro O colla prima falda Σ dell'inviluppo rimane *invariabilmente legato* alla superficie S (agli elementi del suo piano tangente) e lo stesso vale naturalmente del raggio simmetrico $O\overline{P}$ per la seconda falda $\overline{\Sigma}$. Dunque: *Se la congruenza di sfere si deforma comunque (per flessione della superficie* S *dei centri) i due punti* P, $\overline{P}$, *ove ciascuna sfera tocca rispettivamente le due falde dell'inviluppo, serbano sulla sfera stessa una posizione invariabile.*

In questo risultato è incluso il teorema di Beltrami (I, § 180) relativo alla deformazione delle congruenze rettilinee normali. E infatti se dai punti O della S emanano i raggi OP di una congruenza normale limitati in P ad una delle superficie ortogonali Σ, le sfere di centro O e raggi OP hanno Σ per prima falda dell'inviluppo, e la congruenza resta per ciò normale comunque deformando S, ciò che costituisce appunto il teorema di Beltrami. Ma ne segue anche il teorema di Dupin relativo alla riflessione delle congruenze normali, poichè infatti i raggi $O\overline{P}$ normali alla seconda falda $\overline{\Sigma}$ sono precisamente i raggi riflessi degli incidenti OP.

Possiamo anche dedurre nuovamente dalle formole precedenti il teorema di MALUS relativo alla rifrazione (I, § 180). La terza delle (11) si scrive infatti

$$\operatorname{sen}\sigma = \sqrt{\Delta_1 R} \tag{12}$$

e dimostra che se si alterano i raggi R delle sfere nel rapporto *costante* n, per la nuova congruenza di sfere coi raggi $R' = n\,R$, indicando con accenti le quantità relative, avremo per la (12)

$$\operatorname{sen}\sigma' = n \operatorname{sen}\sigma,$$

mentre le (9) dànno

$$\alpha' = n\,\nabla(x, R) + \sqrt{1 - n^2\,\Delta_1 R}\,.\,X,$$

ossia

$$\alpha' = n\,\alpha + (\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2\sigma} - n\cos\sigma)\,X.$$

Queste formole dimostrano che i raggi OP, OP′ giacciono in un piano colla normale alla S, ed avendosi $\frac{\operatorname{sen}\sigma'}{\operatorname{sen}\sigma} = n$, il secondo è il raggio rifratto del primo coll'indice n di rifrazione, ciò che dà appunto il teorema di MALUS.

§ 314.

Formole per le derivate dei coseni α, β, γ.

Per procedere ora al calcolo degli elementi fondamentali delle due falde dell'inviluppo conviene anzi tutto che formiamo le derivate rapporto ad u e v dei coseni α, β, γ dati dalle (9), nella qual cosa ci limiteremo al calcolo per la prima falda Σ, le formole per l'altra $\overline{\Sigma}$ deducendosene col cangiare il segno del radicale $\sqrt{1 - \Delta_1 R}$.

Per questo ricorriamo alle formole (α), (β) § 312 ed alle formole seguenti che risultano dalle generali (E), (E*) del § 40 (I pag. 100)

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\nabla(x, R)}{\partial u} = (A_{11} R_{11} + A_{21} R_{12})\dfrac{\partial x}{\partial u} + (A_{12} R_{11} + A_{22} R_{12})\dfrac{\partial x}{\partial v} + \\ \qquad + \left\{\left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)c_{11} + \left(A_{12}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)c_{12}\right\}.X \\ \dfrac{\partial\nabla(x, R)}{\partial v} = (A_{11} R_{21} + A_{21} R_{22})\dfrac{\partial x}{\partial u} + (A_{12} R_{21} + A_{22} R_{22})\dfrac{\partial x}{\partial v} + \\ \qquad + \left\{\left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)c_{21} + \left(A_{12}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)c_{22}\right\}.X \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Delta_1 R}{\partial u} = \left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)R_{11} + \left(A_{12}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)R_{12} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Delta_1 R}{\partial v} = \left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)R_{21} + \left(A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)R_{22}, \end{cases}$$

dove R_{11}, $R_{12} = R_{21}$, R_{22} significano le derivate seconde covarianti di R.

Eseguendo le derivazioni delle (9*) con queste formole si otterranno manifestamente formole del tipo:

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \lambda\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu\dfrac{\partial x}{\partial v} + \nu X \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \lambda'\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu'\dfrac{\partial x}{\partial v} + \nu' X, \end{cases}$$

colle analoghe, per gli altri due assi, i coefficienti λ, μ, ν ; λ', μ', ν' restando gli stessi. Per scriverne i valori effettivi introduciamo tre nuovi coefficienti $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ definiti dalle formole:

$$(II)\quad \tau_{11} = R_{11} - c_{11}\sqrt{1 - \Delta_1 R}\,,\ \tau_{12} = R_{12} - c_{12}\sqrt{1 - \Delta_1 R}\,,\ \tau_{22} = R_{22} - c_{22}\sqrt{1 - \Delta_1 R},$$

e troveremo

$$(III)\quad \begin{cases} \lambda = A_{11}\tau_{11} + A_{12}\tau_{12},\ \mu = A_{21}\tau_{11} + A_{22}\tau_{12} \\ \nu = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}\left\{\left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{12}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)\tau_{11} + \left(A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)\tau_{12}\right\} \end{cases}$$

$$(III^*)\quad \begin{cases} \lambda' = A_{11}\tau_{12} + A_{12}\tau_{22},\ \mu' = A_{21}\tau_{12} + A_{22}\tau_{22} \\ \nu' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}\left\{\left(A_{11}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{12}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)\tau_{21} + \left(A_{21}\dfrac{\partial R}{\partial u} + A_{22}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)\tau_{22}\right\}. \end{cases}$$

Facciamo subito una prima applicazione di queste formole a ritrovare nuovamente la prima e la seconda equazione del problema dell'applicabilità stabilite ai §§ 133, 134 (I pag. 356, 360).

Domandiamo in primo luogo se, assegnato il raggio $R = R(u, v)$ della sfera generica della congruenza, esiste una deformazione della superficie S dei centri dopo la quale tutte le sfere vengano a toccare un piano fisso, a cui si ridurrà la falda Σ dell'inviluppo. Per questo occorre e basta che c_{11}, c_{12}, c_{22} assumano tali valori, che diremo D_1, D'_1, D''_1 pei quali α, β, γ si

riducano a costanti, cioè si annullino λ, μ, ν ; λ', μ', ν', ovvero per le (III), (III*) τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}. Dalle (II) risulta quindi

$$13 \qquad D=\frac{R_{11}}{\sqrt{1-\Delta_1 R}}\ ,\quad D'=\frac{R_{12}}{\sqrt{1-\Delta_1 R}}\ ,\quad D''=\frac{R_{22}}{\sqrt{1-\Delta_1 R}},$$

e siccome D_1 D', D'' debbono soddisfare all'equazione di GAUSS

$$\frac{D D''-D'^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=K,$$

ne risulta per R l'equazione del secondo ordine

$$\Delta_{22} R = K(1-\Delta_1 R),$$

la quale è appunto la prima equazione della applicabilità (I § 133). Ma viceversa se R ne è una soluzione, i valori (13) di D, D', D'' soddisfano anche (I § 134) le equazioni di CODAZZI e, dopo la deformazione, le sfere della congruenza vengono a toccare un piano fisso Σ.

In secondo luogo domandiamo se : *esiste una deformazione della* S *dopo la quale le sfere vengano a passare per un punto fisso ?*

Per questo dovrà una falda dell' inviluppo, p. e. la Σ, ridursi ad un punto, cioè le tre funzioni

$$\xi = x - R\alpha,\ \eta = y - R\beta,\ \zeta = z - R\gamma$$

dovranno ridursi a costanti. Esprimendo adunque che si annullano le loro derivate avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}-R\left(\lambda\dfrac{\partial x}{\partial u}+\mu\dfrac{\partial x}{\partial v}+\nu X\right)-\dfrac{\partial R}{\partial u}\left(A\dfrac{\partial x}{\partial u}+B\dfrac{\partial x}{\partial v}+CX\right)=0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}-R\left(\lambda'\dfrac{\partial x}{\partial u}+\mu'\dfrac{\partial x}{\partial v}+\nu' X\right)-\dfrac{\partial R}{\partial v}\left(A\dfrac{\partial x}{\partial u}+B\dfrac{\partial x}{\partial v}+CX\right)=0 \end{cases}$$

colle analoghe per gli altri due assi. Qui dobbiamo annullare separatamente i coefficienti di $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ e quelli di X, onde avremo :

$$(14) \quad \begin{cases} R\lambda + A\dfrac{\partial R}{\partial u}=1 \\ R\mu + B\dfrac{\partial R}{\partial u}=0 \end{cases} \qquad (14^*) \quad \begin{cases} R\lambda' + A\dfrac{\partial R}{\partial v}=0 \\ R\mu' + B\dfrac{\partial R}{\partial v}=1 \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} R\nu + C\dfrac{\partial R}{\partial u}=0, \\ R\nu' + C\dfrac{\partial R}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Alle (14, (14*) possiamo sostituire quelle che se ne ottengono moltiplicando le due di ciascuna coppia per a_{11}, a_{12}, poi per a_{12}, a_{22} e ciascuna volta sommando. Ma per le (7) § 312 e per le relazioni

$$(16) \quad \begin{cases} a_{11}\lambda + a_{12}\mu = \tau_{11} & a_{11}\lambda' + a_{12}\mu' = \tau_{12} \\ a_{12}\lambda + a_{22}\mu = \tau_{12} & a_{12}\lambda' + a_{22}\mu' = \tau_{22}, \end{cases}$$

le (14), (14*) equivalgono così alle tre relazioni seguenti

$$(17) \qquad R\tau_{11}=a_{11}-\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\ ,\ R\tau_{12}=a_{12}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\ ,\ R\tau_{22}=a_{22}-\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\ ,$$

e con queste risultano anche soddisfatte le (15, come risulta dalle (III), (III*) e dall'essere $C=\sqrt{1-\Delta_1 R}$. Dalle (17), paragonate colle (II), indicando D, D', D'' i valori che debbono assumere c_{11}, c_{12}, c_{22}, si ottengono le formole

$$18) \quad D=\frac{RR_{11}-\left[a_{11}-\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}},\ D'=\frac{RR_{12}-\left[a_{12}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\right]}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}},\ D''=\frac{RR_{22}-\left[a_{22}-\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\right]}{R\sqrt{1-\Delta_1 R}},$$

le quali tengono ora il luogo delle (13). L'equazione di GAUSS si traduce per la R nella equazione del secondo ordine

$$19) \quad R^2\Delta_{22}R-R\Delta_2 R+R\frac{\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 R_{11}-2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}R_{12}+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 R_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=(1-\Delta_1 R)(KR^2-1),$$

la quale è, sotto altra forma, la seconda equazione dell' applicabilità § 82 (I pag. 220), col mutamento di funzione incognita $\rho=\frac{1}{2}R^2$. D' altronde, se R è una soluzione della (19), i valori (18) di D, D', D'' verificano anche le equazioni di CODAZZI, come già si è indicato al § 134 (I pag. 360). Ne concludiamo : *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una deformazione delle congruenze di sfere dopo la quale tutte le sfere vengano a toccare un piano fisso, ovvero a passare per un punto fisso è che* R *soddisfi rispettivamente la prima o la seconda equazione dell'applicabilità.*

Nel primo caso la configurazione della superficie S dei centri è determinata intrinsecamente dalle (13) e la S si ha per quadrature; nel secondo caso le equazioni intrinseche della S sono date dalle (18), e per trovare la S occorre integrare un'equazione di RICCATI.

§ 315.

Calcolo degli elementi dell'inviluppo Σ.

Introduciamo ora la *terza* fondamentale dell'inviluppo Σ ponendo

$$S\, d\,\alpha^2 = e\, du^2 + 2\, f\, du\, dv + g\, dv^2,$$

e dalla (I) avremo

$$\begin{cases} e = a_{11}\,\lambda^2 + 2a_{12}\,\lambda\mu + a_{22}\,\mu^2 + \nu^2 \\ f = a_{11}\,\lambda\lambda' + a_{12}\,(\lambda\mu' + \mu\lambda') + a_{22}\,\mu\mu' + \nu\nu' \\ g = a_{11}\,\lambda'^2 + 2\,a_{12}\,\lambda'\mu' + a_{22}\,\mu'^2 + \nu'^2, \end{cases}$$

od anche per le (16)

$$\begin{cases} e = \tau_{11}\,\lambda + \tau_{12}\,\mu + \nu^2 \\ f = \tau_{11}\,\lambda' + \tau_{12}\,\mu' + \nu\nu' = \tau_{12}\,\lambda + \tau_{22}\,\mu + \nu\nu' \\ g = \tau_{12}\,\lambda' + \tau_{22}\,\mu' + \nu'^2. \end{cases}$$

Sostituendo in queste i valori effettivi (III), (III*) di λ, μ, ν ; λ', μ', ν' otteniamo :

$$\begin{cases} e = A_{11}\tau_{11}^2 + 2\,A_{12}\,\tau_{11}\,\tau_{12} + A_{22}\,\tau_{12}^2 + \dfrac{1}{1-\Delta_1 R}\,(A\,\tau_{11} + B\,\tau_{12})^2 \\ f = A_{11}\,\tau_{11}\,\tau_{12} + A_{12}\,(\tau_{11}\,\tau_{22} + \tau_{12}^2) + A_{22}\,\tau_{12}\,\tau_{22} + \dfrac{(A\,\tau_{11} + B\,\tau_{12})\;(A\,\tau_{12} + B\,\tau_{22})}{1-\Delta_1 R} \\ g = A_{11}\,\tau_{12}^2 + 2A_{12}\,\tau_{12}\,\tau_{22} + A_{22}\,\tau_{22}^2 + \dfrac{1}{1-\Delta_1 R}\,(A\,\tau_{12} + B\,\tau_{22})^2. \end{cases}$$

Ora, se poniamo

$$(20) \qquad E_0 = a_{11} - \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2,\quad F_0 = a_{12} - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v},\quad G_0 = a_{22} - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2$$

onde segue

$$E_0\,G_0 - F_0^2 = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2)\,(1 - \Delta_1\,R),$$

le formole precedenti per e, f, g diventano

$$\begin{cases} e = \dfrac{G_0\,\tau_{11}^2 - 2\,F_0\,\tau_{11}\,\tau_{12} + E_0\,\tau_{12}^2}{E_0\,G_0 - F_0^2} \\ f = \dfrac{G_0\,\tau_{11}\,\tau_{12} - F_0\,(\tau_{11}\,\tau_{22} + \tau_{12}^2) + E_0\,\tau_{12}\,\tau_{22}}{E_0\,G_0 - F_0^2} \\ g = \dfrac{G_0\,\tau_{12}^2 - 2\,F_0\,\tau_{12}\,\tau_{22} + E_0\,\tau_{22}^2}{E_0\,G_0 - F_0^2}, \end{cases}$$

e possiamo dare loro la forma :

$$(21) \qquad \begin{cases} e = \dfrac{E_0\,\tau_{22} + G_0\,\tau_{11} - 2\,F_0\,\tau_{12}}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,\tau_{11} - \dfrac{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau_{12}^2}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,E_0 \\ f = \dfrac{E_0\,\tau_{22} + G_0\,\tau_{11} - 2\,F_0\,\tau_{12}}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,\tau_{12} - \dfrac{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau_{12}^2}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,F_0 \\ g = \dfrac{E_0\,\tau_{22} + G_0\,\tau_{11} - 2\,F_0\,\tau_{12}}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,\tau_{22} - \dfrac{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau_{12}^2}{E_0\,G_0 - F_0^2}\,G_0. \end{cases}$$

Queste formole ci portano a introdurre come forme differenziali fondamentali per la congruenza di sfere (in riguardo alla prima falda Σ dell'inviluppo) le due

$$(IV) \qquad \begin{cases} F = E_0\,du^2 + 2\,F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2 \\ \Phi = \tau_{11}\,du^2 + 2\,\tau_{12}\,du\,dv + \tau_{22}\,dv^2, \end{cases}$$

delle quali la prima non è che il ds^2 della superficie dei centri diminuito del quadrato del differenziale di R, ed è una forma definita nel caso nostro $\Delta_1\,R < 1$, perchè $E_0\,G_0 - F_0^2 > 0$; la seconda è una combinazione lineare invariantiva del differenziale secondo covariante di R e della $D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ appartenente alla superficie dei centri. Secondo le (21) la *terza* forma fondamentale della prima falda Σ è combinata linearmente dalle due F, Φ mediante la formula

$$(V) \qquad e du^2 + 2\,f du\,dv + g dv^2 = -\,K_0\,F - H_0\,\Phi,$$

essendo

$$(22)\qquad \begin{cases} K_0 = \dfrac{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}{E_0 G_0 - F_0^2} \\ H_0 = \dfrac{2 F_0 \tau_{12} - E_0 \tau_{22} - G_0 \tau_{11}}{E_0 G_0 - F_0^2} \end{cases}$$

i due invarianti assoluti simultanei di F e Φ. (*) Dalle formole (21) discendono subito le altre che importa notare :

$$(23)\qquad e\,g - f^2 = \frac{(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2)^2}{E_0 F_0 - F_0^2}$$

$$(24)\qquad e\,\tau_{22} - 2 f \tau_{12} + g \tau_{11} = \frac{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}{E_2 G_2 - F_0^2}(E_0 \tau_{22} - 2 F_0 \tau_{12} + G_0 \tau_{11}).$$

ed anche

$$(23^*)\qquad \frac{e\,g - f^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = K_0^2$$

$$(24^*)\qquad \frac{2 f \tau_{12} - e\,\tau_{22} - g\,\tau_{11}}{E_0 G_0 - F_0^2} = H_0 K_0.$$

In fine calcoliamo i coefficienti della *seconda* forma fondamentale dell'inviluppo Σ, che indicheremo con Δ, Δ', Δ'', ponendo

$$\Delta\, du^2 + 2\,\Delta'\, du\, dv + \Delta''\, dv^2 = -\,S\, d\alpha\, d\xi.$$

Essendo

$$d\xi = dx - R d\alpha - \alpha\, dR,$$

questa coincide con

$$R\,S\, d\alpha^2 - S\, dx\, d\alpha,$$

onde risulta

$$\Delta = R\,e - (a_{11}\lambda + a_{12}\mu),\ \Delta' = R f - (a_{12}\lambda + a_{22}\mu)\ \Delta' = R f - (a_{11}\lambda' + a_{12}\mu',)$$

$$\Delta'' = R g - (a_{12}\lambda' + a_{22}\mu'),$$

ossia per le (16)

$$(25)\qquad \Delta = R\,e - \tau_{11},\ \Delta' = R f - \tau_{12},\ \Delta = R g - \tau_{22}$$

(*) Si osserverà che nel caso particolare di R costante la F e la — Φ diventano le due forme fondamentali della superficie S dei centri e la (V) si riduce alla formola fondamentale della rappresentazione sferica (I pag. 225).

Così anche $\Delta\, du^2 + 2\,\Delta'\, du\, dv + \Delta''\, dv^2$ è una combinazione lineare delle due forme (IV), come

$$e\, d\, u^2 + 2\, f\, du\, dv + g\, dv^2.$$

Il Jacobiano di queste due forme, eguagliato a zero, dà l'equazione differenziale delle linee di curvatura sopra Σ, onde risulta :

L'equazione differenziale delle linee di curvatura sopra la falda Σ si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme fondamentali (IV) :

$$(VI)\qquad \begin{vmatrix} E_0\, du + F_0\, dv & F_0\, du + G_0\, dv \\ \tau_{11}\, du + \tau_{12}\, dv & \tau_{12}\, du + \tau_{22}\, dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ed ora calcoliamo i raggi principali r_1, r_2 di curvatura dell'inviluppo Σ, supposto che non si riduca ad una sviluppabile cioè non si annulli $e\,g - f^2$, *ossia per la* (23) *che sia* $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 \neq 0$.

Per le formole di rappresentazione sferica (I pag. 236)

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{2 f\Delta' - e\Delta'' - g\Delta}{eg - f^2} \\ r_1 r_2 = \dfrac{\Delta\Delta'' - \Delta'^2}{eg - f^2}, \end{cases}$$

osservando le (25), (24) ne deduciamo :

$$(VII)\qquad \begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{E_0\tau_{22} - 2 F_0 \tau_{12} + G_0\tau_{11}}{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2} - 2\,R \\ r_1 r_2 = R^2 - \dfrac{E_0\tau_{22} - 2 F_0\tau_{12} + G_0\tau_{11}}{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2} R + \dfrac{E_0 G_0 - F_0^2}{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}. \end{cases}$$

Nel seguito riprenderemo per la superficie S dei centri le notazioni abituali e così scriveremo

$$E, F, G \text{ in luogo di } a_{11}, a_{12}, a_{22}$$
$$D, D', D'' \text{ in luogo di } c_{11}, c_{12}, c_{22},$$

onde il significato di E_0, F_0, G_0 ; τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} nelle precedenti sarà dato dalle formole

$$(26)\quad \begin{cases} E_0 = E - \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 , \quad F_0 = F - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} , \quad G_0 = G - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 \\ \tau_{11} = R_{11} - D\sqrt{1-\Delta_1 R} , \quad \tau_{12} = R_{12} - D'\sqrt{1-\Delta_1 R} , \quad \tau_{22} = R_{22} - D''\sqrt{1-\Delta_1 R} . \end{cases}$$

§ 316.

Congruenze di sfere di Ribaucour.

In una congruenza di sfere, *le cui falde* Σ, $\overline{\Sigma}$ *dell'inviluppo supponiamo distinte* ($\Delta_1 R < 1$), fra i punti di Σ, $\overline{\Sigma}$ è stabilita una corrispondenza ponendo come corrispondenti i due punti P, $\overline{P}$ di contatto di una medesima sfera con Σ, $\overline{\Sigma}$. Particolarmente importante è il caso, considerato da Ribaucour, in cui sopra Σ, $\overline{\Sigma}$ si corrispondono le linee di curvatura; si dirà allora che la congruenza di sfere è una *congruenza di* Ribaucour. Affinchè ciò accada è necessario e basta che le due equazioni differenziali per le linee di curvatura sopra Σ, $\overline{\Sigma}$ coincidano. Ma queste equazioni si scrivono, per la (VI), rispettivamente

$$(27)\quad \begin{vmatrix} E_0\,du + F_0\,dv, & F_0\,du + G_0\,dv \\ R_{11}du + R_{12}dv, & R_{12}du + R_{22}dv \end{vmatrix} - \sqrt{1-\Delta_1 R} \begin{vmatrix} E_0 du + F_0 dv, & F_0 du + G_0 dv \\ D du + D' dv, & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0$$

$$(27^*)\quad \begin{vmatrix} E_0\,du + F_0\,dv, & F_0\,du + G_0\,dv \\ R_{11}du + R_{12}dv, & R_{12}du + R_{22}dv \end{vmatrix} + \sqrt{1-\Delta_1 R} \begin{vmatrix} E_0 du + F_0 dv, & F_0 du + G_0 dv \\ D du + D' dv, & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0.$$

e la circostanza voluta si verifica quindi allora soltanto che le tre forme

$$E_0 du^2 + 2F_0 du\,dv + G_0 dv^2, \quad R_{11}du^2 + 2R_{12}du\,dv + R_{22}dv^2, \quad D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2$$

sono linearmente dipendenti, cioè quando è nullo il determinante dei coefficienti. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza di sfere sia di Ribaucour *è data dall'annullarsi del determinante*

$$(VIII)\quad \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{22} \\ E_0 & F_0 & G_0 \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si vede di qui che esistono infinite congruenze di Ribaucour *con assegnata superficie* S *dei centri;* basta invero scegliere per $R = R(u, v)$ una soluzione della equazione (VIII) del secondo ordine.

Ora osserviamo che il verificarsi della (VIII) è suscettibile di un'altra interpretazione geometrica, poichè ciò equivale all'annullarsi dell'invariante simultaneo della forma quadratica nel primo membro della (27) (ovvero della (27*)) e della seconda forma della S

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 ;$$

per ciò in tal caso alle linee di curvatura di Σ (di $\overline{\Sigma}$) corrisponde sulla superficie S dei centri un sistema coniugato (e viceversa). (Cf. (I §§ 77 per 1.ma). Dunque: *una congruenza di sfere, a falde distinte* Σ, $\overline{\Sigma}$ *dell'inviluppo, è una congruenza di* Ribaucour *allora ed allora soltanto quando alle linee di curvatura dell'una (e quindi dell'altra) falda corrisponde sulla superficie dei centri un sistema coniugato.*

Si può enunciare questo risultato sotto l'altra forma, che corrisponde ad un teorema di Dupin: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le sviluppabili di una congruenza normale si conservino per riflessione sopra una superficie* S *è che intercettino sopra* S *un sistema coniugato.*

Le congruenze di sfere nelle quali tutte le sfere toccano un piano fisso, ovvero passano per un punto fisso (più in generale toccano una sfera fissa) sono tutte congruenze di Ribaucour. Questo risulta subito dalle formole (13) e (18), le quali dimostrano che allora nel determinante (VIII) la terza linea è una combinazione delle altre due e quindi il determinante si annulla. Abbiamo quindi: *Le sfere tangenti ad una superficie* $\overline{\Sigma}$ *qualunque, e ad una sfera fissa (o piano), tracciano una rappresentazione di* $\overline{\Sigma}$ *sulla sfera (piano) nella quale alle linee di curvatura di* $\overline{\Sigma}$ *corrisponde un sistema ortogonale sulla sfera (piano).*

Alla classe delle congruenze di Ribaucour appartengono anche tutte quelle di *raggio* R *costante*, poichè allora sulle due falde parallele ed equidistanti dalla superficie S dei centri si corrispondono le linee di curvatura, e corrispondono a quelle di S. (*).

Un'altra osservazione ovvia ma che permette di costruire quante si vogliono congruenze di Ribaucour è la seguente: *Ogni inversione per raggi vettori reciproci cangia una congruenza di sfere di* Ribaucour *in un'altra tale congruenza.*

(*) Analiticamente da ciò che $R = \text{cost}^{te}$ è una soluzione della (VIII).

§ 317.

Trasformazioni di Combescure delle congruenze di sfere di Ribaucour.

Ora, supposta data la superficie S dei centri, domandiamo di caratterizzare sopra S quei sistemi coniugati (u,v) che corrispondono alle linee di curvatura delle due falde in una congruenza di sfere di RIBAUCOUR coi centri su S. Scelto questo sistema (u, v) a sistema coordinato, sarà $D' = 0$, e le due forme quadratiche fondamentali (IV) della congruenza saranno ridotte simultaneamente a forma ortogonale, cioè avremo insieme

$$F_0 = 0, \quad R_{12} = 0.$$

Dunque : *i sistemi coniugati* (u, v) *richiesti sopra una superficie* S *sono quelli pei quali ammettono soluzioni comuni le due equazioni simultanee, del* 1° *e del* 2° *ordine*

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial v} = F \\ R_{12} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial R}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial R}{\partial v} = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Dopo ciò è facile vedere che le condizioni per tali sistemi coniugati *dipendono solo dalla loro immagine sferica*, che cioè soddisfatte per la S, sono anche soddisfatte per qualunque altra superficie S′ avente a comune con S l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v). Indicando con accenti le quantità relative alla S′ valgono le formole (32), (33) del § 295

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = P\dfrac{\partial x}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial y'}{\partial u} = P\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z'}{\partial u} = P\dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = Q\dfrac{\partial x}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial y'}{\partial v} = Q\dfrac{\partial y}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial z'}{\partial v} = Q\dfrac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

$$(29^*) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}(Q - P), \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}(P - Q),$$

(*) Il risultato vale anche se la soluzione comune è la $R = \text{cost}^{te}$, chè allora il sistema (u, v) è quello delle linee di curvatura di S.

dalle quali seguono le altre

$$(30) \qquad \begin{cases} E' = P^2 E, \; F' = PQ \,.\, F, \; G' = Q^2 G \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \dfrac{Q}{P}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \dfrac{P}{Q}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \end{cases}$$

Ora, per ipotesi, le due equazioni (28) hanno soluzioni R comuni, e se R è una tale soluzione comune si ha per la (28_2)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial R}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(Q\frac{\partial R}{\partial v}\right).$$

Calcolando con una quadratura una funzione R′ dalle due equazioni compatibili

$$\frac{\partial R'}{\partial u} = P\frac{\partial R}{\partial u}, \quad \frac{\partial R'}{\partial v} = Q\frac{\partial R}{\partial v}$$

risulta subito dalle (29) e (30) che R′ soddisfa alla sua volta alle due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R'}{\partial u}\dfrac{\partial R'}{\partial v} = F' \\ \dfrac{\partial^2 R'}{\partial u\,\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial R'}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \dfrac{\partial R'}{\partial v}. \end{cases}$$

Per ciò le sfere coi centri su S′ e di raggio R′ formano una congruenza di RIBAUCOUR sulle cui falde Σ', $\overline{\Sigma}'$ dell'inviluppo le linee di curvatura corrispondono al sistema coniugato (u, v) delle superficie S′ dei centri. Di più, confrontando le due falde Σ', $\overline{\Sigma}'$ del nuovo inviluppo colle primitive Σ, $\overline{\Sigma}$, vediamo facilmente che : *Le due superficie* Σ, Σ' *hanno in punti corrispondenti normali parallele, medesimamente* $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}'$, *e si corrispondono quindi per parallelismo delle normali e per linee di curvatura.*

E infatti dalle (29) e (30) risulta

$$\nabla'(x', R') = \nabla(x, R), \; \Delta'_1 R' = \Delta_1 R,$$

onde le formole fondamentali (9*) § 312 dànno

$$\alpha' = \alpha, \; \beta' = \beta, \; \gamma' = \gamma,$$

ciò che prova la nostra asserzione.

Due superficie che abbiano a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura si diranno *trasformate di* COMBESCURE l'una dell'altra, poichè appunto le loro linee di curvatura corrispondenti, avendo tangenti parallele, si trovano nella relazione indicata con tal nome nel Cap. I (I pag. 50). E così diremo anche che due congruenze di sfere di RIBAUCOUR, nella relazione sopra studiata, sono trasformate di COMBESCURE l'una dell'altra. Ogni congruenza di sfere di RIBAUCOUR ammette dunque infinite trasformate di COMBESCURE dipendenti da due funzioni arbitrarie.

§ 318.

Congruenze di sfere di Ribaucour illimitatamente deformabili.

Una congruenza di sfere che appartenga alla classe di RIBAUCOUR perde, in generale, questa proprietà appena si deformi la superficie dei centri. Ma dalle congruenze di sfere a raggio costante abbiamo un esempio nel quale la congruenza si mantiene di RIBAUCOUR comunque deformando la superficie dei centri. Noi domandiamo ora: *esistono congruenze di sfere di* RIBAUCOUR, *a raggio variabile, che siano illimitatamente deformabili*? Intendiamo con questo che la congruenza di sfere rimanga congruenza di RIBAUCOUR comunque deformando la superficie dei centri, e per ciò, restando nella (VIII) fissa la funzione R, dovrà questa equazione trovarsi verificata comunque variino D, D′, D″, purchè soddisfino la relativa equazione di GAUSS e le due equazioni di CODAZZI. Ma in generale si osserva che una relazione lineare

$$\alpha\, D + \beta\, D' + \gamma\, D'' + \delta = 0. \tag{31}$$

fra D, D′, D″, con α, β, γ, δ funzioni di u, v non può verificarsi *in tutte le le flessioni* senza ridursi ad un'identità. Poichè infatti ogni soluzione ζ della prima equazione dell'applicabilità

$$\Delta_{22}\,\zeta = K\,(1 - \Delta_1\,\zeta)$$

determina intrinsecamente una flessione della superficie dopo la quale si ha

$$D = \frac{\zeta_{11}}{\sqrt{1-\Delta_1\zeta}}\,,\quad D' = \frac{\zeta_{12}}{\sqrt{1-\Delta_1\zeta}}\,,\quad D'' = \frac{\zeta_{22}}{\sqrt{1-\Delta_1\zeta}}\,,$$

e la relazione supposta (31) aggiungerebbe la *nuova* equazione

$$\alpha\,\zeta_{11} + \beta\,\zeta_{12} + \gamma\,\zeta_{22} + \delta\,\sqrt{1-\Delta_1\,\zeta} = 0,$$

ciò che è assurdo.

Nella nostra ipotesi la (VIII) deve dunque ridursi ad un'identità, vale a dire dovranno verificarsi le proporzioni

$$R_{11} : R_{12} : R_{22} = E_0 : F_0 : G_0\,, \tag{32}$$

e la nostra questione si riduce ad esaminare per quali forme del ds^2 queste sono compatibili. Per semplificare il calcolo prendiamo a linee coordinate u = cost^te sulla S le R = cost^te, talchè sarà R = R (u) funzione della sola u; prendiamo inoltre a linee v = cost^te le loro trajettorie ortogonali, onde avremo

$$F = 0\,;\quad \frac{\partial K}{\partial u} = R',\ \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

$$R_{11} = R'' - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}R',\ R_{12} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}R',\ R_{22} = \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}R'$$

$$E_0 = E - R'^2,\ F_0 = 0,\ G_0 = G.$$

Le proporzioni (32) dànno

$$R_{12} = 0,\ E_0\,R_{22} = G_0\,R_{11}\,,$$

cioè

$$\frac{\partial E}{\partial v}R' = 0,\ (E - R'^2)\,\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}R' = G\,(R'' - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}R').$$

Siccome supponiamo R′ ≠ 0, avremo per la prima $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, e potremo fare E = 1, dopo di che la seconda dà

$$\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{R''}{R'(1 - R'^2)}\,, \tag{33}$$

cioè $\frac{\partial lg\, G}{\partial u}$ funzione della sola u. La superficie S è dunque applicabile sopra una superficie di rotazione e possiamo scrivere il ds^2 sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2\ (r = \varphi\,(u)).$$

Dalla (33) si ha ora

$$\frac{R''}{R'(1-R'^2)} = \frac{r'}{r},$$

e integrando

$$R' = \frac{a\,r}{\sqrt{1+a^2 r^2}} \quad (a \text{ costante}). \tag{34}$$

Inversamente per qualunque superficie di rotazione, prendendo secondo la (34)

$$R = a\int \frac{r\,du}{\sqrt{1+a^2 r^2}},$$

tutte le condizioni sono soddisfatte e si ha quindi il risultato :

Le congruenze di sfere di RIBAUCOUR (*a raggio variabile*) *illimitatamente deformabili si ottengono prendendo la superficie* S *dei centri applicabile sopra una superficie di rotazione, con*

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2,$$

e assumendo il raggio R delle sfere secondo la formola

$$R = a\int \frac{r\,du}{\sqrt{1+a^2 r^2}} \quad (a \text{ costante}).$$

Un caso particolare notevole si ottiene cercando le superficie di rotazione per le quali le sfere coi centri sulla superficie e che passano per un punto fisso dell'asse formano una congruenza della specie. Questo accade per tutte e sole le quadriche di rotazione di cui il punto fisso dell'asse sia un fuoco principale. E infatti se $\rho = \rho(\theta)$ è l'equazione in coordinate polari della curva meridiana abbiamo qui

$$R = \rho,\ r = \rho \operatorname{sen}\theta,\ du^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2$$

e la (34) ci dà l'equazione differenziale

$$\frac{d\rho^2}{d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2} = \frac{a^2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{1+a^2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta},$$

ovvero

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\operatorname{sen}\theta\,\rho^2,$$

coll'integrale

$$\frac{1}{\rho} = c + a\cos\theta \qquad (c \text{ costante}),$$

che rappresenta appunto una conica avente un fuoco nel punto fisso e l'asse focale per asse di rotazione. Su questo risultato avremo occasione di ritornare nel prossimo Capitolo, trattando dei teoremi di GUICHARD (Vedi §§ 335, 336).

§ 319.

Rotolamento di superficie applicabili.

Chiamiamo congruenze *elementari* di RIBAUCOUR quelle congruenze di sfere nelle quali tutte le sfere toccano un piano fisso ovvero passano per un punto fisso (§ 316). Le deformazioni di queste congruenze (della loro superficie dei centri) stanno in intima relazione colla teoria del *rotolamento* di superficie applicabili, come ora andiamo a stabilire.

Consideriamo una coppia (S_0, S) di superficie applicabili e indichiamo con M_0, M due loro punti generici che si corrispondono nell'applicabilità, onde tra i fasci d'elementi lineari corrispondenti uscenti rispettivamente da M_0, M verrà subordinata una relazione d'eguaglianza. Immaginiamo di tenere fissa la S nello spazio e di trasportare rigidamente la S_0 in modo che M_0 cada in M, i due piani tangenti si sovrappongano, ed ogni elemento lineare di S_0 uscente da M_0 coincida col corrispondente per M. Così, per ogni posizione data ad M sulla S, sarà perfettamente individuata la posizione da darsi alla S_0 ; e facendo variare liberamente sopra S il punto M, la superficie S_0 acquisterà un'infinità di posizioni nello spazio, le quali costituiranno *una doppia infinità*, salvo nel caso eccezionale di rigate rotolanti che esaminiamo più oltre. Il movimento a due parametri che assume così la S_0 dicesi *rotolamento* di S_0 sopra S ; e daremo alla S_0 il nome di superficie *rotolante*, mentre la S si dirà la superficie *d'appoggio*.

Se la S_0 trascina seco rigidamente un punto 0, questo assumerà una doppia infinità di posizioni descrivendo una superficie Σ che diremo la relativa *superficie di rotolamento*, ed il punto O si dirà *punto satellite*. Similmente un piano π (satellite), trascinato da S_0 nel rotolamento, assumendo ∞^2 posizioni inviluppera una superficie (non sviluppabile), il relativo *inviluppo di rotolamento*. (*)

(*) Si avverta subito che qualunque superficie, come si dimostrerà fra breve (V. § 324), può riguardarsi *in infiniti modi* come superficie od inviluppo di rotolamento prendendo convenientemente la coppia (S_0, S) di superficie applicabili.

Consideriamo dapprima il caso di un punto O satellite ed osserviamo che ad ogni punto M della superficie S d'appoggio corrisponde un determinato punto P della superficie Σ di rotolamento, precisamente quello nel quale cade O quando la S_0 viene a toccare la S in M_0, soprapposto ad M. Ora il segmento M P giace rispetto agli elementi lineari di S uscenti da M nel piano tangente, come il segmento M_0 O rispetto ai corrispondenti di S_0 uscenti da M_0. Per ciò se si immaginano tutti i segmenti M_0 O che riuniscono i punti di S_0 al punto fisso O come invariabilmente legati alla S_0 nelle sue flessioni, e questa, deformandosi, acquista la configurazione S, il luogo dei termini P dei detti segmenti M P, prima riuniti in O, sarà appunto la superficie Σ di rotolamento. E siccome nella prima configurazione S_0, la congruenza di questi segmenti è normale alle sfere di centro O, risulta dal teorema di BELTRAMI che i segmenti M P sono normali nei loro termini P alla superficie Σ di rotolamento. Per la forma data al teorema di BELTRAMI al § 313, possiamo esprimere il risultato così: *Si descrivano le sfere coi centri distribuiti sulla superficie rotolante* S_0, *e che passano pel punto satellite* O, *e si deformi la* S_0 *nella superficie* S *d'appoggio; quella falda* Σ *del nuovo inviluppo di sfere che corrisponde al punto* O *è la relativa superficie di rotolamento.*

È bene poi avvertire che anche la seconda falda $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo può generarsi come superficie di rotolamento: *basta mantenere la stessa superficie* S *d'appoggio e cangiare la rotolante* S_0 *nella sua simmetrica* S_0 *col punto simmetrico* O′ *di* O *quale punto satellite.* È infatti se di ogni posizione di S_0 tangente alla S in $M_0 \equiv M$ si prende la simmetrica S'_0 rispetto al piano tangente comune, il simmetrico O′ di O si trova sopra $\overline{\Sigma}$, e quando S'_0 rotola sulla applicabile S (sulla faccia opposta a quella primitiva) il punto O′ satellite descrive $\overline{\Sigma}$. In particolare, se S si prende congruente con S_0, la superficie di rotolamento generata dalla simmetrica S'_0 di S_0, con O′ come punto satellite, è il luogo di tutti i punti simmetrici di O rispetto ai piani tangenti di S_0, ossia: *la omotetica secondo il rapporto* 2 *della polare di* S_0 *rispetto ad* O. Affatto analogamente se si tratta di un inviluppo di rotolamento, si considerino le sfere coi centri sulla rotolante S_0 e tangenti al piano satellite π. Deformando la congruenza di sfere col fare assumere alla S_0 la configurazione della superficie S d'appoggio, quella falda Σ del nuovo inviluppo di sfere che corrisponde al piano π sarà appunto l'inviluppo di rotolamento. E la seconda falda $\overline{\Sigma}$ sarà alla sua volta generata, quale inviluppo di rotolamento, dalla simmetrica S'_0 di S_0 col piano π' simmetrico di π quale piano satellite.

Siccome adunque le superficie o gli inviluppi di rotolamento sono casi particolari di inviluppi di sfere, potremo calcolare i loro elementi colle formole generali dei paragrafi precedenti, dove per R dovremo prendere nel primo caso la distanza del punto (u, v) di S_0 dal punto satellite O, e nel secondo caso la distanza del medesimo punto dal piano satellite π.

§ 320.

Direzioni cinematicamente coniugate.

La S_0 rotoli sull'appplicabile S e sia M, nella posizione attuale, il punto di contatto. Se spostiamo sopra S il punto M in una posizione infinitamente vicina M′, la S_0 prenderà una nuova posizione S'_0 infinitamente vicina S_0. Dimostriamo che: *il movimento rigido infinitesimo pel quale* S_0 *si trasporta in* S'_0 *è una pura rotazione attorno ad una conveniente tangente* M*t* *in* M *alla* S, *che si dirà per cio l'asse istantaneo di rotazione.*

Per questo consideriamo un punto qualunque O dello spazio rigidamente connesso alla superficie rotolante, che descriverà una superficie Σ di rotolamento. Se spostiamo il punto M di contatto (*centro istantaneo di rotazione*) da M in M′, il punto O che prima occupava, sopra Σ, la posizione P, verrà in un nuovo punto P′, dell'intorno di P, e l'elemento lineare P P′, giacendo nel piano tangente di Σ, sarà normale alla congiungente M P, che è la normale di Σ. Cerchiamo allora fra le tangenti comuni in $M \equiv M_0$ alle (S, S_0) quella M*t* che è perpendicolare alla direzione PP′. Indicando con d i differenziali nella direzione PP′, con δ quelli nella cercata direzione M*t*, ed essendo ξ, η, ζ le coordinate di P, x, y, z quelle di M, scriveremo la condizione d'ortogonalità

$$S\, d\xi\, \delta x = 0$$

ossia

$$(35)\quad du\,\delta u\, S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + du\,\delta v\, S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + dv\,\delta u\, S\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + dv\,\delta v\, S\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Ora abbiamo (§ 312)

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - R\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \alpha\frac{\partial R}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} - R\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \alpha\frac{\partial R}{\partial v}$$

indi per le (6*)

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} = E_0 - R\,S\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u}\ ,\ S\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = F_0 - R\,S\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ S\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = F_0 - R\,S\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}\ ,\ S\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} = G_0 - R\,S\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}.$$

Queste per le (I) § 314 e per le (16) ibid, si scrivono

$$S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = E_0 - R\tau_{11},\ S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = F_0 - R\tau_{12},\ S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = G_0 - R\tau_{22},$$

ossia per le (II)

$$S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = E_0 - RR_{11} + R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D\ ,\ S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = F_0 - RR_{12} + R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D'$$

$$S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = G_0 - RR_{22} + R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D''.$$

Ma se con D_0, D'_0, D''_0 indichiamo i coefficienti della seconda forma fondamentale della rotolante S_0, abbiamo per le (17)

$$E_0 - RR_{11} = -R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D_0\ ,\ F_0 - RR_{12} = -R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D'_0\ ,\ G_0 - RR_{22} = -R\sqrt{1-\Delta_1 R}.D''_0,$$

onde le precedenti si scrivono

$$S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = R\sqrt{1-\Delta_1 R}\,(D - D_0),\ S\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = R\sqrt{1-\Delta_1 R}\,(D' - D'_0),$$

$$S\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = R\sqrt{1-\Delta_1 R}\,(D'' - D''_0)\ ,$$

e la nostra condizione (35) assume la forma definitiva

$$(X)\quad (D - D_0)\,du\,\delta u + (D' - D'_0)\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + (D'' - D''_0)\,dv\,\delta v = 0,$$

che ha la notevole proprietà di *essere affatto indipendente dal punto* O *satellite* e può interpretarsi come segue. Il primo membro della (IX) è una forma *bilineare simmetrica* in (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ e se supponiamo dapprima che il suo determinante

$$(D - D_0)(D'' - D''_0) - (D' - D'_0)^2$$

sia diverso da zero, la (IX) distribuisce gli elementi lineari ds, δs spiccati da M su S in coppie di un'involuzione propria (I, § 47). Due direzioni corrispondenti ad una tale coppia si diranno fra loro *cinematicamente coniugate* per la ragione seguente. Se il punto M si sposta in una direzione qualunque MM′, il punto P subisce uno spostamento PP′ che è normale insieme alla tangente M*t* cinematicamente coniugata alla MM′ ed alla congiugente MP; per ciò la direzione PP′ è la normale in P al piano (P, M*t*), cioè al piano che da P projetta M*t*. Siccome questo vale *qualunque* sia il punto satellite O, vediamo che nel movimento infinitesimo che porta S_0 in S'_0, qualunque punto dello spazio si sposta normalmente al piano che lo congiunge ad M*t*, ed in conseguenza il movimento è una rotazione (infinitesima) attorno ad M*t*. Da tutto ciò si conclude:

Nel rotolamento di una superficie S_0 *sopra una superficie applicabile* S, *il passaggio da una posizione di* S_0 *ad una successiva avviene per una pura rotazione. L'asse istantaneo di rotazione è quella tangente* Mt, *nel punto di contatto fra* S_0, S, *che è cinematicamente coniugata alla direzione* MM′ *secondo cui si sposta il centro istantaneo* M *di rotazione. La relazione fra le due direzioni è involutoria, cioè spostando il centro nella direzione* Mt *l'asse istantaneo prende la direzione MM′.*

Questi risultati fondamentali pel rotolamento pongono in evidenza che, *sempre escluso il caso di un'involuzione* (IX) *degenere*, che esaminiamo nel paragrafo seguente: *ogni punto satellite* O *di* S_0 *descrive un'effettiva superficie* (*non una curva*). E infatti, variando la direzione MM′ dello spostamento di M, anche l'asse istantaneo M*t* prende tutte le posizioni possibili nel fascio, onde l'elemento lineare PP′ prende tutte le posizioni nel fascio di centro P nel piano normale ad MP, ed il punto P′ descrive per ciò *l'intorno a due dimensioni di* P.

§ 321.

Caso singolare di un'involuzione (IX) degenere (rigate rotolanti).

Veniamo ora ad esaminare il caso fin qui escluso che l'involuzione (IX) delle tangenti cinematicamente coniugate sia degenere, che cioè si annulli il discriminante

$$(D - D_0)(D'' - D''_0) - (D' - D'_0)^2$$

della forma differenziale quadratica:

$$(D - D_0)\,du^2 + 2\,(D' - D'_0)\,du\,dv + (D'' - D''_0)\,dv^2.$$

Questa, eguagliata a zero, ha allora un'unica radice reale in $\frac{dv}{du}$, sia

$$\frac{dv}{du} = \phi\,(u, v),$$

e prendiamo per semplicità a linee $v = \text{cost}^{te}$ le linee integrali di questa equazione differenziale. Con ciò rendiamo

$$D = D_0,\ D' = D'_0,$$

e l'equazione di GAUSS $DD'' - D'^2 = D_0D''_0 = D'^2_0$ ci dà

$$D\,(D'' - D''_0) = 0.$$

Ma noi dobbiamo escludere il caso $D'' = D''_0$ perchè allora S, S_0, avendo a comune anche la seconda forma, serebbero congruenti e non avrebbe luogo rotolamento. Sarà dunque $D=D_0=0$, cioè le $v=\text{cost}^{te}$ saranno asintotiche sopra ambedue le superficie applicabili, che pel teorema di BONNET (I pag. 378) saranno rettilinee. Dunque: *Nel caso singolare dell'involuzione* (IX) *degenere le due superficie applicabili sono una coppia* (R_0, R) *di rigate, con corrispondenza delle generatrici.*

In tale caso la rigata rotolante R_0, in ogni sua posizione, tocca la rigata R d'appoggio lungo tutta la generatrice comune, poichè hanno lungo questa il medesimo paraboloide delle normali (I, § 149). Dopo ciò è evidente che il rotolamento di R_0 sopra R è ora un movimento *ad un solo parametro*, indi un punto O satellite di R_0 descrive non più una superficie ma una curva, un piano π satellite inviluppa una sviluppabile, ecc.

Questi movimenti ad un parametro di rigate rotolanti sono importanti anche per ciò che se nel rotolamento generale a due parametri di una superficie S_0, sopra un'applicabile S, si sceglie una qualunque serie ∞^1 di movimenti, questa è appunto un movimento elementare di rigate rotolanti. E infatti se S_0 rotola su S per una semplice infinità di posizioni, il centro istantaneo di rotazione $M_0 = M$ descriverà una certa curva C_0 sulla rotolante S_0 e la corrispondente C sulla superficie d'appoggio, mentre l'asse istantaneo di rotazione avrà, per ogni posizione di M, la direzione cinematicamente coniugata a quella della tangente comune in M alle due curve C_0, C.

Il luogo di questi assi istantanei di rotazione è una rigata R_0 per la superficie rotolante S_0. ed un'altra rigata R per la S d'appoggio. Ora, nel detto

movimento ad un parametro, le generatrici di R_0 si portano successivamente a coincidere colle corrispondenti di R con *pure rotazioni*, che avvengono ogni volta attorno alla generatrice comune di raccordo. È quindi geometricamente intuitivo che : *le due rigate* R_0 R *sono applicabili ed il movimento avviene per rotolamento di* R_0 *sopra* R.

È bene però confermare col calcolo queste deduzioni geometriche, ciò che facciamo dimostrando la proposizione equivalente :

Se sopra due superficie applicabili S_0, S *si considerano due curve qualunque* C_0, C *corrispondenti e nei punti* M_0, M *di queste curve si conducono le tangenti alle superficie, nelle rispettive direzioni cinematicamente coniugate a quelle di* C_0, C, *le due rigate* R_0, R *che si formano sono applicabili l'una sull'altra, con corrispondenza delle curve* C_0, C.

Prendasi la curva C_0 come una delle $u = \text{cost}^{te}$, sia per es. la $u = 0$ e, supposto dapprima che *le tangenti di* C_0 *non coincidano colle proprie direzioni cinematicamente coniugate*, prendasi il sistema coordinato (u, v) in guisa che in ogni punto della $u=0$ le direzioni delle linee u, v siano cinematicamente coniugate, indi si abbia per la (IX)

$$D' = D'_0 \text{ per } u = 0.$$

Le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ di un punto qualunque della rigata R formata dalle tangenti alle $v = \text{cost}^{te}$ lungo la $u = 0$ sono date dalle formole

$$\bar{x} = x + t\,\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{per } u = 0,$$

che rappresentano parametricamente R pei due parametri u, v. Calcoliamo ora il ds^2 della rigata R formando le derivate rapporto a t, v, di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, ciò che dà per le (α) § 312

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + t\left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + D'X\right].$$

Se di qui formiamo $ds^2 = S\,dx^2$ risulta che

$$ds^2 - t^2\,D'^2\,dv^2$$

dipende solo dai coefficienti dell'elemento lineare della S, e non da D,D',D''.

Ne segue che lo stesso calcolo applicato all'elemento lineare ds_0 della R_0 darà

$$ds_0^2 - t^2\, D'^2_0\, dv^2 = ds^2 - t^2\, D'^2\, dv^2,$$

onde, avendosi $D' = D'_0$ (per $u = 0$), risulta appunto

$$ds_0^2 = ds^2, \text{ c. d. d.}$$

Venendo al caso escluso in cui le tangenti alla C ($u = 0$) siano cinematicamente autoconiugate, si osserverà che qui $D'' = D''_0$ *per* $u = 0$. La rigata R, sviluppabile delle tangenti alla C è ora rappresentata parametricamente da

$$\bar{x} = x + t\frac{\partial x}{\partial v} \quad per\ u = 0,$$

e questa volta si vede che $ds^2 - D''^2\, t^2\, ds^2$ dipende solo dai coefficienti della prima forma fondamentale di S. Per ciò avremo ora

$$ds_0^2 - t^2\, D''^2_0\, dv^2 = ds^2 - t^2\, D''^2\, dv^2,$$

e quindi di nuovo $ds_0^2 = ds^2$.

La proposizione, così dimostrata anche per via analitica, pone in evidenza che la conoscenza di una coppia di superficie applicabili (S_0, S) procura quella di infinite coppie di rigate applicabili (R_0, R).

§ 322.

Proprietà delle direzioni cinematicamente coniugate.

Riprendiamo il caso generale di due superficie (S_0, S) applicabili per confrontare l'involuzione (IX) non degenere delle tangenti cinematicamente coniugate : 1° colla involuzione delle tangenti coniugate nel senso di Dupin, 2° colla involuzione ortogonale.

a) L'involuzione (IX) e l'involuzione di Dupin

$$D\, du\, \delta u + D'\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + D''\, dv\, \delta v$$

sono sempre distinte salvo quando

$$D : D' : D'' = D_0 : D_0' : D''_0\,;$$

ne questo avviene soltanto nel caso escluso di superficie congruenti

S_0, S ($D = D$, $D' = D'_0$, $D'' = D''_0$) ove la (IX) è un'identità, ovvero nell'altro di superficie S_0, S simmetriche con $D = -D_0$, $D' = -D'_0$, $D'' = -D''_0$), nel qual caso, secondo il § 319, la superficie di rotolamento si ottiene dalla podare di S_0 rapporto ad O raddoppiandone i raggi vettori.

In generale il sistema delle linee a tangenti coniugate insieme nei due sensi è quello delle linee integrali della equazione differenziale che si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme

$$\begin{cases} (D - D_0)\, du^2 + 2'\,(D' - D'_0)\, du\, dv + (D'' - D''_0)\, dv^2 \\ D_0\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''_0\, dv^2, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} D\, du + D'\, dv & D'\, du + D''\, dv \\ D_0 du + D'_0 dv & D'_0 du + D''_0 dv \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale del sistema coniugato comune a S_0, S, che è in ogni caso formato di linee distinte (reali od immaginarie), il caso di rigate rotolanti essendo qui escluso (Cf. § 294). Dunque : *Le linee che sono insieme a tangenti cinematicamente coniugate e coniugate nel senso di* Dupin *sono quelle del sistema coniugato permanente delle due superficie applicabili* S_0, S.

b) In generale fra i sistemi di linee a tangenti cinematicamente coniugate ve ne ha uno ed uno soltanto (sempre reale) di linee ortogonali, quello delle linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} (D - D_0)\, du + (D' - D'_0) dv\ , & (D' - D'_0)\, du + (D'' - D''_0)\, dv \\ E\, du + F\, dv & F\, du + G\, dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ma si ha un caso notevole d'eccezione quando sussistono le proporzioni

$$D - D_0 : D' - D'_0 : D'' - D''_0 = E : F : G,$$

cioè

$$D = D_0 + \lambda\, E,\ D' = D'_0 + \lambda\, F,\ D'' = D''_0 + \lambda\, G\,,$$

con λ conveniente moltiplicatore. Ma se si esprime che D, D', D'' soddisfano come D_0, D'_0, D_0 alle equazioni di Codazzi (alle quali soddisfano pure E, F, G) si vede che deve essere

$$E\frac{\partial \lambda}{\partial v} - F\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,\quad F\frac{\partial \lambda}{\partial v} - G\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0$$

e per ciò λ = cost^te^ D'altra parte dalla equazione di Gauss

$$D\,D''-D'^2 = D_0\,D''_0 - D'^2_0$$

risulta

$$\lambda = \frac{2\,F\,D'_0 - E\,D''_0 - G\,D_0}{E\,G - F^2},$$

e quindi è costante la curvatura media di S_0, come quella di S, e sono eguali fra loro. Si tratta dunque delle deformazioni continue di BONNET delle superficie a curvatura media costante nelle quali restano invariati i singoli raggi prncipali di curvatura, deformazioni che abbiamo studiato al § 249 (I pag. 687). Sono queste dunque le uniche deformazioni nelle quali tutti i sistemi cinematicamente coniugati sono ortogonali e viceversa.

c) Ai raggi doppî dell'involuzione (IX), reali od immaginarii ma in ogni caso distinti, corrisponde il sistema di linee *cinematicamente autoconiugate* coll'equazione differenziale

$$(36)\qquad (D - D_0)\,du^2 + 2\,(D' - D'_0)\,du\,dv + (D'' - D''_0)\,dv^2 = 0.$$

Se le supponiamo reali, lungo una di esse di ha

$$\frac{D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2}{ds^2} = \frac{D_0\,du^2 + 2D'_0\,du\,dv + D''_0\,dv^2}{ds^2}.$$

ed ha quindi luogo la proprietà *caratteristica* che la linea ha eguali e *del medesimo segno* le due curvature normali, sia che si pensi sopra S_0 o sopra S. Di più, essendo anche eguali le due curvature geodetiche, sono eguali, le assolute. Ne segue che le sviluppabili luogo delle loro tangenti sono applicabili l'una sull'altra con conservazione delle generatrici, come del resto abbiamo già dimostrato alla fine del paragrafo precedente.

Può darsi che la (36) abbia le radici immaginarie per essere il suo discriminante

$$\Delta = (D'-D'_0)^2 - (D-D_0)\,(D''-D''_0)$$

negativo. Ma in tal caso alla S_0 si sostituisca la sua simmetrica S'_0 cangiando i segni di D_0, D'_0, D''_0 e la nuova equazione

$$(36^*)\qquad (D+D_0)\,du^2 + 2\,(D'+D'_0)\,du\,dv + (D''+D''_0)\,dv^2 = 0$$

avrà allora certamente le radici reali, come risulta dalle seguenti considerazioni dovute a Voss. (*) Sia

$$\Delta' = (D' + D'_0)^2 - (D + D_0)(D'' + D''_0)$$

(*) Ueber isometrische FLÄCHEN-MATH. Annalen 46.

il discriminante della (36*), e proviamo che Δ, Δ', diversi ciascuno da zero perchè è escluso il caso di rigate rotolanti, non possono essere insieme negativi. Detta K la curvatura comune di S, S_0 si ha

$$DD'' - D'^2 = D_0\,D''_0 - D'^2_0 = K\,(E\,G - F^2),$$

e per ciò

$$\begin{cases} \Delta = (DD''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'\,D'_0) - 2\,K\,(E\,G - F^2) \\ \Delta' = -(DD''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'\,D'_0) - 2\,K\,(E\,G - F^2) \end{cases}$$

da cui

$$\Delta + \Delta' = -4\,K\,(E\,G - F^2)$$

$$\Delta\,\Delta' = 4\,K^2\,(E\,G - F^2) - (D\,D''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'D'_0)^2.$$

Ora se $K \leq 0$ la prima dimostra che Δ, Δ' non possono essere insieme negativi. Se poi $K > 0$ sono definite ambedue le forme

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2,\quad D_0\,du^2 + 2\,D'_0\,du\,dv + D''_0\,dv^2$$

e l'equazione di secondo grado in ρ

$$\begin{vmatrix} D - \rho\,D_0 & D' - \rho\,D'_0 \\ D' - \rho\,D'_0 & D'' - \rho\,D''_0 \end{vmatrix} = 0$$

ha radici reali, onde il suo discriminante

$$(DD''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'\,D'_0)^2 - 4\,K^2\,(E\,G - F^2) = -\Delta\Delta'$$

è positivo, indi Δ, Δ' hanno segno contrario. Se a sistema coordinato (u, v) prendiamo le linee integrali della (36), ovvero quelle della (36*) quando le prime siano immaginarie, renderemo nel primo caso

$$D = D_0,\ D' = -D'_0\ D'' = D''_0,$$

e nel secondo

$$D = -D_0,\quad D' = D'_0,\quad D'' = -D''_0$$

d) Da ultimo, supposto che le superficie S_0, S abbiano la curvatura K negativa, cerchiamo le linee cinematicamente coniugate alle asintotiche di un sistema. Vale allora il semplice risultato :

Alle asintotiche sinistrorse (destrorse) dell'una superficie sono cinematicamente coniugate le linee che corrispondono alle asintotiche destrorse (sini-

strorse) dell'altra. Per dimostrarlo ricorriamo ai risultati del § 77 (I pag. 208) relativi alle asintotiche, che hanno le equazioni differenziali

$$(a)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv = \dfrac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}\,dv \\ \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''\,dv = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}\,du, \end{cases} \quad \text{(nel sistema sinistrorso)}$$

e le altre

$$(b)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}\,dv \\ \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''\,du = \dfrac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho}\,du. \end{cases} \quad \text{(nel sistema destrorso)}$$

Prendiamo il sistema coordinato (u, v) per modo che le $u = \text{cost}^{\text{te}}$ siano le asintotiche sinistrorse *sulla* S e le $v = \text{cost}^{\text{te}}$ le asintotiche destrorse *sulla* S_0, come è lecito perchè i due sistemi di linee sono certamente distinti (Bonnet). La prima delle (a) applicata alla S col porvi $du = 0$ dà

$$\mathrm{D}' = +\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho},$$

e la seconda delle (b) applicata alla S_0 col porvi $dv = 0$ dà nuovamente

$$\mathrm{D}'_0 = +\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\rho},$$

ed il sistema (u, v) a casa della (IX) è quindi cinematicamente coniugato c. d. d.

Se si applica questo risultato al caso particolare in cui la S_0 sia una rigata R_0 alle cui generatrici corrispondano sulla S geodetiche g curvilinee, conducendo lungo un'asintotica $u = \text{cost}^{\text{te}}$ di S le tangenti alle g si forma una rigata R che, pel teorema alla fine del § 321, è applicabile sulla rigata R_0 e per ciò sulla S stessa. Questo è il teorema di Chieffi (I § 153), che appare qui come un corollario della proposizione precedente.

§ 323.

Linee di curvatura delle superficie e degli inviluppi di rotolamento.

Le superficie e gli inviluppi di rotolamento essendo casi particolari di inviluppi di sfere (§ 319), potremo applicare alla determinazione delle loro linee di curvatura i risultati generali del § 315. L'equazione differenziale delle linee di curvatura è la (27) § 316, nella quale, se si tratta di una superficie di rotolamento, dovremo porre per R la distanza del punto (u, v) mobile sulla superficie rotolante S_0 dal punto satellite O, e nel caso dell'inviluppo di rotolamento, dobbiamo eguagliare R alla distanza del punto (u, v) di S_0 dal piano satellite π. Ora nel primo caso abbiamo, per le (18)

$$\mathrm{E}_{11} = \frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{R}} + \mathrm{D}_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}},\ \mathrm{R}_{12} = \frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{R}} + \mathrm{D}'_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}},\ \mathrm{R}_{22} = \frac{\mathrm{G}_0}{\mathrm{R}} + \mathrm{D}''_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}},$$

e nel secondo caso per le (13)

$$\mathrm{R}_{11} = \mathrm{D}_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}}\ ,\ \mathrm{R}_{12} = \mathrm{D}'_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}}\ ,\ \mathrm{R}_{22} = \mathrm{D}''_0\sqrt{1-\Delta_1\mathrm{R}}\ .$$

Sia nell'uno sia nell'altro caso la (27) si riduce alla seguente

$$(c)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{E}_0\,du + \mathrm{F}_0\,dv & \mathrm{F}_0\,du + \mathrm{G}_0\,dv \\ (\mathrm{D}-\mathrm{D}_0)du + (\mathrm{D}'-\mathrm{D}'_0)dv & (\mathrm{D}'-\mathrm{D}'_0)du + (\mathrm{D}''-\mathrm{D}''_1)dv \end{vmatrix} = 0,$$

cioè : *l'equazione differenziale delle linee di curvatura delle superficie o degli inviluppi di rotolamento si forma eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme quadratiche.*

$$\begin{cases} \mathrm{E}_0\,du^2 + 2\,\mathrm{F}_0\,du\,dv + \mathrm{G}_0 dv^2 \\ (\mathrm{D}-\mathrm{D}_0)\,du^2 + 2\,(\mathrm{D}'-\mathrm{D}'_0)\,du\,dv + (\mathrm{D}''-\mathrm{D}''_0)\,dv^2 \end{cases}$$

Per interpretare geometricamente questo risultato facciamo le osservazioni seguenti.

Se si tratta di un punto satellite O descriviamo col centro in O una sfera p. e di raggio $= 1$, e su questa facciamo la projezione *centrale* della superficie rotolante S_0. Dette X_0, Y_0, Z_0 le coordinate del punto (u, v) sulla sfera e x_0, y_0, z_0 quelle del punto corrispondente su S_0, abbiamo

$$x_0 = \mathrm{R}\,\mathrm{X}_0,\ y_0 = \mathrm{R}\,\mathrm{Y}_0,\ z_0 = \mathrm{R}\,\mathrm{Z}_0,$$

indi per l'elemento lineare ds_0 della S_0

$$ds_0^2 = S\,dx_0^2 = dR^2 + R^2\,d\sigma^2,$$

cioè

$$E_0\,du^2 + 2\,F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2 = R^2\,d\sigma^2, \tag{37}$$

dove $d\sigma^2$ è il quadrato dell'elemento lineare sferico in projezione centrale.

Nel caso poi di un piano π satellite facciamo della S_0 la projezione ortogonale su S ed avremo

$$E_0\,du^2 + 2\,F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2 = d\sigma^2, \tag{37*}$$

dove ora $d\sigma^2$ è il ds^2 della detta projezione piana.

Trovato così il significato geometrico della forma quadratica $E_0\,du^2 + 2\,F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2$, espresso dalle (37) o (37*), l'equazione differenziale (*c*) per le linee di curvatura si interpreta nei teoremi seguenti:

I) *Le linee di curvatura della superficie di rotolamento descritta dal punto satellite* O *corrispondono a quel sistema cinematicamente coniugato della superficie rotolante* S_0 *che si projetta in un sistema ortogonale sulla sfera di centro* O (*in projezione centrale*).

Questo sistema, che può dirsi il *sistema cinematicamente coniugato d'apparenza ortogonale*, è sempre unico e determinato salvo quando

$$D—D_0 : D'—D'_0 : D''—D''_0 = E_0 : F_0 : G_0,$$

e allora la superficie di rotolamento, avendo le linee di curvatura indeterminate, è un piano o una sfera, caso che tratteremo completamente più oltre (V. § 327).

Similmente pel secondo caso abbiamo l'altro teorema:

(II) *Le linee di curvatura dell'inviluppo di rotolamento del piano satellite* π *corrispondono a quel sistema cinematicamente coniugato della superficie rotolante* S_0 *che si projetta sul piano* π *in un sistema ortogonale (in projezione ortogonale).*

Questo secondo teorema si può del resto considerare come un caso limite del primo quando, aumentando il raggio delle sfere di una costante, si consideri come relativo all'invluppo di una sfera satellite. Se la sfera, allontanandone il centro O all'infinito, diventa un piano, il primo teorema si cangia nel secondo.

Possiamo anche stabilire il teorema I) colle considerazioni geometriche seguenti. Sia P una qualunque posizione del punto satellite O sulla superficie Σ di rotolamento, M il punto corrispondente sulla superficie S d'appoggio, onde sarà PM la normale in P alla Σ; e siano $P\tau$, $P\tau'$ le due tangenti alle linee di curvatura di Σ. Se spostiamo il punto P nel punto infinitamente vicino P' su $P\tau$, il centro istantaneo M_0 si sposterà in M' sulla normale in P' e quindi nel piano principale $MP\tau$. Alla tangente $t \equiv MM'$ di S sarà cinematicamente coniugata un'altra tagente t' normale a Pt e per ciò giacente nell'altro piano principale. E siccome t è perpendicolare a $P\tau'$, se P si sposta nella direzione $P\tau'$ il centro M si sposterà lungo Mt', che corrisponderà dunque alla direzione $P\tau'$, come la Mt a $P\tau$. L'angolo $t\,M\,t'$ fra le due tagenti cinematicamente coniugate t, t' è dunque visto da P sotto un angolo retto, conforme al teorema I).

Se si considera infine, secondo il § 319, la podare duplicata come superficie di rotolamento, nel qual caso l'involuzione cinematicamente coniugata coincide coll'involuzione di DUPIN, il teorema I) ci dà in particolare:

Le linee di curvatura della superficie podare di una superficie S_0 *rispetto ad un punto* O *corrispondono a quel sistema coniugato di* S_0 *che si projetta da* O, *sopra una sfera con questo centro, in un sistema ortogonale.*

§ 324.

Generazione di una qualunque superficie Σ come superficie di rotolamento.

Occupiamoci ora del problema:

Data una superficie Σ *arbitraria, trovarne tutte le generazioni come superficie di rotolamento; cioè trovare tutte le coppie* (S_0, S) *di superficie applicabili tali che, rotolando* S_0 *sopra* S, *un conveniente punto* O *satellite di* S_0 *descriva* Σ.

Si vedrà che il problema ammette in effetto infinite soluzioni, *dipendenti da due funzioni arbitrarie*, poichè esso porta, come il problema dell'applicabilità, ad un'equazione a derivate parziali del secondo ordine.

Data Σ, per trovarne le generazioni come superficie di rotolamento, dobbiamo elevare in ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Σ un segmento di normale $P\,M = R$ tale che per la superficie S luogo del punto M la funzione $R = R(u, v)$ sia una soluzione della seconda equazione (19) dell'applicabilità

costruita rispeto al ds^2 *della* S, ciò che dà appunto per R, come ora verificheremo, un'equazione del secondo ordine.

Riferita la Σ ad un qualunque sistema curvilineo (u, v), manteniamo per questa superficie le consuete notazioni e per le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dell'estremo M del segmento normale $PM = R$, elevato nel punto $P = (x, y, z)$ di Σ, avremo

$$\bar{x} = x + R\,X\,,\quad \bar{y} = y + R\,Y\,,\quad \bar{z} = z + R\,Z,$$

da cui

$$d\bar{x} = dx + R\,dX + X\,dR,\ \text{ecc.}$$

Formando il $ds^2 = S\,d\bar{x}^2$ della superficie S luogo di M abbiamo.

$$ds^2 = dR^2 + S dx^2 + R^2\,S dX^2 + 2\,R\,S dx\,dX =$$
$$= dR^2 + E du^2 + 2\,F du\,dv + G dv^2 + R^2\,(e du^2 + 2\,f du\,dv + g dv^2)$$
$$- 2\,R\,(D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

ossia (I pag. 225)

$$ds^2 = dR^2 + (1 - R^2K)\,(E du^2 + 2\,F du\,dv + G dv^2) - \tag{38}$$
$$- (2R + R^2\,H)\,(D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2).$$

Ora, affinchè la funzione incognita R corrisponda ad una soluzione del problema occorre e basta che esista una deformata S_0 della S per la quale R rappresenti la distanza del punto (u, v) da un punto fisso, cioè che il ds^2 dato dalla (38) si ponga sotto la forma

$$ds^2 = dR^2 + R^2\,d\sigma^2,$$

dove $d\sigma^2$ rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria Dalla (38) risulta

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2} = \left(\frac{1}{R^2} - K\right)(E du^2 + 2\,F du\,dv + G dv) -$$
$$- \left(\frac{2}{R} + H\right)(D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

e la forma quadratica nel secondo membro è in ogni caso definita positiva, come si vede nel modo più semplice prendendo per le (u, v) le linee di curvatura, ove allora avendosi

$$F = 0,\ D' = 0\,,\quad D = -\frac{E}{r_2},\quad D'' = -\frac{G}{r_1}$$

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}\,,\quad H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\,,$$

essa diventa

$$E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1}\right)^2 dv^2. \tag{39}$$

Rimane dunque soltanto da esprimere che questa forma ha la curvatura $= +1$, e ne risulta. *Per risolvere il problema proposto si riporti sopra ogni normale di* Σ *un tale segmento* R *che la forma quadratica definita positiva*

$$\left(\frac{1}{R^2} - K\right)(E du^2 + 2F du dv + G dv^2) - \left(\frac{2}{R} + H\right)(D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2) \tag{40}$$

risulti a curvatura $= +1$. *Il luogo dei termini di questi segmenti dà una superficie* S *d'appoggio, dopo di che la rotolante* S_0, *insieme al punto satellite* O, *resta intrinsecamente individuata.*

Aggiungiamo che, per avere S_0 in termini finiti, occorre ridurre $d\sigma^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2}$ alla forma normale sferica, ciò che richiede in generale l'integrazione di un'equazione di RICCATI.

§ 325.

L'equazione del secondo ordine pel primo problema di rotolamento.

È manifesto che ponendo $= +1$ la curvatura della forma differenziale (40), otteniamo per l'incognita R un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine e ciascuna delle sue soluzioni determina una coppia di superficie applicabili (S, S_0) tali che rotolando S_0 su S, con un conveniente punto satellite, questo genera la superficie data Σ.

Si forma nel modo più semplice l'indicata equazione a derivate parziali riferendo la Σ alle sue linee di curvatura (u, v) e allora dobbiamo eguagliare all' unità la curvatura della forma (39). Prendiamo per incognita l'inversa T di R

$$T = \frac{1}{R}\,,$$

e poniamo ancora

$$A = \sqrt{E}\left(T + \frac{1}{r_2}\right), \quad B = \sqrt{G}\left(T + \frac{1}{r_1}\right),$$

onde l'equazione richiesta sarà

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + A\,B = 0. \tag{41}$$

Ma per le formole di CODAZZI (I pag. 416)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

abbiamo

$$\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\sqrt{G}}{A}\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$
$$\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}}{B}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

e se sostituiamo nella (41) ricordando che a causa della equazione di GAUSS

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2},$$

otteniamo l'equazione a derivate parziali richiesta sotto la forma:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\frac{\partial T}{\partial u}}{T + \frac{1}{r_2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\frac{\partial T}{\partial v}}{T + \frac{1}{r_1}}\right) + \sqrt{EG}\left\{T^2 + T\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\} = 0. \tag{X}$$

Di questa equazione da cui dipende il problema della generazione di una superficie data Σ come superficie di rotolamento possiamo assegnare, in termini finiti, ∞^3 soluzioni, riguardando, secondo il § 319, la Σ come una podare duplicata di una conveniente superficie S_0. Essendo (a,b,c) un punto fisso nello spazio pongasi

$$2\rho = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$
$$W = (x-a)\,X + (y-b)\,Y + (z-c)\,Z,$$

e nell'espressione

$$T = -\frac{W}{\rho}$$

avremo una soluzione della (X). (*)

Se domandiao in quali casi la (X) possiede una soluzione T *costante*, vediamo che ciò accade per tutte e sole le superficie a curvatura media costante

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -T.$$

In questo caso la superficie rotolante è una sfera di raggio $\frac{1}{T}$ e si ottiene nuovamente il teorema di BONNET al § 248 (I pag. 683).

§ 326.

Generazione di una superficie Σ come inviluppo di rotolamento.

Data una superficie Σ, che supponiamo non sviluppabile, ricerchiamo ora le sue possibili generazioni quale inviluppo di rotolamento.

Riprendendo l'analisi del § 324 fino all'equazione (38), dovremo attualmente determinare la funzione incognita R in guisa che la superficie S, luogo degli estremi M dei segmenti normali PM, ammetta una deformata per flessione S_0 nella quale R rappresenti la distanza del suo punto generico (u, v) da un piano fisso π. Occorre per ciò e basta che il ds^2 comune di S, S_0 si possa porre sotto la forma

$$ds^2 = dR^2 + d\sigma^2,$$

indicando questa volta con $d\sigma^2$ il quadrato dell'elemento lineare del piano. Vediamo dunque che:

Per risolvere il problema enunciato bisogna riportare sopra ogni normale della superficie data Σ un tale segmento $R = R(u, v)$ *che ne risulti nulla la curvatura della forma (definita positiva)*:

$$(1 - R^2K)(E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2) - (2R + R^2H)(D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2)$$

(*) La verifica si compie facilmente col calcolo utilizzando le formole di rappresentazione sferica.

Il luogo dei termini di questi segmenti R *dà una superficie d'appoggio, dopo di che la superficie rotolante* S_0, *insieme al piano satellite* π, *ne resta individuata, ed è determinabile còn quadrature* (*)

Come nel caso precedente si forma nel modo più semplice l'equazione *del secondo ordine* da cui dipende il problema, riferendosi alle linee di curvatura (u, v) di Σ, onde la forma differenziale, di cui dobbiamo annullare la curvatura, si scrive:

$$E\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1+\frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2.$$

Esprimendo che è zero la sua curvatura troviamo per la richiesta equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\frac{\partial R}{\partial u}}{R+r_2}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\frac{\partial R}{\partial v}}{R+r_1}\right\}=\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2},$$

alla quale, introducendo i coefficienti

$$\sqrt{e}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}\ ,\quad \sqrt{g}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}$$

dell'elemento lineare sferico, diamo la forma definitiva :

$$\text{(XI)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\frac{\partial R}{\partial u}}{R+r_2}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{e}{g}}\,\frac{\frac{\partial R}{\partial v}}{R+r_1}\right)=\sqrt{eg}.$$

Come per l'analoga equazione (X), osserveremo che anche qui possiamo assegnare, in termini finiti, ∞^2 soluzioni della (XI). Basta infatti segare un piano fisso π col piano tagente mobile di Σ e considerare l'uno o l'altro dei due piani bisettori del diedro fra i due. La superficie S inviluppo del piano bisettore dà la superficie dei centri di un inviluppo di sfere che toccano π e la simmetrica di Σ rispetto a π, e l'ordinata di un punto generico di S rispetto a π dà una soluzione R della (IX). Se si prende per π il piano xy si trova

$$R=\frac{z}{1-Z}\qquad \text{ovvero}\qquad R=-\frac{z}{1+Z},$$

(*) Basta infatti ridurre la forma a curvatura nulla $ds^2 - dR^2$ alla forma normale del piano.

valori che soddisfano in effetto alla (XI) come si verifica colle formole di rappresentazione sferica.

§ 327.

Superficie di rotolamento piana o sferica.

Se la superficie assegnata di rotolamento è un piano, ovvero una sfera, si può integrare completamente la (X) e trovare quindi tutte le generazioni del piano o della sfera come superficie di rotolamento.

a) Cominciando dal caso in cui la superficie Σ sia un piano, possiamo prenderne il ds^2 sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

e, ponendo nei risultati generali del § 324

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_2}=0,$$

basterà determinare $R = R(u, v)$ in guisa che

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{R^2}$$

appartenga alla sfera unitaria, dopo di che, elevando in ogni punto (u,v) del piano un segmento normale $= R(u, v)$, nel luogo degli estremi avremo una superficie S d'appoggio. Ora queste forme del ds'^2 sono le ben note isoterme, ed il problema è quindi completamente risolto.

Si osserva facilmente che queste superficie d'appoggio sono le superficie integrali di un'equazione del secondo ordine che formiamo nel modo seguente. Prendiamo il piano π di rotolamento per piano xy e sia $= PM$ l'ordinata fra π e la superficie S d'appoggio. Quando la S si deforma nella rotolante S_0 seco trascinando i segmenti MP, i termini P di questi si raccolgono nel punto satellite O. Per ciò la nostra z deve soddisfare alla seconda equazione (19) dell'applicabilità ; e viceversa se z è una tale soluzione la superficie $z = z(x, y)$ è una superficie d'appoggio S pel nostro problema.

Ora, in coordinate cartesiane si ha

$$z_{11}=\frac{r}{1+p^2+q^2}\ ,\quad z_{12}=\frac{s}{1+p^2+q^2}\ ,\quad z_{22}=\frac{t}{1+p^2+q^2}$$

$$E\,G - F^2 = 1 + p^2 + q^2\,,\quad 1 - \Delta_1 z = \frac{1}{1 + p^2 + q^2}$$

$$\Delta_{22}\, z = (1 - \Delta_1\, z)\ K,$$

$$\Delta_2 z = \frac{(1 + q^2)\, r - 2\, pqs + (1 + p^2)\, t}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

e sostituendo nella (19) si ha la richiesta equazione del secondo ordine

$$r + t = \frac{1 + p^2 + q^2}{z}. \tag{42}$$

Indicando con $\varphi\,(\zeta)$ una funzione arbitraria della variabile complessa $\zeta = x + i\,y$, con $\varphi_0\,(\zeta_0)$ la funzione coniugata della variabile coniugata $\zeta_0 = x - i\,y$, l'integrale generale della (42) è dato da

$$z = \frac{\varphi\,(\zeta)\,\varphi_0\,(\zeta_0) + 1}{2\,\sqrt{\varphi'\,(\zeta)\,\varphi'_0\,(\zeta_0)}}. \tag{43}$$ (*)

Come le superficie d'appoggio S, anche le corrispondenti superficie rotolanti S_0 sono gli integrali di una equazione del 2° ordine che si forma alla sua volta esprimendo che la distanza del punto (u, v) di S_0 dal punto fisso satellite soddisfa alla prima equazione dell'applicabilità.

b) Sia assegnata in secondo luogo, come superficie di rotolamento Σ, una sfera di raggio a, il cui ds^2 assumeremo sotto la forma

$$ds^2 = a^2\,\cosh^2 u\,(du^2 + dv^2) \quad \left(\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a}\right).$$

Qui dovremo determinare R in guisa che

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 \cosh^2 u\,(du^2 + dv^2)$$

appartenga alla sfera unitaria, ciò che è lo stesso problema sopra risoluto.

Ed anche in questo caso le superficie d'appoggio S e le rotolanti S_0 del problema sono integrali di un'equazione del secondo ordine di facile formazione.

(*) Se si pone $z = e^{\theta}$ la (42) diventa l'equazione di LIOUVILLE $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}$ di cui è noto l'integrale generale (43).

Tanto nel caso *a*) quanto nel caso *b*) le sfere coi centri sulla superficie S d'appoggio tangenti al piano di rotolamento in *a*), alla sfera di rotolamento in *b*), formano una congruenza di RIBAUCOUR (§ 316).

Se si considera la seconda falda $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo di sfere, ha luogo la notevole proprietà che : *la rappresentazione di* $\overline{\Sigma}$ *sul piano* Σ (*o sulla sfera*) *è conforme ; e viceversa se le due falde dell'inviluppo sono in rappresentazione conforme e l'una di esse è piana o sferica la congruenza corrisponde ad una generazione per rotolamento del piano o della sfera.*

Differiamo la dimostrazione di queste proprietà al prossimo Capitolo ove appariranno come casi particolari delle trasformazioni (di DARBOUX) delle superficie isoterme (V. § 351).

§ 328.

Le formole del Calò per le coppie (S_0, S) di superficie applicabili.

