РГАСНТИ 27.17.31, 27.17.33, 27.17.35 ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 21

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1988

1—1370 28

УДК 512.664.3; 512.664.4; 512.743.3; 512.817

ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ—2

Консультирующие редакторы-составители
докт. физ.-мат. наук *Э. Б. Винберг*
докт. физ.-мат. наук *А. Л. Онищик*

Редактор-составитель тома
В. В. Никулин

Авторы
Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич,
Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, О. В. Шварцман

УДК 512.743.3; 512.817

I. ДИСКРЕТНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИ

Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основы общей теории дискретных подгрупп групп Ли были заложены в 50-е — 60-е годы XX в. в работах А. И. Мальцева, А. Вейля, Бореля, Хариш-Чандры, Сельберга, Мостова, Ауслендера и ряда других математиков. Эти работы были подготовлены более ранними исследованиями, в которых рассматривались отдельные классы дискретных подгрупп групп Ли, обязанные своим происхождением арифметике, геометрии, теории функций и физике.

Исторически первая нетривиальная дискретная подгруппа — подгруппа $SL_2(\mathbf{Z})$ группы $SL_2(\mathbf{R})$, названная впоследствии модулярной группой Клейна, — фактически рассматривалась Лагранжем и Гауссом в их исследованиях по арифметике квадратичных форм от двух переменных. Ее естественным обобщением является подгруппа $SL_n(\mathbf{Z})$ группы $SL_n(\mathbf{R})$. Исследование этой группы как дискретной группы преобразований пространства положительно определенных квадратичных форм от n переменных составило предмет теории приведения, разработанной А. Н. Коркиным, Е. И. Золотаревым, Эрмитом, Минковским и другими во второй половине XIX в. — начале XX в.

Ряд других арифметически определяемых дискретных подгрупп классических групп Ли — группы единиц рациональных квадратичных форм, группы единиц простых алгебр над $\mathbf{Q}$, группа целочисленных симплектических матриц — был изучен в первой половине XX в. Б. А. Венковым, Г. Вейлем, Зигелем и другими математиками.

В теории функций комплексного переменного интегрирование алгебраических функций и, более общо, решение линей-

ВВЕДЕНИЕ

Основы общей теории дискретных подгрупп групп Ли были заложены в 50-е — 60-е годы XX в. в работах А. И. Мальцева, А. Вейля, Бореля, Хариш-Чандры, Сельберга, Мостова, Ауслендера и ряда других математиков. Эти работы были подготовлены более ранними исследованиями, в которых рассматривались отдельные классы дискретных подгрупп групп Ли, обязанные своим происхождением арифметике, геометрии, теории функций и физике.

Исторически первая нетривиальная дискретная подгруппа — подгруппа $SL_2(\mathbf{Z})$ группы $SL_2(\mathbf{R})$, названная впоследствии модулярной группой Клейна, — фактически рассматривалась Лагранжем и Гауссом в их исследованиях по арифметике квадратичных форм от двух переменных. Ее естественным обобщением является подгруппа $SL_n(\mathbf{Z})$ группы $SL_n(\mathbf{R})$. Исследование этой группы как дискретной группы преобразований пространства положительно определенных квадратичных форм от n переменных составило предмет теории приведения, разработанной А. Н. Коркиным, Е. И. Золотаревым, Эрмитом, Минковским и другими во второй половине XIX в. — начале XX в.

Ряд других арифметически определяемых дискретных подгрупп классических групп Ли — группы единиц рациональных квадратичных форм, группы единиц простых алгебр над $\mathbf{Q}$, группа целочисленных симплектических матриц — был изучен в первой половине XX в. Б. А. Венковым, Г. Вейлем, Зигелем и другими математиками.

В теории функций комплексного переменного интегрирование алгебраических функций и, более общо, решение линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами привело к рассмотрению некоторых специальных функций (названных впоследствии автоморфными), инвариантных относительно различных дискретных подгрупп группы $SL_2(\mathbf{R})$, действующих в верхней полуплоскости дробно-линейными преобразованиями. Некоторые возникающие таким образом дискретные подгруппы группы $SL_2(\mathbf{R})$ были рассмотрены в середине XIX в. в работах Эрмита, Дедекинда и Фукса. Среди них была и группа $SL_2(\mathbf{Z})$ (но представленная иным образом, чем у Лагранжа и Гаусса). Обширный класс таких групп, в том числе группа $SL_2(\mathbf{Z})$ и некоторые соизмеримые с ней подгруппы группы $SL_2(\mathbf{R})$, был изучен Клейном. Почти одновременно, в 1881—82 гг. Пуанкаре дал геометрическое описание всех дискретных групп дробно-линейных преобразований верхней плоуплоскости (названных им фуксовыми группами).

В первой половине XX в. рассматривались отдельные классы автоморфных функций многих переменных. Эти функции были связаны с арифметически определенными дискретными подгруппами групп $(SL_2(\mathbf{R}))^k$ (модулярные функции Гильберта), $Sp_{2n}(\mathbf{R})$ (модулярные функции Зигеля) и других полупростых групп Ли.

В кристаллографии, начиная с конца XIX в., рассматривались группы симметрии кристаллических структур, являющиеся дискретными подгруппами группы движений трехмерного евклидова пространства.

Е. С. Федоров и Шёнфлис получили классификацию таких групп. Аналогичные группы движений n-мерного евклидова пространства были изучены в 1911 г. Бибербахом.

Отдельной ветвью являлось изучение дискретных подгрупп в разрешимых (в частности, в абелевых или нильпотентных) группах Ли.

Первый результат о таких группах (эквивалентный описанию дискретных подгрупп в $\mathbf{R}^2$) был получен Якоби в первой половине XIX века в рамках описания групп периодов мероморфных функций.

В настоящей статье мы попытались систематизировать все основные результаты по теории дискретных подгрупп групп Ли. Большей частью статья носит обзорный характер, но в тех случаях, когда имеются короткие доказательства (и, в особенности, когда эти доказательства не опубликованы), мы их приводим. Помимо оригинальных статей, основными источниками для нас были: монографии Рагунатана [120] и Мостова [108], обзоры Х. Вана [141], Мостова [110], Ауслендера [54], Г. А. Маргулиса [26], записки специальных курсов, читавшихся первым из авторов на механико-математическом факультете Московского университета.

Более подробное изложение теории дискретных подгрупп

групп движений пространств постоянной кривизны будет дано в статье «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны» в одном из последующих томов настоящей серии, посвященном пространствам постоянной кривизны.

В статье приняты следующие обозначения и соглашения: $\mathbf{Q}$ — поле рациональных, $\mathbf{R}$ — вещественных и $\mathbf{C}$ — комплексных чисел.

Если группа Ли обозначается заглавной латинской буквой (например, H), то ее касательная алгебра Ли обозначается соответствующей строчной готической буквой ($\mathfrak{h}$).

Через G^0 обозначается связная компонента топологической группы G, а через $\tilde{G}$ — ее универсальная накрывающая. Через $\bar{H}$ — замыкание подмножества $H\subset G$ в топологии группы G.

${}^aH$ — замыкание подмножества $H\subset X$ в топологии Зарисского аффинного многообразия X.

$N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G, $Z(G)$ — центр группы G, $Z_G(a)$ — централизатор элемента $a\in G$ в группе G.

$A\rtimes B$ (соответственно $A\underset{\varphi}{\rtimes}B$, где $\varphi: A\to \mathrm{Aut}\ B$) — полупрямое произведение групп A и B.

O_n — ортогональная, U_n — унитарная, $O_{n,1}$ — псевдоортогональная, Sp_{2n} — симплектическая группы.

Несколько слов об употреблении в настоящей статье терминов «алгебраическое многообразие» и «алгебраическая группа».

Всюду, где не оговорено противное, под алгебраическим многообразием (группой) понимается вещественное алгебраическое многообразие (группа), т. е. алгебраическое многообразие (группа), определенное над $\mathbf{R}$. Оно отождествляется с множеством (группой) своих вещественных точек, которое по определению считается плотным по Зарисскому в множестве комплексных точек. Наряду с этим рассматриваются, главным образом в § 6 гл. 3, комплексные алгебраические многообразия (группы), отождествляемые с множествами (группами) своих комплексных точек.

Выражение «алгебраическое k-многообразие (k-группа)» означает «вещественное алгебраическое многообразие (группа), определенное над подполем $k\subset\mathbf{R}$». Аналогичным образом понимается выражение «комплексное алгебраическое k-многообразие (k-группа)» (где k — произвольное числовое поле).

Если X (соответственно G) — вещественное или комплексное алгебраическое k-многообразие (соответственно k-группа), то для любого поля $K\supset k$ через $X(K)$ (соответственно $G(K)$) обозначается множество (соответственно группа) K-точек многообразия X (соответственно группы G).

Глава 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУППАХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

В этой главе всюду, где встречается термин «локально компактная группа», имеется в виду локально компактная топологическая группа со счетной базой открытых подмножеств.

§ 1. Простейшие свойства решеток

1.1. Определение дискретной подгруппы. Примеры. Подгруппа Γ топологической группы G называется *дискретной*, если Γ является дискретным подмножеством топологического пространства G. Это эквивалентно тому, что в группе G существует такая окрестность $U(e)$ единичного элемента e, что $\Gamma\cap U(e)=\{e\}$.

Примеры 1.1. Дискретными являются следующие подгруппы:

а) подгруппа $\mathbf{Z}$ целых чисел в аддитивной группе $\mathbf{R}$ вещественных чисел;

б) целочисленная линейная оболочка $\mathbf{Z}e_1+\ldots+\mathbf{Z}e_m$ линейно независимого семейства векторов $\{e_1,\ldots,e_m\}$ в n-мерном вещественном векторном пространстве V;

в) аддитивная группа поля алгебраических чисел k, естественным образом вложенная в группу аделей $\mathbf{A}_k$ (см., например, [148]);

г) подгруппа $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$;

д) конечная подгруппа произвольной топологической группы.

Отметим, что любая дискретная подгруппа компактной группы конечна.

Напомним, что на каждой локально компактной группе G существует правоинвариантная борелевская мера, единственная с точностью до множителя. Эта мера называется правоинвариантной мерой Хаара на группе G (см. [21]).

Фиксируем правоинвариантную меру Хаара μ на группе G. Так как левые и правые сдвиги на элементы группы G между собой коммутируют, то левый сдвиг $l_g(\mu)$ меры μ будет снова правоинвариантной мерой. Поэтому $l_g(\mu)=\chi(g)\mu$, причем функция $\chi(g)$ является характером группы G.

Группа G называется *унимодулярной*, если $\chi(g)\equiv 1$. Это означает, что правоинвариантная мера Хаара является и левоинвариантной.

Пусть теперь Γ — дискретная подгруппа локально компактной группы G. Тогда правоинвариантная мера Хаара μ на группе G индуцирует на факторпространстве G/Γ меру, которую, мы обозначим через $\bar{\mu}$.

Дискретная подгруппа Γ локально компактной группы G называется *решеткой*, если объем факторпространства G/Γ относительно меры $\bar{\mu}$ конечен.

В дальнейшем мы будем обозначать этот объем через $v(G/\Gamma)$ и называть *кообъемом* решетки Γ.

Если факторпространство G/Γ компактно, то решетка Γ называется *равномерной* (говорят также, что Γ — равномерная дискретная подгруппа группы G).

Примеры 1.2. а) Дискретная подгруппа Γ из примера 1.1, б) тогда и только тогда является решеткой в V, когда $m=n$. В этом случае $\Gamma=\mathbf{Z}e_1\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}e_n$ — равномерная решетка, а факторпространство V/Γ является n-мерным тором (подробнее см. п. 1.2 гл. 2).

б) Подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ является решеткой в группе $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, однако факторпространство $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ некомпактно при $n\geqslant 2$ (см. п. 2.3 гл. 3).

в) Дискретная подгруппа k из примера 1.1, в) является равномерной решеткой в $\mathbf{A}_k$ ([148]).

Рассмотрим одно необходимое условие существования решетки.

Предложение 1.3. Если в локально компактной группе G существует решетка Γ, то группа G унимодулярна.

◀ В самом деле,

$$\bar{\mu}(G/\Gamma)=\bar{\mu}(g^{-1}(G/\Gamma))=\overline{(l_g\mu)}(G/\Gamma)=\chi(g)\,\bar{\mu}(G/\Gamma),$$

откуда следует, что $\chi(g)\equiv 1$. ▶

Как видно из следующего примера, приведенное необходимое условие не является достаточным для существования решетки в локально компактной группе G.

Пример 1.4. Пусть $G=\mathbf{Q}_p^+$ — аддитивная группа p-адических чисел. В этой группе вообще не существует нетривиальных дискретных подгрупп, так как $\lim\limits_{n\to\infty} p^n a=0$ для любого $a\in\mathbf{Q}_p^+$. С другой стороны, группа G абелева и, следовательно, унимодулярна.

Пример 1.5. Пусть $G=\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}^1$ — группа аффинных преобразований прямой. Группа G изоморфна матричной группе

$$\left\{g=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b\in\mathbf{R},\ a\neq 0\right\}.$$

Мера $dg=\frac{da\,db}{a}$ является правоинвариантной мерой Хаара на группе G, но, как легко проверить, она не левоинвариантна. Поэтому группа $\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}^1$ не унимодулярна и, значит, не может содержать решеток, хотя нетривиальные дискретные подгруппы в ней имеются: например, подгруппа матриц вида

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & 1\end{pmatrix}\middle|\, b\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Предложение 1.6 ([83]). Если в связной группе Ли G существует решетка, то группа внутренних автоморфизмов группы G замкнута в группе всех ее автоморфизмов.

Заметим, что для групп Ли общего вида (см. п. 1.1 гл. 4) до сих пор не найдено простое достаточное условие существования в них решетки.

Пусть G — локально компактная группа и Γ — решетка в ней. Через π обозначим каноническое отображение $G \to G/\Gamma$.

Теорема 1.7 ([120]). Для произвольной последовательности $\{g_n\}$ элементов группы G, последовательность $\{\pi(g_n)\}$ тогда и только тогда дискретна, когда в группе Γ существует такая последовательность $\{\gamma_n\}$, что

а) $\gamma_n \neq e$;

б) $g_n \gamma_n g_n^{-1} \to e$ при $n \to \infty$.

◀ Возьмем в G такое возрастающее семейство компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$, что $G = \bigcup_1^\infty K_n$. Ввиду конечности объема факторпространства G/Γ, последовательность $\varepsilon_n = v(G/\Gamma - \pi(K_n))$ стремится к нулю. Выбрав в группе G такую фундаментальную систему компактных окрестностей V_n единицы, что $v(V_n) > \varepsilon_n$, положим $U_n = V_n^{-1} V_n$.

Пусть последовательность $\pi(g_n)$ не содержит предельных точек. Так как множество $\pi(U_n K_n)$ компактно, то $\pi(g_N) \notin \pi(U_n K_n)$ почти для всех N. Отсюда легко следует, что $\pi(V_n g_N) \cap \cap \pi(V_n K_n) = \varnothing$ почти для всех N. Далее, очевидно, что

$$v(V_n g_N) = v(V_n) > \varepsilon_n > v(G/\Gamma - \pi(V_n K_n)),$$

и так как множества $\pi(V_n g_N)$ и $\pi(V_n K_n)$ не пересекаются, то почти для всех N множество $V_n g_N$ не может взаимно однозначно отображаться на G/Γ.

Следовательно, почти для всех N существует такой элемент $\gamma_N \in \Gamma$, $\gamma_N \neq e$, что $v g_N = v' g_N \gamma_N$ для некоторых элементов v, $v' \in V_n$, т. е. $g_N \gamma_N \gamma_N^{-1} \in U_n$. Первая часть предложения доказана.

Предположим теперь, что последовательность $g_n \in G$ такова, что можно выбрать элементы $\gamma_n \in \Gamma$, $\gamma n \neq e$, для которых последовательность $g_n \gamma_n g_n{}^{-1} \to e$ при $n \to \infty$ и при этом у последовательности $\pi(g_n)$ есть предельная точка $\pi(g)$ в пространстве G/Γ. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что существует такое $\alpha_n \in \Gamma$, что $\lim_{n\to\infty} g_n \alpha_n = g$ в группе G. По условию, $\lim_{n\to\infty} g_n \gamma_n g_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} (g_n \alpha_n)(\alpha_n^{-1} \gamma_n \alpha_n)(\alpha_n^{-1} g_n^{-1}) = e$, и так как $\lim_{n\to\infty} g_n \alpha_n = g$, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1} \gamma_n \alpha_n = e$. Так как группа Γ дискретна, то для почти всех n, $\alpha_n^{-1} \gamma_n \alpha_n = e$, т. е. $\gamma_n = l$ почти для всех n. Противоречие. ▶

Замечание. При доказательстве второй части теоремы 1.7 использовалась только дискретность группы Γ.

Если G — локально компактная абелева группа, то всякая решетка Γ в группе G равномерна. Это непосредственное следствие теоремы 1.7 (см. также следствие 1.2 гл. 2).

Предложение 1.8 ([144]). Пусть G — локально компактная группа, Γ — решетка в G, X — подмножество в G. Тогда два приводимых ниже условия эквивалентны:

а) Множество $\pi(X)$ относительно компактно в G/Γ.

б) Для любой компактной окрестности K точки e в группе G и любого $x \in X$ число элементов пересечения $xKx^{-1} \cap \Gamma$ не превосходит некоторой константы, зависящей только от K.

Мы закончим этот пункт формулировкой одного свойства равномерных решеток, фактически доказанного в [127].

Для любого элемента $g \in G$ и любой подгруппы $\Gamma \subset G$ через $C(\Gamma, g)$ обозначим множество $\{\gamma g \gamma^{-1}, \gamma \in \Gamma\}$.

Предложение 1.9. Если Γ — равномерная решетка в G и множество $C(\Gamma, g)$ дискретно, то множество $C(G, g)$ замкнуто.

1.2. Соизмеримость и приводимость решеток. Многие интересные свойства дискретных подгрупп в топологических группах являются свойствами классов соизмеримых подгрупп.

Две подгруппы Γ и Γ' в группе называются *соизмеримыми*, если $[\Gamma : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$ и $[\Gamma' : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$.

Соизмеримость есть отношение эквивалентности на множестве подгрупп группы G. Мы будем обозначать ее символом «$\sim$».

Предложение 1.10. Пусть Γ и Γ' — соизмеримые подгруппы локально компактной группы G. Если одна из них дискретна (является решеткой, равномерной решеткой), то и другая дискретна (соответственно является решеткой, равномерной решеткой). Отметим, что для соизмеримых решеток Γ и Γ' в группе G справедливо соотношение

$$v(G/\Gamma)/v(G/\Gamma') = [\Gamma' : \Gamma \cap \Gamma'] / [\Gamma : \Gamma \cap \Gamma'].$$

Примеры 1.11. а) Если $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, то любая конгруэнц-подгруппа

$$\Gamma(p) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \mid \gamma \equiv E \,(\mathrm{mod}\, p)\}$$

является подгруппой конечного индекса в Γ и, следовательно, соизмерима с группой Γ.

б) Две решетки Γ и Γ' в конечномерном вещественном векторном пространстве V соизмеримы тогда и только тогда, когда совпадают их $\mathbf{Q}$-оболочки. В частности, подгруппы $\Gamma = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ и $\Gamma' = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}\sqrt{2})$ группы $\mathbf{R}^2$ несоизмеримы.

Пусть Γ — подгруппа группы G. Рассмотрим множество $\mathrm{Comm}\,\Gamma = \{g \in G \mid g \Gamma g^{-1} \sim \Gamma\}$. Это множество является подгруппой в G; оно называется *группой соизмеримости*. Ясно, что $\Gamma \subset \mathrm{Comm}\,\Gamma$, и что $\mathrm{Comm}\,\Gamma = \mathrm{Comm}\,\Gamma'$, если $\Gamma \sim \Gamma'$. Кроме того, для любого гомоморфизма $f : G \to G'$ имеем $f\,(\mathrm{Comm}\,\Gamma) \subset$

$\subset \mathrm{Comm}\,(f(\Gamma))$. Заметим, что $\mathrm{Comm}\,\Gamma$ не обязательно дискретна, даже если дискретна подгруппа Г. Пример: для любой решетки Г в абелевой локально компактной группе G имеем $\mathrm{Comm}\,\Gamma = G$.

Группа G называется *почти прямым произведением* своих (нормальных) подгрупп $G_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$, если произведение вложений $G_i \to G$ является гомоморфизмом прямого произведения $G_1 \times \ldots \times G_m$ на группу G и его ядро конечно (конкурирующее определение требует лишь дискретности ядра, но оно менее удобно для наших целей). В этом случае пишут

$$G = G_1 \tilde{\times} G_2 \tilde{\times} \ldots \tilde{\times} G_m.$$

Если локально компактная группа G есть почти прямое произведение двух подгрупп $G = G_1 \tilde{\times} G_2$, а Γ_1 и Γ_2 — решетки в G_1 и G_2 соответственно, то $\Gamma = \Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2$ — решетка в G. Во многих случаях желательно исключить из рассмотрения эту тривиальную конструкцию. Это приводит к понятию неприводимой решетки.

Решетка Г в локально компактной группе G называется *неприводимой*, если группа G не может быть разложена в почти прямое произведение своих собственных замкнутых подгрупп $G_1 \tilde{\times} G_2$ так, чтобы подгруппа Г была соизмерима с подгруппой вида $\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2$, где $\Gamma_i \subset G_i$, $i = 1, 2$. (При этом подгруппа Γ_i автоматически является решеткой в группе G_i, $i = 1, 2$.)

Примеры 1.12. а) Любая решетка в $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 2$ приводима в смысле данного выше определения. Это следует из описания таких решеток (данного в главе 2).

б) Любая решетка в простой группе Ли G неприводима.

§ 2. Дискретные группы преобразований

2.1. Основные определения и примеры. Группа Г гомеоморфизмов хаусдорфова топологического пространства X называется *дискретной группой преобразований*, если для любых точек x и y из X найдутся такие их окрестности U и V соответственно, что множество $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap V \neq \varnothing\}$ конечно.

Отметим, что в этом определении не требуется эффективность действия группы Г на X, но из него следует, что ядро неэффективности обязательно конечно.

Если Г — дискретная группа преобразований топологического пространства X, то из определения следует, что

а) стабилизатор $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ любой точки $x \in X$ конечен,

б) орбита Γx любой точки $x \in X$ дискретна.

В случае, когда X — метрическое пространство, а Г — группа его изометрий, свойства а) и б) равносильны дискретности группы Г.

Примеры 2.1. а) Дискретная подгруппа Г топологической группы G, действующая на G левыми сдвигами.

б) Группа симметрий (группа всех симметрий) кристаллической структуры является дискретной группой движений евклидова пространства.

в) Если X — одно из трех пространств постоянной кривизны: S^n, E^n или Λ^n, то группа симметрии его однородного разбиения является дискретной группой движений пространства X (см. статью «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны»).

г) Если X и Y — топологические пространства и $p: Y \to X$ — накрытие, то группа Г скольжений накрытия p является дискретной группой преобразований пространства Y (если Y односвязно, то $\Gamma \simeq \pi_1(X)$).

Обширный класс дискретных подгрупп локально компактных групп связан с дискретными группами преобразований однородных пространств.

Пусть G — локально компактная группа, K — ее компактная подгруппа и Г — дискретная подгруппа в G. Группа Г естественным образом действует на однородном пространстве $X = G/K$. Слои отображения $p: G/\Gamma \to X/\Gamma$ компактны и, согласно общему принципу теории меры [21], мера на факторпространстве G/Γ (см. п. 1.1) индуцирует меру на пространстве X/Γ. Поэтому имеет смысл говорить об объеме факторпространства относительно этой меры.

Предложение 2.2. Пусть G — локально компактная группа, K — ее компактная подгруппа. Если $\Gamma \subset G$ — подгруппа, то

а) дискретность Г в группе G равносильна дискретности Г как группы преобразований однородного пространства $X = G/K$;

б) Г является решеткой в G (соответственно равномерной решеткой) тогда и только тогда, когда $v(X/\Gamma) < \infty$ (соответственно факторпространство X/Γ компактно).

Пример 2.3. Группа $SL_2(\mathbf{R})$ действует на верхней полуплоскости $H = SL_2(\mathbf{R})/SO_2$ дробно-линейными автоморфизмами: если $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R})$, $\tau \in H$, то $\gamma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$. При этом дискретным подгруппам группы $SL_2(\mathbf{R})$ отвечают *фуксовы группы* автоморфизмов верхней полуплоскости (см. статью «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны»).

Вернемся к предложению 2.2 и рассмотрим его частичное обращение, принадлежащее Зигелю [132].

Предложение 2.4. Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, Г — решетка в G. Группа Г тогда и только тогда является дискретной группой преобразований однородного пространства G/H, когда подгруппа H компактна.

Если дискретная подгруппа $\Gamma \subset G$ не содержит элементов конечного порядка, то $\Gamma \cap K = \{e\}$ для любой компактной подгруппы K (в самом деле, подгруппа $\Gamma \cap K$ дискретна в K, а потому конечна). В таком случае группа Γ, рассматриваемая как дискретная группа преобразований однородного пространства $X = G/K$, действует на X *свободно*, т. е. стабилизатор Γ_x любой точки $x \in X$ тривиален. Обратно, если G — связная группа Ли, K — ее максимальная компактная подгруппа и дискретная подгруппа $\Gamma \subset G$ свободно действует на пространстве $X = G/K$, то группа Γ не содержит элементов конечного порядка.

Следующий пример интересен сам по себе и важен для дальнейшего.

Пример 2.5. Пусть γ — диагонализируемое линейное преобразование вещественного векторного пространства V и $\mathrm{Fix}\,\gamma$ — множество его неподвижных точек в проективном пространстве $\mathrm{P}V$ (Прообраз множества $\mathrm{Fix}\,\gamma$ в пространстве V — это объединение всех собственных подпространств линейного преобразования γ). Тогда циклическая группа $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ дискретно действует в области $\mathrm{P}V - \mathrm{Fix}\,\gamma$.

В самом деле, перейдя, если нужно, к подгруппе $\Gamma' = \langle \gamma^2 \rangle$, можно считать, что γ имеет лишь положительные собственные значения. Рассмотрим разложение пространства V в прямую сумму собственных подпространств $V(\lambda)$, отвечающих различным собственным значениям линейного преобразования γ. При этом прообразом любой точки $[v_0] \in \mathrm{P}V - \mathrm{Fix}\,\gamma$ является вектор $v_0 = v_1 + v_2 + \ldots$, $v_q \in V(\lambda_q)$, в разложении которого участвуют как минимум два ненулевых вектора (скажем, v_1 и v_2) из различных собственных подпространств (из $V(\lambda_1)$ и $V(\lambda_2)$ соответственно). При этом можно считать, что $\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$. Обозначим через l_k, $k = 1, 2$, такие линейные функции, что $l_k(v_k) = 1$, $k = 1, 2$, и $l_k(V(\lambda_i)) = 0$ при $k \neq i$. Тогда $l = l_1/l_2$ — функция на пространстве $\mathrm{P}V$, и $l(\gamma[v_0]) = \mu l([v_0])$. Легко проверить, что окрестность

$$O([v_0]) = \{[v] \in \mathrm{P}V \mid 1/\sqrt{\mu} < l([x]) < \mu\}$$

точки $[v_0]$ обладает нужным нам свойством:

$gO([v_0]) \cap O([v_0]) = \varnothing$ для всех нетривиальных элементов g группы $\Gamma = \langle \gamma \rangle$. ▶

Пример 2.6. а) В этом примере факторпространство H/Γ, где H — верхняя полуплоскость, а $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ — дискретная группа ее автоморфизмов, выступает в роли пространства модулей эллиптических кривых. Пусть L — решетка в аддитивной группе $\mathbf{C}$. Факторпространство $T = \mathbf{C}/L$ является одномерным компактным комплексным многообразием (комплексным тором) и называется эллиптической кривой. Хорошо известно, что две эллиптические кривые $T = \mathbf{C}/L$ и $T' = \mathbf{C}/L'$ изоморфны (как комплексные многообразия) тогда и только тогда, когда существует такое комплексное число α, что $\alpha L = L'$ (см., например, [31]).

Выберем базис ω_1, ω_2 решетки L (соответственно ω_1', ω_2' в L'), нормировав его условием $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$. Тот факт, что $L' = \alpha L$ означает, что $\alpha\omega_1 = a\omega_1' + b\omega_2'$, $\alpha\omega_2 = c\omega_1' + d\omega_2'$ для некоторой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Полагая $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ $\left(\text{соотв. } \tau' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right)$, получаем, что $\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$. Таким образом, классы изоморфных эллиптических кривых находятся во взаимно однозначном соответствии с точками факторпространства $H/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

б) Остановимся вкратце на многомерном аналоге классического примера а). Для этого рассмотрим симплектическую группу

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R}) = \left\{ g \in M_{2n}(\mathbf{R}) \,\middle|\, {}^t g \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline -E_n & 0 \end{array}\right) g = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline -E_n & 0 \end{array}\right) \right\} =$$

$$= \left\{ g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \,\middle|\, {}^t AC = {}^t CA,\ {}^t BD = {}^t DB,\ {}^t AD - {}^t CB = E_n \right\} =$$

$$= \left\{ g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \,\middle|\, g^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} {}^t D & -{}^t B \\ \hline -{}^t C & {}^t A \end{array}\right) \right\}.$$

Известно, что однородное пространство $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})/\mathrm{U}_n$ отождествляется с верхней полуплоскостью Зигеля $\mathfrak{Z}_n = \{\tau \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^t\tau = \tau,\ \mathrm{Im}\,\tau$ — положительно определенная симметрическая матрица$\}$, [88]. Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ действует на верхней полуплоскости $\mathfrak{Z}_n$ дробно-линейными преобразованиями

$$g(\tau) = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

При этом группа $\Gamma_n = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$ действует как дискретная группа преобразований пространства $\mathfrak{Z}_n$. Факторпространство $\mathfrak{Z}_n/\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$ является «грубым» пространством модулей абелевых многообразий с главной поляризацией, [61].

Пример 2.7. Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ действует как дискретная группа преобразований конуса S_n^+ положительно определенных симметрических матриц: если $\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, $s \in S_n^+$, то $\gamma(s) = {}^t\gamma s \gamma$. Для проверки дискретности рассмотрим отображение $p: \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to S_n^+$, которое каждой невырожденной матрице $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ ставит в соответствие положительно определенную симметрическую матрицу ${}^t gg \in S_n^+$. Отображение p осуществляет биекцию однородного пространства $X = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{O}_n$ и конуса S_n^+, и «перенос» естественного действия группы $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ на X приводит к указанному действию на S_n^+. Дискретность этого действия следует из предложения 2.2.

2.2. Покрывающее множество и фундаментальная область

дискретной группы преобразований. Важным инструментом для изучения как самой дискретной группы преобразований $\Gamma : X$, так и топологии факторпространства X/Γ, является понятие фундаментальной области.

Пусть на топологическом пространстве X эффективно действует дискретная группа преобразований Γ (напомним, что эффективность означает, что для любого элемента $\gamma \neq e$ из Γ существует такая точка $x \in X$, что $\gamma x \neq x$).

Определение. Замкнутое подмножество F называется *Γ-покрывающим*, если

а) множества γF, $\gamma \in \Gamma$, образуют локально конечное покрытие пространства X;

б) F является замыканием своего открытого ядра (внутренности) F^0 (условие б) не является существенным ограничением, так как из а) следует, что множества $\gamma \overline{F^0}$ также покрывают X).

Если, кроме этих двух свойств, выполняется

в) $\gamma F^0 \cap F^0 = \varnothing$ для $\gamma \neq e$,

то множество F называется *фундаментальной областью* для группы Γ.

Примеры 2.8. а) Множество точек

$$F = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$$

на плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами x_1, x_2 является фундаментальной областью для дискретной группы Γ параллельных переносов на векторы целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$.

б) Рассмотрим бесконечную циклическую группу $\Gamma = \langle g \rangle$, действующую в пространстве $X = \mathbf{C}^2 - \{0\}$ по правилу

$$g^N((z_1, z_2)) = (\lambda^N z_1, \lambda^N z_2),\ \text{где}\ \lambda \in \mathbf{C}^*,\ |\lambda| > 1.$$

Группа Γ действует как дискретная группа преобразований (это проверяется так же, как в примере 2.5), и множество

$$F = \{(z_1, z_2) \mid 1/|\lambda| \leqslant \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \leqslant |\lambda|\}$$

является фундаментальной областью для группы Γ. Заметим, что факторпространство X/Γ в этом примере канонически снабжается комплексной структурой и представляет интересный пример компактного комплексного многообразия (так называемая *поверхность Хопфа*).

Предложение 2.9 (А. Вейль [145]). Пусть X — линейно связное и локально линейно связное топологическое пространство, Γ — дискретная группа его преобразований, а F есть Γ-покрывающее множество. Тогда

а) множество $P = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma F \cap F \neq \varnothing\}$ порождает группу Γ;

б) если X — односвязное, локально односвязное пространство, а множество F связно, то в качестве определяющих соотношений группы Γ можно взять все соотношения вида $\gamma_1\gamma_2 = \gamma$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma \in P$.

Фундаментальные области дискретных групп преобразований могут быть построены при весьма широких предположениях относительно пространства X. Например, если Γ — дискретная группа изометрий полного связного риманова многообразия X, то в качестве ее фундаментальной области можно выбрать *область Дирихле*

$$D(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, \gamma x_0)\ \ \forall \gamma \in \Gamma\},$$

где $x_0 \in X$ — любая точка, стабилизатор которой тривиален (точка x_0 называется *центром области Дирихле* $D(x_0)$).

Пример 2.10. На рис. 1 изображена область Дирихле $D_0 = D(0)$ для группы параллельных переносов плоскости $\mathbf{C}$ на векторы решетки $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\omega$, $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$, а на рис. 2 — область Дирихле с центром в точке $2i$ для группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\pm E\}$, дискретно действующей на верхней полуплоскости H.

Особый интерес представляют такие дискретные группы преобразований $\Gamma : X$, для которых существует компактное Γ-покрывающее множество. Такие группы называются *равномерными*. Охарактеризуем их в терминах факторпространств.

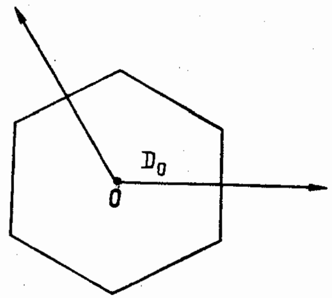

Рис. 1

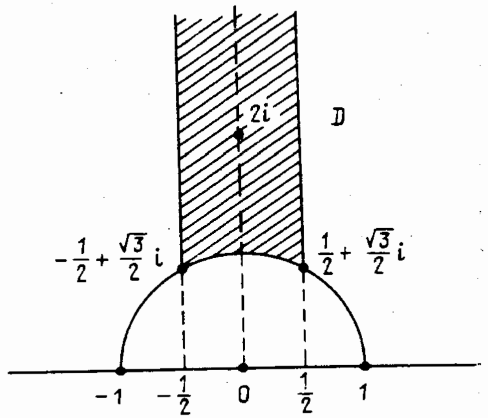

Рис. 2

Предложение 2.11. Дискретная группа Γ преобразований локально компактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда является равномерной, когда факторпространство X/Γ компактно.

Пусть теперь X — полное односвязное риманово многообразие, а Γ — равномерная группа его изометрий. Тогда, как следует из предложения 2.9, в группе Γ можно указать конечную систему образующих P, удовлетворяющую конечному числу определяющих соотношений. Иными словами, имеет место

Предложение 2.12. Равномерная группа изометрий полного односвязного риманова многообразия конечно представима.