Le coppie (S_0, S) di superficie applicabili che dànno luogo alle generazioni del piano o della sfera come superficie di rotolamento, possono trovarsi in termini finiti con eleganti formole dovute al compianto prof. CALÒ, che le stabilì nel 1899 (*) senza conoscerne il significato nel problema di rotolamento.

a) Cominciando dal caso del piano quale superficie di rotolamento, le coppie corrispondenti S_0, S di superficie applicabili sono *caratterizzate* dalla proprietà che la distanza di ogni punto di S dal punto O satellite eguaglia quella del punto corrispondente in S per l'applicabilità dal piano π di rotolamento. Immaginiamo S_0, S così collocate nello spazio che il punto satellite O di S_0 sia nell'origine ed il piano π di rotolamento coincida col piano $x\,y$. Se $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $P \equiv (x, y, z)$ sono due punti corrispondenti (nell'applicabilità) di S_0, S, dovremo avere

$$\begin{cases} dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = z^2\ ; \end{cases} \tag{44}$$

e viceversa, quando queste due condizioni siano insieme soddisfatte, facendo

(*) Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie (Annali di matematica Serie 3ª Tomo IV).

rotolare S_0 su S, il punto satellite O descrive un piano. Ora se riferiamo la S_0 ad un sistema di coordinate polari R, θ, φ col centro in O ponendo

$$x_0 = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,\ y_0 = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,\ z_0 = R\cos\theta, \tag{45}$$

sicchè

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = d\,R^2 + R^2\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2),$$

la seconda delle (44), essendo $R = z$, diventa

$$R^2\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2) = dx^2 + dy^2. \tag{46}$$

Questo s'interpreta geometricamente così: *La projezione centrale della superficie* S_0 *sopra la sfera unitaria di centro* O *e quella ortogonale di* S *sul piano fisso dànno una rappresentazione conforme della sfera sul piano.*

Introduciamo la variabile complessa τ sulla sfera (I § 56)

$$\tau = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi},$$

sicchè le formole (45) si scrivono (l. c)

$$x_0 = R\,\frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1},\quad y_0 = \frac{R}{i}\,\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1},\quad z_0 = R\,\frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1},$$

e indichiamo, come sopra, con

$$\zeta = x + i\,y$$

la variabile complessa sul piano, onde sarà ζ funzione di τ, ovvero della coniugata τ_0. Limitandoci al primo caso, come è lecito, poniamo

$$\zeta = f(\tau),\ \zeta_0 = f_0(\tau_0),$$

e dalla (46) che si scrive

$$\frac{4\,R^2 d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2} = d\zeta\, d\zeta_0 = f'(\tau)\, f'_0(\tau_0)\, d\tau\, d\tau_0,$$

dedurremo

$$R = \frac{\tau\tau_0 + 1}{2}\,\sqrt{f'(\tau)\, f'_0(\tau_0)}\,.$$

Così le formole per le attuali coppie (S_0, S) di superficie applicabili prenderanno la forma definitiva (CALÒ):

$$\text{XII)}\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\tau+\tau_0}{2}\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)}\,,\ y_0 = \dfrac{\tau-\tau_0}{2\,i}\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)}\,,\ z_0 = \dfrac{\tau\tau_0-1}{2}\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)} \\ x = \dfrac{f(\tau)+f_0(\tau_0)}{2},\ y = \dfrac{f(\tau)-f_0(\tau_0)}{2i},\ z = \dfrac{\tau\tau_0+1}{2}\sqrt{f'(\tau)\,f'_0(\tau_0)}\,. \end{cases}$$

Queste coppie (S_0, S) dipendono, come le superficie d'area minima, (*) da una funzione arbitraria $f(\tau)$ della variabile complessa τ: *se si fa rotolare la* S_0 *sulla* S, *il punto satellite* O *situato nell'origine descrive un piano.*

b) Un secondo sistema di formole, egualmente stabilito dal CALÒ, risolve il problema analogo per le coppie (S_0 S) di superficie applicabili nel caso che la superficie Σ prescritta di rotolamento sia una sfera di raggio $= a$. Indicando, come sopra, con R la distanza del punto (u, v) di S_0 dal punto O satellite, con R′ la distanza del punto corrispondente di S dal centro O′ della sfera di rotolamento, avremo manifestamente

$$R' = a \pm R,$$

e senza alterare la generalità possiamo supporre p. e.

$$R' = a + R.$$

Essendo $dR^2 = dR'^2$, l'eguaglianza dei due elementi lineari di S_0, S dà questa volta

$$R^2\, d\sigma^2 = R'^2\, d\sigma'^2 = (R + a)^2\, d\sigma'^2, \tag{47}$$

dove $d\sigma^2$, $d\sigma'^2$ indicano i quadrati degli elementi lineari delle rispettive projezioni centrali di S_0, S′ sulle sfere unitarie coi centri O,O′, onde intanto: *le due projezioni centrali sferiche di* S,S′ *sono in rappresentazione conforme.*

Chiamando τ la variabile complessa sulla prima sfera, τ' quella sulla seconda potremo porre

$$\tau' = f(\tau),$$

(*) Vedremo più tardi (§ 496) che queste formole del CALÒ hanno un notevole significato in metrica non euclidea, poichè esse forniscono nella seconda falda $\bar{\Sigma}$ del corrispondente inviluppo di sfere le superficie a curvatura media costante $\frac{2}{a}$ dello spazio iperbolico, di curvatura costante negativa $-\frac{1}{a^2}$

dove $f(\tau)$ indica nuovamente una funzione *arbitraria* della variabile complessa τ. Ora dalla (47) abbiamo

$$\frac{4\,R^2\,d\tau\,d\,\tau_0}{(\tau\tau_0+1)^2}=\frac{4\,(R+a)^2\,d\tau'\,d\tau'_0}{(\tau'\tau'_0+1)^2},$$

ossia

$$\frac{R}{\tau\tau_0+1}=\frac{(R+a)\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)}}{f(\tau)\,f_0(\tau_0)+1},$$

da cui deduciamo

$$\begin{cases} R=a.\dfrac{(\tau\tau_0+1)\sqrt{f'(\tau)\,f'_0(\tau_0)}}{\Omega} \\ R+a=a\dfrac{f(\tau)\,f_0(\tau_0)+1}{\Omega} \end{cases}$$

con

$$\Omega=f(\tau)\,f(\tau_0)+1-(\tau\tau_0+1)\sqrt{f'(\tau)\,f'_0(\tau_0)}\,.$$

Corrispondentemente avremo una coppia (S_0, S) di superficie applicabili date dalle *seconde formole del* CALÒ:

$$\text{(XIII)}\quad \begin{cases} x_0=a\dfrac{(\tau+\tau_0)\sqrt{f(\tau)f'_0(\tau)_0}}{\Omega},\ y_0=\dfrac{a}{i}\dfrac{(\tau-\tau_0)\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)}}{\Omega},\ z_0=a\dfrac{(\tau\tau_0-1)\sqrt{f'(\tau)f'_0(\tau_0)}}{\Omega} \\ x=a\dfrac{f(\tau)+f_0(\tau_0)}{\Omega},\ y=\dfrac{a}{i}\dfrac{f(\tau)-f_0(\tau_0)}{\Omega},\ z=a\dfrac{f(\tau)f_0(\tau_0)-1}{\Omega} \end{cases}$$

$$\left(\Omega=f(\tau)\,f(\tau_0)+1-(\tau\tau_0+1)\sqrt{f'(\tau)\,f'(\tau_0)}\right).$$

Quando la prma superficie S_0 *si fa rotolare sulla seconda* S, *il punto satellite* O *descrive una sfera di raggio* $= a$.

§ 329.

Le congruenze rettilinee di rotolamento.

Ritorniamo alla teoria generale del rotolamento di superficie applicabili (S_0,S) e supponiamo che la superficie rotolante S_0 trascini seco, in sistema invariabile, una retta r, e sia escluso il caso di rigate rotolanti (§ 321).

La retta r, assumendo una doppia infinità di posizioni, descriverà una congruenza, che diremo una *congruenza rettilinea di rotolamento*. Mentre

le superficie e gli inviluppi di rotolamento sono superficie affatto generali, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, le congruenze rettilinee di rotolamento sono invece congruenze speciali, Le loro proprietà si riconoscono nel modo più semplice per via geometrica utilizzando le nozioni delle direzioni cinematicamente coniugate (§ 320 s. s.), e noi in primo luogo ricercheremo sopra ogni raggio r le posizioni dei fuochi e la giacitura dei piani focali attorno al raggio, come pure le sviluppabili della congruenza, le quali stanno in una semplice relazione colle sezioni piane della superficie rotolante S_0, fatte con piani per la retta satellite r, e quelle con piani normali all'asse. Per brevità diremo le prime i *profili meridiani* di S'_0, le seconde le *linee di livello*.

Consideriamo la superficie rotolante S_0 in una posizione generica, quando tocca la superficie d'appoggio S nel punto $M_0 \equiv M$, ed essendo r la posizione attuale della retta satellite (del raggio della congruenza) cerchiamo quali sono le posizioni successive r' di r incidenti con r.

Il movimento elementare di rotolamento che trasporta r in r' è (§ 320) una pura rotazione attorno ad una tangente Mt in $M \equiv M_0$ alle S_0, S. In questo movimento la r genererà un elemento di sviluppabile nei soli due casi seguenti: *a*) quando la Mt incontra r in un punto F_1, che coincide col punto ove il raggio r incontra il piano tngente in M alla S e sarà sul raggio r il primo fuoco F_1 *b*) quando la Mt sia perpendicolare alla r, nel qual caso il punto d'incontro di r colla posizione r' successiva (secondo fuoco) sarà manifestamente nel piede F_2 della perpendicolare abbassata da M sopra r. Nel primo caso è chiaro che il piano del raggio r e del successivo r' (secondo piano focale) è il piano condotto per r normalmente al piano (M, r); nel secondo caso invece il piano rr' (primo piano focale) è quello condotto per r normalmente al piano tangente π di S.

Formuliamo questi risultati nella semplice proposizione seguente: *A*) *Ad ogni raggio* r *della congruenza rettilinea di rotolamento si coordini il corrispondente piano tangente* π *della superficie d'appoggio* S *e il relativo punto* M *di contatto. Il primo fuoco* F_1 *è il punto ove* r *incontra* π, *ed il secondo fuoco* F_2 *coincide col piede della perpendicolare abbassata da* M *sopra* r; *il piano focale* π, *relativo ad* F_1 *è il piano condotto per* r *normalmente a* π *il secondo piano focale*, π_2, *è il piano condotto per* r *normalmente al piano* (M, r).

Le considerazioni precedenti rendono egualmente facile di caratterizzare le sviluppabili (sempre reali) della nostra congruenza. E infatti le tangenti in M alla S che rappresentano gli assi istantanei di rotazione nei rispettivi movimenti elementari pei quali r descrive i due elementi di sviluppabile

sono, come si è visto la tangente t appoggiata ad r e quella t' normale ad r, e poichè lo spostamento del centro istantaneo M di rotazione avviene nelle direzioni cinematicamente coniugate a t, t' ne concludiamo.

B) Le sviluppabili della congruenza di rotolamento corrispondono in una serie a quelle linee della superficie d'appoggio S *che sono cinematicamente coniugate alle trasformate dei profili meridiani della superficie rotolante* S_0, *e in una seconda serie alle linee cinematicamente coniugate alle linee di livello di* S_0.

Rispetto alla costruzione dei fuochi F_1, F_2 e dei piani focali π_1, π_2 di una congruenza di rotolamento, contenuta nella proposizione A), è assai notevole che essa resta sempre la stessa quando resti la stessa la superficie rotolante S_0 e la retta satellite r, comunque varii per flessione la superficie S d'appoggio, cioè:

Se si deforma comunque la superficie S *d'appoggio di cui ogni elemento piano trascini seco invariabilmente il corrispondente raggio r della congruenza i due fuochi* F_1, F_2 *sopra ogni raggio ed i piani focali* π_1, π_2 *attorno al raggio serbano posizioni invariabili.*

La proprietà è tanto più notevole che essa non si verifica in generale per alcuna altra congruenza *a sviluppabili distinte*, i cui raggi vengano singolarmente associati, in sistema rigido, ai piani tagenti di una superficie S che si deformi per flessione. (*)

Applicando le proposizioni A) e B), possiamo subito scrivere le formole che assegnano gli elementi della congruenza di rotolamento, e cioè la distanza 2δ dei due fuochi, quella $2d$ dei punti limiti e l'angolo σ dei piani focali.

Scriviamo l'equazione della superficie S_0 rotolante sotto la consueta forma cartesiana

$$z = z(x, y),$$

e usiamo le notazioni di MONGE per le derivate parziali, assumendo l'asse delle z come retta satellite e cercando i valori di 2δ, $2d$, σ quando la S_0 tocca la superficie d'appoggio nel suo punto generico $M \equiv (x, y)$. Il piano tagente in (x, y) alla S_0 incontra l'asse Oz nel punto di ordinata

$$z_1 = z - p\,x - q\,y$$

che rappresenta dunque per la A) l'ordinata del primo fuoco F_1. Quella del secondo F_2 è quindi per A) la z stessa

(*) Vedi una nota dell'autore nei Rendiconti dei Lincei (gennaio 1915).

$$z_2 = z,$$

onde $z_2 - z_1 = px + qy$, e per la distanza 2δ dei fuochi abbiamo:

$$2\delta = px + qy. \tag{48}$$

Ora la normale in F_1 al primo piano focale è la normale in F_1 alla Oz giacente nel piano tangente a S_0 ed ha quindi i coseni di direzione

$$X_1 = \frac{q}{\sqrt{q^2+q^2}}, \qquad Y_1 = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad = 0;$$

la normale in F_2 al secondo piano focale è la perpendicolare MF_2 calata da M su Oz, indi

$$X_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad Y_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Z_2 = 0.$$

Per l'angolo σ dei piani focali vale quindi la formola

$$\cos\sigma = \frac{q\,x - p\,y}{\sqrt{p^2+q^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{49}$$

e la conseguente

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{px + qy}{\sqrt{p^2+q^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{49*}$$

E siccome la distanza $2d$ dei punti limiti è data (§ 178) da $2d = \dfrac{2\,\delta}{\operatorname{sen}\sigma}$, avremo

$$2d = \sqrt{p^2+q^2}\,\sqrt{x^2+y^2}. \tag{50}$$

In fine notiamo che pel parametro medio H della congruenza definito (§ 178) da

$$H = 2\sqrt{d^2 - \delta^2},$$

risulta la formola

$$H = q\,x - p\,y. \tag{51}$$

§ 330.

Congruenze di rotolamento paraboliche.

Cerchiamo in primo luogo quali sono le congruenze di rotolamento paraboliche, cioè a sviluppabili coincidenti. La proposizione B) dimostra che la congruenza di rotolamento sarà parabolica solo quando nella superficie rotolante S_0 i profili meridiani coincidono colle linee di livello, il che avviene quando la S_0 è una superficie conoidale retta avente per asse la retta satellite. La stessa cosa segue anche subito dalla formola (48), poichè, dovendosi allora annullare δ, si deve avere

$$px + qy = 0$$

cioè

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{52}$$

che è appunto l'equazione delle conoidi rette. Dunque: *Le congruenze paraboliche di rotolamento sono quelle generate dall'asse di una conoide retta arbitraria che rotoli sopra una qualunque superficie (non rigata) applicabile.*

Dalla proposizione generale A) al paragrafo precedente vediamo ora subito che le normali all'unica superficie focale Σ sono le tangenti alle geodetiche g della superficie S d'appoggio trasformata delle generatrici della conoide retta S_0, talchè la Σ è un'*evolvente* della S, precisamente il tratto MF_2 di normale di Σ compreso fra Σ, S (il corrispondente raggio principale di curvatura di Σ) eguaglia il tratto di generatrice della conoide limitato all'asse.

Ora dimostriamo facilmente che la curvatura K dell'evolvente Σ è costante lungo le linee di curvatura di Σ che corrispondono alle geodetiche g di S, ossia alle generatrici $\frac{x}{y} = \text{cost}^{\text{te}}$ di S_0. Difatti, la congruenza essendo parabolica, abbiamo (§ 178)

$$2d = \sqrt{-\frac{1}{K}},$$

mentre per la (50) e per la (51) risulta

$$2d = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f'\left(\frac{y}{x}\right) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sulla evolvente Σ della deformata S della conoide retta le linee $K = \text{cost}^{\text{te}}$ sono dunque linee di curvatura, onde per una proprietà osservata al § 160 (pag. 425) segue che alle *linee asintotiche della evolvente Σ corrispondono le linee asintotiche della evoluta* S. Questo segue anche dal teorema di CHIEFFI (§ 153), poichè infatti se consideriamo una qualunque asintotica a di S e la rigata delle tangenti alle g nei punti di a, questa è una deformata della conoide retta ed ha per linea di stringimento la linea a' corrispondente Σ. Ma le generatrici di questa rigata, che sono le normali di Σ lungo a', dànno le binormali di a', la quale è dunque asintotica di Σ. Inversamente è facile dimostrare che se, per una superficie Σ a curvature opposte, le linee $K = \text{cost}^{\text{te}}$ sono linee di curvatura, la relativa falda S dell'evoluta è applicabile sopra una conoide retta e le geodetiche di S corrispondenti alle $K = \text{cost}^{\text{te}}$ di Σ corrispondono alle generatrici. Questo proviamo, con GOURSAT, (*) nel modo seguente. Se con

$$ds^2 = du^2 + C^2\, dv^2$$

denotiamo l'elemento lineare dell'evoluta S, per i raggi principali di curvatura dell'evolvente Σ avremo

$$r_1 = u,\ r_2 - r_1 = -\frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}}.$$

Ma si ha per ipotesi

$$r_1 r_2 = -V^2,$$

con V funzione di v, indi

$$u\left(u - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}}\right) = -V^2, \text{ ossia}$$

$$\frac{\partial\, lg\, C}{\partial u} = \frac{u}{u^2 + V^2}.$$

Integrando e disponendo del parametro v si può fare

$$C = \sqrt{u^2 + V^2},$$

(*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. V. (1891).

cioè

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + V^2)\, dv^2,$$

che appartiene appunto alle conoidi rette.

Possiamo compendiare questi risultati nel teorema: *Le congruenze paraboliche di rotolamento si formano conducendo le tangenti alle asintotiche dell'uno o dell'altro sistema di quelle superficie* Σ *a curvature opposte le cui linee* $K = \text{cost}^{te}$ *sono linee di curvatura.*

Notevole è il caso particolare delle superficie Σ pseudosferiche per le quali la conoide retta diventa l'elicoide rigata ad area minima.

Così la nota relazione fra le superficie pseudosferiche (evolventi) e le deformate del catenoide (evolute) si può presentare sotto questa forma:

Se l'elicoide rigata d'area minima rotola su qualunque superficie (non rigata) applicabile, l'asse dell'elicoide descrive la congruenza delle tangenti alle asintotiche di un sistema di una superficie pseudosferica.

§ 331.

Altre congruenze speciali di rotolamento.

Le formole (49), (50), (51) dimostrano che, in generale, se alla congruenza di rotolamento imponiamo di soddisfare particolari relazioni metriche fra σ, δ, d queste condizioni vincoleranno soltanto la superficie S_0 rotolante e saranno poi sempre soddisfatte comunque varii la superficie applicabile d'appoggio. Qui consideriamo cinque casi particolari notevoli.

a) Congruenze normali di rotolamento. In questo caso deve essere

$$\sigma = \frac{\pi}{2},$$

ossia

$$q\,x - p\,y = 0.$$

L'integrale generale di questa è

$$z = f\,(x^2 + y^2)$$

e rappresenta la più generale superficie di rotazione, coll'asse quale retta satellite. Dunque:

La più generale congruenza normale di rotolamento è generata dall'asse di una superficie arbitraria di rotazione che rotola sopra una qualunque superficie applicabile S. È facile vedere che in tal caso la falda focale S_1 della congruenza è la superficie S_1 complementare di S e i raggi della congruenza sono le tangenti ad un sistema di geodetiche di S_1 che sono fra loro congruenti per la flessione continua della S_1 in sè medesima.

b) Congruenze di rotolamento a parametro medio costante m. Queste costituiscono una prima generalizzazione del caso *a*), che si ha quando $m = 0$. La (51) dice che le superficie rotolanti sono in tal caso le superficie integrali dell'equazione

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = m,$$

ovvero, introducendo coordinate polari col porre

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta,$$

della

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = m.$$

L'integrale generale è

$$z = m\,\theta + F\,(\rho), \tag{53}$$

con F funzione arbitraria di $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e rappresenta una qualunque superficie elicoidale d'asse Oz. Dunque: *Le congruenze di rotolamento a parametro medio costante m sono tutte e sole quelle generate dall'asse di una superficie elicoidale di parametro m che rotola sopra una qualunque superficie applicabile.*

c) Congruenze di rotolamento con angolo σ *costante dei piani focali.*

Qui le superficie rotolanti sono gli integrali della equazione a derivate parziali

$$px + qy = c\,(py - qx) \quad (c \text{ costante})$$

o in coordinate polari

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{c}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

L'integrale generale è

$$\rho = e^{\frac{\theta}{c}} f\,(z) \qquad (f \text{ funzione arbitraria}) \tag{54}$$

d) Congruenze di rotolamento a distanza focale 2δ *costante* $= c$.

L'equazione a derivate parziali corrispondente è $px + qy = c$, ossia

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{c}{\rho} ,$$

coll'integrale generale

$$z = c \log \rho + f(\theta) \quad (f \text{ arbitraria}),$$

od anche

$$\rho = e^{\frac{\theta}{c}} \Theta \quad (\Theta = \psi(\theta)). \tag{55}$$

e) Congruenze pseudosferiche. Si verificano insieme le condizioni del caso *b)* e del caso *d)* quando si prenda

$$z = m\,\theta + c \log \rho,$$

cioè la superficie rotolante sia *l'elicoide logaritmica*. Allora la distanza dei fuochi è costante $= c$ ed è pure costante la distanza dei punti limiti $2d = \sqrt{c^2 + m^2}$, onde la congruenza generata è pseudosferica. Dunque: *Se l'elicoide logaritmica di profilo meridiano $z = c \log \rho$, e di parametro elicoidale m, rotola su qualunque superficie applicabile, l'asse descrive una congruenza pseudosferica le cui due falde* focali *hanno la curvatura costante negativa* $K = -\frac{1}{c^2 + m^2}$.

Aggiungiamo che nelle ricerche dei §§ 271, 272 sulla composizione delle trasformazioni di BACKLUND è contenuto implicitamente il risultato che ogni congruenza pseudosferica è generabile, come congruenza di rotolamento, nella maniera enunciata, ed anzi in ∞^1 modi diversi.

§ 332.

Le superficie di Peterson.

Le superficie (54) e (55) che risolvono, quali superficie rotolanti, i due problemi delle congruenze di rotolamento, il cui angolo dei piani focali, ovvero la distanza focale, è costante appartengono ad una classe più generale di superficie, dipendenti da due funzioni arbitrarie, che rispondono al problema seguente: *Quali sono le superficie nelle quali formano un sistema coniugato le sezioni fatte con piani per una retta propria r e quelle in piani normali alla retta stessa (asse)?*

Riferita la superficie, come sopra, a coordinate cilindriche ρ, θ, z, e lasciando da parte il caso delle conoidi rette, potremo prendere a variabili indipendenti θ, z, riguardando $\rho = \rho(z, \theta)$ come l'equazione della superficie. Ora avendosi

$$x = \rho \cos\theta \ , \ y = \rho \operatorname{sen}\theta \ , \ z = z \ ,$$

esprimiamo che formano un sistema coniugato i profili meridiani $\theta = \text{cost}^{\text{te}}$ e le linee di livello $z = \text{cost}^{\text{te}}$ scrivendo che è zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\theta\,\partial z} & \frac{\partial^2 y}{\partial\theta\,\partial z} & \frac{\partial^2 z}{\partial\theta\,\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} ,$$

cioè

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\rho}{\partial\theta\,\partial z}\cos\theta - \frac{\partial\rho}{\partial z}\operatorname{sen}\theta \ , & \frac{\partial^2\rho}{\partial\theta\,\partial z}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta & 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta \ , & \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta & 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta & \frac{\partial\rho}{\partial z}\operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} .$$

Questo dà per ρ l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta\,\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\rho}{\partial z} ,$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial\theta\,\partial z} = 0 .$$

L'integrale generale è

$$\rho = \Theta\, Z, \tag{56}$$

dove Θ, Z indicano due funzioni arbitrarie, la prima di θ, la seconda di z. Le superficie di questa classe si diranno superficie di PETERSON: La forma (56) della loro equazione rende evidente che le loro linee di livello $z = \text{cost}^{\text{te}}$ projettate ortogonalmente sul piano $x\,y$, dànno curve omotetiche rispetto all'origine, e similmente i profili meridiani $\theta = \text{cost}^{\text{te}}$ sono curve affini col-

l'asse Oz della superficie come asse di affinità. Per definire una superficie di PETERSON basta dare (ad arbitrio) una linea di livello ed un profilo meridiano che si incrocino in un punto, restando così individuate, dalla (56), le due funzioni arbitrarie Θ, Z. Queste superficie godono della notevole proprietà, scoperta da PETERSON, che esse possono assoggettarsi ad una flessione continua durante la quale rimangono superficie di PETERSON e si corrispondono su due qualunque deformate i profili meridiani come le linee di livello. Le formole effettive per la deformazione sono date da PETERSON sotto la forma seguente. Calcolando il ds^2 della superficie S, data dalla (56), in coordinate cilindriche

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + dz^2$$

si ha

$$(57) \qquad ds^2 = (1 + \Theta^2 Z'^2)\, dz^2 + 2\,\Theta\Theta' ZZ'\, dz\, d\theta + Z^2 (\Theta^2 + \Theta'^2)\, d\theta^2,$$

e se con ρ_1, θ_1, z_1 indichiamo le coordinate cilindriche del punto della deformata S_1 di S corrispondente al punto (ρ, θ, z) di S, abbiamo per definire S_1, le formole effettive di PETERSON *contenenti la costante arbitraria* k:

$$(58) \qquad \rho_1 = Z\sqrt{\Theta^2 + k}\ ,\ z_1 = \int \sqrt{1 - kZ'^2}\, dz\ ,\ \theta_1 = \int \frac{\sqrt{\Theta^4 + k(\Theta'^2 + \Theta^2)}}{\Theta^2 + k}\, d\theta\ .$$

Con queste si verifica subito che il ds_1^2 della superficie S_1

$$ds_1^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2\, d\theta_1^2 + dz_1^2$$

coincide col ds^2 dato dalla (57) (*).

Per questa proprietà le superficie di PETERSON rientrano nella classe generale (§ 310) delle superficie con sistema coniugato permanente in una deformazione continua. Le loro associate nelle corrispondenti deformazioni infinitesime sono le *conoidi rette;* e viceversa se si prende qualunque conoide retta corrispondente alle formole di LELIEUVRE (Cf. § 310).

$$\xi = v\ ,\ \eta = \psi(v)\ ,\ \zeta = u$$

(*) Si osservi chè in particolare supponendo Θ costante la superficie di PETERSON diventa una superficie di rotazione e le (58) dànno le ∞^1 superficie di rotazione applicabili. E' notevole che il profilo meridiano della superficie di PETERSON si deforma, indipendentemente dalla forma della linea di livello, come il meridiano di una superficie di rotazione.

e della relativa equazione per le deformazioni infinitesime

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} = 0$$

si prende una soluzione $\Phi = \varphi(u)$, la superficie associata è la più generale superficie di PETERSON.

Ritornando alle superficie (54), (55), che dànno le superficie rotolanti nei casi c) e d), si osserva che la prima è una superficie di PETERSON con una spirale logaritmica per linea di livello, col polo sull'asse, e profilo meridiano arbitrario; la seconda ha per profilo meridiano la curva logaritmica coll'asse per asintoto e linea di livello arbitraria.

CAPITOLO XX.

I teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche rotonde e le trasformazioni di Ribaucour.

Problemi di deformazione di congruenze di sfere che conducono ai teoremi di GUICHARD sulle deformate delle quadriche rotonde. - Primo e secondo teorema di GUICHARD. - Le trasformazioni di RIBAUCOUR per inviluppi di sfere in generale. - Elementi della superficie trasformata e della superficie dei centri. - Trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie minime, delle superficie a curvatura costante e delle superficie isoterme. - Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR in generale. - Teorema speciale di permutabilità per le superficie minime, per le superficie a curvatura costante e per le superficie isoterme.

§ 333.

Enunciato di un nuovo problema.

Nella prima parte del presente Capitolo noi andiamo a trattare un problema di deformazione di congruenze di sfere, nel quale, come nel problema già trattato al § 318, si domanda che in qualunque deformazione della congruenza l'inviluppo (una falda dell'inviluppo) goda costantemente di una determinata proprietà geometrica. Il problema principale di cui ci occuperemo è il seguente:

Per quali congruenze di sfere accade che, deformando comunque la superficie dei centri, una falda dell'inviluppo conservi sempre la medesima curvatura media costante ?

La risoluzione di questo problema ci porterà ai notevoli teoremi sulle deformate delle quadriche rotonde che GUICHARD ha fatto conoscere nel 1899, teoremi che hanno inaugurato la nuova teoria delle deformate delle quadriche generali, di cui tratteremo nei Capitoli seguenti. Da questi teoremi di GUICHARD, che collegano le deformate delle quadriche di rotazione attorno all'asse focale colle deformate della sfera, dedurremo una *teoria delle trasformazioni* per le superficie applicabili sulle indicate quadriche, mediante un processo d'inversione di cui un primo saggio è stato già esposto nel Volume precedente § 278, nelle applicazioni del teorema di permutabilità.

Per trattare il problema sopra enunciato, ci serviremo delle formole calcolate al § 315 per gli elementi dell'inviluppo Σ di sfere. Ma siccome in queste formole è necessario supporre diverso da zero il binomio $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2$, dobbiamo in primo luogo eliminare il caso che, per qualunque deformazione della superficie dei centri, si abbia sempre

$$\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = 0, \tag{1}$$

vale a dire una falda Σ dell'inviluppo (indi come si vedrà anche l'altra) rimanga costantemente sviluppabile. A causa dei valori di τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, dati dalle (26) § 315, la condizione (1) si traduce nell'altra:

$$(R_{11} - D\sqrt{1-\Delta_1 R})\ (R_{22} - D''\sqrt{1-\Delta_1 R}) - (R_{12} - D'\sqrt{1-\Delta_1 R})^2 = 0,$$

cioè sviluppando:

$$R_{11}R_{11} - R_{12}^2 + K(EG-F^2)(1-\Delta_1 R) - \sqrt{1-\Delta_1 R}\,(D''R_{11} - 2D'R_{12} + DR_{22}) = 0,$$

dove K indica la curvatura della superficie dei centri.

Ora questa relazione lineare in D, D′, D″ deve verificarsi per ipotesi in qualunque flessione della S, onde, secondo l'osservazione al § 318, si risolverà nelle equazioni separate

$$R_{11} = R_{12} = R_{22} = 0 \tag{2}$$

$$K(EG - F^2)(1 - \Delta_1 R) = 0. \tag{3}$$

Ne segue intanto che la nostra condizione sarà soddisfatta anche per la determinazione opposta del radicale $\sqrt{1-\Delta_1 R}$, cioè, insieme alla prima falda Σ dell'inviluppo di sfere, anche la seconda $\overline{\Sigma}$ rimarrà costantemente sviluppabile.

Ora la (3), essendo Δ, $R < 1$, dimostra che si ha $K = 0$, cioè la superficie stessa S dei centri è sviluppabile. Scrivendone l'elemento lineare sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

segue dalle (4) che si ha

$$R = a\,u + b\,v + c \qquad (a, b, c \text{ costanti}).$$

Questo valore di R soddisfa alla prima equazione dell'applicabilità (§ 314), cioè esiste una configurazione S_0 della S nella quale l'inviluppo Σ si riduce ad un piano. Ma le formole (13) del detto § 314 dimostrano che i valori D_0, D'_0, D''_0 appartenenti alla S_0 sono nulle e per ciò la S_0 medesima è un piano. La soluzione del problema proposto è data quindi dalla costruzione seguente:

Si considerino le sfere coi centri sopra un piano π e tangenti ad un altro piano π', indi al simmetrico rispetto a π. Deformando comunque il piano π in una sviluppabile, l'inviluppo delle sfere ha sempre le due falde sviluppabili.

§. 334.

Caso in cui l'inviluppo Σ rimane a curvatura media H costante.

Supponiamo che, in qualunque deformazione della superficie S dei centri, la curvatura media della prima falda Σ dell'inviluppo rimanga una costante H, cioè i suoi raggi principali di curvatura r_1, r_2 siano costantemente legati dalla relazione

$$H\, r_1\, r_2 - (r_1 + r_2) = 0.$$

Sostituendo in questa i valori di $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ dati dalle (VII) § 315, abbiamo dapprima

$$(HR^2+2R)(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)-(HR+1)(E_0\tau_{22}-2F_0\tau_{12}+G_0\tau_{11})+H(E_0G_0-F_0^2)=0$$

e sviluppando colle (26) ibid.

$$\begin{aligned}(4)\quad &(HR^2+2R)\{R_{11}R_{22}-R_{12}^2+K(1-\Delta_1 R)(EG-F^2)-\sqrt{1-\Delta_1 R}[R_{22}D-2R_{12}D'+R_{11}D'']\}-\\ &-(HR+1)\{E_0R_{22}-2F_0R_{12}+G_0R_{11}-\sqrt{1-\Delta_1 R}[G_0D-2F_0D'+E_0D'']\}+\\ &+H(1-\Delta_1 R)(EG-F^2)=0.\end{aligned}$$

Questa relazione lineare in D, D', D'' deve, per la solita ragione, risolversi in un'identità, e quindi intanto essa avrà pure luogo coll'altra determinazione del radicale $\sqrt{1-\Delta_1 R}$, cioè: *anche la seconda falda Σ' dell'inviluppo conserverà la medesima curvatura media costante.*

Ora se nella (4) eguagliamo a zero i coefficienti di D, D', D'' otteniamo in primo luogo per la R il sistema differenziale seguente:

$$(I)\qquad R_{11}=\frac{HR+1}{HR^2+2R}E_0\ ,\quad R_{12}=\frac{HR+1}{HR^2+2R}F_0\ ,\quad R_{22}=\frac{HR+1}{HR^2+2R}G_0\ ,$$

poi eguagliando a zero il termine indipendente da D, D', D'', col tener conto delle (I) stesse, si ha con breve calcolo

$$(5)\qquad K=\frac{1}{(HR^2+2R)^2}\,.$$

Però questa può trascurarsi, poichè si ottiene anche come conseguenza differenziale del sistema (I) formando i binomii

$$\frac{\partial R_{11}}{\partial v}-\frac{\partial R_{12}}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial R_{22}}{\partial u}-\frac{\partial R_{12}}{\partial v}\ ,$$

coll'applicare le identità scritte a pag. 359 del Vol. I. La questione è dunque ricondotta ad esaminare se esistono forme del ds^2 per la superficie S dei centri tali che il sistema differenziale (I) nell'incognita R ammetta soluzioni. E prima si osservi che il sistema (I) rientra nell'altro (32) (§ 318) ottenuto per la ricerca delle congruenze di sfere di RIBAUCOUR illimitatamente deformabili, onde si vede intanto che: *la superficie* S *dei centri sarà applicabile sopra una superficie di rotazione e la congruenza di sfere rimarrà congruenza di* RIBAUCOUR *in qualunque deformazione.* Dopo ciò resta da ricercare, per quali forme dei ds^2 di una superficie di rotazione:

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 \qquad (r = \varphi(u)),$$

avviene che la funzione R di u definita dalla formola (34) § 318 soddisfi alle (I). Prima ancora di eseguire il calcolo osserviamo che è facile trovare delle (I) un *integrale primo.* Dalle formole (∂) § 314 risulta infatti che, verificate le (I), si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta_1 R}{\partial u}=(1-\Delta_1 R)\frac{HR+1}{HR^2+2R}\frac{\partial R}{\partial u}\ ,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta_1 R}{\partial v}=(1-\Delta_1 R)\frac{HR+1}{HR^2+2R}\frac{\partial R}{\partial v}\ ,$$

ossia

$$\frac{\partial\, log\,(1-\Delta_1 R)}{\partial u}=-\frac{\partial log(HR^2+2R)}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial\, log\,(1-\Delta_1 R)}{\partial v}=-\frac{\partial log(HR^2+2R)}{\partial v}$$

da cui integrando

$$(I^*) \qquad 1 - \Delta_1 R = \frac{c}{H R^2 + 2R} \qquad (c \text{ costante}),$$

che è appunto l'integrale primo cercato.

Per il seguito della ricerca è bene anche osservare che alle tre equazioni (I) del secondo ordine è lecito sostituire la sola media di esse e la (I*) del primo ordine, *purchè non si annulli nè l'uno nè l'altro dei due binomii*

$$G\frac{\partial R}{\partial u} - F\frac{\partial R}{\partial v}\ ,\ E\frac{\partial R}{\partial v} - F\frac{\partial R}{\partial u}\ .$$

Difatti, derivando logaritmicamente la (I*) e tenuto conto della media delle (I), ne seguono allora le altre due.

§. 335.

Forme effettive del ds^2 — Primo teorema di Guichard.

Scriviamo il ds^2 della nostra superficie di rotazione sotto la forma

$$(6) \qquad ds^2 = T^2\, dr^2 + r^2\, dv^2,$$

dove T sarà, come R, una funzione di r da determinarsi. (*) I valori dei simboli di CHRISTOFFEL per la forma (6) sono

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{T'}{T}\ ,\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0,\ \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{r}{T^2}$$

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0,\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r}\ ,\ \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 0,$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad r, e si ha inoltre

$$E_0 = T^2 - R'^2,\ F_0 = 0,\ G_0 = r^2.$$

(*) Escluderemo il caso di R costante, nel qual caso sarebbe per le (I) $HR + 1 = 0$, $R = -\frac{1}{H}$ e la (5) darebbe $K = \frac{1}{R^2}$. Questa soluzione riconduce manifestamente alla relazione fra le superficie a curvatura media costante e le deformate della sfera (BONNET).

La media delle (I) si risolve in un'identità, e le altre due dànno il sistema differenziale ordinario per R, T

$$(7) \qquad \begin{cases} R'' - \frac{T'}{T}R' = \frac{HR+1}{HR^2+2R}(T^2 - R'^2) \\ R' = \frac{HR+1}{HR^2+2R}\cdot T^2 r, \end{cases}$$

che integrato darà tutte le soluzioni del problema.

Derivando la seconda delle (7) rapporto ad r, coll'osservare la prima, otteniamo il sistema equivalente :

$$(7^*) \qquad T' = \frac{T^3 r}{(HR^2+2R)^2}\ ,\quad R' = \frac{HR+1}{HR^2+2R}\cdot T^2 r,$$

e dividendo

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{HR+1}{HR^2+2R} - \frac{H}{HR+1}\right)R',$$

da cui integrando

$$T^2 = c'\frac{HR^2+2R}{(HR+1)^2}$$

con c' costante arbitraria. Sostituendo nella seconda delle (7*), viene

$$(8) \qquad R' = \frac{c' r}{HR+1}\ ,$$

e con una nuova integrazione

$$(9) \qquad HR^2 + 2R = c' r^2 + c,$$

con c nuova costante arbitraria.

In definitiva dunque le due formole

$$(10) \qquad \begin{cases} (HR+1)^2 = H(c' r^2 + c) + 1 \\ T^2 = \frac{c'(c' r^2 + c)}{(HR+1)^2}\ , \end{cases}$$

restando c, c' costanti arbitrarie, dànno tutte le soluzioni del problema.

Ma, in riguardo alla realità delle soluzioni, si osservi in primo luogo che dovrà essere

$$H(c' r^2 + c) + 1 > 0,$$

e in secondo luogo avremo inviluppo reale solo per $\Delta R < 1$, ovvero $R'^2 < T^2$ il che, per le (8), (10), si traduce nella diseguaglianza

$$c'^2 r^2 < c' (c' r^2 + c), \text{ o } cc' > 0 ;$$

dunque : *le due costanti* c, c' *debbono avere egual segno.* In fine si osservi che si ha

$$1 - \Delta_1 R = 1 - \frac{R'^2}{T^2} = 1 - \frac{c' r^2}{c' r^2 + c} = \frac{c}{c' r^2 + c} ,$$

cioè

$$1 - \Delta_1 R = \frac{c}{HR^2 + 2R} ,$$

conformemente all'integrale primo (I*).

Si tratta ora di interpretare geometricamente le soluzioni così ottenute pel nostro problema, nella qual cosa giova separare il caso H=0 dall'altro $H \neq 0$.

Caso $H = 0$. In questo caso le formole (9), (10) dànno

$$\begin{cases} 2R = c' r^2 + c \\ T^2 = c'^2 r^2 + cc', \end{cases}$$

indi

$$ds^2 = (c'^2 r^2 + cc') dr^2 + r^2 dv^2.$$

Siccome il prodotto cc' deve essere positivo, alterando r per un fattore di proporzionalità, possiamo fare $cc' = 1$, ovvero

$$ds^2 = (1 + k^2 r^2) dr^2 + r^2 dv^2 \quad (k \text{ costante}).$$

Questo è il ds^2 del *paraboloide di rotazione* colla parabola meridiana

$$z = \frac{kr^2}{2} ,$$

e il valore che ne risulta per R

$$R = \frac{1}{2k} (1 + k^2 r^2)$$

combina colla distanza del punto mobile sul paraboloide dal fuoco. Dunque quando la superficie S dei centri assume la configurazione del paraboloide tutte le sfere vengono a passare pel fuoco che rappresenta la prima

falda dell'inviluppo mentre la seconda si riduce al piano direttore. Siamo così pervenuti all'importante teorema, che diciamo il *primo teorema di* GUICHARD :

Se il paraboloide rotondo rotola sopra qualunque sua deformata, il fuoco descrive una superficie d'area minima.

È poi da notarsi che, essendo il paraboloide congruente (come ogni altra superficie di rotazione) colla sua superficie simmetrica, può farsi rotolare sull'una o sull'altra faccia della superficie S d'appoggio (cf. § 319) generando così l'una o l'altra falda dell'inviluppo.

Risulta dalla nostra analisi che nessuna altra superficie S_0, accompagnata da un punto satellite O, può godere, come il paraboloide rotondo, della proprietà che rotolando S_0 su *qualunque* deformata, il punto O descriva sempre una superficie minima. Anzi più generalmente vediamo che *in nessun altro inviluppo di sfere avviene che, deformando comunque la superficie di centri, l'inviluppo si conservi sempre ad area minima.*

Per dedurre dalle nostre formole il teorema di GUICHARD ci siamo valsi della forma *integrata* del sistema differenziale (I), che qui si scrive

$$R_{11} = \frac{E_0}{2R} , \quad R_{12} = \frac{F_0}{2R} , \quad R_{22} = \frac{G_0}{2R} .$$

Ma osserviamo che (riconosciuta l'esistenza di soluzioni pel sistema) si può stabilire il medesimo risultato servendosi soltanto del sistema differenziale stesso, dal quale segue la (5)

$$K = \frac{1}{4R^2} .$$

Dalle formole ora scritte segue infatti che R soddisfa tanto alla prima che alla seconda equazione dell'applicabilità § 314, e d'altra parte i valori che neseguono nei due casi, secondo le formole (13 e (18) ibid. si riscontrano essere eguali e di segno contrario; essi corrispondono per ciò a due configurazioni simmetriche della superficie S dei centri. Esiste per ciò una configurazione S_0 della S nella quale tutti i punti della superficie equidistano da un punto fisso O e da un piano fisso π ; dunque S_0 è un paraboloide rotondo col fuoco in O e avente π per piano direttore.

§. 336.

Caso $H \neq 0$ — Secondo teorema di Guichard.

Nel caso $H \neq 0$ la forma (6) del ds^2 è data, per le (10), da

$$ds^2 = \frac{c'^2 r^2 + cc'}{H c' r^2 + H c + 1}\, dr^2 + r^2\, dv^2, \tag{11}$$

dove le costanti c, c' hanno egual segno, ed è inoltre per la prima delle (10)

$$H c'\, r^2 + H c + 1 > 0. \tag{12}$$

Dunque sarà $Hc + 1 > 0$, altrimenti Hc' sarebbe negativa come Hc e non sussisterebbe la (12). Ciò posto se nella (11) cangiamo r in λr (λ costante), questo equivale a mutare c' in $\lambda^2 c'$ e possiamo prendere λ reale in guisa che sia

$$cc'\, \lambda^2 = Hc + 1.$$

Senza alterare la generalità, possiamo dunque supporre che sia

$$H c + 1 = cc' = k^2 \ (k \text{ reale}),$$

ed avremo

$$c'\,(c' - H) = \frac{c'^2}{k^2}, \quad \text{o} \quad Hc' = \frac{c'^2 (k^2 - 1)}{k^2}. \tag{13}$$

La (11) diventa

$$ds^2 = \frac{c'^2 r^2 + k^2}{H c' r^2 + k^2}\, dr^2 + r^2\, dv^2,$$

e per determinare la corrispondente curva meridiana $z = \psi(r)$ abbiamo

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{c'^2 r^2 + k^2}{Hc^2 r^2 + k^2},$$

indi per la (13)

$$\psi'^2(r) = \frac{c'^2}{k^2} \frac{r^2}{H c' r^2 + k^2}.$$

Di qui risulta

$$H k z = \int \frac{H c'\, r\, dr}{\sqrt{H c' r^2 + k^2}} = \sqrt{H c'\, r^2 + k^2},$$

e si vede che la curva meridiana è un'ellisse per $Hc' < 0$ (ossia per $k^2 < 1$), invece un'iperbola se $Hc' > 0$ (o $k^2 > 1$). Posto infine

$$H = \frac{1}{a}, \quad \frac{H c'}{k^2} = \mp \frac{1}{b^2},$$

avremo per la curva meridiana

$$\frac{z^2}{a^2} \pm \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

esprimendosi i semi-assi a, b per le costanti c', k colle formole

$$\frac{1}{a^2} = \frac{c'^2 (c - k^2)^2}{k^4}, \quad \frac{1}{b^2} = \pm \frac{c'^2 (1 - k^2)}{k^4}.$$

Nel caso dell'ellisse ($k^2 < 1$) è manifestamente $a^2 < b^2$ ed abbiamo l'ellissoide *allungato* di semi-asse maggiore $a = \frac{1}{H}$, mentre quello minore b rimane arbitrario. Quando $k^2 < 1$ abbiamo un'iperbola col semi-asse focale (asse di rotazione) $a = \frac{1}{H}$, rimanendo ancora arbitraria la lunghezza b del secondario. Se in fine osserviamo che il raggio R della sfera è dato, per la prima delle (10), da;

$$HR + 1 = \sqrt{Hc' r^2 + k^2},$$

e combina precisamente col valore della distanza del centro della sfera da uno dei fuochi, ne risulta stabilito il *secondo teorema di* GUICHARD:

Se una quadrica a centro, di rotazione attorno all'asse focale di lunghezza $= 2a$, *rotola su qualunque sua deformata, ciascuno dei due fuochi descrive una superficie a curvatura media costante* $H = \frac{1}{a}$.

Siccome poi il rotolamento può avvenire sull'una o sull'altra faccia della superficie di appoggio, si hanno così, da ogni deformata della quadrica rotonda, *quattro* superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{a}$, ripartite in due coppie di superficie parallele alla distanza $2a$. Pel teorema di BONNET, la superficie media in ciascuna coppia è a curvatura costante positiva $= \frac{1}{a^2}$.

Ed anche qui, come pel primo teorema di GUICHARD, questi risultati possono già dedursi dalle equazioni differenziali. Da queste risulta infatti che R soddisfa alla seconda equazione dell'applicabilità ed Rk alla prima; inoltre i valori per D, D', D'' tratti rispettivamente dalle (18) § 314 e dalle (13) ibid. risultano le due volte eguali e di segno contrario. Esiste quindi una configurazione S_0 della superficie dei centri nella quale tutti i punti della S_0 hanno costante $= k$ il rapporto delle distanze da un punto fisso O e da un piano fisso π. Dunque la S_0 è una quadrica a centro con un fuoco (principale) nel punto satellite O e con π per corrispondente piano direttore ; la costante k rappresenta l'eccentricità.

Osservazione :

1.° Se nel secondo teorema di GUICHARD, tenendo fisso un fuoco della curva meridiana ed il prossimo vertice, si fa crescere all'infinito il semiasse principale a, diventa $H = 0$ e si ottiene al limite il primo teorema di GUICHARD.

2.° Fra le superficie applicabili sulla quadrica ve ne sono ∞^1 di rotazione e prendendo per superficie S d'appoggio una tale deformata rotonda, la superficie Σ a curvatura media costante (o nulla) sarà di rotazione ed avrà per meridiano la curva generata dal fuoco della conica meridiana che rotola sul meridiano deformato. Questo luogo è adunque una catenaria nel caso del paraboloide ed il meridiano di una superficie Σ a curvatura media costante nel caso dell' ellissoide o iperboloide.

Si può in particolare restringere indefinitamente attorno all'asse la superficie S si da ridurla all'asse. Il teorema di GUICHARD si converte così, al limite, nella nota proposizione di DELAUNAY : *La curva descritta dal fuoco di un'ellisse o di un'iperbola che rotola sopra una retta è il meridiano di una superficie di rotazione a curvatura media costante. Nel caso di una parabola il fuoco descrive una catenaria.*

§ 337.

Complementi ai teoremi di Guichad.

Stabiliti nei due paragrafi precedenti i due teoremi di GUICHARD sulle deformate delle quadriche rotonde, noi andiamo ora a completarli coll'esame di alcune notevoli proprietà che hanno luogo nella corrispondenza fra i punti delle due falde a curvatura media costante Σ, $\overline{\Sigma}$ e quelli della superficie S dei centri deformata della quadrica rotonda S_0 E in primo luogo cerchiamo di caratterizzare il sistema *coniugato* di S che, secondo la proprietà fondamentale delle congruenze di sfere di RIBAUCOUR (§ 316), corrisponde alle linee di curvatura di Σ, $\overline{\Sigma}$. Per questo ricordiamo (§ 323) che l'equazione differenziale delle linee di curvatura di Σ, $\overline{\Sigma}$ è data dall'eguagliare a zero il Jacobiano delle due forme differenziali :

$$\begin{vmatrix} E_0\,du^2 + 2\,F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2 \\ (D-D_0)\,du^2 + 2\,(D'-D'_0)\,du\,dv + (D''-D''_0)\,dv^2. \end{vmatrix}$$

Ma nel caso attuale, sussistendo le proporzioni

$$E_0 : F_0 : G_0 = R_{11} : R_{12} : R_{22},$$

dalle formole (18) del § 314, queste si traducono nelle altre

$$E_0 : F_0 : G_0 = D_0 : D'_0 : D''_0 ;$$

per ciò l'equazione differenziale delle linee di curvatura di Σ, $\overline{\Sigma}$ si scrive :

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv\ , & D'\,du + D''\,dv \\ D_0\,du + D'_0\,dv\ , & D'_0\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ora questa è l'equazione del sistema coniugato comune alla quadrica S_0 e alla sua deformata S, ed abbiamo quindi l'importante teorema.

A) *Le linee di curvatura delle due falde a curvatura media costante dell'inviluppo (nei teoremi di* GUICHARD*) corrispondono al sistema coniugato comune alla quadrica rotonda* S_0 *e alla sua deformata* S *luogo di centri delle sfere.*

Fissando ora l'attenzione sulla circostanza che a questo sistema coniugato di S corrisponde un sistema ortogonale sopra Σ, $\overline{\Sigma}$, dimostriamo che sussiste l'altro teorema :

B) *Ad ogni sistema coniugato sulla deformata* S *della quadrica rotonda corrisponde un sistema ortogonale su ciascuna falda* Σ, $\overline{\Sigma}$ *a curvatura media costante dell'inviluppo, e viceversa.*

Indicando con $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ i coefficienti del ds^2 per l'inviluppo Σ, dalle formole di rappresentazione sferica (I § 86, pag. 225) abbiamo :

$$\overline{E} = -(r_1+r_2)\,\Delta - r_1 r_2\,e,\ \overline{F} = -(r_1+r_2)\,\Delta' - r_1 r_2 f,\ \overline{G} = -(r_1+r_2)\,\Delta'' - r_1 r_2 g,$$

dove e, f, g ; $\Delta, \Delta', \Delta''$ sono da calcolarsi dalle (21) e (25) del § 314. Per dimostrare il teorema B) basterà provare che se $D' = 0$ sarà anche $\overline{F}=0$, cioè

$$H\,\Delta' + f = 0,$$

formola che, per la media delle (25) § 314, si scrive

$$(H\,R + 1)\,f = H\,\tau_{12}.$$

Ora per le (I) § 334 abbiamo (essendo $D' = 0$)

$$\tau_{11} = \frac{HR+1}{HR^2+2R}\,E_0 - D\sqrt{1-\Delta_1 R},\quad \tau_{12} = \frac{HR+1}{HR^2+2R}\,F_0,\quad \tau_{22} = \frac{HR+1}{HR^2+2R}\,G_0 - D''\sqrt{1-\Delta_1 R}$$

e di qui costruendo (§ 315)

$$f = \frac{(G_0\,\tau_{11} - F_0\,\tau_{12})\,\tau_{12} + (E_0\,\tau_{12} - F_0\,\tau_{11})\,\tau_{22}}{E_0\,G_0 - F_0^2},$$

col tener conto delle precedenti e della

$$DD'' = K\,(EG - F^2),$$

che per la (5) § 334 si scrive

$$DD'' = \frac{EG - F^2}{(HR^2+2R)^2},$$

otteniamo

$$f = \frac{H\,F_0}{HR^2 + 2R},$$

onde appunto

$$(H\,R + 1)\,f = H\,\tau_{12},\ \text{c. d. d.}$$

Dal teorema B), che ha luogo per ambedue le falde dell'inviluppo Σ, $\overline{\Sigma}$, segue l'altro

C) *La corrispondenza fra i punti delle due falde a curvatura media costante nei teoremi di* GUICHARD *è una corrispondenza conforme.*

Questa proprietà degli inviluppi di sfere nei teoremi di GUICHARD: di dar luogo ad una rappresentazione conforme fra le due falde, ha ricevuto un'importante generalizzazione colle ricerche di DARBOUX, di cui tratteremo fra breve, che hanno stabilito una teoria generale delle trasformazioni per le superficie isoterme (V. più oltre §§ 349, 350).

Dal teorema B) possiamo dedurre ancora un altro corollario, osservando che la corrispondenza dei sistemi ortogonali di Σ ai coniugati di S si esprime

colle proporzioni

$$\overline{E} : \overline{F} : \overline{G} = D : D' : D''.$$

Prendendo a linee coordinate (u,v) sopra Σ le linee di curvatura, le quali costituiscono un sistema isotermo, potremo fare

$$\overline{F} = 0 \quad \overline{E} = \overline{G},$$

e ne seguirà

$$D' = 0 \quad D = D''.$$

Il sistema coniugato (u, v) di S è quello coniugato comune alla S e alla quadrica S_0, onde abbiamo:

Sopra ogni deformata S *di una quadrica rotonda* S_0 *il sistema coniugato comune è isotermo-coniugato.*

Vedremo più tardi che questa proprietà sussiste in generale per le deformate delle quadriche qualunque (DARBOUX).

§. 338.

Caso in cui l'inviluppo Σ rimane a curvatura totale costante.

Nel secondo teorema di GUICHARD (§ 336), invece che sulle due coppie di superficie parallele a curvatura media costante, possiamo fissare l'attenzione sulle due superficie medie che sono a curvatura totale costante positiva $= \frac{1}{a^2}$ e costituiscono le due falde dell'inviluppo di sfere coi centri distribuiti sulla deformata S della quadrica e di raggio

$$R = \rho - a = a \mp \rho',$$

avendo indicato con ρ, ρ' le distanze del centro della sfera dai due fuochi ($\rho \pm \rho' = 2\,a$). Se questa congruenza di sfere si deforma, flettendo S, le due falde dell'inviluppo conservano la medesima curvatura costante. E dal teorema di BONNET segue che le uniche congruenze di sfere nelle quali, per qualunque deformazione della superficie dei centri, una falda dell'inviluppo (indi anche l'altra) serba la medesima curvatura costante *positiva* sono quelle del secondo teorema di GUICHARD. Ma otteniamo, dal punto di vista reale, nuovi risultati estendendo il problema alla curvatura negativa. In

generale, senza distinguere il segno della curvatura, domandiamo di: *Trovare tutti gli inviluppi di sfere nei quali, deformando comunque la superficie dei centri, una falda dell'inviluppo conservi la medesima curvatura costante* $\frac{1}{h}$ (*h costante*) (*). Suppongasi che in qualunque deformazione si abbia per la falda Σ

$$r_1 r_2 = h \quad (h \text{ costante})$$

cioè per la seconda delle (VII) § 315

$$(R^2 - h)(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) - R(E_0\tau_{22} - 2F_0\tau_{12} + G_0\tau_{11}) + E_0G_0 - F_0^2 = 0.$$

Questa, sostituendovi per le τ_{ik} i valori (26) ibid., diventa:

$$(R^2-h)\{R_{11}R_{22} - R_{12}^2 + K(EG-F^2) - \sqrt{1-\Delta_1 R}(R_{22}D - 2R_{12}D' + R_{11}D'')\} -$$
$$-R\{E_0R_{22} - 2F_0R_{12} + G_0R_{11} - \sqrt{1-\Delta_1 R}(G_0D - 2F_0D' + E_0D'')\} + (EG-F^2)(1-\Delta_1 R) = 0,$$

e come relazione lineare in D, D′, D″ deve al solito ridursi ad un'identità. Ne segue subito intanto che la proprietà, supposta per la prima falda, si verifica anche per la seconda, come sopra abbiamo asserito in nota. Quanto alle condizioni del problema, esse si riducono al sistema differenziale:

$$\text{(II)} \qquad R_{11} = \frac{R}{R^2-h}E_0\ ,\ R_{12} = \frac{R}{R^2-h}F_0\ ,\ R_{22} = \frac{R}{R^2-h}G_0\ ,$$

e all'altra in termini finiti

$$\text{(14)} \qquad K = \frac{h}{(R^2-h)^2},$$

la quale del resto è anche una conseguenza differenziale delle (II) (cf. § 334).

Anche qui si trova l'integrale primo delle (II)

$$\text{(II*)} \qquad 1 - \Delta_1 R = \frac{C}{R^2-h} \ (C \text{ costante});$$

e si vede che le condizioni si riducono a questa e alla media delle (II*), supposti ambedue i binomii $G\frac{\partial R}{\partial u} - F\frac{\partial R}{\partial v}$, $E\frac{\partial R}{\partial v} - F\frac{\partial R}{\partial u}$ diversi da zero.

(*) Il calcolo stesso mostrerà subito che anche la seconda falda ha la stessa curvatura costante.

Dobbiamo ora trovare le forme del ds^2 per le quali le (II) risultano compatibili, per la qual cosa osservando che si ha

$$R_{11} : R_{12} : R_{22} = E_0 : F_0 : G_0,$$

se ne deduce, come al § 334, che il ds^2 appartiene ad una superficie di rotazione, e scriviamo

$$ds^2 = T^2\,dr^2 + r^2\,dv^2,$$

cercando di determinare le funzioni incognite T, R di r. Delle equazioni (II) la media diventa identica e le altre due dànno

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} R'' - \frac{T'}{T}R' = \frac{R}{R^2-h}(T^2 - R'^2) \\ R' = \frac{R}{R^2-h}T^2 r. \end{cases}$$

Derivando la seconda, ne risulta per la prima

$$T' = h\frac{T^3 r}{(R^2-h)^2},$$

indi per la seconda delle (15)

$$\text{(16)} \qquad \frac{T'}{T} = \left(\frac{R}{R^2-h} - \frac{1}{R}\right)R'.$$

Lasciamo da parte il caso di h positiva che riconduce, come già abbiamo detto, ai teoremi di GUICHARD per le quadriche rotonde *reali* e supposto h negativa, poniamo

$$\text{(17)} \qquad h = -a^2.$$

Dalla (16) integrando, abbiamo

$$T^2 = k^2\frac{R^2+a^2}{R^2} \quad (k \text{ costante}),$$

onde $RR' = k^2 r$, e per ciò

$$\text{(18)} \qquad R^2 = k^2 r^2 + C \ (C \text{ costante}).$$

Ma affinchè l'inviluppo sia reale dovremo avere, come al 335, $R'^2 < T^2$, cioè

$$\frac{k^4 r^2}{R^2} < k^2 \frac{R^2 + a^2}{R^2},$$

ossia

$$k^2 r^2 < R^2 + a^2 < k^2 r^2 + C + a^2,$$

indi $C + a^2 > 0$. Poniamo $C + a^2 = b^2$, e cangiando $k\,r$ in r. facciamo $k = 1$, onde avremo le formole definitive

$$(19) \qquad \begin{cases} R^2 = r^2 + b^2 - a^2 \\ T^2 = \dfrac{r^2 + b^2}{r^2 + b^2 - a^2}, \end{cases}$$

le quali daranno tutte le soluzioni del problema, rimanendo arbitraria la costante b.

La forma del ds^2 corrispondente a queste formole (19) è

$$ds^2 = \frac{r^2 + b^2}{r^2 + b^2 - a^2} dr^2 + r^2 dv^2$$

ed appartiene in ogni caso ad una quadrica rotonda *immaginaria*, come era facile prevedere. Ma se domandiamo di realizzare questo ds^2 con una superficie rotonda reale, per determinare la curva meridiana

$$z = \psi(r)$$

abbiamo

$$\psi'(r) = \frac{a}{\sqrt{r^2 + b^2 - a^2}},$$

ossia

$$z = a \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + b^2 - a^2}}.$$

Manifestamente dovremo distinguere tre casi secondo che si prenda

$$1)\ b^2 = a^2 \quad , \quad 2)\ b^2 < a^2 \quad , \quad 3)\ b^2 > a^2,$$

1° *caso*. La curva meridiana è

$$z = a \log r$$

e si ha la superficie logaritmica di rotazione. La prima delle (19) dà $R = r$ e le sfere coi centri sulla superficie toccano tutte l'asse, a cui si riduce una falda dell'inviluppo mentre l'altra coincide coll'ordinaria pseudosfera.

2° *caso* $b^2 < a^2$. La curva meridiana ha l'equazione

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \cos h \left(\frac{z}{a}\right).$$

e la superficie di rotazione è quella che già abbiamo indicato al § 131 (I pag. 352) come catenoide accorciato ; il raggio R della sfera è dato da

$$R = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sen} h \left(\frac{z}{a}\right).$$

3° *caso* $b^2 > a^2$. Qui la curva meridiana ha l'equazione

$$r = \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sen} h \left(\frac{z}{a}\right),$$

e il raggio R della sfera è dato da

$$R = \sqrt{b^2 - a^2} \cos h \left(\frac{z}{a}\right);$$

la superficie di rotazione è il *sinusoide iperbolico* (Cf. § 273).

Non lascieremo di osservare che l'analisi precedente continua a valere anche se $a = 0$, cioè $h = 0$, nel qual caso avendosi $r_1 r_2 = 0$, ambedue le falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo si riducono a curve. Ma in tal caso il ds^2 diventa

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dv^2,$$

che è quello del piano in coordinate polari e la formola (19)

$$R = \sqrt{r^2 + b^2}$$

dimostra che, quando S'_0 assume la configurazione piana, le sfere passano per due punti simmetrici rispetto al piano, alla distanza b dal piano.

§. 339.

Preliminari sui problemi d'inversione.

I teoremi di GUICHARD stabiliscono, come si è visto, un intimo legame fra le deformate delle quadriche rotonde (reali od immaginarie) e le superficie a curvatura media costante (o nulla), ovvero colle loro parallele a curvatura totale costante.

Propriamente, nei teoremi di GUICHARD, è la deformata della quadrica rotonda che si suppone data, e da questa risultano individuate, come falde di un inviluppo di sfere coi centri sulla deformata della quadrica, o due superficie d'area minima, o quattro a curvatura media costante, o in fine due a curvatura totale costante. Siccome però la determinazione delle deformate di una quadrica rotonda appare un problema più complicato di quello delle deformate della sfera, ossia della ricerca delle superficie a curvatura costante, così importa massimamente procedere alla *inversione dei teoremi di* GUICHARD (*) per dedurre invece da superficie note a curvatura costante (media o totale) le corrispondenti deformate delle quadriche rotonde generali. La questione da risolversi è adunque la seguente: *Data qualunque superficie a curvatura media (o totale) costante, esistono sempre congruenze di* RIBAUCOUR *aventi i centri distribuiti sopra una deformata di una quadrica di rotazione e appartenenti alla classe dei teoremi di* GUICHARD ?

La risposta a questa domanda è sempre affermativa ; non solo, ma si presenta la circostanza molto notevole che ogni superficie a curvatura media o totale costante appartiene, come prima falda Σ dell'inviluppo, ad una *tripla infinità di corrispondenti congruenze di sfere*. Ed allora, siccome nella seconda falda $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo abbiamo una nuova superficie colla stessa curvatura media (o totale) costante, veniamo così a costruire dei metodi di trasformazione per queste superficie e in conseguenza per le deformate delle quadriche rotonde.

Nel modo di esposizione tenuto in questo trattato i risultati sopra indicati sono già in sostanza contenuti nelle ricerche esposte al Cap. XVI sulla composizione delle trasformazioni di BÄCKLUND (reali od immaginarie), nelle quali vengono appunto risolute le nuove trasformazioni. Ma queste ultime possono riguardarsi come un caso particolare delle trasformazioni che diciamo di RIBAUCOUR, di una qualunque superficie Σ assegnata come prima falda di un inviluppo di sfere di RIBAUCOUR. Ed a questa teoria generale, di grande importanza nella geometria infinitesimale, volgiamo ora le nostre ricerche ; stabilendone nel presente Capitolo le formole fondamentali colle applicazioni alle deformate delle quadriche rotonde, ed alle superficie isoterme (DARBOUX). Il seguente Capitolo tratterà di un nuovo aspetto della teoria, egualmente dovuto a RIBAUCOUR, e delle sue relazioni col nuovo metodo di WEINGARTEN per la risoluzione del secondo problema dell'applicabilità.

(*) Questa venne effettuata nella memoria dell'autore inserita nel T. 3° Serie 3ª degli Annali di matematica (1899).

Ritornando pel nostro caso particolare alla circostanza sopra indicata, che cioè ogni superficie a curvatura media costante ammette ∞^2 trasformazioni di RIBAUCOUR in altre superficie colla medesima curvatura media costante, osserviamo che essa può enunciarsi anche sotto quest'altra forma : *Ogni superficie a curvatura media costante può generarsi in* ∞^3 *modi, come superficie di rotolamento, da un fuoco principale di una quadrica rotonda che rotola sopra una sua deformata.*

Siccome poi col valore H della curvatura media resta fissata la lunghezza $a = \frac{1}{H}$ del semiasse principale della quadrica, che è un paraboloide se $H = 0$, si vede che fra le ∞^2 generazioni indicate ve ne sono ancora ∞^2 nelle quali il semiasse secondario b della quadrica a centro, ovvero il parametro del paraboloide, ha un valore prefissato. Ne concludiamo che : *la superficie* Σ *a curvatura media costante o nulla può generarsi in* ∞^2 *modi da una quadrica rotonda fissa quale superficie rotolante.*

Questa circostanza singolare, che si presenta qui nella generazione per rotolamento delle quadriche rotonde, è tanto più notevole in quanto che, in generale, data la superficie Σ di rotolamento e la rotolante S_0 col suo punto satellite la generazione è perfettamente individuata. (*)

§ 340.

Le trasformazioni di Ribaucour in generale.

Ci siamo già occupati (§ 318) delle congruenze di sfere di RIBAUCOUR con assegnata superficie luogo dei centri. Ora supponiamo invece data una falda Σ dell'inviluppo e cerchiamo di trovare tutte le congruenze di sfere di RIBAUCOUR a cui Σ appartiene ; diremo allora che la seconda falda Σ' è una *trasformata di* RIBAUCOUR della prima, e viceversa. In sostanza : *due superficie* Σ, Σ' *sono trasformate di* RIBAUCOUR *l'una dell'altra quando si corrispondono punto a punto, con conservazione delle linee di curvatura, e le normali in due punti corrispondenti* P, P′ *si incontrano in un punto equidistante da* P, P′.

(*) Così p. e. nelle generazioni del piano o della sfera come superficie di rotolamento, la superficie di rotolamento individua la superficie d'appoggio nelle formole del CALÒ (§ 328).

A base della ricerca delle trasformazioni di RIBAUCOUR per una data superficie Σ noi porremo l'osservazione seguente.

In due superficie Σ, Σ' trasformate di RIBAUCOUR *le tangenti in punti corrispondenti a linee di curvatura corrispondenti si incontrano.*

Per dimostrarlo riferiamo Σ, Σ' alle loro linee di curvatura (u,v) e siano $P \equiv (x, y, z)$, $P' \equiv (x', y', z')$ due punti generici corrispondenti di Σ, Σ' e (X_3, Y_3, Z_3), $(X'_3\ Y'_3, Z'_3)$ i rispettivi coseni di direzione delle normali, r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di Σ, e r'_1, r'_2 quelli di Σ'. Se con R_3 denotiamo il raggio della sfera che tocca in P, P', le Σ, Σ' avremo

$$x + R_3 X_3 = x' + R_3 X'_3, \text{ ecc.}$$

e derivando rispetto ad u, con riguardo alle formole di RODRIGUES, (*) segue

$$\left(1 + \frac{R_3}{r_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \left(1 + \frac{R_3}{r'_2}\right)\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial\, lg\, R_3}{\partial u}(x' - x) = 0$$

e le altre due analoghe. Si annulla dunque il determinante

$$\begin{vmatrix} x' - x\ , & y' - y\ , & z' - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial y}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial y'}{\partial u}\ , & \dfrac{\partial z'}{\partial u} \end{vmatrix},$$

cioè le tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost}^{te}$ sopra Σ, Σ' in P, P' s'incontrano, e similmente per le tangenti alle $u = \text{cost}^{te}$. È chiaro poi che ciascuno dei due punti d'intersezione delle tangenti corrispondenti alle linee di curvatura in P, P' si troverà sulla retta d'intersezione dei piani tangenti in P, P' e sarà per ciò equidistante da P, P'.

Ciò premesso, noi ci serviremo per la nostra ricerca delle formole di rappresentazione sferica (Cap. V) *lasciando da parte il caso di una superficie Σ sviluppabile.*

Riferita la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v), scriveremo il suo ds^2 sotto la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 \tag{20}$$

(*) $$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X_3}{\partial u}\ , \qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = r'_2 \frac{\partial X'_3}{\partial u}$$

e quello ds'^2 della sua rappresentazione sferica

$$ds'^2 = h_1^2\, du^2 + h_2^2\, dv^2, \tag{20*}$$

onde avremo pei due raggi principali di curvatura r_1, r_2 le espressioni

$$r_1 = \frac{H_2}{h_2}, \quad r_2 = \frac{H_1}{h_1}. \tag{21}$$

A causa delle equazioni di CODAZZI si ha

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u}, \quad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v},$$

e indicando con β_{12}, β_{21} i valori di questi rapporti daremo loro il nome di *rotazioni*. Fra le coppie di funzioni

$$(H_1, h_1), (H_2, h_2)\ (\beta_{12}, \beta_{21})$$

si hanno così le relazioni fondamentali:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial u} = \beta_{12} H_1, \quad \dfrac{\partial H_1}{\partial v} = \beta_{21} H_2 \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} = \beta_{12} h_1, \quad \dfrac{\partial h_1}{\partial v} = \beta_{21} h_2 \\ \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u} + \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial v} + h_1 h_2 = 0, \end{cases}$$

l'ultima delle quali (equazione di GAUSS) esprime che il ds'^2 dato dalla (20*) appartiene alla sfera unitaria.

Viceversa, soddisfatte le (A), ne resta individuata una superficie Σ riferita alle sue linee di curvatura (u, v). Colle solite notazioni: x, y, z per le coordinate di un punto generico P di Σ e (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), $(X_3, Y_3 Z_3)$, pei coseni di direzione degli spigoli del triedro principale di Σ sussistono le formole del seguente quadro:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = H_1 X_1 \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = H_2 X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\beta_{21} X_2 - h_1 X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \beta_{21} X_1, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = h_1 X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \beta_{12} X_2, \qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\beta_{13} X_1 - h_2 X_3, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = h_2 X_2, \end{cases}$$

colle analoghe per gli altri due assi.

Preparate così le formole, cerchiamo le trasformazioni di RIBAUCOUR di Σ, e sia Σ' una tale trasformata di cui indicheremo con accenti le quantità relative. Scriviamo le formole di passaggio da Σ a Σ'

$$x' = x + \mathrm{T}\,\xi\,,\ y' = y + \mathrm{T}\,\eta\,,\ z' = z + \mathrm{T}\,\zeta, \tag{22}$$

dove con ξ, η, ζ denotiamo i coseni di direzione della congiungente PP′ e con T la distanza (algebrica) dei due punti. Poniamo inoltre

$$\begin{cases} \xi = \alpha_1 \mathrm{X}_1 + \alpha_2 \mathrm{X}_2 + \alpha_3 \mathrm{X}_3 \\ \eta = \alpha_1 \mathrm{Y}_1 + \alpha_2 \mathrm{Y}_2 + \alpha_3 \mathrm{Y}_3 \\ \zeta = \alpha_1 \mathrm{Z}_1 + \alpha_2 \mathrm{Z}_2 + \alpha_3 \mathrm{Z}_3, \end{cases} \tag{23}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tre funzioni legate dall'identità

$$\mathrm{S}\,\alpha^2 = 1. \tag{24}$$

Il nostro problema consiste nel determinare le quattro funzioni incognite

$$\mathrm{T},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

di u, v in modo che le (25) definiscano una superficie Σ' trasformata di RIBAUCOUR della Σ.

Per questo dobbiamo esprimere che le normali in P, P′ si incontrano in un punto equidistante da P, P′ e lo stesso accade, come si è visto sopra, per le tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost}^{\text{te}}$, $u = \text{cost}^{\text{te}}$. Chiamando $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3$ queste tre distanze (con segno) ordinatamente pei tre spigoli del triedro principale, potremo scrivere

$$x + \mathrm{R}_i\,\mathrm{X}_i = x' + \mathrm{R}_i\,\mathrm{X}'_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

ove si fissino debitamente i versi delle tre direzioni principali per la Σ'. Dalle precedenti si ricava

$$\mathrm{X}'_i = \mathrm{X}_i + \frac{x - x'}{\mathrm{R}_i} = \mathrm{X}_i - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}_i}\,\xi, \text{ ecc.}$$

e da

$$\mathrm{S}\,\mathrm{X}'^2_i = 1, \text{ essendo } \mathrm{S}\mathrm{X}^2_i = 1, \mathrm{S}'\,\xi^2 = 1,$$

$\mathrm{S}\,\mathrm{X}_i\,\xi = \alpha_i$, deduciamo

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}_i} = 2\,\alpha_i,$$

ossia

$$\mathrm{R}_i = \frac{\mathrm{T}}{2\alpha_i}\,, \tag{24}$$

e inoltre

$$\mathrm{X}'_i = \mathrm{X}_i - 2\,\alpha_i\,(\alpha_1\,\mathrm{X}_1 + \alpha_2\,\mathrm{X}_2 + \alpha_3\,\mathrm{X}_3), \text{ ecc.} \tag{25}$$

Si osservi che inversamente per tre valori qualunque di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, soddisfatta la (24), queste sono le formole di una sostituzione ortogonale, però a determinante $= -1$, determinazione di segni per le X'_i che risulta opportuna, appunto perchè i due triedri principali di Σ, Σ' sono *simmetrici* rispetto al piano tangente della superficie S luogo dei centri delle sfere.

§. 341.

Ricerca delle formole di trasformazione.

Esprimiamo tutte le condizioni del problema assoggettando $\mathrm{T}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a soddisfare le equazioni seguenti

$$\begin{cases} \mathrm{S}\,\mathrm{X}'_1 \dfrac{\partial x'}{\partial v} = 0, \quad \mathrm{S}\mathrm{X}'_2 \dfrac{\partial x'}{\partial u} = 0 \\ \mathrm{S}\,\mathrm{X}'_3 \dfrac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad \mathrm{S}\mathrm{X}'_3 \dfrac{\partial x'}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

delle quali le ultime due dicono che $(\mathrm{X}'_3, \mathrm{Y}'_3, \mathrm{Z}'_3)$ è la direzione della normale a Σ', le prime due che $(\mathrm{X}'_1, \mathrm{Y}'_1, \mathrm{Z}'_1)$, $(\mathrm{X}'_2, \mathrm{Y}'_2, \mathrm{Z}'_2)$ sono i coseni di direzione delle tangenti alle $v = \text{cost}^{\text{te}}$, $u = \text{cost.}^{\text{te}}$.

Per le (22), (25) le equazioni superiori si scrivono

$$\begin{cases} \mathrm{S}\,(\mathrm{X}_1 - 2\,\alpha_1\,\xi)\left(\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\,\xi + \mathrm{T}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0 \\ \mathrm{S}\,(\mathrm{X}_2 - 2\,\alpha_2\,\xi)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\,\xi + \mathrm{T}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathrm{S}\,(\mathrm{X}_3 - 2\,\alpha_3\,\xi)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\,\xi + \mathrm{T}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathrm{S}\,(\mathrm{X}_3 - 2\,\alpha_3\,\xi)\left(\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\,\xi + \mathrm{T}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial v}\right) = 0, \end{cases}$$

ed avendo riguardo alle identità

$$\begin{cases} S\,X_1\,\xi = \alpha_1\ ,\ S\,X_2\,\xi = \alpha_2\ ,\ S\,X_3\,\xi = \alpha_3 \\ S\,\xi\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial u} = 0\ \ ,\ \ S\,\xi\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial v} = 0\ \ ,\ S\,X_1\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial v} = \dfrac{\partial\,\alpha_1}{\partial v} - \beta_{12}\,\alpha_2 \\ S\,X_2\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial u} = \dfrac{\partial\,\alpha_2}{\partial u} - \beta_{21}\,\alpha_1\ .\ S\,X_3\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial u} = \dfrac{\partial\,\alpha_3}{\partial u} - h_1\,\alpha_1 \\ S\,X_3\,\dfrac{\partial\,\xi}{\partial v} = \dfrac{\partial\,\alpha_3}{\partial v} - h_2\,\alpha_2, \end{cases}$$

si riducono alle seguenti :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u} + 2\,H_1\,\alpha_1\right) = \dfrac{1}{\alpha_2}\left(\dfrac{\partial\,\alpha_2}{\partial u} - \beta_{21}\,\alpha_1\right) = \dfrac{1}{\alpha_3}\left(\dfrac{\partial\alpha_3}{\partial u} - h_1\alpha_1\right) \\ \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v} + 2\,H_2\,\alpha_2\right) = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(\dfrac{\partial\,\alpha_1}{\partial v} - \beta_{12}\,\alpha_2\right) = \dfrac{1}{\alpha_3}\left(\dfrac{\partial\alpha_3}{\partial v} - h_2\alpha_2\right)\ . \end{cases}$$

Se indichiamo per un momento con ω_1, ω_2 i valori dei tre rapporti eguali rispettivamente nella prima e seconda linea delle formole precedenti, abbiamo :

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = \omega_1\,T - 2\,H_1\,\alpha_1\ , & \dfrac{\partial T}{\partial v} = \omega_2\,T - 2\,H_2\,\alpha_2 \\ \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u} = \beta_{21}\,\alpha_1 + \omega_1\,\alpha_2\ . & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\alpha_2 + \omega_2\,\alpha_1 \\ \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial u} = h_1\,\alpha_1 + \omega_1\,\alpha_3\ , & \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial v} = h_2\,\alpha_2 + \omega_2\,\alpha_3\ , \end{cases}$$

e basta costruire le condizioni d'integrabilità per le equazioni della prima o terza linea per dedurne

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial v} = \frac{\partial\omega_2}{\partial u}\ ,$$

onde l'espressione

$$\omega_1\,du + \omega_2\,dv$$

deve essere un differenziale esatto. Introduciamo un'altra funzione Ω tale che sia

$$\omega_1 = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial u}\ ,\quad \omega_2 = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

e le (26) diventano :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\Omega\,T) = -\,2\,H_1\,\alpha_1\,\Omega\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\Omega\,T) = -\,2\,H_2\,\alpha_2\,\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\Omega\,\alpha_2) = \beta_{21}\,\Omega\,\alpha_1\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\Omega\,\alpha_1) = \beta_{12}\,\Omega\,\alpha_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\Omega\,\alpha_3) = h_1\,.\,\Omega\,\alpha_1\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\Omega\,\alpha_3) = h_2\,.\,\Omega\,\alpha_2. \end{cases}$$

In fine, introduciamo al posto di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, T$ le nuove quattro funzioni incognite $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ definite da

$$(27)\qquad \gamma_1 = \Omega\,\alpha_1\ ,\ \gamma_2 = \Omega\,\alpha_2\ ,\ w = \Omega\,\alpha_3\ ,\ \varphi = -\frac{1}{2}\,\Omega\,T\ ,$$

e le precedenti daranno il sistema fondamentale delle *equazioni di trasformazione* :

$$(III)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\gamma_2\ , & \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\,\gamma_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1\,\gamma_1\ \ , & \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2\,\gamma_2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = H_1\,\gamma_1\ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = H_2\,\gamma_2\ . \end{cases}$$

Si può anche sostituire a questo sistema una sola equazione del secondo ordine per l'unica funzione incognitä φ (ovvero w), eliminando γ_1, γ_2 fra le equazioni della prima e terza linea (ovvero della prima e seconda). Così troviamo

$$(III^*)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\,lg\,H_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\,lg\,H_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\ ,$$

e γ_1, γ_2 si calcoleranno da

$$\gamma_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\quad \gamma_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\ ,$$

mentre w si avrà con una quadratura dalle equazioni della seconda linea.

Similmente w soddisfa all'equazione del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial lg\,h_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial lg\,h_2}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\ .$$

Il più delle voltà però converrà lasciare le equazioni di trasformazione sotto la forma del primo ordine (III).

Risulta dai calcoli precedenti che ad ogni quaderna

$$\gamma_1, \gamma, w ; \varphi,$$

di funzioni soddisfacenti al sistema (III) lineare ed omogeneo corrisponde una trasformazione di RIBAUCOUR della superficie Σ e per ciò chiameremo $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ *le funzioni trasformatrici.*

Rispetto al sistema differenziale (III), facciamo le osservazioni seguenti:

1.° Le condizioni d'integrabilità per le equazioni delle ultime due linee sono identicamente soddisfatte, a causa delle (III) stesse e delle (A).

2.° Le equazioni delle due prime linee implicano soltanto gli elementi della rappresentazione sferica e rimangono quindi le stesse per tutte le superficie aventi a comune con Σ l'immagine sferica delle linee di curvatura. In sostanza per due superficie colla stessa immagine sferica dalle linee di curvatura è identico il problema delle relative trasformazioni di RIBAUCOUR.

§. 342.

Elementi relativi alla superficie Σ' trasformata.

Nelle formole (22) che dànno le coordinate x', y', z' del punto P' sulla superficie Σ' trasformata, introducendo i valori (23) di ξ, η, ζ risulta

$$x' = x + \mathrm{T}\alpha_1 \mathrm{X}_1 + \mathrm{T}\alpha_2 \mathrm{X}_2 + \mathrm{T}\alpha_3 \mathrm{X}_3.$$

Ora dalle (27) abbiamo

$$\mathrm{T}\alpha_1 = -\frac{2\varphi\gamma_1}{\Omega^2}, \quad \mathrm{T}\alpha_2 = -\frac{2\varphi\gamma_2}{\Omega^2}, \quad \mathrm{T}\alpha_3 = -\frac{2\varphi\gamma_3}{\Omega^2},$$

e dalle tre prime (27) quadrate e sommate, con riguardo alla (24) :

$$\Omega^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2,$$

onde ponendo

$$\mathrm{A} = \Omega^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2, \tag{28}$$

le formole che definiscono Σ' diventano

$$x' = x - \frac{2\varphi}{\mathrm{A}}(\gamma_1 \mathrm{X}_1 + \gamma_2 \mathrm{X}_2 + w \mathrm{X}_3), \text{ ecc.} \tag{29}$$

e le (25) pei coseni di direzione del nuovo triedro principale si scrivono

$$\begin{cases} \mathrm{AX'}_1 = \mathrm{AX}_1 - 2\gamma_1(\gamma_1 \mathrm{X}_1 + \gamma_2 \mathrm{X}_2 + w \mathrm{X}_3) \\ \mathrm{AX'}_2 = \mathrm{AX}_2 - 2\gamma_2(\gamma_1 \mathrm{X}_1 + \gamma_2 \mathrm{X}_2 + w \mathrm{X}_3) \\ \mathrm{AX'}_3 = \mathrm{AX}_3 - 2w(\gamma_1 \mathrm{X}_1 + \gamma_2 \mathrm{X}_2 + w \mathrm{X}_3) . \end{cases} \tag{30}$$

Derivando la quantità A data dalla (28) rispetto ad u e v, si ottengono per le (III) le formole

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} = 2\gamma_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) \\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = 2\gamma_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right) . \end{cases} \tag{31}$$

Se ora poniamo

$$\begin{cases} \bar{x} = \gamma_1 \mathrm{X}_1 + \gamma_2 \mathrm{X}_2 + w \mathrm{X}_3 \\ \bar{y} = \gamma_1 \mathrm{Y}_1 + \gamma_2 \mathrm{Y}_2 + w \mathrm{Y}_3 \\ \bar{z} = \gamma_1 \mathrm{Z}_1 + \gamma_2 \mathrm{Z}_2 + w \mathrm{Z}_3 \end{cases} \tag{33}$$

e riguardiamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ come coordinate di un punto $\bar{\mathrm{P}}$ mobile nello spazio, questo descrive una superficie $\bar{\Sigma}$, sulla quale andiamo a constatare che le linee (u, v) sono linee di curvatura e le due normali in punti P, $\bar{\mathrm{P}}$ corrispondenti di Σ, $\bar{\Sigma}$ sono parallele, sicchè le due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ sono *trasformate di* COMBESCURE l'una dell'altra, secondo la denominazione introdotta al §317. E infatti derivando le (33) osservando le formole del quadro (B) pag. 169 e le (III), otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) \mathrm{X}_1 \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right) \mathrm{X}_2 , \end{cases}$$

formole che ponendo

$$(34)\qquad \begin{cases} \overline{H}_1 = \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w = \dfrac{1}{2\gamma_1}\dfrac{\partial A}{\partial u} \\ \overline{H}_2 = \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w = \dfrac{1}{2\gamma_2}\dfrac{\partial A}{\partial v} \end{cases}$$

si scrivono

$$(35)\qquad \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = H_1 X_1\,, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = H_2 X_2$$

e dimostrano appunto che $\overline{\Sigma}$ è una trasformata di COMBESCURE di Σ, e $\overline{H}_1^2$, $\overline{H}_2^2$ sono i nuovi coefficienti del ds^2.

Se colle formole precedenti deriviamo le (29), troviamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = (H_1 - \dfrac{2\varphi}{A}\overline{H}_1)\, X'_1 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = (H_2 - \dfrac{2\varphi}{A}\overline{H}_2)\, X'_2\,, \end{cases}$$

e quindi

$$(35^*)\qquad H_1' = H_1 - \frac{2\varphi}{A}\overline{H}_1,\ H'_2 = H_2 - \frac{2\varphi}{A}\overline{H}_2\,.$$

od anche

$$(36)\qquad \begin{cases} H'_1 = H_1 - \dfrac{2\varphi}{A}\left(\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) = H_1 - \dfrac{\varphi}{A\gamma_1}\dfrac{\partial A}{\partial u} \\ H'_2 = H_2 - \dfrac{2\varphi}{A}\left(\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_1 w\right) = H_2 - \dfrac{\varphi}{A\gamma_2}\dfrac{\partial A}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Conviene ancora osservare che i valori di R_1, R_2, R_3, dati dalle (24), assumono per le (27) la forma

$$(37)\qquad R_1 = -\frac{\varphi}{\gamma_1}\,,\ R = -\frac{\varphi}{\gamma_2}\,,\ R_3 = -\frac{\varphi}{w}\,.$$

Queste formole conducono facilmente a risolvere la questione seguente. Siccome la relazione fra Σ, Σ' è involutoria, così la Σ deriva da Σ' con una trasformazione di RIBAUCOUR, e noi ci proponiamo di calcolare le funzioni *trasformatrici inverse* pel passaggio da Σ' a Σ, che indicheremo con

$$\gamma'_1,\ \gamma'_2,\ w',\ \varphi'$$

e saranno determinate a meno di un fattore costante. Intanto, siccome R_1, R_2, R_3 debbono restare inalterati, vediamo dalle (37) che dovranno sussistere le proporzioni

$$\gamma'_1 : \gamma'_2 : w' : \varphi' = \gamma_1 : \gamma : w : \varphi$$

e potremo quindi porre, indicando con M un fattore di proporzionalità:

$$\gamma'_1 = M\gamma_1,\ \gamma'_2 = M\gamma_2,\ w' = Mw,\ \varphi' = M\varphi.$$

Per calcolare M basterà ricorrere alle due formole

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u} = H'_1\gamma'_1\,,\ \frac{\partial \varphi'}{\partial v} = H'_2\gamma'_2,$$

le quali dànno per le (36)

$$\frac{\partial M}{\partial u}\varphi + M H_1\gamma_1 = \left(H_1 - \frac{\varphi}{A\gamma_1}\frac{\partial A}{\partial u}\right)M\gamma_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial v}\varphi + M\gamma_2 H_2 = \left(H_2 - \frac{\varphi}{A\gamma_2}\frac{\partial A}{\partial v}\right)M\gamma_2,$$

e quindi

$$\frac{\partial log\, M}{\partial u} = -\frac{\partial log\, A}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial log\, M}{\partial v} = -\frac{\partial log\, A}{\partial v}\,.$$

Disponendo del fattore costante di proporzionalità, si può dunque porre

$$M = \frac{1}{A}$$

e si ha per ciò il risultato: *Le funzioni trasformatrici nel passaggio inverso da Σ' a Σ sono date da*

$$(38)\qquad \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{A}\,,\ \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{A}\,,\ w' = \frac{w}{A}\,,\ \varphi' = \frac{\varphi}{A}$$

$$(A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2).$$

Delle formole precedenti possiamo ancora servirci per calcolare i nuovi valori β'_{12}, β'_{21} delle rotazioni e quelli h'_1, h'_2 dei coefficienti dell'elemento lineare sferico in Σ'. Siccome si ha

$$\beta'_{12}=\frac{1}{\gamma'_2}\frac{\partial\gamma'_1}{\partial v}\,,\quad \beta'_{21}=\frac{1}{\gamma'_1}\frac{\partial\gamma'_2}{\partial u}\,,\quad h'_1=\frac{1}{\gamma'_1}\frac{\partial w'}{\partial u}\,,\quad h'_2=\frac{1}{\gamma'_2}\frac{\partial w'}{\partial v}\,,$$

otteniamo

$$\beta'_{12}=\beta_{12}-\frac{\gamma_1}{A\gamma_2}\frac{\partial A}{\partial v}\,,\quad \beta'_{21}=\beta_{21}-\frac{\gamma_2}{A\gamma_1}\frac{\partial A}{\partial u}$$

$$h'_1=h_1-\frac{w}{A\gamma_1}\frac{\partial A}{\partial u}\,,\quad h'_2=h_2-\frac{w}{A\gamma_2}\frac{\partial A}{\partial v}\,,$$

ovvero :

$$(39)\qquad \begin{cases} \beta'_{12}=\beta_{12}-\dfrac{2\gamma_1}{A}\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v}+\beta_{12}\gamma_1+h_2 w\right)\\ \beta'_{21}=\beta_{21}-\dfrac{2\gamma_2}{A}\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u}+\beta_{21}\gamma_2+h_1 w\right)\end{cases}$$

$$(40)\qquad \begin{cases} h'_1=h_1-\dfrac{2w}{A}\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u}+\beta_{21}\gamma_2+h_1 w\right)\\ h'_2=h_2-\dfrac{2w}{A}\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v}+\beta_{12}\gamma_1+h_2 w\right)\,,\end{cases}$$

formole che completano le (36).

Dalle formole (35) deduciamo in fine il seguente teorema :

In ogni congruenza di sfere di RIBAUCOUR *le sviluppabili della congruenza rettilinea generata dalle corde di contatto tagliano le due falde dell'inviluppo nelle linee* (u, v) *di curvatura.*

Per dimostrarlo osserviamo che se sopra ciascuna di queste corde segniamo un punto, le cui coordinate indichiamo con ξ, η, ζ, potremo scrivere

$$(41)\qquad \xi=x+T\bar{x},\ \eta=y+T\bar{y},\ \zeta=z+T\bar{z},$$

essendo T una funzione di u, v, e derivando colle (35) avremo

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=(H_1+T\overline{H}_1)X_1+\frac{\partial T}{\partial u}\bar{x}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}=(H_1+T\overline{H}_2)X_2+\frac{\partial T}{\partial v}\bar{x}\,,$$

colle analoghe per η, ζ. Di qui risulta che pei valori T_1, T_2 di T dati da

$$(42)\qquad T_1=-\frac{H_1}{\overline{H}_1}\,,\quad T_2=-\frac{H_2}{\overline{H}_2}$$

le (41) dànno le coordinate dei due fuochi della congruenza, le cui sviluppabili sono appunto le $v=\text{cost}^{\text{te}}$, $u=\text{cost}^{\text{te}}$ c. d. d.

§. 343.

Elementi della superficie S dei centri.

Indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate del centro della sfera (u, v) della congruenza di RIBAUCOUR. Siccome il raggio della sfera è per le (37)

$$(43)\qquad R=-\frac{\varphi}{w}\,,$$

avremo

$$(44)\qquad x_0=x-\frac{\varphi}{w}X_3\,,\quad y_0=y-\frac{\varphi}{w}Y_3\,,\quad z_0=z-\frac{\varphi}{w}Z_3\,,$$

e derivando coll'osservare le (B) e le (III) otteniamo

$$(45)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial x_0}{\partial u}=\dfrac{H_1 w-h_1\varphi}{w^2}(wX_1-\gamma_1 X_3)\\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v}=\dfrac{H_2 w-h_2\varphi}{w^2}(wX_2-\gamma_2 X_3)\,,\end{cases}$$

formole a cui si può dare la forma equivalente

$$(45^*)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial x_0}{\partial u}=\dfrac{1}{\gamma_1}\dfrac{\partial R}{\partial u}(-wX_1+\gamma_1 X_3)\\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v}=\dfrac{1}{\gamma_2}\dfrac{\partial R}{\partial v}(-wX_2+\gamma_2 X_3)\,.\end{cases}$$

Dopo ciò calcoliamo i coefficienti E, F, G del ds_0^2 della superficie S dei centri colle formole

$$(46)\qquad E=\frac{w^2+\gamma_1^2}{\gamma_1^2}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\,,\quad F=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\,,\quad G=\frac{w^2+\gamma_2^2}{\gamma_2^2}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\,,$$

indi

$$(47)\qquad EG-F^2=\frac{Aw^2}{\gamma_1^2\gamma_2^2}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\,.$$

Si osservino anche le formole che ne derivano :

$$G\frac{\partial R}{\partial u} - F\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{w^2}{\gamma_2^2}\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2, \quad E\frac{\partial R}{\partial v} - F\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{w^2}{\gamma_1^2}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\frac{\partial R}{\partial v}$$

$$E\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} + G\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 = \frac{w^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}{\gamma_1^2\gamma_2^2}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2,$$

le prime delle quali dimostrano che i binomii

$$G\frac{\partial R}{\partial u} - F\frac{\partial R}{\partial v}, \quad E\frac{\partial R}{\partial v} - F\frac{\partial R}{\partial u}$$

sono diversi da zero, altrimenti per la (47) s'annullerebbe $EG - F^2$ e la superficie S dei centri si ridurrebbe ad una curva. Dall'ultima poi segue pel parametro differenziale $\Delta_1 R$, calcolato rispetto al ds_0^2 :

$$\Delta_1 R = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2},$$

indi la formola che importa notare

$$1 - \Delta_1 R = \frac{w^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2} = \frac{w^2}{A}, \tag{48}$$

Conviene ancora calcolare i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale per la superficie S dei centri. Indicando con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della normale alla S, abbiamo dalle (45)

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{A}}(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3), \text{ ecc.},$$

indi calcolando D, D′, D″ dalle formole

$$D = -S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial X_0}{\partial u}, \; D' = -S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial X_0}{\partial v} = -S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial X_0}{\partial u}, \; D'' = -S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial X_0}{\partial v},$$

coll'osservare le (35) troviamo :

$$D = \frac{h_1\varphi - H_1 w}{w\sqrt{A}}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right), D' = 0, \; D'' = \frac{h_2\varphi - H_2 w}{w\sqrt{A}}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right), \tag{49}$$

o sotto forma equivalente

$$D = -\frac{\overline{H_1}}{\sqrt{A}}(H_1 + h_1 R), \; D' = 0, \; D'' = -\frac{\overline{H_2}}{\sqrt{A}}(H_2 + h_2 R). \tag{49*}$$

La media di queste $D' = 0$ conferma che il sistema (u, v) è coniugato sulla superficie dei centri. Possiamo anche calcolare colle formole precedenti i valori $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ dei relativi simboli di CHRISTOFFEL e troviamo

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v} log\,(H_1 + h_1 R), \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial u} log\,(H_2 + h_2 R), \tag{50}$$

e si verifica che all'equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

soddisfa, insieme a x_0, y_0, z_0 anche R. Per ciò R a causa della media (46), soddisfa al sistema simultaneo del primo e secondo ordine

$$\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = F, \quad R_{12} = 0,$$

come già avevamo trovato nella ricerca diretta del § 317.

§ 344.

Riduzione delle trasformazioni di Ribaucour ad inversioni.

Abbiamo già parlato, al § 317, delle trasformazioni di COMBESCURE delle congruenze di sfere di RIBAUCOUR, riferendoci alla superficie S dei centri come data. Partendo invece ora dalle falde dell'inviluppo come date, arriviamo alla medesima nozione utilizzando l'osservazione già fatta alla fine del § 341 che le equazioni delle due prime linee nel sistema differenziale (III) relative alle trasformazioni di RIBAUCOUR di una data superficie Σ rimangono le stesse sostituendo alla Σ una qualunque altra superficie che ne sia una trasformata di COMBESCURE. Indichiamo con $\overline{\Sigma}$ una tale trasformata della Σ, e con $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ i nuovi valori per H_1, H_2, alle quali nota-

zioni diamo dunque ora una maggiore estensione in confronto a quelle usate al § 342. Possiamo ora nelle (III) mantenere alle prime tre funzioni trasformatrici γ_1, γ_2, w gli stessi valori e calcolando la nuova $\overline{\varphi}$ con una quadratura (che introdurrà una costante arbitraria) dalle (III) dell'ultima linea

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u} = \overline{H}_1 \gamma_1 , \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v} = \overline{H}_2 \gamma_2 , \tag{51}$$

nella nuova quaderna

$$(\gamma_1 \gamma_2, w, \overline{\varphi})$$

avremo una quaderna trasformatrice per la $\overline{\Sigma}$. Indicando con $\overline{\Sigma}'$ la corrispondente trasformata di RIBAUCOUR della $\overline{\Sigma}$, è manifesto intanto che la $\overline{\Sigma}$ sarà alla sua volta trasformata di COMBESCURE della Σ', gli elementi della rappresentazione sferica essendo rimasti, per le (30), i medesimi. Diremo per ciò che la congruenza di sfere colle due falde dell'inviluppo (Σ, Σ') è cangiata per trasformazione di COMBESCURE nell'altra colle falde $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}')$. Allora le due superficie dei centri S, $\overline{S}$ si corrispondono pure per parallelismo delle normali in punti corrispondenti e *per conservazione del sistema coniugato* (u, v), onde si tratta delle medesime trasformazioni di COMBESCURE già definite al § 317. È poi da osservare che fissata la prima coppia (Σ, Σ') e ad arbitrio una trasformata $\overline{\Sigma}$ di COMBESCURE di Σ, esistono ancora ∞^1 trasformazioni di COMBESCURE corrispondenti, poichè in $\overline{\varphi}$ entra una costante arbitraria. Di più colle formole attuali riesce ora facile dimostrare la seguente semplice proposizione :

Una qualunque coppia (Σ, Σ') *di superficie trasformate di* RIBAUCOUR *l'una dell'altra può sempre cangiarsi, con una trasformazione di* COMBESCURE, *in una coppia* $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}')$ *di superficie trasformate per raggi vettori reciproci.*

Prendasi infatti per Σ quella particolare trasformata di COMBESCURE di $\overline{\Sigma}$ definita dalle formole (33) (34), (35) § 342, e le formole che definiscono la corrispondente $\overline{\varphi}$ diventano

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial u} , \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial v} ,$$

da cui

$$2\overline{\varphi} = A - c \qquad (c \text{ costante}).$$

Le formole (29) dànno allora per la superficie trasformata $\overline{\Sigma}'$

$$\bar{x}' = \bar{x} - \frac{2\overline{\varphi}}{A}\bar{x} = \frac{c\bar{x}}{A} ,$$

e così :

$$\bar{x}' = \frac{c\bar{x}}{A} , \ \bar{y}' = \frac{c\bar{y}}{A} , \ \bar{z}' = \frac{c\bar{z}}{A} .$$

Ma dalle (33) abbiamo

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = A$$

e per ciò le precedenti si scrivono :

$$\bar{x}' = \frac{c\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} , \ \bar{y}' = \frac{c\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} , \ \bar{z}' = \frac{c\bar{z}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} ,$$

onde risulta appunto che la $\overline{\Sigma}'$ è la trasformata per raggi vettori reciproci della $\overline{\Sigma}$ rispetto alla sfera di raggio $= \sqrt{c}$, col centro nell'origine.

Nella congruenza di sfere colle due falde focali *inverse* $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}')$ tutte le sfere sono ortogonali alla sfera fissa fondamentale, ed anche viceversa ogni congruenza di sfere ortogonali ad una sfera fissa ha le falde focali inverse ed è una congruenza di RIBAUCOUR. In sostanza dunque abbiamo il risultato :

Tutte le congruenze di sfere di RIBAUCOUR *si ottengono da quelle di sfere ortogonali ad una sfera fissa applicando le trasformazioni di* COMBESCURE.

§. 345.

Trasformazioni di Ribaucour delle figure sferiche e piane.

Un caso limite dei risultati precedenti merita di essere particolarmente considerato, e cioè il caso in cui per le trasformate $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}'$ di COMBESCURE di Σ, Σ' si prenda la sfera stessa unitaria, sicchè $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}'$ sono le due rispettive immagini sferiche di Σ, Σ'. Si ottiene questo caso ponendo nelle formole del paragrafo precedente

$$\overline{H}_1 = h_1 , \quad \overline{H}_2 = h_2 \quad \overline{\varphi} = w ;$$

allora le due figure sferiche Σ, Σ' sono manifestamente in questa relazione fra loro : le linee sferiche ortogonali (u, v) si corrispondono nelle due figure e le loro tangenti in punti corrispondenti si incontrano. Viceversa se in una rappresentazione della sfera sopra sè stessa vi è un sistema ortogonale della prima figura che si conserva ortogonale nella seconda *e le tangenti corrispondenti a queste linee si incontrano*, è manifesto che l'incontro ha luogo in un punto equidistante dai due punti di contatto. Resta quindi applicabile l'analisi dei §§ 340, 341 e si tratta di una *trasformazione di* RIBAUCOUR della sfera in sè medesima. Le relative formole di trasformazione si ottengono assegnando *ad arbitrio* il sistema ortogonale (u, v) delle linee principali nella prima figura sferica, e se

$$ds'^2 = h_1^2\, du^2 + h_2^2\, dv^2$$

è l'elemento lineare sferico corrispondente, le relative trasformazioni di RIBAUCOUR si avranno integrando il sistema differenziale (III) ridotto alle due prime linee

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\gamma_2\,, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\,\gamma_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1\,\gamma_1\,, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2\,\gamma_2; \end{cases}$$

ogni terna (γ_1, γ_2, w) integrale di questo sistema darà luogo ad una trasformazione di RIBAUCOUR sulla sfera colle formole (30)

$$X'_3 = X_3 - \frac{2w}{A}\,(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + w X_3).\ (*)$$

Nel caso generale il sistema ortogonale che si conserva ortogonale nella rappresentazione è unico e costituito dalle linee *principali* della rappresentazione (Vol. I, § 42). Fa eccezione il caso di una rappresentazione *conforme* della sfera in sè e per questo caso una semplice considerazione geometrica prova che :

Ogni trasformazione conforme diretta della sfera in sè è una trasformazione di RIBAUCOUR, *cioè esiste un sistema ortogonale della prima figura le cui tangenti incontrano le corrispondenti della seconda.* Siano infatti P, P′ due punti corrispondenti nella rappresentazione conforme diretta supposta della sfera in sè, e consideriamo i due fasci, direttamente eguali, di elementi lineari corrispondenti per P, P′. Questi segnano sulla retta d'intersezione dei due piani tangenti in P, P′ alla sfera due punteggiate projettive sovrapposte, manifestamente *discordi* nel senso. I due punti uniti A, B nella projettività sono dunque reali e distinti, ed i raggi (PA, PB), (P′A, P′B) formano quindi due coppie di raggi corrispondenti che si incontrano rispettivamente in A, B. Le linee (u, v) della prima e seconda figura sferica inviluppate da queste coppie di raggi formano il sistema ortogonale richiesto. Aggiungiamo che questo sistema ortogonale (u, v) è anche necessariamente *isotermo*.

Possiamo trasportare la nozione di trasformazioni di RIBAUCOUR dalle figure sferiche alle piane servendoci p. e. della projezione stereografica. Una rappresentazione del piano sopra sè stesso sarà una trasformazione di RIBAUCOUR quando le tangenti alle linee principali corrispondenti della rappresentazione in punti P, P′ corrispondenti si incontrano, per ciascuna coppia, *in un punto equidistante da* P, P′. (*)

Quanto alle formole per le trasformazioni di RIBAUCOUR nel piano sono le stesse di quelle sopra notate per la sfera. Soltanto viene modificata la relazione differenziale fra le rotazioni che ora si scrive

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial v} = 0$$

ed esprime che è nulla la curvatura di

$$ds^2 = h_1^2\, du^2 + h_2^2\, dv^2,$$

§ 346.

Trasformazioni di Ribaucour per le superficie minime.

Siamo ora in grado di trattare i problemi d'inversione dei teoremi di GUICHARD già accennati al § 339 e di stabilire i risultati che abbiamo ivi enunciato.

(*) Veggasi più oltre al § 364, una costruzione geometrica semplice che dà tutte le trasformazioni di RIBAUCOUR delle figure sferiche.

(*) Questa condizione, che nel caso delle figure sferiche è una conseguenza dell' incontro, deve essere qui aggiunta.

Prendiamo in primo luogo una *qualunque* superficie Σ d'area minima, e cerchiamo una trasformazione di RIBAUCOUR che la cangi in un'altra superficie minima Σ' per modo che la superficie S luogo dei centri delle sfere sia una deformata del paraboloide rotondo, e la congruenza stessa sia quella del primo teorema di GUICHARD (§ 335). Secondo i risultati del § 334, basterà che il raggio R della sfera inviluppante soddisfi, rispetto alla superficie S dei centri, oltre che alla

$$R_{12} = 0 ,$$

valevole per qualunque congruenza di RIBAUCOUR, anche alla (I*) § 334, che scriviamo

$$(\alpha) \qquad 1 - \Delta_1 R = \frac{1}{2\,k\,R} ,$$

dove k è una costante il cui significato geometrico è quello del parametro del paraboloide rotondo. Ora, per la formola (48) pag. 180, la precedente equivale a

$$\frac{w^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2} = -\frac{1}{2\,k}\frac{w}{\varphi} ,$$

ossia

$$(52) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 + 2\,k\,\varphi\,w = 0,$$

Le trasformazioni di RIBAUCOUR richieste saranno dunque quelle nelle quali fra le funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ sussiste l'identità quadratica (52), e per stabilirne l'esistenza basterà provare che questa equazione (52) è compatibile col sistema differenziale (III). Per questo, derivando la (52) rapporto ad u, v dedurremo

$$(53) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + k\,(H_1\,w + h_1\,\varphi) + \beta_{21}\,\gamma_2 + h_1\,w = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + k\,(H_2\,w + h_2\,\varphi) + \beta_{12}\,\gamma_1 + h_2\,w = 0 \end{cases}$$

e paragonando colle due del sistema (III)

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\gamma_2 , \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\,\gamma_1 ,$$

dedurremo quale unica condizione d'integrabilità

$$H_1\,h_2 + H_2\,h_1 = 0,$$

ossia

$$r_1 + r_2 = 0,$$

ciò che esprime dover essere la superficie Σ ad area minima. Ma viceversa, in questo caso, le (53) aggregate alle (III) dànno un sistema di equazioni ai differenziali totali nelle funzioni $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$, che è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 + 2\,k\,\varphi\,w = \text{cost}^{te},$$

onde basta scegliere ulteriormente i valori iniziali di $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ per modo che la costante del secondo membro si annulli. A causa della omogeneità restano così nella trasformazione, prescindendo dal parametro k del paraboloide, due costanti arbitrarie. Ne risulta quindi, conformemente a quanto si è detto al § 339:

Ogni superficie d'area minima ammette ∞^2 *generazioni per rotolamento dal paraboloide rotondo* (*di assegnato parametro* k), *secondo il primo teorema di* GUICHARD.

Stabiliamo ora le formole esplicite per queste trasformazioni riferendoci ai parametri isometrici u, v delle linee di curvatura di Σ, il cui ds^2 si scriverà

$$ds^2 = e^{2\theta}\,(du^2 + dv^2),$$

e potremo porre

$$H_1 = H_2 = e^{\theta} ,$$

indi

$$h_1 = e^{-\theta} , \; h_2 = -\,e^{-\theta}$$

e

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u} , \; \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial v} .$$

Il sistema differenziale (III), a cui si aggiungano le (53), dà per le equazioni di trasformazione il sistema seguente:

$$(54) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + k(e^{\theta}\,w + e^{-\theta}\,\varphi) + \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\gamma_2 + e^{-\theta}\,w = 0, \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\gamma_1, \dfrac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta}\,\gamma_1, \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta}\,\gamma_1 \\ \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\gamma_2, \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + k(e^{\theta}\,w - e^{-\theta}\,\varphi) + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\gamma_1 - e^{-\theta}\,w = 0, \dfrac{\partial w}{\partial v} = -e^{\theta}\,\gamma_2, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta}\,\gamma_2, \end{cases}$$

che è un sistema ai differenziali totali completamente integrabile a causa della equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=e^{2\theta}, \tag{55}$$

cui soddisfa θ. I valori iniziali delle funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$ sono poi da scegliersi in guisa che nell'integrale quadratico

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2+2\,k\,\varphi\,w=\text{cost}^{te}$$

si annulli la costante del secondo membro, cioè si abbia

$$A=\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2=-2\,k\,\varphi\,w. \tag{55*}$$

Conviene inoltre tener presente pei calcoli seguenti che le formole del quadro (A) § 340 diventano nel caso attuale

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=e^{\theta}X_1, & \dfrac{\partial X_1}{\partial u}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_2-e^{-\theta}X_3, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_1, & \dfrac{\partial X_3}{\partial u}=e^{-\theta}X_1\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=e^{\theta}X_2, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_2, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_1+e^{-\theta}X_3, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v}=-e^{-\theta}X_2.\end{cases} \tag{56}$$

Scelta una quaderna $(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi)$ di funzioni trasformatrici che soddisfino le (54), (55*), la superficie d'area minima trasformata Σ' sarà data per le (29) da

$$x'=x+\frac{1}{k\,w}(\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+w X_3). \tag{57}$$

§ 347.

Le congruenze rettilinee di Thybaut.

Intimamente collegata colle deformate del paraboloide rotondo e col primo teorema di GUICHARD è una notevole classe di congruenze rettilinee scoperta da THYBAUT, che appartiene alla classe delle congruenze W ed ha per falde focali due superficie d'area minima. Le ritroviamo dal teorema di GUICHARD stabilendo la proposizione seguente:

Si consideri una qualunque deformata S′ *del paraboloide rotondo e le due superficie d'area minima* Σ, Σ' *inviluppo della congruenza di sfere coi centri su* S *e di raggio eguale alla corrispondente distanza focale. Delle due superficie minime* Σ,Σ' *si assumano le rispettive coniugate in applicabilità di* BONNET Σ_1,Σ'_1; *queste convenientemente collocate nello spazio, sono le due falde focali della congruenza rettilinea* W *formata dalle congiungenti i punti corrispondenti.* Per questo osserviamo che le superficie minime Σ_1, Σ'_1 coniugate in applicabilità delle rispettive Σ, Σ' sono definite, a meno di una traslazione nello spazio ciascuna, dalle formole

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}=\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial v}=-\dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x'_1}{\partial u}=\dfrac{\partial x'}{\partial v}, & \dfrac{\partial x'_1}{\partial v}=-\dfrac{\partial x'}{\partial u}.\end{cases} \tag{58}$$

Secondo l'enunciato del teorema, dovranno potersi determinare le costanti additive arbitrarie in (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1) per modo che la congiungente questi due punti corrispondenti sia tangente all' una e all' altra superficie, cioè sia normale comune alle due direzioni (X_3, Y_3, Z_3), (X'_3, Y'_3, Z'_3).

I coseni di direzione di questa congiungente debbono dunque essere proporzionali ai binomii

$$\gamma_1 X_2-\gamma_2 X_1,\ \gamma_1 Y_2-\gamma_2 Y_1,\ \gamma_1 Z_2-\gamma_2 Z_1,$$

e scriveremo per ciò

$$x'_1-x_1=T(\gamma_1 X_2-\gamma_2 X_1),\ \text{ecc.}$$

cercando di determinare T in guisa che queste siano compatibili colle (58). Questo ci dà le condizioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{T(\gamma_1 X_2-\gamma_2 X_1)\right\}=-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{w}(\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+w X_3)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{T(\gamma_1 X_2-\gamma_2 X_1)\right\}=\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{w}(\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+w X_3)\right\}.$$

dalle quali si trae facilmente per T il valore

$$T=\frac{1}{k\,w}$$

Se ne conclude che ponendo

$$x'_1 = x_1 + \frac{1}{k\,w}(\gamma_1 X_2 - \gamma_2 X_1), \text{ ecc.}$$

le due superficie minime Σ_1, Σ'_1 vengono collocate nello spazio nella posizione relativa voluta, e risultano le due falde focali della congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti. Siccome poi le linee (u, v) sono le asintotiche tanto sopra Σ_1, che sopra Σ'_1, la congruenza è W. Di più sopra Σ_1, Σ'_1 si corrispondono anche le linee di curvatura e per questa proprietà le congruenze di THYBAUT sono da ravvicinarsi a quelle pseudosferiche.

Nelle congruenze di THYBAUT si ha inoltre la notevole proprietà che: *la corrispondenza fra le due falde focali è una corrispondenza conforme.*

Non sarebbe difficile dimostrare inversamente che ogni congruenza W con falde focali superficie minime appartiene alla classe sopra trovata. Qui limitiamoci ad osservare come dai risultati stabiliti segua il teorema:

Ogni superficie ad area minima appartiene come prima falda focale ad una tripla infinità di congruenze di THYBAUT.

§ 348.

Trasformazioni di Ribaucour delle superficie a curvatura costante.

Un procedimento analogo a quello tenuto al § 346 per le superficie minime ci conduce a stabilire le trasformazioni di RIBAUCOUR per le superficie a curvatura costante K positiva o negativa. Basterà per questo sostituire alla equazione (α) pag. 186 l'altra

$$1 - \Delta_1 R = \frac{1}{k\,(R^2 - a)} \quad (k \text{ costante}) \tag{59}$$

che proviene dalla (II*) § 338, avendo qui indicato con $\frac{1}{a}$ il valore costante della curvatura per le due falde dell'inviluppo. Questa si traduce per le funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$, secondo la (48), nella seguente relazione quadratica omogenea

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (a\,k + 1)\,w^2 - k\,\varphi^2 = 0. \tag{60}$$

Con derivazione rapporto ad u, v ne seguono le due nuove equazioni differenziali da aggiungersi al sistema (III)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = k\,H_1\,\varphi - \beta_{21}\,\gamma_2 - (a\,k + 1)\,h_1\,w \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = k\,H_2\,\varphi - \beta_{12}\,\gamma_1 - (a\,k + 1)\,h_2\,w \end{cases} \tag{61}$$

e queste, confrontate colle due

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\,\gamma_1,$$

conducono all'unica condizione d'integrabilità

$$H_1\,H_2 = a\,h_1\,h_2,$$

ossia

$$r_1\,r_2 = a,$$

la quale esprime appunto che la superficie di partenza Σ deve avere la curvatura costante $K = \frac{1}{a}$. Ma viceversa, soddisfatta questa condizione, aggregando le (61) alle equazioni (III) di trasformazione, si ha un sistema ai differenziali totali completamente integrabile. Questo possiede l'integrale quadratico

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (ak + 1)\,w^2 - k\,\varphi^2 = \text{cost}^{\text{te}}$$

e non resta più altro che annullare, colla scelta dei valori iniziali, la costante del secondo membro. Ne concludiamo quindi, come nel caso delle superficie minime: *Ogni superficie a curvatura costante ammette* ∞^3 *trasformazioni di* RIBAUCOUR *in altre superficie colla stessa curvatura costante.* Queste trasformazioni, come già abbiamo avvertito al § 339, sono del resto quelle stesse che abbiamo dedotto nel Cap. XVI dalla composizione delle trasformazioni di BÄCKLUND (reali od immaginarie).

È da notarsi il caso delle superficie a curvatura costante positiva, che possono allora sostituirsi colle parallele a curvatura media costante e le relative congruenze di sfere sono quelle del secondo teorema di GUICHARD. In questo caso, come in quello delle superficie minime, la congrunza delle sfere è *conforme*, cioè le due falde dell'inviluppo si corrispondono in una

rappresentazione conforme, circostanza che ora troveremo notevolmente generalizzata nelle trasformazioni di DARBOUX delle generali superficie isoterme.

Ed ancora, riprendendo l'analoga osservazione alla fine del § 338, faremo notare che l'analisi precedente conserva il suo valore anche nel caso limite $a = 0$, ove le due falde della congruenza di sfere si riducono a curve e la superficie S dei centri diventa una sviluppabile. Queste trasformazioni delle superficie a curvatura costante conservano adunque un significato geometrico, come trasformazioni di curve, anche nel caso limite della curvatura infinita, restringendosi la superficie ad una curva (del resto arbitraria), che è allora da pensarsi come una superficie canale di raggio nullo.

§ 349.

Le trasformazioni D_m di Darboux delle superficie isoterme. (*)

Come già sopra abbiamo accennato, il DARBOUX, nelle sue ricerche sui teoremi di GUICHARD, ha scoperto delle trasformazioni molto notevoli per le *generali superficie isoterme* che appartengono alla classe di RIBAUCOUR e generalizzano le trasformazioni sopra studiate delle superficie a curvatura media costante (o nulla).

Noi andiamo ora ad introdurre le trasformazioni di DARBOUX, dal punto di vista della teoria del rotolamento, (**) proponendo di risolvere il seguente problema :

Trovare le congruenze di sfere di RIBAUCOUR *che ammettono una deformazione dopo la quale tutte le sfere vengono a passare per un punto.*

Per questo, applicando le formole generali per le trasformazioni di RIBAUCOUR stabilite nei paragrafi precedenti, dovremo di più aggiungere la condizione che il raggio R della sfera

$$R = -\frac{\varphi}{w}$$

(*) Cf. DARBOÜX. *Sur la déformatiou des surfaces du second degré et sur les surfaces isothermiques*. Comptes Rendus de l'Académie t. 128 (1899). Annales de l'École Normale 3.éme série, t. XVI.

(**) Vedi la nota dell'autore: *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolameuto*. Rendiconti dei Lincei t. XXIV, serie 5.ª (1915), e la successiva di EISENHART (ibid. ottobre 1915).

soddisfi all'equazione caratteristica (X) § 325 (pag. 128) pel primo problema del rotolamento.

Nelle attuali notazioni questa si scrive

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_2}{H_1 T + h_1}\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_1}{H_2 T + h_2}\frac{\partial T}{\partial v}\right) + H_1 H_2 T^2 + (H_1 h_2 + H_2 h_1) T = 0 ;$$

ma, avendosi qui

$$T = \frac{1}{R} = -\frac{w}{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{H_1 w - h_1 \varphi}{\varphi^2}\gamma_1, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{H_2 w - h_2 \varphi}{\varphi^2}\gamma_2,$$

come anche

$$\frac{H_2}{H_1 T + h_1} = \frac{H_2 \varphi}{h_1 \varphi - H_1 w}, \quad \frac{H_1}{H_2 T + h_2} = \frac{H_1 \varphi}{h_2 \varphi - H_2 w},$$

la nostra condizione resta

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(H_2 \frac{\gamma_1}{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(H_1 \frac{\gamma_2}{\varphi}\right) - H_1 H_2 \frac{w^2}{\varphi^2} + (H h_2 + H_2 h_1)\frac{w}{\varphi} = 0.$$

Eseguendo le derivazioni, colle (A) § 340 e colle (III) § 341, troviamo

$$H_2\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) + H_1\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right) = \frac{H_1 H_2 A}{\varphi},$$

e siccome, per le (36) § 342, si ha

$$(62) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w = \dfrac{A}{2\varphi}(H_1 - H'_1) \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w = \dfrac{A}{2\varphi}(H_2 - H'_2), \end{cases}$$

la condizione trovata equivale alla relazione

$$H_1 H'_2 + H_2 H'_1 = 0,$$

ovvero

$$(63) \qquad \frac{H_1}{H_2} = -\frac{H'_1}{H'_2}$$

Questa intanto ci dimostra che : *nelle congruenze di sfere di* RIBAUCOUR *dotate della proprietà richiesta la rappresentazione dell'una falda sull'altra è necessariamente conforme.* (*)

Per proseguire nella ricerca conviene introdurre la nuova funzione incognita

$$\psi = \frac{A}{2\varphi},$$

onde avendosi

$$A = 2\,\varphi\,\psi, \tag{64}$$

dalla (36) § 342 si hanno subito le due equazioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -\,H'_1 \frac{\gamma_1}{\varphi}\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -\,H'_2 \frac{\gamma_2}{\varphi}\psi. \tag{65}$$

Le (62) si scrivono

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = (H_1 - H'_1)\psi - \beta_{21}\gamma_2 - h_1 w, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial v} = (H_2 - H'_2)\psi - \beta_{12}\gamma_1 - h_2 w \tag{66}$$

e costruendo le condizioni d'integrabità di queste paragonate colle altre due del sistema (III)

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\gamma_1,$$

dànno

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'_1}{\partial v} &= \left\{\beta_{21} + (H'_1 - H_1)\frac{\gamma_2}{\varphi}\right\} H'_2 \\ \frac{\partial H'_2}{\partial u} &= \left\{\beta_{12} + (H'_2 - H_2)\frac{\gamma_1}{\varphi}\right\} H'_1, \end{aligned} \tag{67}$$

le quali combinano del resto colle (39) § 342.

Le formole da (64) a (67) sono ancora relative al caso generale delle trasformazioni di RIBAUCOUR e, riunite alle equazioni (III), dànno il sistema differenziale per le *sette* funzioni incognite

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ w,\ \varphi,\ \psi,\ H'_1,\ H'_2$$

(*) Oltre alle congruenze di sfere di DARBOUX che stiamo studiando esiste un'altra sola ed ovvia classe di congruenze *conformi* di sfere, quella di sfere tutte ortogonali ad una sfera fissa (DARBOUX l. c.).

di cui si è servito EISENHART nelle sue ricerche.

Ma, ritornando al caso nostro, supponiamo ora di più che sussista la (63), secondo la quale possiamo porre

$$H'_1 = -\frac{H_1\varphi}{\tau}, \quad H'_2 = \frac{H_2\varphi}{\tau}, \tag{68}$$

dove τ indica una nuova funzione ausiliaria.

Sostituendo nelle (67) otteniamo

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{2\,\beta_{12}H_1}{H_2}\tau + H_1\gamma_1, \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{2\,\beta_{21}H_2}{H_1}\tau - H_2\gamma_2,$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 2\dfrac{\partial\, log\, H_2}{\partial u}\tau + H_1\gamma_1 \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 2\dfrac{\partial\, log\, H_1}{\partial v}\tau - H_2\gamma_2. \end{cases} \tag{69}$$

La condizione d'integrabilità per questo sistema lineare in τ si riduce alla

$$\frac{\partial^2 log\left(\dfrac{H_1}{H_2}\right)}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

la quale esprime che sulla superficie Σ le linee di curvatura (u, v) formano necessariamente un sistema isotermo. E poichè lo stesso vale per la seconda falda Σ' (come segue del resto dall'essere conforme la rappresentazione di Σ' sopra Σ) ne concludiamo :

Nelle congruenze di sfere cercate le due falde dell'inviluppo sono superficie isoterme in rappresentazione conforme.

Colle formole precedenti è ora facile invertire i risultati e dimostrare che una qualunque superficie isoterma Σ appartiene come prima falda dell'inviluppo ad una *quadrupla* infinità di congruenze conformi di DARBOUX. In pari tempo stabiliremo così le formole per queste trasformazioni sotto la forma data dal DARBOUX.

§ 350.

Le formole per le trasformazioni D_m sotto la forma di Darboux.

Riferiamo la superficie isoterma data Σ ai suoi parametri isometrici e poniamo

$$H_1 = H_2 = e^{\theta},$$

indi

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Le equazioni (69), ponendo mente alle (65), si scrivono ora

$$\frac{\partial}{\partial u} log\,(e^{-2\theta}\,\tau) = \frac{\partial\, log\,\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} log\,(e^{-2\theta}\,\tau) = \frac{\partial\, log\,\psi}{\partial v},$$

da cui integrando abbiamo

$$\psi = m\, e^{-2\theta}\,\tau,$$

dove con m abbiamo indicato una costante arbitraria. Introduciamo infine la funzione

$$\sigma = e^{-2\theta}\,\tau = \frac{\psi}{m}$$

ed avendosi dalle (68)

$$H'_1 = -\frac{e^{-\theta}\,\varphi}{\sigma}, \quad H'_2 = \frac{e^{-\theta}\,\varphi}{\sigma},$$

basterà riunire le formole del § precedente alle fondamentali (III) per ottenere nelle *cinque* funzioni incognite

$$\gamma_1, \gamma_2, \varphi, w, \sigma$$

il seguente sistema *lineare omogeneo* sotto la forma di DARBOUX:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m\,(e^{\theta}\,\sigma + e^{-\theta}\,\varphi) - h_1\, w - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\gamma_2, \quad \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\gamma_2 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m\,(e^{\theta}\,\sigma - e^{-\theta}\,\varphi) - h_2\, w - \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\,\gamma_1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta}\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta}\,\gamma_2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2\,\gamma_2 \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\theta}\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -e^{-\theta}\,\gamma_2. \end{cases}$$

Questo è un sistema di equazioni ai differenzali totali completamente integrabile, a causa delle identità

$$\frac{\partial h_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\,h_2, \quad \frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\,h_1$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + h_1\,h_2 = 0.$$

Inoltre esso possiede l'integrale quadratico

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2\,m\,\varphi\,\sigma = \text{cost}^{\text{te}},$$

e per avere una delle cercate trasformazioni occorre scegliere i valori iniziali in guisa che si annulli la costante del secondo membro, cioè si abbia

$$\text{(IV*)} \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = 2\,m\,\varphi\,\sigma.$$

Ogni sistema integrale $(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi, \sigma)$ delle equazioni differeziali (IV) di DARBOUX che soddisfi alla equazione (IV*) dà luogo ad una delle trasformazioni cercate. Queste si indicheranno col simbolo D_m ponendo in evidenza la costante m che figura già nelle equazioni differenziali, (*) e l'integrazione introduce *quattro* nuove costanti arbitrarie che, in ragione della omogeneità, si riducono per) a tre sole essenziali. Così abbiamo: *La trasformazione* D_m *di* DARBOUX, *con assegnata costante* m, *fa nascere da una superficie isoterma data* Σ *una tripla infinità di nuove superficie isoterme.*

§ 351.

Proprietà caratteristiche per le trasformazioni D_m di Darboux.

Stabilita l'esistenza delle trasformazioni D_m delle superficie isoterme, osserviamo ancora due proprietà caratteristiche. La prima di queste, trovata da COSSERAT, si riferisce alla proposizione, dimostrata alla fine del § 342, secondo la quale nella congruenza rettilinea generata dalle corde di contatto le sviluppabili corrispondono alle linee di curvatura (u, v) delle

(*) La costante m ha un significato geometrico che si trova assegnato al § 3 della memoria dell'autore: *Ricerche sulle superficie isoterme*. Annali di matematica t. XI serie 3ª (1905).

due superficie Σ, Σ' e i due fuochi F_1, F_2 corrispondono ai due valori T_1, T_2 di T dati dalle (42) nelle formole (41). D'altra parte nelle (41) stesse il valore $T = 0$ corrisponde all'estremo P della corda sopra Σ, ed all'altro estremo P′ sopra Σ' corrisponde per le (29) il valore

$$T = -\frac{2\varphi}{A}$$

Dopo ciò calcoliamo il valore M del birapporto dei quattro punti P, P′, F_1, F_2 dal birapporto dei quattro valori $0, -\frac{2\varphi}{A}, T_1, T_2$:

$$M = \left(0, -\frac{\psi\varphi}{A}, \frac{H_1}{\overline{H_1}}, \frac{H_2}{\overline{H_2}}\right).$$

Per le (35*) abbiamo

$$-\frac{2\varphi}{A}\overline{H_1} = H_1 - H'_1, \quad -\frac{2\varphi}{A}\overline{H_2} = H_2 - H'_2,$$

e per ciò

$$M = \left(0, 1, \frac{H_1}{H_1 - H'_1}, \frac{H_2}{H_2 - H'_2}\right),$$

ovvero semplicemente

$$M = \frac{H_1 H'_2}{H_2 H'_1},$$

La relazione (63) che caratterizza, come si è visto, le trasformazioni D_m di DARBOUX equivale all'altra

$$M = -1,$$

ciò che esprimiamo col teorema di COSSERAT:

Nelle congruenze conformi di sfere di DARBOUX, *ed in queste soltanto, i due fuochi della congruenza rettilinea delle corde dividono armonicamente i due estremi della corda.*

In fine osserviamo che dal modo stesso tenuto al § precedente per giungere alle trasformazioni D_m, risulta come la conoscenza di ogni trasformazione D_m per una superficie isoterma Σ procura subito una corrispondente generazione della Σ come superficie di rotolamento, nella quale la superficie S dei centri è la superficie d'appoggio. Per caratterizzare la superficie rotolante S_0 ricordiamo dal § 323 che alle linee di curvatura (u, v della superficie Σ di rotolamento corrisponde un sistema *cinematicamente* coniugato sopra S, e siccome nel caso attuale esso è anche coniugato sopra S nel senso di DUPIN, vediamo che esso rappresenta il sistema coniugato comune di (S, S'_0). Dunque: *nelle congruenze conformi di sfere di* DARBOUX *il sistema coniugato* (u, v) *che sulla superficie* Σ *dei centri corrisponde alle linee di curvatura delle superficie isoterme* Σ,Σ' *è il sistema coniugato permanente in quella deformazione che cangia* S *nella superficie rotolante* S_0.

Ed ora dalla proposizione generale I) al § 323 segue che il sistema coniugato (u, v) di S_0, permanente nella deformazione che cangia S_0 in S, è quello che ha *apparenza ortogonale* visto dal punto satellite O. Ma i risultati ottenuti ci permettono di constatare che questa è una proprietà caratteristica delle superficie rotolanti S_0 nelle generazioni per rotolamento delle superficie isoterme corrispondenti alle trasformazioni D_m. Suppongasi infatti che per una superficie S_0 il sistema coniugato d'apparenza ortogonale rispetto ad un punto fisso O dello spazio sia *permanente* in una deformazione finita, e questa cangi S_0 in S. Se facciamo rotolare S_0 sopra S, il punto satellite O descrive (una superficie Σ su cui le linee di curvatura (u, v) corrispondono, per la citata preposizione I) § 323, al detto sistema coniugato comune di (S_0, S). La relativa congruenza di sfere coi centri sopra S e coll'inviluppo Σ ammette dunque la deformazione finita inversa che riduce le sfere a passare per un punto O. Segue quindi che la superficie Σ è isoterma e la congruenza di sfere è una congruenza di DARBOUX.

Con queste ultime considerazioni noi abbiamo dunque conseguita questa trasformazione del problema delle superficie isoterme:

La ricerca delle superficie isoterme equivale a quella delle superficie S_0 *che posseggono un sistema coniugato permanente d'apparenza ortogonale rispetto a un punto fisso.*

Possiamo in fine applicare questi risultati ad ottenere una nuova interpretazione del problema, già risoluto al § 327, che concerne le generazioni della sfera o del piano come superficie di rotolamento. Una congruenza di sfere tangenti ad un piano o ad una sfera fissa è sempre una congruenza di RIBAUCOUR (§ 316) e se supponiamo che essa corrisponda ad una generazione per rotolamento del piano o della sfera, colla superficie dei centri quale superficie d'appoggio, dovrà esistere una deformazione della superficie dei centri, dopo la quale le sfere vengono tutte a passare per un punto fisso. Pei risultati del § 349 la congruenza di sfere è dunque una congruenza conforme di DARBOUX, nella quale il piano (la sfera) figura come superficie

isoterma onde la rappresentazione del piano (o della sfera) sulla seconda falda $\overline{\Sigma}$ (isoterma) dell'inviluppo è conforme, come abbiamo enunciato alla fine del § 327. Concludiamo quindi:

Si ottengono tutte le generazioni del piano (della sfera) come superficie di rotolamento applicando al piano (o alla sfera), riguardato come superficie isoterma, le trasformazioni D_m *di* DARBOUX.

Se si tratta p. e. del piano, basterà riferirlo ad un sistema ortogonale isotermo arbitrario, e si porrà nelle formole (IV) di trasformazione

$$h_1 = h_2 = 0.$$

Il caso della sfera si riporta subito a questo con una inversione per raggi vettori reciproci.

§ 352.

Fasci di trasformazioni di Ribaucour.

La teoria generale delle trasformazioni (di RIBAUCOUR) per inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura offre strette analogie, che appaiono negli sviluppi dei paragrafi precedenti, con quelle delle trasformazioni per congruenze rettilinee W di cui abbiamo trattato nel Cap. XVIII. Di tali analogie possiamo renderci ragione *a priori* osservando che la celebre trasformazione di contatto di S. Lie che trasforma le rette in sfere e le linee asintotiche di una superficie qualunque della figura in quelle di curvatura della trasformata viene per ciò stesso a cangiare ogni congruenza rettilinea W in una congruenza di sfere di RIBAUCOUR. In base a questa osservazione è facile prevedere che anche nella teoria delle trasformazioni di RIBAUCOUR dovrà valere un *teorema generale di permutabilità* analogo a quello che sussiste per le congruenze W (§ 301). Noi andiamo ora ad occuparci appunto di trovare, sotto forma reale, le formole relative a questo teorema di permutabilità che nel seguito di questo libro riceverà poi una notevole estensione ai sistemi n^{pli} ortogonali negli spazii ad un numero qualunque di dimensioni (Cap. XXVIII).

E per prima cosa poniamo la nozione di *fasci di trasformazioni di* RIBAUCOUR di una data superficie Σ, in analogia a quella di fasci di congruenze W. Le equazioni di trasformazione (III) per le funzioni trasformatrici $(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi)$ essendo lineari omogenee, è manifesto che da due *diverse* quaderne trasformatrici

$$(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi), (\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi')$$

ne componiamo linearmente una serie ∞^1 ponendo

$$(70) \qquad \overline{\gamma}_1 = c_1\gamma_1 + c_2\gamma', \ \overline{\gamma}_2 = c_1\gamma_2 + c_2\gamma'_2, \ \overline{w} = c_1 w + c_2 w', \ \overline{\varphi} = c_1\varphi + c_2\varphi',$$

essendo c_1, c_2 costanti arbitrarie il cui rapporto $c_1 : c_2$ figura come parametro essenziale nella soluzione variabile $(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{w}, \overline{\varphi})$. Diremo che queste formano un *fascio* di soluzioni, e corrispondentemente avremo un *fascio* di trasformate di RIBAUCOUR della Σ, determinato dalle due particolari Σ', Σ'' ottenute dalle due soluzioni iniziali; brevemente parleremo del fascio $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$.

Ed ora esaminiamo quale è il luogo del punto $\overline{P}$ sulla trasformata variabile $\overline{\Sigma}$ del fascio corrispondente al punto generico P della primitiva Σ. Per le coordinate ξ, η, ζ di $\overline{P}$ dalle formole (29) pag. 175 abbiamo

$$(71) \qquad \xi = x - \frac{2\,\overline{\varphi}}{\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + \overline{w}^2}(\overline{\gamma}_1 X_1 + \overline{\gamma}_2 X_2 + \overline{w} X_3),$$

colle analoghe per η, ζ. Per calcolare il denominatore $\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + \overline{w}^2$ introduciamo le tre espressioni

$$(72) \quad A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2, \ B = \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2 + w w', \ A' = \gamma'^2_1 + \gamma'^2_2 + w'^2$$

e poniamo come nelle (30)

$$(73) \qquad \bar{x} = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + w X_3, \ \bar{x}' = \gamma'_1 X_1 + \gamma'_2 X_2 + \gamma'_3 X_3;$$

sostituendo nelle (71) abbiamo

$$(74) \qquad \xi = x - \frac{2\,(c_1\varphi + c_2\varphi')}{A\,c_1^2 + 2\,B\,c_1 c_2 + A'\,c_2^2}\{c_1\bar{x} + c_2\bar{x}'\}, \text{ ecc.}$$

Se in queste formole fissiamo una coppia (u, v) di valori per u, v, esse dànno le equazioni parametriche della linea luogo del punto $\overline{P} \equiv (u, v)$ nella superficie $\overline{\Sigma}$ variabile del fascio. Ora dimostriamo che questo luogo è un circolo, precisamente il circolo $C \equiv (PP'P'')$ che passa pel punto P di Σ e pei due corrispondenti P', P'' di Σ', Σ''. Poniamo per un momento nelle (74)

$$(75)\qquad \frac{-2c_1(c_1\varphi+c_2\varphi')}{A c_1^2+2B c_1 c_2+A' c_2^2}=l,\quad \frac{-2c_2(c_1\varphi+c_2\varphi')}{A c_1^2+2B c_1 c_2+A' c_2^2}=m$$

e le (74) si scriveranno

$$(76)\qquad \xi=x+l\bar{x}+m\bar{x}',\ \eta=y+l\bar{y}+m\bar{y}',\ \zeta=z+l\bar{z}+m\bar{z}',$$

dove, per u, v fissi, le quantità x, y, z ; $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$ sono altrettante costanti. La linea luogo del punto (ξ, η, ζ) giace dunque intanto nel piano

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \end{vmatrix}=0,$$

la cui equazione può anche scriversi

$$(76^*)\quad S\{(\gamma_2 w'-w_2\gamma'_2)X_1+(w\gamma'_1-\gamma_1 w_1)X_2+(\gamma_1\gamma'_2-\gamma_2\gamma'_1)X_2\}(\xi-x)$$

§ 353.

Proprietà geometriche del fascio. (*)

Escludiamo per ora il caso in cui sussistano le proporzioni

$$\gamma_1 : \gamma_2 : w = \gamma_1' : \gamma'_2 : w',$$

dove l'equazione sopra scritta si ridurrebbe ad un'identità. Dimostriamo che la linea cercata è un circolo di cui determiniamo le coordinate (ξ_0, η_0, ζ_0) del centro ed il raggio r nel modo seguente. Denotiamo con l_0, m_0 i valori da attribuirsi nelle (76) ai parametri l, m per ottenere le coordinate del centro, onde avremo

$$\xi-\xi_0=(l-l_0)\bar{x}+(m-m_0)\bar{x}',\ \text{ecc.}$$

e resterà da determinare l_0, m_0 in guisa che la quantità

$$(77)\quad r^2=S(\xi-\xi_0)^2=(l-l_0)^2 S\bar{x}^2+2(l-l_0)(m-m_0)S\bar{x}\bar{x}'+(m-m_0)^2 S\bar{x}'^2$$

(*) Le proprietà del presente paragrafo vennero osservate da DEMOULIN. (Comptes Rendus de l'Academie janvier 1910).

sia indipendente dal parametro $t=\frac{c_1}{c_2}$. Ora abbiamo per le (72), (73)

$$S\bar{x}^2=A,\ S\bar{x}\bar{x}'=B,\ S\bar{x}'^2=A',$$

e per le (75)

$$l=-\frac{2t(t\varphi+\varphi')}{A t^2+2B t+A'},\quad m=-\frac{2(t\varphi+\varphi')}{A t^2+B t+A'},$$

onde sostituendo nella (77) abbiamo

$$r^2(At^2+2Bt+A')^2=A\{2t(t\varphi+\varphi')+l_0(At^2+2Bt+A')\}^2+$$
$$+2B\{2t(t\varphi+\varphi')+l_0(At^2+2Bt+A')\}\{2(t\varphi+\varphi')+m_0(At^2+2Bt+A')\}$$
$$+A'\{2(t\varphi+\varphi')+m_0(At^2+2Bt+A')\}.$$

Sopprimendo il fattore $At^2+2Bt+A'$ comune ai due membri, resta da determinare l_0, m_0, (indipendenti da t) in modo che sussista l'identità

$$4(t\varphi+\varphi')\{t\varphi+\varphi'+A l_0 t+B(m_0 t+l_0)+A' m_0\}+$$
$$+(At^2+2Bt+A')\{A l_0^2+2 l_0 m_0+A' m_0^2-r^2\}=0.$$

Per questo occorre e basta determinare l_0 m_0 dalle equazioni lineari

$$\begin{cases} A l_0+B m_0=-\varphi \\ B l_0+A' m_0=-\varphi' \end{cases}$$

e prendere poi

$$r^2=A l_0^2+2B l_0 m_0+A' m_0^2.$$

Essendo, nelle nostre ipotesi, il determinante

$$AA'-B^2=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & w \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & w' \end{vmatrix}^2$$

diverso da zero, ne ricaviamo

$$l_0=\frac{B\varphi'-A'\varphi}{A A'-B^2},\quad m_0=\frac{B\varphi-A\varphi'}{A' A-B^2}.$$

Il luogo cercato è dunque in effetto un circolo C col centro nel punto $(\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0)$ di coordinate

$$\xi_0 = x + \frac{B\varphi' - A'\varphi}{A\,A' - B^2}\bar{x} + \frac{B\varphi - A\varphi'}{A\,A' - B^2}\bar{x}', \text{ ecc.} \tag{78}$$

e di raggio

$$r = \sqrt{\frac{A'\varphi^2 - 2\,B\,\varphi'\varphi + A\,\varphi'^2}{A\,A' - B^2}}. \tag{79}$$

Siccome poi pel valore $t = -\frac{\varphi'}{\varphi}$ del parametro t le quantità l, m si annullano, e le (76) si riducono a $\xi = x$. $\eta = y$, $\zeta = z$, così è manifesto che il circolo C passa anche pel punto P di Σ ed è quindi il circolo P P′P″, come sopra si è enunciato.

Ora consideriamo il triedro principale della superficie generica del fascio $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ col vertice nel punto (ξ, η, ζ) e denotiamone con

$$\begin{matrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{matrix}$$

rispettivi coseni di direzione degli spigoli ; dalle formole (30) § 342 abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= X_1 - \frac{2\,(c_1\,\gamma_1 + c_2\,\gamma'_1)}{\bar{A}}(c_1\,\bar{x} + c_2\,x') \\ \xi_2 &= X_2 - \frac{2\,(c_1\,\gamma_2 + c_2\,\gamma'_2)}{\bar{A}}(c_1\,\bar{x} + c_2\,x') \\ \xi_3 &= X_3 - \frac{2\,(c_1\,w + c_3\,w')}{\bar{A}}(c_1\,\bar{x} + c_2\,x') \end{aligned}\right. \tag{80}$$

con

$$\bar{A} = A\,c_1^2 + 2\,B\,c_1\,c_2 + A'\,c_2^2,$$

e d'altra parte

$$\xi_0 - \xi = l_0\,\bar{x} + m_0\,\bar{x}' + \frac{2\,(c_1\,\varphi + c_2\,\varphi')}{\bar{A}}(c_1\,\bar{x} + c_2\,\bar{x}'). \tag{80*}$$

Indicando con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della normale al piano (76*) o dell'asse del circolo C, risulta

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}}\left\{\begin{vmatrix} \gamma_2 & w \\ \gamma'_2 & w' \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} w & \gamma_1 \\ w' & \gamma'_1 \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix} X_3\right\} = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}}\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & w \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & w' \end{vmatrix},$$

formola che, a causa delle identità

$$S\,X_0\,\bar{x} = 0, \quad X_0\,\bar{x}' = 0,$$

possiamo anche scrivere :

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}}\left\{\begin{vmatrix} \gamma_2 & w \\ \gamma'_2 & w' \end{vmatrix}\xi_1 + \begin{vmatrix} w & \gamma_1 \\ w' & \gamma'_1 \end{vmatrix}\xi_2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}\xi_3\right\}. \tag{81}$$

I coefficienti di ξ_1, ξ_2, ξ_3 in questa formola essendo indipendenti dal parametro $t = \frac{c_1}{c_2}$, si vede che la *direzione* dell'asse del circolo C è invariabile rispetto al triedro mobile della superficie del fascio $c_1\Sigma' + c_3\,\Sigma''$. Ma di più, paragonando le (80), (80*), si ha subito l'altra identità

$$\xi_0 - \xi = (l_0\,\gamma_1 + m_0\,\gamma'_1)\,\xi_1 + (l_0\,\gamma_2 + m_0\,\gamma_2')\,\xi_2 + (l_0\,w + m_0\,w')\,\xi_3 \tag{82}$$

e questa ci dimostra che anche il centro (ξ_0, η_0, ζ_0) del circolo C, indi l' asse, serba una posizione invariabile rispetto al detto triedro mobile.

Si arriva del resto alle medesime conseguenze colla seguente semplice considerazione geometrica. Il triedro principale di Σ, col vertice nel punto (x, y, z), e quello della superficie generica $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ del fascio, col vertice in (ξ, η, ζ) hanno, per le proprietà della trasformazione di RIBAUCOUR, gli spigoli corrispondenti concorrenti in tre punti A, B, C e sono per ciò simmetrici rispetto al piano ABC. Questo è il piano normale nel punto medio alla congiungente i due vertici (x, y, z) (ξ, η, ζ) e passa quindi per l'asse del circolo C. Dunque gli infiniti triedri principali delle superficie del fascio sono tutti simmetrici di quello di Σ rispetto ai piani per l'asse del circolo, e sono quindi congruenti per rotazione attorno a questo asse.

Riassumiamo intanto i risultati ottenuti come segue: *Se di una superficie* Σ *si assumono due diverse trasformate di* RIBAUCOUR Σ', Σ'', *queste determinano un fascio di tali trasformate* $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$, *il luogo dei punti delle* ∞^1 *trasformate, corrispondenti ad un medesimo punto* P *di* Σ, *è il circolo* C $\equiv$ PP′ P″ *individuato dal punto* P *e dai due corrispondenti* P′$_1$ P″ *di* Σ', Σ''. *I triedri principali delle* ∞^1 *superficie del fascio sono congruenti fra loro per rotazione attorno all'asse del circolo* C.

Risulta inoltre dalle considerazioni geometriche superiori che i due piani principali delle ∞^1 superficie del fascio incontrano l'asse del circolo C nei medesimi due punti, che diremo F_1, F_2, ove questo asse viene incontrato

dai piani principali corrispondenti della superficie primitiva Σ. Determiniamo le rispettive ascisse ρ_1, ρ_2 di F_1, F_2 contate sul detto asse del circolo C, a partire dal centro (ξ_0, η_0, ζ_0) come origine, dalle rispettive condizioni

$$S(\xi_0 - x + \rho_1 X_0) X_1 = 0, \; S(\xi - x + \rho_2 X_0) X_2 = 0,$$

e troveremo dalle formole precedenti:

$$(83) \quad \begin{cases} \dfrac{w\gamma'_2 - \gamma_2 w'}{\sqrt{A A' - B^2}} \rho_1 = l_0 \gamma_1 + m_0 \gamma'_1 \\ \dfrac{\gamma_1 w' - w \gamma'_1}{\sqrt{A A' - B^2}} \rho_2 = l_0 \gamma_2 + m_0 \gamma'_2, \end{cases}$$

formole che determinano i valori di ρ_1, ρ_2.

Riconosciamo il significato geometrico di F_1, F_2 *come fuochi dell'asse del circolo* osservando che le derivate rapporto ad u delle tre coordinate di F_1

$$\xi_0 + \rho_1 X_0, \quad \eta_0 + \rho_1 Y_0, \; \zeta_0 + \rho_1 Z_0$$

risultano proporzionali a X_0, Y_0, Z_0, e similmente le tre derivate rapporto a v delle coordinate di F_2

$$\xi_0 + \rho_2 X_0, \quad \eta_0 + \rho_2 Y_0, \quad \zeta_0 + \rho_2 Z_0.$$

Questo ci dimostra che: *nella congruenza degli assi dei circoli* C *le sviluppabili sono le* v=cost^te, *e le* u=cost^te, *corrispondenti alle linee di curvatura di* Σ *; il fuoco* F_1 *corrisponde alle prime sviluppabili, il fuoco* F_2 *alle seconde.*

Osservazione. In tutto ciò abbiamo escluso il caso che γ'_1, γ'_2, w' siano proporzionali a γ_1, γ_2, w. Ma in tal caso le equazioni di trasformazione dimostrano subito che il fattore di proporzionalità è una costante, e si può quindi senz'altro supporre

$$\gamma'_1 = \gamma_1, \quad \gamma'_2 = \gamma, \; w' = w,$$

onde segue

$$\varphi' = \varphi + \text{cost}^{te}$$

Le formole (29) provano allora che, variando la costante additiva in φ, il punto (x', y', z') descrive una retta (in luogo di un circolo C) e le ∞^1 superficie del fascio sono tutte trasformate di COMBESCURE l'una dell'altra (hanno triedri paralleli).

§ 354.

I teoremi di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour.

Andiamo ora a dimostrare che: *il fascio* $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ *di trasformate di* RIBAUCOUR *di* Σ *ne individua un secondo, a cui appartiene* Σ, *e di cui ciascuna superficie* $\overline{\Sigma}$ *è legata ad una qualunque del primo fascio da una trasformazione di* RIBAUCOUR *; inoltre i circoli* C *del secondo fascio coincidono con quelli del primo.* In questo risultato consiste, nel caso attuale, il teorema di permutabilità, che è così perfettamente l'analogo di quello del § 301 relativo alle trasformazioni pe reongruenze W. (*) Per stabilire il teorema e trovare il nuovo fascio (con una quadratura) procederemo nel modo seguente. Presa una delle superficie del primo fascio, p. e la Σ', cerchiamone una trasformata $\overline{\Sigma}$ di RIBAUCOUR *le cui funzioni trasformatrici* $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{w}, \overline{\varphi}$ *si compongano colle due quaderne iniziali*

$$(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi), \; (\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi')$$

mediante formole del tipo:

$$(84) \quad \overline{\gamma} = \Omega\gamma_1 + a\gamma'_1, \; \overline{\gamma}_2 = \Omega\gamma_2 + a\gamma'_2, \; \overline{w} = \Omega w + a w', \; \overline{\varphi} = \Omega\varphi + a\varphi',$$

dove a *è una costante ed* Ω *una conveniente funzione di* u, v. Osserviamo subito che, per le formole (38) § 342 della trasformazione inversa, si ha intanto una soluzione del problema nella superficie Σ stessa primitiva prendendo nelle (84) la costante $a = 0$ ed $\Omega = \dfrac{1}{A}$.

Ed ora tutto si riduce a provare che si può prendere la funzione Ω in guisa che $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{w}, \overline{\varphi}$ vengano a soddisfare alle equazioni caratteristiche di trasformazione (III) § 341, rispetto alla superficie Σ', e cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\gamma}_1}{\partial v} = \beta'_{12}\overline{\gamma}_2, \; \dfrac{\partial\overline{\gamma}_2}{\partial u} = \beta'_{21}\overline{\gamma}_1 \\ \dfrac{\partial\overline{w}}{\partial u} = h'_1\overline{\gamma}_1, \; \dfrac{\partial\overline{w}}{\partial v} = h'_2\overline{\gamma}_2 \\ \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u} = H'_1\overline{\gamma}_1, \; \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v} = H'_2\overline{\gamma}_2. \end{cases}$$

(*) L'un teorema si deduce dall'altro colla trasformazione di LIE. (Cf. § 352 in principio).

Se si ha riguardo alle formole (36), (39), (40) § 342, ed alle equazioni differenziali (III) cui soddisfano

$$(\gamma_1, \gamma_2; w, \varphi), (\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi'),$$

si trova subito che le condizioni sopra scritte si riducono a queste due sole per la funzione incognita Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} = -\dfrac{\Omega}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{a\gamma'_1}{A\gamma'_1}\dfrac{\partial A}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} = -\dfrac{\Omega}{A}\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{a\gamma'_2}{A\gamma_2}\dfrac{\partial A}{\partial v}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(A\,\Omega) = -\dfrac{a\gamma'_1}{\gamma_1}\dfrac{\partial A}{\partial u} = -2\,a\,\gamma'_1\left(\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\,\gamma_2 + h_1\,w\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(A\,\Omega) = -\dfrac{a\gamma'_2}{\gamma_2}\dfrac{\partial A}{\partial v} = -2\,a\,\gamma'_2\left(\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\,\gamma_1 + h_2\,w\right). \end{cases}$$

Ora l'espressione

$$-2\,\gamma'_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\,\gamma_2 + h_1\,w\right)du \;\; -2\gamma'_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\,\gamma_1 + h_2\,w\right)dv,$$

che si può scrivere anche

$$-2\,(\overline{H}_1\,\gamma'_1\,du + \overline{H}_2\,\gamma'_2\,dv),$$

è in effetto un differenziale esatto, (*) onde eseguendo la quadratura

$$\tau = -2\int_{(u_0\,v_0)}^{u\,v}(\overline{H}_1\,\gamma'_1\,du + \overline{H}_2\,\gamma'_2\,dv)\,, \tag{85}$$

(*) Si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}(\overline{H}_1\,\gamma'_1) = \frac{\partial}{\partial u}(\overline{H}_2\,\gamma'_2)\,,$$

a causa di

$$\frac{\partial \overline{H}_1}{\partial v} = \beta_{21}\,\overline{H}_2\,, \quad \frac{\partial \overline{H}_2}{\partial u} = \beta_{12}\,\overline{H}_1$$

$$\frac{\partial \gamma'_1}{\partial v} = \beta_{12}\,\gamma'_2\,, \quad \frac{\partial \gamma'_2}{\partial u} = \beta_{12}\,\gamma'_1$$

avremo per la funzione Ω cercata

$$A\,\Omega = a\,\tau + c, \tag{86}$$

con c costante arbitraria. Pertanto le formole (84) prendono la forma definitiva

$$\text{(V)}\quad \overline{\gamma}_1 = \frac{c\gamma_1}{A} + a\left(\frac{\tau\gamma_1}{A} + \gamma'_1\right),\ \overline{\gamma}_2 = \frac{c\gamma_2}{A} + a\left(\frac{\tau\gamma_2}{A} + \gamma'_2\right),\ \overline{w} = \frac{cw}{A} + a\left(\frac{\tau w}{A} + w'\right)$$
$$\overline{\varphi} = \frac{c\,\varphi}{A} + a\left(\frac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi'\right),$$

e sono le formole cercate del teorema di permutabilità. Siccome esse si compongono linearmente colle costanti c, a, mediante i due sistemi di soluzioni particolari

$$\left(\frac{\gamma_1}{A}, \frac{\gamma_2}{A}, \frac{w}{A}, \frac{\varphi}{A}\right), \left(\frac{\tau\gamma_1}{A} + \gamma'_1, \frac{\tau\gamma_2}{A} + \gamma'_2, \frac{\tau w}{A} + w', \frac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi'\right),$$

così è chiaro che la trasformata $\overline{\Sigma}$ di RIBAUCOUR della Σ' percorre a sua volta un fascio al quale appartiene per $a = 0$ la Σ stessa, mentre per ogni altra $\overline{\Sigma}$ potremo senz'altro prendere $a = 1$, e scriveremo

$$\text{(V*)}\quad \overline{\gamma}_1 = \Omega\,\gamma_1 + \gamma'_1,\ \overline{\gamma}_2 = \Omega\,\gamma_2 + \gamma'_2,\ \overline{w} = \Omega\,w + w',\ \overline{\varphi} = \Omega\,\varphi + \varphi'$$
$$\left(\Omega = \frac{\tau + c}{A}\right).$$

Ed ora resta soltanto da provare che la $\overline{\Sigma}$ è legata a qualunque altra superficie $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ del primo fascio da una trasformazione di RIBAUCOUR. Cominciamo dal provare che il circolo $\overline{C}$ pel fascio $(\overline{\Sigma})$ coincide col primitivo C, dato dalle formole (76), avendo l, m per le (75) i valori

$$l = -\frac{2t\,(t\,\varphi + \varphi'_1)}{At^2 + 2\,Bt + A'}\,, \quad m = -\frac{2\,(t\varphi + \varphi'_1)}{At^2 + 2\,Bt + A'}\,,$$

dove t è il parametro (di razionalità) sul circolo C. Se diciamo $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ le coordinate del punto $\overline{P} \equiv (u, v)$ di $\overline{\Sigma}$, abbiamo dalle (29)

$$\overline{\xi} = x' - \frac{\overline{2}\,\varphi}{\overline{A}}\,(\overline{\gamma}_1\,X'_1 + \overline{\gamma}_2\,X'_2 + \overline{w}\,X'_3)\,,$$

ove per le (V*)

$$\overline{A} = \overline{\gamma}_1^2 + \gamma_2^2 + \overline{w}^2 = A\Omega^2 + 2B\Omega + A'.$$

Per le (29) stesse e per le (V*) possiamo scrivere

$$\overline{\xi} = x - \frac{2\varphi}{A}(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + w X_3) - \frac{2(\Omega\varphi + \varphi')}{A\Omega^2 + 2B\Omega + A'}\{\Omega(\gamma_1 X'_1 + \gamma_2 X'_2 + w X'_3) + \gamma'_1 X'_1 + \gamma'_2 X'_2 + w'' X'_3\}$$

e siccome

$$\gamma X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 = \bar{x},$$

e per le (30)

$$X'_1 = X_1 - \frac{2\gamma_1}{A}\bar{x},\ X'_2 = X_2 - \frac{2\gamma_2}{A}\bar{x},\ X'_3 = X_3 - \frac{2w}{A}\bar{x},$$

indi

$$\gamma_1 X'_1 + \gamma_2 X'_2 + w X'_3 = \bar{x} - 2\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2}{A}\bar{x} = -\bar{x}$$

$$\gamma'_1 X'_1 + \gamma'_2 X'_2 + w' X'_3 = \bar{x}' - \frac{2B}{A}\bar{x},$$

risulta

$$\overline{\xi} = x - \frac{2\varphi}{A}\bar{x} + \frac{2(\Omega\varphi + \varphi')}{A\Omega^2 + 2B\Omega + A'}\left\{\left(\Omega + \frac{2B}{A}\right)\bar{x} - \bar{x}'\right\},$$

ovvero

$$(86^*)\quad \overline{\xi} = x - 2\frac{A'\varphi - (A\Omega + 2B)\varphi'}{A(A\Omega^2 + 2B\Omega + A')}\bar{x} - 2\frac{\Omega\varphi + \varphi'}{A\Omega^2 + 2B\Omega + A'}\bar{x}'.$$

Se si confrontano queste colle equazioni parametriche (76) del circolo C, avendo l, m i valori (75), si vede che, per identificarle, basta porre

$$(87)\qquad t = \frac{A'\varphi - (A\Omega + 2B)\varphi'}{A(\Omega\varphi + \varphi')},$$

e resta così provato in effetto che il circolo $\overline{C}$ del secondo fascio coincide con quello del primo.

Assoluto questo punto fondamentale, è facile ora provare che : *ogni superficie* $\overline{\Sigma}$ *del secondo fascio è trasformata di* RIBAUCOUR *di qualunque superficie* $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ *del primo*. E infatti siccome $\overline{\Sigma}$ è trasformata di RIBAUCOUR di Σ' e i due loro punti corrispondenti $\overline{P}$, P' sono sul circolo C, i loro due triedri principali sono simmetrici rispetto al piano normale nel punto medio della corda $\overline{P}P'$, *che passa dunque per l'asse del circolo* C. Ne segue che i triedri principali del secondo fascio sono i simmetrici di quelli

del primo rispetto ai piani per l'asse del circolo, e per ciò due qualunque di questi triedri, presi l'uno nel primo l'altro nel secondo fascio, hanno ogni coppia di spigoli corrispondenti incidenti in un punto equidistante dai due vertici, ciò che è appunto la proprietà caratteristica della trasformazione di RIBAUCOUR (§ 340). In particolare si osserverà che: *le normali alle superficie dei due fasci coniugati lungo un circolo* C *sono le generatrici del primo e secondo sistema di un iperboloide rotondo, avente* C *per parallelo.*

Confermiamo analiticamente questi risultati colle osservazioni seguenti. Includendo la costante arbitraria c in τ, possiamo porre per la (86) (facendo $a = 1$)

$$A\Omega = \tau,$$

essendo τ definita dalle equazioni

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau}{\partial u} = -2\gamma'_1\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial v} = -2\gamma'_2\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right). \end{cases}$$

Ma essendo $B = \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2 + ww'$, indi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial u} = \gamma'_1\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w\right) + \gamma_1\left(\dfrac{\partial\gamma'_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma'_2 + h_1 w'\right) \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} = \gamma'_2\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right) + \gamma_2\left(\dfrac{\partial\gamma'_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma'_1 + h_2 w'\right), \end{cases}$$

ne segue che se si pone

$$(\beta)\qquad \tau' = -2B - \tau,$$

si hanno le formole

$$(\alpha')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau'}{\partial u} = -2\gamma_1\left(\dfrac{\partial\gamma'_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma'_2 + h_1 w'\right) \\ \dfrac{\partial\tau'}{\partial v} = -2\gamma_2\left(\dfrac{\partial\gamma'_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma'_1 + h_2 w'\right), \end{cases}$$

che sono le simmetriche delle (α), scambiato Σ' con Σ''. Ma allora le formole (86*) per la superficie $\overline{\Sigma}$ possono scriversi

$$\overline{\xi} = x - 2\frac{\tau'\varphi' + A'\varphi}{AA' - \tau\tau'}\bar{x} - 2\frac{\tau\varphi + A\varphi'}{AA' - \tau\tau'}\bar{x}',$$

e si vede che restano invariate scambiando Σ' con Σ''. Perciò la superficie $\overline{\Sigma}$ è legata anche a Σ'' da una trasformazione di RIBAUCOUR e le funzioni trasformatrici nel passaggio da Σ'' a $\overline{\Sigma}$ sono le seguenti :

$$\overline{\gamma'}_1 = \frac{\tau'\gamma'_1}{A'} + \gamma_1,\ \overline{\gamma'}_2 = \frac{\tau'\gamma'_2}{A'} + \gamma_2,\ \overline{w'} = \frac{\tau' w'}{A'} + w,\ \overline{\varphi'} = \frac{\tau'\varphi'}{A'} + \varphi.$$

Infine prendiamo due superficie qualunque nel primo fascio, p. e. Σ', Σ'' e due del secondo, siano Σ, $\overline{\Sigma}$, e calcoliamo il birapporto

$$\Theta = (P'\ P''\ P\ \overline{P})$$

di quattro loro punti corrispondenti sul circolo C. Il parametro di razionalità t su C ha ordinatamente in questi quattro punti i valori:

$$t = \infty\ ,\ t = 0\ ,\ t = -\frac{\varphi'}{\varphi}\ ,\ t = -\frac{(A\,\Omega + 2\,B)\,\varphi' - A'\,\varphi}{A\,(\Omega\,\varphi + \varphi')}\ ,$$

e si ha quindi

$$\Theta = \frac{(A\,\Omega + 2\,B)\,\varphi' - A'\varphi}{A\,(\Omega\,\varphi + \varphi')} \cdot \frac{\varphi}{\varphi'}\ . \tag{88}$$

§ 355.

Il teorema speciale di permutabilità per le superficie minime.

Si è visto che la determinazione del fascio coniugato di un dato fascio di trasformazioni di RIBAUCOUR richiede, in generale, la quadratura che dà la funzione τ colla (85). Andiamo ora a mostrare come nei casi particolari importanti considerati ai §§ 346, 347, 349: 1° per le superficie d'area minima, 2° per le superficie a curvatura costante, 3° per le superficie generali isoterme, l'indicata quadratura può eseguirsi in *termini finiti*. Questo dipende da una particolare forma che assume in questi casi il teorema di permutabilità, affatto analoga a quella del corrispondente teorema per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche. Se da una superficie Σ della specie si sono dedotte, colle corrispondenti trasformazioni di RIBAUCOUR, due superficie Σ', Σ'' della medesima specie, avviene che: *nel fascio coniugato al fascio* $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ *esiste una ed una sola superficie* $\overline{\Sigma}$ *della specie stessa, la quale è quindi determinabile in termini finiti.* Diremo per ciò che sussiste per queste particolari classi di superficie un teorema *speciale* di permutabilità.

Cominciamo dallo stabilire questo teorema nel caso particolare delle superficie d'area minima. Da una tale superficie Σ, colle formole di trasformazione (54) del § 346, supponiamo dedotta la superficie d'area minima Σ', e la trasformazione stessa si indichi con T_k ponendo in evidenza la costante k (parametro del paraboloide rotondo) che entra già nelle equazioni differenziali (54). Consideriamo allora una seconda trasformata d'area minima Σ'' dedotta da Σ con una trasformazione $T_{k'}$, *a costante* $k' \neq k$. Dimostriamo allora : *Nel fascio coniugato al fascio* $c_1\,\Sigma' + c_2\,\Sigma''$ *esiste una ed una sola quarta superficie* $\overline{\Sigma}$ *d'area minima legata rispettivamente a* Σ', Σ'' *da due trasformazioni* $T'_{k'}$, T_k *colle costanti* k', k *invertite.*

Indichiamo con $(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi)$ la quaderna trasformatrice da Σ a Σ', e con $(\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi')$ quella che da Σ conduce a Σ'', onde avremo

$$\begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = -2\,k\,\varphi\,w \\ \gamma'^2_1 + \gamma'^2_2 + w'^2 = -2\,k'\varphi'\,w'. \end{cases} \tag{89}$$

Se esiste nel fascio coniugato ($\overline{\Sigma}$) la quarta superficie minima $\overline{\Sigma}$ dell'enunciato del teorema, legata alla Σ' da una $T_{k'}$, le relative funzioni trasformatrici $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{w}, \overline{\varphi}$, date dalle formole (84) del generale teorema di permutabilità, dovranno soddisfare alla condizione

$$\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + \overline{w}_2^2 + 2\,k'\,\overline{\varphi}\,\overline{w} = 0\ ; \tag{90}$$

ma anche viceversa se questa condizione è soddisfatta, saremo certi (§ 346) che la $\overline{\Sigma}$ è una superficie minima legata alla Σ' da una $T_{k'}$, (indi come si vedrà alla Σ'' da una T_k).

Sostituendo nella (90) i valori (84) e ponendo mente alla (89) risulta

$$2\,(k' - k)\,\varphi w\,.\,\Omega^2 + 2\,\{\gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2 + ww' + k'\,(\varphi w' + w\varphi')\}\,.\,\Omega = 0\ ,$$

ossia

$$-2\,\varphi\,w\,.\,\Omega = \frac{2}{k' - k}\{\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + w\,w' + k'\,(\varphi\,w' + w\,\varphi')\},$$

e siccome

$$A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = -2\,k\,\varphi\,w,$$

possiamo anche scrivere

$$A\,\Omega = \frac{2\,k}{k' - k}\{\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + w\,w' + k'\,(\varphi\,w' + w\,\varphi')\} \tag{91}$$

Con questa formola abbiamo Ω *in termini finiti* e resta solo a mostrare che questo valore di Ω soddisfa in effetto alle equazioni differenziali caratteristiche, secondo le formole (85), (86):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(A\Omega)}{\partial u} = -2\gamma'_1\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_2 w\right) \\ \dfrac{\partial(A\Omega)}{\partial v} = -2\gamma'_2\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w\right), \end{cases}$$

ossia per le (54)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(A\Omega)}{\partial u} = 2k\gamma'_1(e^{\theta} w + e^{-\theta}\varphi) \\ \dfrac{\partial(A\Omega)}{\partial v} = 2k\gamma'_2(e^{\theta} w - e^{-\theta}\varphi). \end{cases}$$

Se poniamo

$$\psi = \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2 + w w' + k'(\varphi w' + w\varphi'),$$

queste equivalgono per la (91) alle due

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = (k' - k)\gamma'_1(e^{\theta} w + e^{-\theta}\varphi), \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = (k' - k)\gamma'_2(e^{\theta} w - e^{-\theta}\varphi),$$

e basta servirsi delle equazioni differenziali (54) e delle analoghe per γ'_1, γ'_2, w', φ' per verificare che esse sono in effetto soddisfatte.