Отметим также, что если X — полное связное риманово многообразие, Γ — равномерная группа его изометрий, то область Дирихле $D(x_0)$ компактна и выделяется конечным числом неравенств вида $\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, \gamma_i x_0)$. В односвязных пространствах постоянной кривизны это будет ограниченный выпуклый многогранник.

Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в статье «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны».

§ 3. Теоретико-групповые свойства решеток в группах Ли

3.1. Конечная представимость решеток.

Теорема 3.1. Всякая решетка Γ в связной группе Ли G конечно представима.

◀ Для равномерных решеток это можно объяснить, например, так: рассмотрим универсальную накрывающую $\tilde{G}$ группы G и накрывающий гомоморфизм $\pi: \tilde{G} \to G$. Очевидно, что подгруппа $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ дискретна в $\tilde{G}$. Снабдим группу $\tilde{G}$ левоинвариантной римановой метрикой и рассмотрим действие группы $\tilde{\Gamma}$ левыми сдвигами на получившемся односвязном полном римановом многообразии. Так как факторпространство $\tilde{X} = \tilde{G}/\tilde{\Gamma} \simeq G/\Gamma$ компактно, то согласно предложению 2.12 группа $\tilde{\Gamma}$ конечно представима.

Но ядро $\operatorname{Ker} \pi$ изоморфно фундаментальной группе связной группы Ли G и, согласно известному результату [134], конечно порождено. Отсюда следует конечная представимость группы $\Gamma \simeq \tilde{\Gamma}/\operatorname{Ker} \pi$. ▶

Конечная представимость неравномерных решеток доказывается значительно сложнее: сначала отдельно для связных полупростых групп Ли (причем и здесь приходится рассматривать различные случаи (см. гл. 3)), а затем на основании этого для групп Ли общего типа.

Единое доказательство, по-видимому, до сих пор (1988 г.) не придумано.

3.2. Теорема Сельберга и некоторые ее следствия.

Теорема 3.2 (Сельберг [127]). Если k — поле характеристики 0, то каждая конечно порожденная подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(k)$ содержит нормальную подгруппу конечного индекса без кручения.

Следствие 3.3. Если Γ — решетка в связной линейной

группе Ли G, то в Γ существует нормальная подгруппа конечного индекса без кручения.

В формулировке следствия условие линейности можно очевидным образом ослабить, потребовав лишь существование линейного представления $G \to \mathrm{GL}(V)$, ядро которого не содержит кручения. В такой формулировке уже все требования существенны, как показывает

Предложение 3.4 ([122]). Пусть $G = \mathrm{Spin}_{2,n}$, n нечетно, — спинорная группа квадратичной формы сигнатуры $(2, n)$ и G' — некоторое ее конечное накрытие, степень которого не делит число 8. Тогда любая решетка $\Gamma' \subset G'$ содержит элементы конечного порядка.

Выделим одно важное геометрическое следствие теоремы Сельберга (все необходимые для его доказательства рассуждения см. в § 2 сразу после предложения 2.4).

Следствие 3.5. Пусть G — связная линейная группа Ли, K — ее компактная подгруппа, Γ — конечно порожденная дискретная подгруппа группы G. Тогда в Γ существует нормальная подгруппа конечного индекса, свободно действующая на однородном пространстве G/K.

3.3. Свойство (T). Некоторые теоретико-групповые свойства дискретных подгрупп локально компактных топологических групп отражает так называемое свойство (T).

Введем, следуя [152], нужные понятия из теории представлений. Пусть $\pi: G \to \operatorname{Aut} H$ — унитарное представление локально компактной группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Для любого компакта $K \subset G$ и любого числа $\varepsilon > 0$ единичный вектор $v \in H$ называется (ε, K)-инвариантным, если $\|\pi(g)v - v\| < \varepsilon$ для всех $g \in K$. Говорят, что представление π содержит почти инвариантные векторы, если оно содержит (ε, K)-инвариантные векторы для любых ε и K.

Определение. Локально компактная группа G обладает *свойством* (T), если любое ее унитарное представление, содержащее почти инвариантные векторы, содержит нетривиальные G-инвариантные векторы.

Из этого определения легко следует, что если $\varphi: G_1 \to G_2$ — непрерывный эпиморфизм локально компактных топологических групп и группа G_1 обладает свойством (T), то им обладает также группа G_2.

Далее, заметим, что компактная группа G обладает свойством (T). ◀ Возьмем $0 < \varepsilon < 1/2$ и рассмотрим (ε, G)-инвариантный единичный вектор v. Усредняя его по группе G, получим инвариантный вектор $\bar{v}$, не равный нулю, поскольку $\|\bar{v} - v\| < \varepsilon < 1/2$. ▶

Группа G обладает свойством (T) одновременно с некоторыми своими замкнутыми подгруппами.

Теорема 3.6 ([18], [142]). Пусть G — локально компактная группа и Γ — такая ее замкнутая подгруппа, что на факторпространстве G/Γ существует инвариантная конечная мера. Группа G обладает свойством (T) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает группа Γ. В частности, свойством (T) обладает любая решетка Γ в группе G, обладающей свойством (T).

Локально компактная группа G называется *компактно порожденной,* если она порождается некоторым своим компактным подмножеством.

Теорема 3.7 ([18]). Если локально компактная группа G обладает свойством (T), то

а) группа G компактно порождена;

б) факторгруппа $G/(\overline{G,G})$ компактна (напомним, что черта означает замыкание в топологии группы G). В частности, группа G унимодулярна.

Так как для дискретной подгруппы компактная порожденность равносильна ее конечной порожденности, то из теорем 3.6 и 3.7 немедленно получается

Следствие 3.8. Любая решетка Γ в локально компактной группе G, обладающей свойством (T), конечно порождена, и факторгруппа $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ конечна.

Теорема 3.9 ([3], [18], [73], [142]). Связная полупростая группа Ли тогда и только тогда обладает свойством (T), когда среди ее простых множителей нет множителей, локально изоморфных группам $SO_{n,1}$ или $SU_{n,1}$.

Поэтому, если Γ — решетка в такой группе, то факторгруппа $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ конечна. Этот результат, при условии, что Γ не имеет кручения, на геометрическом языке означает тривиальность первого числа Бетти локально симметрического пространства X/Γ, где $X=G/K$, K — максимальная компактная подгруппа группы G. (В связи с этим см. п. 7.1 гл. 3.)

§ 4. Пересечение дискретных подгрупп с замкнутыми подгруппами

4.1. Г-замкнутость подгрупп. Это понятие удобно ввести для исследования взаимного расположения дискретных и замкнутых подгрупп локально компактной группы.

Определение. Пусть Γ — дискретная подгруппа локально компактной группы G. Подгруппа $H\subset G$ называется Γ-*замкнутой*, если множество $H\Gamma$ замкнуто в G.

Пример 4.1. Если $G=\mathbf{R}^2$, $\Gamma=\mathbf{Z}^2$, а в качестве H рассмотреть подгруппу векторов, лежащих на прямой с угловым коэффициентом k, то H будет Γ-замкнутой подгруппой тогда и только тогда, когда k рационально.

Для изучения свойства Γ-замкнутости удобно сначала рассмотреть более общую ситуацию. Пусть H_1 и H_2 — замкнутые

подгруппы в локально компактной группе G. Проекция $\pi_{H_1}: G\to G/H_1$ (соответственно $\pi_{H_2}: G\to G/H_2$) индуцирует инъективное непрерывное отображение $\varphi_1: H_2/H_2\cap H_1\to G/H_1$ (соответственно $\varphi_2: H_1/H_1\cap H_2\to G/H_2$). При этом по определению фактортопологии образ φ_1 (соответственно φ_2) замкнут тогда и только тогда, когда множество $H_1\cdot H_2$ замкнуто в G. Тем самым, замкнутость образа φ_1 равносильна замкнутости образа φ_2. Отметим, что если φ_1 — собственное отображение (т. е. полный прообраз компакта есть снова компакт), то образ φ_1 (а значит, и φ_2) замкнут [43].

Лемма 4.2 (Э. Б. Винберг). Если H_1 и H_2 — замкнутые подгруппы группы G, то следующие условия эквивалентны:

а) отображение φ_1 является собственным;

б) отображение φ_2 является собственным;

в) для любого компакта $K\subset G$ найдется такой компакт $K'\subset G$, что $H_2\cap KH_1\subset K'(H_1\cap H_2)$.

◀ Условия а) и в) эквивалентны по определению собственного отображения и фактортопологии. Условие в) симметрично относительно подгрупп H_1 и H_2. Поэтому утверждения б) и в) эквивалентны. ▶

Рассмотрим теперь интересующий нас частный случай, когда $H_1=\Gamma$ — дискретная, а $H_2=H$ — произвольная замкнутая подгруппа локально компактной группы G. Положим $\varphi_1=\varphi_\Gamma$ и $\varphi_2=\varphi_H$.

Теорема 4.3. Пусть Γ — дискретная, а H — замкнутая подгруппа группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) H является Γ-замкнутой подгруппой;

б) образ φ_H дискретен в G/H;

в) отображение φ_H (или φ_Γ) является собственным;

г) для любого компакта $K\subset G$ существует такое конечное число элементов $\gamma_1,\ldots,\gamma_s\in\Gamma$, что $\Gamma\cap KH=\bigcup_{i=1}^{s}\gamma_i(\Gamma\cap H)$.

◀ Условия в) и г) эквивалентны по лемме 4.2. Очевидно, что из б) следует г), а из в) — а). Таким образом, достаточно показать, что из а) следует б). Для этого заметим что, так как группа G обладает счетной базой, то ее дискретная подгруппа Γ счетна. Предположим теперь, что подгруппа H является Γ-замкнутой, т. е. множество $H\Gamma$ замкнуто в G. Тогда замкнуто и множество $\Gamma H(=(H\Gamma)^{-1})$; значит, счетное множество $\pi_H(\Gamma)$ замкнуто в G/H. Если $\pi_H(\Gamma)$ не дискретно, то оно совершенно (в силу Γ-однородности). Но совершенное локально компактное пространство не может быть счетным. Полученное противоречие показывает, что $\pi_H(\Gamma)$ дискретно в G/H. ▶

Воспользуемся теоремой 4.3 для доказательства следующей леммы.

Лемма 4.4 ([127]). Если Γ — дискретная подгруппа локально компактной группы G, $Z_G(\gamma)$ — централизатор элемента $\gamma \in \Gamma$ в группе G и $Z_\Gamma(\gamma) = Z_G(\gamma) \cap \Gamma$, то отображение φ: $Z_G(\gamma)/Z_\Gamma(\gamma) \to G/\Gamma$ является собственным.

В частности, если Γ — равномерная решетка в группе G, то $Z_\Gamma(\gamma)$ — равномерная решетка в $Z_G(\gamma)$.

◀ На основании теоремы 4.3 достаточно убедиться в Γ-замкнутости подгруппы $Z_G(\gamma)$. Пусть элемент $a \in G$ является предельной точкой множества $\Gamma Z_G(\gamma)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n z_n = a$ для некоторой последовательности элементов $\gamma_n \in \Gamma$, $z_n \in Z_G(\gamma)$. Рассмотрим последовательность $(\gamma_n z_n)\gamma(\gamma_n z_n)^{-1} = \gamma_n \gamma \gamma_n^{-1}$. С одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma_n z_n)\gamma(\gamma_n z_n)^{-1} = a\gamma a^{-1}$, а с другой — это последовательность элементов дискретной группы Γ. Поэтому, начиная с некоторого номера, последовательность стабилизируется, т. е. существует такой элемент $\gamma_0 \in \Gamma$, что $\gamma_0 \gamma \gamma_0^{-1} = a\gamma a^{-1}$. Это и значит, что $a \in \Gamma Z_G(\Gamma)$. ▶

4.2. Подгруппы с хорошей Γ-наследственностью. Пусть Γ — решетка (соответственно равномерная решетка) в локально компактной группе G и $H \subset G$ — замкнутая подгруппа. Если пересечение $\Gamma \cap H$ является решеткой (соответственно равномерной решеткой) в H, то подгруппу H естественно назвать *подгруппой с хорошей Γ-наследственностью*. Последнее свойство тесно связано со свойством Γ-замкнутости, как показывает

Теорема 4.5. Пусть Γ — дискретная, а H — замкнутая подгруппа локально компактной группы G. Тогда:

а) Если $\Gamma \cap H$ является решеткой в группе H, то подгруппа H является Γ-замкнутой.

б) Если Γ — равномерная решетка в G, то подгруппа $\Gamma \cap H$ тогда и только тогда является равномерной решеткой в H, когда подгруппа H является Γ-замкнутой.

◀ Для доказательства пункта *а*) мы покажем, что отображение $\varphi_\Gamma : H/\Gamma \cap H \to G/\Gamma$ является собственным. Отсюда следует, что образ φ_Γ замкнут в G/Γ, т. е. множество $H\Gamma$ замкнуто в G. Обозначим через π (соответственно π') естественное отображение $G \to G/\Gamma$ (соответственно $H \to H/\Gamma \cap H$).

Достаточно проверить, что для любой последовательности $\{h_n\} \in H$, образ $\{\pi'(h_n)\}$ которой дискретен в пространстве $H/\Gamma \cap H$, множество $\{\pi(h_n)\}$ дискретно в пространстве G/Γ. По условию, $\Gamma \cap H$ — решетка в H.

По теореме 1.7 дискретность множества $\{\pi'(h_n)\}$ равносильна существованию такой последовательности элементов $\gamma_n \in \Gamma \cap H$, $\gamma_n \neq e$, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_n \gamma_n h_n^{-1} = e$. Но отсюда следует дискретность множества $\pi(h_n)$ и в пространстве G/Γ (см. замечание после доказательства теоремы 1.7).

Для доказательства пункта б) заметим, что из Γ-замкнутости подгруппы H вытекает, согласно теореме 4.3, собственность

отображения $\varphi_\Gamma : H/\Gamma \cap H \to G/\Gamma$. А так как пространство G/Γ по условию компактно, то и пространство $H/\Gamma \cap H$ компактно. ▶

Для неравномерной решетки Γ условие Γ-замкнутости уже не является достаточным для того, чтобы $\Gamma \cap H$ была решеткой в H, как видно из такого примера:

Пример 4.6. Пусть $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, H — ее замкнутая подгруппа, состоящая из всех диагональных матриц, и $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ — решетка в G (см. п. 2.3 гл. 3).

Рассмотрим присоединенное представление группы G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Легко проверить, что стабилизатор элемента $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в присоединенном представлении совпадает с H. Отождествим факторпространство G/H с орбитой элемента X; при этом элементы из $\pi_H(\Gamma)$ представляются целочисленными матрицами (здесь $\pi_H : G \to G/H$ — проекция). Следовательно, подгруппа H является Γ-замкнутой. Но пересечение $H \cap \Gamma$ состоит из двух матриц E, $-E$ и, конечно, не является решеткой в группе H.

4.3. Факторгруппы с хорошей Γ-наследственностью.

Теорема 4.7. Пусть Γ — решетка (соответственно равномерная решетка) в локально компактной группе G, H — замкнутая нормальная подгруппа группы G, $\pi : G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Подгруппа $\pi(\Gamma)$ тогда и только тогда является решеткой (соответственно равномерной решеткой) в группе G/H, когда $\Gamma \cap H$ — решетка (соответственно равномерная решетка) в группе H.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые результаты об инвариантных мерах на однородных пространствах. Мы формулируем их в необходимой для дальнейших целей общности.

Предложение 4.8 ([21]). Пусть G — локально компактная группа, G_1 — ее замкнутая подгруппа. Предположим, что группы G и G_1 унимодулярны. Тогда на однородном пространстве G/G_1 существует инвариантная борелевская мера, единственная с точностью до постоянного множителя.

Предложение 4.9 ([120]). Пусть G — локально компактная группа, G_1 и G_2 — ее замкнутые подгруппы, причем $G_1 \subset G_2$. Предположим, что группы G, G_1 и G_2 унимодулярны. Объем $v(G/G_1)$ факторпространства G/G_1 (относительно инвариантной меры) конечен тогда и только тогда, когда конечны объемы $v(G/G_2)$ и $v(G_2/G_1)$.

Условия предложения 4.9 будут выполнены, если в качестве G_1 выбрать решетку Γ в локально компактной группе G, а в качестве G_2 — любую замкнутую подгруппу, содержащую Γ (см. предложение 1.3 п. 1.1 гл. 1).

◀ Переходим к доказательству теоремы 4.7. Если $\pi(\Gamma)$ — решетка в G/H, то, в частности, $\pi(\Gamma)$ — замкнутая подгруппа, т. е. подгруппа $H\Gamma$ замкнута в группе G. Применяя предложение 4.9 в случае, когда $G_1=\Gamma$, $G_2=H\Gamma$, получаем конечность объема факторпространства $H\Gamma/\Gamma=H/H\cap\Gamma$. Обратно, если $\Gamma\cap H$ — решетка в группе H, то подгруппа H необходимо Γ-замкнута (теорема 4.5), т. е. $H\Gamma$ — замкнутая подгруппа группы G и, следовательно, $\pi(\Gamma)$ — дискретная подгруппа группы G/H (теорема 4.3). Снова применяя предложение 4.9, получаем конечность объема факторпространства $G/H\Gamma=G/H/\pi(\Gamma)$. Пусть теперь $\pi(\Gamma)$ — равномерная решетка в группе G/H. В частности, подгруппа $\pi(\Gamma)$ дискретна, а потому группа H Γ-замкнута. Но тогда $\Gamma\cap H$ — равномерная решетка в группе H (теорема 4.5). Обратно, если $\Gamma\cap H$ — равномерная решетка в H, то подгруппа H Γ-замкнута. Следовательно, факторпространство $G/H\Gamma=G/H/\pi(\Gamma)$ компактно как образ компакта G/Γ при непрерывном отображении $G/\Gamma\to G/H\Gamma$.▶

Замечание. Попутно мы доказали, что если в условиях теоремы 4.7 группа $\pi(\Gamma)$ дискретна в группе G/H, то она является в ней решеткой.

Следствие 4.10. Если $\varphi: G\to G_1$ — непрерывный эпиморфизм локально компактных групп с компактным ядром и Γ — решетка в G, то $\varphi(\Gamma)$ — решетка в группе G_1.

В связи с этим стоит упомянуть и такой результат

Теорема 4.11 ([144]). Если $\varphi: G\to G_1$ — непрерывный эпиморфизм локально компактных групп и Γ — решетка в группе G, то на факторпространстве $G_1/\overline{\varphi(\Gamma)}$ есть конечная инвариантная мера.

§ 5. Пространство решеток локально компактной группы

5.1. Топология Шаботи. Пусть G — локально компактная топологическая группа со счетной базой. Множество всех дискретных подгрупп в группе G снабжается *топологией Шаботи*. По определению этой топологии, последовательность дискретных подгрупп $\{\Gamma_n\}$ сходится к подгруппе Γ, если для любой окрестности V элемента $e\in G$ и любого компакта $K\subset G$ существует такое натуральное $N(K, V)$, что для всех $n>N(K, V)$ имеем

$$\Gamma_n\cap K\subset(\Gamma\cap K)V \text{ и } \Gamma\cap K\subset(\Gamma_n\cap K)V.$$

Сходимость $\Gamma_n\to\Gamma$ в топологии Шаботи равносильна выполнению таких двух условий:

а) Из того, что некоторая последовательность элементов $\gamma_{n_k}\in\Gamma_{n_k}$ сходится в группе G к элементу γ, следует, что $\gamma\in\Gamma$.

б) Для любого элемента $\gamma\in\Gamma$ существует сходящаяся к нему последовательность элементов $\gamma_n\in\Gamma_n$.

Решетки образуют замкнутое подмножество в пространстве всех дискретных подгрупп, причем если последовательность решеток Γ_n имеет пределом решетку Γ, то

$$v(G/\Gamma)\leqslant\underline{\lim}\, v(G/\Gamma_n)$$

[120, гл. 1]. Обозначим через $\mathscr{L}(G)$ пространство всех решеток в группе G, снабженное топологией Шаботи.

5.2. Лемма Минковского. Рассмотрим пространство $\mathscr{L}=\mathscr{L}(V)$ всех решеток в n-мерном вещественном векторном пространстве V. Известно (см. п. 1.2 гл. 2), что решетка $L\in\mathscr{L}$ порождается базисом пространства V. Группа $\mathrm{GL}(V)$ линейных преобразований пространства V транзитивно действует на множестве всех базисов пространства V и, тем самым, транзитивно действует в пространстве $\mathscr{L}$. При этом стабилизатор

$$G_L=\{g\in\mathrm{GL}(V)\mid gL=L\}\simeq\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$$

является дискретной подгруппой группы $\mathrm{GL}(V)$, а естественное взаимно однозначное соответствие между пространствами $\mathrm{GL}(V)/G_L$ и $\mathscr{L}$ является гомеоморфизмом.

Фиксируем в пространстве V меру μ, инвариантную относительно сдвигов. Объем факторпространства V/L обозначим через $v(L)$ и назовем это число кообъемом решетки. Ясно, что функция $v(L)$ непрерывна на пространстве $\mathscr{L}$, и $v(gL)=|\det g|\,v(L)$ для любого $g\in\mathrm{GL}(V)$.

Лемма 5.1 (Минковский, см., например, [2], [77]). Пусть U — выпуклая центрально симметричная окрестность элемента $0\in V$. Если $L\cap U=\{0\}$, то $v(L)\geqslant\frac{1}{2^n}\mu(U)$.

◀ Предположим, что $v(L)<\frac{1}{2^n}\mu(U)$, и рассмотрим окрестность $\frac{1}{2}U$, обьем которой как раз и равен $\frac{1}{2^n}\mu(U)$. Ввиду нашего предположения, окрестность $\frac{1}{2}U$ не может взаимно однозначно проектироваться на факторпространство V/L т. е. существуют такие различные точки x и y из окрестности $\frac{1}{2}U$, что $x-y\in L$. С другой стороны, $x-y=\frac{1}{2}(2x+2(-y))\in U$ в силу выпуклости и центральной симметричности окрестности U. Получаем противоречие с условием теоремы.▶

5.3. Критерий Малера. Мы скажем, что *подмножество $\mathscr{M}\subset\mathscr{L}$ отделено от нуля*, если существует такая окрестность U точки $0\in V$, что $L\cap U=\{0\}$ для любой решетки $L\subset\mathscr{L}$.

Теорема 5.2 (Малер [91]). Для того чтобы подмножество $\mathscr{M}\subset\mathscr{L}$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы

а) функция $v(L)$ была ограничена на $\mathscr{M}$;

б) множество $\mathscr{M}$ было отделено от нуля.

Теорема 5.2 будет доказана в п. 2.2 гл. 3 с помощью теории приведения. Заметим только, что необходимость условий а) и б) очевидна.

Следствие 5.3. Для относительной компактности подмножества $\mathscr{M}\subset\mathscr{L}$, состоящего из решеток фиксированного кообъема, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделено от нуля.

Предложение 5.4. Пусть H — замкнутая подгруппа группы $\mathrm{GL}(V)$, L — решетка в V,

$$G_L=\{g\in\mathrm{GL}(V)\,|\,gL=L\},\quad H_L=H\cap G_L.$$

Тогда для компактности факторпространства H/H_L необходимо и достаточно, чтобы орбита HL решетки L была замкнута в $\mathscr{L}$ и отделена от нуля.

◀ Пусть факторпространство H/H_L компактно. Тогда инъективное отображение $\varphi_{G_L}:H/H_L\to G/G_L\simeq\mathscr{L}$ является гомеоморфизмом на свой образ. Следовательно, орбита HL компактна, а потому замкнута в пространстве $\mathscr{L}$. По теореме 5.2 она отделена от нуля.

Обратно, если орбита HL замкнута в пространстве $\mathscr{L}$, то множество HG_L замкнуто в группе G. По теореме 4.3 отображение φ_{G_L} является собственным. Поэтому достаточно показать, что орбита HL компактна в пространстве $\mathscr{L}$. Нам дано, что она отделена от нуля, т. е. ненулевые векторы всех решеток из множества HL не «задевают» некоторую окрестность нуля U, которую можно всегда выбрать выпуклой и центрально симметричной. Тогда по лемме 5.1 $v(hL)\geqslant\frac{1}{2^n}\mu(U)$ для всех $h\in H$, или $|\det h|\geqslant\frac{1}{2^n}\frac{\mu(U)}{v(L)}$ для всех $h\in H$. Отсюда следует, что $|\det h|\equiv1$, т. е. объемы всех решеток из орбиты HL одинаковы. По теореме 5.2 множество HL компактно в $\mathscr{L}$. ▶

Критерий Малера (теорема 5.2) непосредственно обобщается на случай произвольной локально компактной группы ([79]).

Теорема 5.5. Для относительной компактности множества $\mathscr{M}\subset\mathscr{L}(G)$ необходимо и достаточно, чтобы

а) существовала такая окрестность $U(e)$ единицы в группе G, что $\Gamma\cap U(e)=\{e\}$ для всех решеток $\Gamma\in\mathscr{M}$;

б) множество объемов $v(G/\Gamma)$, $\Gamma\in\mathscr{M}$, было ограничено сверху.

§ 6. Жесткость дискретных подгрупп групп Ли

6.1. Пространство гомоморфизмов и деформации. Пусть G — группа Ли, Γ — ее дискретная подгруппа. Рассмотрим пространство гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ и снабдим его топологией поточечной сходимости: последовательность гомоморфизмов $r_n:\Gamma\to G$ сходится к гомоморфизму $r:\Gamma\to G$, если для любого $\gamma\in\Gamma$ последовательность $r_n(\gamma)$ сходится к $r(\gamma)$ в группе G. Отметим, что для проверки сходимости $r_n\to r$ достаточно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(\gamma)=r(\gamma)$ для элементов γ из некоторого фиксированного множества образующих группы Γ.

В дальнейшем нас будет интересовать случай конечно представимой дискретной подгруппы $\Gamma\subset G$. Зафиксируем конечное множество образующих $S=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_s\}$ группы Γ, причем будем считать, что $S=S^{-1}$, и пусть образующие S подчиняются конечному числу определяющих соотношений $b_j(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)=e$, $j=1,\ldots,l$, где b_j — слова, состоящие из символов γ_i, $i=1,\ldots,s$. Естественное отображение

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)\to G^s,\quad r\mapsto(r(\gamma_1),\ldots,r(\gamma_s)),$$

является гомеоморфизмом на свой образ

$$\{(g_1,\ldots,g_s)\in G^s: b_j(g_1,\ldots,g_s)=e,\ j=1,\ldots,l\}.$$

Тем самым, пространство $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ отождествляется с замкнутым вещественно аналитическим подмножеством многообразия G^s. В частности, пространство $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ локально линейно связно.

Деформацией подгруппы Γ в группе G назовем любую гладкую кривую $r_t\in\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, где $r_0=\mathrm{id}:\Gamma\hookrightarrow G$ (здесь t меняется в открытом интервале, содержащем 0, а гладкость означает, что $r_t(\gamma)$ — гладкая кривая в группе G для любого $\gamma\in\Gamma$).

Деформацию назовем *тривиальной*, если в группе Ли G существует такая гладкая кривая g_t, $g(0)=e$, что $r_t(\gamma)=g_tr_0(\gamma)g_t^{-1}$ для всех допустимых t.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как устроено аналитическое пространство $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ в окрестности точки $r_0=\mathrm{id}:\Gamma\hookrightarrow G$. Обозначим через $\mathrm{Aut}\,G$ группу автоморфизмов группы Ли G и заметим, что группа $\mathrm{Aut}\,G$ естественно действует на пространстве $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$: если $\alpha\in\mathrm{Aut}\,G$, $r\in\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, то

$$(\alpha\circ r)(\gamma)=\alpha(r(\gamma)).$$

Определение. Дискретная подгруппа Γ группы Ли G называется *локально жесткой*, если орбита точки $r_0=\mathrm{id}:\Gamma\hookrightarrow G$ под действием группы $\mathrm{Aut}\,G$ открыта в пространстве $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

Отметим, что для локально жесткой подгруппы $\Gamma\subset G$ точка r_0 является неособой точкой аналитического пространства $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$. Ясно также, что если любая деформация подгруппы Γ в группе G тривиальна, то подгруппа Γ является локально жесткой.

6.2. Жесткость и когомологии. Напомним определение первой группы когомологий $H^1(G, V)$ группы G со значениями в линейном представлении $\rho: G\to GL(V)$ ([120]). Функция $a(g)$ на группе G со значениями в пространстве представления V называется одномерным коциклом, если

$$a(g_1g_2)=a(g_1)+\rho(g_1)a(g_2) \text{ при любых } g_1, g_2\in G.$$

Одномерные коциклы образуют группу по сложению, которую мы обозначим через $C^1(G, V)$. Коциклы вида

$$a_v(g)=v-\rho(g)v, \text{ где } v\in V,$$

называются кограницами. Группа $H^1(G, V)$ — это, по определению, факторгруппа группы коциклов по подгруппе кограниц. В дальнейшем нас будут интересовать группы когомологий $H^1(G,\mathfrak{g})$ и $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — касательная алгебра группы Ли G, а $\rho=\mathrm{Ad}$ (соответственно $\mathrm{Ad}\circ r_0$).

По каждой деформации r_t подгруппы Γ в группе G можно построить коцикл $a(\gamma)\in C^1(\Gamma,\mathfrak{g})$, положив $a(\gamma)=\left(\frac{d}{dt}r_t(\gamma)\right)\Big|_{t=0}\gamma^{-1}$.

При этом тривиальной деформации $g_t\gamma g_t^{-1}$ отвечает когомологичный нулю коцикл $a_X(\gamma)=X-(\mathrm{Ad}\,\gamma)X$, где $X=\frac{dg_t}{dt}\Big|_{t=0}\in\mathfrak{g}$.

Теорема 6.1 ([141]). Пусть G — группа Ли с конечным числом связных компонент и Γ — ее дискретная подгруппа. Тогда

а) если гомоморфизм ограничения $H^1(G,\mathfrak{g})\to H^1(\Gamma,\mathfrak{g})$ эпиморфен, то подгруппа Γ локально жесткая;

б) если $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})=0$, то любая деформация подгруппы Γ в группе G тривиальна.

Оба утверждения теоремы доказываются одинаково, и мы разберем доказательство пункта б), следуя А. Вейлю ([147]). Напомним, что в группе Γ зафиксировано множество образующих $S=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_s\}$ с определяющими соотношениями $b_j(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)=e$, $j=1,\ldots,l$. Рассмотрим отображение

$$F: G^s\to G^l,\ (g_1,\ldots,g_s)\mapsto(b_1(g_1,\ldots,g_s),\ldots,b_l(g_1,\ldots,g_s)).$$

Далее нам понадобятся две леммы.

Лемма 6.2. Пусть вектор $(X_1,\ldots,X_s)$ принадлежит касательному пространству $T_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)}$ многообразия G^s в его точке $p=(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$. Для того чтобы отображение $\gamma_i\mapsto a(\gamma_i)=X_i\gamma_i^{-1}$ можно было продолжить до коцикла $a\in C^1(\Gamma,\mathfrak{g})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$dF_j(X_1,\ldots,X_s)=0,\ j=1,\ldots,l.$$

Лемма 6.3. Пусть U, V и W — гладкие многообразия, и $F: V\to W$, $f: U\to V$ — такие морфизмы, что $F\circ f$ — постоянное отображение в точку $c\in W$. Допустим, что для точки $a\in U$ последовательность

$$T_a(U)\xrightarrow{d_af}T_{f(a)=p}(V)\xrightarrow{d_pF}T_c(W)$$

точна. Тогда образ $f(U)$ многообразия U в V содержит неособую окрестность точки $p=f(a)$ в пространстве $F^{-1}(c)$.

◀Для доказательства теоремы положим $U=G$, $V=G^s$, $W=G^l$, $a=e\in G$ и определим морфизм $f: G\to G^s$, полагая $f(g)=(g\gamma_1g^{-1},\ldots,g\gamma_sg^{-1})$, а в качестве F возьмем определенное выше отображение $F: G^s\to G^l$. Ясно, что $F^{-1}(c)=\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, и мы получим утверждение о тривиальности деформации подгруппы Γ в группе G, если проверим выполнение условия $df_e(T_e(U))=\mathrm{Ker}\,d_pF$. Но, если вектор $(X_1,\ldots,X_s)\in T_p(V)$ принадлежит $\mathrm{Ker}\,d_pF$, то согласно лемме 6.2 отображение $\gamma_i\mapsto X_i\gamma_i^{-1}$ задает на образующих группы коцикл $a_i\in C^1(\Gamma,\mathfrak{g})$.

По условию, все коциклы тривиальны. Это значит, что существует такой вектор $X\in\mathfrak{g}$, что $X_i\gamma_i^{-1}=X-(\mathrm{Ad}\,\gamma_i)X$ для всех $i=1,\ldots,s$. Так как касательное пространство $T_e(U)$ отождествляется с $\mathfrak{g}$, то последнее условие в точности означает, что $d_ef(X)=(X_1,\ldots,X_s)$. Таким образом, в нашем случае $d_ef(T_e(U))\supset\mathrm{Ker}\,d_pF$. Поскольку обратное включение очевидно, то $d_ef(T_e(U))=\mathrm{Ker}\,d_pF$, и теорема доказана.▶

6.3. Деформации равномерных подгрупп. Если $\Gamma\subset G$ — равномерная решетка, то естественно рассмотреть множество $R(\Gamma, G)\subset\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, состоящее из всех таких гомоморфизмов r, что 1) r — инъективен, 2) $r(\Gamma)$ — равномерная решетка в группе G.

Теорема 6.4 ([146]). Пространство $R(\Gamma, G)$ является открытым подмножеством в $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

◀Скажем несколько слов об идее геометрического доказательства этой теоремы. Так как Γ является равномерной дискретной подгруппой, то можно рассмотреть компактное Γ-покрывающее множество F (см. п. 2.2) и связанное с ним каноническое задание группы Γ образующими $P=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma F\cap F\neq\varnothing\}$ и определяющими соотношениями, в качестве которых берутся все соотношения вида $\gamma_1\gamma_2=\gamma$, где γ_1, γ_2, $\gamma\in P$. Такая система соотношений однозначно определяется нервом локально конечного покрытия $G=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F$ и, наоборот, однозначно этот нерв определяет. А. Вейль показал, что для произвольной достаточно малой деформации образующих группы $\Gamma:\gamma\mapsto\gamma'$, $\gamma\in P$, $\gamma'\in G$, в группе G, можно указать такой компакт $F'\subset G$, содержащий F, который является Γ'-покрывающим множеством подгруппы Γ', порожденной элементами γ'. При этом нервы покрытий $G=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F$ и $G=\bigcup_{\gamma\in\Gamma'}\gamma F'$ совпадают. Последнее в точности означает, что если $\gamma_1\gamma_2=\gamma$, где γ_1, γ_2, $\gamma\in P$, то и

$\gamma_1'\gamma_2'=\gamma'$, и наоборот. Следовательно, гомоморфизм $\Gamma\to\Gamma'$, продолжающий отображение образующих $\gamma\to\gamma'$, является изоморфизмом. ▶

В заключение этого параграфа приведем одно неожиданное следствие жесткости.

Предложение 6.5 ([127]). Пусть $G\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ — алгебраическая группа, определенная над полем $k\subset\mathbf{R}$. Если Γ — конечно порожденная дискретная подгруппа группы G и $H^1(\Gamma,\mathfrak{g})=0$, то найдется такой элемент $g\in G$, что $g\Gamma g^{-1}\subset \mathrm{GL}_n(k')$, где k' — некоторое конечное расширение поля k.