Resta infine da dimostrare che la superficie minima $\overline{\Sigma}$ è legata alla Σ'' da una T_k. Per questo si osservi che la formola (91) si scrive

$$\tau = \frac{2kB}{k' - k} + \frac{2kk'}{k' - k}(\varphi w' + w\varphi')$$

e conseguentemente per $\tau' = -\tau - 2B$ abbiamo

$$\tau' = \frac{2k'B}{k - k'} + \frac{2k'k}{k - k'}(\varphi w' + w\varphi'),$$

formola perfettamente simmetrica della precedente scambiando Σ' con Σ'' e k con k', il che dimostra appunto l'asserzione.

Non lascieremo di osservare che questo teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie minime può riferirsi, invece che alle congruenze di sfere del primo teorema di GUICHARD, alle corrispondenti congruenze rettilinee di THYBAUT con falde focali minime, ed allora esso acquista una forma del tutto simile a quello del teorema di permutabilità per le congruenze pseudosferiche.

§ 356.

Caso delle superficie a curvatura costante.

In modo affatto simile a quello tenuto sopra stabiliamo il teorema *speciale* di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie a curvatura costante $K = \frac{1}{a}$, stabilite al § 348.

La superficie Σ a curvatura costante $\frac{1}{a}$ sia trasformata dalle funzioni trasformatrici

$$\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$$

legate fra loro dalla relazione quadratica

$$(92) \qquad A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = k(\varphi^2 - a w^2),$$

nella nuova superficie Σ' colla stessa curvatura $\frac{1}{a}$, e diciamo T_k una tale trasformazione. Ricordiamo che le funzioni trasformatrici soddisfano in tal caso, oltre che alle consuete equazioni differenziali (III) § 341 (pag. 173), alle altre due

$$(93) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\gamma_2 + h_1 w = k(H_1\varphi - a h_1 w) \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\gamma_1 + h_2 w = k(H_2\varphi - a h_2 w). \end{cases}$$

Sia ora Σ'' una seconda trasformata di RIBAUCOUR della Σ mediante la trasformazione $T_{k'}$, con $k' \neq k$, sicchè le seconde funzioni trasformatrici soddisferanno alle equazioni analoghe alle (92), (93):

$$(92^*) \qquad A' = \gamma'^2_1 + \gamma'^2_2 + w'^2 = k'(\varphi'^2 - a w'^2)$$

$$(93^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma'_1}{\partial u} + \beta'_{21}\gamma'_2 + h_1 w' = k'(H_1\varphi' - a h_1 w) \\ \dfrac{\partial\gamma'_2}{\partial v} + \beta'_{12}\gamma'_1 + h_2 w' = k'(H_2\varphi' - a h_2 w) \end{cases}$$

Dimostriamo anche qui: *Nel fascio coniugato al fascio* $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ *esiste una ed una sola quarta superficie* $\overline{\Sigma}$, *colla stessa curvatura costante* $\frac{1}{a}$, *legata rispettivamente a* Σ' *da una* $T_{k'}$, *alla* Σ'' *da una* T_k.

Per questo cerchiamo, entro il fascio coniugato $(\overline{\Sigma})$, una speciale superficie $\overline{\Sigma}$ tale che le corrispondenti funzioni trasformatrici

$$(94)\qquad \overline{\gamma_1} = \frac{\tau\gamma_1}{A} + \gamma'_1,\ \overline{\gamma_2} = \frac{\tau\gamma_2}{A} + \gamma'_2,\ \overline{w} = \frac{\tau w}{A} + w',\ \overline{\varphi} = \frac{\tau\varphi}{A} + \varphi'$$

nel passaggio da Σ' a $\overline{\Sigma}$ soddisfino all'equazione (92*) della trasformazione $T_{k'}$:

$$\overline{\gamma_1}^2 + \overline{\gamma_2}^2 + \overline{w}^2 = k'\,(\overline{\varphi}^2 - a\,\overline{w}^2),$$

dopo di che sarà la $\overline{\Sigma}$ a curvatura costante $\frac{1}{a}$ e legata alla Σ' da una $T_{k'}$. Sostituendo nella precedente gli effettivi valori (94), e avendo riguardo alle (92), (92*), si trova subito

$$(95)\qquad \tau = \frac{2\,k\,B}{k'-k} + \frac{2\,k\,k'}{k'-k}\,(a\,w\,w' - \varphi\,\varphi'),$$

e basterà mostrare che questo valore di τ, così ottenuto in termini finiti, soddisfa in effetto alle equazioni differenziali

$$(95^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau}{\partial u} = -2\,\gamma'_1\left(\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} + \beta_{21}\,\gamma_2 + h_1\,w\right) \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial v} = -2\,\gamma'_2\left(\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\,\gamma_1 + h_2\,w\right), \end{cases}$$

cioè per le (93) alle

$$(96)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tau}{\partial u} = 2\,k\,\gamma'_1\,(a\,h_1\,w - H_1\,\varphi) \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial v} = 2\,k\,\gamma'_2\,(a\,h_2\,w - H_2\,\varphi). \end{cases}$$

Ora da $B = \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_3\gamma'_3 + w\,w'$ segue derivando e tenendo conto delle equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial u} = k\,\gamma'_1\,(H_1\,\varphi - a\,h_1\,w) + k'\,\gamma_1\,(H_1\,\varphi' - a\,h_1\,w') \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} = k\,\gamma'_2\,(H_2\,\varphi - a\,h_2\,w) + k'\,\gamma_2\,(H_2\,\varphi' - a\,h_2\,w'), \end{cases}$$

e con queste formole si verifica in effetto che la funzione τ definita dalla (95) soddisfa alle (96). Resta soltanto che dimostriamo come la $\overline{\Sigma}$ sia legata alla Σ'' da una T_k. Per questo calcoliamo, secondo la (β) § 354:

$$\tau' = -\tau - 2\,B,$$

e troveremo dalla (95)

$$\tau' = \frac{2\,k'\,B}{k-k'} + \frac{2\,k'\,k}{k-k'}\,(a\,w\,w' - \varphi\,\varphi'),$$

formola che differisce dalla (95) stessa solo per lo scambio di Σ' con Σ'' e di k con k', onde resta provato l'asserto.

Questo teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie a curvatura costante si può del resto ricondurre a quello ordinario per le trasformazioni di BÄCKLUND per congruenze pseudosferiche nelle quali quelle di RIBAUCOUR vengono a risolversi.

§ 357.

Il teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni D_m di Darboux.

Supponiamo ora di partire da una superficie isoterma qualunque Σ, dalla quale, mediante due trasformazioni di DARBOUX D_m, $D_{m'}$ *a costanti* m, m' *diverse*, siansi dedotte due nuove superficie isoterme Σ', Σ''. Dimostriamo che anche qui sussiste il teorema speciale di permutabilità:

Nel fascio coniugato al fascio $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ *esiste una ed una sola quarta superficie isoterma* Σ, *legata alla* Σ' *da una* $D_{m'}$, *alla* Σ'' *da una* D_m.

Le cinque funzioni trasformatrici

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ w,\ \varphi,\ \sigma$$

della prima D_m soddisferanno alle equazioni differenziali di DARBOUX (IV) pag. 196, e similmente

$$\gamma'_1,\ \gamma'_2,\ w',\ \varphi',\ \sigma'$$

alle analoghe ove per m si ponga m'; inoltre sussistono le due relazioni quadratiche

$$(97)\qquad \begin{cases} A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = 2\, m\, \varphi\, \sigma \\ A' = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + w'^2 = 2\, m' \varphi'\, \sigma'. \end{cases}$$

Ora alle funzioni trasformatrici $\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}, \overline{w_1}\ \overline{\varphi}$ del teorema generale di permutabilità, date dalle (94), aggreghiamo la quinta $\overline{\sigma}$ data dalla formola analoga

$$\overline{\sigma} = \frac{\tau\, \sigma}{A} + \sigma',$$

e cerchiamo di determinare τ in guisa che sia soddisfatta la relazione quadratica

$$\overline{\gamma_1}^2 + \overline{\gamma_2}^2 + \overline{w^2} = 2\, m'\, \overline{\varphi}\ \overline{\sigma},$$

dopo di che: *la* $\overline{\Sigma}$ *del fascio coniugato* $(\overline{\Sigma})$ *risulterà isoterma e legata intanto alla* Σ' *da una* $D_{m'}$. Calcolando la condizione precedente, coll'osservare le (97), si ottiene

$$(98)\qquad \tau = \frac{2\, m}{m' - m} B - \frac{2\, m\, m'}{m' - m} (\varphi\, \sigma' + \sigma\, \varphi')$$

e basterà verificare che questo valore di τ soddisfa alle (95*) che per le (IV) si scrivono

$$(99)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial u} = -2\, m\, \gamma'_1 (e^{\theta}\, \sigma + e^{-\theta}\, \varphi) \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial v} = -2\, m\, \gamma'_2 (e^{\theta}\, \sigma - e^{-\theta}\, \varphi). \end{cases}$$

Ora abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial u} = m \gamma'_1 (e^{\theta}\, \sigma + e^{-\theta}\, \varphi) + m'\, \gamma_1 (e^{\theta}\, \sigma' + e^{-\theta}\, \varphi') \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} = m \gamma'_2 (e^{\theta}\, \sigma - e^{-\theta}\, \varphi) + m'\, \gamma_2 (e^{\theta}\, \sigma' - e^{-\theta}\, \varphi') \end{cases}$$

e con queste formole si verifica subito in effetto che il valore (98) di τ soddisfa le (99). Per dimostrare poi che la stessa $\overline{\Sigma}$ è legata alla Σ'' da una D_m calcoliamo

$$\tau' = -\tau + 2\, B$$

e troveremo

$$(98^*)\qquad \tau' = \frac{2\, m'}{m - m'} B - \frac{2\, m\, m'}{m - m'} (\varphi\, \sigma' + \sigma\, \varphi'),$$

formola perfettamente simmetrica alla (98), scambiata Σ' con Σ'' e m con m'.

In fine deduciamo dalla formola generale (88) § 354 che serve al calcolo del birapporto Θ di quattro punti (conciclici) corrispondenti sopra Σ', Σ'', Σ, $\overline{\Sigma}$, un'elegante proposizione dovuta a DEMOULIN. Possiamo scrivere

$$\Theta = -\frac{\tau'\, \varphi' + A'\, \varphi}{\tau\, \varphi + A\, \varphi'} \cdot \frac{\varphi}{\varphi'},$$

ossia per le (97)

$$\Theta = -\frac{\tau' + 2\, m'\, \varphi \sigma'}{\tau + 2\, m\, \sigma \varphi'},$$

e sostituendo in questa i valori (98), (98*) di τ, τ' resta semplicemente

$$\Theta = \frac{m'}{m}.$$

Dunque: *il birapporto* $\Theta = (P'\, P''\, P\, \overline{P})$ *è costante ed eguale a* $\dfrac{m'}{m}$, ed è questo il risultato dovuto a DEMOULIN. Per la quarta superficie isoterma Σ del teorema di permutabilità possiamo dunque formulare la costruzione seguente:

Se da una superficie isoterma Σ *si sono dedotte due nuove superficie isoterme* Σ', Σ'' *colle rispettive trasformazioni di* DARBOUX D_m, $D_{m'}$, *a costanti* m, m' *diverse, si consideri una terna qualunque* P, P′, P″ *di punti corrispondenti sopra* Σ, Σ', Σ''. *Sul circolo* P P′ P″ *si segni un quarto punto* $\overline{P}$ *tale che il birapporto* $\Theta = (P'\, P''\, P\, \overline{P})$ *sia costante ed eguale a* $\dfrac{m'}{m}$; *il punto* $\overline{P}$ *descrive allora la quarta superficie isoterma* Σ *del teorema speciale di permutabilità.*

Si osserva che quando $m' = m$ la quarta superficie $\overline{\Sigma}$ viene a coincidere colla primitiva Σ; e per $m' = -m$ le quattro superficie $\Sigma', \Sigma'', \Sigma, \overline{\Sigma}$ formano un *gruppo armonico.*

CAPITOLO XXI.

I sistemi ciclici e il nuovo metodo di Weingarten per il problema dell'applicabilità.

Congruenze normali di curve in generale. -Caso di curve piane e teorema di RIBAUCOUR. - Sistemi ciclici in relazione colle trasformazioni di RIBAUCOUR. - Proprietà generali dei sistemi ciclici. - Sistemi ciclici nei piani tangenti di una superficie. - Teorema di DARBOUX e suoi complementi. - Le congruenze rettilinee cicliche. - Congruenze infinite volte cicliche e congruenze cicliche normali. - Il nuovo metodo di WEINGARTEN per il secondo problema dell' applicabilità. - Nuove classi complete di superficie applicabili dedotte da WEINGARTEN.

§ 358.

Congruenze normali di curve.

La teoria delle trasformazioni di RIBAUCOUR verrà considerata nel presente Capitolo sotto un nuovo aspetto, come relativa ai *sistemi* ∞^2 *di circoli che ammettono una serie di superficie ortogonali.* Un tale sistema di circoli si dirà un *sistema normale di circoli*, od anche brevemente, secondo la denominazione di RIBAUCOUR fondatore della teoria : un *sistema ciclico.* Al nuovo studio è utile premettere alcune ricerche più generali relative ai sistemi doppiamente infiniti di curve, o *congruenze di curve*, che riempiono lo spazio, od una regione di spazio, in guisa che per ogni punto della regione passi una curva del sistema. Diremo la congruenza *normale* quando ammetta una serie continua di superficie ortogonali, e dovremo per prima cosa ricercare la condizione di normalità. Per rappresentare analiticamente la congruenza scriviamo le equazioni parametriche delle sue curve sotto la forma

$$\xi = \xi(u, v, t),\ \eta = \eta(u, v, t)\ \zeta = \zeta(u, v, t), \tag{1}$$

essendo u, v due variabili i cui singoli valori u_0, v_0 individuano una curva C_0 della congruenza, e la variabile t (parametro) definisce i punti della curva.

Supponiamo che esista una superficie Σ ortogonale a tutte le curve C della congruenza, e sia $t = t(u, v)$ la funzione di u, v che occorre sostituire nelle (1) per ottenere la Σ. Per un punto (u, v) di Σ passa una curva C della congruenza e la tangente di C ha coseni di direzione proporzionali alle tre derivate

$$\frac{\partial \xi}{\partial t},\ \frac{\partial \eta}{\partial t},\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Siccome questa tangente è, per ipotesi, la normale a Σ, dovremo avere

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t} d\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\zeta = 0$$

quando si calcolino $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ dalle (1) ove sia fatto $t = t(u, v)$. Se ora poniamo

$$\mathrm{T} = \mathrm{S}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2,\ \mathrm{U} = \mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial u},\ \mathrm{V} = \mathrm{S}\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \tag{2}$$

la precedente prende la forma

$$\mathrm{T}\,dt + \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv = 0, \tag{3}$$

e la funzione cercata $t = t(u, v)$ dovrà dunque essere una soluzione di questa equazione *ai differenziali totali.*

Esisterà una serie continua di superficie Σ ortogonali alle curve C solo quando la (3) sia illimitatamente integrabile, cioè quando risulti identicamente soddisfatta, in t, u, v la condizione d'integrabilità :

$$\mathrm{T}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right) + \mathrm{U}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) + \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}\right) = 0. \tag{A}$$

Se invece questa non è *identicamente* soddisfatta, potranno *al più* esistere superficie isolate ortogonali alla congruenza ; questo avverrà quando la (A) dia per t uno o più valori *i quali verifichino inoltre l'equazione differenziale* (3). Il calcolo di queste eventuali superficie isolate normali alle curve si effettuerà in ogni caso in *termini finiti.*

Qualche volta la congruenza di curve C, in luogo di venire assegnata colle (1) in termini finiti, potrà essere definita dal sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}},$$

di cui le curve C debbano essere le curve integrali, essendo X, Y, Z funzioni assegnate di x, y, z. In tal caso l'equazione ai differenziali totali per le superficie Σ sarà

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

e la condizione di normalità della congruenza sarà espressa dal verificarsi identico della equazione

$$(A') \qquad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

§ 359.

Il teorema di Ribaucour sulle congruenze normali di curve piane.

Consideriamo il caso particolare in cui le curve C della congruenza siano piane e supponiamo che i loro piani formino una *doppia infinità*, ed inviluppino quindi una superficie S che potrà in particolare ridursi ad una curva Γ (eventualmente ad un punto). Esaminiamo dapprima il caso generale di un'effettiva superficie S inviluppo, che riferiamo ad un sistema ortogonale (u, v) (qualunque) e servendosi delle notazioni consuete indichiamo con

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

la prima forma fondamentale di S, e con

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

la seconda. Saranno soddisfatte l'equazione di Gauss

$$(I) \qquad \frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G} = K \text{ (K curvatura di S)},$$

e le due equazioni di Codazzi, che scriviamo

$$(II) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{E}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\dfrac{D'}{\sqrt{G}} + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\dfrac{D''}{\sqrt{G}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\dfrac{D'}{\sqrt{E}} + \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\dfrac{D}{\sqrt{E}} = 0. \end{cases}$$

Col vertice nel punto (x, y, z) di S consideriamo il triedro trirettangolo formato 1° dalla tangente alla linea $v = \text{cost}^{te}$, 2° dalla tangente alla $u = \text{cost}^{te}$, 3° dalla normale alla superficie, e denotiamo i relativi coseni di direzione degli spigoli ordinatamente con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) (X_3, Y_3, Z_3). Dalle formole fondamentali avremo per le derivate di x, y, z e dei nove coseni di direzione il quadro seguente:

$$(B) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \dfrac{D}{\sqrt{E}}X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \dfrac{D'}{\sqrt{G}}X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}}X_1 - \dfrac{D'}{\sqrt{G}}X_2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_2, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 + \dfrac{D'}{\sqrt{E}}X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \dfrac{D''}{\sqrt{G}}X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{D'}{\sqrt{E}}X_1 - \dfrac{D''}{\sqrt{G}}X_2, \end{cases}$$

colle formole analoghe per gli altri due assi. Ciò premesso, suppongasi che in ogni piano tangente di S, nel punto $P \equiv (u, v)$, sia tracciata una curva C della nostra congruenza, che riferiamo, in questo piano, ad un sistema di coordinate polari col polo in $P \equiv (u, v)$ e coll'asse polare secondo la direzione (X_1, Y_1, Z_1). Indichiamo inoltre con t l'angolo polare, con R il raggio vettore, onde sarà

$$R = R\,(u, v, t),$$

e la specie di questa funzione fisserà la natura delle curve C. Le coordinate ξ, η, ζ di un punto qualunque di C saranno date da

$$\xi = x + R\cos t.\,X_1 + R\,\text{sen}\,t.\,X_2, \text{ ecc.}$$

e derivando colle formole del quadro (B) avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial t}\cos t - R\,\text{sen}\,t\right)X_1 + \left(\dfrac{\partial R}{\partial t}\,\text{sen}\,t + R\cos t\right)X_2 \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + \dfrac{\partial R}{\partial u}\cos t + R\,\text{sen}\,t\,\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)X_1 + \\ + \left(\dfrac{\partial R}{\partial u}\,\text{sen}\,t - R\cos t\,\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)X_2 + R\left(\cos t\,\dfrac{D}{\sqrt{E}} + \text{sen}\,t\,\dfrac{D'}{\sqrt{G}}\right)X_2 \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial v}\cos t - R\,\text{sen}\,t\,\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\right)X_1 + \\ + \left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial R}{\partial v}\,\text{sen}\,t + R\cos t\,\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)X_2 + R\left(\cos t\,\dfrac{D'}{\sqrt{E}} + \text{sen}\,t\,\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\right)X_3. \end{cases}$$

Se di qui formiamo le espressioni (2) di T, U, V troviamo :

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = \mathrm{R}^2 + \left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\right)^2 \\ \mathrm{U} = \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{E}}\cos t \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} - \mathrm{R}^2 \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} - \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{E}}\,\mathrm{sen}\, t \\ \mathrm{V} = \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \sqrt{\mathrm{G}}\,\mathrm{sen}\, t \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} + \mathrm{R}^2 \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{G}}\cos t\,. \end{cases}$$

Come si vede, queste espressioni di T, U, V dipendono solo dai coefficienti E, G della prima forma fondamentale di S e nulla affatto da quelli della seconda D, D′, D″, onde restano inalterate flettendo comunque la superficie S. Ne risulta il teorema di RIBAUCOUR:

Se si ha una congruenza normale (C) *di curve piane* C *e si deforma comunque la superficie* S *inviluppo dei loro piani, in guisa che la* S *trasporti seco invariabilmente le curve* C *tracciate nei suoi piani tangenti, la congruenza* (C) *rimane normale in tutte le configurazioni ; inoltre i punti delle curve* C *che in una speciale configurazione si trovano sopra una superficie ortogonale* Σ, *continuano a mantenersi sopra una tale superficie dopo qualunque deformazione.* (*)

Questo teorema di RIBAUCOUR continua a sussistere, come ora dimostriamo, se la doppia infinità dei piani delle curve C, in luogo che una superficie S inviluppa una curva Γ, purchè alle deformazioni per flessioni della S si sostituiscano quelle deformazioni della curva Γ che ne lasciano in ogni punto invariata la prima curvatura, cangiandone la torsione.

Per dimostrarlo prendiamo per variabile u l'arco della curva Γ, mantenendo le consuete notazioni del Cap. I e scegliamo a variabile v l'angolo d'inclinazione del piano di C sul piano osculatore di Γ. Si vede allora che tutte le formole fondamentali della teoria delle superficie sopra utilizzate rimangono applicabili al caso attuale colle posizioni seguenti :

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{\mathrm{E}} = 1\,, \quad \sqrt{\mathrm{G}} = 0\,; \quad \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = -\dfrac{\cos v}{\rho} \\ \mathrm{D} = -\dfrac{\mathrm{sen}\, v}{\rho}\,, \quad \mathrm{D}' = 0\,, \quad \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}} = -\dfrac{1}{\mathrm{T}}\,, \quad \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}} = 1\,, \end{cases}$$

(*) Si osservi che tutto ciò vale anche se la congruenza (C), senza essere normale, possiede superficie ortogonali isolate.

quando si assumano i nove coseni di direzione dati dalle formole :

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{X}_1 = \alpha & \mathrm{Y}_1 = \beta & \mathrm{Z}_1 = \gamma \\ \mathrm{X}_2 = \xi\cos v + \lambda\,\mathrm{sen}\, v, & \mathrm{Y}_2 = \eta\cos v + \mu\,\mathrm{sen}\, v, & \mathrm{Z}_2 = \zeta\cos v + \nu\,\mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{X}_3 = -\xi\,\mathrm{sen}\, v + \lambda\cos v, & \mathrm{Y}_3 = -\eta\,\mathrm{sen}\, v + \mu\cos v, & \mathrm{Z}_3 = -\zeta\,\mathrm{sen}\, v + \nu\cos v. \end{cases}$$

E infatti coi valori (5) sono soddisfatte le equazioni (II) di CODAZZI, e i valori (6) soddisfano a tutte le condizioni del quadro (B). E siccome il nostro calcolo era tutto fondato sulle citate condizioni, esso conserva tutto il suo valore nel caso attuale, ove le espressioni (4) di T, U, V diventano

$$\mathrm{T} = \mathrm{R}^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\right)^2\,, \quad \mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} + \cos t \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} + \mathrm{R}^2\frac{\cos v}{\rho} - \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad \mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}$$

e dipendono solo dalla prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ di Γ. Dunque : *Se le curve di una congruenza normale* (C), *sono tracciate negli* ∞^2 *piani tangenti di una curva* Γ, *torcendo comunque la curva* Γ, *senza alterarne la flessione, la congruenza* (C) *trasportata invariabilmente nella deformazione rimane sempre normale, e le superficie* Σ *ortogonali rimangono costituite dai medesimi punti.*

§ 360.

I sistemi ciclici in relazione colle trasformazioni di Ribaucour.

Andiamo ora ad occuparci del caso in cui le curve C della congruenza normale siano circoli e si tratti dunque di un *sistema ciclico*. Dimostriamo in primo luogo come dalle trasformazioni di RIBAUCOUR, studiate nel Capitolo precedente, si deducono infiniti sistemi ciclici, che vedremo poi essere i più generali possibili (cf. § 362).

Sia Σ una qualunque superficie, Σ′ una sua trasformata di RIBAUCOUR corrispondente alla quaderna di funzioni trasformatrici

$$(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi)$$

e indichiamo con P, P′ una coppia qualunque di loro punti corrispondenti. Si descriva il circolo C normale rispettivamente in P, P′ alle Σ, Σ′ (alla sfera inviluppata) ; si ha così una congruenza di circoli che ammette intanto le due superficie ortogonali Σ, Σ′ ; ma ora facilmente dimostriamo

che *esiste un'intera serie di superficie (un fascio) ortogonali ai circoli* C *i quali costituiscono quindi un sistema ciclico.*

Questo non è che un caso particolare dei risultati stabiliti ai §§ 352, 353 pei fasci di trasformazioni di RIBAUCOUR. Prendasi infatti per seconda quaderna trasformatrice $(\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi')$ quella data da

$$\gamma'_1 = \gamma_1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2, \quad w' = w + k, \quad \varphi' = \varphi,$$

dove k indica una costante arbitraria.

Componendo linearmente le due quaderne trasformatrici, secondo il § 352, risulta la quaderna variabile

$$\overline{\gamma_1} = \gamma_1\,, \quad \overline{\gamma_2} = \gamma_2\,, \quad \overline{w} = w + t\,, \quad \overline{\varphi} = \varphi$$

dove t indica il parametro variabile nel fascio. Le formole (71) ibid (pag. 201) che definiscono la superficie Σ_t mobile nel fascio diventano

$$(7) \qquad \xi = x - \frac{2\,\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (w+t)^2}\{\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + (w+t)\,.\,X_3\}\,,$$

e i coseni di direzione della normale alla Σ_t sono

$$X_t = X_3 - \frac{2\,(w+t)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (w+t)^2}\{\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + (w+t)\,X_3\}.$$

Se nelle (7) si mantengono fisse le u, v e variabile t, queste sono le equazioni paranetriche del circolo C luogo del punto (u,v) sulle superficie Σ_t e siccome dalle (7) si ha

$$(7^*) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{2\,\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (w+t)^2}\,X_t\,,$$

si vede che $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ sono proporzionali a X_t, Y_t, Z_t, cioè *i circoli* C *sono normali a tutte le superficie* Σ_t *del fascio*, c. d. d.

Manifestamente in questo caso i due fasci coniugati del teorema generale di permutabilità (§ 354) coincidono in uno solo, una qualunque coppia di superficie del fascio essendo trasformate di RIBAUCOUR l'una dell'altra. (*) Se si considerano nel fascio quattro qualunque delle superficie Σ_t il

(*) In particolare la superficie iniziale Σ corrisponde a $t=\infty$ la Σ' a $t=0$.

birapporto dei quattro punti ove esse segano (ortogonalmente) un qualunque circolo C è il birapporto dei quattro corrispondenti valori di t e quindi: *I circoli* C *del sistema ciclico sono segati projettivamente dalle superficie ortogonali.* Le proprietà generali dei fasci segnalate al § 353, applicate al caso attuale, ci dànno il teorema:

La congruenza degli assi dei circoli C *del sistema ciclico è a sviluppabili reali, e queste corrispondono alle linee di curvatura* $v = \text{cost}^{te}$ *ed* $u = \text{cost}^{te}$ *delle superficie* Σ_t *ortogonali ai circoli. Nel fuoco* F_1 *corrispondente alla* $v = \text{cost}^{te}$ *concorrono tutte le tangenti a queste linee di curvatura delle* Σ_t *lungo* C, *e similmente* in F_2 *le tangenti alle* $u = \text{cost}^{te}$.

Ne segue che se P è un punto qualunque del circolo C le congiungenti PF_1 PF_2 sono fra loro ortogonali ed è

$$OF_1 \cdot OF_2 = -R^2.$$

Se dopo ciò, insieme, alle superficie (Σ) ortogonali ai circoli, consideriamo le due serie (S_1) (S_2) di superficie luogo di questi circoli lungo le rispettive linee di curvatura $v = \text{cost}^{te}$, $u = \text{cost}^{te}$, è facile dimostrare che: *queste tre serie di superficie formano un sistema triplo ortogonale.* E infatti siccome la S_1 taglia tutte le Σ_t ortogonalmente lungo le linee di curvatura $u = \text{cost}^{te}$, queste sono altresì linee di curvatura per la S_2 onde le seconde linee di curvatura della S_1 sono i circoli C. La normale in P alla S_1 è dunque la tangente alla $v = \text{cost}^{te}$, cioè la PF_1. Similmente la normale in P alla S_2 è la PF_2, ed essendo queste fra loro ortogonali ne segue che il sistema triplo è ortogonale.

Dalle formole (7*) deduciamo inoltre una conseguenza che importa notare. Se nella serie delle superficie Σ_t ortogonali ai circoli fissiamo p. e la $t = 0$, che indichiamo con Σ', le (7*) ci dimostrano che, nel passaggio da questa alla infinitamente vicina Σ_t, corrispondente all'incremento infinitesimo δt del parametro, la quantità

$$\frac{\varphi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2} = \frac{\varphi}{A}$$

è proporzionale, per un fattore costante, alla distanza infinitesima, contata sulla normale a Σ' fra questa e la successiva $\Sigma_{\delta t}$. Se si ricorda (§ 342) che la funzione $\frac{\varphi}{A}$ è precisamente la φ' nella trasformazione inversa di RIBAUCOUR da Σ' a Σ, invertendo ora Σ' con Σ, otteniamo questo risultato:

Nelle formole per le trasformazioni di RIBAUCOUR *di una superficie* Σ *la funzione* φ *rappresenta la distanza infinitesima normale fra la superficie* Σ *e la infinitamente vicina nella serie ortogonale ai circoli.*

§ 361.

Formole generali pei sistemi ciclici.

Per definire in generale una congruenza di circoli diamo, *in funzione di due parametri* u, v, le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo e i coseni di direzione α_3, β_3, γ_3 del suo asse (della normale nel centro al piano del circolo). Per i calcoli seguenti tracciamo inoltre nel piano del circolo (u, v) due diametri ortogonali arbitrarii i cui coseni di direzione saranno indicati con

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \; ; \; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2.$$

Se con t indichiamo l'angolo d'inclinazione di un raggio generico del circolo sulla prima direzione, le formole (1) diverranno nel caso attuale

$$\xi = x_1 + \mathrm{R}\,(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \operatorname{sen} t), \text{ ecc.} \tag{8}$$

e costruendo l'equazione a differenziali totali (2), tenendo conto delle relazioni

$$S\,\alpha_1^2 = 1\,, \; \mathrm{S}\,\alpha_2^2 = 1\,, \; \mathrm{S}\,\alpha_1\,\alpha_2 = 0,$$

troveremo

$$\mathrm{R}\,dt + \left\{\cos t\,\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \operatorname{sen} t\,\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + \mathrm{R}\,\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right\} du + \tag{9}$$

$$+ \left\{\cos t\,\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \operatorname{sen} t\,\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + \mathrm{R}\,\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\right\} dv = 0.$$

Questa, assumendo per incognita

$$\Lambda = tg\,\frac{t}{2},$$

prende in Λ la forma di RICCATI

$$d\,\Lambda = (a\,\Lambda^2 + b\,\Lambda + c)\,du + (a'\,\Lambda^2 + b'\,\Lambda + c')\,dv,$$

con a, b, c ; a', b', c' funzioni note di u, v. Se non è illimitatamente integrabile (se la congruenza di circoli non è normale) essa può ammettere al massimo *due* soluzioni isolate, indi il teorema (RIBAUCOUR) : *Se i circoli di una congruenza sono normali a tre diverse superficie, esiste una serie continua di superficie normali ai circoli.*

Se siamo in questo caso, è ben noto che per quattro soluzioni particolari qualunque Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 è costante il birapporto

$$(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4) = \left(tg\,\frac{t_1}{2}, tg\,\frac{t_2}{2}, tg\,\frac{t_3}{2}, tg\,\frac{t_4}{2}\right),$$

ciò che s'interpreta geometricamente col teorema di RIBAUCOUR (§ prec.te): *In ogni sistema ciclico quattro superficie qualunque della serie ortogonale determinano sui circoli una quaderna di punti di birapporto costante.*

Ritornando all'equazione ai differenziali totali sotto la forma (9), la relativa condizione d'integrabilità si scrive

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \operatorname{sen} t + \mathrm{C} \cos t = 0$$

con A, B, C funzioni note di u, v, e si avrà il caso d'illimitata integrabilità quando siano soddisfatte insieme le tre condizioni

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C} = 0.$$

Queste, calcolate ordinatamente, portano alle tre equazioni fondamentali seguenti :

$$\mathrm{(I)} \quad \mathrm{R}^2 \left\{\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{S}\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{S}\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\right\} + \mathrm{S}\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \mathrm{S}\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \mathrm{S}\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \mathrm{S}\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

$$\mathrm{(II)} \quad \mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} +$$

$$+ \mathrm{R}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + \mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \cdot \mathrm{S}'\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \mathrm{S}'\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \cdot \mathrm{S}\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v}\right\} = 0,$$

$$\mathrm{(III)} \quad - \mathrm{S}\gamma_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} +$$

$$+ \mathrm{R}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} + \mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\,\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \mathrm{S}\,\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\,\mathrm{S}\,\alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v}\right\} = 0.$$

È a priori evidente che a queste tre condizioni per la normalità della congruenza dei circoli si potrà dare una forma indipendente dalla coppia

ortogonale arbitraria di diametri nelle direzioni $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ facendovi invece comparire, soltanto i coseni di direzione $(\alpha_3\ \beta_3, \gamma_3)$ dell' asse del circolo. Questo si otterrebbe facilmente introducendo in calcolo, per la congruenza degli assi dei circoli, il ds'^2 dell'immagine sferica

$$ds'^2 = d\alpha_3^2 + d\beta_3^2 + d\gamma_3^2$$

coll'utilizzare le formole del § 307 ; ma pei calcoli seguenti basterà lasciare le equazioni di condizione sotto la forma superiore.

§ 362.

Sistemi ciclici normali a una data superficie.

Applichiamo subito le formole generali precedenti alla ricerca dei sistemi ciclici normali ad una data superficie Σ (non sviluppabile) per dimostrare l'identità dei generali sistemi ciclici con quelli dedotti al § 360 dalle trasformazioni di RIBAUCOUR. Riferiamo la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v) e serviamoci delle formole di rappresentazione sferica colle notazioni del § 340.

Da ogni punto P di Σ esce un circolo (u, v) del sistema normalmente a Σ, e per individuarlo basterà dare il suo raggio R e l'angolo ψ che la traccia del suo piano col piano tangente di Σ fa colla direzione principale (X_1, Y_1, Z_1). Le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo potranno così assumersi dalle formole

$$x_1 = x + \mathrm{R}\cos\psi\,.\,\mathrm{X}_1 + \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\psi\,.\,\mathrm{X}_2, \tag{10}$$

colle altre due analoghe. Per applicare le formole generali del paragrafo precedente possiamo prendere

$$\alpha_1 = \mathrm{X}_1\cos\psi + \mathrm{X}_2\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad \alpha_2 = \mathrm{X}_2 \tag{11}$$

ed allora dalle formole del quadro (B) § 340 (pag. 169) dedurremo :

$$\mathrm{S}\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u} = \mathrm{H}_1\cos\psi + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u},\quad \mathrm{S}\,\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\psi + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v},\quad \mathrm{S}\,\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\mathrm{R}h_1\cos\psi,$$

$$\mathrm{S}\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\mathrm{R}h_2\,\mathrm{sen}\,\psi,\quad \mathrm{S}\alpha_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -h_1\cos\psi,\quad \mathrm{S}\alpha_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = -h_2\,\mathrm{sen}\,\psi.$$

L'equazione ai differenziali totali (9) prende ora la forma :

$$dt = \left\{\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} + \frac{\mathrm{H}_1\cos\psi}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{sen}\,t + h_1\cos\psi\,(1+\cos t)\right\}du + \tag{12}$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{sen}\,t + h_2\,\mathrm{sen}\,\psi\,(1+\cos t)\right\}dv,$$

ovvero dividendo per $2\cos^2\frac{t}{2}$ e prendendo per incognita $\Lambda = tg\,\frac{t}{2}$, la forma lineare in Λ :

$$d\Lambda = \left\{\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} + \frac{\mathrm{H}_1\cos\psi}{\mathrm{R}}\right)\Lambda + h_1\cos\psi\right\}du \tag{12*}$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{R}}\right)\Lambda + h_2\,\mathrm{sen}\,\psi\right\}dv$$

Per l'illimitata integrabilità si richiede in primo luogo che sia un differenziale esatto l'espressione

$$\frac{\mathrm{H}_1\cos\psi}{\mathrm{R}}\,du + \frac{\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{R}}\,dv,$$

e noi, indicando con φ una nuova funzione incognita, porremo

$$\frac{\mathrm{H}_1\cos\psi}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \frac{\mathrm{H}_2\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{13}$$

Così l'equazione differenziale (12*), moltiplicata per $\frac{\varphi}{\mathrm{R}}$, può scriversi

$$d\left(\frac{\varphi}{\mathrm{R}}\Lambda\right) = \frac{h_1\varphi\cos\psi}{\mathrm{R}}\,du + \frac{h_2\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{R}}\,dv \tag{14}$$

$$= -\left(\frac{h_1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{h_2}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right),$$

e sarà per ciò necessario e sufficiente che la funzione φ renda un differenziale esatto anche

$$dw = \frac{h_1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{h_2}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = \frac{1}{r_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{1}{r_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv.$$

Il nostro problema dipende adunque dalle coppie di funzioni φ, w che soddisfano al sistema del primo ordine

$$(15)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}=r_2\frac{\partial w}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=r_1\frac{\partial w}{\partial v}\ ,$$

o se ci riferiamo alla sola φ, ed escludiamo per ora il caso $r_1=r_2$ della sfera sul quale ritorneremo più avanti (§ 364), alla equazione del secondo ordine (III*) § 341

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\, lg\,H_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\, lg\,H_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\ .$$

Per far coincidere le attuali formole con quelle per le trasformazioni di RIBAUCOUR del citato § 341 non resta più che porre

$$\gamma_1=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\quad \gamma_2=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

e si avrà dalle (13)

$$(16)\qquad \frac{1}{R^2}=\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{\varphi^2}\ ,\quad R=\frac{\varphi}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}$$

$$(16^*)\qquad \cos\psi=-\frac{R}{\varphi}\gamma_1\ ,\quad \operatorname{sen}\psi=-\frac{R}{\varphi}\gamma_2\ .$$

Si osservi poi che l'equazione (14) integrata porge

$$(19)\qquad \begin{cases} tg\,\dfrac{t}{2}=-\dfrac{R}{\varphi}w=-\dfrac{w}{\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}} \\ \cos t=\dfrac{\gamma_1^2+\gamma_2^2-w^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2}\ ,\quad \operatorname{sen} t=-\dfrac{2w\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}{\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2} \end{cases}$$

e se si sostituiscno i valori precedenti nelle formole (8) che dànno le coordinate ξ, η, ζ del punto ove una seconda superficie ortogonale ai circoli incontra il circolo (u, v), si trova

$$\xi=x-\frac{2\varphi}{\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2}(\gamma_1 X_1+\varphi_2 X_2+w X_2)\ ,$$

formole che coincidono colle (29) § 342 per la trasformata Σ' di RIBAUCOUR Così abbiamo effettivamente dimostrato che i più generali sistemi ciclici sono quelli dedotti al § 360 dalle trasformazioni di RIBAUCOUR. In altri termini : *in ogni sistema ciclico due superficie qualunque ortogonali ai circoli sono trasformate di* RIBAUCOUR *l'una dell'altra ;* e viceversa da ogni coppia di trasformate di RIBAUCOUR si deduce un corrispondente sistema ciclico.

A questi risultati possiamo anche dare la forma seguente :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema ∞^2 di circoli normali a due superficie Σ,Σ', ammetta una serie di superficie ortogonali (sia un sistema ciclico), è che sopra Σ, Σ' si corrispondano le linee di curvatura.

Osserviamo infine che i coseni di direzione dell'asse del circolo α_3, β_3, γ_3 sono dati per le (11) da

$$\alpha_3=-X_1\operatorname{sen}\varphi+X_2\cos\varphi,$$

cioè per le (16*) sono proporzionali ai binomii

$$\gamma_2 X_1-\gamma_1 X_2,\ \gamma_2 Y_1-\gamma_1 Y_2,\ \gamma_2 Z_1-\gamma_1 Z_2$$

e coincidono quindi coi coseni di direzione delle linee $\varphi=\text{cost}^{te}$ sopra Σ dunque : *I piani dei circoli sono i piani normali alle linee* $\varphi=\text{cost}^{te}$.

§ 363.

Le trasformazioni di Ribaucour in coordinate generali.

Per la ricerca dei sistemi ciclici ortogonali ad una data superficie Σ, o ciò che è lo stesso delle *trasformate di* RIBAUCOUR *di* Σ, abbiamo riferita la Σ alle sue linee di curvatura (u, v). Ora conviene trasformare queste formole in coordinate curvilinee generali, ciò che eseguiamo nel modo seguente. Quando le linee (u,v) sono quelle di curvatura la ricerca dipende dalle coppie di funzioni φ, w delle quali la prima, che ha il significato geometrico assegnato alla fine del § 361, è una soluzione della equazione di LAPLACE.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\, lg\,\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\, lg\,\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

o brevemente colle notazioni delle derivate seconde covarianti

$$(17)\qquad \varphi_{12}=0,$$

e successivamente si ha w con una quadratura dalle formole

$$(18)\qquad \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\ .$$

Ora la (17), essendo qui $F = 0$, $D' = 0$, esprime che la forma covariante

$$\varphi_{11}\, du^2 + 2\,\varphi_{12}\, du\, dv + \varphi_{22}\, dv^2,$$

quando φ è una soluzione della (17), è una combinazione lineare delle due forme fondamentali di Σ. Ma questa proprietà, per la sua natura invariativa si mantiene in qualunque trasformazione di coordinate, e vediamo quindi intanto che : *L'equazione del secondo ordine da cui dipende la ricerca dei sistemi ciclici ortogonali ad una data superficie* Σ (*delle trasformazioni di* RIBAUCOUR *di* Σ) *assume in coordinate curvilinee qualunque la forma*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0$$

Ricordando il significato geometrico di φ (§ 361), vediamo che questa è l'equazione differenziale caratteristica per la distanza infinitesima normale fra la superficie Σ e la successiva nel sistema ciclico. Essa venne data dal CAYLEY in significato più generale pei sistemi tripli ortogonali qualunque (come vedremo) e si dirà per ciò l'*equazione del* CAYLEY.

Resta che trasformiamo in coordinate generali le (18) che valgono per le linee di curvatura. Esse diventeranno manifestamente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial w}{\partial v} = \gamma \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}$$

con α, β, γ, δ funzioni fisse di u, v al variare della soluzione φ. Per calcolarle si osservi che la (IV) ammette le tre soluzioni particolari

$$\varphi = x,\ y,\ z$$

e i corrispondenti valori di w sono i rispettivi coseni di direzione della normale a Σ

$$w = X,\ Y,\ Z.$$

Per ciò α, β, γ, δ hanno i medesimi valori come nelle formole fondamentali (I pag. 170).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

onde le trasformate delle (18) in coordinate generali si scrivono

$$\text{(IV*)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

Una qualunque soluzione φ della equazione (IV) del CAYLEY individua un sistema ciclico di circoli ortogonali alla Σ. Questi sono situati, per l'osservazione alla fine del paragrafo precedente, nei piani normali alle linee $\varphi = \text{cost}^{te}$, e siccome la formola (16) per R si può scrivere sotto forma invariantiva

$$\text{(20)} \qquad R = \frac{\varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}},$$

è da questa formola che si calcolerà il raggio R dei circoli. Ed osserveremo ancora che le (11) si scrivono alla loro volta per le (16), (16*) sotto la forma invariantiva

$$\alpha_1 = -\frac{\nabla (x, \varphi)}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}},$$

per mezzo del parametro differenziale misto $\nabla (x, \varphi)$. In fine abbiamo per le (19)

$$tg \frac{t}{2} = -\frac{w}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}},\ \cos t = \frac{\Delta_1 \varphi - w^2}{\Delta_1 \varphi + w^2},\ \text{sen}\, t = -\frac{2w\sqrt{\Delta_1 \varphi}}{\Delta_1 \varphi + w^2};$$

e le formole generali per la trasformata Σ' di RIBAUCOUR assumono la forma definitiva

$$\text{(21)} \qquad x' = x - \frac{2\varphi}{\Delta_1 \varphi + w^2} \left\{ \nabla (x, \varphi) + w X \right\}$$

alle quali sono da aggiungersi pei coseni di direzione della normale a Σ' le formole

$$\text{(22)} \qquad X' = X - \frac{2w}{\Delta_1 \varphi + w^2} \left\{ \nabla (x, \varphi) + w X \right\}.$$

§ 364.

Sistemi ciclici normali ad una sfera o ad un piano.

Nella discussione al § 372 abbiamo lasciato da parte il caso che la superficie Σ, di cui si vogliono trovare i sistemi ciclici normali, sia una sfera o un piano. In questo caso basta già il teorema di RIBAUCOUR al § 361 per trovare tutti i sistemi ciclici richiesti. Prendasi infatti una qualunque superficie S e si costruiscano gli ∞^2 circoli C normali insieme alla superficie S e ad una sfera (o piano) Σ; siccome ogni circolo è normale *due volte* a Σ, all'entrata ed all'uscita, la congruenza di circoli ammette già *tre* superficie ortogonali e quindi ne ammette una serie ∞^1, ed è per ciò un sistema ciclico. La stessa cosa risulta del resto anche dalla proposizione equivalente, dimostrata al § 316, secondo la quale ogni congruenza di sfere tutte tangenti ad una sfera fissa (ad un piano fisso) è una congruenza di RIBAUCOUR.

Se ora ritorniamo alle trasformazioni di RIBAUCOUR delle figure sferiche o piane (§ 345), i risultati precedenti conducono alla seguente costruzione geometrica ivi annunciata:

Per costruire tutte le trasformazioni di RIBAUCOUR *della sfera (del piano) in sè, si prenda una superficie* S *arbitraria e si conducano gli* ∞^2 *circoli* C *normali alla* S *ed alla sfera (piano). Ogni circolo* C *incontra la sfera (il piano) in due punti* P, P′, *i quali descrivono due figure sferiche nella più generale trasformazione di* RIBAUCOUR *e le linee principali della rappresentazione sono quelle che corrispondono alle linee di curvatura di* S. (*) Ed ora ricerchiamo a quali particolari soluzioni della equazione di LAPLACE

$$\varphi_{12} = 0,$$

per la superficie S riferita alle sue linee di curvatura (o della IV in coordinate generali) corrispondono questi particolari sistemi ciclici normali insieme alla S e ad un piano od una sfera fissa. L'equazione di LAPLACE ammette le cinque soluzioni particolari

$$x,\ y,\ z,\ x^2 + y^2 + z^2,\ 1$$

(*) Per l'interpretazione non-euclidea di questa proprietà vedi § 495.

e quindi anche qualunque loro combinazione lineare a coefficienti costanti

$$\varphi = a\,(x^2 + y^2 + z^2) + b\,x + c\,y + d\,z + e. \tag{23}$$

Dimostriamo che *i sistemi ciclici in considerazione corrispondono appunto a queste soluzioni particolari.*

Per questo si osservi che nel caso $a = 0$, con un cangiamento di assi, possiamo ridurci al caso

$$\varphi = z$$

ed in questo caso è facile vedere che i circoli sono tutti normali al piano xy. Abbiamo qui infatti

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_1 z = 1 - Z_3^2$$

onde $R^2 = \dfrac{z^2}{1 - Z_3^2}$; inoltre $\gamma_1 = Z_1$, $\gamma_2 = Z_2$ e dalle (16*)

$$R\cos\psi = -\frac{R^2}{z} Z_1,\quad R\,\mathrm{sen}\,\psi = -\frac{R^2}{z} Z_2,$$

per cui l'ordinata z_1 del centro del circolo è data da

$$z_1 = z + R\cos\psi\, Z_1 + R\,\mathrm{sen}\,\psi\, Z_2 = 0,$$

e i centri dei circoli sono dunque sul piano xy. Di più si annulla anche il coseno $\gamma_3 = \cos\psi\, Z_2 - \mathrm{sen}\,\psi\, Z_1$ dell'angolo che l'asse del circolo fa coll'asse Oz, indi l'asse del circolo è nel piano xy ed il circolo è normale al piano xy, c. d. d.

Supponiamo ora in secondo luogo che sia nella (23) $a \neq 0$ e potremo fare $a = 1$ e rendere con un cangiamento di assi

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - c \quad (c \text{ costante}).$$

Qui abbiamo

$$\gamma_1 = 2\,S\,x\,X_1 = 2\,W_1,\ \gamma_2 = 2\,S\,x\,X_2 = 2\,W_2$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 4\,(W_1^2 + W_2^2) = 4\,(\varphi + c - W_3^2),$$

avendo indicato con W_1, W_2, W_3 le distanze algebriche dell'origine dai due piani principali di S e dal piano tangente (I pag. 863).

Le formole (16), (16*) dànno ora

$$R^2 = \frac{\varphi^2}{4(\varphi + c - W_3^2)}$$

$$R\cos\psi = -2\frac{R^2}{\varphi}W_1, \quad R\,\mathrm{sen}\,\psi = -2\frac{R^2}{\varphi}W_2,$$

e se si calcola il quadrato δ^2 della distanza del centro (x_1,y_1,z_1) del circolo dall'origine abbiamo dalle (16)

$$\delta^2 = \varphi + c + R^2 + 2R\cos\psi W_1 + 2R\,\mathrm{sen}\,\psi W_2,$$

cioè per le precedenti

$$\delta^2 = R^2 + c.$$

Ora questa esprime che tutti i circoli tagliano ortogonalmente la sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c$$

col centro nell'origine. Questa sfera è reale per c positiva e nel caso $c = 0$ si riduce all'origine per la quale vengono allora a passare tutti i circoli. Quando c è negativa possiamo ancora dare forma reale al risultato osservando che tutti i circoli tagliano allora in punti diametralmente opposti la sfera *reale*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = -c.$$

Manifestamente in tutti questi casi i piani dei circoli passano per un punto fisso, e possiamo invertire il risultato dimostrando che:
se i piani dei circoli in un sistema ciclico passano per un punto fisso, i circoli del sistema sono tutti ortogonali ad una sfera (reale od immaginaria) col centro nel punto fisso.

Suppongasi dapprima il punto fisso a distanza finita e scelgasi per origine O. Così avremo

$$S\,x(\cos\psi X_2 - \mathrm{sen}\,\psi X_1) = 0,$$

ossia

$$\cos\psi W_2 - \mathrm{sen}\,\psi W_1 = 0$$

indi per le (16*)

$$W_1 = \lambda\gamma_1, W_2 = \lambda\gamma_2$$

con λ fattore di proporzionalità. Ma siccome abbiamo

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial v} = \beta_{12}\gamma_2, \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial u} = \beta_{21}\gamma_1$$

ed anche

$$\frac{\partial W_1}{\partial v} = \beta_{12}W_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = \beta_{21}W_1,$$

ne risulta $\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0$, indi $\lambda = \text{cost}^{te}$. Ora si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = H_1\gamma_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = H_2\gamma_2$$

e d'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial u}(x^2 + y^1 + z^2) = 2H_1W_1 = 2\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(x^2 + y^1 + z^2) = 2H_2W_2 = 2\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

da cui

$$\varphi = \frac{1}{2\lambda}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{cost}^{te}$$

ciò che dimostra essere i circoli normali ad una sfera fissa.

In secondo luogo se i piani del sistema ciclico sono paralleli ad una direzione fissa, prendasi questa per asse delle z e si avrà

$$\cos\psi Z_2 - \mathrm{sen}\,\psi Z_2 = 0,$$

onde per le (16*)

$$Z_1 = \lambda\gamma_1, Z_2 = \lambda\gamma_2$$

con λ fattore di proporzionalità che risulta anche qui una costante. Avendosi allora

$$\frac{\partial z}{\partial u} = H_1Z_1 = \lambda H_1\gamma_1 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = H_2Z_2 = \lambda H_2\gamma_2 = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

ne deduciamo

$$\varphi = \frac{z}{2\lambda} + \text{cost}^{te}$$

e tutti i circoli sono ortogonali ad un piano parallelo al piano xy.

§ 365.

Sistemi ciclici nei piani tangenti di una superficie. Teorema di Darboux.

Andiamo ora ad applicare le formole generali del § 361 alla ricerca dei sistemi ciclici i cui circoli sono situati individualmente nei piani tangenti di una data superficie Σ. Il teorema generale di RIBAUCOUR al § 359 ci assicura

già che la risoluzione del problema dipenderà unicamente dall'elemento lineare di Σ, ed un notevole teorema di DARBOUX confermerà in forma geometrica espressiva il risultato.

Adoperiamo le notazioni e le formole del § 359, e individuiamo in ogni piano tangente nel punto $P \equiv (u, v)$ di Σ il corrispondente circolo coll'assegnare in funzione di u, v, le coordinate ortogonali A, B del centro del circolo ivi tracciato, riferite alle due direzioni (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) pel punto P come assi, ed il raggio R del circolo. Le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo saranno

$$x_1 = x + A\,X_1 + B\,X_2, \text{ ecc.}$$

e nelle formole del § 361 potremo porre

$$\alpha_1 = X_1\,,\ \beta_1 = Y_1\,,\ \gamma_1, = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2\,,\ \beta_2 = Y_2\,,\ \gamma_2 = Z_2.$$

Per le quantità che figurano nella equazione ai differenziali totali (9) troveremo :

$$(23^*)\quad \begin{cases} S\alpha_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{E} + \dfrac{\partial A}{\partial u} + \dfrac{B}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},\ S\alpha_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{B}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \\ \qquad\qquad S\alpha_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{\partial B}{\partial u} - \dfrac{A}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ S\alpha_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = \sqrt{G} + \dfrac{\partial B}{\partial v} + \dfrac{A}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},\ S\alpha_2 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \\ \qquad\qquad S\alpha_2 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}. \end{cases}$$

Le condizioni affinchè il sistema sia ciclico sono espresse delle equazioni (I), (II), (III) che prendono ora la forma seguente :

$$(\alpha)\quad \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{B}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) - \left(\sqrt{E} + \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{B}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\left(\sqrt{G} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = K\sqrt{EG}\,.\,R^2$$

$$(\beta)\quad \left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{B}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)\frac{\partial R}{\partial u} - \left(\sqrt{E} + \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{B}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\frac{\partial R}{\partial v} = K\sqrt{EG}\,.\,R\,B$$

$$(\gamma)\quad -\left(\sqrt{G} + \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)\frac{\partial R}{\partial u} + \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\frac{\partial R}{\partial v} = K\sqrt{EG}\,.\,R\,A$$

dove, conformemente al teorema di RIBAUCOUR, vediamo figurare soltanto i coefficienti dell'elemento lineare di Σ e la sua curvatura totale K.

Siccome supponiamo $K \neq 0$, possiamo risolvere le (β), (γ) rapporto a $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$ con riguardo alla (α), ed otteniamo

$$\begin{cases} R\dfrac{\partial R}{\partial u} = A\dfrac{\partial A}{\partial u} + B\dfrac{\partial B}{\partial u} + A\sqrt{E} \\ R\dfrac{\partial R}{\partial v} = A\dfrac{\partial A}{\partial v} + B\dfrac{\partial B}{\partial v} + B\sqrt{G}, \end{cases}$$

ciò che possiamo scrivere

$$(24)\quad \frac{\partial}{\partial u}(R^2 - A^2 - B^2) = 2\,A\sqrt{E}\ ,\ \frac{\partial}{\partial v}(R^2 - A^2 - B^2) = 2\,B\sqrt{G}\ .$$

Ne risulta che l'espressione

$$A\sqrt{E}\,du + B\sqrt{G}\,dv$$

deve essere un differenziale esatto, onde esprimeremo A, B per un'unica funzione incognita τ colle formole

$$(25)\qquad A = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \tau}{\partial u}\ ,\quad B = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \tau}{\partial v},$$

e dalle (24), potendo aumentarsi τ di una costante, avremo

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,\tau,$$

od anche

$$(26)\qquad R^2 = \Delta_1\,\tau + 2\,\tau.$$

Espresse con queste formole A, B, R per l'unica funzione incognita τ, non resta più altro che sostituire nella (α), ciò che dà un'equazione del secondo ordine per τ. Introducendo i simboli di CHRISTOFFEL (I pag. 84) e le derivate seconde covarianti di τ, questa si scrive

$$\frac{(\tau_{11} + E)(\tau_{22} + G) - \tau_{12}^2}{E\,G} + K(\Delta_1\,\tau + 2\tau) = 0\ ,$$

ovvero coi simboli dei parametri differenziali secondi, sotto forma invariantiva :

$$(C)\qquad \Delta_{22}\,\tau + \Delta_2\,\tau + K(\Delta_1\,\tau + 2\,\tau) + 1 = 0.$$

Ora si osserva che questa si identifica colla *seconda equazione dell'applicabilità* §82 (I pag. 220) cui soddisfa il semiquadrato ρ della distanza del punto (u, v) variabile sopra Σ da un punto fisso O nello spazio :

$$\Delta_{22}\,\rho - \Delta_2\,\rho + K\,(\Delta_1\,\rho - 2\rho) + 1 = 0\,,$$

semplicemente ponendo

$$\tau = -\rho.$$

Si riconosce così che, dal punto di vista analitico, il problema attuale è identico a quello della deformazione di Σ.

Il DARBOUX, con opportuno uso dell'immaginario, ha dato a questo risultato una forma geometrica espressiva col teorema che andiamo ora a formulare. Per questo osserviamo che ogni circolo nello spazio individua un fascio di sfere fra le quali figurano due sfere di raggio nullo (coni isotropi) date da due punti sull'asse del circolo, simmetrici rispetto al suo piano, che diremo i *fuochi* del circolo. Se il circolo è reale di raggio R, questi sono i due punti alla distanza $\pm$ i R dal centro. Pel nostro circolo C del sistema ciclico le coordinate di un fuoco F del circolo sono

$$x + A\,X_1 + B\,X_2 + i\,R\,X_3, \text{ ecc.}$$

onde posto

$$2\,\rho = \overline{PF}^2,$$

si ha

$$2\rho = S(AX_1 + BX_2 + i\,RX_3)^2 = A^2 + B^2 - R^2 = -2\,\tau,$$

cioè appunto $\rho = -\tau$. E siccome ρ soddisfa all'equazione dell' applicabilità esiste una deformata (immaginaria) Σ_0 della Σ nella quale tutti i segmenti PF, invariabilmente legati a Σ nella deformazione, vengono a raccogliersi coi loro estremi F in un solo punto O. A questa deformata Σ_0 della Σ competono i valori *puramente immaginarii* per D, D′, D″ (I pag. 360).

$$D_0 = i\,\frac{\tau_{11} + E}{\sqrt{\Delta_1\tau + 2\tau}}\,,\quad D''_0 = i\,\frac{\tau_{12} + F}{\sqrt{\Delta_1\tau + 2\tau}}\,,\quad D''_0 = i\,\frac{\tau_{22} + G}{\sqrt{\Delta_1\tau + 2\tau}}\,,$$

ossia

$$(27)\qquad D_0 = \frac{i}{R}\,(\tau_{11} + E)\,,\quad D'_0 = \frac{i}{R}\,(\tau_{12} + F)\,,\quad D''_0 = \frac{i}{R}\,(\tau_{22} + G)\,,$$

alle quali formole possiamo anche dare la forma equivalente

$$(27^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{D_0}{\sqrt{E}} = \dfrac{i}{R}\left(\sqrt{E} + \dfrac{\partial A}{\partial u} + \dfrac{B}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\,,\quad \dfrac{D'_0}{\sqrt{E}} = \dfrac{i}{R}\left(\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{B}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) \\ \dfrac{D'_0}{\sqrt{G}} = \dfrac{i}{R}\left(\dfrac{\partial B}{\partial u} - \dfrac{A}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\,,\quad \dfrac{D''_0}{\sqrt{G}} = \dfrac{i}{R}\left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial B}{\partial v} + \dfrac{A}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) \end{cases}$$

Dopo ciò possiamo formulare il risultato nel teorema di DARBOUX :

Per costruire i sistemi ciclici nei piani tangenti di Σ, si consideri una deformata qualunque Σ_0, e di una sfera fissa di raggio nullo si costruiscano i circoli d'intersezione coi piani tangenti di Σ. Se si deforma la Σ_0 restituendole la configurazione Σ, i detti circoli, trascinati nella deformazione, daranno il sistema ciclico cercato.

§ 366.

Sistema coniugato comune a Σ, Σ_0.

Come complemento al teorema di DARBOUX, andiamo ora a dimostrare la proposizione seguente :

Sulla superficie Σ inviluppo dei piani dei circoli, in un sistema ciclico, alle sviluppabili della congruenza degli assi (alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli) corrisponde un sistema coniugato. Questo è il sistema coniugato comune alla superficie Σ e alla sua deformata (immaginaria) Σ_0 del teorema di DARBOUX. (*).

Per dimostrarla costruiamo per la congruenza degli assi del sistema ciclico i coefficienti di KUMMER (I pag. 456)

$$\overline{E} = S\left(\frac{\partial X_3}{\partial u}\right)^2,\ \overline{F} = S\,\frac{\partial X_3}{\partial u}\,\frac{\partial X_3}{\partial v},\ \overline{G} = S\left(\frac{\partial X_3}{\partial v}\right)^2$$

$$e = S\,\frac{\partial X_3}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial u},\quad f = S\,\frac{\partial X_3}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial v},\ f' = S\,\frac{\partial X_3}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$g = S\,\frac{\partial X_3}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}\,.$$

Per le formole del quadro (B) pag. 223 e per le (23*) pag. 240 troviamo

$$\overline{E} = \frac{D^2}{E} + \frac{D'^2}{G}\,,\quad \overline{F} = \frac{DD'}{E} + \frac{D'D''}{G}\,,\quad \overline{G} = \frac{D'^2}{E} + \frac{D''^2}{G}$$

(*) La prima parte della proposizione è dovuta a RIBAUCOUR, la seconda caratterizza il sistema coniugato come quello permanente nella deformazione di Σ in Σ_0.

$$
\left\{
\begin{aligned}
e &= -\frac{D}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{E}+\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{B}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)-\frac{D'}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\\
f &= -\frac{D}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{B}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{D'}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial B}{\partial v}+\frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\\
f' &= -\frac{D'}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{E}+\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{B}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)-\frac{D''}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\\
g &= -\frac{D'}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{B}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{D''}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial B}{\partial v}+\frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

le quali ultime formole, a causa delle (27*), possiamo anche scrivere

$$
e=iR\left(\frac{DD_0}{E}+\frac{D'D'_0}{G}\right),\ f=iR\left(\frac{DD'_0}{E}+\frac{D'D''_0}{G}\right),\ f'=iR\left(\frac{D'D_0}{E}+\frac{D''D'_0}{G}\right),\ g=iR\left(\frac{D'D'_0}{E}+\frac{D''D''_0}{G}\right).
$$

Dopo ciò se formiamo l'equazione differenziale delle sviluppabili della congruenza (I pag. 468)

$$
(f'\overline{E}-e\overline{F})\,du^2+\{g\overline{E}+(f'-f)\overline{F}-e\overline{G}\}\,du\,dv+(g\overline{F}-f\overline{G})\,dv^2=0,
$$

vediamo che pei coefficienti risultano le formole

$$
f'\overline{E}-e\overline{F}=iRK(DD'_0-D'D_0),\ g\overline{E}+(f'-f)\overline{F}-e\overline{G}=
$$
$$
=iRK(DD''_0-D''D_0),\ g\overline{F}-f\overline{G}=iRK(D'D''_0-D''D'_0),
$$

e l'equazione differenziale delle sviluppabili prende la forma

$$
\begin{vmatrix} D_0\,du+D'_0\,dv, & D'_0\,du+D''_0\,dv \\ D\,du+D'\,dv, & D'\,du+D''\,dv \end{vmatrix}=0,
$$

che è appunto quella del sistema coniugato comune a Σ, Σ_0, *c.* d. d.

È da osservare che queste sviluppabili, come corrispondenti alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli, sono certamente reali. La stessa cosa risulta dall'osservare che, avendosi

$$
DD''-D'^2=KEG,\ D_0D''_0-D'^2_0=-KEG,
$$

una delle due forme quadratiche

$$
D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2
$$
$$
D_0\,du^2+2D'_0\,du\,dv+D''_0\,dv^2
$$

è definita.

§ 367.

Interpretazione nello spazio parabolico indefinito con $ds^2=dx^2+dy^2-dz^2$

A questi risultati possiamo dare ancora una forma reale introducendo, accanto all'ordinario spazio euclideo definito con

$$
ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,
$$

quello *indefinito* con

$$
ds^2=dx^2+dy^2-dz^2.
$$

In questo spazio noi possiamo considerare una superficie (reale) di equazioni parametriche

$$
x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),
$$

di cui chiameremo prima forma fondamentale quella data da

$$
(28)\qquad ds^2=dx^2+dy^2-dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,
$$

e questa potrà essere definita ($EG-F^2>0$) ovvero indefinita ($EG-F^2<0$). Nel primo caso la superficie, o la regione di superficie, si dirà di *prima specie*, nel secondo di *seconda specie*. Su queste ultime sono reali le linee di *lunghezza nulla* che soddisfano all'equazione differenziale $ds^2=0$; su quelle di prima specie invece tali linee sono immaginarie come nell'ordinario spazio.

Consideriamo una superficie (28) di 1ª specie e (*) poniamo

$$
X=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\ Y=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\ Z=-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},
$$

onde la relazione

(*) Le formole seguenti nel testo si ottengono da quelle ordinarie cangiando (x, y, z) in (x, y, iz) e contemporaneamente (X, Y, Z) in (iX, iY, Z), d'altra parte (D, D', D'') in $(iD, iD'\ iD'')$, ciò che rende analiticamente evidenti gli sviluppi che seguono.

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1, \tag{29}$$

e introduciamo come seconda forma quadratica fondamentale della superficie la seguente

$$\varphi = dz\,dZ - dx\,dX - dy\,dY = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \tag{30}$$

onde risulta

$$\left\{\begin{aligned} D &= X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ D' &= X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - Z\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ D'' &= X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}\right. \tag{30*}$$

Procedendo come nel caso ordinario (I pag. 170) (ovvero utilizzando l'osservazione in nota), si ottengono le formole fondamentali:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} - D\,X \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} - D'\,X \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} - D''X \end{aligned}\right. \tag{a}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{b}$$

delle quali le seconde coincidono colle ordinarie dello spazio euclideo definito e le prime ne differiscono pel segno cangiato nell'ultimo termine. Scrivendo ora le condizioni d'integrabilità pel sistema differenziale (a), (b) si ottengono: 1° le equazioni di CODAZZI per D, D′, D″ nella stessa forma ordinaria, 2° l'equazione di GAUSS sostituita dall'altra

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = -K, \tag{c}$$

dove K indica la curvatura della prima forma fondamentale.

Viceversa se E, F, G; D, D′, D″ soddisfano a queste equazioni di GAUSS e CODAZZI, ne resta individuata, nello spazio indefinito (a meno di movimenti in questa metrica), una superficie reale di 1.ª specie.

Quando della superficie sia data soltanto la prima forma fondamentale (28), abbiamo il corrispondente problema d'applicabilità nello spazio indefinito. Come nel caso dello spazio ordinario, osservando che la (28) può scriversi

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 - dx^2 = dy^2 - dz^2,$$

si vede che $x = x(u, v)$ (medesimamente y) deve essere una tale funzione di u, v da rendere la forma quadratica nel primo membro di curvatura nulla, e di più indefinita. Per ciò $x(u, v)$ dovrà soddisfare (I pag. 356) alla prima equazione dell'applicabilità;

$$\Delta_{22}\,\theta = K(1 - \Delta_1\,\theta), \tag{D}$$

dove però questa volta si avrà

$$\Delta_1\,\theta > 1. \tag{D*}$$

Viceversa se θ è una soluzione della (D), soddisfacente alla diseguaglianza (D*), ne resta individuata una superficie reale Σ di prima specie nello spazio indefinito col dato ds^2, e coi corrispondenti valori per D, D′, D″

$$D = \frac{\theta_{11}}{\sqrt{\Delta_1\theta - 1}},\quad D' = \frac{\theta_{12}}{\sqrt{\Delta_1\theta - 1}},\quad D'' = \frac{\theta_{22}}{\sqrt{\Delta_1\theta - 1}}.$$

Per tal modo, ritornando allo spazio ordinario definito, vediamo che le soluzioni della (D) corrispondono a due diversi problemi geometrici: *Le soluzioni* θ *della* (D) *che rendono* $\Delta_1\,\theta < 1$ *corrispondono individualmente alle configurazioni che assume per flessione una superficie* Σ *del dato* ds^2, *quelle per le quali* $\Delta_1\,\theta > 1$ *corrispondono ai sistemi ciclici situati nei piani tangenti di* Σ.

§ 368.

Congruenze rettilinee cicliche.

Diremo *ciclica* una congruenza rettilinea quando i suoi raggi siano gli assi di un sistema ciclico. Ora, ricercando la condizione a cui deve soddisfare

una congruenza rettilinea perchè sia ciclica, dimostreremo che la condizione dipende unicamente dalla *immagine sferica* delle sue sviluppabili, che sappiamo dover essere reali, come corrispondenti alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli. Riferiamoci alle formole di GUICHARD (I § 183) per una congruenza con assegnata immagine sferica (u, v) delle sviluppabili e sia

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{31}$$

la forma corrispondente dell' elemento lineare sferico. Indicando con ρ la semidistanza focale, sappiamo che ρ deve soddisfare all' equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + F\right]\rho = 0\,; \tag{32}$$

e viceversa ad ogni soluzione ρ di questa corrisponde una congruenza della specie, sul cui raggio (u, v) le coordinate x, y, z del punto medio sono date per quadrature dalle formole (I, pag. 484)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right]X_3 - \rho\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\omega\,.\,X_1 - \rho\sqrt{E}\cos\omega X_2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right]X_3 - \rho\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\omega\,.\,X_1 + \rho\sqrt{G}\cos\omega X_2. \end{cases} \quad \left(\omega = \frac{\Omega}{2}\right). \tag{33}$$

Ora se con δ indichiamo la distanza del centro del circolo dal punto medio (x, y, z), abbiamo

$$R^2 + \delta^2 = \rho^2,$$

onde potremo porre, indicando con σ un angolo acuto :

$$\delta = \rho\cos\sigma, \quad R = \rho\,\mathrm{sen}\,\sigma, \tag{34}$$

e nelle formole generali del § 361 dovremo porre

$$x_1 = x + \rho\cos\sigma\,X_3,\ y_1 = y + \rho\cos\sigma\,Y_3,\ z_1 = z + \rho\cos\sigma\,Z_3, \tag{35}$$

mentre pei coseni $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2\,\beta_2, \gamma_2)$ si potrà assumere

$$\alpha_1 = X_1,\ \beta_1 = Y_1,\ \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2,\ \beta_2 = Y_2,\ \gamma_2 = Z_2.$$

Calcoliamo le derivate di x_1, y_1, z_1 colle formole del § 307 (pag. 78) e troveremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho(1+\cos\sigma) + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right]X_3 - \rho\sqrt{E}\,(1-\cos\sigma)\,(\mathrm{sen}\omega X_1 + \cos\omega X_2) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho(1-\cos\sigma) + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right]X_3 - \rho\sqrt{G}\,(1+\cos\sigma)\,(\mathrm{sen}\omega X_1 - \cos\omega X_2), \end{cases}$$

e costruendo dopo ciò l'equazione a differenziali totali (9) § 361 risulterà :

$$dt = \left\{\sqrt{E}\,tg\frac{\sigma}{2}\cos(t+\omega) + A\right\}du - \left\{\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos(t-\omega) + B\right\}dv, \tag{36}$$

dove A, B hanno il significato del § 307

$$A = \frac{\partial\omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,2\omega,\quad B = \frac{\partial\omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,2\omega$$

e sono legate dall'identità (48) ibid.

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,2\omega. \tag{37}$$

Si osservi che l'equazione (36) per t offre la notevole proprietà di dipendere soltanto dalla immagine sferica delle sviluppabili della congruenza e quindi : *Le congruenze che hanno a comune l'immagine sferica delle sviluppabili con una congruenza ciclica sono tutte cicliche.* Le superficie ortogonali ai circoli in due di tali sistemi ciclici si corrispondono per linee di curvatura e parallelismo delle normali, soño cioè trasformate di COMBESCURE l'una dell' altra, e questo risultato equivale alla trasformazione di COMBESCURE per le congruenze di sfere di RIBAUCOUR. Ritornando alla equazione (36) e costruendone le condizioni d'integrabilità, tenendo conto della (37), si trovano le seguenti :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cot\dfrac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{E}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cot\dfrac{\sigma}{2}\cos 2\omega - \sqrt{G}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}tg\dfrac{\sigma}{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\ tg\dfrac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{G}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}tg\ \dfrac{\sigma}{2}\cos 2\omega - \sqrt{E}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cot\dfrac{\sigma}{2}, \end{cases}$$

ed esprimendo le derivate dei coefficienti pei simboli di CRISTOFFEL, si convertono nelle equivalenti

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 2(\cos\sigma - 1)\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 2(\cos\sigma + 1)\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Se di queste equazioni, lineari in $\cos\sigma$, si forma la condizione d'integrabilità, risulta

$$(39)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\cos\sigma = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - 4\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},$$

onde, escludendo dapprima il caso che questa sia identica in $\cos\sigma$, ne risulterà determinato $\cos\sigma$ e la congruenza sarà ciclica se questo valore di $\cos\sigma$ soddisferà le (38); inoltre per la realità del sistema ciclico occorrerà che si abbia $|\cos\sigma| < 1$. Ne concludiamo: *Ad una congruenza rettilinea ciclica si può, in generale, associare uno ed un solo sistema ciclico i cui assi siano i raggi della congruenza.*

La forma delle condizioni (38) suggerisce ora il confronto colle analoghe (30) del § 294 ottenute pei sistemi coniugati permanenti delle superficie. Queste formole si identificano in effetto ponendo

$$\nu = -\frac{1+\cos\sigma}{2} = -\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

e ne risulta

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu} = -\,tg^2\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

cioè

$$\lambda = i\,tg\,\frac{\sigma}{2},$$

indi nelle notazioni del citato § 294

$$\overline{D} = i\,tg\,\frac{\sigma}{2}\,.\,D\ ,\ \overline{D}'' = -\,i\cot\frac{\sigma}{2}\,.\,D''$$

Ritorniamo così in sostanza al teorema di DARBOUX ed ai risultati del § 366 sotto la forma seguente: *Affinchè una congruenza rettilinea sia ciclica è necessario e sufficiente che l'immagine sferica delle sue sviluppabili sia altresì l'immagine di un sistema coniugato di una superficie permanente in una deformazione (puramente immaginaria) di questa.*

§ 369.

Congruenze infinite volte cicliche e congruenze cicliche normali.

Il teorema sopra stabilito che una congruenza rettilinea ciclica è, in generale, *una sola volta* ciclica soffre un'eccezione molto notevole, che si presenta quando la (39) è un'identità in $\cos\sigma$, cioè quando sussistono le relazioni

$$(40)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}.$$

Secondo il calcolo eseguito al § 310 sulle identiche equazioni (58) (pag. 84), queste esprimono che le linee sferiche (u, v) sono le immagini delle asintotiche di una superficie S per la quale la curvatura K ha la forma caratteristica

$$(C)\qquad K = -\frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2},$$

onde vediamo che: *le uniche congruenze rettilinee che siano più d'una volta, e quindi infinite volte cicliche sono le congruenze di* RIBAUCOUR (§ 287) *aventi per superficie generatrice una superficie della classe* (C).

Dalla (39) risulta inoltre che queste sono le uniche congruenze di RIBAUCOUR che siano al tempo stesso cicliche, poichè se la congruenza è di RIBAUCOUR si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\},$$

e quando sia inoltre ciclica dalla (39) seguono le (40).

Consideriamo ora, in uno qualunque dei corrispondenti sistemi ciclici, la superficie Σ inviluppo dei piani dei circoli. Sopra Σ il sistema (u,v) è coniugato (§ 366), anzi è quello permanente sulla deformata (immaginaria) Σ_0 del teorema di DARBOUX, e siccome Σ corrisponde per parallelismo di normali alla superficie S della classe (C) sulla quale le linee (u,v) sono le asintotiche, la Σ è una delle superficie associate del § 310. Dunque: *In ogni sistema ciclico i cui assi formino una congruenza di* RIBAUCOUR, *avente quindi per superficie generatrice una superficie* S *della classe* (C), *l'inviluppo dei piani dei circoli è una superficie* Σ *suscettibile di una deformazione continua che conserva coniugato il sistema* (u, v) *corrispondente alle linee di curvatura*

delle superficie ortogonali ai circoli. Notevole è il caso che la superficie S sia pseudosferica ; allora si ha

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0,$$

e la congruenza degli assi dei circoli è una congruenza di GUICHARD (I § 186), le cui sviluppabili tagliano le due superficie focali secondo le loro linee di curvatura. In tal caso segue dalle (38) che l'angolo σ può avere un valore *costante* qualunque, cioè sopra ogni asse il centro del circolo divide (internamente) il segmento focale in rapporto costante ; in particolare per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ogni circolo del sistema ha il centro nel punto medio dell'asse ed il suo raggio eguaglia la semidistanza focale. *In questi particolari sistemi ciclici, caratterizzati dalla proprietà che il centro del circolo divide sopra ogni asse in rapporto costante il segmento focale, l'inviluppo dei piani dei circoli è una superficie di* Voss.

Ricerchiamo da ultimo quali sono le congruenze rettilinee cicliche e normali ad un tempo. Intanto le normali ad una superficie pseudosferica qualunque costituiscono una tale congruenza, come quella degli assi di un sistema ciclico di RIBAUCOUR di raggio costante (I § 257), e quindi, pei risultati generali al paragrafo precedente, anche per qualunque superficie avente a comune con una pseudosferica l'immagine sferica delle linee di curvatura le normali formano una congruenza ciclica. È facile vedere che non esistono altre congruenze cicliche e normali. Supposto infatti nelle formole del paragrafo precedente

$$F = 0, \quad \Omega = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{4},$$

si ha

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial\, lg\, \sqrt{E}}{\partial\, v}, \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial\, lg\, \sqrt{G}}{\partial\, u},$$

onde le (38) possono scriversi

$$\frac{\partial\, lg \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\partial\, u} = \frac{\partial\, lg\, \sqrt{G}}{\partial\, u}, \quad \frac{\partial\, lg \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\partial\, v} = \frac{\partial\, lg\, \sqrt{E}}{\partial\, v},$$

e integrando col disporre dei parametri u, v, possiamo porre

$$\sqrt{E} = \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \quad \sqrt{G} = \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right).$$

L'elemento lineare sferico (31) prende quindi la forma

$$ds'^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta dv^2 \left(\theta = \frac{\sigma}{2}\right)$$

caratteristica per le immagini sferiche delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica, e ne concludiamo: *Le congruenze rettilinee normali e cicliche sono tutte e sole quelle delle normali alle superficie aventi a comune colle pseudosferiche l'immagine delle linee di curvatura.* La stessa cosa può dedursi dai risultati generali del § 366 osservando che la superficie Σ inviluppo dei piani dei circoli deve ammettere una deformata puramente immaginaria Σ_0 con conservazione delle linee di curvatura, proprietà che, pel teorema alla fine del § 294, caratterizza appunto le superficie aventi a comune colle pseudosferiche l'immagine delle linee di curvatura.

§ 370.

Preliminari al nuovo metodo di Weingarten pel secondo problema dell'applicabilità.

Colla teoria dei sistemi ciclici si connettono gli importanti resultati conseguiti da WEINGARTEN in una celebre memoria del 1894, (*) ove egli ottenne una radicale trasformazione dell'ordinaria equazione dell'applicabilità

(D) $$\Delta_{22}\theta = K(1 - \Delta_1\theta).$$

Si è visto (§ 367) che le soluzioni θ di questa corrispondono a due problemi geometrici distinti dal punto di vista *reale* ; le prime con $\Delta_1\theta < 1$ rispondono alla deformazione nell'ordinario spazio definito, le seconde con $\Delta_1\theta > 1$ alla deformazione nello spazio indefinito, ovvero alla ricerca dei sistemi ciclici tracciati nei piani tangenti della superficie. Ora la conoscenza di ogni particolare soluzione θ della seconda specie ($\Delta_1\theta > 1$) permette, secondo WEINGARTEN, di trasformare le soluzioni di prima specie della (D),

(*) *Sur la déformation des surfaces.* Mémoire couronnè par l'Académie des Sciences. Acta Mathematica t. 20.

con $\Delta_1\,\theta < 1$, in tutte e sole le soluzioni di un'altra equazione del secondo ordine che ha ancora, come la (D), la forma di AMPÈRE, e questa è appunto la trasformata di WEINGARTEN del problema dell'applicabilità. Questa trasformata di WEINGARTEN presenta inoltre sulla (D) un altro considerevole vantaggio. La (D), salvo nel caso $K = 0$ delle superficie sviluppabili, non ammette integrali intermediarî del primo ordine, e non rientra in alcuno degli altri casi noti d'integrabilità ; essa non rendeva per ciò ragione dei successi già prima ottenuti colla geometria, che aveva condotto alla determinazione completa di altre classi di superficie applicabili. La trasformata di WEINGARTEN possiede invece appunto in questi casi integrali intermediarii, ciò che spiega analiticamente la ragione del successo dei metodi geometrici.

In questi ultimi paragrafi del Capitolo noi ci limiteremo alle nozioni essenziali sul nuovo metodo di WEINGATEN, collegandolo come si è detto colla teoria dei sistemi ciclici tracciati nei piani tangenti di una superficie Σ. (*)

Supponiamo noto un tale sis ema ciclico, ed abbiasi per la corrispondente forma del ds^2 della superficie . inviluppo dei piani del sistema

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2 = d\xi^2 + d\,(\eta - \zeta)\,.\,d\,(\eta + \zeta). \tag{41}$$

Introduciamo le nuove coordinate α, β ponendo :

$$\xi = \alpha, \quad \eta - \zeta = \beta,$$

e poniamo ancora

$$\eta + \zeta = 2\,\psi.$$

dove $\psi = \psi\,(\alpha, \beta)$ sarà una funzione di α, β. Così avremo

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,d\alpha\,d\beta + 2\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\,d\,\beta^2\,; \tag{42}$$

e siccome inversamente da questa, colle sostituzioni precedenti, si risale alla (41), vediamo che la ricerca dei sistemi ciclici nei piani tangenti di una superficie Σ equivale al problema di ridurne il ds^2 alla forma (42).

Si osserverà poi che, conformemente ai risultati del § 366, le formole

$$x_0 = \alpha, \quad y_0 = \psi + \frac{\beta}{2}\,, \quad z_0 = i\left(\psi - \frac{\beta}{2}\right) \tag{43}$$

(*) Per maggiori sviluppi si rimanda il lettore alla citata memoria di WEINGARTEN. V.i anche DARBOUX Leçons 4.me Partie, Chap. XIII e XIV, e la seconda edizione (Vol.e II 1903) del presente libro.

definiscono una deformata (immaginaria) Σ_0 della Σ a cui competono i valori puramente immaginarii per D, D′, D″

$$D_0 = i\,\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}}{\sqrt{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}}\,, \quad D'_0 = i\,\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\sqrt{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}}\,, \quad D''_0 = i\,\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}}{\sqrt{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}}\,, \tag{44}$$

ed il sistema coniugato comune a Σ, Σ_0 corrisponde alle sviluppabili della congruenza degli assi dei circoli.

È anche da notarsi che alla forma (42) del ds^2 corrispondono i seguenti valori dei simboli di CRISTOFFEL :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = -\,\dfrac{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\,, \quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = -\,\dfrac{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,, \quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\,\dfrac{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\,, \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,, \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,, \quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,, \end{array}\right. \tag{45}$$

e per la curvatura K si ha la formola

$$K = \frac{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}}{2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2}\,. \tag{46}$$

§ 371.

La superficie trasformata $\bar{\Sigma}$ di Weingarten.

Supponiamo noto per la superficie Σ un sistema coordinato (α, β) che dia al ds^2 la forma caratteristica (42) e coi soliti simboli indichiamo le coordinate x, y, z del punto (α, β) sopra Σ, espresse pei parametri α, β, e con X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

Avendosi

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 = 1, \quad S\,\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,, \quad S\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 = 2\,\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\,, \tag{47}$$

ne segue

$$\text{(48)} \qquad S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial\beta}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}=0,$$

e queste ci dimostrano che ponendo

$$\text{(49)} \qquad \bar{x}=\frac{\partial x}{\partial \beta},\ \bar{y}=\frac{\partial y}{\partial \beta},\ \bar{z}=\frac{\partial z}{\partial \beta}$$

si ha

$$\text{(50)} \qquad S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}=0,\ S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta}=0.$$

Riguardiamo $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ come coordinate di un punto $\overline{P}$ mobile nello spazio; questo descriverà una superficie $\overline{S}$, di cui le (49) saranno le equazioni parametriche, e diremo la $\overline{S}$ derivata di WEINGARTEN della Σ (rispetto al ds^2 dato dalla (42)). Le (50) dimostrano che i coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}$ sono

$$\text{(51)} \qquad \overline{X}=\frac{\partial x}{\partial \alpha},\ \overline{Y}=\frac{\partial y}{\partial \alpha},\ \overline{Z}=\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

cioè : *la normale alla superficie derivata* $\overline{S}$ *è parallela alla tangente della linea* $\beta = cost^{te}$. *sopra* Σ.

Calcoliamo ora gli elementi relativi alle linee di curvatura di $\overline{S}$ osservando che lungo una linea di curvatura per $\overline{S}$ si ha

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \bar{x}}{\partial \beta}d\beta=r\left(\frac{\partial \overline{X}}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \overline{X}}{\partial \beta}d\beta\right),$$

dove r indica il corrispondente raggio principale di curvatura, ossia per le (49), (51)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial\beta}d\alpha+\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}d\beta=r\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}d\alpha+\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial\beta}d\beta\right).$$

A questa ed alle due analoghe possiamo sostituire le equazioni che se ne ottengono moltiplicandole ordinatamente per

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha},\ \frac{\partial y}{\partial \alpha},\ \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

e sommando, indi similmente per

$$\frac{\partial x}{\partial \beta},\ \frac{\partial y}{\partial \beta},\ \frac{\partial z}{\partial \beta};\ X, Y, Z.$$

Ma la prima volta si ottiene un' identità e le altre due si ottengono le formole

$$\text{(52)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}d\alpha+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}d\beta=r\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}d\alpha+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}d\beta\right) \\ D'\,d\alpha+D''\,d\beta=r\,(D\,d\alpha+D'\,d\beta), \end{cases}$$

che per le (44) possiamo anche scrivere sotto la forma equivalente :

$$\begin{cases} D'_0\,d\alpha+D''_0\,d\beta=r\,(D_0\,d\alpha+D'_0\,d\beta) \\ D'\,d\alpha+D''\,d\beta=r\,(D\,d\alpha+D'\,d\beta). \end{cases}$$

Da queste, eliminando r, troviamo per l'equazione differenziale delle linee di curvatura di $\overline{S}$

$$\begin{vmatrix} D_0\,d\alpha+D'_0\,d\beta, & D'_0\,d\alpha+D''_0\,d\beta \\ D\,d\alpha+D'\,d\beta, & D'\,d\alpha+D''\,d\beta \end{vmatrix}=0,$$

che è quella del sistema coniugato comune a Σ, Σ_0. Dunque : *le linee di curvatura della superficie* $\overline{S}$, *derivata di* WEINGARTEN *della* Σ, *corrispondono al sistema coniugato comune di* Σ *e della sua deformata* Σ_0 *che individua il sistema ciclico, ovvero alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli.* (*)

Se poi dalle (52) eliminiamo il rapporto $d\alpha : d\beta$, troviamo per r, l'equazione di secondo grado

$$\left(D\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}-D'\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\right)r^2-\left(D\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}-D''\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\right)r+D'\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}-D''\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,$$

(*) Il risultato dell'ultima parte si precisa meglio aggiungendo che la superficie $\overline{S}$ è trasformata di COMBESCURE di una delle superficie S_1 ortogonali ai circoli. Le coordinate x_1, y_1, z_1 del punto di S_1 corrispondente al punto (α, β) di Σ sono date dalle formole

$$x_1=x-\alpha\frac{\partial x}{\partial \alpha}-\beta\frac{\partial x}{\partial \beta}.$$

In relazione colle trasformazioni di RIBAUCOUR, abbiamo del resto già incontrata la superficie $\overline{S}$ al § 342, dove essa venne indicata con $\overline{\Sigma}$ mentre la S_1 attuale è ivi indicata con Σ.

le cui radici r_1, r_2 sono quindi i raggi principali di curvatura di $\overline{S}$. Ne segue che fra il loro prodotto $r_1 r_2$ e la loro somma $r_1 + r_2$ ha luogo l'importante relazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} r_1 r_2 - \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} = 0 \tag{53}$$

Ora eseguiamo sulle variabili α, β e sulla funzione $\psi(\alpha, \beta)$ la *trasformazione di* LEGENDRE assumendo quali nuove variabili

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \quad q = \frac{\partial\psi}{\partial\beta}, \tag{54}$$

e come nuova funzione

$$\varphi = \alpha\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \psi, \tag{55}$$

onde risultano le ben note formole

$$\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial p}, \quad \beta = \frac{\partial\varphi}{\partial q}, \quad \psi = p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + q\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi, \tag{56}$$

ed ancora per le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = \frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} = \frac{-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = \frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2}.$$

Per la superficie $\overline{S}$ le variabili p, q hanno un significato geometrico che importa osservare. Dalle (49) e (51) abbiamo

$$S\,\overline{X}\,\bar{x} = S\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = p$$

$$S\,\bar{x}^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 = 2\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 2q,$$

onde vediamo che: *per la superficie $\overline{S}$ la p dà la distanza algebrica del piano tangente dall'origine e $2q$ il quadrato della distanza dell'origine dal punto di contatto.*

La relazione (53) cui soddisfano i raggi principali di curvatura di $\overline{S}$ si scrive ora

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} r_1 r_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0, \tag{V}$$

e quando sia nota φ in funzione di p, q, è manifestamente per la $\overline{S}$ un'equazione a derivate parziali del secondo ordine della forma di AMPÈRE. Questa è appunto l'equazione del secondo ordine nella quale il WEINGARTEN ha trasformato, come ora vedremo, il problema dell'applicabilità. L'elemento lineare (42) della Σ, espresso per p, q, $\frac{\partial\varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$, si scrive

$$ds^2 = 2q\left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + 2p\left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)\left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) + \left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2, \tag{VI}$$

e noi andiamo a dimostrare che la ricerca delle superficie con questo ds^2 equivale, a meno di quadrature, all'integrazione dell'equazione (V) di WEINGARTEN.

§ 372.

Inversione dei resultati.

Essendo φ una funzione comunque *data* di p, q, si consideri una qualunque superficie Σ d'elemento lineare (VI). Se della Σ costruiamo la derivata $\overline{S}$ di WEINGARTEN colle formole del paragrafo precedente, le quantità p, $2q$ avranno per la $\overline{S}$ il significato geometrico sopra stabilito e la $\overline{S}$ sarà un integrale della equazione (V) di AMPÈRE-WEINGARTEN.

Inversamente, sia $\overline{S}$ una qualunque superficie integrale della (V) e indichino $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le coordinate di un suo punto variabile, ed $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ i coseni di direzione della normale, onde avremo

$$S\bar{x}^2 = 2q, \quad S\bar{x}\,\overline{X} = p, \quad S\,\overline{X}^2 = 1. \tag{58}$$

Noi vogliamo provare che la $\overline{S}$ è la derivata di WEINGARTEN di una conveniente superficie Σ di elemento lineare (VI), ovvero (42). In tale ipotesi risulta dalle (49), (51) che pei differenziali delle coordinate x, y, z di un punto di Σ avremo

$$dx = \overline{X}\,d\alpha + \bar{x}\,d\beta, \text{ ecc.} \tag{59}$$

ovvero

$$dx = \overline{X}\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) + \bar{x}\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right). \tag{60}$$

Basterà per questo provare che tali espressioni risultano, a causa della (V), differenziali esatti, poichè allora dalle (60), quadrando e sommando risulta, per le (58), che

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

assume appunto la forma (VI).

Le verifiche da eseguirsi dipendono da speciali proprietà delle variabili p, q che dobbiamo naturalmente supporre, per la superficie $\overline{S}$ in considerazione, indipendenti. A causa delle formole fondamentali della teoria delle superficie (I pag. 170) sussisteranno certamente relazioni della forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial p} = M\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial p} + N\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q} \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial q} = P\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial p} + Q\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q}, \end{cases} \tag{61}$$

colle analoghe per gli altri due assi, dove M, N, P, Q sono convenienti coefficienti. Ma siccome per le (58) si ha

$$S\,\bar{x}\frac{\partial \overline{X}}{\partial p} = 1,\ S\,\bar{x}\frac{\partial \overline{X}}{\partial q} = 0,\ S\,\bar{x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial p} = 0,\ S\,\bar{x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial q} = 1,$$

ne risulta

$$M = 0,\ P = 1.$$

D'altra parte, indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di $\overline{S}$ abbiamo in generale

$$r_1 + r_2 = M + Q,\ r_1 r_2 = M\,Q - N\,P,$$

e nel caso nostro speciale le (61) assumono quindi la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial p} = -r_2 r_2 \dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q} \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial q} = \dfrac{\partial \overline{X}}{\partial p} + (r_1 + r_2)\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q}. \end{cases} \tag{62}$$

Dopo ciò è facile verificare che le espressioni (60), ossia le equivalenti

$$\left(\bar{x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q} + \overline{X}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}\right)dp + \left(\bar{x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + \overline{X}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q}\right)dq$$

sono differenziali esatti. E infatti risulta per le (62)

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\bar{x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q} + \overline{X}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\bar{x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + \overline{X}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q}\right) =$$

$$= \frac{\partial \overline{X}}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} r_1 r_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}\right),$$

e questa espressione è nulla a causa della (V). Possiamo riassumere i risultati del nuovo metodo di WEINGARTEN per la ricerca delle superficie applicabili sopra una data Σ come segue:

Scelto un qualunque sistema ciclico nei piani tangenti di Σ, *si riduca il* ds^2 *di* Σ *alla forma tipica* (42), *o all'equivalente* (VI). *Costruita colla corrispondente funzione* φ (p, q) *l'equazione* (V) *di* AMPÉRE-WEINGARTEN, *se ne consideri una qualunque superficie integrale* $\overline{S}$, *e da questa, eseguendo la quadratura* (60), *si avranno (tutte) le superficie* Σ *del dato elemento lineare.*

Così ad ogni sistema ciclico, i cui circoli siano nei piani tangenti di Σ, corrisponde un'equazione (V) di WEINGARTEN la cui integrazione completa fa conoscere l'intiera classe delle deformate di Σ.

§ 373.

Casi di completa integrabilità nel nuovo metodo di Weingarten.

Veniamo ora a considerare i casi particolari più notevoli nei quali si sa completamente integrare l' equazione dell'applicabilità sotto la nuova forma (V) di WEINGARTEN.

Consideriamo dapprima il caso in cui $r_1 + r_2$ risulta dalla (V) funzione di p soltanto, qui adunque φ (p, q) è funzione lineare di q, a cui possiamo dare la forma

$$\varphi = pq - \frac{p^3}{3} - \psi(p),$$

dove $\psi(p)$ resta pel momento funzione arbitraria di p e la (V) diventa

$$r_1 + r_2 = 2p + \psi''(p),$$

che in coordinate tangenziali possiamo scrivere (I pag. 159)

$$\text{(VII)} \qquad \Delta_2\, p = \psi''(p).$$

Supponiamo di conoscere tutte le superficie $\overline{S}$ integrali di questa equazione ed esaminiamo, colle formole del § 371, quale è il ds^2 delle classe completa di superficie applicabili Σ che se ne deducono per quadrature colle formole (60). Qui abbiamo

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial p} = q - p^2 - \psi'(p)\,,\quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial q} = p$$

e conseguentemente

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\,\beta\, d\alpha\, d\beta + [2\alpha + 2\,\beta^2 + 2\,\psi'(\beta)]\, d\beta^2,$$

od anche ponendo

$$\alpha + \frac{\beta^2}{2} = \alpha_1\,,$$

$$\text{(63)} \qquad ds^2 = d\alpha_1^2 + 2\,[\alpha_1 + \psi'(\beta)]\, d\beta^2$$

Un primo e più semplice caso in cui riesce l'integrazione completa della (VII) è quando

$$\psi''(p) = \text{cost}^{\text{te}},$$

e le superficie $\overline{S}$ corrispondenti hanno per evoluta media una sfera, in particolare un punto (superficie d'Appell) quando $\psi''(p)=0$. In quest'ultimo caso il ds^2 dato dalla (63) diventa

$$ds_1^2 = d\alpha_1^2 + 2\,\alpha_1\, d\beta^2$$

ed appartiene alle evolute delle superficie d'area minima. Se poi $\psi''(p)$ è costante non nulla, si può fare $\psi'(\beta) = \beta$ ed in tal caso ponendo nella (63)

$$2\,(\alpha_1 + \beta) = \operatorname{senh}^2 \omega\,,\quad \beta = \beta_1 + \log\cosh\omega,$$

si ottiene questa forma del ds^2:

$$ds^2 = \operatorname{senh}^4\omega\, d\omega^2 + \cosh^2\omega\, d\,\beta^2,$$

che appartiene alla complementare del paraboloide di rotazione. Ritroviamo così, col nuovo metodo di Weingarten, classi complete di superficie

applicabili che ci sono già note. Ma vi sono altre speciali forme della funzione $\psi''(p)$ nella (VII) per le quali riesce ancora l'integrazione completa. Il primo e più semplice è quello che corrisponde alle superficie d'area minima. ove $\psi''(p) = -2\,p$, cioè $\psi'(\beta) = -\beta^2$. Allora la (63) diventa

$$(a) \qquad ds^2 = d\alpha_1^2 + 2\,(\alpha_1 - \beta^2)\, d\beta^2,$$

sicchè tutte le superficie di questo elemento lineare si deducono per quadrature dalle superficie d'area minima. Questo risultato ottenuto da Weingarten nel 1887 (*) è stato il punto di partenza del nuovo metodo.

Un altro caso di integrazione completa della (VII) venne considerato da Weingarten nel 1891, (**) riducendola a quello della integrazione della nota equazione di Liouville

$$\text{(64)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \pm\, e^{2\theta}\,,$$

dalla quale dipende la ricerca dei sistemi ortogonali isotermi sulle superficie a curvatura costante. Ora se si scrivono le equazioni parametriche della sfera sotto la forma

$$X = \frac{\cos v}{\cosh u}\,,\quad Y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u}\,,\quad Z = \operatorname{tgh} u,$$

si ha pel ds'^2 sferico:

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\cosh^2 u}$$

e l'equazione (65) di Liouville può porsi sotto la forma

$$\cosh^2 u\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right) = \pm\, e^{2(\theta + log\cosh u)}$$

od anche

$$\Delta_2\,\theta = \pm\, e^{2(\theta + log\cosh u)}$$

il Δ_2 essendo calcolato rispetto al ds'^2 sferico.

Ponendo

$$p = \theta + log\,\cosh u,$$

(*) Göttinger Nachrichten Febr. 1887.

(**) Comptes Rendus de l'Académie de Paris — Avril 1891.

la precedente diventa

$$\Delta_2 p = 1 \pm e^{2p}, \tag{65}$$

equazione che sappiamo dunque completamente integrare colla (64) di LIOUVILLE. Ma la (65) corrisponde a prendere nella (VII)

$$\psi''(p) = 1 \pm e^{2p},$$

ossia

$$\psi'(\beta) = \beta \pm \frac{1}{2} e^{2\beta},$$

La formola (63) diventa ora

$$ds^2 = d\alpha_1^2 + (2\alpha_1 + 2\beta \pm e^{2\beta}) \, d\beta^2 \tag{b}$$

e definisce una classe di superficie applicabili, che è adunque completamente nota. Rispetto a queste due nuove classi di superficie applicabili (a) e (b) determinate da WEINGARTEN, il DARBOUX ha fatto l'interessante osservazione che i loro ds^2 appartengono a quadriche immaginarie, precisamenmente a paraboloidi una cui generatrice tocca il circolo immaginario all'infinito. Per il primo caso $\psi'(\beta) = -\beta^2$ lo dimostriamo osservando che si ha

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\, d\beta(\alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha)$$

e per ciò le formole

$$x = \alpha, \; y + iz = 2\beta, \; y - iz = \alpha\beta$$

definiscono una superficie con questo ds^2 ; questa è il paraboloide immaginario

$$(y + iz)\, x = 2\,(y - iz)$$

Analogamente nel secondo caso (b) si può scrivere

$$ds^2 = (d\alpha_1 + d\beta)^2 + e^{\beta}\, d\beta \{(2\alpha_1 + 2\beta \pm e^{2\beta} - 1)\, e^{-\beta}\, d\beta - 2\, e^{-\beta}\, d\alpha_1\}$$

e si ha una corrispondente superficie ponendo

$$x = \alpha_1 + \beta, \; y + iz = e^{\beta}, \; y - iz = \pm e^{\beta} - e^{-\beta}(2\alpha_1 + 2\beta + 1),$$

che è il paraboloide

$$(y + iz)\;(y - iz) = \pm\; (y + iz)^2 - (2x + 1).$$

Nell'uno e nell'altro paraboloide la generatrice $y + iz = 0$ sul piano improprio tocca il circolo assoluto (nel punto $x : y : z = 0 : 1 : i$) colla differenza che nel primo caso il punto di contatto coincide col punto di contatto del paraboloide col piano all'infinito, nel secondo ne è distinto.

Da ultimo accenniamo ad altre classi complete di superficie applicabili dedotte col metodo di WEINGARTEN da BARONI e da GOURSAT. (*) Se nella (VII) supponiamo

$$\psi''(p) = h\, p \quad (h \text{ costante}),$$

abbiamo che le corrispondenti superficie con

$$r + r_2 = (h + 2)\, p$$

sono quelle segnalate al § 159 (I pag. 423), caratterizzate dalla proprietà di essere simili alle loro evolute medie. Ora tutte le volte che la costante h ha la forma

$$h = m\,(1 - m),$$

con m intero, l'equazione corrispondente

$$\Delta_2 p = m\,(1 - m)\, p$$

si sa integrare completamente, e se ne deducono quindi (infinite) classi complete di superficie applicabili.

(*) BARONI Giornale di matematiche t. 28 (1890) e GOURSAT Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse t. V (1891).

CAPITOLO XXII.

Le trasformazioni B_k per congruenze W delle deformate del paraboloide iperbolico.

Faccette e le loro molteplicità secondo LIE. - Moltiplicità ∞^3 stratificabili. - Principii geometrici per le trasformazioni B_k delle deformate delle quadr che. - Caso del paraboloide iperbolico. - Le equazioni differenziali fondamentali per le B_k. - Caso delle deformate rigate. - Trasformazioni singolari. - L'affinità d' IVORY e la legge di applicabilità per le due falde focali delle corrispondenti congruenze W. - Proprietà principali delle trasformazioni B_k. - Corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti.

§ 374.

Faccette piane e le loro moltiplicità secondo Lie.

Nel corso del presente Trattato il lettore avrà avuto più volte occasione di osservare come nelle applicazioni dell'analisi alla geometria, quando la ricerca di determinati enti geometrici porta all'integrazione di corrispondenti equazioni a derivate parziali, si presentano estremamente rari i casi in cui riesce l'integrazione *completa* del problena. Si sono svolti allora dalla geometria dei metodi che possono dirsi *d'integrazione successiva*, coi quali, partendo da soluzioni note del problema, si perviene con operazioni elementari d'integrazione, e molte volte anche in termini finiti, a costruire sempre nuove soluzioni del problema, che vengono a dipendere da un numero crescente ad arbitrio di costanti arbitrarie. Appartengono a questi metodi d'integrazione successiva la teoria delle trasformazioni (per congruenze W) delle superficie a curvatura costante svolta nei Capitoli finali XV e XVI del Vol. I, quella delle superficie con sistema coniugato permanente in una deformazione continua (Cap. XVIII, §§ 308-310), le trasformazioni di RIBAUCOUR delle medesime superficie a curvatura costante, e di quelle ad area minima (Cap. XX) le trasformazioni D_m di DARBOUX delle superficie isoterme, ecc. Abbiamo visto d'altra parte, nello stesso Capitolo XX, che i teoremi di GUICHARD sulle deformate delle quadriche rotonde, colle costruzioni inverse, permettono di estendere anche alle deformate di queste

quadriche i metodi di trasformazione che dapprima si presentarono per le superficie a curvatura costante, vale a dire per le deformate della sfera immaginaria (curvatura negativa), o della sfera reale (curvatura positiva).

Oggetto di questo e dei due seguenti Capitoli sarà di estendere alle deformate delle *quadriche generali* i metodi di trasformazione *per congruenze* W sviluppati in primo luogo colle trasformazioni complementari e di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche (deformate della sfera immaginaria). (*)

A questo giungeremo in modo assai semplice utilizzando i concetti apportati in questa teoria, nei suoi lavori del 1880, da S. LIE, il quale riguardò queste trasformazioni delle superficie pseudosferiche quali trasformazioni *infinitiformi* degli elementi piani o *faccette* dello spazio.

Diciamo con LIE *elemento piano* l'insieme di un punto P e di un piano π incidenti, e poichè del piano π consideriamo solo un intorno infinitesimo circostante a P, daremo il più spesso all'elemento piano il nome di *faccetta*, di cui P sarà il *centro* e π il *piano*. Per individuare una faccetta f basterà dare le coordinate (x, y, z) del suo centro P e i coseni di direzione X, Y, Z della normale al suo piano π, legati dalla relazione

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

ovvero scriveremo nelle notazioni di MONGE

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Così le faccette f dello spazio dipendono da *cinque* coordinate indipendenti x, y, z ; p, q (coordinate di MONGE) e formano quindi una infinità a *cinque* dimensioni, o una moltiplicità ∞^5. Entro questa moltiplicità noi potremo considerare moltiplicità subordinate a quattro, tre, due o una dimensione legando le coordinate x, y, z; p, q della faccetta rispettivamente con una, o con due, con tre o in fine con quattro relazioni indipendenti; od anche esprimeremo queste coordinate per 4 parametri essenziali nel primo caso, per 3 nel secondo, e così via.

(*) Per la parte storica della nuova teoria si consulti la memoria dell'Autore: *Sur la déformation des surfaces applicables sur les quadriques* (Mémoires des Savants étrangers T. XXXIV (1908(e il terzo volume della seconda edizione di questo libro (1909). Quì, come nella seconda edizione tedesca delle Lezioni (Leipzig-Teubner 1910), ci limiteremo all'esposizione delle parti principali della teoria.

Una superficie S, riguardata come l'insieme delle sue faccette piane, è una particolare moltiplicità a due dimensioni *soddisfacente all'equazione di* PFAFF

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{I}$$

e sotto questo aspetto anche una curva qualunque C dello spazio individua una tale moltiplicità ∞^2 di faccette, i cui centri sono distribuiti nei punti di C e i cui piani sono i piani tangenti di C. In fine anche le ∞^2 faccette col centro a comune formano una moltiplicità che soddisfa alla (I).

Viceversa suppongasi che le formole

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)\ ;\ p = p(u, v),\ q = q(u, v) \tag{1}$$

definiscano parametricamente (pei due parametri essenziali (u,v) una moltiplicità a due dimensioni che soddisfi all'equazione (I) di PFAFF. Allora se la matrice funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{2}$$

si suppone dapprima di caratteristica 2, le tre prime equazioni (1) definiscono una superficie S, e la moltiplicità è costituita dalle sue ∞^2 faccette tangenti.

Se avviene in secondo luogo che la caratteristica della matrice (2) si riduca all'unità, le tre prime (1) definiscono una curva C (a cui si riduce la superficie S) e la moltiplicità consta delle ∞^2 faccette tangenti a questa curva.

Può in fine accadere che la matrice (2) abbia caratteristica *zero*, cioè x, y, z si riducano a tre costanti x_0, y_0, z_0 ed allora si tratta delle ∞^2 faccette col centro $(x_0\ y_0\ z_0)$ a comune.

Si osserverà che se, in luogo di definire la faccetta $f \equiv (x, y, z\ ;\ p\ q)$ colle coordinate di MONGE, si adoperano le 6 coordinate

$$x, y, z\ ;\ \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \quad (\text{con } \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1)$$

l'equazione (I) di PFAFF si scriverà

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0 \tag{I*}$$

e la moltiplicità a due dimensioni avrà le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v), & y = y(u, v). & z = z(u, v) \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}(u, v), & \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(u, v), & \mathrm{Z} = \mathrm{Z}(u, v). \end{cases} \tag{1*}$$

Supponiamo ora di considerare una moltiplicità a tre dimensioni di faccette f definita parametricamente dalle formole :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), & y = y(u, v, w), & z = z(u, v, w) \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}(u, v, w), & \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(u, v, w), & \mathrm{Z} = \mathrm{Z}(u, v, w), \end{cases} \tag{2}$$

dove si suppone che i tre parametri u, v, w siano essenziali, e domandiamo *è possibile staccare dalla moltiplicità ∞^3 una doppia infinità di faccette che costituiscano una superficie* ?

Per questo occorrerà che si possano legare u, v, w con una tale relazione che la corrispondente moltiplicità ∞^3 soddisfi all'equazione (I*) di PFAFF, la quale, tenendo conto delle (2), prenderà la forma

$$\mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv + \mathrm{W}\,dw = 0, \tag{3}$$

dove U, V, W si calcoleranno in funzione di u, v, w colle (2) dalle formole

$$\mathrm{U} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \mathrm{V} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \mathrm{W} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial w}.$$

La (3) è un'equazione ai differenziali totali, nella quale potremo riguardare p. e. la w come funzione incognita di u, v. Se costruiamo la corrispondente condizione d'integrabilità

$$\mathrm{U}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial w} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right) + \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial w}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right) = 0\ , \tag{4}$$

ove questa non risulti un'identità in u, v, w, determinerà, al massimo, superficie *isolate* costituite di ∞^2 faccette della moltiplicità. (*) Ma il caso per noi più importante è quando la (4) risulta un'identità, nel qual caso la (3) è completamente integrabile e la sua soluzione generale

$$w = w(u, v\ ;\ c) \tag{5}$$

contiene una costante arbitraria c, che permette di dare inizialmente alla w,

(*) Questo accadrà se la (4) determina uno e più valori per w quali funzioni di u, v che soddisfino poi alla (31).

per un sistema iniziale u_0, v_0 di valori di u, v, un valore arbitrario. In tal caso le ∞^3 faccette della moltiplicità (2) si distribuiscono in una serie ∞^1 di superficie S le cui equazioni parametriche risultano dalle (2) della prima linea, ove per w si ponga il valore (). Diremo allora che la moltiplicità ∞^3 di faccette risulta *stratificata* nelle ∞^1 superficie S. In generale una moltiplicità ∞^3 di faccette non è *stratificabile ;* la condizione perchè ciò accada è che risulti identicamente verificata in u, v, w la condizione (4). E, quando tale condizione sia soddisfatta, potrà ancora accadere, *eccezionalmente*, che le superficie S si riducano a curve, annullandosi i minori di secondo ordine della matrice

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{U}{W}\frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{U}{W}\frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{U}{W}\frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{V}{W}\frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{V}{W}\frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{V}{W}\frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix} \right| .$$

In generale : *Se una moltiplicità ∞^3 di faccette è stratificabile, ciò avviene in un solo modo, determinato dalla equazione a differenziali totali* (3).

È facile poi vedere che, entro una qualunque moltiplicità ∞^4 di faccette date dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x\,(u, v, w, t), \quad y = y\,(u, v, w, t), \quad z = z\,(u, v, w, t) \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}\,(u, v, w, t), \quad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}\,(u, v, w, t), \quad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}\,(u, v, w, t), \end{cases}$$

dove u, v, w, t sono quattro parametri essenziali, esistono infinite moltiplicità ∞^3 stratificabili. Per ottenerle basta riguardare p. e. t come funzione incognita di u, v, w da determinarsi in guisa che sia verificata la (4) ove

$$\mathrm{U} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u}\mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \mathrm{V} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial v}\mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial t}{\partial w}\mathrm{SX}\frac{\partial x}{\partial t}.$$

Sostituendo nella (4) spariscono, come subito si vede, le derivate seconde della funzione incognita t rispetto ad u, v, w e resta un'equazione del primo ordine per t la cui integrazione risolve il probelema.

Osserviamo in fine che una moltiplicità ∞^4 di faccette è definita, in coordinate di MONGE, da una sola equazione

$$\mathrm{F}\,(x, y, z, p, q) = 0$$

e la ricerca delle sue moltiplicità ∞^3 stratificabili equivale all'integrazione di questa equazione a derivate parziali del 1° ordine. Una moltiplicità ∞^3 è definita dal sistema di due equazioni simultanee

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1\,(x, y, z, p, q) = 0 \\ \mathrm{F}_2\,(x, y, z, p, q,) = 0, \end{cases}$$

ed è stratificabile quando queste ammettono una soluzione comune z con una costante arbitraria.

§ 375.

Nuovo aspetto delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie psudosferiche.

Con queste nozioni sulle faccette piane e sulle loro moltiplicità, riprendiamo a considerare una superficie pseudosferica S di raggio R e le sue ∞^1 trasformate di BÄCKLUND S_1 per una trasformazione B_σ a costante σ prefissata. A ciascuna faccetta f della S sono così coordinate ∞^1 faccette trasformate f_1 una per ciascuna S_1, e la giacitura di queste ∞^1 faccette f_1, coordinate alla f, risulta fissata dalle condizioni geometriche seguenti :

1.° *i centri* F_1 *delle* ∞^1 *faccette* f_1 *sono distribuiti sul circolo di raggio* $= \mathrm{R}\cos\sigma$ *tracciato nel piano tangente di* f *col centro nel centro* F *di* f.

2.° *i piani delle* f_1 *passano per* F *e sono inclinati sul piano di* f *dell'angolo costante* $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Ora se la f descrive le ∞^2 faccette di S, le faccette derivate f_1 descrivono una moltiplicità ∞^3 che, secondo le nozioni introdotte nel paragrafo precedente, costituisce sempre una moltiplicità *stratificabile*, e le ∞^1 superficie S_1 in cui vengono distribuite nella stratificazione sono precisamente le trasformate di BÄCKLUND della S, applicabili sapra questa. È chiaro che se la S, flessibile ed inestendibile, si deforma comunque, e ciascuna facetta f trasporta seco *in sistema invariabile* le ∞^1 faccette derivate f_1 nel modo descritto, la proprietà della moltiplicità ∞^3 di faccette f_1 di essere in ogni configurazione stratificabile si mantiene costantemente. Diciamo però subito che si constata (in ordine ai risultati ben noti del Cap. XV e XVI) una rilevante differenza fra il caso della trasformazione complementare B_0 ($\sigma = 0$) e quello della trasformazione generale di BÄCKLUND. Nel primo caso le ∞^1 superficie S_1 di stratificazione ri-

mangono sempre costituite dalle stesse faccette (normali ai circoli), nel caso generale invece la legge di stratificazione cangia quando la superficie S si deforma.

Le superficie pseudosferiche di raggio R essendo da considerarsi come le deformate della sfera

$$(a) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0$$

di raggio puramente immaginario iR, per risalire da questo caso particolare di deformate di tale quadrica speciale, a quello delle quadriche generali di cui ci vogliamo ora occupare, conviene esaminare più da vicino, nel senso generale analitico, quale è la distribuzione delle ∞^3 faccette derivate f_1, quando la superficie pseudosferica S si applica sulla sfera immaginaria (a). I centri delle faccette f_1 distano allora tutti dal centro della sfera (a) della quantità costante

$$\sqrt{R^2 \cos^2\sigma + i^2 R^2} = \pm i R \operatorname{sen}\sigma,$$

ed il loro luogo è quindi la sfera (immaginaria) *concentrica*

$$(b) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\sigma = 0,$$

che diventa in particolare di raggio nullo (un cono isotropo) nel caso della trasformazione complementare $\sigma = 0$. Ma di più i piani delle faccette f_1, passando pei centri F, F_1 di f, f_1 ed essendo inclinati dell'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$ sul piano di f (piano tangente della sfera (a)), distano dal centro di questa precisamente di $i R \operatorname{sen}\sigma$, ed inviluppano quindi la sfera concentrica (b). Dunque : *quando la superficie pseudosferica* S *si applica sulla sfera immaginaria* (a), *le* ∞^3 *faccette* f_1 *derivate vengono a riempiere coi loro centri la sfera concentrica,* (b) *e i loro piani passano per l'una o per l'altra generatrice della sfera* (b) *uscente dal centro della* f_1.

Come si vede, in questa configurazione finale si presenta la circostanza, rilevata sopra come eccezionale, che le ∞^1 superficie S_1 di stratificazione si riducono a linee, precisamente alle generatrici di un sistema della sfera (b), e le ∞^3 faccette f_1 hanno i centri distribuiti su queste generatrici e i loro piani passano per le generatrici stesse.

§ 376.

Descrizione geometrica dei principii fondamentali per le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche.

Colle considerazioni del paragrafo precedente noi abbiamo posto le trasformazioni B_σ di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche (delle deformate della sfera immaginaria) sotto un nuovo aspetto, che consente una notevole generalizzazione alle deformate di *tutte* le quadriche e dà così luogo alla teoria delle trasformazioni per queste superficie, che saranno nel seguito indicate come trasformazioni B_k, fra le quali le B_σ di BÄCKLUND per le deformate della sfera verranno a figurare come il primo e più semplice esempio della classe.

Per questo basterà sostituire alla sfera (immaginaria) (a) una qualunque quadrica Q (reale od immaginaria), e alla sfera concentrica (b) un'altra qualunque quadrica Q_1 *omofocale a* Q, dopo di che procederemo ad un ordinamento di faccette, colla quadrica Q_1 quale quadrica *direttrice*, secondo le leggi seguenti che costituiscono qui l'opportuna generalizzazione di quelle sopra osservate per la sfera immaginaria. Ad ogni faccetta f di Q coordiniamo ∞^1 faccette f_1 per modo che : 1° *i centri* F_1 *delle faccette* f_1 *abbiano per luogo, nel piano* π *di* f *(piano tangente di* Q*), la conica* C *sezione di questo piano colla quadrica confocale (direttrice)* Q_1 ; 2° *il piano* π_1 *della faccetta* f_1 *passi per la congiungente* FF_1 *i centri delle due faccette* f, f_1 *e per l'una o per l'altra generatrice della quadrica* Q_1 *uscente da* F_1.

È manifesto intanto che, con questo ordinamento, le ∞^3 faccette derivate f_1 costituiscono una moltiplicità stratificabile, nella quale le superficie S_1 di stratificazione si riducono alle generatrici del sistema scelto sopra Q_1. Ed ora immaginiamo che la quadrica Q, flessibile ed inestendibile, si deformi, mentre ogni sua faccetta f trascina seco, in sistema invariabile, le ∞^1 faccette f_1 ad essa coordinate nel modo descritto. Così, per ogni configurazione S della quadrica Q, le faccette derivate f_1 costituiranno una tripla infinità, ed avremo il teorema fondamentale che si tratterà di stabilire colla seguente teoria :

Teorema A) Se la quadrica Q *si deforma comunque in una superficie applicabile* S, *mentre ogni sua faccetta* f *trasporta seco invariabilmente le* ∞^1 *faccette* f_1 *derivate, la totalità* ∞^3 *di queste faccette* f_1 *gode delle seguenti proprietà* :

1° *questa moltiplicità* ∞^3 *è sempre stratificabile*, 2° *le* ∞^1 *superficie* S_1 *in cui le* f_1 *si ordinano sono applicabili l'una sull'altra e sulla quadrica fondamentale* Q.

Il passaggio dalla deformata iniziale S della quadrica Q ad una qualunque delle nuove S_1 costituirà appunto una delle nostre trasformazioni B_k. Se il principio geometrico fondamentale per le nostre trasformazioni, enunciato nel teorema *A*), resta così semplicemente descritto, la dimostrazione effettiva richiederà nel seguito ampii sviluppi di calcolo, giustificati dalla natura della proposizione e dalla sua generalità. Ma, prima di accingerci a questi sviluppi, sarà conveniente di illustrare più da vicino l'enunciato del teorema *A*). Questo vale per tutte le specie di quadriche, reali od immaginarie, e pure concentrando il nostro interesse principale sulle deformate *reali* delle quadriche, dobbiamo espressamente avvertire che queste deformate reali si hanno tanto per quadriche *reali*, come per quadriche *immaginarie ;* e del resto nel primo esempio che si è presentato in ordine storico, quello delle superficie pseudosferiche, abbiamo appunto che la quadrica fondamentale è la *sfera immaginaria*.

Ma qui, per orizzontarci fra i molteplici casi possibili, supponiamo dapprima che la quadrica fondamentale Q sia *reale* e *generale*, e domandiamo come si deve scegliere la quadrica direttrice Q_1 nel sistema confocale per ottenere trasformazioni *reali* delle deformate *reali* di Q. È per ciò necessario e sufficiente che la costruzione del teorema *A*) coordini alle ∞^2 faccette reali f di Q, ∞^3 faccette reali f_1 derivate, per le quali dunque siano reali i centri F_1 ed i piani π_1, e per ciò :1° i piani tangenti π di Q seghino la quadrica confocale Q_1 in coniche C reali, 2° se F è il punto di contatto di π con Q ed F_1 un punto qualunque sulla conica C, per la retta FF_1 debbono passare piani tangenti reali a Q_1. Per la seconda condizione occorre e basta che la quadrica Q_1 sia a punti iperbolici (a generatrici reali), ed in tal caso anche la prima è manifestamente soddisfatta. Così adunque :

Per ottenere dal teorema A) trasformazioni reali delle deformate reali della quadrica Q, *è necessario e sufficiente scegliere la quadrica direttrice* Q_1 *nella famiglia confocale delle quadriche rigate.*

Quando la quadrica Q è generale si ha sempre nel sistema triplo omofocale una serie di rigate ed esistono quindi trasformazioni reali, le quali possono invece mancare se la quadrica diventa di rotazione (V. per più ampie informazioni il § 407). In fine osserveremo che le nostre trasformazioni si scinderanno in due classi, corrispondentemente ai due sistemi di generatrici della quadrica direttrice Q_1. In ogni caso poi, siccome i piani π, π_1

delle due faccette f, f_1 passano per la congiungente FF_1 i loro centri, si avrà che : *la deformata iniziale* S *della quadrica fondamentale e qualunque sua trasformata* S_1 *sono le due falde focali della congruenza rettilinea formata dalle congiungenti i punti* F, F_1 *corrispondenti*. Vedremo poi che una tale congruenza appartiene sempre alla classe delle congruenze W, che abbiamo studiato in generale nel Cap. XVIII.

§ 277.

Deduzione di alcune formole fondamentali.

A base delle nostre ricerche sulla nuova teoria delle trasformazioni porremo alcune formole generali relative ad una superficie qualunque S che, deformandosi, trascina seco invariabilmente legata ad ogni sua faccetta f una faccetta f_1 e la congiungente FF_1 dei centri sia tangente in F alla S.

La S, riferita ad un qualunque sistema coordinato curvilineo (u, v), sia definita intrinsecamente dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \\ \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2, \end{cases}$$

delle quali la prima rimane fissa al deformarsi di S, mentre la seconda varia colla configurazione di S, dovendo i coefficienti D, D′, D″ soddisfare unicamente alle equazioni di Gauss e di Codazzi. Dette x_1, y_1, z_1 le coordinate di F_1, dovrà per ipotesi annullarsi il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

e per ciò potremo assumere x_1, y_1, z_1 date da formole del tipo seguente :

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 = x + l\dfrac{\partial x}{\partial u} + m\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ y_1 = y + l\dfrac{\partial y}{\partial u} + m\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ z_1 = z + l\dfrac{\partial z}{\partial u} + m\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

dove l, m sono determinate funzioni delle variabili u, v. Ora noi facciamo l'osservazione semplice, ma importante pel seguito: *Se la superficie* S *si deforma, trasportando seco invariabilmente i segmenti tangenti* FF_1, *le funzioni* $l = l(u, v)$, $m = m(u, v)$ *nelle* (7) *rimangono invariate, e viceversa.* Calcoliamo infatti la lunghezza δ del tratto FF_1 dalle (7) in

$$\delta^2 = S(x_1 - x)^2 = E\,l^2 + 2\,F\,l\,m + G\,m^2,$$

valore che dovrà intanto rimanere invariato. Ora indichiamo con ω_1, ω_2 gli angoli d'inclinazione di FF_1 sulle direzioni positive delle linee coordinate $v = \text{cost}^{te}$, $u = \text{cost}^{te}$ ed avremo

$$\cos\omega_1 = S\,\frac{x_1 - x}{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{E\,l + F\,m}{\delta\sqrt{E}}$$

$$\cos\omega_2 = S\,\frac{x_1 - x}{\delta}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F\,l + G\,m}{\delta\sqrt{G}},$$

le quali formole mostrano appunto che, rimanendo invariati δ, ω_1, ω_2, tali rimangono anche l, m, e viceversa.

Per ogni configurazione di S il luogo degli estremi F_1 dei segmenti FF_1 sarà una superficie S_1, che potrà ridursi eventualmente ad una linea. (*) Importa calcolare di questa S_1 gli elementi fondamentali, in particolare le derivate di x_1, y_1, z_1 rapporto ad u, v. Per questo basta derivare le (7) con riguardo alle formole fondamentali del § 65 (I pag. 170), e ponendo

$$(8)\quad \begin{cases} L = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} m + 1, & M = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} m \\ P = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} m, & Q = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} l + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} m + 1, \end{cases}$$

i simboli di Christoffel riferendosi alla prima forma (6), avremo per le formole cercate

(*) Questo accadrà quando si annullino i minori di secondo ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = L\dfrac{\partial x}{\partial u} + M\dfrac{\partial x}{\partial v} + (Dl + D'm)\,X \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D''m)\,X, \end{cases}$$

colle analoghe per y_1, z_1

Ora noi pensiamo F_1 come centro di una faccetta f_1, invariabilmente legata col suo piano π_1 alla faccetta $f \equiv (x, y, z\,;\ X, Y, Z)$ di S in ogni deformazione. Indichiamo con X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione della normale al piano π_1 di f_1 e poniamo, come è lecito, (*) X_1, Y_1, Z_1 sotto la forma

$$(10)\quad \begin{cases} X_1 = A\dfrac{\partial x}{\partial u} + B\dfrac{\partial x}{\partial v} + C\,X \\ Y_1 = A\dfrac{\partial y}{\partial u} + B\dfrac{\partial y}{\partial v} + C\,Y \\ Z_1 = A\dfrac{\partial z}{\partial u} + B\dfrac{\partial z}{\partial v} + C\,Z, \end{cases}$$

dove A, B, C sono convenienti funzioni di u, v. Come sopra per le formole (7), così anche qui per le (10), l'ipotesi che la faccetta f_1 sia invariabilmente legata alla f si tradurrà in questo che le funzioni A, B, C di u, v rimangano le stesse al deformarsi della S. Nelle applicazioni di queste formole, che ora andiamo a svolgere, le funzioni l, m; A, B, C conterranno, oltre le variabili u, v, una terza variabile o parametro λ, sicchè a ciascuna faccetta f risulteranno coordinate, in sistema invariabile, ∞^1 faccette f_1.

§ 378.

Prime formole relative al paraboloide iperbolico.

Comincieremo le nostre ricerche sulle deformate delle quadriche da quelle delle quadriche rigate e distingueremo i due casi del paraboloide iperbolico e dell'iperboloide ad una falda; tratteremo nel presente Capitolo il primo caso, ove le formole presentano una maggiore semplicità.

(*) Si ricordi che, riguardando le (10) come equazioni lineari in A, B, C, il determinante dei coefficienti ha il valore $\sqrt{EG - F^2} \neq 0$.

La quadrica fondamentale Q sia il paraboloide (generale) iperbolico, che indicheremo con P_0, e la cui equazione scriveremo nella consueta forma normale

$$\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2\, z_0, \tag{11}$$

ove le costanti *positive* p, q indicano i parametri delle due parabole principali. Riferiamo il paraboloide P_0 alle sue generatrici rettilinee (u, v) (asintotiche) col porre

$$x_0 = \sqrt{p}\,(u + v),\ y_0 = \sqrt{q}\,(u - v),\ z_0 = 2\, u\, v. \tag{12}$$

Nella corrispondente espressione del quadrato dell'elemento lineare

$$ds_0^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

i coefficienti E, F, G hanno i valori

$$\mathrm{E} = p + q + 4\, v^2,\ \mathrm{F} = p - q + 4\, u\, v,\ \mathrm{G} = p + q + 4\, u^2, \tag{13}$$

e se poniamo

$$\mathrm{H} = p\,(u - v)^2 + q\,(u + v)^2 + p\, q, \tag{14}$$

avremo

$$\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2 = 4\,\mathrm{H}. \tag{14*}$$

Calcolando i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale positiva a P_0, abbiamo

$$\mathrm{X}_0 = \frac{\sqrt{q}\,(u + v)}{\sqrt{\mathrm{H}}},\quad \mathrm{Y}_0 = \frac{\sqrt{p}\,(v - u)}{\sqrt{\mathrm{H}}},\quad \mathrm{Z}_0 = -\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

e quindi pei coefficienti D_0, D'_0, D''_0 della seconda forma fondamentale

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}''_0 = 0,\qquad \mathrm{D}'_0 = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \tag{15}$$

La curvatura totale K di P_0 ha così il valore

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{D}_0\,\mathrm{D}''_0 - \mathrm{D}'^2_0}{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} = -\frac{pq}{\mathrm{H}^2},$$

indi colla notazione consueta

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{\rho^2}, \tag{16}$$

risulta

$$\rho = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{pq}}. \tag{16*}$$

Calcolando ancora i valori dei simboli di CHRISTOFFEL, o direttamente dalle (13) o colle formole fondamentali (I pag. 170), troviamo :

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 0,\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial log\,\rho}{\partial v},\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial log\,\rho}{\partial u}. \tag{17}$$

Ed ora scegliamo nella schiera omofocale

$$\frac{x^2}{p - k} - \frac{y^2}{q + k} = 2\, z - k. \tag{18}$$

determinata da P_0, un secondo paraboloide *iperbolico* (§ 376), per la qual cosa converrà dare al parametro k un valore qualunque nell'intervallo $(-q, p)$:

$$-q \leq k \leq p.$$

Indicheremo questo paraboloide omofocale (direttore dell'ordinamento delle faccette) con P_k, ed osserveremo esplicitamente che, mentre intendiamo escluso il valore $k = 0$, pel quale P_k verrebbe a coincidere con P_0, non escludiamo affatto i valori estremi $k = -q$, $k = p$. Per questi valori estremi di k il paraboloide P si riduce rispettivamente al piano $y = 0$, ovvero al piano $x = 0$, ricoperto due volte, o meglio alle regioni di questi piani esterne alle rispettive *parabole focali*

$$y = 0,\quad \frac{x^2}{p + q} = 2\, z + q$$

$$x = 0,\quad \frac{y^2}{p + q} = -2\, z + p.$$

Il piano tangente a P_0 in un punto $\mathrm{F}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ sega P_k in una conica C (in una retta pei valori singolari $k = -q$, $k = p$), ed un punto qualunque $\overline{\mathrm{F}}_0 \equiv (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ di questa conica avrà, secondo le formole (7), coordinate della forma

$$\bar{x}_0 = \sqrt{p}(u + v + l + m),\ \bar{y}_0 = \sqrt{q}(u - v + l - m),\ \bar{z}_0 = 2(uv + vl + um). \tag{19}$$

I coefficienti l, m saranno determinate funzioni di u, v e di un parametro λ che fissa la posizione del punto variabile $\overline{F}_0$ sulla conica C. Assumiamo per parametro λ quello della generatrice variabile, nel primo o nel secondo sistema, del paraboloide direttore P_k. Indicando con p', q' i parametri delle due parabole principali di P_k, cioè ponendo

$$p' = p - k, \quad q' = q + k, \tag{20}$$

saranno p', q' positivi e per le equazioni delle generatrici di P_k avremo:

$$\begin{cases} x = \lambda \sqrt{p'}\left(z - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda} \\ y = \varepsilon \lambda \sqrt{q'}\left(z - \dfrac{k}{2}\right) - \varepsilon \dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda}, \end{cases} \tag{21}$$

nelle quali formole sarà da prendere $\varepsilon = +1$ per le generatrici del primo sistema, $\varepsilon = -1$ per quelle del secondo. Se in queste equazioni poniamo per x, y, z i valori (19) di $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, otteniamo due equazioni lineari per determinare l, m. Risolvendole ne deduciamo

$$l = \frac{U}{W}, \quad m = \frac{V}{W}, \tag{22}$$

dove U, V, W hanno i valori seguenti:

$$\begin{cases} U = 2(\sqrt{qp'} - \varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2 u^2 - 2(\sqrt{pq} - \varepsilon\sqrt{p'q'})\lambda u - \dfrac{k}{2}(\sqrt{qp'} + \\ \qquad + \varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2 + \dfrac{1}{2}(\sqrt{qp'} - \varepsilon\sqrt{pq'}) \\ V = 2(\sqrt{qp'} + \varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2 v^2 - 2(\sqrt{pq} + \varepsilon\sqrt{p'q'})\lambda v - \dfrac{k}{2}(\sqrt{qp'} - \\ \qquad - \varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2 + \dfrac{1}{2}(\sqrt{qp'} + \varepsilon\sqrt{pq'}) \\ W = 2\lambda\{\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}(u+v)\lambda + \varepsilon\sqrt{pq'}(u-v)\lambda\}. \end{cases} \tag{23}$$

Si osserverà che in queste formole si passa dall'un segno di ε all'opposto scambiando u con v.

§ 379.

Dimostrazione di alcune identità ausiliarie.

Nel seguito sarà necessario far uso di alcune identità fra le quantità introdotte, che stabiliamo nel modo seguente.

Se nelle (19) diamo al parametro λ un valore costante, il punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ descrive una generatrice del paraboloide P_k e possiamo applicare le formole generali del § 377, avvertendo che qui la superficie S_1 si contrae nella detta generatrice del paraboloide P_k. A causa delle formole (17), pei valori attuali dei simboli di CHRISTOFFEL, indicando con L_0, M_0, P_0, Q_0 i valori che assumono L, M, P, Q, ove si riguardi λ *come costante*, avremo

$$\begin{cases} L_0 = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial log\rho}{\partial v} m + 1, & M_0 = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial log\rho}{\partial u} m \\ P_0 = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial log\rho}{\partial v} l, & Q_0 = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial log\rho}{\partial u} l + 1. \end{cases} \tag{24}$$

e le equazioni (9) (pag. 277) ci daranno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = L_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + M_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 m X_0 \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = P_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 l X_0, \quad \text{ecc.} \end{cases} \tag{25}$$

Siccome ora il punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ descrive una linea (retta), sussisteranno manifestamente le proporzioni

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} : \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} : \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} : \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} : \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v},$$

cioè per le (25)

$$\frac{L_0}{P_0} = \frac{M_0}{Q_0} = \frac{m}{l},$$

ed abbiamo quindi le identità

$$l L_0 - m P_0 = 0, \quad l M_0 - m Q_0 = 0, \tag{26}$$

come anche

$$l(lM_0 - m L_0) = m(l Q_0 - m P_0). \tag{26*}$$

Ponendo nelle (26) per L_0, P_0, M_0, Q_0 i valori (24), abbiamo

$$l\frac{\partial l}{\partial u} - m\frac{\partial l}{\partial v} + l = 0 \qquad l\frac{\partial m}{\partial u} - m\frac{\partial m}{\partial v} - m = 0.$$

Ora siccome

$$l = \frac{U}{W}, \quad m = \frac{V}{W},$$

mentre U per le (23) è indipendente da v, e V da u, ponendo

$$U' = \frac{\partial U}{\partial u}, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial v},$$

le identità sopra scritte assumono la forma seguente :

$$(27) \qquad \begin{cases} W\,U' - U\frac{\partial W}{\partial u} + V\frac{\partial W}{\partial v} + W^2 = 0 \\ W\,V' + U\frac{\partial W}{\partial u} - V\frac{\partial W}{\partial v} + W^2 = 0, \end{cases}$$

e da queste, sommando, si ha l'altra importante

$$(27^*) \qquad U' + V' + 2\,W = 0,$$

identità che si verificano anche subito coi valori espliciti di U, V, W dati dalle (23).

Un'altra identità, d'importanza fondamentale pel seguito, si ottiene paragonando l'espressione

$$l\,M_0 - m\,L_0 = l\frac{\partial m}{\partial u} - m\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial log\rho}{\partial u}\,l\,m - \frac{1}{2}\frac{\partial log\rho}{\partial v}\,m^2 - m$$

col binomio

$$m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda}.$$

Dividendo il secondo valore pel primo, otteniamo successivamente :

$$\frac{m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda}}{l\,M_0 - m\,L_0} = \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{l}{m}\right)}{\frac{1}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial u}\frac{l}{m} - \frac{1}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l}{m}\right) - \frac{1}{m}} =$$

$$= \rho\frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{U}{V}\right)}{\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{U}{V} - \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\right) - \rho\frac{W}{V}} =$$

$$= \frac{\rho}{V}\frac{U\frac{\partial V}{\partial \lambda} - V\frac{\partial U}{\partial \lambda}}{\rho\,(U' + W) - \frac{U}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{V}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v}}.$$

Ma dalle (23), con breve calcolo, si ottiene l'identità

$$(28) \qquad U\frac{\partial V}{\partial \lambda} - V\frac{\partial U}{\partial \lambda} = k\left\{\rho\,(U' + W) - \frac{U}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{V}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right\},$$

e la formola sopra calcolata diventa

$$\frac{m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda}}{l\,M_0 - m\,L_0} = \frac{k\rho}{V},$$

onde, paragonando colla (26*), risulta la doppia identità cercata :

$$(29) \qquad m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda} = \frac{k\rho}{V}(l\,M_0 - m\,L_0) = \frac{k\rho}{U}(l\,Q_0 - m\,P_0).$$

§ 380.

Orientamento delle faccette f_1.

Secondo le indicazioni del § 376, coordiniamo ora a ciascuna faccetta $f \equiv (x_0, y_0, z_0\,;\ X_0, Y_0, Z_0)$ del paraboloide P_0 una semplice infinità di faccette f_1 le coordinate x_0, y_0, z_0 del cui centro sono date dalle formole (19), e i cui piani π_1 passano per la congiungente i centri (x_0, y_0, z_0), $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$

e per la generatrice λ del paraboloide. Ponendo i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale a π_1 sotto la forma (10), dovremo calcolare i coefficienti A, B, C nelle formole

$$X_1 = A\frac{\partial x_0}{\partial u} + B\frac{\partial x_0}{\partial v} + C X_0$$

colle due analoghe. Ora i coseni di direzione della congiungente i centri delle faccette sono proporzionali alle differenze

$$\bar{x}_0 - x_0 = l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

mentre quelli della generatrice λ del paraboloide sono proporzionali a

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = L_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\frac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 m X_0$$

e alle due analoghe. Basterà dunque calcolare tre valori proporzionali ad A, B, C dalle due condizioni

$$S X_1 (\bar{x}_0 - x_0) = 0, \quad S X_1\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = 0,$$

che per le precedenti dànno:

$$\begin{cases} (El + Fm) A + (Fl + Gm) B = 0 \\ (EL_0 + F M_0) A + (FL_0 + G M_0) B + CD'_0 m = 0 \end{cases}$$

Da queste abbiamo:

$$A : B : C :: D'_0 m (Fl + Gm) : -D'_0 m (El + Fm) : (EG - F^2)(lM_0 - mL_0).$$

e siccome (pag. 278)

$$E G - F^2 = 4 H, \quad D'_0 = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}},$$

indicando con R un fattore di proporzionalità, avremo:

$$(30) \qquad A = -R(Fl + Gm), \quad B = R(El + Fm), \quad C = R\frac{2H^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{pq}}(lM_0 - m L_0).$$

Il valore di C si può anche scrivere (pag. 279 e 281)

$$(30^*) \qquad C = 2 R\sqrt{H}\frac{\rho}{m}(l M_0 - m L_0) = 2 R\sqrt{H}\frac{\rho}{l}(l Q_0 - m P_0)$$

e per calcolare R^2 abbiamo la condizione

$$S X_1^2 = 1,$$

cioè

$$E A^2 + 2 F A B + G B^2 + C^2 = 1$$

Ma dalle (30)

$$E A^2 + 2 F A B + G B^2 = R^2 (E G - F^2)(E l^2 + 2 F lm + G m^2),$$

e siccome

$$El^2 + 2F lm + Gm^2 = S(\bar{x}_0 - x_0)^2$$

dà il quadrato δ^2 della distanza dei due centri delle faccette, otteniamo

$$R^2 = \frac{1}{4 H\left\{\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l M_0 - m L_0)^2\right\}}.$$

Se infine indichiamo con Ω l'angolo d'inclinazione dei piani delle due faccette f, f_1 abbiamo

$$\cos\Omega = C = \frac{\frac{\rho}{m}(l M_0 - m L_0)}{\sqrt{\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l M_0 - m L_0)^2}},$$

formola a cui si può dare la forma equivalente

$$(31) \qquad \frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = E l^2 + 2 F l m + G m^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l M_0 - m L_0)^2.$$

§ 381.

Equazioni differenziali fondamentali per la funzione $\lambda = \lambda(u, v)$.

Dopo tutti questi preparativi noi andiamo ora a dimostrare, per le deformate S del paraboloide iperbolico, la *prima parte* del teorema generale *A*) enunciato al § 376 per le quadriche in generale. Supponiamo adunque

che il paraboloide P_0 assuma, deformandosi, una configurazione qualunque S, ed in questa deformazione ciascuna faccetta f di P_0 trascini seco, invabilmente, le ∞^1 faccette f_1 coordinate ad f. Si tratterà di provare che, anche dopo la deformazione, le ∞^3 faccette f_1 formano una moltiplicità stratificabile (§ 374), e di trovare la legge di ordinamento delle faccette f_1 nella serie ∞^1 di superficie trasformate S_1.

La deformata S del paraboloide P_0 sarà individuata dalle sue due forme quadratiche fondamentali, delle quali la prima coincide col ds_0^2 del § 378, formole (13), e i coefficienti D, D′, D″ della seconda debbono unicamente soddisfare all' equazione di GAUSS e alle due equazioni di CODAZZI, La prima è

$$\text{(32)} \qquad D\,D'' - D'^2 = -D_0'^2 = -\frac{4\,pq}{H},$$

e quanto alle equazioni di CODAZZI ci converrà qui assumerle sotto la seconda forma del § 67 (I pag. 176) che avuto riguardo alla (14*) ed ai valori (17) dei simboli di CHRISTOFFEL, è la seguente

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{H}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{H}}\right) = \dfrac{\partial\, log\, \rho}{\partial u}\cdot\dfrac{D'}{\sqrt{H}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{H}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{H}}\right) = \dfrac{\partial\, log\, \rho}{\partial v}\cdot\dfrac{D'}{\sqrt{H}}. \end{cases}$$

Secondo il § 377 (pag. 275), dopo la deformazione del paraboloide P_0 nella S, le oordinate x_1, y_1, z_1 del centro della faccetta f_1 sono

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

dove l, m hanno i valori assegnati dalle formole (22), (23) pag. 280 e i coseni di direzione della normale al piano di f_1 sono

$$X_1 = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + C\,X \text{ ecc.}$$

avendo A, B, C i valori (30). Queste cinque quantità l, m ; A, B, C sono funzioni note di u, v, λ e al variare di u, v, λ la faccetta

$$f_1 \equiv (x_1, y_1, z_1 ;\ X_1, Y_1, Z_1)$$

descrive la moltiplicità ∞^3, che dobbiamo verificare essere stratificabile. Per questo, secondo il § 374, dobbiamo riguardare λ come funzione incognita di u, v (*) da determinarsi in guisa che risultino soddisfatte le condizioni.

$$\text{(34)} \qquad S\,X_1\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,\ S\,X_1\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

Calcoliamo in primo luogo, secondo le (9) pag. 277, le derivate rapporto ad u, v di x_1, y_1, z_1 osservando che l, m contengono u, v non solo esplicitamente, ma anche implicitamente in $\lambda = \lambda(u, v)$. Paragonando dunque i valori (8) di L, M, P, Q con quelli (24) di L_0, P_0, Q_0 abbiamo :

$$\begin{cases} L = L_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad M = M_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} \\ P = P_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad Q = Q_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}, \end{cases}$$

e le (9) ci dànno quindi

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = L_0\dfrac{\partial x}{\partial u} + M_0\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + (D\,l + D'm)\,X \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = P_0\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q_0\dfrac{\partial x}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + (D'l + D''m)\,X. \end{cases}$$

Dopo ciò, formando le (34), troviamo :

$$\begin{cases} \left\{(EA+FB)\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} + (FA+GB)\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \left\{(EA+FB)L_0 + (FA+GB)M_0\right\} + (D\,l + D'm)C = 0 \\ \left\{(EA+FB)\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} + (FA+GB)\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \left\{(EA+FB)P_0 + (FA+GB)Q_0\right\} + (D'l + D''m)C = 0, \end{cases}$$

e siccome per le (30)

$$\begin{cases} E\,A + F\,B = -\,Rm\,(E\,G - F^2) = -4\,R\,H\,m \\ F\,A + G\,B = \quad R\,l\,(E\,G - F^2) = \quad 4\,R\,H\,l, \end{cases}$$

(*) Con ciò escludiamo le moltiplicità ∞^2 di faccette f_1 date da $v = \text{cost}^{te}$, o $u = \text{cost}^{te}$, che in effetto non soddisfano alla questione.

sostituendo per C il valore (30*) rimane

$$\left(m\frac{\partial l}{\partial\lambda}-l\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}=l\,\mathrm{M}_0-m\,\mathrm{L}_0+\frac{\rho}{2m\sqrt{\mathrm{H}}}(l\,\mathrm{M}_0-m\,\mathrm{L}_0)(\mathrm{D}\,l+\mathrm{D}'\,m)$$

$$\left(m\frac{\partial l}{\partial\lambda}-l\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v}=l\,\mathrm{Q}_0-m\,\mathrm{P}_0+\frac{\rho}{2\,l\sqrt{\mathrm{H}}}(l\,\mathrm{Q}_0-m\,\mathrm{P}_0)(\mathrm{D}'l+\mathrm{D}''\,m).$$

In fine, a causa delle identità (29) pag. 283, queste si semplificano nelle seguenti

$$\text{(I)}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{\mathrm{V}}{k\rho}+\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\mathrm{U}}{k\rho}+\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right),\end{cases}$$

che sono le equazioni differenziali caratteristiche pel nostro problema. Ad ogni loro soluzione λ corrisponde una superficie S_1 costituita da ∞^2 faccette f_1, e tutto si riduce a provare *l'illimitata integrabilità* del sistema (I) (C*f.* § 374).

Osserviamo che le (I) possono scriversi come un' equazione ai differenziali totali per λ:

$$\text{(I*)}\quad d\lambda=\frac{1}{k\rho}(\mathrm{V}du+\mathrm{U}dv)+\frac{1}{2k}\left\{\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)du+\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)dv\right\}$$

e siccome, secondo le (23), U e V sono polinomi di secondo grado in λ, questa è un'equazione del *tipo di* RICCATI.

§ 382.

Illimitata integrabilità del sistema (I). — Trasformazioni B_k.

Per dimostrare che le (I) costituiscono un sistema completamente integrabile calcoliamo l'espressione

$$\Theta=\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\mathrm{V}}{\rho}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\mathrm{U}}{\rho}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}$$

e dimostriamo che, in forza delle (I) stesse, si ha identicamente $\Theta=0$.

Eseguiamo le derivazioni nel secondo membro, ricordando che λ entra soltanto in U, V, e sostituendo per le derivate di λ rapporto ad u, v i valori (I) stessi troveremo:

$$=\frac{\mathrm{V}'-\mathrm{U}'}{\rho}-\frac{\mathrm{V}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{\mathrm{U}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\mathrm{U}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)\right\}-\frac{\mathrm{V}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)\right\}+$$

$$\frac{\mathrm{D}'}{2\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}'-\mathrm{U}')+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\left\{\frac{\mathrm{U}}{k\rho}+\frac{1}{2k}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}\left\{\frac{\mathrm{V}}{k\rho}+\frac{1}{2k}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}+\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\right)\left\{\frac{\mathrm{U}}{k\rho}+\frac{1}{2k}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}+\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\right)\left\{\frac{\mathrm{V}}{k\rho}+\frac{1}{2k}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{U}+\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\mathrm{V}\right)\right\}.$$

Ora semplifichiamo il secondo membro sostituendo in primo luogo ai binomii

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right),\quad\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}}\right)$$

i loro valori tratti dalle equazioni (33) di CODAZZI

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}},\quad\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

e in secondo luogo modifichiamo gli ultimi termini ove viene a comparire il determinante

$$\frac{1}{4k\,\mathrm{H}}\begin{vmatrix}\mathrm{D}\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}+\mathrm{D}'\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}, & \mathrm{D}'\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}+\mathrm{D}''\dfrac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\\ \mathrm{D}\,\mathrm{U}+\mathrm{D}'\,\mathrm{V}, & \mathrm{D}'\,\mathrm{U}+\mathrm{D}''\,\mathrm{V}\end{vmatrix}=\frac{1}{4k\,\mathrm{H}}(\mathrm{D}\,\mathrm{D}''-\mathrm{D}'^2)\left(\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}-\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}\right),$$

che per l'equazione (32) di GAUSS eguaglia

$$\frac{p\,q}{k\,\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\lambda}-\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda}\right).$$

Il secondo membro della espressione di Θ risulta così un'espressione lineare intera in D, D', D'', diciamo

$$\Theta=\alpha\,\mathrm{D}+\beta\,\mathrm{D}'+\gamma\,\mathrm{D}''+\delta.$$

Ma troviamo subito che si ha

$$\alpha = \gamma = 0,$$

e inoltre (ricordando che $\rho = \frac{H}{\sqrt{pq}}$):

$$2\sqrt{H}\,\beta = \rho\,\delta = V' - U' + U\frac{\partial log\,\rho}{\partial u} - V\frac{\partial log\,\rho}{\partial v} + \frac{2}{k\rho}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda} - V\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right),$$

od anche per l'identità (28)

$$2\sqrt{H}\,\beta = \rho\,\delta = V' - U' + 2\,(U' + W) = U' + V' + 2\,W,$$

onde per la (27*) sono nulli anche β e δ. Così in effetto la condizione d'integrabilità $\Theta = 0$ è soddisfatta, ed il sistema (I) è dunque illimitatamente integrabile, c. d. d.

Abbiamo per tal modo verificato che per le deformate del paraboloide iperbolico sussiste intanto la prima parte del teorema *A*) § 376, cioè le ∞^3 faccette f_1 formano, in tutte le configurazioni, una moltiplicità stratificabile.

La seconda ed essenziale parte di questo teorema, che cioè ciascuna delle ∞^1 superficie S_1 in cui si distribuiscono le ∞^3 faccette f_1 è applicabile sul paraboloide stesso richiede ulteriori sviluppi di calcolo che differiamo ai prossimi paragrafi. Qui, introducendo subito una notazione da conservarsi nel seguito, diremo che ciascuna di queste superficie S_1 è derivata dalla deformata S del paraboloide con una *trasformazione* B_k, dove poniamo così in evidenza il valore del parametro k che fissa il paraboloide omofocale P_k distributore dell' ordinamento delle faccette. Per quanto abbiamo già detto al § 376, ciascuna di queste trasformate S_1 forma colla S le due falde focali di una congruenza W, generata dalle congiungenti i punti corrispondenti.

Dalla circostanza osservata che l'equazione differenziale (I*) per λ è un'equazione di RICCATI, e quindi il birapporto di quattro soluzioni particolari qualunque $(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4)$ è costante, possiamo trarre una notevole conseguenza geometrica. In ogni piano tangente π di S il luogo dei centri delle faccette f_1 è una conica C_k *associata* alla trasformazione B_k, le cui equazioni parametriche per la corrispondente coppia fissa di valori di u, v

sono appunto le

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

ed il parametro λ, contenuto razionalmente al secondo grado in x_1, y_1, z_1, è il *parametro di razionalità* sulla conica C_k. Il birapporto $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ è quindi quello dei quattro punti corrispondenti sulla conica onde il teorema :

Quattro qualunque delle superficie S_1, *derivate dalla deformata* S *del paraboloide per una trasformazione* B_k, *segano le* ∞^2 *coniche* C_k *associate, nei piani tangenti di* S, *in gruppi di quattro punti di egual birapporto.*

Sotto forma più concisa possiamo dire : *Le* ∞^1 *superficie* S_1 *derivate da* S *con una* B_k *segano proiettivamente le* ∞^2 *coniche associate* C_k.

§ 383.

Le trasformazioni B_k per le deformate rigate del paraboloide.

Consideriamo ora il caso particolare che la deformata iniziale S del paraboloide P_0 sia una rigata R, le cui generatrici corrisponderanno dunque, nell'applicabilità, alle generatrici di un sistema di P_0, poniamo p. e. alle $v = \text{cost}^{te}$ e saranno con queste concordanti in senso.

Siccome sopra R le linee $v = \text{cost}^{te}$ sono asintotiche, avremo $D = 0$ indi per l'equazione di GAUSS $D'^2 = D'^2_0$, e per ciò, avendo le generatrici $v = \text{cost}^{te}$ sopra R e P_0 il medesimo senso, avremo

$$D' = D'_0 = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}.$$

La seconda equazione di CODAZZI (33) § 381 si riduce alla

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{H}}\right) = 0,$$

e integrando abbiamo

$$D'' = 2\sqrt{H}\,.\,\varphi\,(v),$$

dove $\varphi\,(v)$ indica una funzione arbitraria della sola v, che dipende dalla speciale deformata rigata R del paraboloide e la individua. Se ora poniamo gli attuali valori

$$D = 0 \ , \quad D' = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}, \quad D'' = 2\sqrt{H}\,\varphi(v)$$

nelle equazioni differenziali (I) pag. 288 per λ, siccome

$$\frac{D'}{2\sqrt{H}} = -\frac{\sqrt{pq}}{H} = -\frac{1}{\rho},$$

queste si riducono alle due

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\varphi(v)}{k}. \quad V.$$

Dunque λ è una funzione di v soltanto che viene determinata dall'equazione differenziale del tipo di RICCATI:

$$(II) \qquad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\Big\{2(\sqrt{qp'}+\varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2v^2 - 2(\sqrt{pq}+\varepsilon\sqrt{p'q'})\lambda v - \\ -\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-\varepsilon\sqrt{pq'})\lambda^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+\varepsilon\sqrt{pq'})\Big\}.$$

Ora dimostriamo che nel caso attuale le linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$ sono rette anche sulle superficie trasformate S_1, che saranno dunque delle rigate R_1. Se fissiamo una qualunque generatrice $v = \text{cost}^{\text{te}}$ sopra P_0, possiamo portare con un movimento rigido il paraboloide P_0 a toccare lungo tutta la corrispondente generatrice la rigata R (§ 321). Ma se nelle equazioni (§ 380).

$$\bar{x}_0 = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

diamo a v il valore considerato, indi anche a $\lambda(v)$ il corrispondente valore fisso, queste sono le equazioni parametriche della generatrice λ del paraboloide omofocale P_k. Per ciò le equazioni (§ 380)

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{ecc.}$$

definiscono parametricamente la retta nella quale si trasporta la generatrice λ di P_k dopo il detto movimento, onde segue appunto che, sulle superficie trasformate S_1, le linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$ sono ancora rette; cioè: *Da ogni deformata rigata* R *del paraboloide le trasformazioni* B_k *fanno nascere altrettante deformate rigate* R_1.

Proseguendo queste considerazioni geometriche, osserviamo che se si fa ora variare la generatrice v sul paraboloide P_0, questo viene a rotolare, nel senso del § 321, sulla rigata applicabile R e le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) del paraboloide omofocale P_k trascinato nel rotolamento descrivono una congruenza rettilinea Γ, entro la quale sono contenute le generatrici delle rigate trasformate R_1. La decomposizione della congruenza Γ nelle rigate R_1 di stratificazione è perfettamente determinata, come anche la corrispondenza dei punti F, F_1 sopra R, R_1 per la condizione che a ciascun punto F di una generatrice r di R corrisponde quel punto F_1 di r_1, in cui questa viene incontrata dal piano tangente in F alla R.

Ciascuna R_1 forma colla R le due falde focali della congruenza rettilinea FF_1 delle congiungenti i punti corrispondenti, come già si è osservato in generale alla fine del § 376. Ma nel caso attuale possiamo di più subito constatare che si tratta di una *congruenza* W, poichè già sopra R, R_1 si corrispondono le asintotiche rettilinee, e per ciò anche le curvilinee:

Riassumiamo questi risultati nel teorema:

B) Se il paraboloide iperbolico P_0 *rotola sopra una qualunque rigata* R *applicabile trascinando seco, in sistema invariabile, un paraboloide iperbolico omofocale* P_k, *le generatrici (dell'uno e dell'altro sistema) di* P_k *descrivono una congruenza* Γ *che è decomponibile in un sol modo in* ∞^1 *rigate* R_1, *ciascuna delle quali forma con* R *le due falde focali di una congruenza rettilinea* W. *Queste* ∞^1 *rigate* R_1 *sono appunto le superficie* S_1 *dedotte dalla* R *colla trasformazione* B_k.

Ed aggiungiamo, anticipando sui risultati dei prossimi paragrafi, che tutte queste rigate R_1 sono, come la R, applicabili sul paraboloide P_0.

§ 384

Le trasformazioni singolari B_{-q}, B_p, B_0.

Si è già detto (§ 378) che le nostre deduzioni conservano il loro valore anche se la costante k (dapprima con esclusione di $k = 0$) raggiunge nell'intervallo $(-q, p)$ i valori estremi

$$k = -q, \quad k = p$$

Allora, annullandosi q' ovvero p', le due serie di generatrici del paraboloide omofocale P_k vengono a coincidere nelle tangenti dell'una o dell'al-

tra parabola focale, mentre tutte le nostre formole, in particolare le equazioni differenziali (I) pag. 288, conservano un preciso significato. Esistono quindi anche le trasformazioni corrispondenti a questi valori estremi di k, solo che ogni volta le due serie di trasformazioni coincidono in una sola; le diremo le *trasformazioni singolari* B_{-q}, B_p, come corrispondenti ad un paraboloide direttore B_k ridotto all'una o all'altra parabola focale.

Se consideriamo in particolare il caso di una deformata rigata R del paboloide, vediamo che nulla è da cambiare al teorema della fine del paragrafo precedente, quando al paraboloide omofocale P_k e ai suoi due sistemi di generatrici si sostituisca l'una o l'altra parabola focale colle sue tangenti, trascinata in sistema rigido dal rotolamento del paraboloide P_0 sopra R. Se consideriamo p. e. la trasformazione singolare B_{-q}, avendosi qui $q' = 0$, $p' = p + q$ l'equazione differenziale (II) diventa

$$(36)\quad \frac{d\lambda}{dv} + \varphi(v)\left\{\left[2\sqrt{\frac{p+q}{q}}v^2 + \frac{1}{2}\sqrt{q(p+q)}\right]\lambda^2 + 2\sqrt{\frac{p}{q}}\lambda v + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+q}{q}}\right\},$$

e questa stabilisce la legge secondo cui deve prendersi, da ciascuna posizione della parabola focale, una tangente per formare una rigata R_1 trasformata di R mediante la B_{-q}. La proprietà che il birapporto $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ di quattro soluzioni particolari della (36) è costante riceve qui l'interpretazione geometrica seguente :

Sopra quattro qualunque delle rigate R_1 *trasformate, quattro generatrici corrispondenti sono tangenti ad una medesima posizione della parabola focale, e formano un birapporto costante.*

Ma consideriamo ancora il caso, fin qui escluso, di $k=0$, nel quale il paraboloide P_k coincide con P_0 e le due congruenze rettilinee $\Gamma, \overline{\Gamma}$ della costruzione nel teorema al paragrafo precedente sono quelle generate dalle rette dal primo o secondo sistema del paraboloide stesso P_0 che rotola sulla deformata rigata R. Si conserva ancora in tal caso la proprietà essenziale di queste congruenze *di decomporsi in* ∞^1 *rigate* R_1 *applicabili sul paraboloide* P_0. Per la congruenza Γ generata dalle rette stesse $v = \text{cost}^{te}$ di P_0 ciò è evidente, perchè appunto le ∞^1 posizioni assunti da P_0 costituiscono le rigate R_1 in discorso, congruenti in questo caso con P_0 stessa. Per la seconda congruenza $\overline{\Gamma}$ generata dalle rette $u=\text{cost}^{te}$ di P_0 si osservi che, per ogni posizione di P_0, esse sono le tangenti nei punti della generatrice $v = \text{cost}^{te}$ di contatto fra P_0 e R alle geodetiche di R trasformate delle $u=\text{cost}^{te}$, sicchè la congruenza $\overline{\Gamma}$ è la congruenza (normale) formata dalle tangenti a queste

geodetiche di R. Ma allora secondo il teorema di CHIEFFI (§ 153), se associamo le dette tangenti lungo le asintotiche curvilinee di R, otteniamo la congruenza $\overline{\Gamma}$ decomposta in ∞^1 rigate R_1 tutte applicabili sopra il paraboloide P_0. Ma appunto la medesima decomposizione viene stabilita in questo caso, come andiamo a verificare, dalla equazione differenziale generale (II), solo che si valuti esattamente l'espressione del secondo membro. Qui dobbiamo prendere $\varepsilon = -1$, ed allora i suoi coefficienti

$$\frac{\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'}}{k} = \frac{\sqrt{q(p-k)} - \sqrt{p(q+k)}}{k}$$

$$\frac{\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'}}{k} = \frac{\sqrt{pq} - \sqrt{(p-k)(q+k)}}{k}$$

si presentano, al limite per $k = 0$, sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma un calcolo elementare dà subito

$$\lim_{k=0} \frac{\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'}}{k} = -\frac{p+q}{\sqrt{2pq}}$$

$$\lim_{k=0} \frac{\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'}}{k} = \frac{q-p}{2\sqrt{pq}}.$$

Così l'equazione (II) di RICCATI, al limite per $k = 0$, diventa

$$\frac{d\lambda}{\partial v} = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{pq}}\left\{(p-q)\lambda v - [(p+q)v^2 + pq]\lambda^2 - \frac{1}{4}(p+q)\right\}.$$

Ora le formole (21) (pag. 280), ove si ponga $\varepsilon = 1$, $k = 0$, paragonate colle (12), dànno $u = \frac{1}{2\lambda}$ e la precedente si scrive

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2\sqrt{pq}}\left\{p(u-v)^2 + q(u+)v^2 + pq\right\} = \frac{\varphi(v)}{2\sqrt{pq}}\,\mathrm{H},$$

ovvero, essendo $\mathrm{D}' = -\frac{2\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}}$, $\mathrm{D}'' = 2\varphi(v)\sqrt{\mathrm{H}}$ (pag. 291),

$$2\,\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv = 0,$$

che è precisamente l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee di R. La decomposizione nelle rigate R_1 è dunque la stessa di quella fornita dal teorema di CHIEFFI, c. d. d.

§ 385.

Calcolo del ds_1^2 delle superficie trasformate S.

Riprendiamo, per una deformata generale S del paraboloide, la considerazione delle ∞^1 superficie S_1 dedotte colla trasformazione B_k per stabilire la proprietà di capitale importanza, enunciata nella seconda parte del teorema A) § 376, che : *ciascuna superficie trasformata* S_1 *è applicabile sul paraboloide* P_0.

Per questo occorre calcolare il ds_1^2 della S_1 e poi dimostrare che esso è trasformabile nel ds^2, del paraboloide P_0. Ritorniamo per ciò alle (35) pag. 287 e calcoliamo i coefficienti E_1, F_1, G_1 in

$$ds_1^2 = S\,dx_1^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Troviamo in primo luogo :

$$(37)\quad \begin{cases} E_1 = EL_0^2 + 2FL_0M_0 + GM_0^2 + 2\left\{(EL_0 + FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda} + (F_0 + GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} + \\ \qquad + \left\{E\left(\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2 + 2F\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\dfrac{\partial m}{\partial\lambda} + G\left(\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + (Dl + D'm)^2 \\ F_1 = EL_0P_0 + F(L_0Q_0 + M_0P_0) + GM_0Q_0 + \left\{(EP_0 + FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} + \\ \qquad + \left\{(EL_0 + FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda} + (FL_0 + GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + \left\{E\left(\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2 + 2F\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\dfrac{\partial m}{\partial\lambda} + \right. \\ \qquad \left. + G\left(\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + (Dl + D'm)(D'l + D''m) \\ G_1 = EP_0^2 + 2FP_0Q_0 + GQ_0^2 + 2\left\{(EP_0 + FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda} + (FP_0 + GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + \\ \qquad + \left\{E\left(\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2 + 2F\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}\dfrac{\partial m}{\partial\lambda} + G\left(\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + (D'l + D''m)^2. \end{cases}$$

Per semplificare i calcoli noi consideriamo in queste equazioni il caso particolare che la deformata S coincida col paraboloide stesso P_0 e si abbia quindi :

$$D = 0,\quad D' = D'_0,\quad D'' = 0,\quad \varphi(v) = 0,$$

onde per la (II)

$$\frac{d\lambda}{dv} = 0,\quad \text{cioè } \lambda = \text{cost}^{te}$$

ciò che significa il contrarsi delle trasformate S_1 alle singole generatrici di P_k, come era prevedibile geometricamente dal § 376. Indicando con

$$x_0,\ y_0,\ z_0\ ;\ X_0,\ Y_0,\ Z_0\ ;\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0\ ;\ E_0,\ F_0,\ G_0$$

i valori attuali per le rispettive quantità

$$x,\ y,\ z\ ;\ X,\ Y,\ Z\ ;\ x_1,\ y_1,\ z_1\ ;\ E_1,\ F_1,\ G_1,$$

abbiamo in primo luogo

$$(38)\qquad \bar{x}_0 = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v},\quad \text{ecc.}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} = L_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0\,m\,X_0 \\ \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial v} = P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D_{/0}\,C\,X_0,\quad \text{ecc.} \end{cases}$$

e conseguentemente per le (37) :

$$(40)\quad \begin{cases} E\,L_0^2 + 2\,F\,L_0\,M_0 + G\,M_0^2 = E_0 - D'^2_0\,m^2 \\ E\,L_0\,P_0 + F(L_0\,Q_0 + M_0\,P_0) + G\,M_0\,Q_0 = F_0 - D'^2_0\,l\,m \\ E\,P_0^2 + 2\,F\,P_0\,Q_0 + G\,Q_0^2 = G_0 - D'^2_0\,l^2. \end{cases}$$

Ora, come al § 378, abbiamo per $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ le formole

$$(41)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 = \lambda\sqrt{p'}\left(\bar{z}_0 - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda} \\ \bar{y}_0 = \varepsilon\sqrt{q'}\left(\bar{z}_0 - \dfrac{k}{2}\right) - \varepsilon\dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda}, \end{cases}$$

le quali, derivate parzialmente rispetto ad u, v (per λ costante), dànno

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} = \lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u},\quad \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial v} = \lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial u} = \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial u},\quad \dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v} = \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial v} \end{cases}$$

Ora, se dalle (39) formiamo le somme

$$S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u},\quad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u},\quad S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v},\quad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v},$$

otteniamo ordinatamente

$$(43)\quad \begin{cases} E\,L_0 + F\,M_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \lambda\varepsilon\sqrt{q'}\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right\} \\ F\,L_0 + G\,M_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \lambda\varepsilon\sqrt{q'}\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right\} \end{cases}$$

$$(43^*)\quad \begin{cases} E\,P_0 + F\,Q_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right\} \\ F\,P_0 + G\,Q_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right\}. \end{cases}$$

Se d'altra parte deriviamo le (38) rapporto a λ, che nei secondi membri entra soltanto in l, m, segue

$$(44)\qquad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \text{ecc.},$$

e moltiplicando in ciascuna coppia di equazioni (43), (43*), la prima per $\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}$, la seconda per $\dfrac{\partial m}{\partial \lambda}$ e sommando risulta

$$(45)\quad \begin{cases} (EL_0+FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} + (FL_0+GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\} \\ (EP_0+FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} + (FP_0+GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\}. \end{cases}$$

In fine quadrando e sommando le (44), viene

$$(46)\qquad E\left(\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial l}{\partial \lambda} + G\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2,$$

e colle equazioni così stabilite le (37) si mutano nelle seguenti:

$$(47)\quad \begin{cases} E_1 = E_0 + 2\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\}\dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + (Dl + D'm)^2 - D_0'^2 m^2 \\ F_1 = F_0 + \left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\}\cdot\left\{\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right\} + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + (Dl + D'm)(D'l + D''m) - D_0'^2 lm \\ G_1 = G_0 + 2\left\{\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \varepsilon\lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\}\cdot\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + (D'l + D''m)^2 - D_0'^2 l^2. \end{cases}$$

Se in queste per $\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}, \dfrac{\partial \lambda}{\partial v}$ poniamo i valori tratti dall'equazioni differenziali (I) pag. 288 abbiamo così formati tutti gli elementi pel calcolo del ds_1^2, delle superficie S_1 trasformate.