◀ Для доказательства заметим, что пространство $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ является в нашем случае аффинным алгебраическим многообразием, определенным над полем k. Рассмотрим ту неприводимую над $\mathbf{R}$ компоненту многообразия $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, которая содержит точку r_0. Это — аффинное алгебраическое многообразие, определенное над некоторым конечным расширением $\tilde{k}\subset\mathbf{R}$ поля k. Воспользуемся теперь известным в алгебраической геометрии фактом: если A — неприводимое над $\mathbf{R}$ аффинное алгебраическое многообразие, определенное над полем $l\subset\mathbf{R}$, и $\bar{l}$ — алгебраическое замыкание l в $\mathbf{R}$, то множество $\bar{l}$-точек многообразия A плотно в A в вещественной топологии. Выберем теперь окрестность точки $r_0\in\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, $r_0:\Gamma\hookrightarrow G$, в пределах которой все деформации группы Γ тривиальны. В этой окрестности найдется k'-точка r многообразия $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ для некоторого конечного расширения $k'\subset\mathbf{R}$ поля k. По условию, $r=g r_0 g^{-1}$ для некоторого $g\in G$. Но это и означает, что $g\Gamma g^{-1}\in \mathrm{GL}_n(k')$. ▶

§ 7. Арифметические подгруппы групп Ли

7.1. Определение арифметической подгруппы. Напомним, что алгебраической матричной группой называется подгруппа $G\subset GL_n(K)$, являющаяся алгебраическим подмножеством в линейном пространстве $M_n(K)$ всех матриц с коэффициентами из поля K, т. е. множеством нулей идеала полиномиальных функций с коэффициентами из K. Говорят, что G определена над полем $k\subset K$ (является k-группой), если в этом идеале можно в качестве образующих выбрать полиномы с коэффициентами из поля k. Для любого поля K', $k\subset K'\subset K$, положим $G(K')=G\cap \mathrm{GL}_n(K')$.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K. Подгруппа $G\subset \mathrm{GL}(V)$ называется алгебраической, если при выборе базиса в V группа G отождествляется с алгебраической матричной группой. Если при этом $V=V_k\otimes K$ (для некоторого векторного пространства V_k над полем $k\subset K$), и в базисе из V_k рассматриваемая матричная группа определена над k, то говорят, что группа G определена над k (является алгебраической k-группой). Аналогично можно определить и множество K'-точек $G(K')$ алгебраической группы G для любого числового поля $k\subset K'\subset K$.

В дальнейшем нам чаще всего придется иметь дело со случаем $K=\mathbf{R}$. Поэтому всюду, где не оговорено противное, речь будет идти о вещественных алгебраических группах (см. введение).

Важные (а во многих случаях — единственные) примеры решеток в группах Ли доставляют арифметические подгруппы.

Пусть V — вещественное векторное пространство, $G\subset \mathrm{GL}(V)$ — алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа и L — решетка в пространстве $V_{\mathbf{Q}}$. Положим

$$G_L=\{g\in G\mid g(L)=L\}\ (\subset G(\mathbf{Q})).$$

Для любых двух решеток $L_1, L_2\subset V_{\mathbf{Q}}$ группы G_{L_1} и G_{L_2} соизмеримы.

Определение. Подгруппа $\Gamma\subset G$ называется *арифметической,* если $\Gamma\sim G_L$ (напомним, что $\sim$ означает соизмеримость). В дальнейшем мы будем писать $\Gamma=G(\mathbf{Z})$, хотя нужно помнить, что фактически $G(\mathbf{Z})$ обозначает класс соизмеримых подгрупп группы G.

Отметим, что если Γ — арифметическая подгруппа в $\mathbf{Q}$-группе G, и $\rho: G\to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ — точное линейное представление, определенное над $\mathbf{Q}$, то $\rho(\Gamma)$ — арифметическая подгруппа в $\rho(G)$.

Пример. 7.1. Если $G\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ — матричная группа, определенная над полем $\mathbf{Q}$, то $G(\mathbf{Z})=G\cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ является ее арифметической подгруппой. В частности, пусть f — квадратичная форма с рациональными коэффициентами, $G=\mathrm{O}(f)$ — группа автоморфизмов формы f. Тогда подгруппа целочисленных автоморфизмов $\mathrm{O}(f,\mathbf{Z})$ является арифметической подгруппой группы G.

Перечислим некоторые простейшие свойства арифметических подгрупп алгебраических $\mathbf{Q}$-групп. Прежде всего, ясно, что арифметическая подгруппа Γ является дискретной подгруппой группы Ли G. Далее, имеем

Предложение 7.2. 1) Если Γ — арифметическая подгруппа $\mathbf{Q}$-группы G, то каждая решетка $L'\subset V_{\mathbf{Q}}$ содержится в решетке L'', инвариантной относительно Γ.

2) Если G и G' — две $\mathbf{Q}$-группы, $\varphi: G\to G'$ — гомоморфизм, определенный над $\mathbf{Q}$, и $\Gamma\subset G$, $\Gamma'\subset G'$ — арифметические подгруппы, то

а) существует арифметическая подгруппа группы G', содержащаяся в $\varphi^{-1}(\Gamma')$;

б) существует арифметическая подгруппа группы G, содержащаяся в $\varphi^{-1}(\Gamma')$;

3) Если $G=H\ltimes N$ — полупрямое произведение подгруппы H и нормальной подгруппы N, определенных над $\mathbf{Q}$, то для любых

арифметических подгрупп $\Gamma' \subset H$ и $\Gamma'' \subset N$, подгруппа $\Gamma' \rtimes \Gamma''$ является арифметической в группе G.

◀ Докажем 1). Так как для любых двух решеток L и L' из $V_{\mathbf{Q}}$ группы G_L и $G_{L'}$ соизмеримы, то по определению арифметическая подгруппа Γ соизмерима с группой $G_{L'}$. Тогда сумма конечного числа решеток $L'' = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma \cap G_{L'}} \gamma L'$ является решеткой, инвариантной относительно группы Γ. При доказательстве 2а) можно считать, что φ — гомоморфизм матричной $\mathbf{Q}$-группы G в матричную $\mathbf{Q}$-группу G', который задается конечным числом полиномов с рациональными коэффициентами от матричных элементов группы G, а $\Gamma = G \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Тогда знаменатели матричных элементов у матриц из $\varphi(\Gamma) \subset \mathrm{GL}_{n'}(\mathbf{R})$ ограничены. Следовательно, группа $\varphi(\Gamma)$ сохраняет решетку $L = m\mathbf{Z}^{n'}$, где m равно, например, наименьшему общему кратному знаменателей всех матричных элементов. В качестве арифметической подгруппы, содержащей $\varphi(\Gamma)$, выберем подгруппу G'_L. Аналогично доказывается и 2б). ▶

7.2. Когда арифметические подгруппы являются решетками (равномерными решетками)? Ответы на эти вопросы являются одними из важнейших результатов в теории арифметических подгрупп алгебраических групп. Вначале рассмотрим несколько примеров.

Примеры 7.3. а) Пусть $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. В § 6 факторпространство $G/G(\mathbf{Z})$ интерпретировалось как пространство $\mathscr{L}_0$ решеток единичного объема в $\mathbf{R}^n$. Введем в $\mathbf{R}^n$ стандартную евклидову метрику и для каждой решетки L определим число

$$f(L) = \min_{x \in L \setminus \{0\}} \|x\|.$$

Функция $f(L)$ непрерывна на пространстве $\mathscr{L}_0$, но не принимает наименьшего значения. Следовательно, факторпространство $G/G(\mathbf{Z})$ некомпактно. Однако его объем конечен (Минковский [98]). Обсуждение этого результата мы отложим до главы 3.

б) С другой стороны, если $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, то $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^*$, поэтому факторпространство $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ имеет бесконечный объем.

Заметим, что в примере б) у группы G есть нетривиальный характер $\det: \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$, определенный над $\mathbf{Q}$. Следующая лемма показывает, что это не случайное обстоятельство.

Лемма 7.4. Если у алгебраической $\mathbf{Q}$-группы G есть нетривиальный характер $\chi: G \to \mathbf{R}^*$, определенный над $\mathbf{Q}$, то $v(G/G(\mathbf{Z})) = \infty$.

◀Переходя к подгруппе конечного индекса, что никак не отражается на утверждении леммы, можно считать, что $\chi(G(\mathbf{Z})) \subset \mathbf{Z}$.

Но тогда $\chi(G(\mathbf{Z})) = \pm 1$, и если бы объем факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ был конечен, то, согласно предположению 4.11, был бы конечен и объем пространства $\mathbf{R}^*/\{\pm 1\}$, что неверно.▶

Пример 7.5. Пусть $G = \mathrm{O}(f_n)$ — ортогональная группа невырожденной рациональной квадратичниой формы f_n в n-мерном векторном пространстве V над полем рациональных чисел и $\Gamma = \mathrm{O}(f_n, \mathbf{Z})$ — ее арифметическая подгруппа, например, группа автоморфизмов формы f_n, сохраняющих некоторую решетку в $V_{\mathbf{Q}}$. Классический результат (см., например, Б. А. Венков [6]) состоит в том, что

а) объем факторпространства $\mathrm{O}(f_n)/\mathrm{O}(f_n, \mathbf{Z})$ конечен, если у группы $\mathrm{O}(f_n)$ нет нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$;

б) при этом факторпространство $\mathrm{O}(f_n)/\mathrm{O}(f_n, \mathbf{Z})$ компактно тогда и только тогда, когда форма f_n не представляет нуля над $\mathbf{Q}$, т. е. в $V_{\mathbf{Q}}$ не содержится ни одного ненулевого изотропного вектора.

Заметим, что условие а) всегда выполнено, если $n \geqslant 3$, т. к. в этом случае группа $G = \mathrm{O}(f_n)$ полупроста. Условие б) эквивалентно тому, что группа $G(\mathbf{Q}) = \mathrm{O}(f_n, \mathbf{Q})$ не содержит унипотентных элементов. В то же время, так как любой элемент $g \in G(\mathbf{Q})$ однозначно записывается в виде произведения $g = g_s g_u$, где элемент $g_s \in G(\mathbf{Q})$ полупрост, элемент $g_u \in G(\mathbf{Q})$ унипотентен и $g_s g_u = g_u g_s$ (разложение Жордана), то условие б) равносильно тому, что группа $\mathrm{O}(f_n, \mathbf{Q})$ состоит только из полупростых элементов.

Пример 7.6. Пусть A — алгебра с делением над $\mathbf{Q}$. Обозначим через G группу обратимых элементов алгебры $A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Это алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа. У группы $G(\mathbf{Q})$ могут быть нетривиальные характеры, определенные над $\mathbf{Q}$. Чтобы от них избавиться, рассмотрим нормальную подгруппу $G_1 \subset G$, состоящую из элементов с приведенной нормой, равной 1 (алгебра $A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ является полной матричной алгеброй, и при изоморфизме $A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \simeq M_n(\mathbf{C})$ элементам подгруппы G_1 отвечают вещественные матрицы с определителем 1). Если L — произвольная решетка в пространстве A, то через $G_1(\mathbf{Z})$ обозначим арифметическую подгруппу, состоящую из элементов группы $G_1(\mathbf{Q})$, сохраняющих решетку L. Тогда факторпространство $G_1/G_1(\mathbf{Z})$ компактно ([67]). Подчеркнем, что так как A — алгебра с делением, то в группе $G(\mathbf{Q})$ (и, тем более, в $G_1(\mathbf{Q})$) нет нетривиальных унипотентных элементов. Если A — это алгебраическое расширение конечной степени поля $\mathbf{Q}$, то результат о компактности соответствующего факторпространства эквивалентен теореме Дирихле об единицах (см., например, [2]).

Пример 7.7. Если U — унипотентная алгебраическая группа, определенная над $\mathbf{Q}$, $U(\mathbf{Z})$ — ее арифметическая подгруппа, то факторпространство $U/U(\mathbf{Z})$ компактно (см. п. 2.2 гл. 2).

7.3. Теорема Бореля—Хариш-Чандры и теорема Годемана. Рассмотренные выше классические примеры являются частными случаями двух фундаментальных теорем, дающих исчерпывающие ответы на поставленные в начале п. 7.2 вопросы.

Теорема 7.8 (Борель, Хариш-Чандра [71]). Пусть G — неприводимая алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа. Если группа G не имеет нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$, то объем факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ конечен.

Иначе говоря, арифметическая подгруппа $G(\mathbf{Z})$ в условиях теоремы является решеткой в группе Ли G.

Вопрос о компактности факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ решается на основании следующей теоремы.

Теорема 7.9 (Годеман [85], [113]). Пусть G — неприводимая алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа. Для компактности факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ необходимо и достаточно, чтобы

а) группа G не имела нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$;

б) каждый унипотентный элемент группы $G(\mathbf{Q})$ лежал в ее унипотентном радикале.

◀ Теорему 7.8 достаточно доказать отдельно для унипотентных и редуктивных групп. В самом деле, для произвольной алгебраической $\mathbf{Q}$-группы G существует разложение $G=P\ltimes U$, определенное над $\mathbf{Q}$ (в котором P — редуктивная подгруппа, а U — унипотентный радикал).

В силу предложения 7.2 можно считать, что $G(\mathbf{Z})=P(\mathbf{Z})\ltimes U(\mathbf{Z})$. Заметим теперь, что группа Ли G унимодулярна. В самом деле, правоинвариантную меру на ней можно задать с помощью рациональной дифференциальной формы старшей степени на ее касательной алгебре $\mathfrak{g}$ (так как G — алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа, то в $\mathfrak{g}$ индуцируется $\mathbf{Q}$-структура). Эта форма автоматически правоинвариантна, так как группа G не имеет нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$. Если объем факторпространства $U/U(\mathbf{Z})$ конечен, то подгруппа $G(\mathbf{Z})U$ замкнута в группе G (теорема 4.5 а)) и унимодулярна (предложение 1.3). Поэтому, на основании предложения 4.9, объем факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ конечен тогда и только тогда, когда конечны объемы факторпространств

$$G/G(\mathbf{Z})U\simeq P/P(\mathbf{Z}) \text{ и } G(\mathbf{Z})U/G(\mathbf{Z})\simeq U/U(\mathbf{Z}).$$

Отсюда следует утверждение о редукции.

Ввиду результата А. И. Мальцева (см. пример 7.7 и п. 2.2 гл. 2) теорему Бореля — Хариш-Чандры достаточно доказать для редуктивных групп. Для редуктивной $\mathbf{Q}$-группы G имеет место разложение в почти прямое произведение $G=S\tilde{\times}T$, где S — полупростая $\mathbf{Q}$-группа, а T — алгебраический $\mathbf{Q}$-тор (группа $S\cap T$ конечна), и рассуждения, аналогичные проведенным выше, дают редукцию теоремы к полупростым группам и торам. Для торов теорема будет доказана в главе 3 (сделать это сравнительно просто). Любое известное на сегодняшний день доказательство теоремы 7.8 для полупростых $\mathbf{Q}$-групп является очень сложным. В главе 3 мы докажем эту теорему для группы $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ и наметим ее доказательство в общем случае.

Доказательство теоремы 7.9 значительно проще и не опирается на теорему Бореля — Хариш-Чандры. Как и в случае последней, всё сводится к доказательству аналогичного утверждения для тора, полупростой и унипотентной группы. Так как для унипотентных $\mathbf{Q}$-групп компактность факторпространства известна (теорема А. И. Мальцева), то остаются случаи полупростой группы и тора. Они будут разобраны в § 3 гл. 3. ▶

Отметим одно важное следствие теоремы Бореля — Хариш-Чандры.

Теорема 7.10. Если $\varphi: G\to G'$ — эпиморфизм алгебраических $\mathbf{Q}$-групп, определенный над $\mathbf{Q}$, и группа G не имеет нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$, то $\varphi(G(\mathbf{Z}))\sim G'(\mathbf{Z})$.

◀ Согласно предложению 7.2 группа $\varphi(G(\mathbf{Z}))$ содержится в некоторой арифметической подгруппе $G'(\mathbf{Z})$ группы G'. Так как объем факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ конечен (теорема 7.8), то конечен и объем факторпространства $G/\varphi(G(\mathbf{Z}))$ (теорема 4.11). Следовательно, индекс $[G'(\mathbf{Z}):\varphi(G(\mathbf{Z}))]$ конечен. ▶

7.4. Определение арифметической подгруппы группы Ли. Пусть G — группа Ли с конечным числом связных компонент, G^0 — ее связная компонента единицы.

Определение. Подгруппа $\Gamma\subset G$ называется *арифметической*, если существуют такая алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа H, не имеющая нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$, и и такой эпиморфизм $\varphi\tilde{H}^0\to G^0$ (где $\pi:\tilde{H}^0\to H^0$ — универсальное накрытие), что

а) $\varphi(\pi^{-1}(H^0(\mathbf{Z})))\sim\Gamma$,

б) $\operatorname{Ker}\varphi$ компактно.

Замечание. Запас арифметических групп не изменится, если вместо универсального накрытия использовать все накрытия группы H^0.

Покажем, что арифметическая подгруппа Γ является решеткой в группе Ли G.

◀С этой целью рассмотрим некоторые элементарные преобразования пар (G,Γ), где G — группа Ли с конечным числом связных компонент, а Γ — решетка (равномерная решетка) в ней, приводящие к паре такого же вида. Эти преобразования таковы:

$\alpha_1: (G, \Gamma) \to (G, \Gamma_1)$, где $\Gamma \sim \Gamma_1$, — переход к соизмеримой подгруппе;

$\alpha_2: (G, \Gamma) \to (G^0, G^0 \cap \Gamma)$ — переход к связной компоненте единицы, и «обратное» преобразование α_2^{-1}: $(G^0, \Gamma) \to (G, \Gamma)$;

$\alpha_3: (G, \Gamma) \to (G/K, \Gamma/\Gamma \cap K)$ — переход к факторгруппе по компактной нормальной подгруппе $K \subset G$;

$\alpha_4: (G, \Gamma) \to (\widetilde{G}, \pi^{-1}(\Gamma))$, где $\pi: \widetilde{G} \to G$ — универсальное накрытие связной группы Ли G.

Ввиду теоремы 4.7 элементарное преобразование α_3 переводит пару (G, Γ) в пару такого же вида. Для остальных преобразований это очевидно.

Далее заметим, что по определению арифметической подгруппы пары $(H, H(\mathbf{Z}))$ и (G, Γ) связаны следующей цепочкой элементарных преобразований

$$(H, H(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\alpha_2} (H^0, H^0(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\alpha_4} (\widetilde{H}^0, \pi^{-1}(H^0(\mathbf{Z}))) \xrightarrow{\alpha_3}$$

$$\xrightarrow{\alpha_3} (G^0, \varphi(\pi^{-1}(H^0(\mathbf{Z})))) \xrightarrow{\alpha_2^{-1}} (G, \varphi(\pi^{-1}(H^0(\mathbf{Z})))) \xrightarrow{\alpha_1} (G, \Gamma).$$

По теореме 7.8 $H(\mathbf{Z})$ — решетка в группе Ли H. Следовательно, арифметическая подгруппа Γ является решеткой в группе Ли G. ▶

Отметим, что если группа Ли G полупроста, то алгебраическую группу H можно выбрать полупростой.

Арифметичность решеток в разрешимых группах Ли обсуждается в п. 3.10 гл. 2, а в полупростых — в § 6 гл. 3.

§ 8. Теорема плотности Бореля

8.1. Свойство (S). Если x — вектор из $\mathbf{R}^2$, то, либо $Nx \in \mathbf{Z}^2$ для некоторого натурального N, либо среди векторов Nx встречаются сколь угодно близкие к точкам целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$. Этот факт свидетельствует о плотном расположении решетки $\mathbf{Z}^2$ в $\mathbf{R}^2$. Он легко обобщается на решетки в произвольных локально компактных группах. Предварительно введем такое понятие:

Говорят, что замкнутая подгруппа Γ локально компактной группы G обладает *свойством* (S), если для любой окрестности U единицы в группе G и любого элемента $g \in G$ существует такое натуральное N, что $g^N \in U\Gamma U$.

Лемма 8.1 (Сельберг [127]). Пусть Γ — такая замкнутая подгруппа локально компактной группы G, что на факторпространстве G/Γ есть конечная G-инвариантная мера (например, Γ — решетка в G). Тогда подгруппа Γ обладает свойством (S).

◀ Можно считать, что окрестность единицы в определении свойства (S) такова, что $U^{-1} = U$. Пусть $\pi: G \to G/\Gamma$ — каноническая проекция. Мера открытого множества $\pi(U)$ на фактор пространстве G/Γ конечна и положительна. В силу G-инвариантности меры все множества $g^n\pi(U)$ на G/Γ имеют ту же меру. Но так как мера факторпространства G/Γ конечна, то среди них найдутся два пересекающихся: $g^{n_1}\pi(U) \cap g^{n_2}\pi(U) \neq \varnothing$, $n_1 > n_2$. Это означает, что $g^{n_1 - n_2} \in U\Gamma U$. ▶

Лемма 8.1 играет решающую роль при доказательстве основной теоремы этого параграфа.

Теорема 8.2 (Борель [64]). Пусть G — вещественная алгебраическая группа, Γ — решетка в группе G. Тогда замыкание ${}^a\Gamma$ подгруппы Γ в топологии Зарисского группы G содержит такую нормальную алгебраическую подгруппу G' группы G, что факторгруппа G/G' компактна.

В частности, если группа Ли G полупроста и не содержит компактных множителей, то ${}^a\Gamma = G$ для любой решетки $\Gamma \subset G$.

В следующем пункте изложено доказательство этой теоремы, принадлежащее Э. Б. Винбергу.

8.2. Доказательство теоремы плотности. Нам понадобится одна лемма.

Лемма 8.3. Пусть G — унипотентная (вещественная) алгебраическая группа и H — собственная алгебраическая подгруппа группы G. Тогда объем факторпространства G/H бесконечен.

◀ Существует такая алгебраическая подгруппа $H_1 \subset G$, что H — нормальная подгруппа в H_1 и $\dim H_1/H = 1$, т. е. $H_1/H \simeq \mathbf{R}$, [74]. Так как объем H_1/H бесконечен, то из теоремы 4.9 следует бесконечность объема факторпространства G/H. ▶

◀ Приступим к доказательству теоремы. Положим $H = {}^a\Gamma$. Если $H = G$, то доказывать нечего. В противном случае, H — собственная алгебраическая подгруппа группы G. Покажем, прежде всего, что $H \supset U$, где U — унипотентный радикал группы G. В самом деле, подгруппа HU замкнута в топологии Зарисского группы G, а потому и в вещественной топологии. Так как объем факторпространства G/Γ конечен, то и объем $v(G/H)$ конечен. Применяя предложение 4.9 к цепочке подгрупп $H \subset HU \subset G$, получаем, что объем пространства $U/H \cap U$ конечен, и, согласно лемме 8.3, $H \supset U$.

Далее, если H — собственная алгебраическая подгруппа группы G, то, как известно ([68]), существуют такое точное рациональное представление $\varphi: G \to GL(V)$, определенное над $\mathbf{R}$, и такой вектор $v_0 \in V$, что $H = \{g \in G \mid \bar{\varphi}(g)[v_0] = [v_0]\}$ (здесь $v \to [v]$ — естественное отображение вещественного векторного пространства V в проективное пространство PV, а $\bar{\varphi}$ — проективное представление, соответствующее φ). Покажем, что если элемент $g \in G$ полупрост и у матрицы $\varphi(g)$ собственные значения положительны, то $g \in H$. Для этого рассмотрим действие циклической группы $\langle \bar\varphi(g) \rangle$ в проективном пространстве PV. Эта ситуация рассматривалась нами в примере 2.5. Из полученного там результата следует, что если $g \notin H$ (т. е. вектор v_0 не является собственным для преобразования $\varphi(g)$), то существует такая окрестность W точки $[v_0]$, что $\bar\varphi(g^n) W \cap W = \varnothing$ для всех $n \neq 0$. Можно так выбрать симметричную окрестность U точки $e \in G$, что $\bar\varphi(U)[v_0] \subset W$. По лемме 8.1 существуют такие $n \in \mathbf{N}$, ω_1, $\omega_2 \in U$, что $\omega_1 g^n \omega_2 \in \Gamma$. Но тогда $\bar\varphi(\omega_1)\bar\varphi(g^n)\bar\varphi(\omega_2)[v_0] = [v_0]$. Следовательно, $\bar\varphi(g^n) W \cap W \neq \varnothing$, что противоречит выбору окрестности $\cap W$.

Итак, мы показали, что $H \supset G_+U$, где G_+ — замыкание в топологии Зарисского подгруппы, порожденной всеми полупростыми элементами $g \in G$, для которых $\varphi(g)$ имеет положительные собственные значения.

Ясно, что G_+ — нормальная подгруппа в G и, если $\pi: G \to G/G_+U$ — проекция, то алгебраическая группа $\pi(G)$ редуктивна и не содержит полупростых элементов с положительными собственными значениями (последнее — на основании того, что свойство «элемент $g \in G$ полупрост с вещественными собственными значениями» является внутренним, т. е. не зависит от вещественного представления, в котором данная группа G рассматривается). Следовательно, группа $\pi(G)$ компактна и в качестве группы G' в теореме 8.2 можно взять $G' = G_+U$. ▶

Заметим, что в приведенном доказательстве используется только тот факт, что решетка Γ обладает свойством (S), поэтому оно дословно проходит и в случае, когда Γ — такая замкнутая подгруппа, что на факторпространстве G/Γ существует конечная инвариантная мера.

Глава 2

РЕШЕТКИ В РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

§ 1. Дискретные подгруппы в абелевых группах Ли

1.1. Исторические замечания. Абелевы группы Ли являются простейшими из групп Ли. Изучение решеток в группах Ли началось именно с изучения дискретных подгрупп в абелевых группах Ли. Так, уже Гаусс показал, насколько удобно использовать соображения, основанные на изучении решеток в $\mathbf{R}^2$, при изучении квадратичных форм от двух переменных. В дальнейшем такие соображения развились в область математики, называемую геометрией чисел (см., например, [77]). С другой стороны, решетки в $\mathbf{C}$ естественно возникли как «решетки периодов» в работах Якоби по изучению двоякопериодических

мероморфных функций (см., например, [31]). Описание решеток в $\mathbf{R}^3$ сыграло существенную роль в кристаллографии (см., например, [17], [22]).

1.2. Строение дискретных подгрупп в односвязных абелевых группах Ли. Пусть A — односвязная абелева группа Ли. Тогда A изоморфна $\mathbf{R}^n$, где $n = \dim A$. Если $e_1, \ldots e_l$ — линейно независимая система векторов в $\mathbf{R}^n$, то $\Gamma = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_l$ будет дискретной подгруппой в $A \simeq \mathbf{R}^n$. Верно и обратное.

Теорема 1.1 ([74], [77]). Всякая дискретная подгруппа $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ имеет вид $\Gamma = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_l$, где $\{e_i\}$ — некоторая линейно независимая система векторов в $\mathbf{R}^n$.

◀ Пусть $e_1', \ldots, e_k'$ — максимальная линейно независимая система векторов из Γ (так как $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$, то ясно что такая система существует, причем $k \leqslant n$). Положим $\Gamma' = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_k'$, тогда Γ' — подгруппа в Γ. Факторгруппа Γ/Γ', очевидно, дискретна в компактном торе $(\mathbf{R}e_1' + \ldots + \mathbf{R}e_k')/\Gamma'$, а потому конечна. Следовательно, индекс Γ' в Γ конечен, а потому Γ будет свободной абелевой группой ранга k (как и Γ'). Но тогда $\Gamma = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_k$ для подходящих $e_1, \ldots, e_k \in \mathbf{R}^n$. ▶

В случае $n = 2$ классическое рассуждение Якоби приведено в [31]. Эта теорема уже в простейших случаях приводит к полезным следствиям. Например, если $A \simeq \mathbf{C}(\simeq \mathbf{R}^2)$, а Γ — решетка периодов некоторой непостоянной мероморфной функции $f(z)$ на $\mathbf{C}$ (см. [31]) то возможны следующие три случая. Либо $\Gamma = \{0\}$, т. е. $f(z)$ не периодична, либо $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$, и тогда $f(z)$ имеет один основной период — образующую группы Γ, либо $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^2$, и тогда $f(z)$ — двоякопериодическая функция. В частности, функция $f(z)$ не может иметь трех независимых периодов.

Другим применением теоремы 1.1 является теорема Кронекера о совместном приближении нескольких вещественных чисел. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — вещественные числа. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие целые $n > 0$, m_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, что

$$|n\theta_i - m_i| < \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant p), \ [77].$$

Для доказательства рассмотрим вектор $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_p) \in \mathbf{R}^p$. Пусть Γ — подгруппа в $\mathbf{R}^p$, порожденная элементом θ и стандартной целочисленной решеткой $\mathbf{Z}^p \subset \mathbf{R}^p$. Если Γ не дискретна в $\mathbf{R}^p$, то существуют такие $\gamma_k \in \Gamma$, что $\gamma_k \neq 0$ и $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Но отсюда сразу вытекает существование нужных чисел n и m_i. Если же Γ дискретна, то из теоремы 1.1 следует существование такого $n \in \mathbf{N}$, что $n\theta \in \mathbf{Z}^p$. В этом случае можно взять $m_i = n\theta_i$, тогда $|n\theta_i - m_i| = 0$.

Часто теорему Кронекера формулируют в другой форме: циклическая подгруппа тора $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, порожденная элементом $\delta + \mathbf{Z}^n$, где $\delta = (\delta_1, \ldots \delta_n)$, будет плотна (в обычной топологии) в $\mathbf{T}^n$, если числа δ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$.

ческой группы $\langle \bar{\varphi}(g) \rangle$ в проективном пространстве PV. Эта ситуация рассматривалась нами в примере 2.5. Из полученного там результата следует, что если $g \notin H$ (т. е. вектор v_0 не является собственным для преобразования $\varphi(g)$), то существует такая окрестность W точки $[v_0]$, что $\bar{\varphi}(g^n) W \cap W = \varnothing$ для всех $n \neq 0$. Можно так выбрать симметричную окрестность U точки $e \in G$, что $\bar{\varphi}(U)[v_0] \subset W$. По лемме 8.1 существуют такие $n \in \mathbf{N}$, ω_1, $\omega_2 \in U$, что $\omega_1 g^n \omega_2 \in \Gamma$. Но тогда $\bar{\varphi}(\omega_1) \bar{\varphi}(g^n) \bar{\varphi}(\omega_2)[v_0] = [v_0]$. Следовательно, $\bar{\varphi}(g^n) W \cap W \neq \varnothing$, что противоречит выбору окрестности W.

Итак, мы показали, что $H \supset G_+ U$, где G_+ — замыкание в топологии Зарисского подгруппы, порожденной всеми полупростыми элементами $g \in G$, для которых $\varphi(g)$ имеет положительные собственные значения.

Ясно, что G_+ — нормальная подгруппа в G и, если $\pi: G \to G/G_+U$ — проекция, то алгебраическая группа $\pi(G)$ редуктивна и не содержит полупростых элементов с положительными собственными значениями (последнее — на основании того, что свойство «элемент $g \in G$ полупрост с вещественными собственными значениями» является внутренним, т. е. не зависит от вещественного представления, в котором данная группа G рассматривается). Следовательно, группа $\pi(G)$ компактна и в качестве группы G' в теореме 8.2 можно взять $G' = G_+ U$. ▶

Заметим, что в приведенном доказательстве используется только тот факт, что решетка Γ обладает свойством (S), поэтому оно дословно проходит и в случае, когда Γ — такая замкнутая подгруппа, что на факторпространстве G/Γ существует конечная инвариантная мера.

Глава 2

РЕШЕТКИ В РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

§ 1. Дискретные подгруппы в абелевых группах Ли

1.1. Исторические замечания. Абелевы группы Ли являются простейшими из групп Ли. Изучение решеток в группах Ли началось именно с изучения дискретных подгрупп в абелевых группах Ли. Так, уже Гаусс показал, насколько удобно использовать соображения, основанные на изучении решеток в $\mathbf{R}^2$, при изучении квадратичных форм от двух переменных. В дальнейшем такие соображения развились в область математики, называемую геометрией чисел (см., например, [77]). С другой стороны, решетки в $\mathbf{C}$ естественно возникли как «решетки периодов» в работах Якоби по изучению двоякопериодических

мероморфных функций (см., например, [31]). Описание решеток в $\mathbf{R}^3$ сыграло существенную роль в кристаллографии (см., например, [17], [22]).

1.2. Строение дискретных подгрупп в односвязных абелевых группах Ли. Пусть A — односвязная абелева группа Ли. Тогда A изоморфна $\mathbf{R}^n$, где $n = \dim A$. Если $e_1, \ldots e_l$ — линейно независимая система векторов в $\mathbf{R}^n$, то $\Gamma = \mathbf{Z} e_1 + \ldots + \mathbf{Z} e_l$ будет дискретной подгруппой в $A \simeq \mathbf{R}^n$. Верно и обратное.

Теорема 1.1 ([74], [77]). Всякая дискретная подгруппа $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ имеет вид $\Gamma = \mathbf{Z} e_1 + \ldots + \mathbf{Z} e_l$, где $\{e_i\}$ — некоторая линейно независимая система векторов в $\mathbf{R}^n$.

◀ Пусть $e_1', \ldots, e_k'$ — максимальная линейно независимая система векторов из Γ (так как $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$, то ясно что такая система существует, причем $k \leqslant n$). Положим $\Gamma' = \mathbf{Z}e_1' + \ldots + \mathbf{Z}e_k'$, тогда Γ' — подгруппа в Γ. Факторгруппа Γ/Γ', очевидно, дискретна в компактном торе $(\mathbf{R}e_1' + \ldots + \mathbf{R}e_k')/\Gamma'$, а потому конечна. Следовательно, индекс Γ' в Γ конечен, а потому Γ будет свободной абелевой группой ранга k (как и Γ'). Но тогда $\Gamma = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_k$ для подходящих $e_1, \ldots, e_k \in \mathbf{R}^n$. ▶

В случае $n=2$ классическое рассуждение Якоби приведено в [31]. Эта теорема уже в простейших случаях приводит к полезным следствиям. Например, если $A \simeq \mathbf{C} (\simeq \mathbf{R}^2)$, а Γ — решетка периодов некоторой непостоянной мероморфной функции $f(z)$ на $\mathbf{C}$ (см. [31]) то возможны следующие три случая. Либо $\Gamma = \{0\}$, т. е. $f(z)$ не периодична, либо $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$, и тогда $f(z)$ имеет один основной период — образующую группы Γ, либо $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^2$, и тогда $f(z)$ — двоякопериодическая функция. В частности, функция $f(z)$ не может иметь трех независимых периодов.

Другим применением теоремы 1.1 является теорема Кронекера о совместном приближении нескольких вещественных чисел. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — вещественные числа. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие целые $n > 0$, m_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, что

$$|n\theta_i - m_i| < \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant p), \ [77].$$

Для доказательства рассмотрим вектор $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_p) \in \mathbf{R}^p$. Пусть Γ — подгруппа в $\mathbf{R}^p$, порожденная элементом θ и стандартной целочисленной решеткой $\mathbf{Z}^p \subset \mathbf{R}^p$. Если Γ не дискретна в $\mathbf{R}^p$, то существуют такие $\gamma_k \in \Gamma$, что $\gamma_k \neq 0$ и $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Но отсюда сразу вытекает существование нужных чисел n и m_i. Если же Γ дискретна, то из теоремы 1.1 следует существование такого $n \in \mathbf{N}$, что $n\theta \in \mathbf{Z}^p$. В этом случае можно взять $m_i = n\theta_i$, тогда $|n\theta_i - m_i| = 0$.