§ 386.

L'affinità d'Ivory e le formole d'applicabilità.

Dobbiamo ora dimostrare che il ds_1^2, così calcolato, è trasformabile in quello del paraboloide P_0, ad ogni punto (u, v) di S_1 corrispondendo, nell'applicabilità, un determinato punto (u_1, v_1) di P_0. Converrà dunque verificare che si ha anche

$$ds_1^2 = \overline{ds}_1^2 = \overline{E}_1\,du_1^2 + 2\,\overline{F}\,du_1\,dv_1 + \overline{G}\,dv_1^2,$$

dove $\overline{E}_1, \overline{F}_1, \overline{G}_1$ hanno (pag. 278) i valori

$$(47^*)\qquad \overline{E}_1 = p + q + 4\,v_1^2,\ F_1 = p - q + 4\,u_1\,v_1\ G_1 = p + q + 4\,u_1^2,$$

ed u_1, v_1 sono determinate funzioni di u, v.

Se volessimo qui applicare i criteri generali per l'equivalenza dei due ds^2 (I § 122), ci troveremmo davanti a calcoli assai laboriosi, specialmente per la circostanza che E_1, F_1, G_1 contengono le quantità $D_1\ D'_1\ D''$ assog-

gettate solo a soddisfare le equazioni di GAUSS e CODAZZI, e dipendenti quindi da (due) funzioni arbitrarie. Oltre a ciò, noi vogliamo non soltanto stabilire le relative formole d'applicabilità

$$u_1 = u_1(u, v), \quad v_1 = v_1(u, v),$$

ma anche assegnarne un notevole significato geometrico di fondamentale importanza per tutta questa teoria delle trasformazioni B_k.

Per questo ci lascieremo guidare da un'induzione geometrica che ci condurrà, come poi verificheremo, allo scopo. Consideriamo la congruenza FF_1 colle due falde focali S, S_1 e distendiamo S sul paraboloide fondamentale P_0. Il segmento FF_1, trasportato nella deformazione, riuscirà nel suo primo estremo (F) tangente in un punto M_0 al paraboloide P_0 e sarà terminato nel secondo (F_1) in un punto $\overline{M}_0$ del paraboloide omofocale P_k ; così ad ogni punto F_1 di S_1 viene a corrispondere un punto $\overline{M}_0$ di P_k. Ora se S_1 è effettivamente applicabile su P_0, come vogliamo dimostrare, distendendo S_1 sopra P_0 lo stesso punto F_1 verrà a cadere in un determinato punto M_1 di P_0, (*) e per trovare le formole di applicabilità basterà dunque riconoscere la legge di corrispondenza dei punti M_1 ed $\overline{M}_0$ sulle due quadriche omofocali P_0, P_k.

A questo punto osserviamo che la geometria offre una corrispondenza per così dire naturale fra i punti di due quadriche omofocali, quella stabilita fra le superficie dalle trajettorie ortogonali della serie a cui appartengono. Questa corrispondenza, come è ben noto, (**) è una projettività anzi un' affinità, che indichiamo come l'*affinità d'*IVORY, dal nome del geometra che primo la osservò in ricerche che dovremo utilizzare ancora in seguito.

Nel presente caso dei paraboloidi omofocali

$$P_0) \quad \frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2 z_0$$

$$P_k) \quad \frac{x^2}{p'} - \frac{y^2}{q'} = 2 z - k$$

(*) Propriamente l'applicabilità di S_1 su P_0 è determinata solo a meno di un'applicabilità di P_0 sopra sè stesso. Queste sono soltanto quattro (l'identità compresa) e formano il gruppo quadrinomio

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = v \end{cases} \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -u \\ v' = -v \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -v \\ v' = -u \end{cases}$$

(**) VI Enzyklopädie Bd. III_2, Heft 2, N° 62.

le formole dell'affinità d'IVORY si scrivono

$$\frac{x}{\sqrt{p'}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}}, \quad \frac{y}{\sqrt{q'}} = \frac{y_0}{\sqrt{q}}, \quad z = z_0 + \frac{k}{2}.$$

Ora noi dimostriamo il teorema :

La legge di applicabilità delle due superficie S, S_1 *è data dall' affinità d'* IVORY *fra i due paraboloidi omofocali* P_0, P_k.

La favorevole circostanza contenuta in questa semplice legge, che vedremo ripetersi per le deformate di tutte le specie di quadriche, è quella che conferisce alla teoria delle trasformazioni B_k una relativa semplicità.

Restando per ora al caso attuale, indicheremo con x_0, y_0, z_0 le coordinate di M_0, con $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ quelle di $\overline{M}_0$ e varranno allora le precedenti (38) e (41). Indichiamo poi con ξ, η, ζ le coordinate del punto M_1 di P_0 che corrisponde, nell'affinità d'IVORY ad M_0, onde sarà secondo le formole sopra scritte

$$(48) \qquad \frac{\xi}{\sqrt{p}} = \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{q}} = \frac{\bar{y}_0}{\sqrt{q'}}, \quad \zeta = \bar{z}_0 - \frac{k}{2},$$

indi

$$(48^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\sqrt{p}} = \lambda\left(\bar{x}_0 - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{\eta}{\sqrt{q}} = \varepsilon\lambda\left(\bar{x}_0 - \dfrac{k}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}. \end{cases}$$

Se ora indichiamo con u_1, v_1 i valori delle cordinate curvilinee u, v nel punto $M_1 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, per le (12) pag. 278 abbiamo

$$u_1 + v_1 = \frac{\xi}{\sqrt{p}}, \quad u_1 - v_1 = \frac{\eta}{\sqrt{q}},$$

e dunque valgono le formole :

$$(49) \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 = \lambda\left(\bar{x}_0 - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{1}{2\lambda} \\ u_1 - v_1 = \varepsilon\lambda\left(\bar{x}_0 - \dfrac{k}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon}{2\lambda} \end{cases}$$

Se in queste poniamo per $\bar{x}_0$ il valore dato dalla terza delle (19) (pag. 279), dobbiamo dimostrare che *ne risultano le formole d'applicabilità della superficie* S_1 *sul paraboloide* P_0

A questo punto diventa necessario separare il caso $\varepsilon = +1$ dall'altro $\varepsilon = -1$; ma potremo limitarci al primo, giacchè l'altro ne deriva permutando nelle (49) u_1 con v_1, ciò che equivale, come abbiamo notato alla fine del § 378, allo scambio di u con v. Soltanto è da osservare che lo scambio di u in v nella (12) fa cangiare il segno di $\bar{y}_0$, e questo equivale alla riflessione del paraboloide sul piano principale xz. Nel caso $\varepsilon = -1$ le formole d'applicabilità (49) rappresentano adunque la combinazione dell'affinità d'IVORY colla riflessione sul piano xz.

Ciò premesso, *prenderemo da ora in poi, in tutte le nostre formole*, $\varepsilon = +1$. Così le (49) diventano

$$u_1 = \lambda\left(\bar{x}_0 - \frac{k}{2}\right), \quad v_1 = \frac{1}{2\lambda}. \tag{49*}$$

e ponendo qui per $\bar{x}_0$ il detto valore (19_3) risultano le formole cercate:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + \sqrt{pq'}\,(u-v) - \sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}{2\{\sqrt{pq} + \sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda^2\}} \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}, \end{cases} \tag{50}$$

delle quali dobbiamo provare che sono le formole domandate di applicabilità.

Cominciamo dall'osservare che u_1 risulta così una funzione lineare di ciascuna delle tre variabili u, v, λ, onde calcoliamo subito le tre derivate parziali

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}.$$

Per le prime due troviamo

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,.\,\lambda^2\,.\,\frac{V}{W^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,.\,\lambda^2\,.\,\frac{U}{W^2}, \tag{51}$$

e per la terza dapprima

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda^2\{qp'\,(u+v)^2 - pq'\,(u-v)^2 - pq\,(4uv+k)\}}{W^2}.$$

Ma, siccome per le (20)

$$p' = p - k, \; q' = q + k,$$

si ha identicamente

$$qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2 - pq(4uv+k) = -k\{p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq\} = -kH,$$

e quindi

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = -\frac{2k\lambda^2 H}{W^2}. \tag{52}$$

Ed ora osserviamo che dalle (51), per le (49*), seguono anche le formole

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda V}{W^2}, \quad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda U}{W^2} \tag{51*}$$

§ 387.

Verifica delle formole (50) d'applicabilà.

Dobbiamo dunque verificare che dalle formole (50) segue

$$ds_1^2 = \overline{ds}_1^2,$$

ciò che, essendo v_1, per la (50_2), funzione di λ soltanto, equivale alle tre equazioni:

$$\begin{cases} E_1 = \overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \left\{\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2, \\ F_1 = \overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} + \overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial u_1}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right) + \\ \qquad + \left\{\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ G_1 = \overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \left\{\overline{E}_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G}_1\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2, \end{cases} \tag{53}$$

dove E_1, F_1, G_1 hanno i valori (47) pag. 299, ed $\overline{E}_1, \overline{F}_1, \overline{G}_1$ i valori (47*) (ivi).

In primo luogo, come nel paragrafo precedente abbiamo dedotte le (50), così deduciamo per $\overline{E}_1, \overline{F}_1, \overline{G}_1$ i valori

$$\overline{E}_1 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_1}\right)^2, \quad \overline{F}_1 = S\frac{\partial \xi}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial v_1}, \quad \overline{G}_1 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial v_1}\right)^2,$$

indi per le (48)

$$\begin{cases} \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 = \frac{p}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2 + \frac{q}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\right)^2, \\ \overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{p}{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} + \frac{q}{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v} \\ \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 = \frac{p}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2 + \frac{q}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

le quali formole, essendo $p = p' + k$, $q = q' - k$, possiamo anche scrivere

$$\begin{cases} \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2 + k\left\{\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\right)^2\right\} \\ \overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} + k\left\{\frac{1}{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} - \frac{1}{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v}\right\} \\ \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 + k\left\{\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v}\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Ma nei secondi membri sono nulli per le (42) pag. 297 i tre fattori di k, onde resta

$$(54) \qquad \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = E_0, \quad \overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = F_0, \quad \overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = G_0.$$

Ora prendiamo le tre equazioni:

$$(55) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \eta}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \eta}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \zeta}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda},$$

e dopo averle moltiplicate ordinatamente per $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \eta}{\partial u_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}$, sommiamole, il che dà

$$\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial v} = S\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\frac{\partial \xi}{\partial u_1},$$

quindi per le (48)

$$\begin{cases} \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = S\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{p}{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \frac{q}{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda} \\ \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{p}{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \frac{q}{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda} \end{cases}$$

formole che per le (42) possiamo scrivere:

$$(56) \quad \begin{cases} \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\frac{\lambda p}{\sqrt{p'}}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \frac{\lambda q}{\sqrt{q'}}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\} \\ \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\frac{\lambda p}{\sqrt{p'}}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \frac{\lambda q}{\sqrt{q'}}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right\}. \end{cases}$$

Derivando le (41) rispetto a λ (posto $\varepsilon = +1$), abbiamo

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} = \sqrt{p'}\left(\bar{x}_0 - \frac{k}{2}\right) - \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda^2} + \lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} = \sqrt{q'}\left(\bar{x}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda^2} + \lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}, \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{p'}}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \frac{1}{\sqrt{q'}}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2},$$

ciò che possiamo scrivere

$$\frac{p}{\sqrt{p'}}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \frac{q}{\sqrt{q'}}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} = \sqrt{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} - \frac{k}{\lambda^2},$$

e le (56) si cangiano nelle seguenti:

$$(58) \quad \begin{cases} \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left(\lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \frac{k}{\lambda}\right) \\ \left(\overline{E_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{F_1}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left(\lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \frac{k}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Ora le (55) quadrate e sommate dànno:

$$\overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{p}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{q}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right)^2,$$

e quindi

$$\overline{E_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{F_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{G_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2 - S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 = k\left[\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{1}{q'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2\right].$$

Ma per le (48), (49*)

$$\frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}} = u_1 + \frac{1}{2\lambda}, \quad \frac{\bar{y}_0}{q'} = u_1 - \frac{1}{2\lambda},$$

e quindi

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{1}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda}\right)^2 = -\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda},$$

ciò che per la (52) pag. 303 si scrive

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{1}{q'}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{4k\,\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2},$$

e ne segue la formola finale

$$\overline{\mathrm{E}_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\,\overline{\mathrm{F}_1}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathrm{G}_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2 = \mathrm{S}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{4k^2\,\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}. \tag{59}$$

Colle formole (54), (58), (59) i valori (53) di E_1, F_1, G_1 diventano

$$\begin{cases} \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_0 + 2\left(\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \dfrac{k}{\lambda}\right)\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \left\{\mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 \\ \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_0 + \left(\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \dfrac{k}{\lambda}\right)\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right) + \left\{\mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\right\}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_0 + 2\left(\lambda\sqrt{p'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \lambda\sqrt{q'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} - \dfrac{k}{\lambda}\right)\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \left\{\mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Paragonando queste colle (47), vediamo che le identità da verificarsi si riducono alle tre equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{2k}{\lambda}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = (\mathrm{D}l + \mathrm{D}'m)^2 - \mathrm{D}_0'^2\,m^2 \\ \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\cdot\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right) = (\mathrm{D}l + \mathrm{D}'m)(\mathrm{D}'l + \mathrm{D}''m) - \mathrm{D}_0'^2\,l\,m \\ \dfrac{4k^2\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 - \dfrac{2k}{\lambda}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = (\mathrm{D}'l + \mathrm{D}''m)^2 - \mathrm{D}_0'^2\,l^2. \end{cases}$$

Ma si ha (pag. 278) $\mathrm{D}_0'^2 = \dfrac{4pq}{\mathrm{H}}$ e per le (51*)

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda\mathrm{V}}{\mathrm{W}^2}, \quad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda\mathrm{U}}{\mathrm{W}^2},$$

onde le tre equazioni precedent, divise per $\dfrac{4k^2\,\mathrm{H}}{\mathrm{W}^2}$, diventano

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}\right)^2 = \dfrac{1}{4k^2\,\mathrm{H}}(\mathrm{D}\,\mathrm{U} + \mathrm{D}'\,\mathrm{V})^2 \\ \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}\right) = \dfrac{1}{4k^2\,\mathrm{H}}(\mathrm{D}\,\mathrm{U} + \mathrm{D}'\,\mathrm{V})(\mathrm{D}'\,\mathrm{U} + \mathrm{D}''\,\mathrm{V}) \\ \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}\right)^2 = \dfrac{1}{4k^2\,\mathrm{H}}(\mathrm{D}'\,\mathrm{U} + \mathrm{D}''\,\mathrm{V})^2. \end{cases}$$

Ed ora le equazioni differenziali (I) pag. 288, essendo $\rho = \dfrac{\mathrm{H}}{\sqrt{pq}}$, dimostrano appunto che queste sono tre identità.

I nostri calcoli sono così a termine ed abbiamo dimostrato che: *Le superficie* S_1, *dedotte per trasformazione* B_k *da una qualunque deformata* S *del paraboloide iperbolico sono tutte applicabili sul paraboloide stesso, e la legge d'applicabilità fra* S, S_1 *è stabilita dall'affinità* d'Ivory *fra i due paraboloidi omofocali* P_0, P_h. (*)

Come si vede, per le deformate del paraboloide iperbolico, il teorema *A*) che al § 376 abbiamo enunciato per tutte le quadriche, è ora completamente stabilito. Di più abbiamo riconosciuto che la legge d'applicabilità fra le due falde focali S, S_1 della congruenza FF_1 è fornita dalla affinità d'Ivory fra i due paraboloidi omofocali, proprietà che vedremo mantenersi per tutte le specie di quadriche.

§ 388.

Corrispondenza delle asintotiche sulle due falde focali S, S_1.

Alla fine del § 376 abbiamo già enunciata la proprietà che: *sulla deformata iniziale* S *della quadrica e su qualunque sua trasformata* S_1, *mediante una* B_k, *si corrispondono le asintotiche, talchè la congruenza* FF_1 *delle congiungenti i punti corrispondenti è una congruenza* W *colle falde focali* S, S_1

Pel caso attuale delle deformate del paraboloide abbiamo anche veri-

(*) Si avverta che resta incluso anche il caso delle trasformazioni singolari B_{-q}, B_p colla particolarità che allora P_h si riduce alla regione esterna (contata due volte) del piano della relativa parabola focale.

ficato il teorema nel caso delle deformate rigate al § 383, e nel caso di deformate qualunque lo verifichiamo dapprima ricordando che la proprietà caratteristica delle congruenze W è espressa dalla formola di RIBAUCOUR (22) § 300 (Cf. I § 185)

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \sqrt{\frac{1}{K\,K_1}},$$

dove δ è la distanza dei fuochi F, F_1, Ω l'angolo dei piani focali e K, K_1 le curvature delle due falde S, S_1 nei punti corrispondenti F_0 F_1. Ma nel caso della nostra congruenza per la (31) pag. 285 la precedente equazione, che si tratta di verificare, diventa

$$(61) \qquad El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l\,M_0 - m\,L_0)^2 = \rho\,\rho_1,$$

dove

$$\rho = \frac{p\,(u-v)^2 + q\,(u+v)^2 + pq}{\sqrt{pq}}, \quad \rho_1 = \frac{p\,(u_1-v_1)^2 + q\,(u_1+v_1)^2 + pq}{\sqrt{pq}}.$$

A causa della identità (29) pag. 283 si ha

$$\frac{\rho}{m}(l\,M_0 - m\,L_0) = \frac{1}{k\,W}\left(V\frac{\partial U}{\partial\lambda} - U\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right),$$

e la (61) equivale alla seguente

$$(61^*) \qquad E\,U^2 + 2\,F\,U\,V + G\,V^2 + \frac{1}{k^2}\left(V\frac{\partial U}{\partial\lambda} - U\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2 = W^2\,\rho\,\rho_1.$$

È questa un'identità che può verificarsi colle nostre formole, ma si può anche osservare che essa non dipende dalla particolare deformata S e valendo, come si è visto, per le deformate rigate sussiste per ciò stesso in generale.

Della medesima proprietà andiamo ora a dare una seconda dimostrazione, la quale condurrà insieme ad altre importanti conseguenze per le trasformazioni B_k. Ricordiamo per ciò che le equazioni differenziali delle asintotiche curvilinee sopra S si scrivono (I pag. 208)

$$(62) \qquad \begin{cases} D\frac{du}{ds} + D'\frac{dv}{ds} = \varepsilon\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\frac{dv}{ds} \\ D'\frac{du}{ds} + D''\frac{dv}{ds} = -\varepsilon\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\frac{du}{ds} \end{cases}$$

avendosi $\varepsilon = +1$ per asintotiche sinistrorse, $\varepsilon = -1$ per asintotiche destrorse. Prendiamo una qualunque asintotica a di S e sia a_1 la linea che corrisponde ad a sulla trasformata S_1 per una B_k. Lungo a la funzione $\lambda(u, v)$ è funzione dell'arco s di a e

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

indi per le equazioni differenziali (I) pag. 288, avuto riguardo alle (62):

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{k\rho}\left(V\frac{du}{ds} + U\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{H}}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\rho}\left(U\frac{dv}{ds} - V\frac{du}{ds}\right),$$

ovvero, essendo (pag. 278) $\sqrt{EG-F^2} = 2\sqrt{H}$:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{k\rho}\left\{\left(V\frac{du}{ds} + U\frac{dv}{ds}\right) + \varepsilon\left(U\frac{dv}{ds} - V\frac{du}{ds}\right)\right\}.$$

Separando i due casi delle asintotiche sinistrorse o destrorse avremo semplicemente

$$(63) \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{2U}{k\rho}\frac{dv}{ds}, \quad \text{per un'asintotica } a \text{ sinistrorsa}$$

$$(63^*) \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{2V}{k\rho}\frac{du}{ds}, \quad \text{per un'asintotica } a \text{ destrorsa.}$$

Ora, lungo la curva a, le quantità u, v, ρ sono funzioni note di s e così pure U, V le quali sono inoltre polinomi di 2° grado in λ (pag. 280), e per ciò la (63) o (63*) dà per la funzione $\lambda(s)$ un'equazione differenziale del 1° ordine *del tipo di* RICCATI, che dipende solo dai valori di u, v lungo a quali funzioni di s.

Ciò premesso, supponiamo ora di deformare la S attorno all'asintotica a mantenuta rigida, secondo i risultati generali al § 140 (I pag. 375). L'equazione di RICCATI (63) o (63*) rimarrà in tal caso invariata; se adunque per un valore iniziale s_0 di s fissiamo il valore λ_0 che deve assumere λ, la funzione $\lambda(s)$ si conserverà per ogni s la stessa. Ma il valore iniziale fissato per λ determina, per qualunque delle configurazioni considerate di S, la superficie trasformata S_1, sulla quale la curva a_1 corrispondente alla a, è data dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.,}$$

percorrendo il punto (u, v) la curva a. E siccome lungo a, per quanto precede

$$x, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \lambda, \; l, \; m, \text{ ecc.}$$

mantengono sempre gli stessi valori in funzione di s, altrettanto accade di x_1, y_1, z_1. Dunque la curva a_1, rimane la stessa per tuttequelle configurazioni di S, e si mantengono anche invariati, in grandezza e direzione, i segmenti FF_1, che congiungono i punti corrispondenti di a, a_1. Siccome poi il piano tangente alla S_1 in F_1 contiene il segmento FF_1 e la tangente in F_1 alla a_1 vediamo che : *la curva trasformata* a_1 *si mantiene fissa con* a *e la superficie* S_1 *mantiene fisse le normali lungo* a_1

Ora, fra le configurazioni possibili di S con asintotica rigida a, vi è la rigata R circoscritta, secondo il teorema di CHIEFFI, alla S lungo a, ed in questo caso la trasformata S_1 è un'altra rigata R_1 le cui asintotiche corrispondono a quelle di R (§ 383), e quindi la a_1 è un'asintotica di R_1, e per ciò anche di tutte le S_1 c. d. d.

Osserveremo ancora che le equazioni differenziali (63) o (63*) vengono a risolvere le trasformazioni B_k delle deformate del paraboloide iperbolico in trasformazioni (asintotiche) delle singole curve che sono le loro asintotiche, nello stesso modo come le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche si risolvono in trasformazioni delle curve a torsione costante che ne sono le linee asintotiche.

§ 389.

Ulteriori proprietà delle trasformazioni B_k.

Proseguiamo le nostre considerazioni geometriche sulle infinite configurazioni che assume S deformandosi attorno all'asintotica rigida a. Per ogni tale configurazione S, la trasformata S_1 per la B_k è perfettamente individuata dal segmento focale FF_1 inizialmente scelto per $u = u_0$, $v = v_0$. Si è visto che la curva a_1, corrispondente alla a sulla S_1, rimane sempre la stessa e si conserva asintotica sulla S_1. Dimostriamo ora ulteriormente che : *la superficie* S_1 *si deforma alla sua volta attorno all'asintotica* a_1 *mantenuta rigida.*

Per questo si osservi che se la S, in una qualunque delle sue configurazioni, viene applicata sul paraboloide P_0 la curva a prenderà sopra P_0 sempre

la stessa posizione α, e medesimamente i segmenti FF_1 uscenti dai punti F della a, trasportati su P_0, prenderanno identiche posizioni, indi nei loro termini F_1 daranno sempre sul paraboloide omofocale P_k la medesima curva α_1. Dalla legge d'applicabilità, secondo l'affinità d'IVORY, risulta che distendendo S_1 su P_0 la curva a_1 prenderà sempre la medesima posizione, e cioè quella che nell'affinità d'IVORY corrisponde alla curva α_1 di P_k. Ne segue il teorema :

Se la prima falda S *di una delle nostre congruenze* W *si deforma attorno ad una linea asintotica a mantenuta rigida, e resta fisso nel tempo stesso un segmento focale iniziale uscente da un punto iniziale di* a, *anche la seconda falda* S_1 *si deforma attorno alla corrispondente asintotica* a_1 *che si mantiene rigida.*

Si ha un notevole corollario di questo teorema osservando che fra le speciali configurazioni di S figura quella data dal teorema di CHIEFFI nella rigata R circoscritta alla S lungo a, caratterizzata da ciò che le geodetiche di S corrispondenti alle generatrici (di un sistema) di P_0 si sono rettificate. Allora anche la trasformata S_1 è una rigata R_1, precisamente l'analoga circoscritta lungo la a_1 alla S_1 secondo il teorema di CHIEFFI. Sussiste dunque il teorema :

Se alle due falde S, S_1 *di una delle nostre congruenze* W *si circoscrivono lungo una coppia qualunque di asintotiche corrispondenti* a, a_1 *le rigate applicabili* R, R_1 *del teorema di* CHIEFFI, *queste due rigate* R, R_1 *sono nuovamente le due falde focali di un congruenza* W, *ossia sono ancora legate da una trasformazione* B_k.

Propriamente per ogni coppia (a, a_1) di asintotiche corrispondenti sopra S, S_1 si ottengono così due diverse coppie di tali rigate (R, R_1), secondo che si conducono le tangenti alle geodetiche di S, S_1 trasformate delle rette del primo o secondo sistema su P_0.

Il teorema si può applicare naturalmente anche nel caso che la coppia iniziale (S, S_1) sia di rigate (R, R_1), e così da una tale congruenza W a falde focali rigate se ne avranno *in termini finiti* infinite altre.

§ 390.

Corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti sopra S, S_1.

Si è visto che sopra S, S_1 si corrispondono le asintotiche, indi anche ad ogni sistema coniugato di S corrisponde un sistema coniugato di S_1. Fra i

sistemi coniugati di S si distingue quello *permanente* nella deformazione di S nel paraboloide P_0; esso è formato da un doppio sistema di linee reali od immaginarie ma distinte, salvo nel caso che la S sia una rigata R ove i due sistemi di linee si confondono nelle generatrici di R. In ogni caso sussiste la notevole proprietà :

Nelle congruenze W *colle due falde focali* S, S_1 *applicabili sul paraboloide al sistema coniugato permanente di* S *corrisponde il sistema coniugato permanente di* S_1.

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che le due seconde forme fondamentali del paraboloide P_0 e della superficie S sono rispettivamente *in coordinate* u, v :

$$2\,D'_0\,du\,dv, \quad D du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

e per ciò l'equazione differenziale del loro sistema coniugato comune, si calcola eguagliando a zero il Jacobiano di queste due forme, in

$$D\,du^2 - D''\,dv^2 = 0. \tag{64}$$

Per l'altra superficie S_1 la seconda forma fondamentale è proporzionale, pel teorema al § 388, alla medesima

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

D'altra parte, per l'applicabilità di S_1 su P_0, le trasformate delle generatrici di P_0 sono le $u = \text{cost}^{te}$, $v = \text{cost}^{te}$ e quindi *in coordinate* u_1, v_1, la seconda forma fondamentale di P_0 è proporzionale al prodotto $du_1 dv_1$, ovvero poichè $v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}$ è funzione solo di λ, all'espressione

$$\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)dv\right\} \cdot \left\{\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,du + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\,dv\right\},$$

che scriviamo

$$\Delta\,du^2 + 2\,\Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2,$$

avendo posto

$$\Delta = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad 2\,\Delta' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} +$$
$$+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \Delta'' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Ora l'equazione differenziale del sistema coniugato comune a S_1 e P_0 si ha eguagliando a zero il Jacobiano delle due forme

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \quad \Delta\,du^2 + 2\,\Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2$$

e si scrive per ciò

$$(D\,\Delta' - D'\,\Delta)\,du^2 + (D\Delta'' - D''\,\Delta)\,du\,dv + (D'\,\Delta'' - D''\,\Delta')\,dv^2.$$

La dimostrazione del teorema enunciato si riduce a provare che si ha l'identità

$$D\,\Delta'' - D''\,\Delta = D\left(\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} - D''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

nella quale introducendo per $\dfrac{\partial u_1}{\partial u}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial v}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda}$ i rispettivi valori (51), (52) pag. 302, 303, questa si muta nell'altra

$$D\left(2\sqrt{pq}\,U - k\,H\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v} - D''\left(2\sqrt{pq}\,V - k\,H\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0$$

che resta da dimostrarsi. Ma introducendo in questa i valori di $\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}$ dati dall'equazioni differenziali (I) si ottiene

$$D\left\{pq\,U^2 - \frac{H}{4}(D'\,U + D''\,V)^2\right\} - D''\left\{pq\,V^2 - \frac{H}{4}(D\,U + D'\,V)^2\right\} = 0,$$

e riducendo

$$(DU^2 - D''\,V^2)\left\{pq + \frac{H}{4}(DD'' - D'^2)\right\} = 0,$$

ed, appunto per l'equazione di GAUSS (32) pag. 286, il secondo fattore si annulla e l'identità è verificata.

§ 391.

Preliminari per la relazione reciproca fra S, S_1.

Cogli sviluppi precedenti noi abbiamo successivamente stabilite le principali proprietà delle trasformazioni B_k per le deformate del paraboloide. Ma ci rimane ancora da chiarire un punto d'importanza fondamentale per

la ripetuta applicazione delle trasformazioni B_k, e cioè che S dipende da S_1 come S_1 da S, o meglio precisando:

Se la deformata S_1 *del paraboloide nasce dalla deformata* S *per una trasformazione* B_k, *inversamente la* S *proviene dalla* S_1 *con una trasformazione* B_k *della stessa costante* k.

La dimostrazione, che nel caso delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche è di immediata evidenza per le proprietà metriche caratteristiche delle congruenze pseudosferiche, trovasi qui invece più riposta. Una verifica analitica del teorema si potrebbe ottenere dimostrando che accanto alle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{ecc.}$$

dove l, m hanno i valori (22), (23) pag. 280, sussistono le analoghe

$$x = x_1 + l_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + m_1\frac{\partial x_1}{\partial v_1}, \quad \text{ecc.}$$

dove l, m, sono formate con u_1, v_1 come l, m con u, v, ciò che si potrebbe verificare utilizzando le formole sviluppate nei precedenti paragrafi.

Preferiamo esporre una dimostrazione di natura più geometrica che riduce la questione a proprietà elementari dell'affinità di IVORY, conformemente al significato di questa nella legge d'applicabilità fra S, S_1.

Noi dobbiamo dimostrare che quando la S_1 si applica sul paraboloide P_0, ogni faccetta f_1 di S_1 trasportando seco invariabilmente la corrispondente f di S, i centri di queste ∞^2 f vengono a distribuirsi sul paraboloide omofocale P_k e i loro piani riescono tangenti a P_k. Ma per l'ultimo teorema del § 389 possiamo limitare la nostra dimostrazione al caso di due deformate rigate (R, R_1) giacchè se a, a_1 sono due asintotiche corrispondenti su (S, S_1) ed (R, R_1) le rigate circoscritte secondo il teorema di CHIEFFI l'orientazione delle ∞^1 faccette (osculatrici) f, f_1 corrispondenti lungo a, a_1 è la medesima per (R, R_1) come per (S, S_1), ed anche è la stessa la legge d'applicabilità sul paraboloide.

Ciò premesso, noi ridurremo la dimostrazione a quella di alcune semplici proprietà dell'affinità d'IVORY nel modo seguente.

Siano g, γ due generatrici corrispondenti sulle due falde focali rigate R, R_1 della congruenza W, e siano F, F_1 due loro punti corrispondenti. Se la rigata R si distende sul paraboloide P_0, la generatrice g si sovrapporrà

ad una generatrice g_1 di P_0 e la retta γ, invariabilmente trascinata da g, verrà ad occupare *sul paraboloide confocale* P_k, una determinata posizione, diciamo $\bar{g}_2$. In pari tempo ogni segmento FF_1 si trasporterà in un segmento congruente $M_1\overline{M}_2$, che tocca in M_1 il paraboloide P_0 e termina in $\overline{M}_2$ alla generatrice $\bar{g}_2$ di P_k. Siano ora rispettivamente $\bar{g}_1, g_2$ le generatrici di P_k, P_0 che nell'affinità d'IVORY corrispondono alle g_1, $\bar{g}_2$ di P_0, P_k, e siano $\overline{M}_1$, M_2 i punti corrispondenti in questa affinità rispettivamente a M_1, $\overline{M}_2$. Se la proprietà enunciata sussiste, siccome distendendo R_1 su P_0 la γ prende la posizione g_2, così la g, trascinata da γ, dovrà prendere su P_k) la posizione $\bar{g}_1$ e i segmenti FF_1 dovranno adattarsi sui segmenti $M_2\overline{M}_1$. Per ciò dovrà esistere un movimento rigido che porti la coppia di rette $g_1, \bar{g}_2$ coi rispettivi punti $M_1, \overline{M}_2$ nella coppia $\bar{g}_1, g_2$ coi rispettivi punti $\overline{M}_1$, M_2. Due di queste quattro rette g_1. g_2; $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ sono in sostanza completamente arbitrarie, e noi siamo così condotti a dimostrare proprietà elementari della affinità d'IVORY, dalle quali poi potremo trarre la dimostrazione del teorema enunciato.

Siano dunque $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ due punti qualunque del paraboloide P_0, e l'affinità d'IVORY faccia loro corrispondere, sul paraboloide omofocale P_k, i punti $\overline{M}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{M}_2 \equiv (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, onde avremo:

$$\bar{x}_1 = \sqrt{\frac{p-k}{p}}\,.\,x_1, \quad \bar{y}_1 = \sqrt{\frac{q+k}{q}}\,.\,y_1, \quad \bar{z}_1 = z_1 + \frac{k}{2},$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{p-k}{p}}\,.\,x_2, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{\frac{q+k}{q}}\,.\,y_2, \quad \bar{z}_2 = z_2 + \frac{k}{2}.$$

Dimostriamo che sussistono le tre seguenti proprietà:

1) (Teorema d'IVORY). *I segmenti* $M_1\overline{M}_2$, $M_2\overline{M}_1$ *hanno eguale lunghezza.*

E infatti siccome

$$\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} = 2z_1, \quad \frac{x_2^2}{q} - \frac{y_2^2}{q} = 2z_2,$$

l'espressione

$$S(x_1 - \bar{x}_2)^2 - S(x_2 - \bar{x}_1)^2 = k\left\{\left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q}\right) - \left(\frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q}\right) + 2(z_2 - z_1)\right\}$$

è identicamente nulla

2) *L'affinità d'*IVORY *fa corrispondere le generatrici di* P_0, P_k *per tratti eguali.*

E infatti abbiamo

$$S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 - S(x_1 - x_2)^2 = k\left(\frac{(y_1-y_2)^2}{q} - \frac{(x_1-x_2)^2}{p}\right),$$

e se M_1, M_2 (indi anche $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$) giacciono sopra una medesima generatrice, si ha identicamente

$$\frac{(x_1-x_2)^2}{p} = \frac{(y_1-y_2)^2}{q},$$

e quindi $\overline{M}_1\,\overline{M}_2 = M_1\,M_2$. (*)

3) *Se il piano tangente del paraboloide* P_0 *in* M_1 *passa per* $\overline{M}_2$, *inversamente il piano tangente a* P_0 *in* M_2 *passerà per* $\overline{M}_1$.

E infatti le due espressioni

$$\frac{x_1\,\bar{x}_2}{p} - \frac{y_1\,\bar{y}_2}{q} - (z_1 + \bar{z}_2),\quad \frac{x_2\,\bar{x}_1}{p} - \frac{y_2\,\bar{y}_1}{q} - (z_2 + \bar{z}_1)$$

sono eguali fra loro ed all'altra

$$\sqrt{\frac{p-k}{p^3}}\,x_1\,x_2 - \sqrt{\frac{q-k}{q^3}}\,y_1\,y_2 - \left(z_1 + z_2 + \frac{k}{2}\right),$$

e si annullano quindi insieme. Ma l'annullarsi della prima esprime che il piano tangente a P_0 in M_1 passa per $\overline{M}_2$, quello della seconda che il piano tangente in M_2 passa per $\overline{M}_1$.

§ 392.

Invertibilità della trasformazione B_k.

Premesse queste proprietà, prendiamo ora due generatrici qualunque g_1, g_2 di P_0, che possono appartenere allo stesso ovvero a contrario sistema, e siano $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ le loro corrispondenti, nell'affinità d'Ivory, sul paraboloide confocale P_k. Stabiliamo una corrispondenza (projettiva) fra i punti di

(*) Questa proprietà è quella che dà luogo alla costruzione del paraboloide (e iperboloide) articolato (Henrici); essa deducesi anche subito dalla forma del ds^2 (formole (13) pag. 278), poichè i coefficienti estremi E, G contengono i parametri p, q nella sola combinazione $p + q$ e non variano passando dal paraboloide P_0 al confocale P_k.

queste quattro rette, facendo corrispondere ad ogni punto M_1 di g_1 quel punto $\overline{M}_2$ su $\bar{g}_2$, ove questa generatrice di P_k incontra il piano tangente a P_0 in M_1. Allora i punti $\overline{M}_1$, M_2 corrispondenti a M_1, $\overline{M}_2$ nell'affinità d'Ivory descriveranno, in modo determinato, le rette $\bar{g}_1$, g_2. E per quanto si è visto sopra la corrispondenza così stabilita fra i punti delle quattro rette g_1, g_2, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ presenterà le proprietà seguenti:

α) Ogni segmento $M_1\,\overline{M}_2$ sarà eguale in lunghezza al corrispondente $\overline{M}_1\,M_2$.

β) Gli stessi segmenti toccheranno rispettivamente P_0 in M_1 e M_2

γ) Le punteggiate g_1, $\bar{g}_1$ descritte da M_1, $\overline{M}_1$ saranno eguali; medesimamente g_2, $\bar{g}_2$.

Un'altra proprietà essenziale è ancora da osservare e cioè che le due coppie di rette $(g_1, \bar{g}_2)$, $(\bar{g}_1, g_2)$ presentano il medesimo angolo e momenti eguali, ovvero eguali e di segno contrario secondo che le generatrici g_1, g_2 sono prese da uno stesso o da contrario sistema. Questo si accerta subito colle formole ben note di geometria analitica. Tutte queste proprietà rendono ben evidente che la coppia di punteggiate $(g_1, \bar{g}_2)$ coi rispettivi punti M_1, $\overline{M}_2$ sarà sovrapponibile alla coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ ed ai punti $\overline{M}_1$, M_2; più precisamente questo avverrà per un movimento rigido se g_1, g_2 sono prese dallo stesso sistema, con una simmetria nell'altro caso. (*)

Ed ora basta riprendere le considerazioni al principio del paragrafo per dedurne la proprietà enunciata. Sia R una deformata rigata del paraboloide P_0, e sia R_1 una sua derivata per trasformazione B_k, e supponiamo dapprima che R_1 prenda le sue generatrici dalla prima congruenza, nel qual caso diremo che la B_k appartiene alla prima classe. Indichino g, γ due generatrici qualunque corrispondenti di R, R_1, e sopra di esse consideriamo una coppia qualunque F, F_1 di punti corrispondenti. Applichiamo R su P_0, e sia g_1 la posizione assunta su P_0 da g; la γ, trascinata da g, si disporrà sopra una certa generatrice $\bar{g}_2$ di P_k di sistema omologo a quello di g_1. Consideriamo le due generatrici $\bar{g}_1$, g_2 rispettivamente di P_k, P_0 che corrispondono a g_1, $\bar{g}_2$ nell' affinità d'Ivory. Un movimento rigido sovrappone come si è detto, la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ coi segmenti $M_1\,\overline{M}_2$ alla coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ coi segmenti $(\overline{M}_1\,M_2)$. Ora se applichiamo R_1 su P_0, la generatrice γ occuperà (per la legge d'applicabilità) precisamente la posizione g_2, ed ogni piano (F, γ) tangente in F_1 a R_1 si sovrapporrà al piano $(\overline{M}, g_2)$ tan-

(*) Per la conferma analitica vedi § seguente.

gente in M_2 a P_0; per ciò tutti i segmenti $F_1 F$ si disporranno sui segmenti $M_2 \overline{M}_1$ e la retta g luogo dei punti F si collocherà adunque sulla generatrice $\bar{g}_1$ del paraboloide confocale P_k, c. d. d.

Il risultato è ancora il medesimo se B_k appartiene alla seconda classe. Allora nell'applicabilità di R_1 sopra P_0, la retta γ non si collocherà più sulla g_2 ma sulla sua simmetrica rispetto al piano xz. E poichè in questo caso è una simmetrica che sovrappone la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ all'altra $(\bar{g}_1, g_2)$, sarà ancora un movimento rigido che sovrappone la prima alla simmetrica dell'altra.

§ 393.

Espressione effettiva del movimento o simmetria.

Sarà opportuno confermare col calcolo le deduzioni geometriche superiori, ciò che facciamo trovando le formole effettive pel movimento rigido, o simmetria, sopra considerato.

Suppongasi dapprima che le rette g_1, g_2 appartengano ad un medesimo sistema di P_0 e se ne scrivano le equazioni parametriche

$$g_1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \sqrt{p} \,.\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_1} \\ y_1 = \lambda_1 \sqrt{q} \,.\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_1} \end{cases} \qquad g_2) \begin{cases} x_2 = \lambda_2 \sqrt{p} \,.\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_2} \\ y_2 = \lambda_2 \sqrt{q} \,.\, z_2 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_2}. \end{cases}$$

Le generatrici $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ di P_k, corrispondenti nell'affinità d'IVORY alle g_1, g_2, avranno le equazioni:

$$\bar{g}_1) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda_1 \sqrt{p'} \,.\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda_1} \\ \bar{y}_1 = \lambda_1 \sqrt{q'} \,.\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda_1} \\ \bar{x}_1 = z_1 + \dfrac{k}{2} \end{cases} \qquad \bar{g}_2) \begin{cases} \bar{x}_2 = \lambda_2 \sqrt{p'} \,.\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p'}}{2\lambda_2} \\ \bar{y}_2 = \lambda_2 \sqrt{q'} \,.\, z_2 - \dfrac{\sqrt{q'}}{2\lambda_2} \\ \bar{x}_2 = z_2 + \dfrac{k}{2}, \end{cases}$$

ed ai punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) di g_1, g_2 corrisponderanno rispettivamente i punti $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ di $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$.

Siano ora

$$\begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha \\ \eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta \\ \zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma \end{cases}$$

le formole che definiscono un movimento rigido, ove x, y, z indicano le coordinate di un punto qualunque, e ξ, η, ζ quelle del punto in cui (x, y, z) si trasporta pel movimento. Noi vogliamo ora che questo movimento trasporti la coppia $(g_1, \bar{g}_2)$ coi suoi punti M_1, $\overline{M}_2$ nella coppia $(\bar{g}_1, g_2)$ e nei rispettivi punti $\overline{M}$, M_2, per la qual cosa occorre e basta che le equazioni superiori siano soddisfatte ponendovi

$$x = x_1, \; y = y_1, \; z = z_1$$
$$\xi = \bar{x}_1, \; \eta = \bar{y}_1, \; \zeta = \bar{z}_1,$$

con qualunque z_1, ed ancora per

$$x = \bar{x}_2, \; y = \bar{y}_2, \; z = \bar{z}_2$$
$$\xi = x_2, \; \eta = y_2, \; \zeta = z_2$$

con qualunque z_2. Queste dànno altrettante equazioni lineari quante occorrono per determinare i 12 coefficienti incogniti α, β, γ e dalla semplice risoluzione si trovano i valori che andiamo a trascrivere.

Ponendo

$$\Delta = (\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2,$$

si hanno pei coefficienti α, β, γ le formole:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_1 = (\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{p'q'} - \sqrt{pq})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda_1\lambda_2 \\ \Delta\alpha_2 = k(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \Delta\alpha_3 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{q'} \,.\, \lambda_1 - \sqrt{q} \,.\, \lambda_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = k(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \Delta\beta_2 = (\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda_1\lambda_2 \\ \Delta\beta_3 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p} \,.\, \lambda_2 - \sqrt{p'} \,.\, \lambda_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\gamma_1 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{q'}\lambda_2 - \sqrt{q} \,.\, \lambda_1) \\ \Delta\gamma_2 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p} \,.\, \lambda_1 - \sqrt{q} \,.\, \lambda_2) \\ \Delta\gamma_3 = (\sqrt{pq'} + \sqrt{qp'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha = k(\sqrt{q'}\lambda_2 - \sqrt{q}.\lambda_1) + k^2\sqrt{q}.\lambda_1\lambda_2^2 \\ \Delta\beta = k(\sqrt{p'}\lambda_2 - \sqrt{p}.\lambda_1) - k^2\sqrt{p}.\lambda_1\lambda_2^2 \\ \Delta\gamma = \frac{k}{2}\{(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'})\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2\} \end{cases}$$

Ora è facile verificare, sui valori precedenti di $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1, 2, 3)$, che essi rendono la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ortogonale diretta (a determinante $= +1$), e le formole trovate definiscono appunto un movmento rigido.

Suppongasi in fine che le generatrici g_1, g_2 appartengano a sistema contrario e siano p. e. le loro equazioni:

$$g_1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1\sqrt{p}.\, z_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_1} \\ y_1 = \lambda_1\sqrt{q}.\, z_1 - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_1} \end{cases} \qquad g_2) \quad \begin{cases} x_2 = \lambda_2\sqrt{p}.\, z_2 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda_2} \\ y_2 = -\lambda_2\sqrt{q}.\, z_2 + \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda_2} \end{cases}$$

Procedendo come nel caso precedente, si trovano pei coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ valori che si deducono dai precedenti semplicemente cangiando $\sqrt{q'}$ in $-\sqrt{q'}$, *e cangiando di segno* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Con questo la sostituzione ortogonale cangia da diretta in inversa (determinante $= -1$), e il movimento rigido è sostituito da una simmetria.

CAPITOLO XXIII.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide ad una falda.

Formole per l'iperboloide ad una falda. - Formazione delle equazioni differenziali per le trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide. - Loro illimitata integrabilità. - L'affinità d'Ivory e le formole d'applicabilità. - Le trasformazioni B_k per le deformate rigate. - Proprietà generali delle B_k. - Caso particolare delle deformate dell'iperboloide rotondo. - Le trasformazioni B_k al limite come trasformazioni delle coniche distorte

§ 394.

Formole fondamentali per l'iperboloide ad una falda.

Nel presente Capitolo andiamo ad estendere i risultati ottenuti nel precedente per le deformate del paraboloide iperbolico alle deformate dell'altra quadrica rigata: *dell'iperboloide ad una falda.* I calcoli da eseguirsi sono affatto simili a quelli del caso già esaminato, onde potremo qui procedere più speditamente.

Scriviamo l'equazione della quadrica attuale, che indicheremo con Q_0, sotto la consueta forma

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

dove per fissare le idee riterremo che sia

$$a^2 \geq b^2,$$

e riferiamo l'iperboloide alle sue generatrici u, v scrivendone le equazioni parametriche (asintotiche):

$$(1) \qquad x_0 = a\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad y_0 = b\,\frac{u-v}{u+v}, \quad z = c\,\frac{1-uv}{u+v}.$$

Per le quantità fondamentali troviamo i valori:

$$ds_0^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

dove :

$$(2)\qquad \begin{cases} E = \dfrac{(a^2+c^2)\,v^4 + 2\,(c^2 - a^2 + 2\,b^2)\,v^2 + a^2 + c^2}{(u+v)^4} \\ F = \dfrac{(a^2+c^2)\,u^2v^2 + (c^2 - a^2)\,(u^2+v^2) - 4\,b^2\,uv + a^2 + c^2}{(u+v)^4} \\ G = \dfrac{(a^2+c^2)\,u^4 + 2\,(c^2 - a^2 + 2\,b^2)\,u^2 + a^2 + c^2}{(u+v)^4}, \end{cases}$$

indi

$$(2^*)\qquad EG - F^2 = 4\,\frac{a^2\,b^2\,(1-uv)^2 + b^2\,c^2\,(1+uv)^2 + a^2\,c^2\,(u-v)^2}{(u+v)^6},$$

inoltre abbiamo

$$(3)\qquad D_0 = D''_0 = 0\ ; \qquad D'_0 = -\frac{4\,a\,b\,c}{(u+v)^4\,\sqrt{EG-F^2}}\ ,$$

e quindi per la curvatura K

$$(4)\qquad K = -\frac{1}{\rho^2}\ ,\quad \rho = \frac{a^2\,b^2\,(1-u\,v)^2 + b^2\,c^2\,(1+u\,v)^2 + a^2\,c^2\,(u-v)^2}{a\,b\,c\,(u+v)^2}\ ,$$

In fine i valori dei simboli di CHRISTOFFEL sono ora

$$(5)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = -\dfrac{2}{u+v}\ , \quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0 \\ \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial\, v}\ , \qquad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial\, u}\ . \end{cases}$$

Prendiamo ora un secondo iperboloide rigato Q_k confocale a Q_0 e sia

$$Q_k)\qquad \frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} - \frac{z^2}{c^2-k} = 1$$

la sua equazione, dove dunque k avrà un valore arbitrario nell'intervallo $(-b^2,\ c^2)$

$$-b^2 \leq k^2 \leq c^2.$$

Anche qui, come nel caso del paraboloide (§ 378), escludiamo bensì il valore $k = 0$, ma non i valori estremi $k = -b^2$, $k = c^2$ corrispondenti rispettivamente all'iperbola ed all'ellisse focale.

Indichiamo con a', b', c' i valori dei semiassi dell'iperboloide Q_k :

$$(6)\qquad a' = \sqrt{a^2+k}\ , \qquad b' = \sqrt{b^2+k}\ , \qquad c' = \sqrt{c^2-k}$$

e scriviamo le equazioni dei due sistemi di generatrici di Q_k sotto la forma

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \varepsilon\,\dfrac{a'}{c'}\ \text{sen}\,\theta\ .\ z + a'\cos\theta \\ y = -\varepsilon\,\dfrac{b'}{c'}\ \cos\theta\ .\ z + b'\ \text{sen}\,\theta, \end{cases}$$

dove θ è il parametro variabile che fissa la generatrice nel suo sistema ed è $\varepsilon = +1$ per il primo sistema di generatrici, $\varepsilon = -1$ pel secondo.

Consideriamo ora, come al § 378, la conica C sezione del piano tangente a Q_0 nel punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ colla quadrica confocale Q_k. Un punto qualunque $(\bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0)$ di questa conica avrà coordinate della forma

$$\bar{x}_0 = x_0 + l\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\,\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

e noi dovremo calcolare i valori di l, m in funzione di u, v, θ. Dalle (1) risulta :

$$(8)\qquad \begin{cases} \bar{x}_0 = a\,\dfrac{(u+v)\,(1+u\,v) + (v^2-1)\,l + (u^2-1)\,m}{(u+v)^2} \\ \bar{y}_0 = b\,\dfrac{(u+v)\,(u-v) + 2\,v\,l - 2\,u\,m}{(u+v)^2} \\ \bar{z}_0 = c\,\dfrac{(u+v)\,(1-u\,v) - (v^2+1)\,l - (u^2+1)\,m}{(u+v)^2}\ , \end{cases}$$

e introducendo questi valori nelle (7) per x, y, z, otteniamo per l, m due equazioni lineari, la cui risoluzione dà

$$(9)\qquad l = (u+v)\,\frac{U}{W}\ ,\quad m = (u+v)\,\frac{V}{W}\ ,$$

dove U, V, W si esprimono per u, v, θ colle formole seguenti :

$$(10)\qquad \begin{cases} U = \left(\varepsilon\,\dfrac{a\,c}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right) 2u\cos\theta + \left(\varepsilon\,\dfrac{b\,c}{b'c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\,\text{sen}\,\theta + \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} - \varepsilon\,\dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1) \\ V = -\left(\varepsilon\,\dfrac{a\,c}{a'c'} + \dfrac{b}{b'}\right) 2v\cos\theta + \left(\varepsilon\,\dfrac{b\,c}{b'c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(v^2-1)\,\text{sen}\,\theta + \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} + \varepsilon\,\dfrac{c}{c'}\right)(v^2+1) \\ W = 2\left\{\varepsilon\,\dfrac{a\,c}{a'c'}\,(u-v)\cos\theta - \varepsilon\,\dfrac{b\,c}{b'c'}\,(1+u\,v)\,\text{sen}\,\theta + \dfrac{a\,b}{a'b'}\,(1-u\,v)\right\}\ . \end{cases}$$

Si osserverà (cf. § 378) che il passaggio dall'un segno all'altro di ε equivale a scambiare u con v, cangiando in pari tempo θ in $-\theta$.

§ 395.

Alcune identità fondamentali.

Anche qui, come nel caso del paraboloide (§ 379), occorre premettere la dimostrazione di alcune identità ausiliarie che hanno luogo fra le quantità introdotte.

Se nelle (8) teniamo θ costante, il punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ descrive una generatrice dell'iperboloide Q_k e possiamo applicare le formole generali del § 377. Per le (5) le quantità L, M, P, Q hanno ora i seguenti valori L_0, M_0, P_0, Q_0:

$$(11)\qquad \begin{cases} L_0 = \dfrac{\partial l}{\partial u} - \dfrac{2\,l}{u+v} + \dfrac{m}{2}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} + 1\,, \quad M_0 = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{m}{2}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial u} \\ P_0 = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{l}{2}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} \qquad\qquad , \quad Q_0 = \dfrac{\partial m}{\partial v} - \dfrac{2\,m}{u+v} + \dfrac{l}{2}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial u} + 1, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = L_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0\, m\, X_0 \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0\, l\, X_0\,, \end{cases}$$

Ma siccome θ rimane fisso, il punto $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ descrive una retta e sussistono quindi le proporzioni (cf. § 379)

$$\frac{L_0}{P_0} = \frac{M_0}{Q_0} = \frac{m}{l}\,,$$

cioè le identità

$$(73)\qquad l\,L_0 - m\,P_0 = 0, \quad l\,M_0 - m\,Q_0 = 0,$$

per ciò anche

$$(13^*)\qquad l\,(l\,M_0 - m\,L_0) = m\,(l\,Q_0 - m\,P_0).$$

Ponendo i valori (11) di L_0, M_0, Q_0 nei primi membri delle (13) otteniamo

$$\begin{cases} l\dfrac{\partial l}{\partial u} - m\dfrac{\partial l}{\partial v} - \dfrac{2\,l^2}{u+v} + l = 0 \\ l\dfrac{\partial m}{\partial u} - m\dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{2\,m^2}{u+v} - m = 0\,, \end{cases}$$

e sostituendo i valori (9) per l, m, coll'avvertenza che U non contiene v, e V non contiene u, usando nuovamente le notazioni

$$U' = \frac{\partial U}{\partial u}\,, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial v}\,,$$

le identità scritte si convertono nelle altre

$$\begin{cases} (u+v)\left(U'\,W - U\dfrac{\partial W}{\partial u} + V\dfrac{\partial W}{\partial v}\right) + W^2 - W\,(U+V) = 0 \\ (u+v)\left(V'\,W + U\dfrac{\partial W}{\partial u} - V\dfrac{\partial W}{\partial v}\right) + W^2 - W\,(U+V) = 0\,, \end{cases}$$

da cui sommando si ha l'altra da notarsi per il seguito

$$(14)\qquad (u+v)\,(U'+V') = 2\,U + 2\,V - 2\,W.$$

Un'altra identità di fondamentale importanza risulta dal paragonare il valore dell'espressione

$$l\,M_0 - m\,L_0 = l\frac{\partial m}{\partial u} - m\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{lm}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial u} - \frac{m^2}{2}\frac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} + \frac{2\,lm}{u+v} - m$$

col binomio

$$m\frac{\partial l}{\partial \theta} - l\frac{\partial m}{\partial \theta}\,.$$

Dividendo la prima espressione per il secondo binomio abbiamo successivamente:

$$\frac{l\,M_0 - m\,L_0}{m\dfrac{\partial l}{\partial\theta} - l\dfrac{\partial m}{\partial\theta}} = \frac{\dfrac{l}{2m}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\, log\,\rho}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{l}{m}\right) + \dfrac{2}{u+v}\dfrac{l}{m} - \dfrac{1}{m}}{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{l}{m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\,\frac{\dfrac{U}{2V}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{U}{V}\right) + \dfrac{2\rho}{u+v}\dfrac{U}{V} - \dfrac{\rho\,W}{(u+v)V}}{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{U}{V}\right)} =$$

$$= \frac{V}{\rho}\,\frac{\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + \dfrac{2\rho}{u+v}\right)U - \rho\,U' - \dfrac{V}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} - \dfrac{\rho W}{u+v}}{V\dfrac{\partial U}{\partial\theta} - U\dfrac{\partial V}{\partial\theta}}\,,$$

ciò che possiamo scrivere

$$(15)\qquad \frac{(u+v)^2\rho}{V}\,\frac{l\,M_0 - m\,L_0}{m\dfrac{\partial l}{\partial\theta} - l\dfrac{\partial m}{\partial\theta}} = \frac{\left[\dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2(u+v)\rho\right]U - (u+v)^2\rho\,U' - \dfrac{(u+v)^2}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}V - (u+v)\rho\,W}{V\dfrac{\partial U}{\partial\theta} - U\dfrac{\partial V}{\partial\theta}}.$$

Ora per la (4) si ha

$$\rho = \frac{a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2}{abc(u+v)^2},$$

da cui

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{b^2c^2v(1+uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)}{abc(u+v)^2} - \frac{\rho}{u+v}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v} = \frac{b^2c^2u(1+uv) - a^2c^2(u-v) - a^2b^2u(1-uv)}{abc(u+v)^2} - \frac{\rho}{u+v},$$

e quindi, indicando per un momento con Φ il numeratore nel secondo membro della (15), risulta:

$$(\alpha)\quad \Phi = \left[\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2(u+v)\rho\right]U - (u+v)^2U' - \frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}V - (u+v)\rho W =$$

$$= \frac{1}{abc}\left[b^2c^2v(1+uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)\right]U - \frac{1}{abc}\left[b^2c^2u(1+uv) -\right.$$

$$\left. - a^2c^2(u-v) - a^2b^2u(1-uv)\right]V + \rho(u+v)(U+V-W) - (u+v)^2\rho U'.$$

Questa, osservando l'identità (14), si scrive anche

$$\Phi = \frac{1}{abc}\left[a^2b^2(1-uv)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2\right]\frac{V-U'}{2} +$$

$$+ \frac{1}{abc}\left[b^2c^2v(1+uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)\right]U$$

$$+ \frac{1}{abc}\left[-b^2c^2u(1+uv) + a^2c^2(u-v) + a^2b^2u(1-uv)\right]V.$$

Se ora, per mezzo dei valori espliciti (10) per U, V, W, si calcolano i valori del numeratore Φ e del denominatore

$$V\frac{\partial U}{\partial\theta} - U\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

si trova dopo facili riduzioni

$$(\beta)\qquad \Phi = \varepsilon\frac{a'b'c'}{k}\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta} - U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right).$$

Si ha dopo ciò dall'(15) la seguente identità che volevamo stabilire:

$$(16)\qquad \frac{1}{V}(l\,M_0 - m\,L_0) = \varepsilon\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta} - l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right).$$

§ 396.

Equazioni differenziali per le trasformazioni B_k.

Per giungere alle trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide ad una falda dobbiamo in primo luogo, analogamente come al § 380, stabilire le formole per l'orientazione delle faccette trasformate f_1 e dedurne poi le equazioni differenziali del problema. Le coordinate $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ del centro di queste faccette f_1 sono date dalle (8), ed ora conviene anche calcolare i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale al loro piano π_1, e ponendo (cf. § 380)

$$X_1 = A\frac{\partial x_0}{\partial u} + B\frac{\partial x_0}{\partial v} + C\,X_0, \text{ ecc.}$$

avremo per determinare A, B, C (quantità proporzionali) le due condizioni

$$S\,X_1(\bar{x}_0 - x_0) = 0\ ,\quad S\,X_1\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} = 0.$$

Procedendo come al paragrafo ora citato, ne risultano le proporzioni

$$A : B : C = D'_0m(Fl+Gm) : -D'_0m(El+Fm) : (EG-F^2)(lM_0 - mL_0).$$

e siccome (pag. 322)

$$EG-F^2 = \frac{4abc\rho}{(u+v)^4},\quad D'_0 = -\frac{2\sqrt{abc}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}},\quad m = (u+v)\frac{V}{W},$$

possiamo scrivere, indicando con R un fattore di proporzionalità

$$(17)\quad A = -R(Fl+Gm),\ B = R(El+Fm),\ C = \frac{2R\sqrt{abc}\,\rho^{\frac{3}{2}}}{(u+v)^2m}(lM_0 - mL_0),$$

e dare a C la doppia forma

$$(17^*) \qquad C = \frac{2R\sqrt{abc.\rho}}{(u+v)^2}\cdot\frac{\rho}{m}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0) = \frac{2R\sqrt{abc.\rho}}{(u+v)^2}\cdot\frac{\rho}{l}(l\mathrm{Q}_0 - m\mathrm{P}_0).$$

Il fattore R è determinato dalla condizione

$$EA^2 + 2FAB + GB^2 + C^2 = 1,$$

onde si trae

$$(18) \qquad R^2 = \frac{(u+v)^4}{4abc\rho\left[\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0)^2\right]},$$

dove

$$\delta = \sqrt{El^2 + 2Flm + Gm^2}$$

è ancora qui la distanza fra i centri delle due faccette f, f_1. Indicando poi con Ω l'angolo d'inclinazione dei loro piani, abbiamo

$$\cos\Omega = \frac{\frac{\rho}{m}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0)}{\sqrt{\delta^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0)^2}},$$

indi come al § 380

$$(19) \qquad \frac{\delta}{\mathrm{sen}^2\Omega} = El^2 + 2Flm + Gm^2 + \frac{\rho^2}{m^2}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0)^2.$$

Ciò premesso consideriamo una qualunque deformata S dell'iperboloide Q_0, di cui la prima forma fondamentale sarà il ds_0^2 di Q_0 e la seconda si indicherà con

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Dopo la deformazione dell'iperboloide Q_0 in S le coordinate x_1, y_1 z_1 del centro di una faccetta f_1 sono (§ 377).

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

dove l, m hanno i valori (9), (10) e i coseni di direzione della normale al piano di f_1

$$X_1 = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + CX, \text{ ecc.}$$

con A, B, C dati dalle (17). Per le ragioni stesse che al § 381, volendo provare che le ∞^3 faccette f_1 formano una moltiplicità stratificabile dobbiamo dimostrare che si può determinare la funzione incognita θ di u, v, e *di una costante arbitraria*, in guisa da soddisfare alle due equazioni:

$$(20) \qquad \mathrm{S}\,X_1\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \mathrm{S}\,X_1\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

Ora abbiamo (cf. § 381)

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \mathrm{L}_0\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}_0\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} + (Dl + D'm)X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{P}_0\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}_0\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} + (D'l + D''m)X, \end{cases}$$

e formando le (20) risulta dapprima:

$$(22) \quad \begin{cases} (EA+FB)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FA+GB)\frac{\partial m}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\theta}{\partial u} + (EA+FB)\mathrm{L}_0 + (FA+GB)\mathrm{M}_0 + (Dl+D'm)C = 0 \\ (EA+FB)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (FA+GB)\frac{\partial m}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\theta}{\partial v} + (EA+FB)\mathrm{P}_0 + (FA+GB)\mathrm{Q}_0 + (D'l+D''m)C = 0. \end{cases}$$

Ma per le (17) si ha

$$EA + FB = -R(EG - F^2)m = -\frac{4abc\rho\,Rm}{(u+v)^4}$$

$$FA + GB = R(EG - F^2)l = \frac{4abc\rho\,Rl}{(u+v)^4}$$

$$C = \frac{2R\sqrt{abc\rho}}{(u+v)^2}\frac{\rho}{m}(l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0) = \frac{2R\sqrt{abc\rho}}{(u+v)^2}\frac{\rho}{l}(l\mathrm{Q}_0 - m\mathrm{P}_0),$$

e sostituendo questi valori nelle (22) e dividendo per $\frac{4abc\rho R}{(u+v)^4}$ si ottiene:

$$\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta} - l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} = (l\mathrm{M}_0 - m\mathrm{L}_0)\cdot\left\{1 + \frac{(u+v)^2\sqrt{\rho}}{2m\sqrt{abc}}(Dl + D'm)\right\}$$

$$\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta} - l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v} = (l\mathrm{Q}_0 - m\mathrm{P}_0)\left\{1 + \frac{(u+v)^2\sqrt{\rho}}{2l\sqrt{abc}}(D'l + D''m)\right\}$$

A causa in fine dell'identità (16)

$$m\frac{\partial l}{\partial\theta}-l\frac{\partial m}{\partial\theta}=\varepsilon\frac{k(u+v)^2\rho}{a'b'c'V}(l\,M_0-m\,L_0)=\varepsilon\frac{k(u+v)^2\rho}{a'b'c'U}(l\,Q_0-m\,P_0),$$

le precedenti assumono la forma definitiva

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=\dfrac{\varepsilon a'b'c'}{k}\left\{\dfrac{V}{(u+v)^2\rho}+\dfrac{DU+D'V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}\\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\dfrac{\varepsilon a'b'c'}{k}\left\{\dfrac{U}{(u+v)^2\rho}+\dfrac{DU'+D''V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}.\end{cases}$$

Queste sono le equazioni differenziali per la funzione incognita $\theta\,(u,v)$ che regolano, nel caso attuale delle deformate dell'iperboloide Q_0, la stratificazione delle ∞^3 faccette f_1, e sono le corrispondenti alle (I) pag. 288 trovate pel paraboloide. Si osservi che, essendo per le (10) U, V polinomii lineari interi in cos θ, sen θ, basta introdurre per funzione incognita $\lambda=\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, e le (I) acquistano nuovamente la forma di RICCATI.

§ 397.

Illimitata integrabilità del sistema (I).

Dobbiamo ora effettuare la ricerca analoga a quelle del § 382 e provare che anche qui le equazioni differenziali (I) costituiscono un sistema completamente integrabile. Per questo bisogna nuovamente tener conto delle equazioni di GAUSS e CODAZZI cui soddisfano D, D′, D″, le quali nel caso attuale si scrivono

$$(a)\qquad DD''-D'^2=-\frac{4abc}{(u+v)^4\rho}$$

$$(b)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{\rho}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{\rho}}\right)=\left(\dfrac{\partial\,log\,\rho}{\partial u}+\dfrac{2}{(u+v)}\right)\dfrac{D'}{\sqrt{\rho}}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{\rho}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{\rho}}\right)=\left(\dfrac{\partial\,log\,\rho}{\partial v}+\dfrac{2}{(u+v)}\right)\dfrac{D'}{\sqrt{\rho}}.\end{cases}$$ (*)

(*) Le equazioni di CODAZZI sono qui prese sotto la seconda forma (I pag. 176) tenendo presenti le (51) e la (2*) dalla quale segue

$$\sqrt{EG-F^2}=\frac{2\sqrt{abc\rho}}{(u+v)^2}$$

Ed ora per provare l'illimitata integrabilità del sistema (I) costruiamo l'espressione (cf. § 382):

$$\Theta=\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{V}{(u+v)^2\rho}+\frac{1}{2\sqrt{abc}}\left(\frac{D}{\sqrt{\rho}}U+\frac{D'}{\sqrt{\rho}}V\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{U}{(u+v)^2\rho}+\frac{1}{2\sqrt{abc}}\left(\frac{D'}{\sqrt{\rho}}U+\frac{D''}{\sqrt{\rho}}V\right)\right\}$$

e dimostriamo che, in forza delle (I) stesse, è identicamente $\Theta=0$.

Eseguiamo le derivazioni nel secondo membro ricordando che θ entra soltanto in U, V, e per le derivate di θ rapporto ad u, v sostituiamo i valori dati dalle (1). Così si trova per Θ questa prima espressione:

$$\Theta=\frac{V'-U'}{(u+v)^2\rho}+\frac{U}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}-\frac{V}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\frac{2(U-V)}{(u+v)^3\rho}+\frac{U}{2\sqrt{abc}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{\rho}}\right)\right\}-$$
$$-\frac{V}{2\sqrt{abc}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{\rho}}\right)\right\}+\frac{D'(V'-U')}{2\sqrt{abc\rho}}+\frac{\varepsilon a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\frac{\partial V}{\partial\theta}\left\{\frac{U}{(u+v)\rho^2}+\frac{D'U+D''V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}-$$
$$-\frac{\varepsilon a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\left\{\frac{V}{(u+v)^2\rho}+\frac{DU+D'V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}+\frac{\varepsilon a'b'c'}{2k\sqrt{abc\rho}}\left(D\frac{\partial U}{\partial\theta}+D'\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{U}{(u+v)^2\rho}+\frac{D'U+D''V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}-\frac{\varepsilon a'b'c'}{2k\sqrt{abc\rho}}\left(D'\frac{\partial U}{\partial\theta}+D''\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\left\{\frac{V}{(u+v)^2\rho}+\frac{DU+D'V}{2\sqrt{abc\rho}}\right\}.$$

Ora, nel secondo membro, ai binomii

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{\rho}}\right),\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{\rho}}\right)$$

si sostituiscano i valori dati dalle formole (*b*) di CODAZZI, e in secondo luogo si modifichino gli ultimi termini osservando che per la (*a*) di GAUSS

$$\left(D\frac{\partial U}{\partial\theta}+D'\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\left(D'U+D''V\right)-\left(D'\frac{\partial U}{\partial v}+D''\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\left(DU+D'V\right)=$$
$$=\left(DD''-D'^2\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta}-U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=-\frac{4abc}{(u+v)^4\rho}\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta}-U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

Così l'espressione Θ diventa lineare intera con D, D′, D″, scriviamo ancora

$$\Theta=\alpha D+\beta D'+\gamma D''+\delta;$$

ma si trova subito

$$\alpha=\gamma=0$$

e per gli altri due coefficienti β, δ si ha

$$(23)\quad 2\sqrt{a\,b\,c\,\rho}\,.\,\beta = (u+v)\,\rho\,.\,\delta = V' - U' + \frac{U}{\rho}\frac{\partial\,\rho}{\partial\,u} - \frac{V}{\rho}\frac{\partial\,\rho}{\partial\,v} + \\ + \frac{2\,(U-V)}{u+v} + 2\,\varepsilon'\,\frac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)^2\rho}\left(U\frac{\partial V}{\partial\,\theta} - V\frac{\partial U}{\partial\,\theta}\right),$$

da cui facilmente deduciamo che anche β e δ sono nulli. E infatti dalla identità (14) pag. 325 abbiamo

$$\frac{(u+v)^2\,\rho}{2}\left\{V' - U' + U\frac{\partial\,log\,\rho}{\partial\,u} - V\frac{\partial\,log\,\rho}{\partial\,v} - \frac{2\,(U-V)}{u+v}\right\} = \\ = \left\{\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\,\rho}{\partial\,u} + 2\,(u+v)\,\rho\right\}U - (u+v)^2\,\rho\,U' - \frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\,\rho}{\partial\,v}V - (u+v)\,\rho\,W,$$

e questa è precisamente la quantità ausiliaria Φ introdotta a pag. 326 colla formola (α), onde le (23) possono scriversi

$$2\sqrt{a\,b\,c\,\rho}\,.\,\beta = (u+v)^2\,\rho\,.\,\delta = \frac{2}{(u+v)^2\rho}\,\Phi + 2\varepsilon\,\frac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)\rho^2}\left(U\frac{\partial V}{\partial\,\theta} - U\frac{\partial U}{\partial\,\theta}\right),$$

ed il secondo mebro, a causa della formola (β) pag. 327, in effetto si annulla.

Dimostrata così l'illimitata integrabilità del sistema differenziale (I), resta stabilito anche per le deformate dell'iperboloide ad una falda il teorema generale A) § 376 nella sua prima parte ; e la seconda verrà provata nei paragrafi seguenti.

Le ∞^1 superficie S_1 nelle quali si distribuiscono così le ∞^3 faccette derivate f_1 si diranno anche qui derivate dalla primitiva S per *trasformazioni* B_h ; ed è manifesto, senza ripetere le considerazioni svolte al § 382 per le deformate del paraboloide iperbolico, che valgono anche qui le stesse conseguenze, in particolare il teorema finale di quel paragrafo.

§ 398.

Calcolo del ds_1^2 per la superficie S_1 trasformate.

Per dimostrare anche nel caso attuale che ciascuna delle S_1 trasformate è applicabile sulla quadrica fondamentale Q_0, occorre innanzi tutto calcolare per queste S_1 il quadrato dell'elemento lineare :

$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Dalle equazioni (21) deduciamo intanto :

$$(24)\quad \begin{cases} E_1 = E\,L_0^2 + 2\,F\,L_0\,M_0 + G\,M_0^2 + 2\left\{(EL_0+FM_0)\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta} + (FL_0+GM_0)\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right\}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,u} + \\ \qquad + \left\{E\left(\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\right)^2 + 2\,F\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\frac{\partial m}{\partial\,\theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{\partial\,\theta}{\partial\,u}\right)^2 + (D\,l + D'\,m)^2, \\ F_1 = EL_0P_0 + F(L_0Q_0 + M_0P_0) + GM_0Q_0 + \left\{(EP_0+FQ_0)\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta} + (FP_0+GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right\}\cdot\frac{\partial\,\theta}{\partial\,u} + \\ + \left\{(EL_0+FM_0)\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta} + (FL_0+GM_0)\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right\}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,v} + \left\{E\left(\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\right)^2 + 2\,F\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\frac{\partial m}{\partial\,\theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2\right\}\cdot \\ \qquad \frac{\partial\,\theta}{\partial\,u}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,v} + (D\,l + D'\,m)\,(D'\,l + D''\,m), \\ G_1 = E\,P_0^2 + 2\,F\,P_0\,Q_0 + G\,Q_0^2 + 2\left\{(EP_0+FQ_0)\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta} + (FP_0+GQ_0)\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right\}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,v} + \\ \qquad + \left\{E\left(\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\right)^2 + 2\,F\frac{\partial\,l}{\partial\,\theta}\frac{\partial m}{\partial\,\theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial\,\theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{\partial\,\theta}{\partial\,v}\right)^2 + (D'\,l + D''\,m)^2. \end{cases}$$

Anche qui semplifichiamo i calcoli prendendo in considerazione il caso speciale che la deformata S coincida coll'iperboloide stesso e si abbia quindi

$$D = D'' = 0, \quad D' = -\frac{2\sqrt{a\,b\,c}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}},$$

valori pei quali si annullano i secondi membri delle equazioni differenziali (I), cosicchè θ = cost^{te} è il loro integrale, e questo geometricamente si-

ebbiamo

$$\bar{x}_0 = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v}, \text{ ecc.} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = L_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + M_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 m X_0 \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + D'_0 l X_0, \text{ ecc.} \end{cases} \tag{26}$$

ed applicando le (24) ne seguono le formole

$$\begin{cases} E L_0^2 + 2 F L_0 M_0 + G M_0^2 = E_0 - D'^2_0 m^2 \\ E L_0 P_0 + F (L_0 Q_0 + M_0 P_0) + G M_0 Q_0 = F_0 - D'_0 . l m \\ E P_0^2 + 2 F P_0 Q_0 + G Q_0^2 = G_0 - D'^2_0 . l^2. \end{cases} \tag{27}$$

Per determinare gli altri coefficienti nei secondi membri delle (24), procediamo nel modo seguente (cf. § 385). A causa delle (7) (pag. 323), abbiamo

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = \varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\,\bar{x}_0 + a'\cos\theta \\ \bar{y}_0 = -\varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\,\bar{x}_0 + b'\operatorname{sen}\theta \end{cases} \tag{27*}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = \varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = \varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} = -\varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} = -\varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}, \end{cases} \tag{28}$$

Se costruiamo, mediante le (26), le somme

$$S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \quad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \quad S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}, \quad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v},$$

otteniamo

$$\begin{cases} EL_0 + FM_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right\} \\ F L_0 + G M_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right\} \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} EP_0 + FQ_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right\} \\ EP_0 + FQ_0 = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right\} \end{cases} \tag{29*}$$

Ora, a causa delle (25) abbiamo

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta}\frac{\partial x_0}{\partial v}, \text{ ecc.} \tag{30}$$

e quindi se in ciascuna coppia di equazioni (29), (29*) moltiplichiamo la prima equazione per $\dfrac{\partial l}{\partial \theta}$, la seconda per $\dfrac{\partial m}{\partial \theta}$ e sommiamo, risulta:

$$\begin{cases} (EL_0 + FM_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (FL_0 + GM_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right\} \\ (EP_0 + FQ_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right\} \end{cases} \tag{31}$$

In fine dalle (30), quadrando e sommando, abbiamo

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2 + 2F\frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial m}{\partial \theta} + G\left(\frac{\partial m}{\partial \theta}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2, \tag{31*}$$

e colle formole così stabilite le (24) prendono la forma:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 + 2\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right\}\cdot\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + (Dl + D'm)^2 - D'^2_0 m^2, \\ F_1 = F_0 + \left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right\}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + (Dl + D'm)(D'l + D''m) - D'^2_0 . lm, \\ G_1 = G_0 + 2\left\{\varepsilon\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \varepsilon\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right\}\cdot\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \\ \qquad + S\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 + (D'l + D''m)^2 + D'^2_0 . l^2. \end{cases} \tag{32}$$

§ 399.

Affinità d'Ivory a formole d'applicabilità.

Come nel caso delle deformate del paraboloide (§ 386), noi andremo anche qui a verificare che le formole d'applicabilità della superficie trasformata S_1 sulla primitiva sono fornite dall'affinità d'IVORY fra le due quadriche confocali:

$$Q_0 \qquad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

$$Q_k \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Le formole per l'affinità d'IVORY sono nel caso attuale

$$x=\frac{a'}{a}\,x_0, \quad y=\frac{b'}{b}\,y_0, \quad z=\frac{c'}{c}\,z_0,$$

e da queste dedurremo nuovamente le formole per l'applicabilità di S_1 su S nel modo seguente. Se pensiamo di applicare la superficie S coi segmenti tangenti FF_1 sull'iperboloide Q_0, il punto $F \equiv (x, y, z)$ viene a sovrapporsi al punto $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di Q_0, ed il secondo estremo F_1 prende la posizione $\overline{M}_0 \equiv (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ sull'iperboloide confocale Q_k. Sia ora $M_1 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ il punto di Q_0 che corrisponde a M_0 nell'affinità d'IVORY, onde avremo

$$(33) \qquad \frac{\xi}{a}=\frac{\bar{x}_0}{a'}\ ,\ \frac{\eta}{b}=\frac{\bar{y}_0}{b'}\ ,\ \frac{\zeta}{c}=\frac{\bar{z}_0}{c'}$$

Se indichiamo con u_1, v_1 le coordinate curvilinee di M_1, avremo per le le (1) pag. 321

$$(33^*) \qquad \frac{\xi}{a}=\frac{1+u_1v_1}{u_1+v_1}\ ,\ \frac{\eta}{b}=\frac{u_1-v_1}{u_1+v}\ ,\ \frac{\zeta}{c}=\frac{1-u_1v_1}{u_1+v_1},$$

e per ciò:

$$(34) \qquad \begin{cases} u_1=\dfrac{1+\dfrac{\eta}{b}}{\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\zeta}{c}}=\dfrac{1+\dfrac{\bar{y}_0}{b'}}{\dfrac{\bar{x}_0}{a'}+\dfrac{\bar{z}_0}{c'}} \\ v_1=\dfrac{1-\dfrac{\eta}{b}}{\dfrac{\xi}{a}+\dfrac{\zeta}{c}}=\dfrac{1-\dfrac{\bar{y}_0}{b'}}{\dfrac{\bar{x}_0}{a'}+\dfrac{\bar{z}_0}{c'}} \end{cases}$$

Se in queste poniamo per $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ i loro valori espressi per $\bar{x}_0$ colle (27*) pag. 334, dovremmo propriamente separare il caso $\varepsilon=+1$ dall'altro $\varepsilon=-1$. Ma è chiaro che il passaggio dal primo al secondo caso equivale a scambiare u_1 con v_1 cangiando il segno di θ, e per l'osservazione alla fine del § 394 i due casi non differiscono quindi che per un cangiamento di notazioni. Possiamo dunque limitarci a supporre in tutte le nostre formole $\varepsilon = +1$, come ora faremo.

Se allora poniamo nelle (34) i valori (27*)

$$\begin{cases} \bar{x}_0=\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\,\bar{z}_0+a'\cos\theta \\ \bar{y}_0=-\dfrac{b'}{c'}\cos\theta\,\bar{z}_0+b'\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

abbiamo dapprima

$$(34^*) \qquad u_1=\frac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\,\dfrac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta+(1+\operatorname{sen}\theta)\,\dfrac{\bar{z}_0}{c'}}\ ,\quad v_1=\frac{1-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\,\dfrac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta+(1+\operatorname{sen}\theta)\,\dfrac{\bar{z}_0}{c'}},$$

dove però nella seconda, a causa di

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta},$$

la v_1 riesce indipendente da $\bar{z}_0$. Se poi poniamo nella prima il valore dato dalla terza delle (8) per $\bar{z}_0$

$$\bar{z}_0=c\,\frac{(1-uv)\,W-(v^2+1)\,U-(u^2+1)\,V}{(u+v)\,W},$$

calcolando troviamo

$$(35) \qquad \bar{z}_0=\frac{2c}{W}\left\{\frac{b}{b'}(1+uv)\cos\theta+\frac{a}{a'}(u-v)\operatorname{sen}\theta-\frac{ab}{a'b'}(u+v)\right\},$$

e quindi per le equazioni finali richieste

$$(36) \qquad \begin{cases} u_1=\dfrac{\dfrac{b}{b'}\left\{\dfrac{a}{a'}(1-uv)-\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right\}.(1+\operatorname{sen}\theta)+\dfrac{ac}{a'c'}\left\{u-v+\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}.\cos\theta}{\dfrac{b}{b'}\left\{\dfrac{a}{a'}(1-uv)+\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right\}.\cos\theta+\dfrac{ac}{a'c'}\left\{u-v-\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}.(1+\operatorname{sen}\theta)} \\ v_1=\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Noi dobbiamo provare che queste sono le *formole d'applicabilità* della S_1 sull'iperboloide, che cioè ponendo:

$$d\bar{s}_1^2 = \overline{E}_1\, du_1^2 + 2\,\overline{F}_1\, du_1\, dv_1 + \overline{G}_1\, dv_1^2$$

$$\overline{E}_1 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_1}\right)^2, \quad \overline{F}_1 = S\frac{\partial \xi}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial v_1}, \quad \overline{G}_1 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial v_1}\right)^2, \tag{37}$$

si ha l'identità

$$\overline{E}_1\, du_1^2 + 2\,\overline{F}_1\, du_1\, dv_1 + \overline{G}_1\, dv_1^2 = E_1\, du^2 + 2\,F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2, \tag{38}$$

dove E_1, F_1, G_1 hanno i valori (32). Osservando che, per le (36), v_1 dipende solo da θ, le identità da dimostrarsi si riducono alle seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
E_1 &= \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \\
&\quad + \left\{\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2, \\
F_1 &= \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \\
&\quad + \left\{\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right\}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}, \\
G_1 &= \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \\
&\quad + \left\{\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

§ 400.