Часто теорему Кронекера формулируют в другой форме: циклическая подгруппа тора $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, порожденная элементом $\delta + \mathbf{Z}^n$, где $\delta = (\delta_1, \ldots \delta_n)$, будет плотна (в обычной топологии) в $\mathbf{T}^n$, если числа δ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$.

Пусть Γ — дискретная подгруппа в $A=\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\langle\Gamma\rangle$ ее линейную оболочку в $\mathbf{R}^n$ (она совпадает с ${}^a\Gamma$ — замыканием подгруппы Γ в топологии Зарисского, подробнее см. п. 1.4 ниже). Если $\langle\Gamma\rangle\neq A$, то объем факторпространства A/Γ (относительно инвариантной борелевской меры) бесконечен, ибо бесконечен уже объем пространства $A/\langle\Gamma\rangle$. Поэтому, если $\Gamma=\mathbf{Z}\,e_1+\ldots+\mathbf{Z}\,e_k$ (где векторы e_i линейно независимы), то Γ будет решеткой в A тогда и только тогда, когда $k=n$ (и тогда Γ будет даже равномерной решеткой в A). Таким образом, получаем следующее простое, но важное

Следствие 1.2. Пусть Γ — дискретная подгруппа в односвязной абелевой группе Ли $A=\mathbf{R}^n$. Тогда следующие условия на Γ эквивалентны:

(i) Γ — решетка в A;

(ii) Γ — равномерная решетка в A;

(iii) $\langle\Gamma\rangle=A$.

1.3. Строение дискретных подгрупп в произвольных связных абелевых группах Ли. Пусть A — произвольная связная абелева группа Ли. Она разлагается в прямое произведение $A=T\times A_1$, где T — тор (т. е. связная компактная абелева группа Ли, она изоморфна T^r, где $T=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $r=\dim T$), а A_1 — односвязна (и потому изоморфна $\mathbf{R}^s$, где $s=\dim A_1$). Первый множитель этого разложения определен однозначно, а второй может быть выбран в A разными способами.

Пусть теперь Γ — дискретная подгруппа в A. Подгруппа $\Gamma\cap T$ дискретна и компактна, поэтому $\Gamma\cap T$ — конечная абелева группа. Группа $\Gamma/\Gamma\cap T$ является дискретной подгруппой в односвязной абелевой группе Ли $A/T\simeq A_1$ (описание таких подгрупп см. в п. 1.2 выше). Группа Γ изоморфна прямому произведению $(\Gamma\cap T)\times(\Gamma/\Gamma\cap T)$ дискретных подгрупп $\Gamma^t=\Gamma\cap T$ в группе T и $\Gamma^f=\Gamma/\Gamma\cap T$ в группе A_1. Подгруппа Γ^t совпадает с $\operatorname{Tors}\Gamma$ — множеством элементов конечного порядка в Γ, а группа Γ^f свободна от кручения (и изоморфна $\mathbf{Z}^k$ при некотором $k\in\mathbf{N}$).

Множитель A_1 можно выбрать так, чтобы подгруппа $\Gamma\cap A_1$ изоморфно отображалась на Γ^f при каноническом гомоморфизме $A\to A/T$.

1.4. Использование языка теории алгебраических групп. Группу Ли $A=\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как алгебраическую группу. Более того, ее можно рассматривать как унипотентную алгебраическую подгруппу в $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$:

$$A=\mathbf{R}^n\ni(x_1,\ \ldots,\ x_n)\mapsto\begin{pmatrix}1 & & 0 & x_1\\ & 1 & & \vdots\\ & & \ddots & x_n\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

При этом алгебраические подгруппы в A — это в точности линейные подпространства. Поэтому для любой подгруппы $H\subset A$ ее замыкание ${}^aH$ в топологии Зарисского совпадает с линейной

оболочкой $\langle H\rangle$. В частности, если Γ — дискретная подгруппа в A и $\Gamma=\mathbf{Z}\,e_1+\ldots+\mathbf{Z}\,e_k$ (см. теорему 1.1 выше), то ${}^a\Gamma$ — это подпространство с базисом $e_1,\ldots e_k$.

Покажем, что решетки Γ в $A=\mathbf{R}^n$ — это в точности все арифметические подгруппы. Действительно, если $\Gamma=\mathbf{Z}\,e_1+\ldots+\mathbf{Z}\,e_n$ (см. п. 1.2 выше), то $A(\mathbf{Q})=\mathbf{Q}\,e_1+\ldots+\mathbf{Q}\,e_n$ определяет на A структуру алгебраической $\mathbf{Q}$-группы, причем Γ соизмерима с $A(\mathbf{Z})$. Обратно, пусть на $A=\mathbf{R}^n$ задана $\mathbf{Q}$-структура. Тогда $A(\mathbf{Z})$ имеет вид $\mathbf{Z}\,e_1+\ldots+\mathbf{Z}\,e_n$ и является решеткой в A.

1.5. Распространимость гомоморфизмов решеток. Пусть D — дискретная подгруппа в односвязной абелевой группе Ли A и $\varphi:D\to A'$ — произвольный гомоморфизм в односвязную абелеву группу Ли A'. Этот гомоморфизм, очевидно, однозначно продолжается (по линейности) до гомоморфизма ${}^a\varphi:{}^aD\to A'$. В частности, если D — решетка в A, то гомоморфизм $\varphi:D\to A'$ однозначно продолжается до гомоморфизма ${}^a\varphi:A\to A'$. Если при этом $\varphi(D)$ — решетка в A' и $\operatorname{Ker}\varphi=\{e\}$, то ${}^a\varphi:A\to A'$ будет изоморфизмом групп Ли. Этим доказана следующая теорема (простейшая из теорем жесткости).

Теорема 1.3. Изоморфизм решеток в односвязных абелевых группах Ли однозначно продолжается до изоморфизма объемлющих групп Ли.

§ 2. Решетки в нильпотентных группах Ли

2.1. Вводные замечания и примеры. Нильпотентные группы Ли являются простейшим естественным обобщением абелевых групп; они получаются из единичной группы серией центральных расширений. Решетки в нильпотентных группах Ли во многом аналогичны решеткам в абелевых группах Ли. Эта аналогия позволяет использовать их в теории диофантовых приближений (см. например, [58]), в теории функций ([60], [75]), а также в других областях математики.

Примеры 2.1. Рассмотрим некоторые примеры решеток в нильпотентных группах Ли. Во-первых, — это решетки в абелевых группах Ли, например, в $\mathbf{R}^n$ (см. § 1 выше). Далее, пусть $N=N_3$ — группа всех унипотентных вещественных верхнетреугольных матриц, а $\Gamma=N_3(\mathbf{Z})$ — ее дискретная подгруппа, состоящая из всех целочисленных матриц:

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}1 & m & k\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ m,\ n,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Подгруппа Γ является равномерной решеткой в трехмерной односвязной нильпотентной группе Ли N. Этот факт является иллюстрацией следующего общего утверждения, доказанного А. И. Мальцевым [25].

Теорема 2.2. Пусть N — унипотентная алгебраическая группа, определенная над $\mathbf{Q}$. Тогда подгруппа $\Gamma=N(\mathbf{Z})$ является равномерной решеткой в группе Ли N.

◄ Доказательство будем вести индукцией по $\dim N$. Если $\dim N=1$, то $N\simeq\mathbf{R}$. Использовав матричную реализацию для N (см. п. 1.4 выше), легко показать, что $N(\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}$ и потому утверждение теоремы здесь очевидно. Пусть теперь $\dim N=n$ и для всех групп меньшей размерности теорема уже доказана. Существует определенное над $\mathbf{Q}$ разложение в полупрямое произведение $N=U\ltimes N_1$, где $\dim U=1$, а N_1 — связная нормальная подгруппа размерности $n-1$. Подгруппа $N(\mathbf{Z})$ соизмерима с $U(\mathbf{Z})\ltimes N_1(\mathbf{Z})$ (предложение 7.2 гл. 1). Согласно предположению индукции, $U(\mathbf{Z})$ и $N_1(\mathbf{Z})$ — равномерные решетки в $N\simeq\mathbf{R}$ и N_1 соответственно. Но тогда $N(\mathbf{Z})$ — равномерная решетка в N.►

Пример 2.3. Рассмотрим теперь примеры соизмеримых с $N_3(\mathbf{Z})$ арифметических подгрупп. Положим

$$\Gamma_{p,q,r}=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & \frac{m}{p} & \frac{k}{pqr}\\ 0 & 1 & \frac{n}{q}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| m, n, k\in\mathbf{Z}\right\},$$

где p, q, r — некоторые фиксированные натуральные числа и $pqr\neq0$. Тогда $\Gamma_{p,q,r}$ — равномерная решетка в N_3, соизмеримая с $N_3(\mathbf{Z})$ (точнее, $\Gamma_{p,q,r}$ содержит $N_3(\mathbf{Z})$ в качестве подгруппы индекса p^2q^2r).

2.2. Строение решеток в нильпотентных группах Ли. Пусть Γ — решетка в связной нильпотентной группе Ли N. Всякая максимальная компактная подгруппа T в N является центральной. Поэтому такая подгруппа T единственна. Подгруппа $\Gamma^t=\Gamma\cap T$ конечна, а группа $\Gamma^f=\Gamma/\Gamma\cap T$ является решеткой в односвязной нильпотентной группе Ли $N_1=N/T$ (см. п. 4.3 гл. 1). При этом $\Gamma^t=\operatorname{Tors}\Gamma$, а группа Γ^f свободна от кручения. В отличие от абелевого случая группа Γ не обязательно является прямым (или хотя бы полупрямым) произведением групп Γ^f и Γ^t.

Если $\eta:\tilde N\to N$ — универсальное накрытие, то $\eta^{-1}(\Gamma)$ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли $\tilde N$. Этот факт, как и сказанное выше относительно группы Γ^f показывает, что, изучая решетки в нильпотентных группах Ли, нужно уделить особое внимание рассмотрению решеток в односвязных нильпотентных группах Ли. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь односвязные нильпотентные группы Ли.

Произвольная односвязная нильпотентная группа Ли N имеет точное унипотентное линейное представление (см., например, [74], [128]), т. е. может рассматриваться как подгруппа в группе N_n всех унипотентных вещественных матриц. Любая же связная подгруппа в N_n замкнута в топологии Зарисского (см., например, [68]). Это дает, в частности, структуру вещественной алгебраической группы на N. При этом алгебраические подгруппы в N — это в точности все связные подгруппы Ли, а $\exp:\mathfrak{n}\to N$ есть изоморфизм алгебраических многообразий. Последнее свойство показывает, что алгебраическая структура на N не зависит от выбора точного унипотентного представления. Эту алгебраическую структуру на N можно ввести и инвариантным способом. Пусть $\mathfrak{n}$ — касательная алгебра группы Ли N. Рассмотрим на $\mathfrak{n}$ структуру группу Ли, задаваемую формулой Кэмпбелла—Хаусдорфа. В силу нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{n}$, получаем глобальную группу Ли (см. [74], [128]). Закон композиции в полученной группе Ли полиномиален относительно координат в произвольном базисе векторного пространства, а сама эта группа Ли естественно изоморфна односвязной группе Ли N. Тем самым получаем естественную алгебраическую структуру на N (совпадающую с введенной выше).

Основные результаты о строении решеток в нильпотентных группах Ли были получены А. И. Мальцевым [25]. Ниже приведено их модернизированное и расширенное изложение.

Теорема 2.4 ([25], [120]). Пусть Γ — дискретная подгруппа в односвязной нильпотентной группе Ли N. Тогда следующие условия на Γ эквивалентны:

(i) Γ — решетка в N,

(ii) Γ — равномерная решетка в N;

(iii) ${}^a\Gamma=N$ (т. е. Γ плотна в N относительно естественной топологии Зарисского).

◄ Докажем последовательно импликации (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$$\Rightarrow$(i).

(i)$\Rightarrow$(iii). Если ${}^a\Gamma\neq N$, то ${}^a\Gamma$ — собственная связная подгруппа в N, но тогда объем пространства $N/{}^a\Gamma$ бесконечен (см., например, лемму 8.3 гл. 1), поэтому и объем N/Γ должен быть бесконечен.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Доказательство использует индукцию по $\dim N$. Подгруппа (Γ,Γ) плотна по Зарисскому в (N,N). Но, $\dim(N,N)<\dim N$, и потому (Γ,Γ) — решетка в (N,N). Отсюда следует, что $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ — дискретна и плотна по Зарисскому в абелевой группе Ли $N/(N,N)$. Ясно, что $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ — решетка в $N/(N,N)$. Но тогда, очевидно, и Γ будет решеткой в N.

(ii)$\Rightarrow$(i). Тривиально.►

В связи с теоремой 2.4 сделаем замечание, касающееся произвольной дискретной подгруппы D в односвязной нильпотентной группе Ли N. Подгруппа ${}^aD$ является связной подгруппой Ли в N, содержащей D. При этом D равномерна в ${}^aD$ и D — наименьшая из связных подгрупп в N, содержащих D. Кроме того, многообразие N/D диффеоморфно прямому произведению ${}^aD/D\times\mathbf{R}^n$ (где $n=\dim N/{}^aD$).

Из теоремы 2.4 легко выводится

Следствие 2.5. Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N. Если $C_k(N)$ $(C^k(N))$ — члены убывающего (соответственно возрастающего) центрального ряда для N, то $\Gamma\cap C_k(N)$ — решетки в $C_k(N)$ (соответственно $\Gamma\cap C^k(N)$ — решетки в $C^k(N)$). Если $D^k(N)$ — члены ряда коммутантов, то $\Gamma\cap D^k(N)$ — решетки в $D^k(N)$ (Здесь $k=0, 1, \ldots$, $C^0(N)=D^0(N)=N$, $C_0(N)=\{e\}$, $C^{k+1}(N)=(C^k(N), N)$, $D^{k+1}(N)=(D^k(N), D^k(N))$, а $C_{k+1}(N)/C_k(N)$ совпадает с центром группы $N/C_k(N)$).

Более того, подгруппы $C_k(\Gamma)$ являются решетками в $C_k(N)$, аналогично для $C^k(\Gamma)$, $D^k(\Gamma)$.

Покажем, например, что $C_1(\Gamma)=Z(\Gamma)$ — решетка в $C_1(N)=Z(N)$. Для этого рассмотрим на N естественную алгебраическую $\mathbf{Q}$-структуру, порожденную решеткой Γ (см. п. 1.4 выше). Тогда решетка Γ соизмерима с $N(\mathbf{Z})$. Далее, подгруппа $Z(N)$ определена над $\mathbf{Q}$, а потому $Z(N)(\mathbf{Z})$ — решетка в $Z(N)$. Отсюда следует, что и $Z(\Gamma)$, соизмеримая с $Z(N)(\mathbf{Z})$, является решеткой в $Z(N)$. Для $C^k(\Gamma)$, $D^k(\Gamma)$ доказательства даже еще проще.

Следствие 2.5 позволяет при доказательстве многих результатов о решетках в нильпотентных группах Ли использовать различного рода индукцию (для нильпотентных групп особенно полезна индукция по длине центрального ряда, возрастающего или убывающего).

Следующая теорема дает полное описание (с теоретико-групповой точки зрения) решеток в односвязных нильпотентных группах Ли.

Теорема 2.6 ([25], [120]). Абстрактная группа D изоморфна решетке в некоторой односвязной нильпотентной группе Ли тогда и только тогда, когда D нильпотентна, конечно порождена (такая D всегда конечно определена) и не имеет кручения.

Если D — произвольная нильпотентная конечно порожденная группа без кручения, то ее можно вложить в группу $N(\mathbf{Q})$ рациональных точек некоторой унипотентной алгебраической $\mathbf{Q}$-группы N (см. выше п. 1.4). Группа $N(\mathbf{Q})$ полна (т. е. для любого $g\in N(\mathbf{Q})$ и любого $n\in\mathbf{N}$ уравнение $x^n=g$ разрешимо в $N(\mathbf{Q})$) и является (нильпотентным) пополнением для D, т. е. содержит D и не содержит полных собственных подгрупп, содержащих D (подробнее см. [25], [120]).

2.3. Гомоморфизмы решеток в нильпотентных группах Ли.

Теорема 2.7 ([25], [120]). Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N, а $\mu:\Gamma\to N'$ — ее гомоморфизм в односвязную нильпотентную группу Ли N'. Тогда μ продолжается, причем единственным образом, до гомоморфизма $^a\mu: N\to N'$.

◄Основная идея доказательства такова. Пусть $\Gamma_\mu\subset N\times N'$ —

график гомоморфизма μ. Тогда $^a(\Gamma_\mu)$ будет графиком искомого распространения $^a\mu$. Единственность $^a\mu$ легко следует из непрерывности $^a\mu$ в топологии Зарисского.►

Из теоремы 2.7 сразу вытекает следующее утверждение, явившееся первым нетривиальным результатом о жесткости решеток в группах Ли.

Следствие 2.8 ([25], [120]). Пусть Γ_1, Γ_2 — решетки в односвязных нильпотентных группах Ли N_1, N_2 соответственно. Тогда любой изоморфизм $\mu:\Gamma_1\to\Gamma_2$ однозначно продолжается до изоморфизма групп Ли $^a\mu: N_1\to N_2$. При этом однородные пространства N_1/Γ_1 и N_2/Γ_2 диффеоморфны.

Из следствия 2.8 получаем, в частности, что компактное нильмногообразие N/Γ (где Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N) однозначно с точностью до диффеоморфизма определяется своей фундаментальной группой $\pi_1(N/\Gamma)$, изоморфной Γ.

Пример 2.9. Проиллюстрируем следствие 2.8 на следующем примере. Пусть $\Gamma_{p,q,r}$ — решетка в N_3, указанная в п. 2.1. Ее образующими будут элементы

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{p} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{q}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{pqr}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

причем $(\alpha,\beta)=\gamma^r$. Отображение, переводящее α в α^p, β — в β^q, а γ — в γ^{pq}, порождает, как легко проверить, изоморфизм группы $\Gamma_{p,q,r}$ на ее подгруппу, изоморфную $\Gamma_{1,1,r}$ и тоже являющуюся решеткой в N_3. В силу следствия 2.6 этот изоморфизм однозначно продолжается до автоморфизма группы Ли N_3 (который легко узказать и явно). Компактные нильмногообразия $N_3/\Gamma_{p,q,r}$ и $N_3/\Gamma_{1,1,r}$ будут диффеоморфны.

2.4. Существование решеток в нильпотентных группах Ли и их классификация.

Теорема 2.10 ([25], [120]). Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N. Тогда существует, причем единственная, структура вещественной алгебраической $\mathbf{Q}$-группы на N такая, что Γ соизмерима с $N(\mathbf{Z})$ (это означает, что Γ — арифметическая подгруппа в N, см. п. 7.1 гл. 1).

Наличие $\mathbf{Q}$-структуры на N означает, что в подходящих координатах умножение в N задается полиномами с рациональными коэффициентами. Отметим, что решетка Γ в теореме 2.10 определяется $\mathbf{Q}$-структурой на N однозначно с точностью до соизмеримости. Более того, пусть N — произвольная унипотентная $\mathbf{Q}$-группа, а Γ — конечно порожденная подгруппа в $N(\mathbf{Q})$. Тогда Γ будет дискретной подгруппой в N и, если ранг группы Γ (о котором см. § 3 гл. 4) равен $\dim N$, то Γ будет решеткой в N, соизмеримой с $N(\mathbf{Z})$.

Следствие 2.11. Односвязная нильпотентная группа Ли N содержит некоторую решетку тогда и только тогда, когда она (или ее касательная алгебра Ли) допускает $\mathbf{Q}$-структуру.

Для алгебры Ли $\mathfrak{n}$ $\mathbf{Q}$-структурой называется такая $\mathbf{Q}$-подалгебра $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$, что $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{n}_0 \otimes \mathbf{R}$. Такую структуру нильпотентная алгебра Ли (или, что эквивалентно, соответствующая односвязная нильпотентная группа Ли) имеет не всегда. Другими словами, не всегда в $\mathfrak{n}$ существует базис, относительно которого структурные константы рациональны. Ясно, что множество алгебр Ли (рассматриваемых с точностью до изоморфизма), допускающих $\mathbf{Q}$-структуру, счетно. При размерности $\leqslant 6$ все нильпотентные алгебры Ли имеют $\mathbf{Q}$-структуру. Однако в размерности 7 существует уже континуум попарно неизоморфных нильпотентных алгебр Ли. Пусть $e_1, \ldots, e_7$ — базис в $\mathbf{R}^7$. Положим

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] = a_{ij} e_{i+j} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 7,\ i+j \leqslant 7),$$

причем все остальные коммутаторы $[e_i, e_j] = 0$. Получаем структуру алгебры на $\mathbf{R}^7$. Для выполнения тождества Якоби необходимо и достаточно выполнения условий (см. [74]):

$$a_{23} a_{15} = a_{13} a_{24},$$

$$a_{12} a_{34} + a_{14} a_{25} = a_{24} a_{16}.$$

Предполагая эти условия выполненными, получаем семейство нильпотентных семимерных алгебр Ли. Можно показать, что среди них имеется континуум неизоморфных. Но тогда среди них имеются и континуум алгебр Ли, не имеющих $\mathbf{Q}$-структуры.

С другой стороны, $\mathbf{Q}$-структура на нильпотентной алгебре Ли, если и существует, то необязательно единственна. Например, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{n}(p)$ (где p — произвольное простое число), которая в базисе $e_1, \ldots, e_6$ задается соотношениями

$$[e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_2, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = p e_6$$

(остальные $[e_i, e_j] = 0$ при $i < j$).

Согласно определению, структурные константы алгебр $\mathfrak{n}(p)$ рациональны.

Можно доказать, что над $\mathbf{Q}$ все эти алгебры Ли $\mathfrak{n}(p)$ попарно не изоморфны, и над $\mathbf{R}$ все они изоморфны между собой [36].

Таким образом, вещественная шестимерная алгебра Ли $\mathfrak{n}(2)$ имеет счетное число различных $\mathbf{Q}$-структур. Следовательно, соответствующая односвязная нильпотентная группа Ли $N(2)$ имеет счетное число попарно несоизмеримых решеток. Другие примеры нильпотентных алгебр Ли с несколькими различными $\mathbf{Q}$-структурами приведены в [25], [120]. При $\dim \mathfrak{n} \leqslant 5$ на $\mathfrak{n}$ существует ровно одна $\mathbf{Q}$-структура.

В силу теоремы 2.10 классификация всех нильпотентных алгебр Ли над $\mathbf{Q}$ размерности $\leqslant 6$, полученная в [36], может рассматриваться как классификация с точностью до соизмеримости решеток в односвязных нильпотентных группах Ли размерности $\leqslant 6$. Отметим, что известна и классификация комплексных семимерных нильпотентных алгебр Ли [44].

2.5. Решетки и решеточные подгруппы в нильпотентных группах Ли. Если N — односвязная нильпотентная группа Ли, а $\mathfrak{n}$ — ее касательная алгебра Ли, то экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{n} \to N$ является диффеоморфизмом (см. [74], [128]). Через $\ln : N \to \mathfrak{n}$ обозначим обратное к $\exp$ отображение. Если Γ — решетка в N, то $\ln \Gamma$ — дискретное подмножество в $\mathfrak{n}$, но не обязательно подгруппа относительно сложения в $\mathfrak{n}$.

Пример 2.12. Рассмотрим решетку $\Gamma_{1,1,1} = N_3(\mathbf{Z})$ в $N = N_3$ (см. п. 2.1 выше). Легко убедиться, что

$$\ln \Gamma_{1,1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m & k - \frac{mn}{2} \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, m, n, k \in \mathbf{Z} \right\},$$

и это множество не замкнуто относительно сложения.

Следуя К. Муру [100], дискретную подгруппу D в N назовем *решеточной*, если $\ln D$ — подгруппа по сложению в $\mathfrak{n}$. Если D — решеточная подгруппа, то $\ln D$ будет подгруппой максимального ранга тогда и только тогда, когда D — решетка в N. Не всякая решетка является решеточной подгруппой. Например, $\Gamma_{1,1,1}$ не будет решеточной подгруппой в группе Ли N_3. Однако подгруппа $\Gamma_{1,1,2}$, содержащая ее в качестве подгруппы конечного (равного 2) индекса, уже будет решеточной. Это является отражением следующего общего факта.

Теорема 2.13 ([100]). Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N. Тогда существуют решеточные подгруппы Γ_1, $\Gamma_2 \subset N$ такие, что $\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \Gamma_2$ и индекс Γ_1 в Γ конечен (ясно, что Γ_1, Γ_2 — решетки в N и индекс Γ_1 в Γ_2 конечен).

Решеточные подгруппы оказываются удобными при изучении представлений нильпотентных групп Ли N, индуцированных тривиальным представлением решетки Γ, [100], а также в других вопросах теории представлений и гармонического анализа.

§ 3. Решетки в произвольных разрешимых группах Ли

3.1. Примеры решеток в разрешимых группах Ли малой размерности. Примерами решеток в разрешимых группах Ли являются, конечно, решетки в нильпотентных группах Ли (см. § 2), например, $\mathbf{Z}^n$ в $\mathbf{R}^n$, $N_3(\mathbf{Z})$ в N_3 и др. Перечислим все односвязные разрешимые группы Ли R размерности $\leqslant 3$, имеющие решетки, и укажем некоторые примеры решеток Γ в них.

При $\dim R = 1$ имеем $R \simeq \mathbf{R}$, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$. Далее, существуют только две неизоморфные двумерные вещественные алгебры Ли, причем обе они разрешимы. Одна из них абелева, а другая изоморфна алгебре Ли группы Aff $\mathbf{R}^1$ аффинных преобразований прямой (для подходящего базиса X, Y этой алгебры имеем $[X, Y]=Y$). Соответствующие односвязные группы Ли изоморфны $\mathbf{R}^2$ и $\mathrm{Aff}^0\mathbf{R}^2$ (группе собственных аффинных преобразований). Решетки в $\mathbf{R}^2$ были описаны в § 1, а группа $\mathrm{Aff}^0\mathbf{R}^1$ решеток не имеет (см. п. 1.1 гл. 1).

Перейдем к рассмотрению решеток в трехмерных разрешимых группах Ли. Рассмотрим разрешимую группу Ли $R=\mathbf{R}\ltimes_\varphi\mathbf{R}^2$, являющуюся полупрямым произведением групп $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2$, соответствующим гомоморфизму $\varphi:\mathbf{R}\to GL_2(\mathbf{R})$. Пусть, вначале, φ имеет вид

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi t & \sin 2\pi t\\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t\end{pmatrix},\quad t\in\mathbf{R}.$$

Тогда группа Ли R изоморфна $\tilde{E}(2)^0$ — универсальной накрывающей для группы $E(2)^0$ собственных движений евклидовой плоскости. Элемент $\gamma=1\in\mathbf{R}$ и стандартная целочисленная решетка $\mathbf{Z}^2\subset\mathbf{R}^2$ порождают решетку Γ в R, изоморфную $\mathbf{Z}^3$. Если же мы рассмотрим подгруппу в R, порожденную решеткой $\mathbf{Z}^2$ и элементом $\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$, то получим решетку Γ_1 в R, содержащую Γ в качестве подгруппы индекса 2, при этом Γ_1 не абелева (и даже не нильпотентна).

Рассмотрим теперь гомоморфизм φ, для которого

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}a^t & 0\\ 0 & a^{-t}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbf{R},$$

где $a\in\mathbf{R}$, $a>0$, $a\neq 1$, — такое число, что $a+a^{-1}=n\in\mathbf{N}$. Отметим, что при всех α мы получаем изоморфные между собой группы Ли $R=\mathbf{R}\ltimes_\varphi\mathbf{R}^2$, через R_3 обозначим одну из них. Пусть Γ — подгруппа в $R=\mathbf{R}\ltimes_\varphi\mathbf{R}^2$, порожденная элементом $1\in\mathbf{R}$ и некоторой решеткой $L\subset\mathbf{R}^2$, инвариантной относительно $\varphi(1)$ (такая решетка существует, так как матрица $\varphi(1)$ подобна целочисленной матрице $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & n\end{pmatrix}$). Тогда Γ будет решеткой в $R\simeq R_3$, причем при различных значениях n получим, вообще говоря, неизоморфные группы Γ.

Группами Ли $\mathbf{R}^3$, N_3, $\tilde{E}(2)^0$, R_3 исчерпываются все трехмерные односвязные разрешимые группы Ли, имеющие решетки (см. [58]). Если же R — произвольная трехмерная разрешимая группа Ли, имеющая решетку, то R локально изоморфна одной из перечисленных выше четырех групп Ли.

3.2. Топология солвмногообразий вида R/Γ. *Солвмногообразием* называется однородное пространство связной разрешимой группы Ли (подробнее см. ст. II т. 20). Изучение дискретных подгрупп Γ в разрешимых группах Ли R тесно связано с изуче-

нием солвмногообразий вида R/Γ. Следующая теорема показывает, что изучение топологического строения многообразий R/Γ во многом сводится к изучению его для компактных солвмногообразий.

Теорема 3.1 ([54], [107]). Пусть Γ — дискретная подгруппа в связной разрешимой группе Ли R. Тогда многообразие R/Γ диффеоморфно тотальному пространству некоторого векторного расслоения над компактным солвмногообразием M^*.

Солвмногообразие M^* в теореме 3.1 не обязательно имеет вид R^*/Γ^*, где Γ^* — решетка в некоторой разрешимой группе Ли R^*. Дело в том, что Γ может быть произвольной группой Вана (см. определение в п. 3.5 ниже). С другой стороны, группа Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M^*)$ многообразия M^*. Если $M^*=R^*/\Gamma^*$, то это накладывает на $\pi_1(M^*)$ дополнительные ограничения (см. п. 3.5), которым исходная Γ может и не удовлетворять.

Структурная группа векторного расслоения из теоремы 3.1 в общем случае нетривиальна, но ее можно редуцировать к группе вида $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^k$, [59].

3.3. Некоторые общие свойства решеток в разрешимых группах Ли.

Теорема 3.2 ([101], [120]). Пусть Γ — дискретная подгруппа в разрешимой группе Ли R. Тогда следующие условия на Γ эквивалентны:

(i) Γ — решетка в R;

(ii) Γ — равномерная решетка в R.

Эта теорема является обобщением части теоремы 2.4. Дополнить теорему 3.2 буквальным аналогом свойства (iii) из теоремы 2.4 в общем случае нельзя. Однако справедлива следующая

Теорема 3.3 ([120]). Пусть Γ — решетка в разрешимой группе Ли R, а $\rho: R\to GL(V)$ — произвольное конечномерное комплексное линейное представление. Если N — унипотентный радикал группы ${}^a(\rho(R))$ — замыкания $\rho(R)$ в топологии Зарисского в $GL(V)$, то ${}^a(\rho(\Gamma))\supset N$.

В условиях теоремы 3.3 равенство ${}^a(\rho(\Gamma))={}^a(\rho(R))$ не всегда имеет место.

Пример 3.4. Пусть $R=\tilde{E}(2)^0$, а $\rho=\mathrm{Ad}_R^{\mathbf{C}}$ — комплексификация присоединенного представления группы Ли R. Рассмотрим в R решетку $\Gamma\simeq\mathbf{Z}^3$ (см. п. 3.1 выше). Тогда группа $\rho(\Gamma)$ абелева, а потому абелева и ${}^a(\rho(\Gamma))$. С другой стороны, группа $\rho(R)$ неабелева: она локально изоморфна R. Следовательно, ${}^a(\rho(\Gamma))\neq{}^a(\rho(R))$.

Для решеток в произвольных разрешимых односвязных группах Ли полные аналоги теоремы 2.5 и следствия 2.8 в общем случае неверны. Например, в неизоморфных односвязных трехмерных разрешимых группах Ли $\tilde{E}(2)^0$ и $\mathbf{R}^3$ имеются изоморфные между собой (и изоморфные Z^3) решетки. Однако часть следствия 2. все же допускает обобщение на разрешимый случай.

Теорема 3.5 ([101], [54], [120]). Пусть Γ_1, Γ_2 — решетки в разрешимых односвязных группах Ли R_1, R_2 соответственно. Если Γ_1 изоморфна Γ_2, то многообразие R_1/Γ_1 диффеоморфно R_2/Γ_2.

Например, если Γ — решетка в $\widetilde{E}(2)^0$, изоморфная $\mathbf{Z}^3$, то многообразие $\widetilde{E}(2)^0/\Gamma$ диффеоморфно тору T^3.

3.4. Структурная теорема Мостова. Следующая теорема является одной из основных при изучении решеток в произвольных разрешимых группах Ли. Доказанная впервые Мостовым, она перебрасывает мостик между решетками в произвольных разрешимых и нильпотентных группах Ли.

Теорема 3.6 ([101], [54], [120]). Пусть Γ — решетка в связной разрешимой группе Ли R, а N — нильрадикал группы R (т. е. наибольшая связная нильпотентная нормальная подгруппа). Тогда $\Gamma\cap N$ — решетка в N.

К решетке $\Gamma\cap N$ применимы, естественно, все результаты о решетках в нильпотентных группах Ли, в частности, следствие 2.5, позволяющее проводить индуктивные рассуждения.

Тот факт, что $\Gamma\cap N$ — решетка в N, эквивалентен замкнутости в R подгруппы ΓN (теорема 4.5 гл. 1). Поэтому имеем гладкое, локально тривиальное расслоение

$$\Gamma N/\Gamma = N/\Gamma\cap N \to R/\Gamma \to R/\Gamma N = A/D.$$

Слой $N/\Gamma\cap N$ этого расслоения является компактным нильмногообразием. Для базы расслоения имеем $R/\Gamma N = A/D$, где $A = R/N$ — абелева группа Ли (см., например, [74]), а $D = \Gamma/\Gamma\cap N$ — решетка в A. Ясно, что база эта диффеоморфна тору.

Пример 3.7. Пусть Γ — решетка в группе Ли R_3, определенной в п. 3.1 выше. Тогда $N \simeq \mathbf{R}^2$, $A/N \simeq \mathbf{R}$ и расслоение для R_3/Γ имеет вид $T^2 \to R_3/\Gamma \to T^1$, где T^1 — окружность, а T^2 — двумерный тор.

3.5. Группы Вана. Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, а N — нильрадикал группы R. Тогда $D = \Gamma/\Gamma\cap N$ — решетка в односвязной абелевой группе Ли $A = R/N$, в частности, D изоморфна $\mathbf{Z}^k$, где $k = \dim A$. Имеем следующую точную последовательность групп $\{e\} \to \Gamma\cap N \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma\cap N \to \{e\}$ (эту последовательность можно рассматривать как часть точной гомотопической последовательности расслоения, указанного выше). Группа $\Delta = \Gamma\cap N$ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N (в силу теоремы 3.6); она нильпотентна, конечно порождена и не имеет кручения (см. теорему 2.6).

Существование для группы Γ' точной последовательности

$$\{e\} \to \Delta' \to \Gamma' \to \mathbf{Z}^k \to \{e\},$$

где Δ' обладает указанными выше свойствами (группы Δ), является необходимым условием реализации Γ' в качестве решетки (и даже просто в качестве дискретной подгруппы) в односвязной разрешимой группе Ли. Всякая группа Γ', удовлетворяющая этому условию, называется *группой Вана*.

Теорема 3.8 ([138]). Абстрактная группа Γ изоморфна дискретной подгруппе в односвязной разрешимой группе Ли тогда и только тогда, когда она является группой Вана.

Однако не всякая группа Вана изоморфна решетке в некоторой односвязной разрешимой группе Ли (критерии см. в п. 3.8 ниже).

Пример 3.9. Пусть $\Gamma = \mathbf{Z} \ltimes_{\varphi} \mathbf{Z}^n$ — полупрямое произведение, соответствующее некоторому гомоморфизму $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Предположим, что все собственные значения матрицы $\varphi(1)$ вещественны, различны и отрицательны. Такие матрицы существуют при любом $n \geqslant 1$, например, при $n = 1$ можно взять $\varphi(1) = -1$, а при $n = 2$ $\varphi(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда Γ не будет изоморфна решетке ни в какой связной разрешимой группе Ли, [138] (в случае $n = 2$ см. также [120]). При $n = 1$ и $\varphi(1) = -1$ получаем группу $\Gamma = \mathbf{Z} \ltimes \mathbf{Z}$, изоморфную фундаментальной группе бутылки Клейна K^2. Легко проверить, что эта группа изоморфна дискретной подгруппе группы $\widetilde{E}(2)^0$, но она не изоморфна никакой решетке в связной группе Ли.

В связи с теоремой 3.8 отметим еще, что всякая группа Вана изоморфна фундаментальной группе некоторого компактного солвмногообразия (верно и обратное, см. подробнее [54]).

Обсудим теперь связь решеток Γ в односвязных разрешимых группах Ли и групп Вана с классом полициклических групп (о которых см., например, [20]). Ясно, что всякая группа Вана полициклична. Поэтому полициклична и любая решетка Γ. Обратное неверно: даже если D — полициклическая группа без кручения, она не всегда изоморфна решетке в разрешимой связной группе Ли (такова, например, описанная выше группа $\Gamma = \mathbf{Z} \ltimes_{\varphi} \mathbf{Z}^n$). Более того, не всякая полициклическая группа без кручения является группой Вана (см., например, [120]). Однако во всякой полициклической группе существует подгруппа конечного индекса, изоморфная решетке в некоторой односвязной разрешимой группе Ли ([54], [120]).

3.6. Расщепление разрешимых групп Ли. Более подробное исследование решеток в разрешимых группах Ли осуществляется обычно с помощью понятий и результатов, основанных на использовании расщеплений групп и алгебр Ли, а также расщепления групп Вана.

Начнем с описания расщепления для разрешимых групп Ли (или, что эквивалентно, алгебр Ли), подробнее см. [54], [105], [120], [35].

Пусть R — односвязная разрешимая группа Ли, а N — ее нильрадикал. Так как $[R, R] \subset N$, то $A = R/N$ — односвязная абелева группа Ли. Таким образом, группа R получается расширением нильпотентной группы Ли N с помощью абелевой группы Ли A. Такое описание группы R не всегда удобно, так как это расширение в общем случае не расщепляется. С другой стороны, если R — разрешимая алгебраическая $\mathbf{R}$-группа, то имеем разложение $R = T \ltimes U$, где U — унипотентный радикал, а T — абелева подгруппа, состоящая из полупростых элементов, [32]. Для такой группы R указанное выше расширение расщепляется. Желание и для произвольной разрешимой группы Ли получить какой-нибудь аналог такого расщепления привело к общему понятию расщепления.

Разрешимая односвязная группа Ли R называется *расщепимой*, если она представляется в виде полупрямого произведения $R = T \ltimes_{\varphi} N$, где N — нильрадикал, а T — абелева подгруппа, причем подгруппа $\varphi(T) \subset \mathrm{Aut}\, N$ состоит из полупростых автоморфизмов. Из определения следует, что $\mathrm{Ker}\,\varphi$ — дискретная подгруппа в T.

Расщеплением Мальцева (или *полупростым расщеплением*) односвязной разрешимой группы Ли R называется такое вложение $i: R \hookrightarrow M(R)$ группы R в расщепимую односвязную разрешимую группу Ли $M(R)$, что если $M(R)_R = T \ltimes U_R$, где U_R — нильрадикал в $M(R)$, а T_R — абелева подгруппа, действующая на U_R полупростыми автоморфизмами, то

(i) $M(R) = i(R)\, U_R$ (произведение подгрупп);

(ii) $M(R) = T_R \ltimes i(R)$ (полупрямое произведение подгруппы T_R и нормальной подгруппы $i(R)$).

Для случая разрешимых алгебр Ли расщепление Мальцева определяется аналогично (см., например, [56]).

Теорема 3.10. Для произвольной разрешимой односвязной группы Ли R расщепление Мальцева существует и единственно (единственность понимается в естественном смысле, подробнее см. [14]).

◀Приведем набросок доказательства существования расщепления Мальцева. Единственность для нас здесь менее существенна, и мы ею заниматься не будем.

Пусть R — односвязная разрешимая группа Ли, а $\mathfrak{r}$ — ее касательная алгебра Ли. Так как R односвязна, то группы $\mathrm{Aut}\, R$ и $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{r}$ автоморфизмов группы R и алгебры Ли $\mathfrak{r}$ естественно изоморфны. Рассмотрим присоединенное представление $\mathrm{Ad}_R : R \to \mathrm{GL}(\mathfrak{r})$, и пусть ${}^a(\mathrm{Ad}_R(R))$ — замыкание подгруппы $\mathrm{Ad}_R(R)$ в $\mathrm{GL}(\mathfrak{r})$ относительно топологии Зарисского. Так как R разрешима, то ${}^a(\mathrm{Ad}_R(R))$ — разрешимая алгебраическая группа, а потому она допускает разложение ${}^a(\mathrm{Ad}_R(R)) = \mathrm{T} \ltimes U$ в полупрямое произведение унипотентного радикала U и абелевой подгруппы T, состоящей из полупростых линейных операторов.

Группа $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{r}$ алгебраична, а $\mathrm{Ad}_R(R) \subset \mathrm{Aut}\, \mathfrak{r}$, поэтому и ${}^a(\mathrm{Ad}_R(R)) \subset \mathrm{Aut}\, \mathfrak{r}$. В частности, получаем, что $T \subset \mathrm{Aut}\, \mathfrak{r}$, т. е. группу T можно рассматривать естественным образом как подгруппу в $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{r} \simeq \mathrm{Aut}\, R$. Пусть T_R^* — образ подгруппы $\mathrm{Ad}_R(R)$ при естественном эпиморфизме $T \ltimes U \to T$ с ядром U. Образуем полупрямое произведение $T_R^* \ltimes R$, отвечающее вложению $T_R^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}\, R$, и пусть $M(R)$ — универсальная накрывающая для группы Ли $T_R^* \ltimes R$.

Пусть U_R — нильрадикал в $M(R)$, тогда легко проверяется, что $M(R) = T_R \ltimes U_R$ — полупрямое произведение (где подгруппа T_R в $M(R)$ накрывает подгруппу T_R^* в $T_R^* \ltimes R$). Следовательно, группа $M(R)$ расщепима. Так как R односвязна, то ее естественное вложение в $T_R^* \ltimes TR$ порождает вложение $i: R \hookrightarrow M(R)$. Очевидно, что $M(R) = T_R \ltimes i(R)$, без труда доказывается, что $M(R) = i(R)\, U_R$. Следовательно, вложение $i: R \hookrightarrow M(R)$ является расщеплением Мальцева для R. ▶

Первая конструкция расщепления (для разрешимых комплексных алгебр Ли) была дана А. И. Мальцевым [24]. Для разрешимых вещественных групп Ли расщепление (названное вначале полупростым) было построено Ауслендером (см., например, [54]). Для произвольных групп и алгебр Ли существует несколько различных расщеплений (подробнее см. ст. II т. 20 и [56], [14]).

Пример 3.11. Пусть $R = \mathbf{R} \ltimes_{\varphi} \mathbf{R}^n$ — полупрямое произведение, соответствующее гомоморфизму $\varphi: \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, где $\varphi(t) = \exp(tA)$, $A \in M_n(\mathbf{R})$ — некоторая матрица. Рассмотрим разложение Жордана $A = A_n + A_s$, где A_n — нильпотентная, а A_s — полупростая матрицы, причем $A_s A_n = A_n A_s$. Положим $U_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \ltimes_{\varphi_n} \mathbf{R}^n$, где $\varphi_n(t) = \exp(tA_n)$. Однопараметрическую подгруппу $\varphi_s(t) = \exp(tA_s) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ можно естественным образом рассматривать и как подгруппу в $\mathrm{Aut}\, U_R$ (это следует из перестановочности A_s и A_n). Рассмотрим полупрямое произведение $\{\varphi_s(t)\} \ltimes U_R \simeq \mathbf{R} \ltimes U_R$. Легко понять, что это и есть группа $M(R)$ для рассматриваемой R, причем $T_R = \{\varphi_s(t)\}$, а U_R — нильрадикал в $M(R)$.

Если $A_n = 0$, т. е. R расщепима, то $M(R)$ изоморфна $R \times \mathbf{R}$.

В частности, если $R \simeq \tilde{E}(2)^0$, то $M(R) \simeq \mathbf{R} \times R$, то же будет и для $R = R_3$ (см. п.3.1 выше). Если же $R = \mathbf{R} \ltimes_{\varphi} \mathbf{R}^2$ и $\varphi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $U_R \simeq N_3$, $T_R \simeq \mathbf{R}$ и $M(R) = \mathbf{R} \ltimes N_3$ — нетривиальное полупрямое произведение.

Если односвязная разрешимая группа Ли R расщепима, то $M(R) \simeq R \times C$, где C — абелева группа Ли.

3.7. Критерии существования решетки в односвязной разрешимой группе Ли. В отличие от нильпотентного случая (см. следствие 2.11) критерии существования решетки в односвязной разрешимой группе Ли формулируются довольно громоздко. Первый из приводимых здесь существенно использует понятие расщепления.

Пусть $i:R\hookrightarrow M(R)=T_R\ltimes U_R$ — расщепление Мальцева для разрешимой односвязной группы Ли R. Если N — нильрадикал группы R, то $M(R)/N$ — группа Ли, изоморфная $T_R\times U_R/N$. Пусть p_1, p_2 — проекции группы Ли $T_R\times U_R/N$ на ее прямые сомножители T_R и U_R/N соответственно. Группа R/N естественным образом вкладывается в $M(R)/N$. Пусть $q_i=p_i|_{R/N}$ — ограничения p_i на R/N, $i=1, 2$. Отображения q_i являются изоморфизмами.

Теорема 3.12 ([54]). В разрешимой односвязной группе Ли R хотя бы одна решетка существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(i) Нильрадикал U_R группы $M(R)$ имеет $\mathbf{Q}$-форму $U_R(\mathbf{Q})$ и, если N — нильрадикал группы R, то $U_R(\mathbf{Q})\cap N$ является $\mathbf{Q}$-формой группы N.

(ii) Положим $\Phi=q_1\circ q_2^{-1}(U_R(\mathbf{Q})/U_R(\mathbf{Q})\cap N)$. Тогда подгруппа $\Phi\subset T_R$ содержит такую решетку L полного ранга, естественное действие которой на алгебру Ли $\mathfrak{u}_R$ в подходящем базисе из $\mathfrak{u}_R(\mathbf{Q})$ записывается целочисленными матрицами.

Приведем еще один критерий существования решетки, который близок к указанному выше, но не использует понятие расщепления.

Теорема 3.13 ([125]). В разрешимой односвязной группе Ли R существует хотя бы одна решетка тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(i) Нильрадикал N группы Ли R имеет $\mathbf{Q}$-форму.

(ii) Пусть $\mathrm{Ad}_R: R\to GL(\mathfrak{r})$ — присоединенное представление, а $\mathrm{Ad}_{R,\mathfrak{n}}$ — его представление, получающееся ограничением на касательную алгебру Ли $\mathfrak{n}$ группы Ли N. Тогда элементы из $\mathrm{Ad}_{R\mathfrak{n}}(R)$, записываемые в базисе из $\mathfrak{n}(\mathbf{Q})$ целочисленными матрицами, должны образовывать решетку в группе Ли $\mathrm{Ad}_{R\mathfrak{n}}(R)$.

Отметим, что известен также критерий существования решетки в линейной связной разрешимой группе Ли [105].

3.8. Расщепление Вана и его применения. Пусть Γ — некоторая группа Вана. Как описать все односвязные разрешимые группы Ли, которые содержат решетки, изоморфные Γ? Для ответа на этот вопрос понадобилось ввести аналог расщепления для групп Вана.

Рассмотрим вначале частный случай группы Вана — решетку Γ в односвязной разрешимой группе Ли R. Имеем точную последовательность групп $\{e\}\to\Delta\to\Gamma\to\mathbf{Z}^k\to\{e\}$, где $\Delta=\Gamma\cap N$ (N — нильрадикал группы R), $\mathbf{Z}^k=\Gamma/\Delta$ (см. п. 3.5). Группу N мы будем обозначать иначе через $\Delta_{\mathbf{R}}$. Она содержит Δ в качестве решетки, и потому имеет рациональную форму $\Delta_{\mathbf{Q}}$, содержащую Δ. Всякий автоморфизм решетки Δ однозначно

распространяется до автоморфизма группы Ли $\Delta_{\mathbf{R}}$ (следствие 2.8). Поэтому существует группа Ли $\Gamma_{\mathbf{R}}$ (несвязная, если $k>0$) и следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{Z}^k \arrow[r] \arrow[d, equal] & \{e\} \\
\{e\} \arrow[r] & \Delta_{\mathbf{R}} \arrow[r] & \Gamma_{\mathbf{R}} \arrow[r] & \mathbf{Z}^k \arrow[r] & \{e\}.
\end{tikzcd}$$

Отметим, что Γ вкладывается в $\Gamma_{\mathbf{R}}$, а так как $\Gamma\hookrightarrow R$, то и $\Gamma_{\mathbf{R}}$ естественно вкладывается в R (фактически $\Gamma_{\mathbf{R}}=\Gamma N$).

Пусть $i:R\hookrightarrow M(R)$ — расщепление Мальцева для R. Через T'_Γ обозначим образ $\Gamma_{\mathbf{R}}$ при естественном эпиморфизме $M(R)=T_R\ltimes U_R\to T_R$. Существует такое вложение $\alpha:T_R\hookrightarrow\mathrm{Aut}\,R$, что $M(R)=\alpha(T_R)\ltimes U_R$ и $\alpha(T'_\Gamma)$ сохраняет подгруппу $\Gamma_{\mathbf{R}}$, [54]. Ограничение $\alpha(T'_\Gamma)$ на $\Gamma_{\mathbf{R}}$ обозначим T_Γ и рассмотрим полупрямое произведение $W(\Gamma)=T_\Gamma\ltimes\Gamma_{\mathbf{R}}$. Группу Ли $W(\Gamma)$ вместе с естественным вложением Γ в нее будем называть *расщеплением Вана* для решетки Γ (подробнее см. [54]). В группе $W(\Gamma)$ имеется наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа U_Γ, и $W(\Gamma)$ является полупрямым произведением групп T_Γ и U_Γ. Свойства расщепления Вана во многом аналогичны свойствам расщепления Мальцева для разрешимых групп Ли.

Пусть теперь Γ — произвольная группа Вана. Оказывается, что и для нее тоже можно ввести понятие расщепления (не опираясь, в отличие от рассмотренного выше случая решетки $\Gamma\subset R$, на группу Ли R). Эта конструкция довольно сложна, и мы не будем ее приводить. Скажем лишь, что все введенные выше в случае решетки объекты Δ, $\Delta_{\mathbf{R}}$, $\Gamma_{\mathbf{R}}$, $W(\Gamma)$, T_Γ, U_Γ определяются и в общем случае. Указанное расщепление $\Gamma\hookrightarrow W(\Gamma)$ для произвольной группы Вана Γ называется *абстрактным расщеплением Вана* (подробнее о нем см. [54], [138]).

В терминах расщепления Вана можно решить многие вопросы, касающиеся групп Вана, решеток в разрешимых группах Ли и даже произвольных полициклических групп. В качестве примера рассмотрим (следуя [54]) вопрос о существовании и явном построении разрешимых односвязных групп Ли, содержащих в качестве решетки заданную группу Вана Γ.

Для группы Γ рассмотрим указанную выше нильпотентную группу Ли U_Γ. Существует, причем единственная, односвязная нильпотентная группа Ли N_Γ, содержащая U_Γ в качестве равномерной подгруппы (если бы U_Γ была дискретна, это бы следовало из теоремы 2.6, для произвольной U_Γ доказательство аналогично). Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}\,N_\Gamma$ автоморфизмов группы N_Γ и образуем полупрямое произведение $\mathrm{Aut}\,N_\Gamma\ltimes N_\Gamma$ — голоморф группы N_Γ. В $\mathrm{Aut}\,N_\Gamma\ltimes N_\Gamma$ естественным образом вкладывается группа $W(\Gamma)=T_\Gamma\ltimes U_\Gamma$, а потому — и исходная группа Γ. Рассмотрим естественный эпиморфизм

$\alpha: \mathrm{Aut}\, N_\Gamma \rtimes N_\Gamma \to \mathrm{Aut}\, N_\Gamma$ и пусть $A = {}^a(\alpha(\Gamma))$ — замыкание в топологии Зарисского абелевой подгруппы $\alpha(\Gamma)$ в алгебраической группе $\mathrm{Aut}\, N_\Gamma$. Положим $\Gamma^\# = \alpha|_\Gamma^{-1}(\alpha(\Gamma)\cap A^0)$, где A^0 — связная компонента единицы группы A.

Подгруппа $\Gamma^\#$ имеет конечный индекс в Γ. Если $\Gamma^\# = \Gamma$, то группа Вана Γ называется *предделимой.* Значение понятия предделимости в том, что предделимая группа Вана **Γ** допускает вложение в качестве решетки в односвязную разрешимую группу Ли. Эту группу Ли можно рассматривать в некотором (не совсем совпадающем с общепринятым) смысле как «делимую оболочку» для Γ. А именно, имеет место

Теорема 3.14 ([52]). Группа Вана изоморфна решетке в некоторой разрешимой односвязной группе Ли тогда и только тогда, когда она предделима.

Приведем теперь конструкцию некоторых разрешимых односвязных групп Ли, содержащих в качестве решетки заданную предделимую группу.

Рассмотрим введенную выше связную абелеву группу Ли A^0. Пусть C — ее максимальный тор, а $\pi: A^0 \to A^0/C$ — естественный эпиморфизм. Группа Ли A^0/C абелева, односвязна, поэтому она изоморфна $\mathbf{R}^s$, где $s = \dim A^0/C$. Пусть B — линейная оболочка подгруппы $\pi\circ\alpha(\Gamma)$ в A^0/C. Положим $T = \pi^{-1}(B) \subset A^0$. Так как $A^0 \subset \mathrm{Aut}\, N_\Gamma$, то и $T \subset \mathrm{Aut}\, N_\Gamma$. Образуем полупрямое произведение $D'(\Gamma) = T \rtimes N_\Gamma$.

Рассмотрим нильпотентную группу Δ, фигурирующую в определении Γ как группы Вана. Имеем $\Delta_\mathbf{R} \subset D'(\Gamma)$, причем $\Delta_\mathbf{R}$ нормальна в $D'(\Gamma)$ и $D'(\Gamma)/\Delta_\mathbf{R}$ абелева. Так как $\Gamma \subset TN_\Gamma$ (в силу предделимости Γ) и $\Gamma\cap\Delta_\mathbf{R} = \Delta$, то получаем гомоморфизм $\gamma: \Gamma/\Delta \to D'(\Gamma)/\Delta_\mathbf{R}$. Имеем $\Gamma/\Delta \simeq \mathbf{Z}^k$, а группа $D'(\Gamma)/\Delta_\mathbf{R}$ — связная абелева группа Ли. Поэтому гомоморфизм γ распространяется (хотя и не однозначно) до гомоморфизма $\bar\gamma: \Gamma/\Delta\otimes\mathbf{R} = \mathbf{R}^k \to D'(\Gamma)/\Delta_\mathbf{R}$. Положим $D' = \mathrm{Im}\,\bar\gamma$. Группа D' зависит от выбора представления Γ в виде расширения и выбора $\bar\gamma$, но группа $D'C$ от них уже не зависит. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\eta: D'(\Gamma) \to D'(\Gamma)/\Delta_\mathbf{R}$ и положим $R(\Gamma) = \eta^{-1}(D')$, $D(\Gamma) = \eta^{-1}(D'C)$.

Подгруппа $R(\Gamma)$ односвязна, разрешима и содержит исходную предделимую группу Γ в качестве решетки. Группа Ли $D(\Gamma)$ тоже содержит Γ в качестве решетки. Она связна, разрешима, но не обязательно односвязна. Имеем $D(\Gamma) = R(\Gamma)C$, где C — тор (здесь все группы рассматриваются как подгруппы в $\mathrm{Aut}\, N_\Gamma \rtimes N_\Gamma$). Группа $D(\Gamma)$ определяется по Γ однозначно с точностью до изоморфизма, группа же $R(\Gamma)$ определяется по Γ неоднозначно.

Теорема 3.15 ([54]). Пусть **Γ** — предделимая группа Вана. Тогда:

(i) односвязная разрешимая группа Ли $R(\Gamma)$ имеет решетку, изоморфную **Γ**;

(ii) всякий автоморфизм группы **Γ** однозначно распространяется до автоморфизма содержащей ее в качестве решетки группы $D(\Gamma)$.

Теорема 3.15 (i) дает описание некоторых разрешимых односвязных групп Ли R, содержащих решетки, изоморфные заданной группе **Γ**. Однако это описание не полно и не всегда удобно (здесь трудно выделить среди всех групп R неизоморфные). Описание всех таких групп R см. в п. 3.9 ниже.

Примеры 3.16. 1. Пусть $\Gamma = \mathbf{Z}^n$. Применение приведенной выше конструкции показывает, что здесь $R(\Gamma) \simeq \mathbf{R}^n$, $D(\Gamma) \simeq T\rtimes\mathbf{R}^n$, где T — максимальный тор в $GL_n(\mathbf{R})$. Что касается всех односвязных разрешимых групп Ли R, имеющих изоморфные $\mathbf{Z}^n$ решетки, то для них имеем $R = A\rtimes N$, где N — абелева нормальная подгруппа, A — абелева односвязная подгруппа, а $\varphi: A\to \mathrm{Aut}\,N$ — такой гомоморфизм, что подгруппа $\mathrm{Im}\,\varphi$ компактна [55], [125]. В частности, при $n\geqslant 5$ число неизоморфных среди таких групп бесконечно.

2. Пусть Γ — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Тогда $D(\Gamma) = CN_\Gamma$, где N_Γ — (единственная) односвязная нильпотентная группа Ли, содержащая решетку, изоморфную Γ, а C — максимальный тор в $\mathrm{Aut}\, N_\Gamma$. Группа является группой типа (I), о которых см. § 4 ниже и [58]. Ясно также, что $R(\Gamma) \simeq N_\Gamma$.

3.9. Алгебраическое расщепление и его применения. Для разрешимых групп Ли можно ввести и другие расщепления, отличные от расщепления Мальцева. Несколько близких определений, связанных с вложением в алгебраическую группу, были даны в [120], [106], [35], [14]. Ниже мы следуем в основном работе [35].

Пусть R — односвязная разрешимая группа Ли. Ее *алгебраическим расщеплением* называется алгебраическая **R**-определенная группа $A(R)$ вместе с вложением $i: R \hookrightarrow A(R)$ таким, что

(i) ${}^a(i(R)) = A(R)$;

(ii) если U — унипотентный радикал в $A(R)$, а N — нильрадикал в R, то $i(N)\subset U$ и $\dim U = \dim R$;

(iii) централизатор U в $A(R)$ совпадает с центром группы U.

Алгебраическое расщепление тесно связано с расщеплением Мальцева $M(R) = T_R \rtimes U_R$. А именно, $A(R) = {}^a(T_R^*) \rtimes U_R$, где ${}^a(T_R^*)$ — замыкание в топологии Зарисского подгруппы $T_R^* \subset \mathrm{Aut}\, U_R$ (в п. 3.7 выше T_R^* рассматривалась как подгруппа в $\mathrm{Aut}\, R$, но это различие оказывается несущественным для наших целей). Из сказанного вытекает существование алгебраического расщепления (см. также [35], [120]); можно доказать и его единственность.

Пусть H — замкнутая равномерная подгруппа в R (например, решетка). Все подгруппы в R мы с помощью вложения i можем рассматривать и как подгруппы в $A(R)$. Рассмотрим алгебраическое замыкание ${}^aH$ подгруппы H в $A(R)$. Имеем ${}^aH=T'U'$, где U' — унипотентный радикал в ${}^aH$, а T' — некоторый алгебраический тор. Подгруппа T' действует сопряжениями на U'. Пусть T^* — соответствующая подгруппа в $\operatorname{Aut} U'$. Рассмотрим $Z=Z_{\operatorname{Aut} U'}(T^*)$ — централизатор T^* в $\operatorname{Aut} U'$, и пусть K^* — некоторый максимальный компактный тор в Z. Тогда K^*T^* — абелева подгруппа в $\operatorname{Aut} U'$, и имеем вложения $(K^*T^*)\ltimes U'\subset Z\ltimes U\subset \operatorname{Aut} U'\ltimes U'$. Пусть $\varphi: T\ltimes U'\to T^*\ltimes U'$ — естественный эпиморфизм. Ясно, что φ-изоморфизм.

Следующая теорема дает довольно эффективное описание всех односвязных разрешимых групп Ли, имеющих решетки, изоморфные заданной группе Γ.

Теорема 3.17 ([35]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R. Тогда произвольная односвязная разрешимая группа Ли, имеющая решетку, изоморфную Γ, изоморфна подгруппе R' в группе Ли $R^*=(K^*T^*)\ltimes U'$, причем

(i) R' содержит в качестве решетки подгруппу $x^{-1}(\varphi(i(\Gamma))x$ (изоморфную Γ) для некоторого $x\in Z$;

(ii) $R'\supset(T^*U';\ T^*U')$;

(iii) Подгруппа $U'\subset R^*$ нормализует R'.

Отметим, что в [35] утверждение теоремы 3.17 доказано не только для решеток, но и для произвольных равномерных подгрупп в односвязных разрешимых группах Ли. В отличие от теоремы 3.15, теорема 3.17 позволяет указать явную конструкцию всех попарно неизоморфных односвязных разрешимых групп Ли, содержащих изоморфные между собой решетки. Это приводит, в частности, к следующему важному результату.

Теорема 3.18 ([35]). Пусть Γ — некоторая группа. Число односвязных разрешимых групп Ли R, рассматриваемых с точностью до изоморфизма и содержащих решетки, изоморфные группе, не более чем счетно.

Фактически, число неизоморфных разрешимых односвязных групп Ли, содержащих решетки, изоморфные заданной группе Γ, может быть счетно (например, для $\Gamma=\mathbf{Z}^n$, $n\geqslant 5$), но может быть равно и единице.

Например, так будет для $\Gamma={}^n$ при $n=1, 2$. Но существуют подобные группы Γ и сколь угодно большого ранга.

Чтобы показать это, рассмотрим строго характеристическую нильпотентную односвязную группу Ли N (это такая группа Ли, что группа $\operatorname{Aut} N$ унипотентна), имеющая $\mathbf{Q}$-структуру. Такие группы N существуют любой размерности $\geqslant 7$ [151].

Пусть $\Gamma=N(\mathbf{Z})$ — решетка в N. Из унипотентности $\operatorname{Aut} N$ следует, что $N_\Gamma=N$, $K^*=T^*=\{e\}$ и потому $R^*=N$. Но тогда в силу теоремы 3.17 отсюда следует, что N — единственная односвязная разрешимая группа Ли, имеющая решетку, изоморфную указанной группе Γ.

Отметим, что в условиях теоремы 3.18 множество групп R (при фиксированной Γ) распадается на конечное число классов с изоморфными коммутантами (R, R).

3.10. Линейная представимость решеток. Многие теоретико-групповые свойства решеток в разрешимых группах Ли тесно связаны со свойствами произвольных полициклических групп. В частности, это касается свойства линейной представимости таких групп, которое мы здесь рассмотрим (см. также [54]).

Теорема 3.19 ([105], [120]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R. Тогда существует такое точное линейное представление $\rho: R\to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, что $\rho(\Gamma)\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

В связи с теоремой 3.19 отметим, что произвольная разрешимая подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ полициклична.

Сравнение теоремы 3.19 с определением арифметической подгруппы (см. п. 7.1 гл. 1) приводит к вопросу, не будет ли любая решетка в односвязной разрешимой группе Ли арифметична? Если R нильпотентна, то это действительно так (см. теорему 2.10 выше), но в общем случае это неверно.

Пример 3.20. Рассмотрим следующий пример, следуя [120]. Пусть $R=\mathbf{R}\ltimes_\varphi \mathbf{R}^4$ — полупрямое произведение, соответствующее гомоморфизму $\varphi: \mathbf{R}\to \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ такому, что $\varphi(1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}+$ $+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$. Так как $\varphi(1)\in \mathrm{GL}_4(\mathbf{Z})$, то можно рассмотреть в R подгруппу $\Gamma=\mathbf{Z}\ltimes_{\varphi_\mathbf{Z}}\mathbf{Z}^4$ (где $\varphi_\mathbf{Z}$ — это ограничение φ на $\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z}^4\subset\mathbf{R}^4$. Ясно, что Γ — решетка в R. Оказывается, что Γ не будет арифметической подгруппой в R (в смысле определения из § 7 гл. 1). Это связано в основном с тем, что два из четырех собственных значений матрицы $\varphi(1)$ (а именно, $2+\sqrt{3}$ и $3+2\sqrt{2}$ мультипликативно независимы в $\mathbf{C}^*$, и потому замыкание подгруппы $\varphi(t)$ относительно топологии Зарисского слишком велико для того, чтобы Γ удовлетворяла условию арифметичности.

В приведенном примере группа R не является алгебраической. Это не случайно. Оказывается, что для вещественных алгебраических групп имеет место следующая теорема, представляющая собой прямое обобщение теоремы 2.10 — одного из основных результатов о решетках в односвязных нильпотентных группах Ли (которые всегда алгебраичны).

Теорема 3.21 ([105]). Пусть R — разрешимая вещественная алгебраическая группа, а Γ — решетка в R. Тогда существует алгебраическая $\mathbf{Q}$-подгруппа $F\subset R$ такая, что Γ соизмерима с $F(\mathbf{Z})$.

Ясно, что R/F в теореме 3.21 будет компактно. Если группа Ли R односвязна, то $R=F$ и потому в этом случае Γ будет соизмерима с $R(\mathbf{Z})$.

В одном частном случае теорема 3.19 может быть усилена.

Теорема 3.22 ([45]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, причем ${}^{a}(\mathrm{Ad}_R(\Gamma)) = {}^{a}(\mathrm{Ad}_R(R))$. Тогда существует точное линейное представление $\rho: \mathrm{Hol}\,\Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, сужение которого на Γ продолжается до точного представления $\bar{\rho}: \mathrm{Hol}\,R \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. При этом $\rho(\mathrm{Aut}\,\Gamma)$ является арифметической подгруппой в своем алгебраическом замыкании. (Здесь $\mathrm{Hol}\,\Pi = \mathrm{Aut}\,\Pi \ltimes \Pi$ — *голоморф* группы Π.)

С теоремой 3.21 тесно связан следующий результат, относящийся к произвольным полициклическим группам.

Теорема 3.23 ([32]). Пусть Γ — произвольная полициклическая группа. Тогда существует вложение $\mathrm{Hol}\,\Gamma$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ при некотором $n \in \mathbf{N}$.

В частности, в $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ вкладываются группы Γ и $\mathrm{Aut}\,\Gamma$. Вложимость Γ в $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ дает решение проблемы Холла, полученное Ауслендером. Из вложимости $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ выводится другой важный результат — конечная определенность группы $\mathrm{Aut}\,\Gamma$, [32].

§ 4. Деформации и когомологии решеток в разрешимых группах Ли

4.1. Описание деформаций решеток в односвязных разрешимых группах Ли. Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R. Через $i_0: \Gamma \hookrightarrow R$ обозначим тождественное вложение. Рассмотрим пространства $R(\Gamma, R)$ всех вложений Γ в R в качестве решетки (см. § 6 гл. 1), и пусть $R_0(\Gamma, R)$ — связная компонента пространства $R(\Gamma, R)$, содержащая исходное вложение i_0. Пространство $R_0(\Gamma, R)$ линейно связно (см. п. 6.3 гл. 1), поэтому элементы из него можно рассматривать как получающиеся непрерывными однопараметрическими деформациями из i_0.

Рассмотрим следующую конструкцию деформации решетки Γ в группе R. Если N — нильрадикал в R, то ΓN — замкнутая (в силу теоремы 3.6) подгруппа в R. Пусть f — некоторый элемент из $\mathrm{Aut}(\Gamma N)$. Тогда, если $j: \Gamma N \hookrightarrow R$ — естественное вложение, то $j \circ f \circ i_0$ — элемент из $R(\Gamma, R)$. Получаем естественное отображение группы Ли $\mathrm{Aut}(\Gamma N)$ в $R(\Gamma, R)$. Оказывается, что оно позволяет явно описать пространство $R_0(\Gamma, R)$.

Теорема 4.1 ([139], [82]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, а N — нильрадикал в R. Тогда естественное отображение связной компоненты единицы $\mathrm{Aut}^0(\Gamma N)$ группы Ли $\mathrm{Aut}(\Gamma N)$ в $R_0(\Gamma, R)$ является гомеоморфизмом.

Одно из доказательств теоремы 4.1 основано на изучении когомологий решетки Γ со значениями в касательной алгебре Ли $\mathfrak{r}$ группы Ли R (относительно определений, связанных с когомологиями, см. п. 6.2 гл. 1 и [47], [120]). Основным когомологическим результатом при этом является

Предложение 4.2 ([82]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, а N — нильрадикал в R. Тогда гомоморфизм $H^1(\Gamma, \mathfrak{n}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{r})$, порожденный вложением алгебр Ли $\mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{r}$, является эпиморфизмом.

Здесь когомологии рассматриваются относительно действий Γ на $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{r}$, порожденных вложением $\Gamma \hookrightarrow R$ и присоединенным представлением группы Ли R. В дальнейшем в обозначениях когомологий указание на действие будет опускаться, если оно ясно из контекста.

Рассмотрим вопрос о жесткости решетки Γ в односвязной разрешимой группе Ли R. Если решетка Γ является жесткой, то пространство $R_0(\Gamma, R)$ гомеоморфно $\mathrm{Aut}^0(R)/Z_{\mathrm{Aut}^0(R)}(\Gamma)$ (где

$$Z_{\mathrm{Aut}^0(R)}(\Gamma) = \{f \in \mathrm{Aut}^0(R) \mid f(\gamma) = \gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Отсюда и из теоремы 4.1 легко следует, что в общем случае решетка $\Gamma \subset R$ жесткой не будет. Рассмотрим один конкретный пример.

Пример 4.3. Пусть $R = \tilde{E}(2)^0$, а Γ — решетка в R, изоморфная $\mathbf{Z}^3$. Имеем $\Gamma = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^2$, пусть $\gamma = 1 \in \mathbf{Z}$ — образующая (см. п. 3.1 выше). Выберем вектор $v \in \mathbf{R}^2$, $v \neq 0$, и рассмотрим в $R = \mathbf{R} \circ \mathbf{R}^2$ подгруппу Γ_t, порожденную элементом $(\gamma, vt) \in R$ и стандартной целочисленной решеткой $\mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{R}^2$. Ясно, что при всех $t \in \mathbf{R}$ группы Γ_t изоморфны группе $\mathbf{Z}^3$, являются решетками в R и $\Gamma_0 = \Gamma$. Получаем деформацию решетки Γ в R. Эта деформация не порождается действием группы $\mathrm{Aut}\,R$, так как под действием ее элемент γ может лишь оставаться неподвижным или переходить в γ^{-1}. Следовательно, Γ — нежесткая решетка в R. Однако, несмотря на такого рода примеры, существуют некоторые интересные классы разрешимых групп Ли, в которых решетки определяют содержащую их разрешимую группу Ли однозначно с точностью до автоморфизма (т. е. являются сильно жесткими). Например, сильно жесткими будут решетки в односвязных нильпотентных группах Ли (см. следствие 2.8), а также в односвязных разрешимых группах Ли типа (R) (см. теорему 5.2 ниже). Вот еще один результат в этом направлении.