Prima trasformazione delle formole.

Per dimostrare le identità (39) conviene in primo luogo trasformarle alquanto, ciò che facciamo in modo analogo come al § 387. Dalle (37) deduciamo subito

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2, \quad \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2,$$

e per ciò dalle (33)

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 &= \frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2 + \frac{b^2}{b'^2}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\right)^2 + \frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\right)^2 \\
\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} &= \frac{a^2}{a'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} + \frac{b^2}{b'^2}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v} \\
\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 &= \frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2 + \frac{b^2}{b^2}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v}\right)^2 + \frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

Se qui sostituiamo per a^2, b^2, c^2 i rispettivi valori $a'^2 - k\ b'^2 - k,\ c'^2 + k$, osservando le (36), troviamo:

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2 = E_0, \quad \overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = F_0, \quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2 = G_0. \tag{40}$$

Ma dalle equazioni

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}, \text{ ecc.} \tag{40*}$$

moltiplicando per $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \eta}{\partial u_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}$ e addizionando, abbiamo

$$\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = S\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \xi}{\partial u_1},$$

indi

$$\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} = S\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{a^2}{a'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} + \frac{b^2}{b'^2}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}$$

$$\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} = S\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{a^2}{a'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} + \frac{b^2}{b'^2}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v},$$

cioè per le (28), essendo $\varepsilon = +1$:

$$\left\{\begin{aligned}
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\frac{a^2}{a'c'}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b^2}{b'c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \theta}\right\} \\
\left(\overline{E}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\frac{a^2}{a'c'}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b^2}{b'c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \theta}\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{41}$$

Ora prendiamo le equazioni

$$\bar{x}_0 = \frac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\,.\,\bar{x}_0 + a'\cos\theta$$

$$\bar{y}_0 = -\frac{b'}{c'}\cos\theta\,.\,\bar{x}_0 + b'\operatorname{sen}\theta$$

e con derivazione rapporto a θ deduciamo

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{c'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\theta}{c'}\bar{x}_0 - \operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{1}{b'}\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} = -\dfrac{\cos\theta}{c'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{c'}\bar{x}_0 + \cos\theta, \end{cases}$$

da cui

$$-\frac{\operatorname{sen}\theta}{a'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{b'}\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{1}{c'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = 1,$$

e per ciò:

$$\frac{a^2}{a'c'}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b^2}{b'c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{a'^2 - k}{a'c'}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b'^2 - k}{b'c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{c'^2 + k}{c'^2}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \frac{k}{c'}.$$

Così le equazioni (41) diventano:

$$(41^*)\qquad \begin{cases} \left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\left\{\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \dfrac{k}{c'}\right\} \\ \left(\overline{E}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{F}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\left\{\dfrac{a'}{c'}\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} + \dfrac{k}{c'}\right\}. \end{cases}$$

E infine quadrando e sommando le (40*), otteniamo

$$\overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{b^2}{b'^2}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2,$$

ovvero

$$(43)\quad \overline{E}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\,\overline{F}_1\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 + k\left\{\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2\right\}.$$

Sostituendo nelle (39) i valori (40), (41*), (43) e paragonando colle (32) ove si faccia $\varepsilon = +1$, siamo ora ridotti a verificare che sussistono le tre equazioni seguenti:

$$(44)\qquad \begin{cases} k\left\{\dfrac{1}{c'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{a'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{b'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{2k}{c'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + D'^2_0 m^2 = (Dl + D'm)^2, \\ k\left\{\dfrac{1}{c'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{a'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{b'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \dfrac{k}{c'}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \\ \qquad + D'^2_0 lm = (Dl + D'm)(D'l + D''m), \\ k\left\{\dfrac{1}{c'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{a'^2}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \dfrac{1}{b'^3}\left(\dfrac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2\right\}\cdot\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{2k}{c'}\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + D'^2_0 l^2 = (D'l + D''m)^2. \end{cases}$$

§ 401.

Conclusione della verifica.

Un'ultima trasformazione delle (44) ci porterà ora al risultato finale. Derivando le (35) rapporto ad u e v coll'osservare che $\bar{x}_0$ è lineare rispetto ad u come v, risultano le formole:

$$(45)\qquad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = -\frac{4abc\,V}{a'b'W^2}, \quad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = -\frac{4abc\,U}{a'b'W^2},$$

e successivamente si ha:

$$(46)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = \frac{4}{W^2}\left\{\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u-v)(1-uv) - \frac{ab^2c^2}{a'b'^2c'^2}(u+v)(1+uv)\right]\cos\theta - \right.$$
$$- \left[\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(1-uv)(1+uv) + \frac{a^2bc^2}{a'^2b'c'^2}(u-v)(u+v)\right]\operatorname{sen}\theta$$
$$\left. + \frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 + \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2\right\}.$$

Ma dalla (42) segue

$$(47)\quad \frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{2}{c'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{\bar{x}_0^2}{c'^2} - 1 = \frac{1}{W^2}\left(\frac{2W^2}{c'}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} - \frac{W^2\bar{x}_0}{c'^2} - W^2\right),$$

e siccome (pag. 323)

$$W = 2\left\{\frac{ac}{a'c'}(u-v)\cos\theta - \frac{bc}{b'c'}(1+uv)\operatorname{sen}\theta + \frac{ab}{a'b'}(1-uv)\right\},$$

e per la (35)

$$\frac{W\bar{x}_0}{c'} = 2\left\{\frac{b\,c}{b'c'}(1+u\,v)\cos\theta + \frac{a\,c}{a'c'}(u-v)\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{a\,b\,c}{a'b'c'}(u+v)\right\},$$

quadrando e sommando queste ultime due si ottiene:

$$W^2\frac{\bar{x}_0^2}{c'^2} + W^2 = 4\left\{\frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 + \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2 + \frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2 + \right.$$
$$+2\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u-v)(1-uv) - \frac{ab^2c^2}{a'b'^2c'^2}(u+v)(1+uv)\right]\cos\theta -$$
$$\left.-2\left[\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(1-uv)(1+uv) + \frac{a^2bc^2}{a'^2b'c'^2}(u-v)(u+v)\right]\mathrm{sen}\,\theta\right\}.$$

Dopo ciò se, mediante la (46), formiamo la quantità

$$\frac{2W^2}{c'}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} - W^2\frac{\bar{x}_0^2}{c'^2} - W^2$$

i termini in $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$ si distruggono e resta:

$$\frac{2W^2}{c'}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} - \frac{W^2\bar{x}_0^2}{c'^2} - W^2 = \frac{4}{a'^2b'^2c'^2}\left\{a'^2b^2c^2(1+uv)^2 + b'^2a^2c^2(u-v)^2 - \right.$$
$$\left. - c'^2a^2b^2(1-uv)^2 - a^2b^2c^2(u+v)^2\right\},$$

ovvero sostituendo entro parentesi ad a'^2, b'^2, c'^2 i valori a^2+k, b^2+k, c^2-k

$$\frac{2W^2}{c'}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta} - \frac{W^2\bar{x}_0^2}{c'^2} - W^2 = \frac{4k}{a'^2b'^2c'^2}\left\{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right\},$$

ed il secondo membro, per la (4) pag. 322 eguaglia

$$\frac{4\,k\,a\,b\,c}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\,\rho\,;$$

così la (47) diventa

$$\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{4\,k\,a\,b\,c\,(u+v)^2\rho}{a'^2\,b'^2\,c'^2\,.\,W^2}. \tag{48}$$

Ora sostituiamo nelle (44) i valori (45) e (48), e per D'^2_0, l, m i loro valori

$$D'^2_0 = \frac{4\,a\,b\,c}{(u+v)^4\,\rho}, \quad l = \frac{(u+v)\,U}{W}, \quad m = \frac{(u+v)\,V}{W}$$

e moltiplichiamo le tre equazioni per

$$\frac{a'^2\,b'^2\,c'^2\,W^2}{4\,k^2\,a\,b\,c\,(u+v)^2\,\rho},$$

dopo di che si mutano nelle tre seguenti:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{a'\,b'\,c'\,V}{k(u+v)^2\rho}\right)^2 = \frac{a'^2\,b'^2\,c'^2}{4\,k^2a\,b\,c\,\rho}(D\,U + D'\,V)^2$$
$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{a'\,b'\,c'\,V}{k(u+v)^2\rho}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{a'\,b'\,c'\,U}{k(u+v)^2\rho}\right) = \frac{a'^2\,b'^2\,c'^2}{4\,k^2a\,b\,c\,\rho}(DU+D'V)(D'U+D''V)$$
$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{a'\,b'\,c'\,U}{k(u+v)^2\rho}\right)^2 = \frac{a'^2\,b'^2\,c'^2}{4\,k^2a\,b\,c\,\rho}(D'\,U + D''\,V)^2.$$

Ma appunto dalle equazioni fondamentali (I) pag. 330, ove $\varepsilon=+1$, segue che queste tre relazioni sono identicamente verificate. Così abbiamo in effetto stabilita la seconda parte del teorema A) § 376 anche per le deformate dell'iperboloide e possiamo concludere:

Le ∞^1 *superficie* S_1 *che si deducono per una trasformazione* B_k *da una qualunque deformata* S *dell'iperboloide* Q_0 *ad una falda sono tutte applicabili sull'iperboloide stesso, e la legge di applicabilità della* S_1 *sulla* S *corrisponde all'affinità d'*Ivory *fra i due iperboloidi confocali* Q_0, Q_k.

§ 402.

Caso delle deformate rigate dell'iperboloide.

Come per le deformate del paraboloide iperbolico (§ 383), così anche per quelle dell'iperboloide ad una falda le trasformazioni B_k acquistano un particolare significato geometrico espressivo quando si applichino alle *deformate rigate*. Supponiamo che la deformata S dell'iperboloide sia una rigata R e le sue generatrici corrispondano, per deformazione continua, alle rette $v = \text{cost}^{te}$, dell'iperboloide Q_0, onde avremo

$$D = 0,\ D' = D'_0 = -\frac{2\sqrt{abc}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}},$$

e dalla seconda equazione (*b*) di CODAZZI (pag. 330)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{\rho}}\right) = 0\,,$$

per cui potremo porre

$$D'' = -(u+v)^2\,\rho\,D'\,.\,\varphi(v) = 2\sqrt{a\,b\,c\,\rho}\,.\,\varphi(v),$$

dove $\varphi(v)$ è una funzione della sola v che individua la particolare rigata R in considerazione.

Ma le equazioni fondamentali (I), avendosi

$$D = 0,\ D' = -\frac{2\sqrt{a\,b\,c}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}},\ D'' = 2\sqrt{a\,b\,c\,\rho}\,.\,\varphi(v)$$

si riducono alle

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0\,,\ \frac{\partial\theta}{\partial v} = \varepsilon\,\frac{a'\,b'\,c'}{k}\,\varphi(v)\,.\,V.$$

Dunque nel caso attuale θ è una funzione di v soltanto, assoggettata a soddisfare l'equazione del 1° ordine: $\frac{d\theta}{dv} = \varepsilon\,a'\,b'\,c'\,\frac{\varphi(v)}{k}\,.\,V$, cioè sostituendo per V il suo valore dalla media delle (10) § 394:

$$\text{(I*)}\qquad \frac{d\theta}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\Big\{(a'bc+\varepsilon ab'c')(v^2-1)\operatorname{sen}\theta-(ab'c+\varepsilon a'bc')2v\cos\theta+(a'b'c+\varepsilon abc')(v^2+1)\Big\}$$

equazione che nell'incognita $\lambda = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ assume la forma di RICCATI.

Mediante considerazioni perfettamente analoghe a quelle del § 383 si deduce di qui che sulle superficie trasformate S_1 le linee v=cost^{te} sono rette ed appartengono alla congruenza Γ generata dalle rette del primo o del secondo sistema dell'iperboloide omofocale Q_k trascinato dal fondamentale Q_0 nel rotolamento sopra R. Si ha così il teorema:

B) Se l'iperboloide ad una falda Q_0 *rotola sopra qualunque sua deformata rigata e trascina seco invariabilmente l'iperboloide omofocale; le rette dell'uno o dell'altro sistema di* Q_k *generano una congruenza* Γ (o $\overline{\Gamma}$) *decomponibile in un sol modo in* ∞^1 *rigate* R_1 *applicabili tutte sull'iperboloide* Q_0. *Ciascuna di queste* R_1 *forma con* R *le due falde di una congruenza* W *generata dalle congiungenti i punti corrispondenti.*

La decomposizione di Γ (o $\overline{\Gamma}$) nelle ∞^1 rigate R_1 è regolata dall'equazione differenziale (I*), e le R_1 sono in questo caso le trasformate della R per la B_k.

Notevoli sono ancora in questo caso primieramente le trasformazioni singolari B_{-b^2}, B_{c^2}, le quali corrispondono alle due coniche focali, la prima all'iperbola focale

$$y = 0,\ \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2+c^2} = 1,$$

la seconda all'ellisse focale

$$z = 0,\ \frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1.$$

Per queste trasformazioni singolari le due congruenze Γ, $\overline{\Gamma}$ coincidono in quella generata dalle tangenti della conica focale trascinata nel rotolamento.

Ma anche in questo caso (cf. § 384) si può considerare l'altra trasformazione singolare B_0, dove la decomposizione della congruenza Γ nelle ∞^1 rigate R_1 viene fornita dal teorema di CHIEFFI, o dall'equazione differenziale (I*) nel caso limite $k = 0$ rettamente interpretato.

§ 403.

Proprietà delle trasformazioni B_k.

Stabilite le proprietà fondamentali delle trasformazioni B_k per le deformate dell'iperboloide ad una falda, possiamo dedurne le altre ripetendo le considerazioni svolte nei §§ 388-390 per le deformate del paraboloide. Si ottengono così i teoremi seguenti:

a) Le trasformazioni B_k *delle deformate* S *dell'iperboloide ad una falda cangiano le asintotiche di* S *nelle asintotiche delle trasformate* S_1, *cioè la congruenza rettilinea colle due falde focali* S, S_1 *è una congruenza* W.

b) Se la prima falda S *si deforma attorno ad una linea asintotica a mantenuta rigida e si ritien fisso insieme un segmento focale iniziale* FF_1 (*uscente da un punto* F *di a nel piano osculatore*), *anche la seconda falda* S_1 *si deforma attorno alla corrispondente asintotica* a_1 *che resta rigida.*

c) Se alle S, S_1 *si circoscrivono, lungo due corrispondenti asintotiche* a, a_1, *le rigate* R, R_1 *del teorema di* CHIEFFI, *queste sono nuovamente le due falde focali di una congruenza* W *della specie.* Le dimostrazioni di queste tre proprietà si deducono da quelle ai paragrafi citati con lievi cambiamenti. Qnalche maggiore sviluppo richiede pel caso attuale l'altro teorema :

d) La trasformazione B_k *cangia il sistema coniugato permanente di* S *in quello permanente di* S_1.

Come al § 390, questo si riduce a dimostrare l'identità

$$(49) \qquad D\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)\frac{\partial \theta}{\partial v}-D''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)\frac{\partial \theta}{\partial u}=0.$$

Ora dalla formola (36) pag. 337 per u_1, indicando per un momento il denominatore con

$$\psi=\frac{b}{b'}\left\{\frac{a}{a'}(1-uv)+\frac{c}{c'}(1+uv)\right\}\cos\theta+\frac{a\,c}{a'c'}\left\{u-v-\frac{b}{b'}(u+v)\right\}(1+\operatorname{sen}\theta),$$

deduciamo facilmente

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}=\frac{2abc(1+\operatorname{sen}\theta)\,V}{a'\,b'\,c'\,\psi^2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial v}=\frac{2abc(1+\operatorname{sen}\theta)\,U}{a'\,b'\,c'\,\psi^2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial \theta}=-\frac{kabc(1+\operatorname{sen}\theta)(u+v)^2\rho}{a'^2\,b'^2\,c'^2\,\psi^2}.$$

Facendo uso di queste l'identità (49) da dimostrarsi diventa

$$D\left\{2\,U-\frac{k(u+v)^2\rho}{a'\,b'\,c'}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right\}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial v}-D''\left\{2\,V-\frac{k(u+v)^2\rho}{a'\,b'\,c'}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right\}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial u}=0,$$

e questa, per le equazioni differenziali (I), fattovi $\varepsilon=+1$, si trasforma nell'altra :

$$D\left\{U^2-\frac{(u+v)^4\rho}{4\,a\,b\,c}(D'\,U+D''\,V)^2\right\}-D''\left\{V^2-\frac{(u+v)^4\rho}{4\,a\,b\,c}(D\,U+D'\,V)^2\right\}=$$

$$=(D\,U^2-D''\,V^2)\cdot\left\{1+\frac{(u+v)^4\rho}{4\,a\,b\,c}(D\,D''-D'^2)\right\}=0.$$

Ma appunto il secondo fattore tra graffe, in forza dell'equazione (*a*) di GAUSS, pag. 330 si annulla e la (49) resta così verificata.

§ 404

Invertibilità delle trasformazioni B_k.

Ci resta ancora da dimostrare che le due falde focali S, S_1 di una qualunque delle nostre congruenze W sono in relazione invertibile, cioè.

Se dalla deformata S *dell'iperboloide nasce, per trasformazione* B_k, *l'altra deformata* S_1, *inversamente* S *proviene da* S_1 *ancora con una* B_k.

Come nel caso delle deformate del paraboloide § (391 s. s) la questione può ricondursi dapprima al caso delle deformate rigate e risolversi poi per mezzo del teorema d'IVORY e degli altri due elementari del § 391 che subito si verifica sussistere anche nel caso attuale di quadriche a centro.

Ed allora, conservando le notazioni del § 392, indichiamo con g_1, g_2 due generatrici qualunque dell'iperboloide Q_0, e con $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ le loro corrispondenti, nell'affinità d'IVORY, sull'iperboloide confocale Q_k ; fra i loro punti M_1, M_2 ; $\overline{M}, \overline{M}_2$ stabiliamo una corrispondenza come al § 392.

Supponendo dapprima che g_1, g_2 appartengano al medesimo sistema, p. e al primo, scriviamo le loro equazioni :

$$g_i) \qquad \begin{cases} x_i = a\operatorname{sen}\theta_i\cdot\dfrac{z_i}{c}+a\cos\theta_i \\ y_i=-b\cos\theta_i\cdot\dfrac{z_i}{c}+b\operatorname{sen}\theta_i. \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

Le $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ dedotte da queste coll'affinità d'IVORY hanno le equazioni:

$$\bar{g}_i) \qquad \begin{cases} \bar{x}_i = a'\operatorname{sen}\theta_i\cdot\dfrac{z_i}{c}+a'\cos\theta_i \\ \bar{y}_i=-b'\cos\theta_i\cdot\dfrac{z_i}{c}+b'\operatorname{sen}\theta_i \\ \bar{z}_i = c'\dfrac{z_i}{c}. \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

Come al § 393 cerchiamo i coefficienti di un movimento rigido che trasporti la coppia di rette $g_1, \bar{g}_2$ coi rispettivi punti $M_1, \overline{M}_2$ nell'altra coppia $\bar{g}_1\, g_2$ e nei punti $\overline{M}_1, M_2$. Ponendo

$$\Delta=(acb'+a'c'b)\cos\theta_1\cos\theta_2+(ab'c'+a'bc)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2-(abc'+a'b'c),$$

otteniamo pei coefficienti α, β, γ (cf. § 393 pag. 319)

$$\begin{cases} \Delta\alpha_1 = (abc' + a'b'c)\cos\theta_1\cos\theta_2 + (abc + a'b'c')\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - (acb' + a'c'b) \\ \Delta\alpha_2 = k\,(c\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - c'\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1) \\ \Delta\alpha_3 = k\,(b\operatorname{sen}\theta_2 - b'\operatorname{sen}\theta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = k\,(c\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 - c'\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ \Delta\beta_2 = (abc + a'b'c')\cos\theta_1\cos\theta_2 + (abc' + a'b'c)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - (ab'c' + a'bc) \\ \Delta\beta_3 = k\,(a'\cos\theta_1 - a\cos\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\gamma_1 = k\,(b\operatorname{sen}\theta_1 - b'\operatorname{sen}\theta_2) \\ \Delta\gamma_2 = k\,(a'\cos\theta_2 - a\cos\theta_1) \\ \Delta\gamma_3 = (ab'c' + a'bc)\cos\theta_1\cos\theta_2 + (acb' + a'c'b)\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - (abc + a'b'c') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha = k\,(b\,c'\cos\theta_2 - b'\,c\cos\theta_1) \\ \Delta\beta = k\,(a\,c'\operatorname{sen}\theta_2 - a'\,c\operatorname{sen}\theta_1) \\ \Delta\gamma = k\,(a\,b'\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - a'b\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1) \end{cases}$$

Anche qui si constata che la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

è ortogonale diretta (determinante $= +1$) ciò che dimostra trattarsi di un movimento rigido. Se le generatrici g_1, g_2 appartenessero a diverso sistema, scrivendone le equazioni sotto la forma

$$g)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{c}\operatorname{sen}\theta_1 \,.\, z_1 + a\cos\theta_1 \\ y_1 = -\dfrac{b}{c}\cos\theta_1 \,.\, z_1 + b\operatorname{sen}\theta_1 \end{cases} \qquad g_2)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{a}{c}\operatorname{sen}\theta_2 \,.\, z_2 + a\cos\theta_2 \\ y_2 = \dfrac{b}{c}\cos\theta_2 \,.\, z_2 + b\operatorname{sen}\theta_2, \end{cases}$$

si troverebbero pei coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei valori che si deducono dai precedenti cangiando in questi c' in $-c'$ e mutando i segni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Così la sostituzione resta ortogonale ma da diretta si cangia in inversa (det. $= -1$) e il movimento rigido cangia in una simmetria.

Questi risultati provano appunto che anche nel caso delle deformate dell'iperboloide le due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze W si trovano in relazione invertibile.

§ 405.

Caso delle deformate dell'iperboloide rotondo.

In tutte le ricerche del presente Capitolo l'iperboloide ad una falda era quello generale $a^2 > b^2$, senza escludere che potesse specializzarsi in quello di rotazione $a^2 = b^2$. Questo caso merita particolare attenzione per le sue semplici proprietà. Le trasformazioni B_k rimangono qui in tutta la loro estensione, potendo il parametro k assumere tutti i valori nell'intervallo $(-a^2, c^2)$, inclusi gli estremi. A questi valori estremi corrispondono le trasformazioni singolari B_{-a^2}, B_{c^2}, relative la prima all'iperbola focale qui ridotta all'asse focale, la seconda al circolo focale.

Per la prima è facile dimostrare: *La trasformazione singolare* B_{-a^2} *per le deformate dell'iperboloide rotondo non è altro che la trasformazione complemntare di queste superficie già considerata al* § 169 (I) *pag.* 444).

Geometricamene si osservi che se S, S_1 sono una coppia di deformate dell'iperboloide rotondo dedotte l'una dall'altra con una B_{-a^2}, quando si applichi sull'iperboloide la S coi suoi segmenti focali tangenti FF_1, i termini di questi vengono tutti a cadere sull'asse, e i segmenti FF_i, si dispongono quindi sulle tangenti alle iperbole meridiane onde sopra S sono le tangenti alle geodetiche deformate dei meridiani, ciò che dimostra la proposizione.

La stessa cosa si conferma analiticamente colle formole generali, ove si ponga $a = b$, $k = -a^2$ indi $a' = b' = 0$, $c' = \sqrt{a^2 + c^2}$. Dalle (10) pag. 323 risulta

$$\frac{U}{W} = \frac{u^2 + 1}{2\,(1 - u\,v)}, \qquad \frac{V}{W} = \frac{v^2 + 1}{2\,(1 - u\,v)},$$

quindi

$$l = \frac{(u + v)\,(u^2 + 1)}{2\,(1 - u\,v)}, \quad m = \frac{(u + v)\,(v^2 + 1)}{2\,(1 - u\,v)},$$

e le formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

definiscono un'unica superficie S_1, la *complementare* di S.

Notevole è il caso particolare delle deformate rigate dove la trasformazione complementare assume la forma seguente (cf. § 196):

Se l'iperboloide rotondo ad una falda rotola sopra una qualunque rigata R *applicabile, l'asse dell'iperboloide descrive una tale seconda rigata* R_1, *la complementare di* R.

Le considerazioni geometriche del citato § 169 ci hanno già fatto riconoscere la dipendenza delle deformate rigate dell'iperboloide rotondo dalle curve di BERTRAND che ne sono le linee di stringimento. In particolare per due rigate complementari R, R_1 le linee di stringimento γ, γ_1 formano una coppia di curve associate di BERTRAND aventi a comune le normali principali : *la seconda* γ_1 *è il luogo descritto dal centro dell' iperboloide rotondo che rotola sopra* R.

Ed ora è chiaro come le trasformazioni generali B_k per le deformate rigate dell' iperboloide rotondo possono anche considerarsi come trasforzioni delle curve di BERTRAND che ne sono le linee di stringimento. E in effetto queste trasformazioni per le curve di BERTRAND erano già state studiate da DEMARTRES (*) in un caso particolare che corrisponde alla trasformazione singolare B_{e^2} relativa al circolo focale, e successivamente dal RAZZABONI (**) nel caso generale di k qualunque.

§ 406.

Le trasformazioni B_k al limite come trasformazioni delle coniche distorte.

Nelle ricerche di questo, come in quelle del precedente Capitolo, si è sempre supposto l'iperboloide Q_0, o il paraboloide P_0, come quadrica effettiva (non degenere come inviluppo di piani). Ma le proprietà essenziali delle trasformazioni B_k si mantengono ancora, in una certa misura, al limite quando la quadrica rigata Q, percorrendo la schiera delle quadriche omofocali, si riduce all'insieme delle tangenti di una delle coniche focali. Le trasformazioni B_k diventano allora, al limite, trasformazioni (asintotiche) di curve, precisamente di quelle curve che si ottengono da una conica ordinaria deformando questa in una curva gobba che ad eguale arco abbia la stessa flessione della conica : le diciamo *coniche distorte* (***).

(*) Comptes Rendus de l'Académie T. 106 (1888).

(**) Un teorema del sig. Demartres generalizzato Atti del Reale Istituto Veneto 1900 (1901) Vol. 60, 2ª parte.

(***) In particolare i circoli storti (Cesàro) sono le curve a flessione costante.

Per intendere come si comportano le trasformazioni B_k al limite basterà riprendere dal § 402, e dal corrispondente § 383, il teorema B) sotto la forma.

C) Se una quadrica rigata Q *rotola sopra una rigata applicabile* R *trascinando seco, in sistema invariabile, una quadrica rigata* Q_k *del sistema omofocale, le generatrici (dell'uno o dell' altro sistema) di* Q_k *descrivono una congruenza* Γ *decomponibile in* ∞^1 *rigate* R_1 *applicabili sulla* R *e sulla* Q *stessa.*

In questo teorema facciamo variare la quadrica Q nel sistema omofocale fino a ridurla alla sviluppabile delle tangenti ad una conica focale C. Fuori del limite il teorema sussiste sempre ed è facile intendere come si cangierà al limite, nell'ipotesi che continui a sussistere. Le ∞^1 rigate R_1 diventeranno in tal caso esse stesse sviluppabili ed applicabili sulla sviluppabile delle tangenti alla conica C, in guisa che le generatrici si distendano sulle generatrici; per ciò i loro spigoli di regresso Γ_1 saranno altrettante coniche distorte, deformate della conica C. Ed anche la rigata R avrà per spigolo di regresso una conica distorta Γ, deformata di C, sulla quale C *rotola* in guisa che il suo piano si porta a coincidere coi successivi piani osculatori di Γ. Ma allora della quadrica Q_k, trascinata nel rotolamento dalla sua conica focale C, consideriamo la conica principale C′ nel piano di C e omofocale a C. La C′, trascinata nel rotolamento, descrive una superficie modanata, che indicheremo con Σ, inviluppata lungo i profili C′ delle varie posizioni della quadrica Q_k. Le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) di Q_k descrivono una congruenza Γ formata di tangenti alla superficie modanata Σ, le cui sviluppabili R_1 di un sistema hanno gli spigoli di Γ_1 sopra Σ, e le Γ_1 sono quelle curve di Σ che seguono, in ogni loro punto, la direzione della generatrice di Q_k che vi passa. Queste sviluppabili R_1 rappresentano qui appunto le rigate R_1 del teorema generale C), e i loro spigoli di regresso Γ_1 sono le coniche distorte trasformate della Γ per una B_k.

Il teorema *C)* si cangia dunque, al limite, nel seguente : *Se una quadrica rigata* Q_k *viene trascinata da una sua conica focale* C *nel rotolamento di questa sopra una sua curva deformata* Γ *(conica distorta) le rette di* Q_k *(dell'uno o dell'altro sistema) generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno gli spigoli di regresso* Γ_1 *sulla superficie modanata* Σ *luogo della conica principale* C′ *di* Q_k *nel piano di* C, *e queste* ∞^1 *curve* Γ_1 *sono altrettante coniche distorte deformate della medesima* C).

Rimandando il lettore per una costruzione diretta di queste trasformazioni B_k delle coniche distorte, alla seconda edizione di questo libro (Nota

II del 3° Volume, pag. 322 s. s.), qui ci limiteremo ad osservare come le formole date nei paragrafi precedenti conservino il loro valore anche nel caso limite, il che basta per assicurare la sussistenza del teorema al limite.

Prendasi p. e. il caso del presente Capitolo e suppongasi nelle formole del § 394 per l'iperboloide Q_0, in particolare nelle (1), di far tendere il semiasse c a zero, sicchè per $c = 0$ le formole (1) diventano

$$x_0 = a\,\frac{1 + u\,v}{u + v}\,, \quad y_0 = b\,\frac{u - v}{u + v}$$

e rappresentano la quadrica Q_0 ridotta alla regione *esterna* alla ellisse

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

due volte ricoperta dalle tangenti all'ellisse (*) medesima, alle quali si riducono le generatrici $v = \text{cost}^{\text{te}}$ $u = \text{cost}^{\text{te}}$.

Posto $k = -h^2$, con $0 < h^2 < b^2$, si prenda

$$a' = \sqrt{a^2 - h^2},\ b' = \sqrt{b^2 - h^2},\ \ c' = h,$$

e si consideri l'iperboloide Q_k

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

avente l'ellisse C per ellisse focale. Le formole del Capitolo serbano ancora un significato per $c = 0$; in particolare quelle del § 402 relative al caso delle deformate rigate mutandosi l'equazione differenziale (I*), che regola la decomposizione della congruenza Γ nelle ∞^1 rigate R_1, nella seguente perfettamente determinata :

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{\varepsilon\,\varphi(v)}{h}\left\{a\,b'\,(v^2 - 1)\,\text{sen}\,\theta - 2\,a'\,b\,v\,\cos\theta + a\,b\,(v^2 + 1)\right\} = 0.$$

(*) Le prime toccano l'ellisse nel punto $\left(a\,\frac{2\,v}{1+v^2}\,,\ b\,\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)$, le seconde nel punto $\left(a\,\frac{2\,u}{u^2+1}\,,\ b\,\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$.

CAPITOLO XXIV.

Trasformazioni B_k delle deformate delle altre specie di quadriche - Trasformazione H.

Le trasformazioni B_k in generale. - Deformate proprie ed improprie. - Caso delle deformate proprie ed improprie de paraboloide ellittico. - Ricerche analoghe per l'iperboloide a due falde. - Deformate improprie delle quadriche rigate. - Le trasformazioni B_k delle deformate della sfera immaginaria come trasformazioni di Bäcklund. - Caso dell'ellissoide immaginario. - Caso del paraboloide immaginario $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\,iz$. - Notizie sul teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni B_k. - Problema delle coppie di superficie coniugate in deformazione. - Coppie di quadriche coniugate in deformazione. - La trasformazione H e le sue proprietà. - Sua permutabilità colle B_k.

§ 407.

Generalità sulle trasformazioni B_k.

Nei due Capitoli precedenti ci siamo occupati esclusivamente delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche a punti iperbolici (a generatrici reali). È chiaro per altro che, se si prescinde dalle condizioni di realità degli enti geometrici in questione, tutta la parte analitica dei nostri sviluppi, e quindi anche le conseguenze geometriche, valgono per le deformate di tutte le quadriche reali od immaginarie. In particolare il teorema fondamentale *A*) enunciato al § 376 può ora considerarsi come stabilito per tutte le specie di quadriche. Scopo del presente Capitolo sarà di sviluppare la teor a delle trasformazioni B_k per le deformate *reali* di una quadrica fondamentale Q, che potrà essere d'altronde reale od immaginaria. Per ciascuna specie di quadrica Q noi potremmo procedere direttamente, come nei due Capitoli precedenti per le quadriche rigate, e cioè associare a ciascuna faccetta f di Q le ∞^1 faccette derivate f_1 secondo le leggi del § 376, indi per ogni deformata S di Q procedere alla *stratificazione* delle ∞^3 faccette f_1. Con questo però noi verremmo soltanto a ripetere i calcoli già eseguiti per quei due casi, salvo che le variabili u, v e le costanti $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, a, b, c ecc. sarebbero nei nuovi casi non più reali, ma in determinato modo immaginarie. S'intende quindi che sarà più opportuno utilizzare il materiale già

preparato nei capitoli percedenti ed esaminare, caso per caso, come debbono prendersi le variabili e le costanti per ottenere risultati finali *reali*.

Abbiamo intanto già riconosciuto, al § 376, che nel caso di una quadrica fondamentale Q che sia *reale e non specializzata* esistono sempre trasformazioni *reali* B_k per le sue deformate, e queste si ottengono assumendo, come quadrica direttrice dell'ordinamento delle faccette, una quadrica Q_k effettiva rigata nel sistema confocale. Ma qui, prima di cominciare le nuove ricerche, dobbiamo esaminare un altro punto importante che riguarda la *specie d'applicabilità* delle due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze W. Questa va intesa nel senso analitico che il ds^2 della S e il ds_1^2 della S_1 sono equivalenti ; ma può darsi tanto che le relazioni d'applicabilità facciano corrispondere le regioni *reali* di S, S_1 quanto invece che alla regione reale dell'una corrisponda una regione immaginaria dell'altra. Nel primo caso si dirà che l' applicabilità è reale o *propria*, nel secondo si parlerà di applicabilità in senso ideale o *impropria*. (*)

Ora nel caso nostro, l'applicabilità fra le due falde S, S_1 essendo sempre data dalla legge di affinità d'IVORY fra le quadriche omofocali Q, Q_k, riconosciamo nel modo più semplice quando si tratta di applicabilità propria e quando di impropria. Come abbiamo già detto sopra, la quadrica Q è qui reale e la omofocale Q_k è reale rigata. Se adunque la Q stessa è rigata (come accadeva nelle ricerche dei due precedenti Capitoli) l'affinità d' IVORY fa corrispondere Q e Q_k per le loro regioni reali ; se invece Q è a punti ellettici, alla regione reale di Q ne corrisponde una immaginaria di Q_k. Ne concludiamo quindi :

Nelle nostre congruenze W *a falde focali* S, S_1 *applicabili sopra una quadrica reale* Q, *l'applicabilità di* S *sopra* S_1 *è propria quando* Q *è a punti iperbolici, impropria quando* Q *è a punti ellittici.*

§ 408.

Caso delle deformate del paraboloide ellittico.

Supponiamo che la quadrica fondamentale Q sia il paraboloide ellittico P_0, di cui scriviamo l'equazione sotto la forma normale

(*) L'opportuna distinzione delle due specie d'applicabilità appare la prima volta nelle ricerche del geometra russo PETERSON Cf. la memoria: *Sur la déformation des surfaces du second ordre* (TRAD. DAVAUX). Annales de la Facultè des Sciences de Toulouse 2ª. Serie T. VII.

$$\frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} = 2\, z_0,$$

con p, q positivi e, per fissare le idee, supponiamo

$$p \leq q.$$

Le formole per questo caso si hanno da quelle del paraboloide iperbolico al § 378 cangiando in queste q in $-q$, indi $\sqrt{q}$ in $i\sqrt{q}$. Ed poi manifesto che per ottenere dalle formole (12) ibd. (pag. 278) la regione *reale* del paraboloide ellittico basta assumere le variabili u, v *coniugate immaginarie.* Separando il reale dall'immaginario, poniamo

$$u = \frac{\alpha - i\beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha + i\beta}{2},$$

con α, β reali, e le dette formole si cangieranno nelle seguenti

$$(1) \qquad x_0 = \sqrt{p}\,\alpha\ , \quad y_0 = \sqrt{q}\,.\,\beta\ , \quad z_0 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\ ,$$

da cui pel ds_0^2 del paraboloide abbiamo

$$(2^*) \qquad ds_0^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2.$$

Conformemente alle considerazioni generali del § 376, dobbiamo scegliere nel sistema confocale a P_0 una quadrica rigata, cioè un paraboloide iperbolico P_k, la cui equazione si scriverà

$$P_k) \qquad \frac{x^2}{k - p} - \frac{y^2}{q - k} + 2\,z - k = 0,$$

ed il parametro k potrà avere un valore qualunque nell'intervallo (p, q), *non esclusi gli estremi* :

$$p \leq k \leq q.$$

Se poniamo

$$(2^*) \qquad p' = k - p, \quad q' = q - k,$$

saranno p', q' positivi (o nulli) e potremo dedurre le formole attuali da quelle al § 378, cangiando in queste rispettivamente le quantità

$$\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \sqrt{p'},\ \sqrt{q'}$$

in

$$\sqrt{p},\ i\sqrt{q},\ -i\sqrt{p'},\ i\sqrt{q'}.$$

In particolare le formole per U, V, W date dalle (23) (pag. 280), ponendovi $\varepsilon = +1$, si muteranno nelle seguenti:

$$(3)\quad \begin{cases} U = 2\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 u^2 + 2\sqrt{(p'q' - i\sqrt{pq})}\,\lambda u - \\ \qquad\qquad - \dfrac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right) \\ V = 2\left(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 v^2 - 2\left(\sqrt{p'q'} + i\sqrt{pq}\right)\lambda v - \\ \qquad\qquad - \dfrac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'}\right) \\ W = 2\lambda\left\{i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda\right. \end{cases}$$

Siccome u, v sono immaginarie coniugate, è chiaro che se si dà al parametro λ *un valore puramente immaginario*, la quantità W sarà reale e le U, V immaginarie coniugate. Adottando qui, e nel seguito, la notazione $\overline{A}$ per significare la quantità coniugata di una quantità complessa qualunque A, avremo dunque

$$\overline{u} = v,\quad \overline{v} = u,\quad \overline{\lambda} = -\lambda,\quad \overline{U} = V,\quad \overline{V} = U,\quad \overline{W} = W,$$

indi anche

$$\overline{l} = \frac{\overline{U}}{\overline{W}} = m,\quad \overline{m} = \frac{\overline{V}}{\overline{W}} = l.$$

Consideriamo una qualunque deformata *reale* S del paraboloide ellittico P_0. Le quantità x, y, z saranno reali e le loro derivate $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, ecc. saranno invece coniugate immaginarie, come le variabili u, v. Per ciò le formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

daranno per x_1, y_1, z_1 valori reali ($\overline{x}_1 = x_1$, $\overline{y}_1 = y_1$, $\overline{z}_1 = z_1$) e la superficie trasformata S_1 sarà essa stessa reale. Resta dunque soltanto a vedersi se si potrà soddisfare alle equazioni differenziali fondamentali (I) § 381 (pag. 288), *con* λ *puramente immaginario*, ed essendo per la (16*) pag. 279 $\rho = \dfrac{H}{i\sqrt{pq}}$; così le (I) danno:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\,H}V + \dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D\,U + D'\,V) \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\,H}U + \dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D'U + D''\,V). \end{cases}$$

Ora si noti che, essendo la superficie S reale, tale dovrà essere anche la sua seconda forma fondamentale

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

e si avrà quindi.

$$\overline{D} = D'',\ \overline{D'} = D',\ \overline{D''} = D.$$

D'altra parte la quantità H, data dalla (14) § 378, pel cangiamento di q in $-q$, diventa

$$H = p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - pq = -\{q\alpha^2 + p\beta^2 + pq\},$$

ed è per ciò essenzialmente negativa, poniamo

$$H = -h^2\quad \sqrt{H} = ih,$$

e le (4) si scrivono

$$(4^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(i\lambda)}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{pq}}{k\,h^2}V + \dfrac{1}{2kh}(D\,U + D'\,V) \\ \dfrac{\partial(i\lambda)}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{pq}}{k\,h^2}U + \dfrac{1}{2kh}(D'U + D''\,V). \end{cases}$$

I loro secondi membri *per* $i\lambda$ *reale* sono immaginari coniugati come i primi (come le variabili (u, v)); e siccome la condizione d'integrabilità è identicamente soddisfatta (§ 382), così è possibile soddisfarvi lasciandovi arbitrario il valore *iniziale* di $i\lambda$. Dunque l'immaginario nelle formole precedenti è solo apparente e potrebbe farsi sparire introducendovi le variabili reali α, β. Ne concludiamo quindi:

Ogni superficie reale S *applicabile sul paraboloide generale ellittico* $(p < q)$ *ammette, per ogni valore del parametro* k *nell'intervallo* (p,q), *trasformazioni reali* B_k *in una semplice infinità*. Non fanno eccezione i valori estremi $k = p$,

$k = q$, che dànno le trasformazioni singolari corrispondenti alle parabole focali.

§ 409.

Applicabilità impropria delle trasformate S_1 sul paraboloide.

Da quanto si è visto in generale al § 407 risulta che le attuali trasformate S_1 della S saranno bensì applicabili sul paraboloide, ma in modo improprio o idealmente. Questo confermiamo più da vicino ricercando l'effettiva espressione reale del ds_1^2 per la S_1 trasformata.

Intanto cominciamo dall'osservare che, allorquando la prima falda focale S della nostra congruenza W, generata dalle congiungenti i punti corrispondenti F, F_1 di S, S_1, si distende sul paraboloide P_0, i segmenti FF_1 si dispongono, coi loro estremi F_1, sul paraboloide iperbolico confocale P_k e ne ricoprono la regione reale. Ma l'affinità d'IVORY fra i due paraboloidi

$$P_0) \quad \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} = 2 z_0$$

$$P_k) \quad -\frac{x^2}{k-p} + \frac{y^2}{q-k} = 2 z - k$$

fa corrispondere i loro punti secondo le formole (§ 386) :

$$x_0 = \sqrt{\frac{p}{p-k}}\, x, \quad y_0 = \sqrt{\frac{q}{q-k}}\, y, \quad z_0 = z - \frac{k}{2},$$

ovvero

$$x_0 = i\sqrt{\frac{p}{p'}}\, x, \quad y_0 = \sqrt{\frac{q}{q'}}\, y, \quad z_0 = z - \frac{k}{2},$$

che cangiano la regione reale di P_k in una immaginaria di P_0.

Per avere poi sotto forma effettiva reale il ds_1^2 delle trasformate S_1 si osservi che, dai calcoli eseguiti ai §§ 385 s. s., risulta

$$(5) \quad ds_1^2 = (p - q + 4 v_1^2)\, du_1^2 + 2 (p - q + 4 u_1 v_1)\, du_1 dv_1 + (p - q + 4 u_1^2)\, dv_1^2,$$

dove le variabili u_1; v_1 sono espresse per le u, v colle formole d'applicabilità (50) pag. 302, nelle quali per come sopra dovremo cangiare

$$\sqrt{q}, \ \sqrt{p'}, \ \sqrt{q'}$$

rispettivamente in

$$i\sqrt{q}, \ -i\sqrt{p'}, \ i\sqrt{q'};$$

esse diventano per ciò :

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v) - i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}{2\left\{i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v\lambda + i\sqrt{pq}\right\}} \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Siccome λ è un immaginario puro, mentre u, v sono immaginarie coniugate, le variabili u_1, v, saranno puramente immaginarie e noi porremo

$$u_1 = i\,\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}, \quad v_1 = i\,\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$$

con α_1, β, reali. La (5) diventa nelle nuove variabili

$$(7) \quad ds_1^2 = (\alpha_1^2 + q)\, d\alpha_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1\, d\alpha_1 d\beta_1 + (\beta_1^2 - p)\, d\beta_1^2$$

e dà il ds_1^2 sotto forma reale. I due elementi lineari (2) e (7) si trasformano in effetto l'uno nell'altro mediante le corrispondenti formole

$$\alpha_1 = \beta, \quad \beta_1 = i\,\alpha,$$

che alla regione reale di S_1 ne fanno corrispondere una immaginaria su S. Abbiamo dunque stabilito il risultato :

Ogni deformata reale del paraboloide ellittico appartiene, come falda focale, od ∞^2 congruenze rettilinee reali W, *le cui seconde falde focali* S_1, *dedotte dalla* S *per trasformazioni* B_k, *sono impropriamente applicabili sul paraboloide stesso ed hanno l'elemento lineare* (7).

Dimostreremo nei prossimi paragrafi che inversamente : *Ogni superficie reale applicabile impropriamente sul paraboloide ellittico (d' elemento lineare* (7)*) dà luogo similmente, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze reali* W, *le cui seconde falde sono applicabili realmente sul paraboloide stesso.* Così le trasformazioni B_k, per congruenze rettilinee W, applicate alle deformate del paraboloide ellittico conducono sempre da una superficie applicabile propriamente (impropriamente) sul paraboloide ad una seconda in cui l'applicabilità è di specie contraria, onde conviene ripetere un numero *pari* di volte queste trasformazioni se si vuole che la superficie iniziale e la finale

siano applicabili propriamente l'una sull'altra. Abbiamo supposto fin qui che il paraboloide fosse generale ($p \neq q$) ; che cosa accade se il paraboloide è rotondo ($p = q$) ? Allora, annullandosi l'intervallo (p, q), resta per k un solo possibile valore $k = p = q$. Le nostre trasformazioni *reali* B_k si riducono in questo caso ad una sola singolare: la *trasformazione complementare*. Questa circostanza geometricamente evidente, perchè il paraboloide confocale P_k si restringe qui all'asse di rotazione (cf. § 405), si conferma subito col calcolo dalle formole (3) che, per essere qui

$$p = q, \quad p' = q' = 0, \quad k = p,$$

dànno

$$U = -2ip\lambda u, \; V = -2ip\lambda v, \; W = 2ip\lambda,$$

indi $l = -u$, $m = -v$. Le formole che definiscono la superficie trasformata S_1 diventano

$$x_1 = x - u\frac{\partial x}{\partial u} - v\frac{\partial x}{\partial v}$$

e coincidono con quelle che dànno la complementare di S.

§ 410.

Trasformazioni B_k per le superficie applicabili impropriamente sul paraboloide.

A completare le ricerche superiori ci resta da invertire i risultati e provare che ogni superficie d'elemento lineare (7) ammette ∞^2 trasformazioni B_k in superficie applicabili propriamente sul paraboloide ellittico.

Sia dunque S una superficie d'elemento lineare (7) o ciò che è lo stesso col ds^2 dato dalle formole (13) del § 378 (pag. 278), ove però sia cangiato q in $-q$ e le variabilili u, v siano puramente immaginarie, ciò che esprimiamo nelle nostre notazioni colle formole :

$$\bar{u} = -u, \quad \bar{v} = -v \tag{8}$$

Applichiamo a questa superficie S una trasformazione B_k, colla costante k presa ancora fra i limiti p e q. Vogliamo che per la superficie S_1 trasformata, data dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

si verifichino le condizioni seguenti :

1.° la superficie S_1 sia reale

2.° essa sia applicabile sulla regione reale del paraboloide.

La prima condizione esige, secondo le (8), che si abbia

$$\bar{l} = -l, \; \bar{m} = -m ; \tag{9}$$

la seconda poi si traduce in questa che le variabili u_1, v_1 definite dalle (6) siano coniugate, cioè che si abbia :

$$\bar{\lambda} = \frac{i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda}{\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda - i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,.\,\lambda}. \tag{10}$$

Poniamo

$$A = \sqrt{pq}\,(4uv+k), \; C = \sqrt{pq}, \; B = \sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v) \tag{11}$$

$$\bar{B} = -\sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v).$$

e la (10) prende la forma bilineare in λ, $\bar{\lambda}$

$$A\lambda\bar{\lambda} + B\lambda + \bar{B}\bar{\lambda} + C = 0, \tag{12}$$

dove è da notarsi che i coefficienti estremi A e C sono reali ed i medii B, $\bar{B}$ coniugati immaginarii a causa delle (8). Di più il determinante

$$B\bar{B} - AC = -pq(4uv+k) - qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2$$

è positivo, perchè si ha identicamente

$$B\bar{B} - AC = k\{p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - pq\} = kH \tag{13}$$

mentre H è positiva come k (*)

Dimostriamo in primo luogo che, verificata la relazione bilineare (12) fra λ e $\bar\lambda$, si troveranno pure soddisfatte le (9), ossia si avrà

$$(16)\qquad \frac{\overline{U}}{\overline{W}}+\frac{U}{W}=0 \qquad \frac{\overline{V}}{\overline{W}}+\frac{V}{W}=0.$$

Prendasi la prima delle (14), la quale avuto riguardo ai valori (3) di U, V, ed osservando che

$$W = 2i\lambda(B\lambda+C),$$

si scrive

$$\frac{2(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\bar\lambda^2u^2-2(\sqrt{p'q'}+i\sqrt{pq})\bar\lambda u-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\bar\lambda^2+\frac{1}{2}(\overline{qp'}+i\sqrt{pq'})}{\bar\lambda(\overline{B}\,\bar\lambda+C)} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq}\lambda^2u^2+2(\sqrt{p'q'}-i\sqrt{pq})\lambda u-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})}{\lambda(B\lambda+C)}.$$

Ora dalla (12) si ha

$$(16)\qquad \bar\lambda=-\frac{B\lambda+C}{A\lambda+\overline{B}},$$

indi per la (13)

$$\overline{B}\,\bar\lambda+C=\frac{-kH\lambda}{A\lambda+\overline{B}},$$

e

$$(16)\qquad \bar\lambda(\overline{B}\,\bar\lambda+C)=\frac{kH\lambda(B\lambda+C)}{(A\lambda+\overline{B})^2}.$$

(*) Ponendo come al § precedente

$$u=i\frac{\beta_1+\alpha_1}{2},\quad v=i\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$$

risulta

$$H=q\beta_1^2-p\alpha_1^2-pq$$

quantità che coincide coll' $EG-F^2$ dell' elemento lineare (7) ed è positiva.

Con queste formole, sostituendo anche nel numeratore del primo membro nella (15) il valore (16) di $\bar\lambda$, la (15) stessa si riduce all'altra :

$$2(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})u^2(B\lambda+C)^2+2(\sqrt{p'q'}+i\sqrt{pq})u(A\lambda+\overline{B})(B\lambda+C)-$$
$$-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})(B\lambda+C)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})(A\lambda+\overline{B}^2)=$$
$$=kH\Big\{2(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\lambda^2u^2+2(\sqrt{p'q'}-i\sqrt{pq})\lambda u-$$
$$-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'})\Big\},$$

e questa identità fra i due polinomii di secondo grado in λ del primo e del secondo membro si verifica facilmente ricordando i valori (11) di A, B, C e i valori (2*) per p', q'. In modo affatto simile si prova che anche la seconda delle (14) è una conseguenza della (12).

§ 411.

Esame delle condizioni differenziali.

Dopo ciò non abbiamo più altro da dimostrare che è possibile soddisfare alle equazioni differenziali (4) per λ, in guisa che l'espressione bilineare

$$\Omega = A\lambda\bar\lambda+B\lambda+\overline{B}\lambda+C$$

si annulli. Per ciò scriviamo, insieme alle (4), le equazioni per la coniugata $\bar\lambda$ avvertendo che H è positiva, come si è visto, e che inoltre essendo u, v puramente immaginarie, e la superficie S reale per ipotesi, sono reali D, D′, D″; così cangiando nelle (4) i in $-i$, si ha :

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial u}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{kH}\overline{V}-\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D\,\overline{U}+D'\,\overline{V}) \\ \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial v}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{kH}\overline{U}-\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D'\overline{U}+D''\,\overline{V}). \end{cases}$$

La nostra asserzione si riduce a provare che le equazioni differenziali (4) e (17), *insieme all' equazione bilineare* $\Omega=0$, formano un sistema completo, che cioè in forza delle equazioni stesse si annullano le derivate di

Ω. Prendiamo p. e

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \Omega}{\partial \overline{\lambda}}\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}\lambda\overline{\lambda} + \frac{\partial B}{\partial u}\lambda + \frac{\partial \overline{B}}{\partial u}\overline{\lambda} + \frac{\partial C}{\partial u},$$

che per le formole precedenti diventa

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \overline{u}} = (A\overline{\lambda} + B)\left\{\dfrac{i\sqrt{pq}}{k\,H}V + \dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(DU + D'V)\right\} + \\ \quad + (A\lambda + \overline{B}) + \left\{\dfrac{i\sqrt{pq}}{k\,H}\overline{V} - \dfrac{1}{2k\sqrt{H}}(D\overline{U} + D'\overline{V})\right\} + \\ \quad + 4\sqrt{pq}\,v\lambda\overline{\lambda} + (\sqrt{pq'} + i\sqrt{qp'})\lambda - (\sqrt{pq'} - i\sqrt{qp'})\overline{\lambda}. \end{cases}$$

Ora dalle (14) si ha

$$\frac{\overline{U}}{U} = \frac{\overline{V}}{V} = -\frac{\overline{W}}{W} = \frac{\overline{\lambda}(\overline{B}\overline{\lambda} + C)}{\lambda(B\lambda + C)},$$

cioè per la (16*)

$$\frac{\overline{U}}{U} = \frac{\overline{V}}{V} = \frac{k\,H}{(A\lambda + B)^2},$$

e per la (16) risulta

$$(19)\qquad A\overline{\lambda} + B = \frac{\overline{B}\,B - A\,C}{A\lambda + \overline{B}} = \frac{k\,H}{A\lambda + B},$$

onde

$$\frac{\overline{U}}{U} = \frac{\overline{V}}{V} = \frac{A\overline{\lambda} + B}{A\lambda + \overline{B}}.$$

In forza di questa si elidono nel secondo membro della (18) i termini in D, D′, D″ e resta

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \overline{u}} = 2\frac{i\sqrt{pq}}{k\,H}(A\overline{\lambda} + B)V + 4\sqrt{pq}\,v\lambda\overline{\lambda} + (\sqrt{pq'} + i\sqrt{qp'})\lambda - (\sqrt{pq'} - i\sqrt{qp'})\overline{\lambda}.$$

formola che per le (16), (19) e a causa del valore (3) di V possiamo scrivere

$$(A\lambda + \overline{B})\frac{\partial \Omega}{\partial \overline{u}} = 2i\sqrt{pq}\left\{2(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'})\lambda^2 v^2 - 2(\sqrt{p'q'} + i\sqrt{pq})\lambda v - \right.$$
$$\left. - \frac{k}{2}(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'})\lambda^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'})\right\} - 4\sqrt{pq}\,\lambda v(B\lambda + C) +$$
$$+ (\sqrt{pq'} + i\sqrt{qp'})\lambda(A\lambda + \overline{B}) + (\sqrt{pq'} - i\sqrt{qp'})(B\lambda + C).$$

Il polinomio del secondo grado in λ nel secondo membro si riconosce subito essere identicamente nullo, e per ciò $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$; similmente si prova che anche $\frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0$.

Dopo ciò arriviamo al termine delle nostre deduzioni osservando che, per quanto si è dimostrato, basta integrare le equazioni (4) in λ per modo che la condizione $\Omega = 0$ sia soddisfatta *in un punto iniziale* $u = u_0$, $v = v_0$. Ma per valori fissi u, v la $\Omega = 0$ è, nel piano della variabile complessa λ, l'equazione di un circolo, e questo circolo è *reale*, perchè il determinante

$$B\,\overline{B} - A\,C = k\,H$$

è positivo come si è visto. Basta dunque scegliere per valore iniziale λ_0 di λ l'affissa di un punto reale di questo circolo, onde si conclude che, per ogni valore fissato di k nell'intervallo (p, q), avremo ∞^1 superficie *reali* S_1 trasformate di S ed applicabili impropriamente sul paraboloide ellittico. Così risulta in effetto stabilito il teorema di cui al § 409 abbiamo dato l'enunciato.

Aggiungiamo che il procedimento ed i calcoli, che qui abbiamo ampiamente sviluppati per il caso delle deformate improprie del paraboloide ellittico, si potranno applicare in varii altri casi la cui trattazione potremo abbreviare, rimandando pei particolari al caso ora discusso.

§ 412.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide a due falde.

Passiamo ora alle quadriche *a centro* a punti ellittici, cominciando dall'iperboloide a due falde Q_0, di cui scriveremo l'equazione

$$Q_0)\qquad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

e supporremo, per fissare le idee

$$b^2 \leq c^2.$$

Le formole relative a questo caso si dedurranno da quelle del § 394 per

l'iperboloide ad una falda, cangiando in queste b in ib ; così le formole (1) § 394 (pag....) diventano

$$x_0 = a\,\frac{1+uv}{u+v}\,,\quad y_0 = i\,b\,\frac{u-v}{u+v}\,,\quad z_0 = c\,\frac{1-uv}{u+v}\,,$$

ove si vede che, per avere la regione reale di questa quadrica, conviene qui assumere le variabili u,v immaginarie coniugate.

Prendiamo ora l'iperboloide confocale Q_k *ad una falda* (§ 376) di equazione

$$Q_k) \qquad \frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{k-b^2} - \frac{z^2}{c^2-k} = 1,$$

ove il parametro k giacerà nell'intervallo (b^2, c^2)

$$b^2 \leq k \leq c^2$$

e introduciamo in fine le quantità reali positive (semiassi di Q_k) :

$$a' = \sqrt{a^2+k}\,,\quad b' = \sqrt{k-b^2}\,,\quad c' = \sqrt{c^2-k}\,.$$

Le formole (10) § 394 (pag. 323), nelle quali si faccia $\varepsilon = +1$ e si cangi b in ib, diventano :

$$\begin{cases} \mathrm{U} = \left(\dfrac{a\,c}{a'\,c'} - i\,\dfrac{b}{b'}\right) 2u\cos\theta + \left(i\,\dfrac{b\,c}{b'\,c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(i\,\dfrac{a\,b}{a'\,b'} - \dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1) \\ \mathrm{V} = \left(-\dfrac{a\,c}{a'\,c'} - i\,\dfrac{b}{b'}\right) 2v\cos\theta + \left(i\,\dfrac{b\,c}{b'\,c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(v^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(i\,\dfrac{a\,b}{a'\,b'} + \dfrac{c}{c'}\right)(v^2+1) \\ \mathrm{W} = 2\left\{\dfrac{a\,c}{a'\,c'}(u-v)\cos\theta - i\,\dfrac{b\,c}{b'\,c'}(1+uv)\operatorname{sen}\theta + i\,\dfrac{a\,b}{a'\,b'}(1-uv)\right\}. \end{cases}$$

Se θ si assume *reale* e si ricorda che

$$\bar{u} = v,\quad \bar{v} = u,$$

ne segue

$$(\alpha) \qquad \overline{\mathrm{U}} = -\mathrm{V},\ \overline{\mathrm{V}} = -\mathrm{U},\ \overline{\mathrm{W}} = -\mathrm{W},$$

e per ciò

$$(\alpha^*) \qquad \bar{l} = m,\ \bar{m} = l.$$

Se supponiamo che S sia una deformata *reale* dell'iperboloide Q_0, avremo

$$\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}'',\ \overline{\mathrm{D}'} = \mathrm{D}',\ \overline{\mathrm{D}''} = \mathrm{D}.$$

Ora la formola (4) § 394 (pag. 322), che dà il valore di ρ, diventa qui

$$\rho = i\,\frac{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2b^2(1-uv)^2 - a^2c^2(u-v)^2}{a\,b\,c\,(u+v)^2}\,,$$

e si vede che il coefficiente di i nel secondo membro è reale positivo, poniamo

$$\rho = i\mathrm{R}^2 \quad (\text{con R reale}).$$

Le equazioni differenziali fondamentali (I) 396 (pag. 330) ove si faccia $\varepsilon = +1$ e si cangi b in ib, assumono la forma seguente :

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\,\mathrm{V} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\sqrt{a\,b\,c}}(\mathrm{D}\,\mathrm{U} + \mathrm{D}'\mathrm{V}) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\,\mathrm{U} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\sqrt{a\,b\,c}}(\mathrm{D}'\mathrm{U} + \mathrm{D}''\mathrm{V}) \end{cases}$$

A causa delle (α), (β) i loro secondi membri sono immaginarii coniugati *per* θ *reale*, ed è quindi possibile soddisfarvi con un valore reale di θ inizialmente arbitrario. Dopo ciò le formole

$$x_1 = x + l\,\frac{\partial^1 x}{\partial u} + m\,\frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \text{ecc.}$$

daranno per le (α^*) una superficie S_1 trasformata reale, onde concludiamo:

Ogni superficie S *deformata propria dell'iperboloide generale a due falde possiede* ∞^2 *trasformate reali* S_1, *per trasformazioni* B_k.

Queste superficie trasformate S_1 saranno certamente applicabili sull'iperboloide Q_0, però in modo improprio, come risulta dalle considerazioni generali al § 407. E questo confermiamo col calcolo effettivo del ds_1^2 delle superficie S_1 ricorrendo alle formole d'applicabilità (36) § 399 (pag. 337) nelle quali è da cangiare b in ib, onde diventano :

$$(21) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{i\,b}{b'}\left\{\dfrac{a}{a'}(1-uv) - \dfrac{c}{c'}(1+uv)\right\}.(1+\operatorname{sen}\theta) + \dfrac{a\,c}{a'\,c'}\left\{u-v+\dfrac{i\,b}{b'}(u+v)\right\}\cos\theta}{\dfrac{i\,b}{b'}\left\{\dfrac{a}{a'}(1-uv) + \dfrac{c}{c'}(1+uv)\right\}.\cos\theta + \dfrac{a\,c}{a'\,c'}\left\{u-v-\dfrac{i\,b}{b'}(u+v)\right\}(1+\operatorname{sen}\theta)} \\ v_1 = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,. \end{cases}$$

Siccome θ è reale ed $u\ v$ immaginarie coniugate, vediamo che le nuove variabili u_1, v_1 sono reali, e quindi:

L'elemento lineare delle superficie trasformate S_1 *si ottiene da quello dell'iperboloide ad una falda* (§ 394)$_3^1$ *lasciandovi le variabili* u,v *reali, ma cangiandovi* b^2 *in* $-b^2$.

Per altro è da osservare che qui le variabili reali u, v sono assoggetate a soddisfare la diseguaglianza

$$a^2\,c^2\,(u-v)^2 > a^2\,b^2\,(1-u\,v)^2 + b^2\,c^2\,(1+u\,v)^2,$$

la quale esprime, come facilmente si vede, che il ds_1^2 è definito positivo.

Ed ora, con un'analisi del tutto simile a quella sviluppata nei due paragrafi precedenti per le deformate improprie del paraboloide ellittico, si dimostrerebbe inversamente che ogni superficie S coll'elemento lineare sopra indicato (deformata impropria di Q_0) ammette ∞^2 superficie trasformate S deformate proprie dell'iperboloide stesso. Ci dispensiamo dal riportare i calcoli relativi tanto più che in un prossimo paragrafo (§ 416) avremo occasione di sviluppare calcoli del tutto analoghi.

Resta in fine che vediamo quel che accade delle nostre trasformazioni per le deformate dell'iperboloide *rotondo* a due falde. Essendo qui $b^2 = c^2$ resta il solo valore possibile per k

$$k = b^2 = c^2$$

e, come nel caso del paraboloide ellittico, tutte le trasformazioni reali B_k si riducono alla sola complementare.

§ 413.

Caso dell'ellissoide. — Cambiamento di notazione.

Per trattare il caso dell'ellissoide basterà cangiare, nelle formole al § 394 per l'iperboloide ad una falda, c in $i\,c$, ciò che dà dapprima

$$x_0 = a\,\frac{1+u\,v}{u+v}, \quad y_0 = b\,\frac{u-v}{u+v}, \quad z_0 = i\,c\,\frac{1-u\,v}{u+v},$$

e siccome

$$u = \frac{1+\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} - i\,\frac{z_0}{c}}, \quad v = \frac{1-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} - i\,\frac{z_0}{c}} = \frac{\frac{x_0}{a} + i\,\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}},$$

si vede che per la regione reale dell'ellissoide la variabile u è coniugata di $\frac{1}{v}$. Troviamo per ciò opportuno modificare le formole al § 394 cangiando la variabile v nell'inversa $w = \frac{1}{v}$; le formole per l'ellissoide diventano così

$$x_0 = a\,\frac{u+w}{1+u\,w}, \quad y_0 = b\,\frac{u\,w-1}{1+u\,w}, \quad z_0 = i\,c\,\frac{w-u}{1+u\,v},$$

e la regione reale si ha assumendo u, w complesse coniugate

$$\bar{u} = w, \quad \bar{w} = u.$$

Nell'equazione dell'ellissoide Q_0

$$Q_0) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

riterremo come di consueto

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2,$$

e per quadrica confocale Q_k assumeremo l'iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} + \frac{z^2}{c^2+k} = 1$$

prendendo la costante k nell'intervallo $(-b^2, -c^2)$

$$-b^2 \leq k \leq -c^2.$$

In fine porremo

$$a' = \sqrt{a^2+k}, \quad b' = \sqrt{b^2+k}, \quad c' = \sqrt{-(c^2+k)}$$

e saranno a', b', c' reali positivi; così nelle formole al § 394 basterà cangiare soltanto c in ic.

Ora prendiamo le formole

$$x_1 = x + l\,\frac{\partial x}{\partial u} + m\,\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

che nelle nuove variabili u, w diventano

$$x_1 = x + l_0 \frac{\partial x}{\partial u} + m_0 \frac{\partial x}{\partial w}, \tag{22}$$

ove si ponga

$$l_0 = l,\ m_0 = -w^2 m.$$

Dopo ciò, ricorrendo alle (9), (10) § 394 (pag. 323) col porvi $\varepsilon = +1$ e cangiandovi c in ic, abbiamo:

$$\begin{cases} l_0 = \dfrac{1+uw}{2} \dfrac{\left(i\dfrac{a\,c}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right)2u\cos\theta + \left(i\dfrac{b\,c}{b'c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} - \dfrac{i\,c}{c'}\right)(u^2+1)}{i\dfrac{a\,c}{a'c'}(uw-1)\cos\theta - i\dfrac{b\,c}{b'c'}(u+w)\operatorname{sen}\theta + \dfrac{ab}{a'b'}(w-u)} \\ m_0 = \dfrac{1+uw}{2} \dfrac{\left(i\dfrac{a\,c}{a'c'} + \dfrac{b}{b'}\right)2w\cos\theta + \left(i\dfrac{b\,c}{b'c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(w^2-1)\operatorname{sen}\theta - \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} + \dfrac{i\,c}{c'}\right)(w^2+1)}{i\dfrac{a\,c}{a'c'}(uw-1)\cos\theta - i\dfrac{b\,c}{b'c'}(u+w)\operatorname{sen}\theta + \dfrac{a\,b}{a'b'}(w-u)} \end{cases}.$$

Siccome u, w sono coniugate immaginarie si vede che, *per* θ *reale*, le quantità l_0, m_0 sono anch'esse coniugate immaginarie, e le formole (22), applicate ad una deformata reale S dell'ellissoide, dimostrano che le superficie S_1 trasformate sono reali.

Resta dunque soltanto di esaminare se è possibile soddisfare *con* θ *reale* alle equazioni di trasformazione (I) pag. 330 le quali (ponendo $\varepsilon = +1$ e cangiando c in ic) diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)^2\rho}\,\mathrm{V} + \dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\sqrt{i\,a\,b\,c}\,\sqrt{\rho}}\,(\mathrm{D\,U} + \mathrm{D'\,V}) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{a'\,b'\,c'}{k(u+v)^2\rho}\,\mathrm{U} + \dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\sqrt{i\,a\,b\,c}\,\sqrt{\rho}}\,(\mathrm{D'\,U} + \mathrm{D''\,V}). \end{cases}$$

Siccome il valore (4) pag. 322 di ρ diventa ora

$$\rho = i\,\frac{b^2c^2(u+w)^2 + a^2c^2(1-uw)^2 - a^2b^2(u-w)^2}{a\,b\,c\,(1+uw)^2},$$

e si può scrivere evidentemente

$$\rho = i\,\mathrm{R}^2 \text{ (con R } \textit{reale}\text{)},$$

si ha per le equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(1+uw)^2\mathrm{R}^2}\,w^2\mathrm{V} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\,\sqrt{a\,b\,c}}\,(\mathrm{DU} + \mathrm{D'V}) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(1+uw)^2}\,w^2\mathrm{U} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\,\sqrt{a\,b\,c}}\,(\mathrm{D'U} + \mathrm{D''V}) \end{cases}$$

§ 414.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'ellissoide.

Cangiamo le formole superiori nelle nuove coordinate u, w trasformando anche la seconda forma fondamentale di S in queste coordinate, sia

$$\Delta\,du^2 + 2\,\Delta'\,du\,dw + \Delta''\,dw^2,$$

dove sarà

$$\Delta = \mathrm{D},\quad \Delta' = -\frac{\mathrm{D'}}{w^2},\quad \Delta'' = \frac{\mathrm{D''}}{w^4}.$$

Poichè inoltre

$$\frac{\partial\theta}{\partial w} = -\frac{1}{w^2}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

le equazioni differenziali per θ diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(1+uw)^2\mathrm{R}^2}\cdot w^2\mathrm{V} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\,\sqrt{a\,b\,c}}\,(\Delta\,\mathrm{U} - w^2\,\Delta'\,\mathrm{V}) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial w} = i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{k(1+uw)^2\mathrm{R}^2}\cdot\mathrm{U} - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,\mathrm{R}\,\sqrt{a\,b\,c}}\,(\Delta'\,\mathrm{U} - w^2\,\Delta''\,\mathrm{V}). \end{cases} \tag{23}$$

Dalle (10) pag. 323 (cangiandovi c in ic) deduciamo per le espressioni effettive di U, w^2 V:

$$\begin{cases} \mathrm{U} = \left(i\dfrac{a\,c}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right)2u\cos\theta + \left(i\dfrac{b\,c}{b'c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} - i\dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1) \\ w^2\mathrm{V} = \left(-i\dfrac{a\,c}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right)2w\cos\theta - \left(i\dfrac{b\,c}{b'c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(w^2-1)\operatorname{sen}\theta + \left(\dfrac{a\,b}{a'b'} + i\dfrac{c}{c'}\right)(w^2+1), \end{cases}$$

le quali formole dimostrano che, per θ reale, le quantità U, w^2V sono immaginarie coniugate come u, v. Siccome in fine la deformata S è reale, si ha

$$\overline{\Delta} = \Delta'',\quad \overline{\Delta'} = \Delta',\quad \overline{\Delta''} = \Delta$$

ed i secondi membri delle (23) sono immaginarii coniugati. Si può dunque soddisfare alle equazioni differenziali con θ reale ; e così anche per quest'ultimo caso di deformate proprie di quadriche reali abbiamo stabilito l'esistenza di ∞^2 trasformazioni reali B_k. Però, come negli altri casi di quadriche a punti ellittici, le trasformate S_1 saranno applicabili solo impropriamente sull'ellissoide. Quanto all'espressione effettiva del ds_1^2 nel caso attuale si otterrà ricorrendo alle solite formole d'applicabilità (36) pag. 337 dove però sarà da cangiare c in ic e v in $\frac{1}{w}$, il che dà :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\frac{b}{b'}\left\{\frac{a}{a'}(w-u) - \frac{ic}{c'}(u+w)\right\}(1+\operatorname{sen}\theta) + \frac{iac}{a'c'}\left\{uw-1+\frac{b}{b'}(1+uw)\right\}\cos\theta}{\frac{b}{b'}\left\{\frac{a}{a'}(w-u) + \frac{ic}{c'}(u+w)\right\}\cos\theta + \frac{iac}{a'c'}\left\{uw-1-\frac{b}{b'}(1+uw)\right\}(1+\operatorname{sen}\theta)} \\ v_1 = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Avendosi $\bar{u} = w$, $\bar{w} = u$, $\bar{\theta} = \theta$, si vede che le nuove variabili u_1, v_1, sono reali e per ciò :

L'elemento lineare delle superficie trasformate S_1 si ottiene da quello dell'iperboloide ad una falda (§ 394) *lasciandovi le variabili u, v reali e cangiando c^2 in $-c^2$.*

Per assicurare però un ds^2 definito positivo, queste variabili u, v dovranno qui soddisfare la diseguaglianza

$$a^2 b^2 (1 - u v)^2 > b^2 c^2 (1 + u v)^2 + a^2 c^2 (u - v)^2.$$

Ed ora, coi soliti procedimenti (§§ 410, 411), si può dimostrare che inversamente ogni tale deformata impropria dell'ellissoide ammette ∞^2 trasformazioni B_k reali, per le quali le seconde falde focali delle relative congruenze W sono deformate proprie dell'ellissoide.

Così, per quanto riguarda le deformate proprie delle quadriche reali, le nostre ricerche sono condotte al termine e possiamo compendiarle nel risultato finale già enunciato al § 376 :

Ogni superficie reale S *applicabile propriamente sopra una quadrica reale e generale* Q *appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze rettilinee reali* W *le cui seconde falde* S_1 *sono applicabili sulla quadrica stessa* Q, *in modo proprio od improprio secondo che* Q *è a punti iperbolici o a punti ellittici.*

Ritorniamo in fine al caso dell'ellissoide per esaminare ciò che avviene quando esso diventa di rotazione. Qui dobbiamo distinguere le due forme

1.ª ellissoide schiacciato ($a^2 = b^2 > c^2$)

2ª. ellissoide allungato ($a^2 > b^2 = c^2$).

Nel primo caso le trasformazioni B_k esistono ancora nella stessa doppia infinità, potendo k avere un qualunque valore nell'intervallo $(-a^2, -c^2)$. In particolare la trasformazione singolare B_{-a^2} è la complementare, onde risulta che *tutte* le trasformazioni B_k per le deformate (proprie) S dell'ellissoide schiacciato portano a trasformate S_1 applicabili sulla complementare dell'ellissoide.

Nella seconda forma (ellissoide allungato), annullandosi l'intervallo $(-b^2, -c^2)$ per k, le trasformazioni reali B_k si riducono alla sola complementare.

Riepilogando in fine i risultati relativi alla esistenza delle ∞^2 trasformazioni reali B_k per le forme rotonde delle quadriche, vediamo che esse persistono solo per queste due forme :

iperboloide ad una falda
ellissoide schiacciato,

mentre per le altre tre forme : *paraboloide*, *iperboloide a due falde*, *ellissoide allungato* esse spariscono, o meglio si riducono ad un'unica trasformazione: la complementare.

La ragione di questo diverso comportamento si riconosce in questo (§ 376) che solo per le prime due forme esistono nel rispettivo sistema confocale *effettive* quadriche rigate, mentre per le ultime tre queste degenerano nei piani per l'asse.

§ 415

Trasformazioni B_k per le deformate improprie del paraboloide iperbolico.

Le ricerche del presente capitolo sulle deformate delle quadriche a punti ellittici ci ha condotto forzatamente a considerare, accanto alle loro deformate proprie, quelle improprie. Questo ci pone in avvertenza che anche per le deformate delle quadriche a punti iperbolici il soggetto non è ancora esau-

rito. Nelle relative ricerche dei due Capitoli precedenti noi abbiamo invero trattato soltanto delle deformate *proprie* di queste quadriche, ma esistono pure classi di deformate *improprie* di queste quadriche per le quali esistono ancora, come vedremo, le corrispondenti trasformazioni reali B_k, e sono questi i nuovi casi che andiamo ora a trattare. La differenza essenziale dal caso delle quadriche a punti iperbolici a quello delle quadriche a punti ellittici consiste in ciò che nel primo caso le trasformazioni elementari B_k fanno passare da una deformata propria od impropria S ad un'altra deformata S'_1 corrispondentemente propria od impropria, nel secondo invece (come risulta dagli sviluppi precedenti) l'applicabilità cambia senso, cioè diventa da propria impropria e viceversa.

Cominciando le nuove ricerche dal paraboloide iperbolico, ci riferiremo alle formole del § 378 e definiremo la regione immaginaria di questo paraboloide la quale offre tuttavia un ds^2 reale, definito e positivo, coll'assumere in quelle formole le variabili u, v *complesse coniugate*. Separando il reale dall'immaginario col porre

$$u = \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - i\beta}{2} \qquad (\alpha, \beta \text{ reali}),$$

avremo

$$x_0 = \alpha\sqrt{p}, \quad y_0 = i\beta\sqrt{q}, \quad z_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2},$$

indi

$$ds_0^2 = (\alpha^2 + p)\,d\alpha^2 + 2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta + (\beta^2 - q)\,d\beta^2 \tag{24}$$

e basterà assoggettare le variabili α, β reali alla diseguaglianza

$$p\beta^2 > q\alpha^2 + pq$$

per avere un ds_0^2 definito positivo. La quantità

$$H = p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq = pq - p\beta^2 + q\alpha^2$$

risulterà per ciò *negativa* e noi porremo

$$H = -h^2 \qquad \sqrt{H} = ih \quad (h \text{ reale}). \tag{24*}$$

Abbiasi ora una superficie S reale d'elemento lineare (24) (una deformata reale impropria del paraboloide iperbolico), e sia

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

la sua seconda forma fondamentale, onde avremo per la realtà di S

$$\overline{D} = D'', \quad \overline{D'} = D', \quad \overline{D''} = D. \tag{25}$$

Prendiamo ora la costante k reale positiva e minore di p:

$$0 < k \leq p,$$

e passiamo, mediante una B_k, dalla S ad una trasformata S_1 colle solite formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

Ora noi vogliamo che siano soddisfatte le condizioni seguenti: 1ª. la superficie S_1 sia reale, 2.ª il suo ds^2 sia dato dalla (24). Per la prima condizione occorre e basta che si abbia

$$\overline{l} = m, \quad \overline{m} = l,$$

ossia

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}. \tag{26}$$

Per la seconda poi bisogna che le formole d'applicabilità (50) § 386 (pag. 302) assegnino valori coniugati immaginarii per u_1, v_1, cioè si abbia

$$\overline{\lambda} = \frac{\sqrt{pq} + \{\sqrt{pq'}\,(u-v) - \sqrt{qp'}\,(u+v)\}\,\lambda}{\sqrt{pq'}\,(u-v) + \sqrt{qp'}\,(u+v) - \sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}.$$

Questa è una relazione bilineare fra $\lambda, \overline{\lambda}$

$$A\lambda\overline{\lambda} + B\lambda + \overline{B}\overline{\lambda} + C = 0, \tag{27}$$

dove

$$A = \sqrt{pq}(4uv+k), \quad B = \sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{qp'}(u+v), \quad \overline{B} = -\sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{pq'}\,(u+v), \quad C = \sqrt{pq}, \tag{28}$$

e siccome $\overline{u} = v$, $\overline{v} = u$, i coefficienti estremi A, C sono reali, i medii B, $\overline{B}$ coniugati immaginari; inoltre il determinante è dato da

$$\begin{aligned} \overline{B}B - AC &= qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2 - pq(4uv+k) = \\ &= q(p-k)(u+v)^2 - p(q+k)(u-v)^2 - pq(4uv+k) = \\ &= -k\{p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq\} = -kH. \end{aligned} \tag{29}$$

Esso è positivo perchè H è negativa come si è visto, k positiva per nostra scelta ; (*) e dopo ciò basterà applicare un'analisi del tutto simile a quella dei §§ 410, 411 per stabilire il risultato in vista.

In primo luogo si verificherà che la (26), ossia sviluppando colle (23) § 378 (pag. 280), l' equazione

$$\frac{2(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\,\bar\lambda^2v^2-2(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q'})\,\bar\lambda v-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\,\bar\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})}{\bar\lambda(\mathrm{B}\bar\lambda+\mathrm{C})}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'})\lambda^2v^2-2(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q'})\lambda v-\frac{k}{2}(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'})\lambda^2+\frac{1}{2}(\sqrt{pq'}+\sqrt{pq'})}{\lambda(\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C})}$$

è una conseguenza della (27). Per questo basta osservare che si ha

$$\bar\lambda(\bar{\mathrm{B}}\bar\lambda+\mathrm{C})=-\frac{k\,\mathrm{H}\,\lambda(\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C})}{(\mathrm{A}\lambda+\bar{\mathrm{B}})^2},$$

indi procedere come al § 410.

Ora le equazioni differenziali per λ ((I) § 381), osservando la (24*), si scrivono

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,\mathrm{V}-\dfrac{i}{2kh}(\mathrm{D}\,\mathrm{U}+\mathrm{D}'\,\mathrm{V})\\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,\mathrm{U}-\dfrac{i}{2kh}(\mathrm{D}'\,\mathrm{U}+\mathrm{D}''\,\mathrm{V}),\end{cases}$$

dalle quali cangiando i in $-i$ si ha

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial u}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,\bar{\mathrm{U}}+\dfrac{i}{2kh}(\mathrm{D}'\,\bar{\mathrm{U}}+\mathrm{D}\,\bar{\mathrm{V}})\\[2ex] \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial v}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\,\bar{\mathrm{V}}+\dfrac{i}{2kh}(\mathrm{D}''\,\bar{\mathrm{U}}+\mathrm{D}'\,\bar{\mathrm{V}}).\end{cases}$$

Queste equazioni differenziali per $\lambda,\bar\lambda$, insieme alla relazione bilineare (27), costituiscono un sistema completo, come si verifica con un calcolo del tutto analogo a quello del § 411. La questione si riduce dunque a soddisfare

(*) Abbiamo appunto scelta $k>0$ per rendere $\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{B}}-\mathrm{A}\,\mathrm{C}>0$.

inizialmente la (27) per il che basta prendere per valore iniziale λ_0 di λ l'affissa di un punto del circolo rappresentato nel piano complesso λ dall' equazione bilineare (27).

Possiamo riassumere questi risultati nel teorema finale: *Ogni deformata impropria* S′ *del paraboloide iperbolico* (*d'elemento lineare* (24)) *ammette* ∞^2 *trasformazioni reali* B_k *in superficie* S_1 *della medesima specie.*

§ 416.

Caso delle deformate improprie dell'iperboloide rigato.

Passiamo ora alle deformate improprie dell'iperboloide ad una falda. Qui però ne troviamo di due classi distinte, la prima delle quali si ottiene assumendo nel ds_0^2 dell' iperboloide § 394 (pag. 322) le variabili u, v coniugate immaginarie :

$$a)\qquad \bar u=v,\quad \bar v=u,$$

e la seconda assumendo v coniugata dell'inversa di u :

$$b)\qquad \bar u=\frac{1}{v},\quad \bar v=\frac{1}{u}.$$

Ambedue le volte infatti basta assoggettare la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario in u a soddisfare una corrispondente diseguaglianza per ottenere un ds^2 reale, definito e positivo. Per l'una e per l'altra classe esistono trasformazioni reali B_k ; ma noi ci limiteremo alla prima a) chè per la seconda b) la trattazione procederebbe in modo analogo. D' altra parte poi una trasformazione di nuova specie che studieremo più tardi (§ 425) ci permetterà di passare dal caso a) al caso b). Consideriamo dunque una superficie S il cui elemento lineare sia quello al § 394 dell' iperboloide ad una falda, ma colle variabili u, v immaginarie coniugate. Prendiamo poi la costante k positiva e minore di c^2

$$0<k\leq c^2,$$

e conserviamo tutte le altre notazioni del detto § 394 prendendo $\varepsilon=+1$ nelle (10) pag. 323 che dànno i valori di U, V, W. Applicando le trasformazioni B_k alla S, otterremo superficie *reali* S_1 trasformate, col medesimo ele-

mento lineare, e potremo far sì che: *l, m risultino coniugate e medesimamente le variabili* u_1, v_1 *date dalle formole d'applicabilità* (36) § 399 (*pag.* 337).