Теорема 4.4 ([40]). Пусть Γ — арифметическая подгруппа в разрешимой алгебраической $\mathbf{Q}$-группе R. Если $Z(R) = \{e\}$, то каждый автоморфизм φ группы Γ порождает автоморфизм $\tilde{\varphi}$ группы R, совпадающий с φ на подгруппе конечного индекса группы Γ.

Фактически, в [40] доказано более общее утверждение.

Жесткость решеток в алгебраических группах более подробно рассмотрена в [33].

Отметим, что свойство жесткости решетки Γ зависит во многом не от Γ, а от содержащей ее группы Ли R. Например, решетка Γ, вложенная в группу Ли $D(\Gamma)$ (см. п. 3.8), всегда является жесткой в силу теоремы 3.15(ii).

4.2. О когомологиях решеток в разрешимых группах Ли. Пусть $\varphi: G \to GL(V)$ — конечномерное линейное представление группы Ли G. Через $H^*(G, \rho, V)$ обозначается пространство (гладких) когомологий группы G с коэффициентами в V; символ φ при этом иногда опускается. Представление φ порождает представление $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Между когомологиями $H^*(G, V)$ группы Ли G и когомологиями $H^*(\mathfrak{g}, V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует тесная связь (точнее, связывающая их спектральная последовательность [47], [86]). В частности, если группа Ли G разрешима и односвязна, то группы $H^*(G, V)$ и $H^*(\mathfrak{g}, V)$ естественно изоморфны.

Пусть Γ_C — некоторая подгруппа группы Ли G. Положим $\rho = \varphi + \mathrm{Ad}_G^{\mathbf{C}}$, где $\mathrm{Ad}_G: G \to GL(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление, а $\mathrm{Ad}_G^{\mathbf{C}}$ — его комплексификация. Подгруппу Γ называют *обильной*, если ${}^a(\rho(\Gamma)) \supset \rho(G)$.

Теорема 4.5 ([102], [120]). Пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, а $\varphi: R \to GL(V)$ — конечномерное линейное представление. Тогда, если подгруппа Γ является обильной, то $H^*(\Gamma, V)$ естественно изоморфно $H^*(\mathfrak{r}, V)$.

Изоморфизмом в теореме 4.4 является композиция изоморфизма, порождаемого вложением $\Gamma \hookrightarrow R$ и естественного изоморфизма $H^*(R, V) \simeq H^*(\mathfrak{r}, V)$, упомянутого выше. Условие ρ-обильности для Γ в теореме 4.5 может быть ослаблено в нескольких направлениях [102].

Наиболее тесной связь между когомологиями решетки Γ и касательной алгебры Ли $\mathfrak{r}$ объемлющей группы Ли R является в том случае, когда R нильпотентна. А именно, имеют место такие следствия теоремы 4.5.

Следствие 4.6 ([120]). Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N, а $\varphi: N \to GL(V)$ — конечномерное унипотентное представление. Тогда группа $H^*(\Gamma, V)$ естественно изоморфна $H^*(\mathfrak{n}, V)$.

Следствие 4.7 ([120]). Пусть Γ — решетка в односвязной нильпотентной группе Ли N. Тогда $H^*(\Gamma, \mathbf{R}) \simeq H^*(\mathfrak{n}, \mathbf{R}) \simeq$ $\simeq H^*(N/\Gamma, \mathbf{R})$.

Здесь $\mathbf{R}$ рассматривается как тривиальный модуль, а $H^*(N/\Gamma, \mathbf{R})$ — это группа когомологий компактного нильмногообразия N/Γ.

Выше уже отмечалось, что вложение $\Gamma \hookrightarrow R$ и изоморфизм $H^*(R, V) \simeq H^*(\mathfrak{r}, V)$ индуцируют гомоморфизм $\alpha: H^*(\mathfrak{r}, V) \to$

$\to H^*(\Gamma, V)$. Изоморфизмом он является не всегда. Например, рассмотрим в $R = E(2)^0$ решетку $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^3$ (см. п. 3.1). Тогда $H^1(\Gamma, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^3$, но $H^1(E(2)^0, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$. Однако отображение α всегда является вложением (подробнее см. п. 7.1 гл. 3).

§ 5. Решетки в разрешимых группах Ли, принадлежащих некоторым специальным классам

5.1. Решетки в разрешимых группах Ли типа (I). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй типа* (I), если для любого $X \in \mathfrak{g}$ все собственные значения линейного оператора $\mathrm{ad}\, X$ чисто мнимы[1]. Группа Ли называется *группой типа* (I), если ее касательная алгебра Ли — типа (I).

Пусть G — некоторая связная группа Ли, $G = SR$ — ее разложение Леви (R — радикал, S — полупростая часть). Группа G является группой типа (I) тогда и только тогда, когда ее радикал типа (I), а полупростая часть компактна (см. [58]). Отсюда видно, что при изучении решеток в группах Ли G типа (I) наиболее интересен случай, когда G разрешима. А для таких групп G основным является следующий результат.

Теорема 5.1 ([54]). Пусть Γ — решетка в разрешимой группе Ли R. Тогда:

(а) если Γ нильпотентна, то R — группа типа (I);

(б) если R — группа типа (I), то Γ *почти нильпотентна*, т. е. содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.

В условиях пункта б) теоремы 5.1 решетка Γ не всегда будет нильпотентна. Например, группа Ли $E(2)^0$ является, как легко понять, группой типа (I), но в ней существует ненильпотентная решетка, содержащая в качестве подгруппы индекса 2 решетку, изоморфную $\mathbf{Z}^3$ (см. п. 1.1).

Если группа Γ почти нильпотентна, то описание некоторых односвязных разрешимых групп Ли, содержащих решетки, изоморфные Γ, приведено в п. 3.8 выше.

5.2. Решетки в группах Ли типа (R). Рассмотрим класс групп Ли, в некотором смысле диаметрально противоположный классу групп Ли типа (I) (два эти класса пересекаются по классу нильпотентных групп Ли).

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй типа* (R), если все собственные значения линейных операторов $\mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathfrak{g}$, вещественны. Группа Ли называется *группой типа* (R), если ее касательная алгебра Ли—типа (R). Такие группы и алгебры Ли называются еще *вполне разрешимыми*. Любая группа Ли типа (R) разрешима, подробнее о них см. [124].

Теорема 5.2 ([124], [12]). Пусть R, R' — односвязные (разрешимые) группы Ли типа (R), а Γ — решетка в R. Тогда

[1] В [54] такие алгебры Ли названы алгебрами Ли типа (R) (от «rigid»). Нам символ (I) кажется удобнее, ибо он напоминает о мнимости собственных значений.

произвольный гомоморфизм $\varphi: \Gamma \to R'$ продолжается, причем единственным образом, до гомоморфизма $\bar\varphi: R \to R'$.

Из теоремы 5.2 следует, как и в случае нильпотентных групп Ли (см. следствие 2.8), что если Γ, Γ' — решетки в односвязных группах Ли R и R' типа (R) соответственно, то любой изоморфизм $\varphi: \Gamma \to \Gamma'$ однозначно продолжается до изоморфизма $\bar\varphi: R \to R'$, при этом компактные солвмногообразия R/Γ и R'/Γ' диффеоморфны. Можно охарактеризовать все группы, изоморфные решеткам в односвязных группах Ли типа (R), [12], что дает обобщение теоремы 2.4. Вообще, группы Ли типа (R) по своим свойствам весьма близки к нильпотентным.

5.3. Решетки в группах Ли типа (E). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй типа* (E) (или *экспоненциальной*), если для любого $X \in \mathfrak{g}$ ненулевые собственные значения оператора $\operatorname{ad} X$ не являются чисто мнимыми. Группа Ли называется *группой типа* (E), если ее касательная алгебра — типа (E).

Любая группа Ли типа (E) разрешима. Группы Ли типа (E) характеризуются еще и тем, что для любого $g \in G$ собственные значения линейного оператора Ad_g, отличные от 1, по модулю не равны 1. Односвязные же группы Ли типа (E) характеризуются также тем, что экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{g} \to G$ для них является диффеоморфизмом [124].

Любая группа Ли типа (R) является группой типа (E). Но для решеток в группах Ли типа (E) выполняются далеко не все свойства, верные для решеток в группах типа (R). Например, любая решетка в односвязной группе Ли типа (R) является сильно жесткой (см. теорему 5.2), а для решеток в группах типа (E) это уже не всегда так (см. [33]). Но, с другой стороны, на решетки в группах Ли типа (E) все же переносятся некоторые важные свойства решеток в нильпотентных группах Ли. Например, пункты а) и б) следующего предложения обобщают следствие 2.5.

Предложение 5.3 ([124], [54]). Пусть Γ — решетка в разрешимой группе Ли R типа (E). Тогда

а) $\Gamma \cap C^k(R)$ — решетки в $C^k(R)$, а $\Gamma \cap C_k(R)$ — в $C_k(R)$, $k = 0, 1, \ldots$;

б) $\Gamma \cap D^k(R)$ — решетки в $D^k(R)$, $k=0, 1, \ldots$;

а) если Γ — нильпотентна, то нильпотентна и R (относительно $C^k(R)$, $C_k(R)$, $D^k(R)$ см. п. 4.2).

Ни одно из утверждений предложения 5.3 на решетки в произвольных разрешимых группах Ли не переносится. Например, в $\widetilde{E(2)}^0$ имеется решетка, изоморфная $\mathbf{Z}^3$, а сама $\widetilde{E(2)}^0$ — ненильпотентна.

5.4. Решетки в комплексных разрешимых группах Ли. Рядом интересных свойств обладают решетки Γ в произвольных комплексных разрешимых группах Ли R. Например, из результатов работы [63] можно вывести, что для таких Γ и R

справедливы все утверждения предложения 5.3 (причем их можно обобщить и на некоторые дискретные подгруппы группы R, не являющиеся решетками). Вообще, свойства решеток в комплексных разрешимых группах Ли похожи на свойства решеток в группах Ли типа (R). Эта аналогия основывается, в частности, на таком утверждении.

Предложение 5.4 ([124], [63]). Пусть Γ — решетка в связной разрешимой группе Ли R, а H — связная подгруппа в R, инвариантная относительно Γ. Тогда, если R — типа (R) или же комплексна, то H нормальна в R.

Из предложения 5.4 выводятся многие свойства решеток, общие для случаев комплексных групп и групп типа (R). Но аналогия между этими случаями далеко не полная, например, аналог теоремы 5.2 для комплексного случая, вообще говоря, неверен.

5.5. Разрешимые группы Ли малой размерности, имеющие решетки. Ниже перечислены все односвязные разрешимые группы R размерности $\leqslant 4$, которые имеют решетки. В случаях, когда $\dim R \leqslant 2$, это делается без труда, случай $\dim R = 3$ подробно разобран в [54]. Случай $\dim R = 4$ разбирается аналогично.

Итак, пусть Γ — решетка в односвязной разрешимой группе R. Тогда:

1) Если $\dim R = 1$, то $R \simeq \mathbf{R}$ и $\Gamma \simeq \mathbf{Z}$.

2) Если $\dim R = 2$, то $R \simeq \mathbf{R}^2$ и $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^2$.

3) Если $\dim R = 3$, то либо

а) $R \simeq \mathbf{R}^3$, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^3$, либо

б) $R \simeq N_3$, Γ сопряжена с помощью элемента из $\operatorname{Aut} R$ одной из групп

$$\Gamma(r) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{k}{r} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, m, n, k \in \mathbf{Z} \right\}, \quad r \in \mathbf{N}, \text{ либо}$$

в) $R \simeq \widetilde{E(2)}^0$, группа Γ почти абелева (см. [54]), либо

г) $R \simeq R_3 = \mathbf{R} \ltimes_\varphi \mathbf{R}^2$, где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, $\quad \Gamma \simeq \mathbf{Z} \ltimes \mathbf{Z}^2$

(см. п. 3.1 выше или [54]).

4) Если $\dim R = 4$, то или

I. R нильпотентна, и тогда либо

а) $R \simeq \mathbf{R}^4$, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^4$, либо

б) $R \simeq N_3 \times \mathbf{R}$, либо

в) R отвечает алгебре Ли $\mathfrak{n}$, которая в подходящем базисе X_1, X_2, X_3, X_4, задается соотношениями $[X_1, X_i] = X_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$ (где считается, что $X_5 = 0$), или

II. R ненильпотента, и тогда либо

а) $R \simeq \mathbf{R} \ltimes_{\varphi} \mathbf{R}^3$, где $\varphi: \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(1) \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z})$, либо

б) $R \simeq \mathbf{R} \ltimes_{\psi} N_3$ где $\psi: \mathbf{R} \to \mathrm{Aut}\, N_3$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(1)$ сохраняет подгруппу $N_3(\mathbf{Q})$ в N_3.

Укажем теперь некоторые результаты о комплексных односвязных разрешимых группах Ли R малой размерности, содержащих решетки. Если $\dim_{\mathbf{C}} R \leqslant 2$, то $R \simeq \mathbf{C}^1$ или $\mathbf{C}^2$. Если $\dim_{\mathbf{C}} R = 3$, то R изоморфна $\mathbf{C}^3$ или $N_3(\mathbf{C})$, или одной из двух групп Ли, являющихся комплексификациями групп Ли $\widetilde{E(2)^0}$ и R_3. Если же $\dim_{\mathbf{C}} R = 4$, то число n_4 неизоморфных среди таких R, имеющих решетки, равно 6, а при $\dim_{\mathbf{C}} R = 5$ число n_5 комплексных разрешимых групп Ли R, имеющих решетки, точно пока не известно, известна лишь оценка $15 \leqslant n_5 \leqslant 21$ (в [115] приведен чуть менее точный результат).

Глава 3

РЕШЕТКИ В ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ

§ 1. Общие сведения

Здесь собраны факты, уточняющие некоторые общие теоремы о решетках из первой главы в случае, когда объемлющая группа полупроста.

1.1. Приводимость решеток.

Теорема 1.1 ([120]). Пусть Γ — решетка в связной полупростой группе Ли G, не имеющей компактных множителей. Тогда группа G может быть единственным образом представлена в виде почти прямого произведения $G = \Pi G_i$ связных нормальных подгрупп G_i так, что $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i$ — неприводимая решетка в группе G_i. При этом группа $\Pi\Gamma_i$ является подгруппой конечного индекса в Γ.

Сформулированная теорема позволяет при доказательстве многих утверждений ограничиваться неприводимыми решетками.

1.2. Теорема плотности.

Теорема 1.2. Пусть G — полупростая группа Ли без компактных множителей, и $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ — ее конечномерное комплексное линейное представление. Если Γ — решетка в G, то подгруппа $\rho(\Gamma)$ плотна в $\rho(G)$ в топологии Зарисского.

◀ Объясним, как получить эту теорему из теоремы 8.2 гл. 1. Можно считать группу G связной. Тогда $\rho(G)$ — связная полупростая линейная группа Ли и, существует такая алгебраическая группа $H \subset \mathrm{GL}(V)$, что $\rho(G) = H^0$, [68].

Далее, согласно теореме 4.11 гл. 1 на факторпространстве $\rho(G)/\overline{\rho(\Gamma)}$ есть конечная инвариантная мера. Поскольку $[H:H^0] < \infty$, то и на факторпространстве $H/\overline{\rho(\Gamma)}$ есть конечная инвариантная мера. Тогда по теореме 8.2 группа $\overline{\rho(\Gamma)}$, а значит и $\rho(\Gamma)$, плотна в топологии Зарисского в H, и тем более в $\rho(G)$ ▶.

Сформулируем теперь два важных следствия теоремы плотности.

Предложение 1.3. Пусть G — полупростая группа Ли, $Z(G)$ — ее центр. Если Γ — решетка в G, то

а) $\Gamma Z(G)$ — дискретная подгруппа в G, и индекс $[Z(G) : (Z(G) \cap \Gamma)]$ конечен;

б) если группа G не имеет компактных множителей, то $Z(\Gamma) \subset Z(G)$.

◀ Пункт б) сразу следует из плотности $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ в $\mathrm{Ad}\,G$ в топологии Зарисского (теорема 1.2). При доказательстве а) можно считать, что G не имеет компактных множителей. Достаточно показать, что нормализатор $N_G(\Gamma)$ дискретен в G. Но нормализатор $N_G(\Gamma)$ является замкнутой подгруппой, и его связная компонента содержится в $Z(\Gamma)$, а значит, согласно б), и в $Z(G)$. Поэтому группа $N_G(\Gamma)$ дискретна. ▶

Предложение 1.4 ([120]). Пусть Γ — неприводимая решетка в связной полупростой группе Ли G без компактных множителей. Тогда для любой нетривиальной связной нормальной подгруппы $H \subset G$ группа $H\Gamma$ плотна в группе Ли G (в топологии группы Ли).

§ 2. Теория приведения

Группа $\mathrm{SL}_n^{*}(\mathbf{R})$ матриц с определителем ± 1 действует (справа) на многообразии X_n положительно определенных симметрических матриц с определителем 1 по формуле

$$x \mapsto {}^t g x g \quad (g \in \mathrm{SL}_n^{*}(\mathbf{R}),\ x \in X_n).$$

Ограничение этого действия на подгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{SL}_n^{*}(\mathbf{R})$ является дискретным (см. пример 2.7 гл. 1).

Построение фундаментальной области для действия группы $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ на X_n — предмет классической теории приведения, которой посвящен настоящий параграф. Из различных вариантов классической теории мы выбрали теорию приведения, принадлежащую А. Н. Коркину и Е. И. Золотареву (см., например, [67]). Она лежит в основе общей теории приведения для арифметических дискретных подгрупп любых полупростых групп Ли.

2.1. Геометрический язык. Конструкция приведенного базиса. Напомним, что объемом $v(e)$ базиса $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ евклидова векторного пространства E^n называется объем паралле-

II. R ненильпотента, и тогда либо

а) $R \simeq \mathbf{R} \ltimes_{\varphi} \mathbf{R}^3$, где $\varphi: \mathbf{R} \to \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(1) \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z})$, либо

б) $R \simeq \mathbf{R} \ltimes_{\psi} N_3$ где $\psi: \mathbf{R} \to \mathrm{Aut}\, N_3$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(1)$ сохраняет подгруппу $N_3(\mathbf{Q})$ в N_3.

Укажем теперь некоторые результаты о комплексных односвязных разрешимых группах Ли R малой размерности, содержащих решетки. Если $\dim_{\mathbf{C}} R \leqslant 2$, то $R \simeq \mathbf{C}^1$ или $\mathbf{C}^2$. Если $\dim_{\mathbf{C}} R = 3$, то R изоморфна $\mathbf{C}^3$ или $N_3(\mathbf{C})$, или одной из двух групп Ли, являющихся комплексификациями групп Ли $\widetilde{E(2)^0}$ и R_3. Если же $\dim_{\mathbf{C}} R = 4$, то число n_4 неизоморфных среди таких R, имеющих решетки, равно 6, а при $\dim_{\mathbf{C}} R = 5$ число n_5 комплексных разрешимых групп Ли R, имеющих решетки, точно пока не известно, известна лишь оценка $15 \leqslant n_5 \leqslant 21$ (в [115] приведен чуть менее точный результат).

Глава 3

РЕШЕТКИ В ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ

§ 1. Общие сведения

Здесь собраны факты, уточняющие некоторые общие теоремы о решетках из первой главы в случае, когда объемлющая группа полупроста.

1.1. Приводимость решеток.

Теорема 1.1 ([120]). Пусть Γ — решетка в связной полупростой группе Ли G, не имеющей компактных множителей. Тогда группа G может быть единственным образом представлена в виде почти прямого произведения $G = \Pi G_i$ связных нормальных подгрупп G_i так, что $\Gamma_i = \Gamma \cap G_i$ — неприводимая решетка в группе G_i. При этом группа $\Pi\Gamma_i$ является подгруппой конечного индекса в Γ.

Сформулированная теорема позволяет при доказательстве многих утверждений ограничиваться неприводимыми решетками.

1.2. Теорема плотности.

Теорема 1.2. Пусть G — полупростая группа Ли без компактных множителей, и $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ — ее конечномерное комплексное линейное представление. Если Γ — решетка в G, то подгруппа $\rho(\Gamma)$ плотна в $\rho(G)$ в топологии Зарисского.

◀ Объясним, как получить эту теорему из теоремы 8.2 гл. 1. Можно считать группу G связной. Тогда $\rho(G)$ — связная полупростая линейная группа Ли и, существует такая алгебраическая группа $H \subset \mathrm{GL}(V)$, что $\rho(G) = H^0$, [68].

Далее, согласно теореме 4.11 гл. 1 на факторпространстве $\rho(G)/\overline{\rho(\Gamma)}$ есть конечная инвариантная мера. Поскольку $[H:H^0] < \infty$, то и на факторпространстве $H/\overline{\rho(\Gamma)}$ есть конечная инвариантная мера. Тогда по теореме 8.2 группа $\overline{\rho(\Gamma)}$, а значит и $\rho(\Gamma)$, плотна в топологии Зарисского в H, и тем более в $\rho(G)$ ▶.

Сформулируем теперь два важных следствия теоремы плотности.

Предложение 1.3. Пусть G — полупростая группа Ли, $Z(G)$ — ее центр. Если Γ — решетка в G, то

а) $\Gamma Z(G)$ — дискретная подгруппа в G, и индекс $[Z(G) : (Z(G) \cap \Gamma)]$ конечен;

б) если группа G не имеет компактных множителей, то $Z(\Gamma) \subset Z(G)$.

◀ Пункт б) сразу следует из плотности $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ в $\mathrm{Ad}\, G$ в топологии Зарисского (теорема 1.2). При доказательстве а) можно считать, что G не имеет компактных множителей. Достаточно показать, что нормализатор $N_G(\Gamma)$ дискретен в G. Но нормализатор $N_G(\Gamma)$ является замкнутой подгруппой, и его связная компонента содержится в $Z(\Gamma)$, а значит, согласно б), и в $Z(G)$. Поэтому группа $N_G(\Gamma)$ дискретна.▶

Предложение 1.4 ([120]). Пусть Γ — неприводимая решетка в связной полупростой группе Ли G без компактных множителей. Тогда для любой нетривиальной связной нормальной подгруппы $H \subset G$ группа $H\Gamma$ плотна в группе Ли G (в топологии группы Ли).

§ 2. Теория приведения

Группа $\mathrm{SL}_n^*(\mathbf{R})$ матриц с определителем ± 1 действует (справа) на многообразии X_n положительно определенных симметрических матриц с определителем 1 по формуле

$$x \mapsto {}^t g x g \quad (g \in \mathrm{SL}_n^*(\mathbf{R}),\ x \in X_n).$$

Ограничение этого действия на подгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{SL}_n^*(\mathbf{R})$ является дискретным (см. пример 2.7 гл. 1).

Построение фундаментальной области для действия группы $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ на X_n — предмет классической теории приведения, которой посвящен настоящий параграф. Из различных вариантов классической теории мы выбрали теорию приведения, принадлежащую А. Н. Коркину и Е. И. Золотареву (см., например, [67]). Она лежит в основе общей теории приведения для арифметических дискретных подгрупп любых полупростых групп Ли.

2.1. Геометрический язык. Конструкция приведенного базиса. Напомним, что объемом $v(e)$ базиса $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ евклидова векторного пространства E^n называется объем параллелепипеда, натянутого на векторы $e_1, \ldots, e_n$, и что квадрат объема равен определителю Грама базиса e. Базис e будем называть унимодулярным, если $v(e)=1$.

Пусть $\mathscr{B}$ — многообразие унимодулярных базисов пространства E^n. На множестве $\mathscr{B}$ действует слева группа O_n:

$$h\{e_1, \ldots, e_n\}=\{he_1, \ldots, he_n\},\ h\in O_n,$$

а справа — группа $SL_n^*(\mathbf{R})$:

$$\{e_1, \ldots, e_n\} g=\left\{\sum_k a_{k1}e_k, \ldots, \sum_k a_{kn}e_k\right\},\ g=(a_{ij})\in SL_n^*(\mathbf{R}).$$

Отображение, ставящее в соответствие базису $e\in\mathscr{B}$ его матрицу Грама, устанавливает изоморфизм $SL_n^*(\mathbf{R})$-однородных пространств $\mathscr{B}/O_n$ и X_n. При указанном изоморфизме (в любом варианте теории приведения) базисы, отвечающие точкам некоторой фундаментальной области группы $GL_n(\mathbf{Z})$ в X_n, называются приведенными.

На геометрическом языке задача приведения может быть сформулирована так: для произвольного базиса построить $GL_n(\mathbf{Z})$-эквивалентный ему приведенный базис, который в «общем» случае должен быть определен однозначно с точностью до умножения на (-1). (Возможность умножения на (-1) связана с тем, что группа $SL_n^*(\mathbf{R})$ действует на X_n неэффективно. Ядром неэффективности является подгруппа $\{E, -E\}$).

Опишем процесс приведения по Коркину—Золотареву. Пусть $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис евклидова пространства E^n. Через $L(e)$ обозначим решетку в E^n, порожденную базисом e, через E_k — линейную оболочку первых k векторов базиса (в частности, $E_0=0$) и через $U_k=E_k^{\perp}$ — ортогональное дополнение к E_k в E^n. Пусть q_k — ортогональное проектирование на подпространство U_k. Для любого базиса $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ можно рассмотреть базис $u=\{u_1, \ldots, u_n\}$, который получается из базиса e процессом ортогонализации: $u_{k+1}=q_k(e_{k+1})$, $k=0, \ldots, n-1$.

Заметим, что у базисов e и u одинаковые объемы.

Определение. Базис $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ называется *приведенным по Коркину—Золотареву,* если

1) u_{k+1} — кратчайший из ненулевых векторов решетки $q_k(L(e))$ (тот факт, что это действительно решетка, следует, например, из теоремы 4.7 гл. 1).

2) $e_{k+1}=u_{k+1}+\sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1}u_i$, где $|a_{i,k+1}|\leqslant 1/2$;

3) $a_{k,k+1}\geqslant 0$.

Пример 2.1. Посмотрим, как выглядит приведение по Коркину—Золотареву на плоскости E^2. Пусть $e'=\{e_1', e_2'\}$ — произвольный базис в E^2.

Согласно 1), на первом шаге приведения нужно выбрать кратчайший вектор e_1 в решетке $L(e')$ (если таких векторов несколько, то можно взять любой из них). Далее, в решетке $L(e')$ нужно выбрать такой вектор e_2, чтобы его проекция на подпространство $U_1=e_1^{\perp}$ была кратчайшим ненулевым вектором u_2 в решетке $q_1(L(e'))$. Ясно, что выбор вектора e_2 неоднозначен: к нему всегда можно прибавить целое кратное вектора e_1. Кроме того, его можно умножить на (-1). Пользуясь этим, всегда можно выбрать вектор e_2 так, чтобы он удовлетворял условиям 2) и 3) определения приведенного базиса. Заметим теперь, что вектор $q_1(e_2)$ порождает решетку $q_1(L(e'))$ (кратчайший вектор одномерной решетки), откуда следует, что $\{e_1, e_2\}$ — базис решетки $L(e')$. Тем самым, мы построили приведенный базис $e=\{e_1; e_2\}$, который $GL_2(\mathbf{Z})$-эквивалентен исходному базису e'. ▶

Рассуждая так же в общем случае, можно последовательно выбрать приведенный базис e в произвольной решетке $L(e')=\mathbf{Z}e_1'+\ldots+\mathbf{Z}e_n'$ в E^n, иначе говоря, построить приведенный базис $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$, который $GL_n(\mathbf{Z})$-эквивалентен заданному базису $e'=\{e_1', \ldots, e_n'\}$.

Предложение 2.2. Если $e=\{e_1, e_2\}$ — приведенный базис на плоскости E^2, то $|u_2|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|u_1|$.

◀ По определению приведенного базиса имеем

$$e_2=u_2+a_{12}u_1,\ u_1=e_1,\ |a_{12}|\leqslant 1/2,\ |e_1|\leqslant|e_2|.$$

Следовательно, $|e_2|^2=|u_2|^2+|a_{12}|^2|e_1|^2$ и $|e_2|^2/|e_1|^2=|u_2|^2/|u_1|^2+|a_{12}|^2$. Так как $|e_2|^2/|e_1|^2\geqslant 1$, а $|a_{12}|^2\leqslant 1/4$, то $|u_2|^2/|u_1|^2\geqslant 3/4$. ▶

Укажем теперь основные свойства приведенного базиса.

Предложение 2.3. Если $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ — приведенный базис в E^n, то

а) $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — приведенный базис в пространстве E_k;

б) $\{q_k(e_{k+1}), \ldots, q_k(e_n)\}$ — приведенный базис в U_k;

в) $|u_{k+1}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|u_k|$.

◀ Пункт а) очевиден. Для доказательства б) применим q_k к равенствам $e_{l+1}=u_{l+1}+\sum_{1}^{l} a_{i,l+1}u_i$ при $l>k$. Учитывая, что $q_k(u_i)=0$ при $i\leqslant k$ и $q_k(u_i)=u_i$ при $i>k$, получаем $q_k(e_{l+1})=u_{l+1}+\sum_{k+1}^{l} a_{i,l+1}u_i$. Остается заметить, что базис $\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ в U_k получается из базиса $\{q_k(e_{k+1}), \ldots, q_k(e_n)\}$ процессом ортогонализации. Наконец, доказательство в), ввиду а) и б), сводится к разобранному случаю приведенного базиса на плоскости. ▶

Предложение 2.4. Для любого приведенного базиса e имеет место неравенство $|e_1| \leqslant (2/\sqrt{3})^{(n-1)/2} \cdot v(e)^{1/n}$.

◀ Можно считать, что e — приведенный базис единичного объема. Но тогда и $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — базис единичного объема, т. е. $\prod_{i=1}^{n} |u_i|^2 = 1$.

В силу предложения 2.3, в) имеем $|u_k| \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} |u_1|$. Следовательно, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} |u_1|^n \leqslant 1$, или $|e_1| = |u_1| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. ▶

2.2. Доказательство критерия Малера. Сделаем небольшое отступление и докажем основную часть теоремы 6.2 гл. 1 Напомним ее формулировку. В пространстве решеток $\mathscr{L}$ в E^n рассматривается множество $\mathscr{M}$, обладающее следующими свойствами:

а) функция объема $v(L)$ ограничена на $\mathscr{M}$,

б) множество решеток $\mathscr{M}$ отделено от нуля.

Утверждается, что тогда множество $\mathscr{M}$ относительно компактно в $\mathscr{L}$.

◀ Для доказательства выберем в каждой решетке $L \subset \mathscr{M}$ приведенный базис $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$. По условию существуют такие положительные константы c и C, не зависящие от рассматриваемой решетки $L \in \mathscr{M}$, что $|e_1| > c$, а $v(L(e)) = \prod_{i=1}^{n} |u_i| < C$. Отсюда, ввиду неравенства приведения $|u_{k+1}| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} |u_k|$, следует, что ни один из векторов u_k не может быть очень маленьким, а так как произведение их длин ограничено сверху, то они не могут быть и очень большими. Но то же самое можно сказать и о векторах базиса e, поскольку, как элементы матрицы перехода от базиса u к базису e, так и элементы обратной матрицы ограничены по абсолютной величине (в самом деле, первая матрица по построению является треугольной, с единицами на главной диагонали, причем все ее элементы не превосходят по абсолютной величине единицы; следовательно, элементы обратной матрицы ограничены по абсолютной величине константой, зависящей только от размерности). Иными словами, для любой решетки $L \in \mathscr{M}$ длина любого вектора ее приведенного базиса ограничена сверху и снизу константами, зависящими только от $\mathscr{M}$ и n. Ясно, что из такого множества базисов можно выбрать сходящуюся последовательность. ▶

2.3. Область Зигеля. Вернемся к нашей основной теме и введем некоторые обозначения. Для любого $t > 0$ пусть ω_t — множество всех верхне-треугольных матриц с единицами на главной диагонали и внедиагональными элементами, не превосходящими по модулю t. Далее, через A_η обозначим множество диагональных матриц с положительными элементами u_{ii}, удовлетворяющими неравенствам $u_{ii} \leqslant \eta u_{i+1,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Из того факта, что каждая решетка в E^n обладает базисом, приведенным по Коркину — Золотареву, следует, что любую положительно определенную симметрическую матрицу s можно представить в виде

$$s = {}^t\gamma\, {}^t u a u \gamma, \text{ где } u \in \omega_{1/2},\ a \in A_{4/3},\ \gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}).$$

А это означает, что множество $F = e_0\left(A^+_{2/\sqrt{3}}\, \omega_{1/2}\right)$ обладает тем свойством, что его сдвиги $F\gamma$, $\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, покрывают многообразие X_n (где e_0 — образ единичной матрицы при отождествлении $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbf{R})/\mathrm{O}_n$ с X_n, а A^+_η — множество матриц из A_η с определителем 1).

Замечание. Используя явный вид инвариантной меры на группе $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, можно установить конечность объема области $\mathrm{SO}_n A^+_{2/\sqrt{3}}\, \omega_{1/2}$ и тем самым доказать конечность объема фактор-пространства $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ (см., например, [67]).

Определение. Множество $D_{\eta,t} = e_0(A^+_\eta \omega_t)$, $\eta > 0$, $t > 0$, называется *областью Зигеля* в пространстве $X_n \simeq \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_n$.

В итоге мы показали, что область приведения по Коркину — Золотареву содержится в области Зигеля $D_{2/\sqrt{3},1/2}$.

Теорема 2.5. Если $\eta \geqslant 2/\sqrt{3}$, $t \geqslant 1/2$, то область Зигеля $D_{\eta,t}$ является $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$-покрывающим множеством.

◀ Достаточно проверить, что покрытие пространства X_n сдвигами области Зигеля $D_{\eta,t}$ локально конечно. А это следует из такого общего факта:

Предложение 2.6. Для любой области Зигеля $D_{\eta,t}$ множество

$$C = \{\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \mid \gamma D_{\eta,t} \cap D_{\eta,t} \neq \varnothing\}$$

конечно.

◀ На геометрическом языке базисов в евклидовом пространстве, рассматриваемых с точностью до ортогональной эквивалентности, область Зигеля $D_{\eta,t}$ можно охарактеризовать как множество базисов $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, обладающих следующими свойствами:

а) если базис $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ получен ортогонализацией базиса e, то

$$|u_i| \leqslant \eta |u_{i+1}|, \quad i = 1, \ldots, n-1;$$

б) $$e_{k+1} = u_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k+1} u_i, \quad \text{где } |a_{i,k+1}| \leqslant t.$$

Базис, удовлетворяющий условиям а) и б), назовем *базисом Зигеля*. Нам нужно доказать, что существует лишь конечное число матриц $\gamma\in GL_n(\mathbf{Z})$ таких, что $e\gamma$ является базисом Зигеля для некоторого базиса Зигеля e. Мы установим ограниченность любой такой матрицы γ, доказав лемму:

Лемма 2.7. Если e и $\tilde{e}$ — два базиса Зигеля решетки, то элементы матриц перехода между ними ограничены по абсолютной величине константой C, зависящей только от n, η и t.