La prima condizione dà

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}, \tag{30}$$

e la seconda, se si pone

$$\lambda = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}, \tag{30*}$$

onde

$$\cos\theta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

si traduce nella equazione bilineare fra λ, $\overline{\lambda}$.

$$A\lambda\overline{\lambda} + B\lambda + \overline{B}\overline{\lambda} + C = 0, \tag{31}$$

i coefficienti A, B, $\overline{B}$, C essendo dati delle formole

$$\begin{cases} A = \dfrac{a\,b}{a'\,b'}(1-uv) + \dfrac{b\,c}{b'c'}(1+uv), \quad C = -\dfrac{a\,b}{a'\,b}(1-uv) + \dfrac{b\,c}{b'c'}(1+uv) \\ B = -\dfrac{a\,c}{a'\,c'}\left\{u-v+\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}, \quad \overline{B} = \dfrac{a\,c}{a'\,c'}\left\{u-v-\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}, \end{cases} \tag{32}$$

le quali dimostrano essere A, C reali, B, $\overline{B}$ immaginarii coniugati.

Anche qui il seguito del calcolo procede come ai §§ 410,411. In primo luogo si osservi che $EG - F^2$, essendo ds^2 definito positivo ed u, v immaginario coniugate, è necessariamente negativo, (*) cioè per la (2*) § 394 (pag. 322) deve essere

$$a^2\,b^2\,(1-u\,v)^2 + b^2\,c^2\,(1+u\,v)^2 + a^2\,c^2\,(u-v)^2 < 0,$$

e siccome pel determinante $B\overline{B} - AC$ si trova subito

$$B\overline{B} - A\,C = -\frac{k}{a'^2 b'^2 c'^2}\left\{a^2\,b^2\,(1-u\,v)^2 + b^2\,c^2(1+u\,v)^2 + a^2\,c^2(u-v)^2\right\},$$

(*) Ponendo $u = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$, $v = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$ con α, β reali il nuovo $E'G' - F'^2$ deve essere positivo; ma $E'G' - F' = (EG - F^2)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)}\right)^2 = -\frac{1}{4}(EG - F)^2$.

si vede intanto che sarà

$$B\overline{B} - A\,C \geq 0.$$

Dopo ciò si osservi che dalla (31) segue già la (30), e resta solo da combinare la (31) colle equazioni differenziali per θ. Ora la quantità

$$\rho = \frac{a^2\,b^2\,(1-u\,v)^2 + b^2\,c^2\,(1+u\,v)^2 + a^2\,c^2\,(u-v)^2}{a\,b\,c\,(u+v)^2}$$

essendo reale negativa, pongasi

$$\rho = -R^2, \quad \sqrt{\rho} = iR \quad (R \text{ reale})$$

Le equazioni differenziali (I) § 396 (pag. 330) per θ diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{a'\,b'\,c'}{k\,(u+v)^2\,R^2}\cdot V - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,R\,k\sqrt{a\,b\,c}}(D\,U + D'\,V) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{a'\,b'\,c'}{k\,(u+v)^2\,R^2}\cdot U - i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,R\sqrt{a\,b\,c}}(D'U + D''\,V), \end{cases}$$

e scrivendole invece nel parametro $\lambda = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{a'\,b'\,c'}{k\,(u+v)^2\,R^2}\cdot V_1 + \cdot\,\dfrac{i\,a'\,b'\,c'}{2\,k\,R\sqrt{a\,b\,c}}(D\,U_1 + D'V_1) \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{a'\,b'\,c'}{k\,(u+v)^2\,R^2}\cdot U_1 + i\,\dfrac{a'\,b'\,c'}{2\,k\,R\sqrt{a\,b\,c}}(D'U_1 + D''V_1), \end{cases} \tag{32}$$

dove si è posto:

$$U_1 = (1+\lambda^2)\,U, \quad V_1 = (1+\lambda^2)\,V, \quad W_1 = (1+\lambda^2)\,W. \tag{33}$$

Scrivendo insieme alle (32) le equazioni coniugate ed aggregandovi l'equazione bilineare (31) si vede, nel solito modo, che il sistema ottenuto è completo. Vale adunque anche per le attuali deformate improprie dell'iperboloide ad una falda la proposizione finale del paragrafo precedente.

Così la nostra ricerca per le trasformazioni B_h delle deformate proprie ed improprie delle quadriche *reali* è condotta a termine, e conforme a quanto già sopra abbiamo detto, il risultato principale è che nelle relative congruenze W a falde focali S, S_1 l'applicabilità delle due falde è propria od

impropria secondo che la quadrica fondamentale Q è a punti iperbolici o a punti ellittici

§ 417.

Trasformazioni B_k per le deformate della sfera immaginaria.

Accanto alle deformate proprie od improprie delle quadriche reali, la cui trattazione può ora considerarsi esaurita, vi sono intere classi di superficie *reali* applicabili sopra quadriche immaginarie per le quali esistono ancora le corrispondenti trasformazioni B_k reali. Noi non vogliamo qui compiere una ricerca sistematica dei ds^2 *reali e definiti positivi* che appartengono a quadriche immaginarie e dei quali esistono svariatissimi tipi. Ci limiteremo a scegliere fra di essi alcuni esempî più notevoli cominciando da quello che ha fornito il punto di partenza di tutta la teoria (cf. § 374), e cioè dalle superficie applicabili sulla sfera immaginaria

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0$$

fra le quali le reali sono appunto le superficie pseudosferiche di raggio $= R$. Ma dapprima prescinderemo da ogni condizione di realità ed applicheremo le formole generali del § 394, nelle quali, assumendo, per semplicità $R = 1$, dovremo fare

$$a = b = i,\ c = 1,$$

da cui

$$E = G = 0,\quad F = \frac{2}{(u+v)^2},\ \rho = 1, \tag{34}$$

indi

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(u+v)^2}, \tag{35}$$

le linee coordinate essendo qui quelle di lunghezza nulla (generatrici della sfera).

Applicando la trasformazione B_k, sarà

$$a' = b' = i\sqrt{1-k},\quad c' = \sqrt{1-k}$$

e la quadrica omofocale Q_k diventa la sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 - k = 0$$

di raggio $= i\sqrt{1-k}$. Ne segue già che nel caso attuale tutti i segmenti focali FF_1 hanno lunghezza costante $= \sqrt{k}$.

Calcolando mediante le (10) pag. 223, con $\varepsilon = +1$, le quantità U,V,W, abbiamo

$$U = \frac{1-\sqrt{1-k}}{1-k}\cdot\frac{\lambda^2}{1+\operatorname{sen}\theta},\ V = \frac{1+\sqrt{1-k}}{1-k}\cdot\frac{\mu^2}{1+\operatorname{sen}\theta},\ W = \frac{2}{1-k}\frac{\lambda\,\mu}{1+\operatorname{sen}\theta} \tag{36}$$

dove si è posto per brevità:

$$\lambda = \cos\theta + u\,(1+\operatorname{sen}\theta),\ \mu = \cos\theta - v\,(1+\operatorname{sen}\theta). \tag{37}$$

Dalle (36) si ha

$$\begin{cases} l = (u+v)\dfrac{U}{W} = \dfrac{1-\sqrt{1-k}}{2}(u+v)\dfrac{\lambda}{\mu} \\ m = (u+v)\dfrac{V}{W} = \dfrac{1+\sqrt{1-k}}{2}(u+v)\dfrac{\mu}{\lambda}, \end{cases} \tag{38}$$

indi

$$l\,m = \frac{k\,(u+v)^2}{4}.$$

Per il quadrato δ^2 della distanza focale

$$\delta^2 = El^2 + 2\,Flm + Gm^2$$

si ha quindi

$$\delta^2 = k,\ \text{o}\ \delta = \sqrt{k},$$

come già sopra avevamo osservato.

Se applichiamo poi la formola di RIBAUCOUR

$$\frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \sqrt{\frac{1}{KK_1}},$$

essendo qui

$$K = -1,\quad K_1 = -1,$$

per l'angolo Ω dei piani focali ne risulta

$$\operatorname{sen}\Omega = \sqrt{k},\ \cos\Omega = \sqrt{1-k}.$$

Concludiamo quindi:

Nelle attuali congruenze W, *colle due falde focali applicabili sulla sfera immaginaria, è costante la distanza dei fuochi ed anche l'angolo dei piani focali* (*congruenze pseudosferiche*).

§ 418.

Trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

Collochiamoci ora dal punto di vista reale e supponiamo di avere una superficie S *reale* applicabile sulla sfera immaginaria di raggio $= i$, cioè una superficie pseudosferica di raggio $=1$, Volendo ottenere trasformazioni B_k reali, bisognerà che δ ed Ω siano reali; per ciò la costante k dovrà essere reale, positiva e < 1, poniamo

$$k = \cos^2 \sigma,$$

con σ angolo costante reale, ed avremo

$$\delta = \cos \sigma \ , \quad \Omega = \frac{\pi}{2} - \sigma.$$

L'elemento lineare della S si avrà dalla (35) assumendo le variabili u, v coniugate immaginarie, e ponendo

$$u = \alpha + i\,\beta, \quad v = \alpha - i\,\beta,$$

assumerà la ben nota forma

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\alpha^2},$$

che nel Vol. I Cap. XIV abbiamo posto a base delle ricerche sulla geometria pseudosferica

Affinchè la superficie trasformata S_1 data dalle formole

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{ecc.}$$

sia reale occorre e basta che l, m siano coniugati. Ma dalle (38) abbiamo

$$(39) \qquad \begin{cases} l = \alpha\,(1 - \operatorname{sen}\sigma)\,\dfrac{\lambda}{\mu}, \quad m = \alpha\,(1 + \operatorname{sen}\sigma)\,\dfrac{\mu}{\lambda} \\ l\,m = \alpha^2 \cos^2\sigma \end{cases},$$

onde, indicando con φ un angolo *reale*, potremo porre

$$(40) \qquad l = \alpha \cos\sigma \,.\, e^{i\varphi}, \quad m = \alpha \cos\sigma \,.\, e^{-i\varphi},$$

da cui

$$(41) \qquad e^{i\varphi} = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,\frac{\lambda}{\mu}.$$

Alla funzione incognita $\theta\,(u, v)$ sostitueremo dunque qui la funzione reale $\varphi\,(u, v)$ e cercheremo le equazioni differenziali che la determinano.

Le formole (36) dànno

$$(42) \qquad U = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \cdot \frac{\lambda^2}{1 + \operatorname{sen}\theta}, \quad V = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \cdot \frac{\mu^2}{1 + \operatorname{sen}\theta}$$

e le equazioni differenziali per θ (I) pag. 330 con $\varepsilon = +1$ diventano:

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}^3\sigma}{(u+v)^2\cos^2\sigma} \cdot V + i\,\dfrac{\operatorname{sen}^3\sigma}{2\cos^2\sigma}\,(D\,U + D'\,V) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{\operatorname{sen}^3\sigma}{(u+v)^2\cos^2\sigma} \cdot U + i\,\dfrac{\operatorname{sen}^3\sigma}{2\cos^2\sigma}\,(D'\,U + D''\,V). \end{cases}$$

Ma derivando la (41) abbiamo

$$\begin{cases} i\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\lambda} + \dfrac{(u+v)\,(1+\operatorname{sen}\theta)}{\lambda\,\mu}\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u} \\ i\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\mu} + \dfrac{(u+v)\,(1+\operatorname{sen}\theta)}{\lambda\,\mu}\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \end{cases}$$

e sostituendo in questa i valori (43), coll'osservare le identità:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \dfrac{1}{u+v}\left(1 - \dfrac{\cos\sigma}{1 - \operatorname{sen}\sigma}\,e^{-i\varphi}\right) \\ \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\mu} = \dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{\cos\sigma}{1 - \operatorname{sen}\sigma}\,e^{i\varphi} - 1\right) \end{cases}$$

otteniamo in fine le equazioni richieste per φ:

$$(44)\qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{1}{u+v}\left(1-\dfrac{e^{-i\varphi}}{\cos\sigma}\right) + i\,tg\,\sigma\,(u+v)\,(D\,e^{i\varphi}+D'\,e^{-i\varphi}) \\ i\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{e^{i\varphi}}{\cos\sigma}-1\right) + i\,tg\,\sigma\,(u+v)\,(D'\,e^{i\varphi}+D''\,e^{-i\varphi}). \end{cases}$$

Per riconoscere che si possono soddisfare con φ reale inizialmente arbitrario, basta trasformarle in coordinate reali α, β, con che l'immaginario sparirà dalle formole.

Indichiamo infatti con

$$\Delta\,d\alpha^2 + 2\,\Delta'\,d\alpha\,d\beta + \Delta''\,d\beta^2$$

la seconda forma fondamentale di S in coordinate α, β, onde saranno Δ, Δ', Δ'' reali, e poichè

$$\Delta\,d\alpha^2 + 2\,\Delta'\,d\alpha\,d\beta + \Delta''\,d\beta^2 = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

avremo

$$\Delta = 2\,D' + (D+D''),\quad \Delta' = i\,(D-D''),\quad \Delta'' = 2\,D' - (D+D'').$$

Le (44) sommate e sottratte, dànno le formole definitive sotto forma reale :

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\alpha\cos\sigma} + \alpha\,tg\,\sigma\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \dfrac{\cos\sigma-\cos\varphi}{\alpha\cos\sigma} + \alpha\,tg\,\sigma\,(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi). \end{cases}$$

Esse formano, come è evidente, un sistema completamente integrabile, (*) e presa per φ una sua qualunque soluzione, le formole

$$(46)\qquad x_1 = x + \alpha\cos\sigma\left(\cos\varphi\,\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial x}{\partial\beta}\right),\ \text{ecc.}$$

(*) Questo si verifica anche subito, avendo riguardo alle equazioni di CODAZZI.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\alpha\Delta')}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial(\alpha\Delta)}{\partial\beta} = \Delta' \\ \dfrac{\partial(\alpha\Delta')}{\partial\beta} - \dfrac{\partial(\alpha\Delta'')}{\partial\alpha} = \Delta \end{cases}$$

ed alla equazione di GAUSS :

$$\alpha^4(\Delta\Delta'' - \Delta'^2) = -1.$$

dànno la superficie pseudosferica trasformata S_1, la quale colla primitiva S forma le due falde focali di una congruenza pseudosferica. Dalle (46) risulta altresì il significato geometrico dell'angolo φ come inclinazione del raggio della congruenza pseudosferica sulle geodetiche parallele $\beta = \text{cost}^{te}$ di S.

Le formole (46) non sono altro che le formole per la trasformazione di BÄCKLUND, riferite anzichè alle linee di curvatura al sistema delle geodetiche parallele $\beta = \text{cost}^{te}$, ed agli oricicli ortogonali $\alpha = \text{cost}^{te}$.

§ 419.

Paragone colle proprietà generali delle trasformazioni B_k.

Ottenute così nuovamente le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche come caso particolare delle trasformazioni B_k è istruttivo osservare a quali proprietà delle prime trasformazioni corrispondano quelle generali segnalate per le trasformazioni B_k.

1.° Sappiamo che le trasformazioni B_k in generale fanno corrispondere alle asintotiche della superficie primitiva Q quelle della superficie trasformata S_1, inoltre al sistema coniugato permanente di S quello di S_1 (Cf. §§ 388-390 e 403). Se si osserva che per le deformate della sfera (reale od immaginaria) il sistema coniugato permanente è quello delle linee di curvatura, perchè si conserva ortogonale (coniugato) nell'applicabilità sulla sfera, vediamo che queste proprietà dànno nel caso particolare l'altra ben nota :

Le trasformazioni di BÄCKLUND *delle superficie pseudosferiche conservano le linee asintotiche e le linee di curvatura.*

Quanto all'ulteriore proprietà della trasformazione di BÄCKLUND di conservare *la lunghezza degli archi* di asintotica, questa appartiene solo al caso particolare e non ha riscontro nelle trasformazioni generali B_k.

2.° La legge di applicabilità delle due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze W è data, come sappiamo, dall'affinità d'IVORY. Come si interpreta questa proprietà nel caso particolare pseudosferico (*) ? Qui si

(*) Avvertiamo che qui nel testo è seguito il cammino inverso di quello che in effetto ha condotto a riconoscere la legge d'applicabilitá nell'affinit àd'IVORY. La proposizione formulata più oltre sull'applicabilità speciale delle due falde di una congruenza pseudosferica già prima conosciuta (Vol. I § 265) è quella appunto che ha servito per risalire alla legge generale.

ha la particolarità che le due falde focali S, S_1, anzichè in un sol modo, sono applicabili in infiniti modi (in ∞^3 modi) avendo la medesima curvatura costante. Però fra questi ∞^3 modi vi sarà quello speciale dato dall'affinità d'IVORY fra le due sfere concentriche

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \operatorname{sen}^2\sigma = 0,$$

le cui formole sono semplicemente quelle della omotetia

$$x_1 = x \operatorname{sen}\sigma, \quad y_1 = y \operatorname{sen}\sigma, \quad z_1 = z \operatorname{sen}\sigma$$

e fanno corrispondere punti delle due sfere sul medesimo raggio. Ora se la superficie pseudosferica S si applica sulla prima sfera, col centro O nell'origine, il segmento focale $F F_1 = \cos\sigma$ diventerà un segmento $M M_1$ tangente in M alla prima sfera e terminato in M_1 alla seconda. Il punto M′ sulla prima sfera corrispondente nell'affinità d'IVORY a M_1 sarà nel piano OMM_1 e chiamando $\frac{\delta}{i}$ l'angolo (puramente immaginario) M O M′ avremo

$$\cos\sigma = i\, tg\left(\frac{\delta}{i}\right) = tgh\,\delta,$$

e la legge d'applicabilità data dall'affinità d'IVORY si muta ora nella proposizione seguente:

Se S, S_1 *sono le due falde focali* (*di curvatura costante* $= -1$) *di una congruenza pseudosferica col segmento focale* FF_1 *di lunghezza costante* $= \cos\sigma$ (< 1), *si ottiene una delle leggi d'applicabilità per* S *e* S_1 *con questa costruzione: si prolunghi geodeticamente sulla superficie* S *il segmento* F_1F *di una lunghezza geodetica costante* δ *tale che si abbia*

$$tgh\,\delta = \cos\sigma, \tag{47}$$

ed il punto F′ *di* S *a cui si arriva sarà il punto corrispondente nell'applicabilità a* F_1.

Questa è precisamente la costruzione data nel Vol. I, § 265. come conseguenza delle proprietà degli scorrimenti delle reti di TCHEBYCHEF in geometria pseudosferica. Ora essa appare come un caso particolare dell'affinità d'IVORY, colla quale resta anche spiegata la formola (47). — Possiamo anche del resto, senza ricorrere a considerazioni implicanti l'immaginario, dedurre questi risultati dalle formole generali d'applicabilità (36) pag. 337 nelle quali è da porsi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma},$$

e se poniamo inoltre, separando il reale dell'immaginario:

$$u_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad v_1 = \alpha_1 - i\beta_1,$$

otteniamo per le equazioni richieste:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\alpha \operatorname{sen}\sigma}{1 - \cos\sigma\cos\varphi} \\ \beta_1 = \beta + \dfrac{\alpha \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi}{1 - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi}. \end{cases} \tag{48}$$

Riguardando α, β come coordinate cartesiane ortogonali in un piano rappresentativo, si ha appunto la rappresentazione conforme del Cap. XIV della pseudosfera sul (semi) piano. Le (48), per α, β costanti, sono le equazioni parametriche del circolo

$$(\beta_1 - \beta)^2 + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\sigma}\right)^2 = \alpha^2 \cot^2\sigma$$

che non taglia in punti reali la retta limite $\alpha = 0$. Essa è un circolo a centro reale in metrica non-euclidea; l'immagine del suo centro è precisamente il punto (α, β) e il suo raggio non euclideo δ è dato appunto dalla (47).

Si osservi però che nel caso particolare della trasformazione complementare $\sigma = 0$ le formole della particolare applicabilità (48) perdono ogni senso, i punti di S che corrispondono nell'applicabilità alla S_1 essendo allontanati all'infinito.

§ 420.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'ellissoide immaginario.

Dal caso della sfera immaginaria, sul quale ci siamo a lungo trattenuti per la sua importanza, passiamo a considerare quello della più generale quadrica immaginaria *con equazione a coefficienti reali* e cioè dell'ellissoide immaginario

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

Esistono parecchi tipi di ds^2 reali definiti positivi appartenenti a questa quadrica, (*) ma noi ne considereremo uno solo: quello che si ottiene cangiando nelle formole del § 394 per l'iperboloide ad una falda a, b rispettivamente in ia, ib e prendendo per u,v variabili complesse coniugate, che nel caso $a=b=c=1$ diventa quello (35) pag. 380 della pseudosfera. Intanto si osservi che qui $EG-F^2$, per la ragione già addotta in nota al § 416, deve risultare *negativo*, e siccome dalla (2*) pag. 322

$$EG-F^2=4\,\frac{a^2b^2(1-uv)^2-b^2c^2(1+uv)^2-a^2c^2(u-v)^2}{(u+v)^6},$$

dovranno u, v verificare la diseguaglianza

$$a^2c^2(u-v)^2+b^2c^2(1+uv)^2>a^2b^2(1-uv)^2. \tag{49}$$

Prendiamo ora la costante k reale positiva e minore di ciascuna delle tre quantità

$$a^2,\ b^2,\ c^2,$$

e poniamo

$$a'=\sqrt{a^2-k},\ b'=\sqrt{b^2-k},\ c'=\sqrt{a^2-k},$$

onde a', b', c' saranno reali (positivi).

Sia S una superficie reale della classe considerata (col detto ds^2) e cerchiamo se le trasformate S_1 date dalle formole

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{ecc.}$$

possono essere nuovamente reali e della medesima classe. In tutte le formole al § 394 dovremo cangiare rispettivamente a, b, a', b' in ia, ib, ia' ib', ciò che lascia invariati i rapporti $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ e così le formole (10) § 394, ove si farà $\varepsilon=+1$, restano formalmente invariate, e la medesima cosa accade per le formole d'applicabilità (36) pag. 337.

Ora le condizioni imposte alla S_1 si traducono nelle due equazioni

(*) Cf. PETERSON memoria citata al § 407.

$$1^a\qquad \bar l=m,\quad \text{o}\quad \frac{\overline{U}}{\overline{W}}=\frac{V}{W}$$

$$2^a\qquad \bar v_1=u_1.$$

Nel solito modo (§ 410) si prova che la prima è una conseguenza della seconda; e questa, ponendo ancora

$$\lambda=\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

si traduce nella relazione bilineare in λ, $\bar\lambda$:

$$A\lambda\bar\lambda+B\lambda+\overline{B}\bar\lambda+C=0, \tag{50}$$

dove:

$$\begin{cases} A=\dfrac{b}{b'}\left\{\dfrac{c}{c'}(1+uv)+\dfrac{a}{a'}(1-uv)\right\},\quad C=\dfrac{b}{b'}\left\{\dfrac{c}{c'}(1+uv)-\dfrac{a}{a'}(1-uv)\right\} \\ B=-\dfrac{ac}{a'c'}\left\{u-v+\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}\ ;\quad \overline{B}=\dfrac{ac}{a'c'}\left\{u-v-\dfrac{b}{b'}(u+v)\right\}. \end{cases}$$

I coefficienti A, C sono reali e B, $\overline{B}$ complessi coniugati, di più il determinante

$$B\overline{B}-AC=\frac{k}{a'^2\,b'^2\,c'^2}\left\{a^2c^2(u-v)^2+b^2c^2(1+uv)^2-a^2b^2(1-uv)^2\right\}$$

è positivo per la (49), essendo $k>0$.

Resta solo da combinare l'equazione in termini finiti (50) colle equazioni differenziali per λ, $\bar\lambda$. Ma se si osserva che qui la quantità

$$\rho=\frac{a^2c^2(u-v)^2+b^2c^2(1+uv)^2-a^2c^2(1-uv)^2}{abc(u+v)^2}$$

è reale positiva, e si pone

$$\rho=R^2,\quad \sqrt{\rho}=R,$$

le equazioni differenziali per λ prendono la stessa forma (32) come al § 416, e le verifiche per la completa integrabilità del sistema procedono nel medesimo modo. Concludiamo quindi: *Ogni superficie reale* S *della classe consi-*

derata, applicabile sull' ellissoide immaginario, ammette ∞^2 *trasformazioni reali* B_k che la cangiano in superficie S_1 della medesima classe.

Si noti che le superficie S della classe attuale risultano applicabili sopra superficie di rotazione quando $a = b$. Se nello stesso tempo

$$a = b < c,$$

per superficie tipica di rotazione si può prendere il *catenoide accorciato*, o fra gli elicoidi l'elicoide logaritmico, e le trasformazioni B_k vengono a collegarsi con quelle di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche.

§ 421.

Trasformazioni B_k per le deformate del paraboloide immaginario:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz.$$

Fino ad ora si è considerato solo il caso di una quadrica fondamentale Q immaginaria, *ma con equazione a coefficienti reali.* Qui da ultimo adduciamo ancora un esempio in cui l'equazione stessa della quadrica Q è a coefficienti immaginarii e scegliamo il paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\,i\,z$$

con parametri ip, iq puramente immaginarii e avendo inoltre p, q il medesimo segno, p. e. il positivo.

Indicando con α, β due variabili reali, le formole

$$x_0 = \alpha\sqrt{p}\,,\quad y_0 = \beta\sqrt{q}\,,\quad z_0 = -i\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \tag{51}$$

definiscono una regione del nostro paraboloide il cui ds^2

$$ds^2 = (p-\alpha^2)\,d\alpha^2 - 2\,\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta + (q-\beta^2)\,d\beta^2 \tag{52}$$

è reale, definito positivo purchè α, β soddisfino alla diseguaglianza

$$\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} < 1. \tag{53}$$

Consideriamo le superficie *reali* S con questo ds^2 e cerchiamo le loro trasformazioni reali in superficie S_1 della medesima classe.

Basterà applicare le formole del Cap. XXII pel paraboloide iperbolico colle avvertenze seguenti. Precisando il senso delle radici quadrate $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$ col porre

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,,\quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,, \tag{54}$$

facciamo il cangiamento di variabili

$$u + v = \sqrt{-i}\,.\,\alpha\,,\quad u - v = \sqrt{i}\,.\,\beta, \tag{55}$$

e le (51) diventano

$$x_0 = \sqrt{ip}\,(u+v),\ y_0 = \sqrt{-iq}\,(u-v),\ z_0 = 2\,u\,v$$

coincidendo colle formole (12) § 378 (pag. 278), ove $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ si cangino in $\sqrt{ip}$, $\sqrt{-iq}$. Notiamo poi che, a causa delle (54), le variabili u, v sono assoggettate a soddisfare le equazioni

$$\bar{u} = iv,\ \bar{v} = i\,u, \tag{56}$$

e viceversa se queste sussistono, (*) le variabili α, β definite dalle (55) sono reali.

Ciò premesso, prendiamo la costante k puramente immaginaria

$$k = ik'$$

con k' *positiva* e minore delle due quantità p, q, sicchè ponendo

$$p' = p - k',\ q' = q - k', \tag{57}$$

saranno p', q', positivi.

Abbiasi una superficie S reale e d'elemento lineare (52), e cerchiamo di trasformarla mediante la $B_{ik'}$ in un'altra superficie S_1, data dalle solite formole

$$x_1 = x + l\,\frac{\partial x}{\partial u} + m\,\frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{ecc.},$$

che sia reale e della medesima classe.

(*) Basta la prima giacchè la seconda coincide con questa.

Nelle formole del § 378 avremo da cangiare rispettivamente

$$\sqrt{p},\ \sqrt{q},\ \sqrt{p'},\ \sqrt{q'},\ k$$

in

$$\sqrt{ip},\ \sqrt{-iq},\ \sqrt{ip'},\ \sqrt{-iq'},\ ik',$$

onde le (23) del citato paragrafo, prendendo $\varepsilon = +1$, diventeranno

$$(58)\quad \begin{cases} U = 2(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda^2 u^2 - 2(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda u - \dfrac{ik'}{2} \times \\ \qquad (\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda^2 + \dfrac{1}{2}(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'}) \\ V = 2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda^2 v^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda v - \dfrac{ik'}{2} \times \\ \qquad (\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda^2 + \dfrac{1}{2}(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'}) \\ W = 2\lambda\{\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + \sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda\}. \end{cases}$$

Le formole d'applicabilità (50) § 386 (pag. 302) si scrivono:

$$(59)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + \sqrt{qp'}\,(u-v) - \sqrt{pq'}\,(4uv + ik')}{2\{\sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + \sqrt{pq}\}} \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Le formole (56) dimostrano che la superficie trasformata S_1 sarà reale solo quando sia

$$\bar{l} = im, \quad \bar{m} = il,$$

ossia quando si abbia

$$(60)\quad \frac{\bar{U}}{\bar{W}} = i\frac{V}{W}.$$

La condizione poi che la S_1 abbia il medesimo elemento lineare della S si traduce in questo che le nuove variabili u_1, v_1, definite dalle (59), soddisfino alle (56), cioè sia

$$(61)\quad \bar{v}_1 = i u_1.$$

Ed ora basta applicare il medesimo procedimento più volte usato, a cominciare dal § 410. La (61) dà fra $\lambda, \bar{\lambda}$ la relazione bilineare

$$(62)\quad A\lambda\bar{\lambda} + B\lambda + \bar{B}\bar{\lambda} + C = 0,$$

ove si ponga:

$$(63)\quad \begin{cases} A = \sqrt{pq}\,(k' - 4iuv), & C = -\sqrt{pq} \\ B = \sqrt{qp'}(u+v) - \sqrt{pq'}(u-v), & \bar{B} = i\sqrt{qp'}(u+v) + i\sqrt{pq'}(u-v). \end{cases}$$

Le (56) dimostrano che i coefficienti A, C sono reali e B, $\bar{B}$ complessi coniugati, inoltre, pel determinante $B\bar{B} - AC$, a causa delle (57), si ha

$$B\bar{B} - AC = ik'\{p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - ipq\} = k'(pq - p\beta^2 - q\alpha^2),$$

e però

$$B\bar{B} - AC > 0.$$

Le equazioni differenziali fondamentali (I) pag. 288 (con $\varepsilon = +1$) diventano qui:

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -i\dfrac{\sqrt{pq}}{k'H}V - \dfrac{i}{2k'\sqrt{H}}(DU + D'V) \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = -i\dfrac{\sqrt{pq}}{k'H}U - \dfrac{i}{2k'\sqrt{H}}(D'U + D''V) \end{cases}$$

con

$$H = qp + ip(u-v)^2 - iq(u+v)^2 = pq - p\beta^2 - q\alpha^2$$

reale e positiva.

Per scrivere le equazioni coniugate delle (64) occorre osservare che, essendo la superficie S reale, sarà anche reale la sua seconda forma fondamentale, ciò che per le (56) equivale alle relazioni

$$\bar{D} = -D'', \quad \bar{D}' = -D', \quad \bar{D}'' = -D.$$

Dopo ciò cangiando nelle (64) i in $-i$, otteniamo

$$(64^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{k'H}\bar{U} + \dfrac{1}{2k'\sqrt{H}}(D'\bar{U} + D\bar{V}) \\ \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{k'H}\bar{V} + \dfrac{1}{2k'\sqrt{H}}(D''\bar{U} + D'\bar{V}) \end{cases}$$

Ed ora si verifica facilmente, nel solito modo, che le equazioni differenziali (64), (64*), inseme all'equazione in termini finiti (62), formano un sistema completamente integrabile, quando si tenga conto delle identità:

$$\frac{\overline{U}}{U} = \frac{\overline{V}}{V} = i\frac{\overline{W}}{W} = \frac{A\overline{\lambda} + B}{A\lambda + \overline{B}},$$

che seguono dalle formole precedenti.

Così possiamo enunciare il risultato finale:

Ogni superficie reale S *applicabile sul paraboloide immaginario* $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz$ (*d' elemento lineare* (52)) *appartiene come prima falda focale ad* ∞^2 *congruenze rettilinee reali* W, *le cui seconde falde focali sono superficie* S_1 *della medesima classe.*

È notevole che le attuali trasformazioni reali si conservano qui anche pel paraboloide rotondo immaginario ($p = q$) mentre spariscono pel paraboloide rotondo reale (§ 409.) Tali superficie, deformate del paraboloide rotondo immaginario, sono completamente note come abbiamo visto nella esposizione delle ricerche di WEINGARTEN e DARBOUX (Cf. § 304). Le ricerche attuali dimostrano che anche in questo caso limite esistono congruenze rettilinee W le cui due falde focali appartengono alla classe in discorso.

§ 422.

Cenno sul teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni B_k.

Gli studii sulle deformate delle quadriche generali che abbiamo esposto in questo e nei due precedenti Capitoli ci hanno condotto a costruire per ogni classe di superficie applicabili sopra una quadrica fondamentale Q, di qualunque specie, una teoria delle trasformazioni *asintotiche* B_k, che è perfettamente l'analoga, nelle sue parti fondamentali, della teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche e ne appare come la naturale estensione. (*)

(*) Nell'intervallo corso dalla seconda edizione di questo libro alla presente alcune ricerche dell' Autore ma particolarmente quelle così interessanti pubblicate dal CALAPSO negli Annali di matematica hanno pienamente confermato le parole che chiudono la prefazione al 3°. Volume (1909): « le trasformazioni B_k posseggono tutti i caratteri di trasformazioni geometriche elementari onde sembra probabile che in combinazioni più o meno complicate di queste debbano risolversi tutte le altre trasformazioni che si potranno costruire per le deformate delle quadriche ».

Al punto attuale cui abbiamo condotto questa teoria manca però ancora quel perfezionamento essenziale dei metodi di trasformazione che, per il caso delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche, venne fornito dal *teorema di permutabilità* (Cf. Vol. I Cap. XVI). Ora anche per la teoria generale delle trasformazioni B_k sussiste in effetto un tale teorema, che in riguardo al teorema generale di permutabilità per le congruenze W esposto al § 301, è da dirsi teorema *speciale* di permutabilità. Noi qui, vietando ragioni di spazio di riportare gli ampii sviluppi necessarii alla completa dimostrazione, ci contenteremo di enunciarlo e rimanderemo il lettore che desideri approfondire la questione al Cap. IV del 3° Volume citato:

TEOREMA DI PERMUTABILITÀ. *Se di una superficie* S *applicabile sopra la quadrica fondamentale* Q *si considerano due superficie trasformate contigue* S_1, S_2 *dedotte da* S *mediante due trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *a costanti* k_1, k_2 *differenti, esiste una quarta deformata* S' *della medesima quadrica* Q, *che si trova rispettivamente legata a* S_1, S_2 *da due trasformazioni* B_{k_2}, B_{k_1} *colle costanti invertite.*

A illustrazione di questo enunciato è poi da aggiungere che questa quarta superficie S', come unica e determinata, si avrà in termini *finiti*, note che siano S, S_1, S_2. Si può anche formulare una semplice costruzione geometrica per la quarta superficie S' colle considerazioni seguenti. Per ogni deformata S della quadrica Q, in relazione con una data trasformazione B_k abbiamo, in ogni piano tangente π di S, una determinata conica C_k che diciamo la conica *appartenente* alla trasformazione B_k. Questa è la posizione occupata dalla conica sezione del piano tangente di Q colla quadrica omofocale direttrice Q_k, quando Q si applica su S ed è altresì il luogo di tutti i punti delle ∞^1 superficie S_1 trasformate della S per la B_k e corrispondenti al punto di contatto di π.

Ciò posto prendiamo le tre superficie S, S_1, S_2 dell'enunciato del teorema e siano F,F_1,F_2 tra loro punti corrispondenti, π, π_1,π_2 i relativi piani tangenti. Diciamo $C^{(1)}_{k_1}$ la conica di π_1 appartenente a B_{k_1} e $C^{(2)}_{k_2}$, la conica di π_2 appartenente a B_{k_2} le quali due coniche (giacenti nei piani π_1, π_2) hanno a comune *il solo* punto F. Consideriamo ora la conica $C^{(1)}_{k_2}$ di π_1 appartenente a B_{k_2} e l'altra $C^{(2)}_{k_1}$ di π_2 appartenente a B_{k_1}. Anche queste due coniche hanno a comune uno ed un solo punto F' che appartiene naturalmente alla retta (π_1, π_2); ora: *questo quarto punto* F' *descrive la quarta superficie* S' *del teorema di permutabilità.*

Sussistendo adunque per le trasformazioni generali B_k delle deformate delle quadriche il teorema (speciale) di permutabilità, come nel caso particolare delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche, s'intende come ne sussisteranno anche tutte le conseguenze ampiamente sviluppate nel Capitolo finale (XVI) del Vol. I. Per tal modo la teoria delle trasformazioni B_k per le deformate delle quadriche raggiunge lo stesso grado di sviluppo come quella delle trasformazioni di BÄCKLUND.

Non lascieremo di osservare che il teorema di permutabilità consente anche di utilizzare trasformazioni *immaginarie* $\frac{1}{2}B_k$ che possono opportunamente comporsi in trasformazioni *reali* nello stesso modo come abbiamo utilizzato nel Cap. XVI le trasfomazioni immaginarie di BÄCKLUND per la composizione in reali.

Aggiungeremo in fine che fra le trasformazioni singolari può considerarsi anche quella relativa alla conica focale immaginaria e persino al circolo immaginario all' infinito, trasformazione quest'ultima che, colla notazione di B_∞, venne introdotta dal CALAPSO nelle ricerche citate.

§ 423.

Coppie di superficie coniugate in deformazione.

Chiuderemo queste ricerche sulle deformate delle quadriche coll' esame di una nuova trasformazione di natura affatto differente da quella delle B_k. Questa trasformazione, che indicheremo con H, sarà assimilabile per molti rapporti alla trasformazione di *Hazzidakis* (I § 247) per le deformate della sfera e servirà di passaggio dalle deformate di una quadrica Q a quelle di un'altra quadrica $\overline{Q}$ in generale distinta da Q. La trasformazione H, combinata colle B_k, permette in certo modo di duplicarne i risultati.

Per giungere alla trasformazione H occupiamoci di un problema che appartiene alla teoria generale della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili (I Cap. VII). Supponiamo di avere una coppia $(S, \overline{S})$ di superficie non sviluppabili poste in corrispondenza di punto a punto che soddisfi alle condizioni seguenti:

1.° *si corrispondano sopra* S, $\overline{S}$ le *linee asintotiche* (*i sistemi coniugati*).

2.° *ad ogni sistema di asintotiche virtuali di* S *corrisponda un sistema di asintotiche virtuali sopra* $\overline{S}$, *e viceversa.*

In tale ipotesi è chiaro che alle deformazioni dell'una corrisponderanno biunivocamente le deformazioni dell'altra e i due problemi di deformare

la S, ovvero la $\overline{S}$, saranno *intrinsecamente* equivalenti, si dirà per ciò che le due superficie S, $\overline{S}$ sono *coniugate in deformazione* (*). È chiaro poi che se le S, $\overline{S}$ vengono contemporaneamente deformate *per deformazioni corrispondenti*, le due nuove superficie ottenute S', $\overline{S}'$ saranno nuovamente coniugate in deformazione.

Se le due superficie S, $\overline{S}$ sono reali, come generalmente supporremo, e la corrispondenza fra i loro punti ha luogo fra le regioni reali, le asintotiche attuali o virtuali saranno insieme reali, ovvero immaginarie, e le due superficie S, $\overline{S}$ avranno in punti corrispondenti curvature di egual segno. Ma se questo segno è il positivo allora le asintotiche sono immaginarie e per dare sempre forma reale alla questione si parlerà di conservazione dei sistemi coniugati attuali e virtuali. In particolare ad ogni sistema coniugato permanente di S corrisponderà un sistema coniugato permanente per $\overline{S}$.

Il problema di determinare le coppie $(S, \overline{S})$ di superficie coniugate in deformazione possiede delle soluzioni evidenti che si ottengono associando a *qualunque* superficie S una sua omotetica $\overline{S}$; ma una tale soluzione è così ovvia e priva d'interesse che intenderemo senz'altro di escluderla.

Ciò premesso, vediamo di tradurre in analisi il problema. Le due superficie S, $\overline{S}$, coniugate in deformazione abbiano i rispettivi elementi lineari

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{65}$$

$$\overline{ds}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2, \tag{65*}$$

riferiti a linee coordinate u, v corrispondenti. Ogni configurazione della S, flessibile ed inestendibile, è *intrinsecamente* determinata dalla sua seconda forma fondamentale

$$D du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2,$$

dove D, D', D'' dovranno unicamente soddisfare alle equazioni di Gauss e di CODAZZI. La nostra ipotesi: che S, $\overline{S}$ siano coniugate in deformazione equivale a ciò che per ogni tale seconda forma fondamentale della S ne esista una corrispondente *proporzionale* per la $\overline{S}$.

Pei calcoli seguenti sarà però più opportuno sostituire a D, D', D'' le quantità proporzionali (Cf. I § 67):

(*) Cf. la due note dell'autore nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (aprile 1902, aprile 1904) e quelle di SERVANT nei Comptes Rendus 2me Sèm. 1902.

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e analogamente a $\overline{D}$, $\overline{D}'$, $\overline{D}''$ le altre

$$\overline{\Delta} = \frac{\overline{D}}{\sqrt{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}}, \quad \overline{\Delta}' = \frac{\overline{D}'}{\sqrt{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}}, \quad \overline{\Delta}'' = \frac{\overline{D}''}{\sqrt{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}};$$

L'equazione di GAUSS per la S si scrive allora

$$\Delta\,\Delta'' - \Delta'^2 = K, \tag{66}$$

avendo K il solito significato, e quelle di CODAZZI assumono la seconda forma (I pag. 176):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} - \dfrac{\partial \Delta'}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta'' = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta''}{\partial u} - \dfrac{\partial \Delta'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta'' = 0, \end{cases} \tag{67}$$

i simboli di CHRISTOFFEL essendo costruiti per la prima forma fondamentale (65) della S.

Ora, per ipotesi, a una terna *qualunque* $\Delta, \Delta', \Delta''$ suddisfacente alle (66), (67) ne corrisponde una $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}'$, $\overline{\Delta}''$ di valori proporzionali soddisfacente alle analoghe per l'elemento lineare (65*), scriviamo

$$\overline{\Delta} = \lambda\,\Delta, \quad \overline{\Delta}' = \lambda\,\Delta', \quad \overline{\Delta}'' = \lambda\,\Delta'',$$

dove λ è un fattore di proporzionalità. Ma questo, come segue dalla (66) e dall' analoga

$$\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}'' - \overline{\Delta}'^2 = \overline{K},$$

serba sempre lo stesso valore per qualunque deformazione simultanea di S, $\overline{S}$; poichè ne segue

$$\lambda^2 = \frac{\overline{K}}{K}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\overline{K}}{K}}. \tag{68}$$

Ciò posto, prendiamo le equazioni stesse (67) di CODAZZI relative alla $\overline{S}$ e sottragghiamone ordinatamente le (67) medesime, moltiplicate per λ;

così si eliminano le derivate di $\Delta, \Delta', \Delta''$ e restano le due equazioni di condizione

$$\begin{cases} \Delta \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial v} - \Delta' \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial u} + \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \Delta - 2 \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \Delta' + \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \Delta'' = 0 \\ \Delta'' \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial u} - \Delta' \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial v} + \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \Delta - 2 \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \Delta' + \left[\left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \Delta'' = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Siccome λ non cangia di valore comunque si deformi la S, queste sono relazioni lineari omogenee in $\Delta, \Delta', \Delta''$ che debbono risolversi in identità (Cf. § 318). Troviamo così le *sei* seguenti relazioni che debbono aver luogo fra i due ds^2 affinchè appartengano a coppie di superficie coniugate in deformazione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial u} = 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} \\ \dfrac{\partial log\,\lambda}{\partial v} = 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} \qquad \left(\lambda = \sqrt{\dfrac{\overline{K}}{K}} \right). \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 1 \end{matrix} \right\}. \end{cases} \tag{A}$$

Il caso ovvio escluso dell' omotetia fra S, $\overline{S}$ corrisponde a supporre $\lambda = cost^{te}$.

§ 424.

Corrispondenza geodetica fra S, $\overline{S}$.

Se delle sei equazioni di condizione (A) prendiamo le quattro

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 1 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 1 \end{matrix} \right\} \end{cases} \tag{A'}$$

riconosciamo in queste precisamente le relazioni che caratterizzano la corrispondenza *geodetica* fra S, $\overline{S}$ (Vol. I § 117 s. s.), onde per due superficie $\overline{S}$, S coniugate in deformazione la corrispondenza fra i loro punti è necessariamente geodetica (fa corrispondere alle geodetiche di S quelle di $\overline{S}$). Ora

invertiamo facilmente questo risultato provando che, se due superficie S, $\overline{S}$ si corrispondono punto a punto in guisa che siano conservati insieme i sistemi coniugati attuali e le linee geodetiche, le due superficie S, $\overline{S}$ sono coniugate in deformazione. Indichino infatti $(\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0)$; $(\overline{\Delta}_0, \overline{\Delta'}_0, \overline{\Delta}_0'')$ i valori attuali di $(\Delta, \Delta', \Delta'')$, $(\overline{\Delta}, \overline{\Delta'}, \overline{\Delta''})$ per quella configurazione $(S_0, \overline{S}_0)$ della coppia $(S, \overline{S})$ nella quale supponiano verificarsi insieme la corripondenza dei sistemi coniugati e quella delle linee geodetiche. Il calcolo del paragrafo precedente prova che $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta''_0$ soddisfano le (69), e siccome per ipotesi avvi corrispondenza geodetica fra $S_0, \overline{S}_0$ sono quindi verificate le (A'), sicchè essendo $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 2 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 1 \end{matrix} \right\}$, le (69) dànno

$$\Delta_0 \left[\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] - \Delta'_0 \left[\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = 0$$

$$\Delta''_0 \left[\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] = \Delta'_0 \left[\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{12} \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] = 0.$$

A causa delle due rimanenti (A'), queste possono scriversi

$$\begin{cases} \Delta_0 \left[\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] - \Delta'_0 \left[\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] = 0 \\ - \Delta' \left[\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] + \Delta''_0 \left[\dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] = 0. \end{cases}$$

Si riguardino queste come due equazioni lineari omogenee nei binomii

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} \overline{22} \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} \overline{11} \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\},$$

il cui determinante

$$\Delta \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = K$$

è per ipotesi diverso da zero, e ne seguirà l'annullarsi dei due binomii, onde le equazioni (A') restano completate alle equazioni (A) e la proposizione è dimostrata. Possiamo riassumere i risultati ottenuti nella proposizione seguente :

Due superficie S, $\overline{S}$ *sono coniugate in deformazione allora ed allora soltanto che si corrispondono insieme per sistemi coniugati e per linee geodetiche.*

Il problema proposto è così ricondotto a quello, già risoluto dal Dini

(I § 117), di trovare le coppie di superficie in rappresentazione geodetica l'una sull'altra, coll'aggiunta della condizione che *si corrispondano anche i sistemi coniugati.* In questo modo, nella prima delle mie note sopra citate, è risoluta la questione pel caso dei ds^2 appartenenti a superficie di rotazione, e pel caso dei ds^2 *non di rotazione* dimostra il SERVANT (*l. c.*) che appartengono necessariamente a quadriche. Nella seconda delle mie note citate si perviene allo stesso risultato del SERVANT colle semplici considerazioni geometriche già esposte al Vol. I, §§ 118, 119, che si tratta ora di riprendere per giungere alla nuova *trasformazione* H delle deformate delle quadriche.

Si è visto che, data una quadrica Q, se ne trova una seconda $\overline{Q}$ in rappresentazione geodetica sopra Q, *che conserva ad un tempo i sistemi coniugati* semplicemente assoggettando Q ad una trasformazione *proiettiva* che cangi la schiera confocale (Q) determinata da Q in un'altra schiera confocale. Una tale coppia Q, $\overline{Q}$ di quadriche che si corrispondono in una *projettività geodetica* acquista ora il nuovo significato di quadriche coniugate in deformazione.

§ 425.

Quadriche coniugate in deformazione.

Riprendiamo, sotto il nuovo aspetto, i risultati del § 119, dapprima supponendo *reale* l'omografia che cangia la quadrica Q nella coniugata in deformazione $\overline{Q}$.

a) All'ellissoide generale)

$$(70) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a^2 > b^2 > c^2)$$

è coniugato in deformazione l'iperboloide a due falde

$$(70^*) \qquad \frac{\bar{x}^2}{\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{(a^2-b^2)c^2}{a^2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{(a^2-c^2)b^2}{a^2}} = 1$$

e l'omografia Ω che rappresenta geodeticamente la prima quadrica sulla seconda è data dalle formole

$$(71) \qquad \bar{x} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{x}, \quad \bar{y} = \sqrt{a^2-b^2}\,\frac{z}{x}, \quad \bar{z} = \sqrt{a^2-c^2}\,\frac{y}{x}.$$

Notevole è il caso particolare dell' ellissoide allungato di rivoluzione

$$a^2 > b^2 = c^2$$

al quale risulta coniugato in deformazione un iperboloide rotondo a due falde. Queste coppie particolari di quadriche coniugate in deformazione si sono già incontrate al Cap. XVI (Vol. I) nello studio della composizione delle trasformazioni di BÄCKLUND per le deformate della sfera, e stanno in relazione, mediante i teoremi di GUICHARD, colla trasformazione di HAZZIDAKIS delle superficie a curvatura media costante (Cf. I § 279) : *Se le due quadriche rotonde* Q, $\overline{\text{Q}}$ *coniugate in deformazione si fanno rotolare simultaneamente sopra due loro deformate associate* S, $\overline{\text{S}}$ *i loro fuochi descrivono superficie a curvatura media costante trasformate di* HAZZIDAKIS l'una dell'altra.

Ritornando al caso generale è da osservare che l'omografia (71) cangia la regione *reale* dell' ellissoide (70) in quella *reale* dell' iperboloide (70*), ma cangia nel tempo stesso una regione ideale dell'una in una ideale dell' altra e quando a queste regioni ideali appartengono dei ds^2 reali, definiti avremo ancora coppie *reali* di superficie corrispondenti coniugate in deformazione. Questo è appunto il caso per le rispettive deformate improprie di queste quadriche che abbiamo veduto introdursi spontaneamente ai rispettivi §§ 414, 412. Le prime si ottengono dall' ellissoide prendendo x, y, *reali* z puramente immaginaria, le seconde dall' iperboloide a due falde ove si prenda $\bar{y}$ puramente immaginaria $\bar{x}$, $\bar{z}$ reali ; l'omografia (71) cangia appunto l'una regione nell'altra.

b) All'iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{\text{A}^2} + \frac{y^2}{\text{B}^2} - \frac{z^2}{\text{C}^2} = 1 \qquad (\text{A}^2 > \text{B}^2 \tag{72}$$

è coniugato in deformazione l'altro iperboloide ad unà falda

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{(\text{A}^2 - \text{B}^2)(\text{A}^2 + \text{C}^2)}{\text{A}^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{(\text{A}^2 - \text{B}^2)\,\text{C}^2}{\text{A}^2}} - \frac{\bar{z}^2}{\frac{(\text{A}^2 + \text{C}^2)\,\text{B}^2}{\text{A}^2}} = 1, \tag{72*}$$

e l'omografia Ω che rappresenta geodeticamente l'uno sull'altro è data dalle formole

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{(\text{A}^2 - \text{B}^2)(\text{A}^2 + \text{C}^2)}}{x}, \quad \bar{y} = \sqrt{\text{A}^2 - \text{B}^2}\,\frac{z}{x}, \quad \bar{z} = \sqrt{\text{A}^2 + \text{C}^2}\,\frac{y}{x}. \tag{73}$$

Esaminiamo ora come si comportano, rispetto a questa omografia Ω, le due regioni immaginarie di questa quadrica alle quali nel § 416 abbiamo riconosciuto appartenere un ds^2 reale (definito positivo) Nelle corrispondenti formole

$$x = \text{A}\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad y = \text{B}\,\frac{u-v}{u+v}, \quad z = \text{C}\,\frac{1-uv}{u+v}$$

si ottiene la prima regione prendendo u, v complesse coniugate, la seconda assumendo v coniugata di $\frac{1}{u}$. Ma nel primo caso colle formole precedenti risultano:

x, z reali, y puramente immaginaria, nel secondo invece

x, y reali z puramente immaginaria e l' omografia (73) scambia appunto le due regioni fra loro. I due corrispondenti ds^2 sono quindi coniugati in deformazione e basta limitarsi a considerare uno di essi, come abbiamo fatto al § 416.

c) Nei casi precedenti le due quadriche coniugate in deformazione erano reali e reale l'omografia Ω che le rappresentava geodeticamente l'una sull'altra. Ma avvertiamo che nulla impedisce di considerare per la teoria generale delle deformate delle quadriche (anche solo dal punto di vista di deformate reali) omografie immaginarie.

Così p. e. il paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\,z$$

viene cangiato dalla omografia immaginaria

$$\bar{x} = \frac{y}{x}, \quad \bar{y} = \frac{z - \frac{q}{2}}{x}, \quad \bar{z} = i\,\frac{z - p + \frac{q}{2}}{x},$$

(che trasporta la parabola focale

$$x = 0, \; y^2 = (q-p)(2z-p)$$

nel circolo assoluto) nella quadrica immaginaria a centro

$$q(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) - 2\,p\,\bar{y}(\bar{y} + i\,\bar{z}) + (p-q)^2\left(\frac{\bar{x}^2}{q} + \frac{1}{p}\right) = 0.$$

A questa quadrica, tangente in un solo punto al circolo assoluto (quadrica di DARBOUX), appartiene un ds^2 reale, coniugato in deformazione di quello del paraboloide.

Ancora prendiamo l'ellissoide reale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e applichiamovi l'omografia (immaginaria)

$$\bar{x} = \sqrt{b^2 - c^2}\,\frac{x}{z}\,,\quad \bar{y} = \sqrt{a^2 - c^2}\,\frac{y}{z}\,,\quad \bar{z} = i\,\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}{z}$$

che cangia l'ellisse focale

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,\ z = 0$$

nel circolo assoluto L'ellissoide reale viene cangiato nell'ellissoide imaginario.

$$\frac{c^2}{a^2(b^2 - c^2)}\,\bar{x}^2 + \frac{c^2}{b^2(a^2 - c^2)}\,\bar{y}^2 + \frac{c^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}\,\bar{z}^2 + 1 = 0$$

e alla regione reale del primo corrisponde una regione della seconda quadrica il cui ds^2 è reale, definito positivo, e risulta coniugato in deformazione al ds^2 dell'ellissoide reale.

§ 426.

La trasformazione H e le sue prime proprietà.

Consideriamo una coppia qualunque Q, $\overline{\text{Q}}$ di quadriche coniugate in deformazione. Ogni deformata S di Q determina *intrinsecamente* una deformata associata $\overline{\text{S}}$ di $\overline{\text{Q}}$ che corrisponde alla S per sistemi coniugati e per linee geodetiche; la $\overline{\text{S}}$ è la coniugata in deformazione della S. Diremo *trasformazione* H il passaggio dalla S alla $\overline{\text{S}}$. La H è una trasformazione di carattere involutorio (a periodo 2), che fa passare dalle deformate della prima quadrica Q a quelle della seconda quadrica $\overline{\text{Q}}$. Essa non si traduce, come la B_k in una costruzione geometrica nello spazio colla quale si passi dalla

prima superficie S' alla seconda $\overline{\text{S}}$; però essa ha colle trasformazioni B_k molte proprietà a comune, ciò che risulta facilmente dalla definizione stessa della H.

In primo luogo osserviamo che se la S è rigata, sarà ancora rigata la sua coniugata in deformazione $\overline{\text{S}}$, poichè le rette di S, essendo ad un tempo linee geodetiche ed asintotiche, avranno per corrispondenti sulla $\overline{\text{S}}$ delle linee che saranno pure geodetiche ed asintotiche, cioè linee rette. Dunque: *La trasformazione* H *cangia ogni deformata rigata* R *di* Q *in una deformata rigata* $\overline{\text{R}}$ *di* $\overline{\text{Q}}$.

La definizione stessa della H fa pure riconoscere immediatamente quest'altra proprietà a comune colle B_k:

La trasformazione H *conserva i sistemi coniugati ed in particolare cangia il sistema coniugato permanente di* S *nel sistema coniugato permanente di* $\overline{\text{S}}$.

Supponiamo ora che la S si deformi attorno ad un'asintotica a mantenuta rigida. Nella corrispondente deformazione di $\overline{\text{S}}$ la linea $\bar{a}$ che corrisponde ad a si manterrà sempre asintotica e quindi rigida, perchè non cangia nè la sua flessione (curvatura geodetica) nè la sua torsione (a causa del teorema di BELTRAMI-ENNEPER). Segue di qui:

Se la superficie S *si deforma attorno ad una linea asintotica rigida, anche la sua coniugata in deformazione* S *si deforma attorno alla corrispondente asintotica rigida*

In particolare se deformiamo la S intorno all'asintotica rigida a sino a rettificarne le geodetiche trasformate delle rette (di un sistema) di Q e a trasformare quindi nella rigata R circoscritta alla S lungo a, secondo il teorema di CHIEFFI, la stessa cosa accadrà per la $\overline{\text{S}}$, onde il teorema:

Se per i punti di due asintotiche corrispondenti delle due superficie coniugate in deformazione S, $\overline{\text{S}}$ *si conducono le tangenti alle geodetiche trasformate di rette corrispondenti delle quadriche* Q, $\overline{\text{Q}}$, *le due superficie rigate* R, $\overline{\text{R}}$ *che si formano sono ancora applicabili rispettivamente sopra* Q, $\overline{\text{Q}}$ *e coniugate fra loro in deformazione.*

Per due superficie S, $\overline{\text{S}}$ coniugate in deformazione si ha una corrispondenza biunivoca fra le loro deformazioni finite, quindi anche fra le *infinitesime*. Ma in quest'ultimo caso possiamo meglio precisare la proprietà ricorrendo alla nota relazione fra le deformazioni infinitesime delle superficie e le congruenze rettilinee W (§§ 298, 299). In generale ad ogni congruenza rettilinea C i cui raggi siano tangenti alla superficie S (di cui S sia una falda focale) corrisponderà una congruenza rettilinea

$\overline{C}$ di cui $\overline{S}$ è una falda focale, formata tirando pei punti di $\overline{S}$ i raggi tangenti nelle direzioni corrispondenti a quelle dei raggi di C. Ora dimostreremo il teorema:

Se la congruenza rettilinea C *colla prima falda focale* S *è una congruenza* W, *anche la corrispondente* $\overline{C}$, *avente per una falda focale la superficie* $\overline{S}$ *coniugata in deformazione di* S, *sarà una congruenza* W:

§ 427.

Congruenze W corrispondenti.

Premettiamo per ciò la ricerca della condizione a cui deve soddisfare un sistema coniugato (u, v) di una qualunque superficie S affinchè la congruenza delle tangenti alle $v = \text{cost}^{te}$. (le cui sviluppabili sono le $u = \text{cost}^{te}$, $v = \text{cost}^{te}$) sia una congruenza W.

Le coordinate $x_1, y_1 z_1$ del secondo fuoco F_1 sul raggio (u, v) della congruenza possono scriversi

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u}, \quad y_1 = y + l\frac{\partial y}{\partial u}, \quad z_1 = z + l\frac{\partial z}{\partial u}$$

ed applicando le formole generali del § 377, ove sarà da farsi

$$m = 0, \quad D' = 0;$$

avremo dalle (9) ibid (pag. 277)

$$(74) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = L\dfrac{\partial x}{\partial u} + M\dfrac{\partial x}{\partial v} + D\,l\,X \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

e per l'ipotesi che il raggio FF_1 sia tangente in F_1 alla superficie luogo di questo punto, sarà

$$Q = 0 \ (*)$$

Le formole (8) § 377 (pag. 276) diventano

$$(75) \qquad \begin{cases} L = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} l + 1, \qquad M = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} l \\ P = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} l, \qquad Q = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} l + 1, \end{cases}$$

dalle quali intanto si rileva la formola

$$(76) \qquad \frac{1}{l} = -\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}. \ (**)$$

Ciò premesso cerchiamo la condizione affinchè la congruenza C sia una congruenza W. Occorre e basta per questo che esista una deformazione infinitesima della seconda falda S_1 nella quale ogni punto $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ si sposti nella direzione (X, Y, Z) della normale alla prima falda, che si possa cioè determinare una tale funzione R di u, v che le quantità

$$\bar{x} = RX, \ \bar{y} = RY, \ \bar{z} = RZ$$

rappresentino, a meno di un fattore infinitesimo costante, le componenti del detto spostamento. Esse debbono per ciò soddisfare alle equazioni ca-

---

(*) Deve infatti annullarsi il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ L & M & Dl \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -Dl^2 Q\sqrt{EG - F^2},$$

e per ciò $Q = 0$.

(**) Nel caso $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$ risulterebbero $l = \infty$, cioè le sviluppabili circoscritte alla S lungo le $u = \text{cost}^{te}$ sarebbero cilindri e queste linee *linee d'ombra* della superficie.

ratteristiche (2) del § 282 (pag. 5)

$$(77)\qquad \begin{cases} S\dfrac{\partial(R\,X)}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}=0, \quad S\dfrac{\partial(R\,X)}{\partial v}\dfrac{\partial x_1}{\partial v}=0 \\ S\dfrac{\partial(R\,X)}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial v}+S\dfrac{\partial(R\,X)}{\partial v}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}=0. \end{cases}$$

A causa delle (74) (ove è da porsi $Q=0$) e delle relazioni

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}=-D, \quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}=-D''$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}=0,$$

la seconda delle (77) è un'identità e le altre due dànno

$$\frac{\partial\, log\, R}{\partial u}=\frac{L}{l}, \quad \frac{\partial\, log\, R}{\partial v}=\frac{P}{l}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{D''}{D},$$

ovvero per le (75)

$$(78)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}lg\left(\dfrac{R}{l}\right)=\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}lg\left(\dfrac{R}{l}\right)=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{D''}{D} \end{cases}$$

Dal calcolo eseguito risulta intanto la proposizione generale seguente:

Se (u,v) è un sistema coniugato di una qualunque superficie S, *la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza formata dalle tangenti alle linee $v=cost^{te}$ nel sistema sia una congruenza* W *è che si verifichi la relazione.*

$$(79)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}+\frac{\partial}{\partial u}\left[\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{D''}{D}\right].$$

Applichiamo questo risultato al caso in cui la superficie S ammetta una coniugata in deformazione $\overline{S}$ per stabilire il teorema enunciato alla fine del paragrafo precedente. Ammettiamo dunque che la congruenza C formata dalle tangenti alle linee $v=cost^{te}$ di S sia una congruenza W, e sia quindi soddisfatta la (79) e proviamo che lo stesso accade per la corrispondente congruenza $\overline{C}$ della coniugata in deformazione S. Basterà verificare per questo che indicando con $\overline{l}$ la quantità omologa alla l, costruita per la congruenza $\overline{C}$, si può determinare una funzione incognita $\overline{R}$ che soddisfi alle analoghe delle (78)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}lg\left(\dfrac{\overline{R}}{\overline{l}}\right)=\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}lg\left(\dfrac{\overline{R}}{\overline{l}}\right)=\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\overline{D}}{\overline{D}}. \end{cases}$$

Ora sottraendo da queste le (78) coll'osservare le (A) (pag. 399) e ricordando che

$$\frac{\overline{D''}}{\overline{D}}=\frac{D''}{D},$$

si ottiene semplicemente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}lg\left(\dfrac{\overline{R}}{\overline{l}}\cdot\dfrac{l}{R}\right)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\, log\,\lambda}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}lg\left(\dfrac{\overline{R}}{\overline{l}}\cdot\dfrac{l}{R}\right)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\, log\,\lambda}{\partial v}. \end{cases}$$

basta dunque prendere

$$(80)\qquad \overline{R}=\frac{R\,\overline{l}}{l\,\sqrt{\lambda}}.$$

e le nostre condizioni sono soddisfatte onde risulta dimostrato il teorema.

§ 428.

La trasformazione H in relazione colle B_k.

Siano sempre Q, $\overline{Q}$ due quadriche coniugate in deformazione ed (S, $\overline{S}$) una coppia qualunque di loro deformate corrispondenti, talchè S, $\overline{S}$ sono coniugate in deformazione e trasformate l'una dell'altra per mezzo della H.

L'omografia fondamentale Ω che cangia Q in $\overline{Q}$ trasforma ad un tempo la schiera (Q) delle quadriche confocali a Q nell'altra $(\overline{Q})$ delle confocali a $\overline{Q}$ e fa quindi corrispondere ad ogni speciale quadrica Q_k della prima schiera una determinata quadrica della seconda che indicheremo con $Q_{\overline{k}}$. Se la prima Q_k si assume come quadrica distributrice per l'ordinamento

delle ∞^3 faccette F_1, secondo i principii generali del § 376, ne resta individuata una classe di trasformazioni B_k per le deformate S della Q. Ma allora, applicando a questo ordinamento di faccette l'omografia stessa Ω, ne risulta anche per la seconda quadrica $\overline{Q}$ un secondo ordinamento di faccette, nel quale la quadrica distributrice è la $\overline{Q}_{\overline{k}}$; e già da questo risulta che alle singole trasformazioni B_k di ogni deformata S di Q verranno a corrispondere (mediante la trasformazione H) le singole trasformazioni $B_{\overline{k}}$ per la coniugata in deformazione $\overline{S}$ di S.

Con maggiore precisione vengono riassunte le proprietà in discorso nella proposizione seguente che qui ci limitiamo ad enunciare (*).

Se S_1 *è trasformata della* S *mediante una* B_k, *talchè* S, S_1 *siano le due falde focali della corrispondente congruenza* W *formata dalle congiungenti i punti corrispondenti* F_1, F, *si consideri per la coniugata in deformazione* $\overline{S}$ *la congruenza rettilinea corrispondente che sarà una nuova congruenza della medesima specie, nella quale la seconda falda* $\overline{S}_1$ *proviene dalla* $\overline{S}$ *mediante una corrispondente* $B_{\overline{k}}$; *di più la* $\overline{S}_1$ *è coniugata in deformazione della* S_1 *come la* S *della della* $\overline{S}$.

Più brevemente possiamo enunciare questo teorema dicendo:

La trasformazione H *cangia contemporaneamente le due falde focali* (S, $\overline{S}$) *di una delle congruenze* W *coordinate alle trasformazioni* B_k *nelle due falde focali* ($\overline{S}$, $\overline{S}_1$) *di un'altra tale nuova congruenza.*

Si vede così che per passare da S ad $\overline{S}_1$ si può eseguire prima la B_k che da S porta ad S_1, poi la H da S_1 ad $\overline{S}_1$, ovvero anche colla H passare prima da S ad $\overline{S}$ poi colla $B_{\overline{k}}$ da S ad $\overline{S}_1$. Si può dunque dire che il risultato precedente esprime la *permutabilità* della trasformazione H colle B_k, come il teorema di permutabilità al § 422 riguardava la permutabilità delle B_k fra di loro.

Osserviamo poi che quando è nota la coppia (S, $\overline{S}$) di superficie coniugate in deformazione, e sia nota insieme una trasformata S_1 della S per una B_k, si ha subito *in termini finiti* la corrispondente trasformata $\overline{S}_1$ di $\overline{S}$ per la $B_{\overline{k}}$, che è al tempo stesso la coniugata in deformazione della S_1. Per ciò, nell'applicare le trasformazioni B_k alle deformate di una quadrica Q è sempre conveniente associarvi le deformate dell'altra quadrica $\overline{Q}$ coniugata in deformazione, poichè i due problemi di trasformazione si risolvono l'uno insieme all'altro. Così p. e. si passa dalle superficie applicabili sulla regione reale o ideale dell'ellissoide, colla trasformazione H, a quelle applicabili sulla corrispondente regione reale o ideale dell'iperboloide a due falde (§ 425); e lo stesso dicasi per le deformate proprie od improprie dell'iperboloide ad una falda e del coniugato in deformazione.

(*) Per le effettive dimostrazioni rimandiamo il lettore al Vol. III Cap. V della 2ª edizione (§ 75).

Terminiamo coll'osservare che l'omografia Ω che cangia la quadrica Q nella coniugata in deformazione $\overline{Q}$ scambia fra loro le relative coniche focali, e perciò le trasformazioni *singolari* per le deformate di Q vengono cangiate dalla H nelle trasformazioni singolari per le deformate di $\overline{Q}$.

(Fine della I.ª parte - Volume II.º).

INDICE DEL VOLUME II. — PARTE I.ª

CAPITOLO XVII.

Deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.

§ 281. — Deformazioni infinitesime e corrispondenza per ortogonalità d'elementi . . . . . *pag.* 1
§ 282. — Equazione caratteristica di Weingarten . . . . . » 4
§ 283. — Trasformazione dell'equazione caratteristica - Superficie associate . . . . . » 8
§ 284. — Le forme normali dell'equazione caratteristica . . . . » 11
§ 285. — Sistema coniugato permanente nella deformazione infinitesima . . . . . » 13
§ 286. — Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi » 16
§ 287. — Le congruenze rettilinee di Ribaucour . . . . . » 18
§ 288. — Esempi di congruenze di Ribaucour . . . . . » 22
§ 289. — Secondo metodo per la ricerca delle deformazioni infinitesime » 24
§ 290. — Applicazioni varie del secondo metodo . . . . . » 26
§ 291. — Trasformazione di Christoffel delle superficie isoterme . » 28
§ 292. — Criterio di Weingarten per le superficie isoterme . . » 32
§ 293. — Le superficie associate alle deformate della sfera . . » 34
§ 294. — Sistemi coniugati permanenti in deformazioni finite . . » 36
§ 295. — I teoremi di Peterson . . . . . » 39

CAPITOLO XVIII.

Le congruenze rettilinee W

§ 296. — La trasformazione di Moutard delle equazioni: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta$ *pag.* 42
§ 297. — Il teorema generale di permutabilità per le equazioni di Moutard . . . . . » 45
§ 298. — Interpretazione geometrica del teorema di Moutard . . » 48
§ 299. — Le più generali congruenze W . . . . . » 52
§ 300. — Conseguenze del teorema e caso eccezionale . . . . » 55
§ 301. — Il teorema generale di permutabilità per le congruenze W » 58
§ 302. — Superficie con deformazioni infinitesime in sè stesse . . » 61
§ 303. — Congruenze W di Darboux . . . . . » 63
§ 304. — Le deformate del paraboloide rotondo immaginario . . » 65
§ 305. — Le deformate del paraboloide rotondo reale . . . . » 68
§ 306. — Le congruenze W a falde focali d'egual curvatura . . » 72
§ 307. — Digressione sopra alcune formole relative al ds'^2 sferico . » 76
§ 308. — Costruzione delle particolari congruenze W da una falda della superficie focale . . . . . » 79
§ 309. — Il teorema speciale di permutabilità per le superficie della classe (C) . . . . . *pag.* 81

§ 310. — Superficie con sistema coniugato permanente in deformazione continua . . . . . *pag.* 83
§ 311. — Proprietà caratteristiche delle congruenze W a falde focali d'egual curvatura . . . . . » 85

CAPITOLO XIX.

Deformazione delle congruenze di sfere e rotolamento di superficie applicabili.

§ 312. — Generalità sulle congruenze di sfere . . . . . *pag.* 90
§ 313. — Deformazione di queste congruenze — Nuovo aspetto dei teoremi di Beltrami e Dupin-Malus . . . . . » 95
§ 314. — Formole per le derivate dei coseni α, β, γ. . . . . » 96
§ 315. — Calcolo degli elementi dell'inviluppo Σ. . . . . » 100
§ 316. — Congruenze di sfere di Ribaucour (sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura) . . . . . » 104
§ 317. — Trasformazioni di Combescure delle congruenze di Ribaucour » 106
§ 318. — Congruenze di Ribaucour illimitatamente deformabili. . » 108
§ 319. — Rotolamento di superficie applicabili . . . . . » 111
§ 320. — Direzioni cinematicamente coniugate . . . . . » 113
§ 321. — Caso particolare di un'involuzione (IX) degenere - Rigate rotolanti . . . . . » 115
§ 322. — Proprietà delle direzioni cinematicamente coniugate . . » 118
§ 323. — Linee di curvatura delle superficie e degli inviluppi di rotolamento . . . . . » 123
§ 324. — Generazione di una superficie qualunque come superficie di rotolamento . . . . . » 125
§ 325. — L'equazione di secondo ordine pel primo problema di rotolamento . . . . . » 127
§ 326. — Generazione di una superficie Σ come inviluppo di rotolamento » 129
§ 327. — Il piano e la sfera come superficie di rotolamento . . » 131
§ 328. — Le Formole del *Calò* per le corrispondenti superficie (S_0, S) di superficie applicabili . . . . . » 133
§ 329. — Le congruenze rettilinee di rotolamento . . . . . » 136
§ 330. — Congruenze paraboliche di rotolamento. . . . . » 140
§ 331. — Altre congruenze speciali di rotolamento . . . . . » 142
§ 332. — La superficie di Peterson . . . . . » 144

CAPITOLO XX.

I teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche rotonde e le trasformazioni di Ribaucour.

§ 333. — Enunciato di un nuovo problema . . . . . *pag.* 148
§ 334. — Caso in cui l'inviluppo Σ rimane a curvatura media costante » 150
§ 335. — Forme effettive del ds^2 - Primo teorema di Guichard. . » 152

§ 336. — Caso $H \neq 0$ - Secondo teorema di Guichard. . . . . *pag.* 156
§ 337. — Complementi ai teoremi di Guichard . . . . . » 158
§ 338. — Caso in cui l'inviluppo Σ rimane a curvatura totale costante » 161
§ 339. — Preliminari sui problemi d'inversione . . . . . » 165
§ 340. — Le trasformazioni di Ribaucour in generale . . . . » 167
§ 341. — Ricerca delle formole di trasformazione . . . . . » 171
§ 342. — Elementi relativi alla superficie Σ' trasformata . . . » 174
§ 343. — Elementi della superficie S dei centri . . . . . » 179
§ 344. — Riduzione delle trasformazioni di Ribacour ad inversioni . » 181
§ 345. — Trasformazioni di Ribaucour delle figure sferiche e piane . » 183
§ 346. — Trasformazioni di Ribaucour delle superficie ad area minima » 185
§ 347. — Le congruenze rettilinee W di Thybaut a falde focali minime . . . . . » 188
§ 348. — Trasformazioni di Ribaucour per le superficie a curvatura costante . . . . . » 190
§ 349. — Le trasformazioni D_m di Darboux delle superficie isoterme » 192
§ 350. — Le formole per le trasformazioni D_m sotto la forma di Darboux . . . . . » 195
§ 351. — Proprietà caratteristiche per le trasformazioni D_m . . » 197
§ 352. — Fasci di trasformazioni di Ribaucour . . . . . » 200
§ 353. — Proprietà geometriche del fascio . . . . . » 202
§ 354. — Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour » 207
§ 355. — Il teorema speciale di permutabilità per le superficie d'area minima . . . . . » 212
§ 356. — Caso delle superficie a curvatura costante . . . . » 215
§ 357. — Il teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni D^m delle superficie isoterme . . . . . » 217

CAPITOLO XXI.

I sistemi ciclici e il nuovo metodo di Weingarten per il problema d'applicabilità.

§ 358. — Congruenze normali di curve. . . . . *pag.* 220
§ 359. — Il teorema di Ribaucour sulle congruenze normali di curve piane . . . . . » 222
§ 360. — I sistemi ciclici in relazione colle trasformazioni di Ribaucour » 225
§ 361. — Formole generali pei sistemi ciclici . . . . . » 228
§ 362. — Sistemi ciclici normali ad una data superficie . . . . » 230
§ 363. — Trasformazioni di Ribaucour in coordinate generali . . » 233
§ 364. — Sistemi ciclici normali ad una sfera o ad un piano . . » 236
§ 365. — Sistemi ciclici nei piani tangenti di una superficie - Teorema di Darboux . . . . . » 239
§ 366. — Sistema coniugato comune a Σ Σ_0. . . . . » 243
§ 367. — Interpretazione nello spazio parabolico indefinito con $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ . . . . . » 245

§ 368. — Congruenze rettilinee cicliche . . . . . *pag.* 247
§ 369. — Congruenze infinite volte cicliche e congruenze cicliche normali . . . . . » 251
§ 370. — Preliminari al nuovo metodo di Weingarten pel secondo problema dell'applicabilità . . . . . » 253
§ 371. — La superficie trasformata $\bar{S}$ di Weingarten . . . . » 255
§ 372. — Inversione dei risultati . . . . . » 259
§ 373. — Casi di completa integrabilità nel nuovo metodo di Weingarten . . . . . » 261

CAPITOLO XXII.

Le trasformazioni B_k per congruenze W delle deformate del paraboloide iperbolico.

§ 374. — Faccette piane e loro moltiplicità secondo S. Lie . . *pag.* 266
§ 375. — Nuovo aspetto delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche . . . . . » 271
§ 376. — Descrizione geometrica dei principii fondamentali per le trasformazioni B_k . . . . . » 273
§ 377. — Deduzione di alcune formole fondamentali . . . . » 275
§ 378. — Prime formole relative al paraboloide iperbolico . . . » 277
§ 379. — Dimostrazione di alcune identità ausiliarie . . . . » 281
§ 380. — Orientamento delle faccette f_1 . . . . . » 283
§ 381. — Equazioni differenziali fondamentali per la funzione $\lambda = \gamma(u, v)$. . . . . » 285
§ 382. — Illimitata integrabilità del sistema - Trasformazioni B_k . » 288
§ 383. — Le trasformazioni B_k per le deformate rigate del paraboloide » 291
§ 384. — Le trasformazioni singolari B_p, B_{-q}, B_0 . . . . » 293
§ 385. — Calcolo del ds_1^2 delle superficie trasformate S_1 . . . » 296
§ 386. — L'affinità d'Ivory e le formole d'applicabilità . . . » 299
§ 387. — Verifica delle formole d'applicabilità . . . . . » 303
§ 388. — Corrispondenza delle asintotiche sulle due falde focali . » 307
§ 389. — Ulteriori proprietà delle trasformazioni B_k . . . . » 310
§ 390. — Corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti sopra S, S_1 » 311
§ 391. — Preliminari per la relazione reciproca fra S, S_1 . . . » 313
§ 392. — Invertibilità della trasformazione B_k . . . . . » 316
§ 393. — Espressione effettiva del movimento o simmetria. . . » 318

CAPITOLO XXIII.

Trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide ad una falda

§ 394. — Formole fondamentali per l'iperboloide ad una falda . . *pag.* 321
§ 395. — Alcune identità fondamentali. . . . . » 324
§ 396. — Equazioni differenziali per le trasformazioni B_k . . . » 327

§ 397. — Illimitata integrabilità del sistema. . . . . *pag.* 330
§ 398. — Calcolo del ds_1^2 per le superficie S_1 trasformate . . . » 332
§ 399. — Affinità d'Ivory e formole d'applicabilità . . . . . » 336
§ 400. — Prima trasformazione delle formole . . . . . » 338
§ 401. — Conclusione della verifica . . . . . » 341
§ 402. — Caso delle deformate rigate dell'iperboloide . . . . . » 343
§ 403. — Proprietà delle trasformazioni B_k . . . . . » 345
§ 404. — Invertibilità delle trasformazioni B_k . . . . . » 347
§ 405. — Caso dell'iperboloide rotondo ad una falda . . . . . » 349
§ 406. — Un caso limite delle trasformazioni B_k - Coniche distorte . » 350

CAPITOLO XXIV.

Trasformazioni B_k delle deformate delle altre specie di quadriche.

§ 407. — Generalità sulle trasformazioni B_k . . . . . *pag.* 353
§ 408. — Caso delle deformate del paraboloide ellittico . . . . » 354
§ 409. — Applicabilità impropria delle trasformate S_1 sul paraboloide » 358
§ 410. — Trasformazioni B_k per le deformate improprie del paraboloide » 360
§ 411. — Esame delle condizioni differenziali . . . . . » 363
§ 412. — Trasformazioni B_k delle deformate dell'iperboloide a due falde » 365
§ 413. — Caso dell'ellissoide - Cangiamento di notazioni . . . » 368
§ 414. — Trasformazioni B_k delle deformate dell'ellissoide. . . » 371
§ 415. — Trasformazioni B_k per le deformate improprie del paraboloide iperbolico. . . . . » 373
§ 416. — Caso delle deformate improprie dell'iperboloide rigato . » 377
§ 417. — Trasformazioni B_k per le deformate della sfera immaginaria » 380
§ 418. — Trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche » 382
§ 419. — Paragone colle proprietà generali delle trasformazioni B_k . » 385
§ 420. — Trasformazioni B_k delle deformate dell'ellissoide immaginario » 387
§ 421. — Trasformazioni B_k per le deformate del paraboloide immaginario $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z\,i\,z$ . . . . . » 390
§ 422. — Cenno sul teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni B_k . . . . . » 394
§ 423. — Coppie di superficie coniugate in deformazione . . . » 396
§ 424. — Corrispondenza geodetica fra S, $\overline{S}$ . . . . . » 399
§ 425. — Quadriche coniugate in deformazione . . . . . » 401
§ 426. — La trasformazione H e le sue prime proprietà . . . » 404
§ 427. — Congruenze W corrispondenti. . . . . » 406
§ 428. — La trasformazione H in relazione colle B_k . . . . » 409

BOLOGNA - NICOLA ZANICHELLI - EDITORE

BELARDINELLI G. — *Esercizi di algebra complementare*, con oltre 700 questioni risolute e proposte . . . . . L. 30 —
BIANCHI LUIGI — *Lezioni di geometria analitica* . . . . . » 45 —
— *Lezioni di geometria differenziale.* Terza edizione interamente rifatta.
Volume Primo . . . . . » 65 —
Volume Secondo - Parte I . . . . . » 35 —
Volume Secondo - Parte II . . . . . (In corso di stampa)
— *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* . . . . . » 45 —
— *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici* . . . . . » 75 —
BORTOLOTTI ETTORE — *Lezioni di geometria analitica.*
Volume Primo . . . . . » 45 —
Volume Secondo . . . . . » 32 —
BURALI-FORTI C. e R. MARCOLONGO — *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica* - Seconda edizione . . . . . » 20 —
BURGATTI PIETRO — *Lezioni di meccanica razionale* - Terza edizione. . » 36 —
BURGATTI PIETRO e RUGGERO ROGHI — *Problemi ed esercizi di meccanica razionale* . . . . . » 40 —
CIANI EDGARDO — *Il metodo delle coordinate projettive omogenee nello studio degli enti algebrici* . . . . . » 15 —
— *Lezioni di geometria projettiva ed analitica.* Terza edizione riveduta e corretta . . . . . » 60 —
ENRIQUES FEDERIGO — *Lezioni di geometria projettiva* - Quarta edizione. » 22 —
— *Lezioni di geometria descrittiva*, pubblicate per cura del dott. Umberto Concina - Ristampa della seconda edizione . . . . . » 25 —
— *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, pubblicate per cura del dott. Oscar Chisini.
Volume Primo. . . . . » 15 —
Volume Secondo . . . . . » 30 —
— *Conferenze sulla teoria non-euclidea* per cura del dott. O. Fernandez. . » 3 —
LEVI-CIVITA TULLIO e UGO AMALDI — *Lezioni di meccanica razionale.*
Volume I. Cinematica - Principi e Statica . . . . . » 65 —
PASINI CLAUDIO — *Trattato di Topografia* - Quarta edizione. . . . . » 32 —
— *Metodo dei minimi quadrati.* Appendice al Trattato di Topografia. . . » 15 —
PINCHERLE SALVATORE — *Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti.*
Volume Primo - *Analisi algebrica.* - Seconda edizione . . . . . » 30 —
Volume secondo - *Teoria delle equazioni* - Seconda edizione . . . » 32 —
— *Lezioni di calcolo infinitesimale* - Seconda edizione riveduta . . . . . » 40 —
— *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche* - Parte prima . . . . » 45 —
PINCHERLE SALVATORE e U. AMALDI — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi* . . . . . » 15 —
PORRO FRANCESCO — *Trattato di astronomia* — Volume Primo . . . . » 45 —
QUESTIONI RIGUARDANTI LE MATEMATICHE ELEMENTARI, raccolte e coordinate da Federigo Enriques.
Volume Primo - *Critica dei principii* . . . . . (In ristampa)
Volume Secondo - *Problemi classici della geometria - Numeri primi ed Analisi indeterminata - Massimi e Minimi* . . (In ristampa)
TONELLI LEONIDA — *Fondamenti di calcolo delle variazioni.* Volume primo » 55 —