◀Рассмотрим, следуя Касселсу [78], вспомогательное множество $m=\{m_1, \ldots, m_n\}$ линейно независимых векторов решетки, реализующих множество ее последовательных минимумов. Напомним, что множество чисел $M=\{M_1, \ldots, M_n\}$ называется множеством последовательных минимумов решетки L, если для любого j, $1\leqslant j\leqslant n$,

$$\dim\langle v\in L \mid |v|\leqslant M_j\rangle\geqslant j, \text{ но } \dim\langle v\in L \mid |v|<M_j\rangle<j.$$

Множество M однозначно определяется решеткой. Ясно, что $M_1\leqslant M_2\leqslant \ldots M_n$, и что всегда существует такое линейно независимое множество $m=(m_1, \ldots, m_n)$ векторов решетки, что $|m_j|=M_j$ для всех $j=1, \ldots, n$. Результат леммы 2.7 — простое следствие такого утверждения:

Лемма 2.8. Для любого базиса Зигеля e решетки L элементы матрицы перехода от базиса e к базису m (рассматриваемому как базис пространства) ограничены по абсолютной величине константой $C(n, \eta, t)$.

◀ Пусть $m_k=a_{k1}u_1+\ldots+a_{kn}u_n$. Покажем, что $|a_{ki}|\leqslant \tilde{C}(n, \eta, t)$. Возможны два случая:

1-ый случай: $|e_p|<M_k$ для всех $p\leqslant i$ (отсюда, в частности, следует, что $i<k$).

Рассмотрим вектор

$$\tilde{m}_k=m_k+\sum_{p=1}^{i} n_p e_p=\tilde{a}_{k1}u_1+\ldots+\tilde{a}_{ki}u_i+a_{k,i+1}u_{i+1}+\ldots+a_{kn}u_n,$$

где $n_p\in\mathbf{Z}$ выбраны так, чтобы $|\tilde{a}_{kp}|\leqslant\frac{1}{2}$ при $p=1, \ldots, i$. Заметим, что $|\tilde{m}_k|\geqslant|m_k|$, иначе вектор m_k принадлежал бы линейной оболочке векторов $e_1, e_2, \ldots, e_i$ и вектора $\tilde{m}_k$, длина каждого из которых меньше, чем M_k, что противоречит определению множества последовательных минимумов.

Следовательно,

$$|a_{ki}|^2|u_i|^2\leqslant\sum_{p=1}^{i}|\tilde{a}_{kp}|^2|u_p|^2\leqslant 1/4\sum_{p=1}^{i}|u_p|^2\leqslant$$
$$\leqslant 1/4\,(1+\eta^2+\ldots+\eta^{2(i-1)})\,|u_i|^2,$$

так что $|a_{ki}|\leqslant C(n, \eta)$.

2-й случай: $M_k\leqslant|e_p|$ для некоторого $p\leqslant i$. Из определения базиса Зигеля следует, что $|e_p|\leqslant C''(n, \eta, t)\,|u_p|$ для любого p. Поэтому

$$|a_{ki}|^2|u_i|^2\leqslant M_k^2\leqslant|e_p|^2\leqslant(C''(n, \eta, t))^2|u_p|^2\leqslant$$
$$\leqslant\eta^{2(i-p)}C''^2(n, \eta, t)\,|u_i|^2\leqslant\eta^{2(n-1)}|u_i|^2C''^2(n, \eta, t),$$
так что $|a_{ki}|\leqslant\eta^{n-1}C''(n, \eta, t)$.

Итак, мы показали, что элементы матрицы перехода от базиса u к базису m ограничены. Но из определения базиса Зигеля следует, что элементы матриц перехода между базисами u и e тоже ограничены. ▶

Заметим теперь, что элементы матрицы перехода от базиса m к базису e ограничены по абсолютной величине, поскольку обратная матрица целочисленна, а ее элементы ограничены. Применяя лемму 2.8 к парам базисов e, m и $\tilde{e}$, m, приходим к утверждению леммы 2.7.▶

Из леммы 2.7 вытекает предложение 2.6, поскольку существует лишь конечное число ограниченных целочисленных матриц. ▶

Наконец, из предложения 2.6 следует теорема 2.5.▶

Приведем одно важное следствие теоремы 2.5.

Предложение 2.9. В группе $SL_n(\mathbf{Z})$ имеется лишь конечное число классов сопряженных конечных подгрупп.

◀Любая конечная подгруппа Γ группы $GL_n(\mathbf{R})$ сохраняет некоторую положительно определенную квадратичную форму. В частности, для $\Gamma\subset SL_n(\mathbf{R})$ это означает, что подгруппа Γ имеет неподвижную точку при действии в пространстве X_n. Далее, если $\mathscr{F}$ является $SL_n(\mathbf{Z})$-покрывающим множеством, то, сопрягая Γ с помощью подходящего элемента $\gamma\in SL_n(\mathbf{Z})$, можно добиться того, чтобы неподвижная точка конечной группы $\Gamma\subset SL_n(\mathbf{Z})$ лежала в $\mathscr{F}$. Но тогда

$$\Gamma\subset C=\{\gamma\in SL_n(\mathbf{Z}) \mid \gamma\mathscr{F}\cap\mathscr{F}=\varnothing\},$$

а множество C конечно (см. предложение 2.6). ▶

§ 3. Теорема Бореля — Хариш-Чандры (продолжение)

В § 7 первой главы содержится редукция теоремы Бореля — Хариш-Чандры к случаям, когда рассматриваемая **Q**-группа полупроста или является тором. Обсудим теперь эти случаи.

3.1. Случай тора.

Теорема 3.1. Пусть T — (вещественный) алгебраический тор, определенный над **Q** и не имеющий нетривиальных определенных над **Q** характеров. Тогда факторпространство $T/T(\mathbf{Z})$ компактно.

Предварительно мы докажем одно общее утверждение, которым воспользуемся и в дальнейшем.

Предложение 3.2. Пусть $H \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ — редуктивная алгебраическая группа, определенная над $\mathbf{Q}$, и для нее выполняется условие:

(*) Существуют такие H-инвариантные многочлены $f_i \in \mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]$, что система $\{f_i = 0\}$ имеет в $\mathbf{Q}^n$ только нулевое решение.

Тогда факторпространство $H/(H \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}))$ компактно.

◀В силу предложения 5.4 гл. 1 достаточно проверить, что орбита $H\mathbf{Z}^n$ стандартной решетки $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$ под действием группы H замкнута в пространстве решеток $\mathscr{L}$ и отделена от нуля. Замкнутость орбиты $H\mathbf{Z}^n$ равносильна дискретности образа $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ в пространстве $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/H$ (теорема 4.3 гл. 1). В этом месте мы воспользуемся таким фактом из теории алгебраических групп [67]: если H — редуктивная $\mathbf{Q}$-подгруппа алгебраической $\mathbf{Q}$-группы G, то множество левых смежных классов G/H обладает структурой аффинного $\mathbf{Q}$-многообразия. При этом естественное отображение $\varphi : G \to G/H$ является морфизмом, определенным над $\mathbf{Q}$. Отсюда немедленно следует, что $\varphi(\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}))$ — дискретное подмножество аффинного многообразия $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/H$.

Далее заметим, что можно считать все многочлены f_i принадлежащими кольцу $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Рассмотрим H-инвариантную непрерывную функцию $f = \Sigma f_i^2$. Ввиду условия (*) она принимает положительные целые значения на ненулевых векторах всех решеток из $H\mathbf{Z}^n$. Следовательно, орбита $H\mathbf{Z}^n$ отделена от нуля.▶

◀Переходим к доказательству теоремы 3.1. Пусть $T \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ — алгебраический тор, определенный над $\mathbf{Q}$. Обозначим через A комплексную линейную оболочку группы T в пространстве $M_n(\mathbf{C})$ всех матриц. Это коммутативная матричная алгебра, определенная (как алгебра) над $\mathbf{Q}$. Рассмотрим ее регулярное представление ρ. Ограничение ρ на T является точным представлением тора T, определенным над $\mathbf{Q}$. Пусть $A = U_1 \oplus \dots \oplus U_e$ — разложение этого представления на неприводимые над $\mathbf{Q}$ компоненты. В силу отсутствия у T нетривиальных характеров, определенных над $\mathbf{Q}$, $\det \rho(g)|_{U_i} = 1$ для всех $g \in T$. Заметим теперь, что одновременное обращение в нуль T-инвариантных многочленов $f_i = \det \rho(a)|_{U_i}$ в точке $a \in A$ означает, что $a = 0$ (лемма Шура). Поэтому мы находимся в ситуации предложения 3.2. Следовательно, факторпространство $T/T(\mathbf{Z})$ компактно.▶

Пример 3.3. Применим доказанную теорему к исследованию решений в целых числах уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$, где d — натуральное число, свободное от квадратов. С этой целью рассмотрим алгебраическую подгруппу $T \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix}$.

Она определена над $\mathbf{Q}$ и изоморфна над $\mathbf{R}$ группе $\mathbf{R}^*$, причем изоморфизм устанавливается отображением $\chi : \begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto x + y\sqrt{d}$. Таким образом, T — одномерный алгебраический тор. Его группа характеров порождается характером χ, никакая степень которого не определена над $\mathbf{Q}$. Поэтому у тора T отсутствуют нетривиальные характеры, определенные над $\mathbf{Q}$. По теореме 3.1 факторпространтво $T/T(\mathbf{Z})$ компактно. Но целые точки тора T соответствуют целочисленным решениям уравнения Пелля. Следовательно, у этого уравнения должно существовать бесконечно много решений. Более точно, $T(\mathbf{Z}) \cap T^0$ — бесконечная циклическая группа. Это означает, что общее решение уравнения Пелля определяется по формуле $x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^n$, где (x_0, y_0) — некоторое «минимальное» решение. Это частный случай теоремы Дирихле об единицах, относящийся к вещественному квадратичному расширению поля $\mathbf{Q}$.

3.2. Полупростой случай (области Зигеля). Как уже отмечалось в главе 1, любое известное на сегодняшний день доказательство теоремы Бореля — Хариш-Чандры для полупростой группы технически очень сложно. Поэтому мы скажем лишь о центральной идее оригинального доказательства этой теоремы (см. [71]). Она заключается в построении для произвольных полупростых $\mathbf{Q}$-групп G их $G(\mathbf{Z})$-покрывающих множеств в виде объединения конечного числа аналогов областей Зигеля.

Если G — такая группа, то арифметическая подгруппа $G(\mathbf{Z})$ дискретно действует на симметрическом пространстве $X = G/K$, где K — максимальная компактная подгруппа группы G. Достаточно доказать, что объем факторпространства $X/G(\mathbf{Z})$ конечен.

Лемма 3.4 ([72]). Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, определенная над полем $k \subset \mathbf{R}$, $\sigma : G \to G$ — инволюция Картана, $P \subset G$ — минимальная параболическая k-подгруппа (все такие подгруппы сопряжены элементами из $G(k)$ [68]). Тогда существует единственный тор $A \subset P^0$ такой, что

а) $\sigma(a) = a^{-1}$ для всех $a \in A$;

б) тор A сопряжен максимальному k-разложимому тору в P^0.

Фиксируем теперь базисную точку $x \in X$ и инволюцию Картана σ_x, связанную со стабилизатором K_x точки x в группе G. Пусть P — минимальная параболическая подгруппа группы G, определенная над $\mathbf{Q}$, $A \subset P^0$ — тор из леммы 3.4 (примененной к $k = \mathbf{Q}$), Δ — множество простых корней для присоединенного действия группы A на касательной алгебре $\mathfrak{g}$ группы G и

$$A^+ = \{a \in A^0 \mid \alpha(a) \leqslant 1 \text{ для всех } \alpha \in \Delta\}.$$

Для любого компакта $\omega \in P^0$ определим *область Зигеля* D_ω в X, полагая

$$D_\omega = x(A^+\omega).$$

Совокупность областей Зигеля не зависит от выбора базисной точки $x \in X$. Действительно, если x' — другая точка, то в силу транзитивности действия P на X найдется такое $g \in P$, что $x' = xg$. Тогда $A' = g^{-1}Ag$, и для любого компакта $\omega \in P^0$

$$D'_\omega = x'((A')^+\omega) = D_{g\omega}.$$

Такое определение областей Зигеля, заимствованное из [50], несколько отличается от первоначального, данного в [71]. Можно проверить, что множества областей Зигеля в «новом» и «старом» смысле конфинальны, т. е. для любой области Зигеля в «старом» смысле существует область в «новом» смысле, ее содержащая, и наоборот. Для группы $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ области Зигеля $D_{\eta,t}$ в «старом» смысле рассматривались в п. 2.3. Проверим, что в этом случае любая область Зигеля D_ω содержится в некоторой области $D_{\eta,t}$. В качестве P выберем подгруппу верхних треугольных матриц и фиксируем базисную точку $x = e_0$ в пространстве X_n (см. п. 2.3). Тогда тор $A \subset P^0$ — это группа диагональных матриц с определителем 1. Простые корни из Δ имеют вид

$$\alpha_i(a) = a_{ii}/a_{i+1,i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \text{ где } a = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим теперь, что любой компакт $\omega \in P^0$ содержится в произведении $\omega_1\omega_2$, где ω_1 — некоторый компакт из A^0, а ω_2 — компакт из U, где U — группа верхних треугольных матриц с единицами на диагонали. Полагая

$$\eta = \max_{\substack{\alpha \in \Delta \\ a \in \omega_1}} \alpha(a) \quad \text{и} \quad t = \max_{u \in \omega_2} |u_{ij}|, \quad i \neq j,$$

получаем, что $D_\omega \subset D_{\eta,t}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат теории приведения в полупростых алгебраических группах.

Теорема 3.5 ([71]). Если G — полупростая $\mathbf{Q}$-группа, то

1) существует такая область Зигеля D_ω и такое конечное множество $F \subset G(\mathbf{Q})$, что

$$X = xD_\omega(FG(\mathbf{Z}));$$

2) для любой области Зигеля D_ω и любых элементов $g_1, g_2 \in G(\mathbf{Q})$ множество

$$\{\gamma \in G(\mathbf{Z}) \mid D_\omega g_1 \cap D_\omega g_2\gamma \neq \varnothing\}$$

конечно;

3) объем области Зигеля в смысле инвариантной меры на X конечен.

Ясно, что отсюда следует теорема Бореля—Хариш-Чандры в полупростом случае. Отметим, что из свойства 2) в теореме 3.5 (свойство Зигеля) следует конечная представимость арифметических групп.

3.3. Доказательство теоремы Годемана в полупростом случае. Напомним, что речь идет о следующей теореме.

Теорема 3.6. Пусть G — полупростая $\mathbf{Q}$-группа. Тогда компактность факторпространства $G/G(\mathbf{Z})$ равносильна отсутствию нетривиальных унипотентных элементов в группе $G(\mathbf{Q})$.

◀Отметим прежде всего, что отсутствие нетривиальных унипотентных элементов в группе $G(\mathbf{Q})$ эквивалентно полупростоте всех ее элементов. Это следует из того, что любой элемент $g \in G(\mathbf{Q})$ допускает единственное разложение Жордана $g = g_u g_s$, где g_u — унипотентный, а g_s — полупростой элемент группы $G(\mathbf{Q})$ и $g_u g_s = g_s g_u$.

Приступим к доказательству теоремы. Пусть пространство $G/G(\mathbf{Z})$ компактно. Покажем, что все элементы из $G(\mathbf{Q})$ полупросты. Для этого рассмотрим действие группы G на себе внутренними автоморфизмами. Орбита всякого элемента $g \in G(\mathbf{Q})$ при этом действии замкнута. Это следует из предложения 1.9 гл. 1, если учесть, что множество $C(\Gamma, g) = \{\gamma g \gamma^{-1}, \gamma \in G(\mathbf{Z})\}$ дискретно (в подходящем базисе знаменатели всех элементов матриц из $C(\Gamma, g)$ ограничены). Но, как известно, орбита элемента g тогда и только тогда замкнута, когда элемент g полупрост ([70]).

Обратно, пусть все элементы группы $G(\mathbf{Q})$ полупросты. Тогда полупросты и все элементы $\mathbf{Q}$-алгебры Ли $\mathfrak{g}(\mathbf{Q})$. Так как гомоморфизм $G \to \mathrm{Ad}\, G$ определен над $\mathbf{Q}$ и является изогенией, то достаточно доказать, что факторпространство $\mathrm{Ad}\, G/(\mathrm{Ad}\, G)(\mathbf{Z})$ компактно. Рассмотрим на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ многочлены $f_i = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X)^i$, $i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. Ясно, что это $\mathrm{Ad}\, G$-инвариантные многочлены с рациональными коэффициентами. Кроме того, их общий нетривиальный нуль X в $\mathfrak{g}(\mathbf{Q})$ являлся бы нетривиальным нильпотентным элементом в $\mathfrak{g}(\mathbf{Q})$, чего по условию быть не может. Согласно предложению 3.2, факторпространство $\mathrm{Ad}\, G/(\mathrm{Ad}\, G)(\mathbf{Z})$ компактно.▶

§ 4. Критерий равномерности решетки. Кообъемы решеток

4.1. Унипотентные элементы в решетках.

Теорема 4.1 ([19]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей и Γ — решетка в ней. Тогда равномерность решетки Γ равносильна отсутствию в Γ нетривиальных унипотентных элементов.

Отметим еще одну версию этой теоремы в духе теоремы 1.7 гл. 1.

Теорема 4.2 ([120]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей, Γ — решетка в ней и $\pi: G \to G/\Gamma$ — каноническая проекция. Тогда, если последовательность $\pi(g_i)\in G/\Gamma$, $g_i\in G$, не имеет предельных точек, то существует такая последовательность нетривиальных унипотентных элементов $\gamma_i\in\Gamma$, что $g_i\gamma_i g_i^{-1}\to e$.

◀ В одну сторону теорема 4.1 доказывается просто: рассуждение, использованное нами в доказательстве теоремы 3.6, показывает, что если Γ — равномерная решетка, то все ее элементы полупросты. Доказательство обратного утверждения элементарно, но весьма сложно. ▶

4.2. Кообъемы решеток в полупростых группах Ли. Пусть G — связная полупростая группа Ли, $\mathscr{L}_G$ — пространство всех решеток в группе G. Если $G=\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, то уже давно было замечено, что функция $v(\Gamma)=\mathrm{vol}\,(G/\Gamma)$ на пространстве $\mathscr{L}_G$ отделена от нуля, т. е. существует такая константа c, что $v(\Gamma)\geqslant c$ для любой решетки $\Gamma\subset\mathscr{L}_G$ ([1]). Усиление и обобщение этого факта содержится в следующей теореме Д. А. Каждана и Г. А. Маргулиса [119].

Теорема 4.3. Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей. Существует такая относительно компактная окрестность $O_G(e)$ единичного элемента e в группе G, что для любой решетки $\Gamma\subset G$ и некоторого элемента $g\in G$ (зависящего от Γ)

$$g\Gamma g^{-1}\cap O_G(e)=\{e\}.$$

Объясним, как отсюда получается ограниченность снизу кообъемов решеток в группе G. Можно выбрать такую окрестность $O'_G(e)$, что $O'_G(e)\,O'_G(e)^{-1}\subset O_G(e)$. Такая окрестность однозначно проектируется на факторпространство $G/g\Gamma g^{-1}$. Следовательно, $v(\Gamma)=v(g\Gamma g^{-1})\geqslant c(G)$, где $c(G)$ — объем множества $O'_G(e)$. Итак, множество кообъемов $v(\Gamma)$, $\Gamma\in\mathscr{L}_G$, отделено от нуля.

Замечание. Отсутствие у группы G компактных множителей является необходимым условием в теореме 4.3. Например, в любой связной компактной группе Ли существуют сколь угодно близкие к единице элементы, содержащиеся в конечных подгруппах.

Теорема 4.4 ([140]). Пусть G — связная полупростая группа Ли, в которой любая решетка Γ локально жесткая (см. § 6 главы 1). Тогда для любого $c>0$ существует лишь конечное число классов сопряженности решеток Γ, для которых $v(\Gamma)\leqslant c$.

Следствие. Множество $\{v(\Gamma)\,|\,\Gamma\subset\mathscr{L}_G\}$ дискретно в $\mathbf{R}$.

◀ Пусть, вопреки утверждению теоремы, существует бесконечная последовательность попарно несопряженных решеток $\Gamma_n\subset G$, кообъемы которых не превосходят c. Подходящим образом сопрягая решетки элементами группы G, можно считать на основании теоремы 4.4, что $\Gamma_n\cap O_G(e)=\{e\}$ для некоторой фиксированной окрестности $O_G(e)$ единичного элемента и всех n. И так как $v(\Gamma_n)\leqslant c$ для всех n, то согласно теореме 5.5 гл. 1, можно выбрать подпоследовательность Γ'_n, сходящуюся в пространстве $\mathscr{L}_G$ к решетке Γ. Более того, как несложно показать, используя конечную представимость группы Γ, для всех достаточно больших n существуют гомоморфизмы $r_n:\Gamma\to\Gamma'_n$, стремящиеся к тождественному вложению $\mathrm{id}:\Gamma\hookrightarrow G$ в пространстве $\mathrm{Hom}\,(\Gamma, G)$. На основании свойства жесткости, заключаем, что для всех достаточно больших n подгруппы Γ'_n сопряжены подгруппе Γ. Но это противоречит попарной несопряженности подгрупп Γ'_n. ▶

Как станет ясно из дальнейшего (см. п. 7.1), связная полупростая группа Ли тогда и только тогда обладает свойством локальной жесткости всех решеток, когда она не содержит компактных множителей, а также множителей, локально изоморфных $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ или $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Для групп $G=\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ теорема 4.4 верна, если рассматривать только арифметические решетки $\Gamma\subset G$ [69]. В случае произвольных решеток в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ про множество кообъемов $\{v(\Gamma)\,|\,\Gamma\subset\mathscr{L}_G\}$ известно следующее

Теорема 4.5 ([135]). Пусть $G=\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ и $c>0$. Тогда

а) существует лишь конечное число классов сопряженности решеток $\Gamma\subset G$, объем которых равен c;

б) множество $\{v(\Gamma)\,|\subset\mathscr{L}_G\}$ является вполне упорядоченным подмножеством в $\mathbf{R}$ (т. е. любое непустое подмножество в нем имеет наименьший элемент), причем его порядковый тип равен ω^ω.

§ 5. Сильная жесткость решеток в полупростых группах Ли.

5.1. Теорема о сильной жесткости. Рассмотрим какой-нибудь класс $\mathscr{M}$ групп Ли (например, класс нильпотентных групп Ли или класс полупростых групп Ли).

Определение. Говорят, что решетки в группах Ли класса $\mathscr{M}$ обладают *свойством сильной жесткости,* если любой изоморфизм двух решеток (как абстрактных групп) в группах Ли класса $\mathscr{M}$ можно однозначно продолжить до изоморфизма объемлющих групп Ли.

Один из важных результатов А. И. Мальцева (см. теорему 2.7 гл. 2) состоит в том, что решетки в классе односвязных нильпотентных групп Ли обладают свойством сильной жесткости. Большим достижением в теории дискретных подгрупп групп Ли явился аналогичный результат для класса связных полупростых групп Ли без центра, не изоморфных группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ и не содержащих компактных множителей. Обозначим этот класс полупростых групп через $\mathscr{M}_S$. Вот точная формулировка соответствующей теоремы.

Теорема 5.1. Пусть G (соответственно G') — группа класса $\mathscr{M}_S$ и Γ (соответственно Γ') — неприводимая решетка в группе G (соответственно в группе G'). Тогда любой изоморфизм $\theta:\Gamma\to\Gamma'$ единственным образом продолжается до изоморфизма $\bar\theta: G\to G'$.

Замечание. Сформулированная теорема неверна для группы $PSL_2(\mathbf{R})$. Это связано с существованием гомеоморфных, но аналитически неизоморфных римановых поверхностей рода $g\geqslant 2$.

Действительно, фундаментальные группы у двух таких поверхностей изоморфны и вложены в $PSL_2(\mathbf{R})$ в виде равномерных решеток (см. например, [61, гл. VI]). Поэтому наличие свойства сильной жесткости означало бы, что эти вложения сопряжены в $PSL_2(\mathbf{R})$, т. е. что поверхности аналитически изоморфны.

Объясним теперь, почему необходимо рассматривать группы без центра. Известно, что, например, в группе $G=SO_{3,1}$ существуют решетки с бесконечной факторгруппой по коммутанту ([9], [97]). Пусть Γ — такая решетка. Рассмотрим такой нетривиальный эпиморфизм $\varphi:\Gamma\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (центр группы $SO_{3,1}$), что все элементы кручения группы $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ лежат в его ядре, и построим гомоморфизм $\theta:\Gamma\to G$, полагая $\theta(\gamma)=\gamma\varphi(\gamma)$. Немедленно проверяется, что θ — вложение. Кроме того, $\theta(\Gamma)$ — решетка в группе G, так как подгруппа $\theta(\Gamma)$ принадлежит нормализатору $N_G(\Gamma)$, а последний дискретен (см. доказательство предложения 1.3). Ясно, что исходное и построенное вложение группы Γ не сопряжены в группе G (например, потому, что оба вложения совпадают на решетке $\Gamma_0=\operatorname{Ker}\varphi$, которая плотна по Зарисскому в группе G (теорема 1.2).

Заметим, что теорему 5.1 можно доказывать только для решеток без кручения.

◀ В самом деле, пусть для этого случая теорема жесткости верна. Рассмотрим в произвольной решетке Γ нормальную подгруппу Γ_0 конечного индекса и без кручения (теорема 3.2 главы 1 и ее следствие), и пусть $\Gamma_0'=\theta(\Gamma_0)$. По предположению изоморфизм θ: $\Gamma_0\to\Gamma_0'$ продолжается до изоморфизма $\bar\theta: G\to G'$. Покажем, что $\bar\theta|_\Gamma=\theta|_\Gamma$. Для любых $\gamma_0\in\Gamma_0$, $\gamma\in\Gamma$ имеем $\theta(\gamma\gamma_0\gamma^{-1})=\bar\theta(\gamma)\bar\theta(\gamma_0)\bar\theta(\gamma)^{-1}$. С другой стороны, $\gamma\gamma_0\gamma^{-1}\in\Gamma_0$, и $\bar\theta(\gamma\gamma_0\gamma^{-1})=\theta(\gamma\gamma_0\gamma^{-1})=\theta(\gamma)\theta(\gamma_0)\theta(\gamma^{-1})$. Но так как решетка Γ' плотна по Зарисскому в группе G', а последняя не имеет центра, то отсюда следует, что $\bar\theta(\gamma)=\theta(\gamma)$ для всех $\gamma\in\Gamma$. ▶

Замечания. а) В случае связной простой группы Ли G без центра и вещественного ранга 1 (например, для группы движений пространства Лобачевского) теореме 5.1 можно придать изящную геометрическую формулировку (см. статью «Дискретные групы движений пространств постоянной кривизны»).

б) Теорема 5.1 впервые была доказана Мостовым для равномерных решеток [108], а на случай произвольных решеток распространена усилиями Г. А. Маргулиса [92], Рагунатана [121] и Прасада [116].

5.2. Компактификации Сатаке симметрических пространств. В следующем пункте мы изложим схему доказательства Мостова. Для этого вначале необходимо напомнить основные факты о компактификациях Сатаке симметрических пространств.

Начнем с двух примеров.

Пример 5.2. Естественная компактификация пространства Лобачевского Λ^n.

Для ее описания выберем проективную модель пространства Λ^n. А именно, зададим в $\mathbf{R}^{n+1}$ билинейную форму $f(x,y)=-x_0y_0+x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ и рассмотрим совокупность всех прямых в $\mathbf{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат, точки которых удовлетворяют неравенству $f(x,x)<0$. Пространство Λ^n реализуется как множество точек ассоциированного проективного пространства $\mathbf{R}P^n$, отвечающих этим прямым. Пусть $O_{n,1}'$ — подгруппа индекса 2 псевдоортогональной группы $O_{n,1}$ формы f, сохраняющая каждую связную компоненту конуса $f(x,x)<0$. Группа движений G пространства Λ^n в этой модели совпадает с группой $PO_{n,1}'$. Обозначим через $\overline{\Lambda^n}$ замыкание Λ^n в пространстве $\mathbf{R}P^n$. Полученная компактификация $\overline{\Lambda^n}$ гомеоморфна шару, причем граница $\partial\overline{\Lambda^n}=\overline{\Lambda^n}-\Lambda^n$ гомеоморфна сфере. Группа G транзитивно действует на границе, и стабилизатор точки границы совпадает с нетривиальной параболической подгруппой в G (единственной с точностью до сопряженности).

Пример 5.3. Естественная компактификация пространства X_n унимодулярных положительно определенных симметрических матриц.

Обозначим через S_n векторное пространство симметрических матриц порядка n, и пусть S_n^+ — конус положительно определенных симметрических матриц. Пространство X_n естественно отождествляется с образом конуса S_n^+ в проективном пространстве PS_n. Договоримся через $[s]$ обозначать точку пространства PS_n, отвечающую вектору s.

Рассмотрим замыкание $\overline{X_n}$ пространства X_n в PS_n. Естественное действие группы $G=SL_n(\mathbf{R})$ на X_n продолжается на $\overline{X_n}$. У этого действия в $\overline{X_n}$ имеются n орбит $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$, где $X_{(i)}$ — совокупность всех точек пространства PS_n, отвечающих положительно полуопределенным симметрическим матрицам ранга i. Заметим теперь, что $X_{(i)}$ допускает G-инвариантное расслоение, слой которого изоморфен симметрическому пространству X_i. А именно, обозначим через G_i стабилизатор точки

$$x_i = \left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

состоящий из блочно-треугольных матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda C & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right), \quad C \in O_i.$$

Пусть P_i — параболическая подгруппа группы G, состоящая из матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \quad A \in GL_i(\mathbf{R}), \quad B \in GL_{n-i}(\mathbf{R}).$$

Тогда орбита $X_{(i)} \simeq G/G_i$ есть расслоение с базой G/P_i и слоем $P_i/G_i \simeq GL_i(\mathbf{R})/(O_i\ \mathbf{R}^*) \simeq X_i$. При этом слой, содержащий точку x_i, состоит из всех точек вида $\left[\begin{array}{c|c} s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, где s — положительно определенная симметрическая матрица порядка i.

Пусть G — связная компонента полупростой алгебрической группы, K — максимальная компактная подгруппа группы G. Локально точное вещественное представление $\tau: G \to GL(V)$ группы G назовем *допустимым*, если подпространство V^K векторов, инвариантных при действии группы K, не равно нулю.

Известно, что среди неприводимых представлений группы G допустимы в точности те, которые входят в разложение представления в пространстве функций на G/K (см., например, [88]). Отметим, что для таких представлений пространство V^K одномерно. В оригинальной работе Сатаке [126] в качестве допустимых рассматривались представления группы G в симметрическом квадрате $S^2\mu$ ее неприводимого вещественного представления μ.

Определение. *Компактификацией Сатаке* $\overline{X}$ симметрического пространства $X = G/K$ называется замыкание орбиты образа K-инвариантного вектора $x \in V^K$ в проективном пространстве PV, где V — пространство допустимого представления.

Перечислим основные свойства этой компактификации.

Теорема 5.4 ([126]). Пусть $\overline{X}$ — компактификация Сатаке симметрического пространства $X = G/K$. Тогда

а) $\overline{X}$ является объединением конечного числа орбит группы G:

$$\overline{X} = \bigcup_{i=1}^{m} X_{(i)};$$

б) если G_x — стабилизатор точки $x \in X_{(i)}$, U_x — его унипотентный радикал, то связная компонента P_x нормализатора подгруппы U_x в группе G является параболической подгруппой группы G, причем ее унипотентный радикал совпадает с U_x;

в) слои естественного расслоения $X_{(i)} \to G/P_x$ изоморфны (как однородные пространства) риманову симметрическому пространству P_x/G_x.

Слои орбит $X_{(i)}$ называются *граничными компонентами* компактификации Сатаке $\overline{X}$.

Компактификация Сатаке строится по допустимому представлению и вектору из пространства V^K. Топологических типов компактификаций Сатаке имеется лишь конечное число ([153]) (компактификации рассматриваются с точностью до изоморфизма топологических G-пространств). Существует максимальная компактификация Сатаке, т. е. такая компактификация $\overline{X}_*$, что для любой компактификации Сатаке $\overline{X}$ существует G-эквивариантное непрерывное отображение $\overline{X}_*$ на $\overline{X}$. Для максимальной компактификации отображение, ставящее в соответствие граничной компоненте F ее стабилизатор P_F в группе G, является биекцией множества граничных компонент на множество параболических подгрупп группы G. Указанное соответствие обладает тем свойством, что одно из двух включений $F_1 \subset \overline{F_2}$ или $F_2 \subset \overline{F_1}$ имеет место тогда и только тогда, когда $P_{F_1} \cap P_{F_2}$ — параболическая подгруппа.

Замечания. 1) Естественные компактификации в примерах 5.2 и 5.3 являются компактификациями Сатаке. В случае, когда X — эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа, известна компактификация X, связанная с каноническим вложением симметрического пространства X в виде открытой области в двойственное компактное симметрическое пространство (так называемая компактификация Бейли—Бореля), [62]. Можно показать, что эта компактификация также является компактификацией Сатаке для подходящего представления μ ([99]).

5.3. План доказательства теоремы Мостова. Напомним, что рассматриваются две полупростые группы G и G' из класса $\mathcal{M}$, вместе с равномерными решетками $\Gamma \subset G$ и $\Gamma' \subset G'$.

Пусть задан изоморфизм $\theta: \Gamma \to \Gamma'$. Нужно доказать, что его можно продолжить до изоморфизма объемлющих групп Ли. Как уже отмечалось, можно считать, что Γ — равномерная решетка без кручения.

Рассмотрим компактные факторпространства X/Γ и X'/Γ'. Оба они являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, так как симметрические пространства X и X' гомеоморфны евклидову пространству, а ввиду изоморфизма $\theta: \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ их гомотопический тип одинаков. Поскольку пространства X и X' являются универсальными Γ-расслоениями, то существует Γ-эквивариантный гомеоморфизм $\varphi: X \to X'$, $\varphi(\gamma x) = \theta(\gamma)\varphi(x)$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Первый шаг заключается в доказательстве того, что в качестве φ можно выбрать квазиизометрию, т. е. отображение $\varphi: X \to X'$, удовлетворяющее условиям:

(i) $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant K\rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$;

(ii) $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \geqslant K^{-1}\rho(x, y)$, если $\rho(x, y) > b$ для некоторых констант $K \geqslant 1$ и $b \geqslant 0$.

На втором шаге доказывается, что любая Г-эквивариантная квази-изометрия $\varphi: X \to X'$ симметрических пространств X и X' продолжается до Г-эквивариантного отображения $\bar{\varphi}: \bar{X}_* \to \bar{X}'_*$ их максимальных компактификаций Сатаке.

На третьем шаге в игру вступает геометрия Титса $\mathcal{T}(G)$, объектами которой являются параболические подгруппы группы G ([137]), и две параболические подгруппы P и P' считаются инцидентными, если $P_1 \cap P_2$ — также параболическая подгруппа. Например, для группы $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ геометрия $\mathcal{T}(G)$ естественно изоморфна геометрии проективного пространства $\mathbf{R}P^{n-1}$ (каждой плоскости в $\mathbf{R}P^{n-1}$ сопоставляется ее стабилизатор в группе G, который является параболической подгруппой).

Используя свойства максимальной компактификации Сатаке, Мостов доказывает, что отображение $\bar{\varphi}$ индуцирует сохраняющий отношение инцидентности изоморфизм $\mathcal{T}(G) \to \mathcal{T}(G')$. Но согласно теореме Титса, если $\mathrm{rk}_{\mathbf{R}} G \geqslant 2$, то любой такой изоморфизм индуцирован некоторым изоморфизмом $\bar{\theta}: G \to G'$ ([137]). Последний и является искомым продолжением изоморфизма $\theta: \Gamma \to \Gamma'$.

Если $\mathrm{rk}_{\mathbf{R}} G = 1$, т. е. X — гиперболическое пространство над вещественной алгеброй с делением, то соответствующая геометрия Титса есть несвязное объединение точек и теорема Титса перестает работать.

Для ранга 1 теорема доказывается с помощью аналитической техники [104] (см. статью «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны»).

§ 6. Арифметические подгруппы

Напомним определение арифметичности решеток в полупростом случае (см. п. 7.1 гл. 1).

Определение. Решетка Γ в полупростой группе Ли G называется арифметической, если существует такая полупростая (вещественная) алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа H и такой эпиморфизм $\varphi: \tilde{H}^0 \to G^0$, что

а) $\varphi(\pi^{-1}(H(\mathbf{Z}) \cap H^0)) \sim \Gamma$,

б) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ компактно.

($\pi: \tilde{H}^0 \to H^0$ — универсальное накрытие.)

В 60-ые годы Сельберг и И. И. Пятецкий-Шапиро выдвинули гипотезу, согласно которой в полупростой группе Ли вещественного ранга >1 все решетки — арифметические. Гипотеза была доказана Г. А. Маргулисом около 1974 года, и это явилось вершиной в развитии теории дискретных подгрупп полупростых групп Ли.

В пп. 6.1 и 6.2 этого параграфа всюду, где не оговорено противное, под алгебраическим многообразием (группой) понимается комплексное алгебраическое многообразие (группа).

6.1. Функтор ограничения поля. Пусть $k \subset \mathbf{C}$ — поле алгебраических чисел, $O \subset k$ — кольцо целых элементов поля k, и $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — различные вложения поля k в $\mathbf{C}$. Определим *функтор ограничения* $R_{k/\mathbf{Q}}$, действующий из категории алгебраических k-групп и k-морфизмов в категорию $\mathbf{Q}$-групп и $\mathbf{Q}$-морфизмов.

Удобно сначала определить функтор ограничения для аффинных многообразий. Рассмотрим аффинное многообразие $X \subset \mathbf{C}^N$, определенное над полем k, и предположим, что ${}^aX(k) = X$ (в дальнейшем наша конструкция будет применяться в случае связной алгебраической k-группы, где, как известно, это условие выполняется). Имеем вложение $X(k) \hookrightarrow k^N$.

Выберем базис поля k над $\mathbf{Q}$, отождествив тем самым пространства k^N и $\mathbf{Q}^{nN}$, и рассмотрим естественное вложение $\varphi: X(k) \hookrightarrow \mathbf{Q}^{nN} \subset \mathbf{C}^{nN}$.

Пусть $Y = {}^a\varphi(X(k)) \subset \mathbf{C}^{nN}$. Тогда Y — аффинное $\mathbf{Q}$-многообразие и $\varphi(X(k)) = Y(\mathbf{Q})$. Таким образом, указанная конструкция определяет аффинное $\mathbf{Q}$-многообразие $Y = R_{k/\mathbf{Q}}X$ вместе с биекцией $\varphi: X(k) \xrightarrow{\sim} (R_{k/\mathbf{Q}}X)(\mathbf{Q})$. Можно показать, что эта пара в естественном смысле не зависит от вложения X в $\mathbf{C}^N$ и выбора базиса поля k над $\mathbf{Q}$.

На языке схем определение функтора $R_{k/\mathbf{Q}}$ выглядит следующим образом: если $X = \mathrm{Spec}\,A$, где A — алгебра, определенная над k, то $X(k) = \mathrm{Spec}\,A(k)$ и

$$R_{k/\mathbf{Q}}X = \mathrm{Spec}\,A(k) \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{C}.$$

Чтобы яснее представить себе, как устроено многообразие $R_{k/\mathbf{Q}}X$, введем в рассмотрение многообразия X^{σ_i}, $i = 1, \ldots, n$.

По определению, $X^{\sigma_i} \subset \mathbf{C}^N$ — это аффинное k^{σ_i}-многообразие, определяющие уравнения которого получаются применением σ_i ко всем коэффициентам уравнений, определяющих X.

Прямое произведение $X^\sigma = \prod_{i=1}^{n} X^{\sigma_i}$ естественно вкладывается в $\mathbf{C}^{nN}$. Обозначим через σ диагональное вложение $X(k)$ в $X^\sigma: x \mapsto (x^{\sigma_1}, \ldots, x^{\sigma_n})$, $x \in X(k)$. Тогда:

1) Существует единственный изоморфизм $\psi: R_{k/\mathbf{Q}}X \to X^\sigma$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & R_{k/\mathbf{Q}}X \arrow[d, "\wr\ \psi"] \\ X(k) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\sigma"'] & X^\sigma \end{tikzcd}$$

коммутативна. Тем самым X^σ снабжается такой $\mathbf{Q}$-структурой, что

$$X^\sigma(\mathbf{Q})=\sigma(X(k)).$$

2) Проекция $(R_{k/\mathbf{Q}}X)\to X^{\sigma_i}$ — сюръективный морфизм, определенный над k^{σ_i}.

3) Для любого числового поля K, если $K\underset{\mathbf{Q}}{\otimes}k=K_1\oplus\ldots\oplus K_s$ (как алгебра над K), то $\psi((R_{k/\mathbf{Q}}X)(K))=\prod\limits_1^s X^{\sigma_i}(K_i)$, где σ_i выбираются так, что $k^{\sigma_i}\subset K_i$, а $X^{\sigma_i}(K_i)$ рассматриваются диагонально вложенными в $\prod\limits_{k^{\sigma_j}\subset K_i} X^{\sigma_j}$ ([148]).

Если $X=G$ — многообразие связной алгебраической k-группы, то функтор ограничения $R_{k/\mathbf{Q}}$ согласован со структурой группы. Поэтому можно рассмотреть $\mathbf{Q}$-группу $R_{k/\mathbf{Q}}G$. Опишем эту конструкцию на матричном языке. В векторном пространстве V над полем k выберем базис $e=\{e_1,\ldots,e_m\}$ и предположим, что группа G определена над k в базисе e. Тогда группа $G(k)$ записывается в базисе e матрицами из $\mathrm{GL}_m(k)$. Далее, выберем базис $\omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ поля k над $\mathbf{Q}$ и для каждого элемента $x\in k$ обозначим через r_x матрицу линейного преобразования $a\to ax$, $a\in k$, в базисе ω. Заменим элементы матрицы $g=(a_{ij})$, $g\in G(k)$, матрицами $r_{a_{ij}}$ и возьмем замыкание по Зарисскому полученной матричной группы в группе $\mathrm{GL}_{mn}(\mathbf{C})$. Это и будет матричной реализацией группы $R_{k/\mathbf{Q}}G$.

К свойствам 1), 2) и 3) функтора ограничения, справедливым и в категории групп, добавим еще два групповых свойства:

4) $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{Z})\sim\varphi(G(O))$.

5) Группа G полупроста (k-проста) тогда и только тогда, когда группа $R_{k/\mathbf{Q}}$ полупроста ($\mathbf{Q}$-проста) ([148]).

В дальнейшем для нас особый интерес будут представлять группы вещественных точек групп $R_{k/\mathbf{Q}}G$. В связи с этим отметим, что если среди вложений поля k в $\mathbf{C}$ имеются r вещественных $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ и $2t$ попарно сопряженных комплексных вложений $\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_{r+t},\sigma_{r+t+1},\ldots,\sigma_{r+2t}$, $\sigma_{r+i}=\overline{\sigma_{r+t+i}}$, $i=1,\ldots,t$, $r+2t=n$, то по свойству 3) функтора $R_{k/\mathbf{Q}}$ имеем

6) $(R_{k/\mathbf{Q}}\,G)(\mathbf{R})=G^{\sigma_1}(\mathbf{R})\times\ldots\times G^{\sigma_r}(\mathbf{R})\times G^{\sigma_{r+1}}(\mathbf{C})\times\ldots$ $\ldots\times G^{\sigma_{r+t}}(\mathbf{C})$.

Примеры 6.1. 1) Предположим, что группа $G=\mathbf{C}^*$ рассматривается как k-группа. Тогда, если у поля k имеется r вещественных и $2t$ попарно сопряженных комплексных вложения, то

$$(R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{C}^*)(\mathbf{R})=(\mathbf{R}^*)^r(\mathbf{C}^*)^t.$$

2) Пусть k — мнимое квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}$ и A — простая центральная k-алгебра ранга 2 (обобщенная алгебра кватернионов). Обозначим через G группу обратимых элементов алгебры $A\otimes\mathbf{C}$ с приведенной нормой 1. Это алгебраическая k-группа, и

$$(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})=G(\mathbf{C})\simeq\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}).$$

3) Пусть f — квадратичная форма с коэффициентами из вполне вещественного поля алгебраических чисел k и $G=\mathrm{O}(f)$ группа автоморфизмов формы f. Это алгебраическая k-группа, и

$$(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})=\prod_{i=1}^n \mathrm{O}(f^{\sigma_i})(\mathbf{R}),$$

где f^{σ_i} — форма, полученная применением σ_i ко всем коэффициентам формы f.

4) Пусть $K=k(\sqrt{\varepsilon})$, где $\varepsilon=1+\sqrt{2}$, $k=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Рассмотрим эрмитову форму $f=\sum\limits_1^m z_i z_i^\sigma$ и группу $G(k)=\mathrm{SU}(f,K)$ ее унимодулярных автоморфизмов над полем K (где σ — автоморфизм K над k, $\sigma(\sqrt{\varepsilon})=-\sqrt{\varepsilon}$). Эта группа является группой k-точек некоторой алгебраической группы $G\subset\mathrm{GL}_{2m}(\mathbf{C})$. Имеем

$$(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})=G(\mathbf{R})\times G^\tau(\mathbf{R}),$$

где $\tau:k\to\mathbf{C}$ — вложение, $\tau(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$. Ясно, что

$$G(\mathbf{R})=\mathrm{SU}(f,K\underset{k}{\otimes}\mathbf{R})=\mathrm{SU}(f,\mathbf{R}\oplus\mathbf{R})\simeq\mathrm{SL}_m(\mathbf{R})$$

($K\underset{k}{\otimes}\mathbf{R}$ рассматривается как $\mathbf{R}$-алгебра), а

$$G^\tau(\mathbf{R})=\mathrm{SU}(f,K^\tau\underset{k^\tau}{\otimes}\mathbf{R})=\mathrm{SU}(f,\mathbf{C})$$

(где σ в определении f следует понимать как комплексное сопряжение). Следовательно,

$$(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})=\mathrm{SL}_m(\mathbf{R})\times\mathrm{SU}(f,\mathbf{C}).$$

6.2. Конструкция арифметических решеток. Если G — алгебраическая k-группа, то через $X(G)(k)$ мы будем обозначать группу ее k-характеров.

Предложение 6.2. Пусть G — связная алгебраическая k-группа, для которой $X(G)(k)=1$. Тогда подгруппа $G(O)$ является решеткой в группе Ли $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$.

◄ Так как $G(k)\simeq(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{Q})$, то любой нетривиальный $\mathbf{Q}$-характер группы $R_{k/\mathbf{Q}}G$ индуцирует нетривиальный k-характер группы G. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае $X(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{Q})=1$, и по теореме 7.8 гл. 1 подгруппа $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{Z})$

является решеткой в группе Ли $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$. Но группа $G(O)$ соизмерима с группой $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{Z})$ и, следовательно, также является решеткой в $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$. ▶

Предложение 6.3. Пусть G — связная алгебраическая k-группа. Для компактности факторпространства $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})/G(O)$ необходимо и достаточно, чтобы

а) $X(G)(k)=1$,

б) каждый унипотентный элемент группы $G(k)$ лежал в ее унипотентном радикале.

Это предложение является прямым следствием теоремы 7.9 главы 1. Выделим один важный частный случай конструкции с функтором $R_{k/\mathbf{Q}}$, приводящий к равномерным решеткам.

Предложение 6.4. Пусть G — связная полупростая алгебраическая k-группа. Предположим, что в разложении

$$(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})=G^{\sigma_1}(\mathbf{R})\times\ldots\times G^{\sigma_r}(\mathbf{R})\times G^{\sigma_{r+1}}(\mathbf{C})\times\ldots\times G^{\sigma_{r+t}}(\mathbf{C})$$

(свойство 6) п.6.1) хотя бы один из множителей компактен (это может быть только множитель вида $G^{\sigma_i}(\mathbf{R})$). Тогда

1) $G(O)$ — равномерная решетка в группе Ли $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$;

2) если через G_* обозначить факторгруппу группы Ли $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$ по некоторой части компактных множителей, а через π — проекцию $(R_{k/\mathbf{Q}}G)(\mathbf{R})$ на G_*, то $\pi(G(O))$ — равномерная решетка в группе Ли G_* (по определению, арифметическая).

◀ Проверим выполнение условий а) и б) предложения 6.3. Условие а) — следствие полупростоты группы G. Далее, если $g\in G(k)$ — нетривиальный унипотентный элемент, то g^σ — нетривиальный унипотентный элемент в группе $G^\sigma(k^\sigma)$ для любого вложения $\sigma: k\to\mathbf{C}$. Поэтому, если хотя бы один из множителей вида $G^\sigma(\mathbf{R})$ компактен, то в $G(k)$ не может быть нетривиальных унипотентных элементов. Тем самым 1) доказано. Для доказательства 2) заметим, что по теореме 4.7 гл. 1 подгруппа $\pi(G(O))$ является равномерной решеткой в G_*. ▶

Примеры 6.5. Рассмотрим конструкцию арифметических решеток в группах из примеров 6.1.

1) В этом случае $X(R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{C}^*)(\mathbf{Q})=\langle\chi\rangle$, где $\chi: k^*\to\mathbf{Q}$ — норма поля k (напомним, что $(R_{k/\mathbf{Q}}\mathbf{C}^*)(\mathbf{Q})\simeq k^*$). У группы $G'=\operatorname{Ker}\chi$ уже не будет нетривиальных $\mathbf{Q}$-характеров, и, согласно предложению 6.2, группа $G'(\mathbf{Z})$, соизмеримая с группой единиц поля k, является равномерной решеткой в группе Ли $G'(\mathbf{R})$. Но $G'(\mathbf{R})^0=(\mathbf{R}_+^*)^{r+t-1}\times\mathbf{T}^t$, где $\mathbf{T}$ — одномерный вещественный тор. Отсюда, в частности, следует, что ранг группы единиц поля k равен $r+t-1$ (теорема Дирихле о единицах).

2) В качестве A рассмотрим полную матричную алгебру $M_2(k)$, где k — мнимое квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}$. Мы получим тогда, что $G(O)=\mathrm{SL}_2(O)$ — решетка в $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

3) Если форма f такова, что f^σ положительно определенна при всех вложениях $\sigma: k\to\mathbf{R}$, отличных от тождественного, то $\mathrm{O}(f, O)$ — равномерная решетка в $\mathrm{O}(f, \mathbf{R})$.

4) Группа $\mathrm{SU}(f, O)$, где O — кольцо целых алгебраических чисел поля $K=k(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon=1+\sqrt{2}$, $k=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, является равномерной решеткой в $\mathrm{SL}_m(\mathbf{R})$.

Теорема 6.6. Пусть G — связная полупростая группа Ли, не имеющая компактных множителей, и $\Gamma\subset G$ — неприводимая арифметическая решетка. Тогда группу H в определении арифметичности можно выбрать в виде $H=(R_{k/\mathbf{Q}}S)(\mathbf{R})$, где S — абсолютно простая группа, определенная над некоторым числовым полем k. Если же решетка Γ неравномерна, то на группе $\operatorname{Ad} G$ можно ввести такую $\mathbf{Q}$-структуру, что $(\operatorname{Ad} G)(\mathbf{Z})\sim\operatorname{Ad}\Gamma$.

◀ Рассмотрим полупростую вещественную алгебраическую $\mathbf{Q}$-группу H из определения арифметичности. В силу неприводимости решетки Γ в группе G группа H является $\mathbf{Q}$-простой. Рассмотрим $\mathbf{Q}$-простую комплексную алгебраическую группу $H(\mathbf{C})$. Известно, что любая $\mathbf{Q}$-простая комплексная алгебраическая группа имеет вид $R_{k/\mathbf{Q}}S$, где S — абсолютно простая алгебраическая группа, определенная над некоторым числовым полем k ([136]). Это доказывает первое утверждение теоремы. Заметим теперь, что если решетка Γ неравномерна в группе G и группа G не содержит компактных множителей, то и группа $H(\mathbf{R})$ не содержит компактных множителей (предложение 6.4). Это означает, что $\operatorname{Ad} H(\mathbf{R})\simeq\operatorname{Ad} G$ и $(\operatorname{Ad} H)(\mathbf{Z})\sim\operatorname{Ad}\Gamma$, откуда и следует вторая часть теоремы. ▶

Теорема 6.7. Пусть G — связная полупростая группа Ли. Тогда в ней существуют арифметические решетки (как равномерные, так и неравномерные).

Существование равномерной арифметической решетки впервые доказал Борель ([65]), построив такую k-форму S группы $\operatorname{Ad} G$ над вполне вещественным числовым полем k, для которой группы $S^\sigma(\mathbf{R})$ компактны при всех вложениях $\sigma: k\to\mathbf{R}$, отличных от тождественного. Аналогичным образом можно установить и существование неравномерной арифметической решетки ([120, гл. XIV]).

6.3. Максимальные арифметические подгруппы. Описание (с точностью до сопряженности) максимальных (по включению) арифметических подгрупп алгебраических групп относится скорее к арифметической теории алгебраических групп с ее адельной техникой, которой мы не касаемся в рамках этого обзора. И все же мы хотим познакомить читателя с формулировками нескольких красивых и полезных результатов классификации максимальных арифметических подгрупп. Мы следуем работе В. П. Платонова [38] и развивающей ее статье Рольфса [123] (см. также обзор [39]), ограничиваясь, для простоты, случаем арифметических подгрупп Γ в $\mathbf{Q}$-группе G, соизмеримых с группой $G(\mathbf{Z})$.

Лемма 6.8 ([38]). Если $\mathbf{Q}$-группа G обладает максимальной арифметической подгруппой, то она полупроста.

Поэтому в дальнейшем G будет связной полупростой алгебраической $\mathbf{Q}$-группой. Через $\mathbf{Q}_p$ мы будем обозначать поле p-адических чисел, и через $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел.

Лемма 6.9 ([38]). Пусть Γ — арифметическая подгруппа группы G. Тогда, если $\Gamma_{\mathbf{Q}}=\Gamma\cap G(\mathbf{Q})$, то $\Gamma_{\mathbf{Q}}\supset(\Gamma,\Gamma)$ и экспонента абелевой группы $\Gamma/\Gamma_{\mathbf{Q}}$ делит экспоненту центра группы G. Если Γ — максимальная арифметическая подгруппа, то нормализатор $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ в G равен Γ.

Лемма 6.10 ([38]). Пусть $f: G\to G'$ — изогения $\mathbf{Q}$-групп, определенная над $\mathbf{Q}$. Тогда:

1) образ максимальной арифметической подгруппы в G является максимальной арифметической подгруппой в G',

2) полный прообраз максимальной арифметической подгруппы в G' — максимальная арифметическая подгруппа в G.

Эта лемма показывает, что достаточно научиться описывать максимальные арифметические подгруппы в односвязных полупростых $\mathbf{Q}$-группах. Если группа G односвязна и не имеет центра, то по лемме 6.9 любая арифметическая подгруппа Γ принадлежит $G(\mathbf{Q})$. Описание максимальных арифметических подгрупп для этого случая выглядит довольно просто. Условимся через Γ_p обозначать замыкание арифметической подгруппы $\Gamma\subset G(\mathbf{Q})$ в p-адической топологии группы $G(\mathbf{Q}_p)$.

Предложение 6.11 ([38]). Пусть G — односвязная полупростая $\mathbf{Q}$-группа без центра и $\Gamma\subset G(\mathbf{Q})$ — ее максимальная арифметическая подгруппа. Тогда для любого p, Γ_p — максимальная компактная подгруппа в $G(\mathbf{Q}_p)$, причем для почти всех p, $\Gamma_p=G(\mathbf{Z}_p)$. Обратно, если Γ_p — максимальные компактные подгруппы для всех p и $\Gamma_p=G(\mathbf{Z}_p)$ для почти всех p, то $\Gamma=\bigcap_p\Gamma_p$ — максимальная арифметическая подгруппа в $G(\mathbf{Q})$.

В общем случае ситуация сложнее. После некоторой подготовки мы дадим описание максимальных арифметических подгрупп в простой односвязной группе, расщепимой над $\mathbf{Q}$. Известно, что всякая такая группа G определена над $\mathbf{Z}$. Выберем в группе G максимальный расщепимый тор T, определенный над $\mathbf{Z}$, и пусть Φ — система его корней, Φ^+ — система положительных корней, $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ — система простых корней. Положим $\alpha_0=-\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha}$ — старший корень. Обозначим через W аффинную группу Вейля, а через C — фундаментальную камеру группы W в пространстве, двойственном вещественному пространству, порожденному системой корней Φ. Элементы набора корней $\Delta=\{\alpha_0,\ldots,\alpha_l\}$ и грани симплекса C находятся в

естественном биективном соответствии. Обозначим через $C(X)$ пересечение всех граней симплекса, отвечающих элементам подмножества $X\subset\Delta$, и пусть W_X — стабилизатор грани $C(X)$ в группе W.

Для любого p можно рассмотреть естественное отображение $\varphi_p: G(\mathbf{Z}_p)\to G(\mathbf{F}_p)$ (группа G определена над $\mathbf{Z}$!) редукции по модулю p (где $\mathbf{F}_p$ — поле вычетов по модулю p). Система положительных корней Φ^+ определяет борелевскую подгруппу $B(\mathbf{F}_p)$ в $G(\mathbf{F}_p)$. Подгруппа $P=\varphi_p^{-1}(B(\mathbf{F}_p))$ группы $G(\mathbf{Z}_p)$ называется ивахорической подгруппой. При этом $N_G(T)(\mathbf{Q}_p)/T(\mathbf{Z}_p)\simeq W$, и тройка $(G(\mathbf{Q}_p),\ P,\ N_G(T)(\mathbf{Q}_p))$ образует систему Титса ([90]). Если $X\subset\Delta$, то подгруппа $PW_XP=$ $=P_X$ называется парахорической; подмножество X будем называть ее типом. В частности, $P=P_\varnothing$. Парахорические подгруппы компактны. Максимальные среди них имеют тип $\Delta-\{\alpha_i\}$. Стандартная максимальная компактная подгруппа $K_p=G(\mathbf{Z}_p)$ имеет тип $\Delta-\{\alpha_0\}$.

Центр группы G действует автоморфизмами расширенной схемы Дынкина, вершины которой взаимно однозначно отвечают элементам системы Δ. Набор $X=\{X_p\}$, $X_p\subset\Delta$, назовем допустимым семейством, если $X_p=\Delta-\{\alpha_0\}$ для почти всех p. Такое семейство называется максимальным, если для любого p, $\Delta-X_p$ — орбита подгруппы центра. Например, допустимое семейство $X=\{X_p\}$, $X_p=\Delta-\{\alpha_i\}$, $i=0$ для почти всех p, является максимальным.

Теорема 6.12 ([123]). Пусть G — простая односвязная расщепимая $\mathbf{Q}$-группа. Для любого допустимого семейства $X=\{X_p\}$ положим $P_X=\bigcap_p(P_{X_p}\cap G(\mathbf{Q}))$ и через Γ_X обозначим нормализатор подгруппы P_X в G. Тогда, если семейство X максимально, то Γ_X — максимальная арифметическая подгруппа. Обратно, любая арифметическая подгруппа, соизмеримая с $G(\mathbf{Z})$, сопряжена элементом из $G(\mathbf{Q})$ единственной подгруппе вида Γ_X.

Пример 6.13. Пусть $G=SL_2(\mathbf{C})$. Тогда $\Delta=\{\alpha_0,\alpha_1\}$, и относительно стандартного упорядочения системы корней имеем

$$P=P_\varnothing=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}_p),\ b\in p\mathbf{Z}_p\right\},\quad P_{\{\alpha_1\}}=SL_2(\mathbf{Z}_p)$$

и

$$P_{\{\alpha_0\}}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Q}_p);\ a,d\in\mathbf{Z}_p,\ b\in p\mathbf{Z}_p,\ c\in p^{-1}\mathbf{Z}_p\right\}.$$

Действие центра на Δ сводится к перестановке корней α_0 и α_1 и индуцируется внешним автоморфизмом группы $G(\mathbf{Q}_p)$ — сопряжением с помощью матрицы $\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}$. После подходящего сопряжения матрицей из $GL_2(\mathbf{Q})$ можно считать, что для конечного числа значений $p=p_1, \ldots, p_q$ имеем $X_{p_j}=\varnothing$, а для остальных p $X_p=\{\alpha_1\}$.

Тогда $P_X=\Gamma_0(m)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),\ b\equiv 0 \pmod m,\ m\equiv p_1\ldots p_q\right\}$ (в частности, $\Gamma_0(1)=SL_2(\mathbf{Z})$). Таким образом, любая максимальная арифметическая подгруппа $\Gamma\subset SL_2(\mathbf{C})$, соизмеримая с $SL_2(\mathbf{Z})$, сопряжена с помощью элемента из $SL_2(\mathbf{Q})$ единственной подгруппе вида $N_G(\Gamma_0(m))$. Известно ([39]), что

$$N_G(\Gamma_0(m))=\left\{\begin{pmatrix} a\sqrt{D} & \frac{bm}{\sqrt{D}} \\ \frac{c}{\sqrt{D}} & d\sqrt{D} \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{C})\,|\,a, b, c, d\in\mathbf{Z},\ D\geqslant 1,\ D\,|\,m\right\}.$$

6.4. Группа соизмеримости. Напомним, что группой соизмеримости подгруппы $\Gamma\subset G$ называется подгруппа $\operatorname{Comm}\Gamma=\{g\in G,\ g\Gamma g^{-1}\sim\Gamma\}$. Заметим, что любая подгруппа $\Gamma'\subset G$, соизмеримая с группой Γ, принадлежит группе $\operatorname{Comm}\Gamma$ (п. 2.1 гл. 1).

Лемма 6.14 ([66]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей. Если Γ — неприводимая решетка в G, а $H\subset G$ — любая подгруппа, содержащая группу Γ, то группа H либо дискретна, либо плотна в топологии группы Ли G.

◀ Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H. Ясно, что группа Γ входит в нормализатор $N_G(\overline{H}^0)$ связной компоненты $\overline{H}^0$ группы $\overline{H}$. Следовательно, касательная алгебра $\mathfrak{h}$ группы $\overline{H}^0$ является $\operatorname{Ad}\Gamma$-инвариантным подпространством в касательной алгебре $\mathfrak{g}$ группы G. По теореме 1.2 подпространство $\mathfrak{h}$ будет и $\operatorname{Ad}G$-инвариантно. Значит $G\subset N_G(\overline{H}^0)$. Если $\overline{H}^0=\{e\}$, то группа H дискретна. В противном случае группа $\overline{H}^0\Gamma$ плотна в G (предложение 1.4), а так, как $\overline{H}^0\Gamma\subset\overline{H}$, то $\overline{H}=G$. ▶

Теорема 6.15 ([66]). Пусть Γ — неприводимая решетка в связной полупростой группе Ли G, не имеющей компактных множителей. Тогда имеет место следующая альтернатива:

а) группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ дискретна и является наибольшей среди решеток, соизмеримых с Γ;

б) группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в G и наибольшей среди решеток, соизмеримых с Γ, не существует.

◀ После леммы 6.14 только второе утверждение пункта б) нуждается в объяснении. Пусть группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в группе G, и пусть Δ — наибольшая среди решеток, соизмеримых с Γ. Тогда для любого $\gamma\in\operatorname{Comm}\Gamma$, $\gamma\Delta\gamma^{-1}\subset\Delta$, т. е. $\gamma\Delta\gamma^{-1}=\Delta$. Так как группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в группе G, то отсюда следует, что Δ — дискретная нормальная подгруппа в группе G, т. е. Δ лежит в центре группы G, что невозможно. ▶

Теорема 6.16 ([66]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей. Если Γ — арифметическая решетка в G, то группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в G.

◀ Ввиду предложения 1.3 достаточно рассмотреть случай группы G с тривиальным центром. В этом случае отображение φ в определении арифметичности пропускается через группу $\operatorname{Ad}H^0$. Поэтому можно считать, что существует такая полупростая $\mathbf{Q}$-группа H с тривиальным центром и такой эпиморфизм $\varphi: H\to G$, что

а) $\varphi(H(\mathbf{Z})\cap H^0)\sim\Gamma$,

б) $\operatorname{Ker}\varphi$ компактно.

Далее, несложно проверить, что $\operatorname{Comm}H(\mathbf{Z})=H(\mathbf{Q})$ ([66]). Но тогда $\varphi(H(\mathbf{Q})\cap H^0)\subsetneq\operatorname{Comm}\Gamma$ (см. п 1.2 гл. 1). Группа $H(\mathbf{Q})\cap H^0$ плотна в группе Ли H^0, а так как φ — эпиморфизм, то группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в группе Ли G. ▶

Г. А. Маргулису принадлежит следующее неожиданное обращение теоремы 6.16.

Теорема 6.17 ([92]). Пусть G — связная полупростая группа Ли с тривиальным центром и без компактных множителей, Γ — неприводимая решетка в G. Если группа $\operatorname{Comm}\Gamma$ плотна в группе Ли G, то подгруппа Γ арифметична.

6.5. Нормальные подгруппы арифметических групп и конгруэнц-подгруппы.

Теорема 6.18 ([30]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа вещественного ранга >1 и без компактных множителей. Если Γ — неприводимая арифметическая решетка в G и N — нормальная подгруппа в Γ, то либо $N\subset Z(G)$ (центр группы G), либо факторгруппа Γ/N конечна.

Отметим, что условие на ранг группы в формулировке теоремы существенно. На это указывают примеры решеток в некоторых полупростых группах вещественного ранга 1 (например, решеток в $SO_{n,1}$ с бесконечной факторгруппой по коммутанту ([97], [9] и п. 7.1).

Пусть G — алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа. Выберем некоторую $\mathbf{Z}$-структуру на группе G. Конгруэнц-подгруппой $\Gamma(m)$ группы $G(\mathbf{Z})$ называется ядро естественного отображения $G(\mathbf{Z})\to G(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ (редукция по модулю m). Конгруэнц-подгруппа $\Gamma(m)$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы $G(\mathbf{Z})$. Как известно, группы $G(\mathbf{Z})$, полученные за счет различного выбора $\mathbf{Z}$-структур на группе G, соизмеримы. При этом любая конгруэнц-подгруппа в смысле одной $\mathbf{Z}$-структуры содержит некоторую конгруэнц-подгруппу в смысле другой, и наоборот. Поэтому корректен следующий вопрос: всякая ли подгруппа конечного индекса группы $G(\mathbf{Z})$ содержит конгруэнц-подгруппу?

Это частный случай (над $\mathbf{Q}$) так называемой конгруэнц-проблемы ([4], [130]).

Теорема 6.19 ([5], [95]). Пусть G — односвязная простая

$\mathbf{Q}$-группа, расщепимая над $\mathbf{Q}$, и $\operatorname{rk} G>1$. Тогда любая подгруппа конечного индекса группы $G(\mathbf{Z})$ содержит конгруэнц-подгруппу.

Теорема 6.19 при некоторых ограничениях верна и для полей алгебраических чисел. Подробное изложение этих и дальнейших результатов читатель найдет в [39], [95].

6.6. Проблема арифметичности.

Теорема 6.20 (Г. А. Маргулис, [94]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей. Если вещественный ранг группы G больше единицы, то всякая неприводимая решетка в ней арифметична.

Доказательство теоремы 6.20 основано на следующей теореме суперржесткости, которая является далеко идущим обобщением теоремы жесткости Мостова (теорема 5.1).

Теорема 6.21 (Г. А. Маргулин, [94]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа такая, что $\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G>1$, и полупростая группа Ли G^0 не имеет компактных множителей. Пусть $\Gamma\subset G^0$ — неприводимая решетка, k — локальное поле характеристики 0, H — связная k-простая алгебраическая k-группа без центра, и $\pi:\Gamma\to H(k)$ — гомоморфизм, образ которого плотен по Зарисскому в H. Тогда либо группа $\pi(\Gamma)$ компактна, либо (в случае $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) гомоморфизм π продолжается до полиномиального гомоморфизма $G\to H$.

Доказательство теоремы 6.21 не может быть здесь изложено, так как выходит за рамки всех стандартных методов, нами упомянутых. Оно опирается на изучение эргодических действий дискретных подгрупп на однородных пространствах полупростых групп Ли ([94], [152]).

Отметим, что этими же методами были получены и теоремы 6.17, 6.18.

Согласно теореме 6.20 неарифметические решетки могут существовать лишь в полупростых группах Ли G вещественного ранга 1. Сравнительно легко построить примеры неарифметических решеток (как равномерных, так и неравномерных) в группе $G=SO_{2,1}$, локально изоморфной группе движений плоскости Лобачевского.

В группе $SO_{n,1}$ при $n=3$, 4, 5 примеры таких решеток были построены В. С. Макаровым ([23]) и Э. Б. Винбергом ([8]) в 1966 году. В 1986 г. М. Л. Громов и И. И. Пятецкий-Шапиро[1)] построили примеры неарифметических решеток, в том числе и равномерных, в группе $SO_{n,1}$ для всех $n\geqslant 3$. Подробнее об этом см. статью «Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны». Примеры неарифметических решеток в группе $SU_{2,1}$ построил Мостов ([111], [112]) (с другой точки зрения некоторые из них независимо построены в [89] и [48]), а в группе $SU_{3,1}$ — Делинь и Мостов [80]. Для групп $SU_{n,1}$, $n\geqslant 4$; групп движений кватернионного гиперболического пространства и гиперболической плоскости над алгеброй октав вопрос о существовании неарифметических решеток открыт.

1) См. Gromov M., Piatetski-Shapiro, Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces. Publ. IHES, 1988, № 66, 93—103.

§ 7. Когомологии решеток в полупростых группах Ли

В этом параграфе речь пойдет о группах когомологий $H^i(\Gamma, V)$ решетки Γ в полупростой группе Ли G со значениями в конечномерном Γ-модуле V. Эта область, лежащая на стыке теории дискретных групп и теории представлений, в настоящее время бурно развивается, в частности, в связи с некоторыми задачами алгебраической геометрии (изучение арифметики и топологии пространств модулей) и теории автоморфных форм (см. [73]). До окончательных результатов здесь еще далеко. Лишь сравнительно недавно удалось разобраться с группой $H^1(\Gamma, V)$. С этих результатов мы и начнем.

7.1. Одномерные когомологии. Следующая теорема, окончательная формулировка которой появилась в [92], явилась итогом усилий многих математиков (см. комментарий и список литературы в [92]).

Теорема 7.1. Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа такая, что группа Ли G^0 не содержит компактных множителей. Тогда, если а) $\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G>1$ или б) $\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G=1$, но группа G локально не изоморфна группам $SO_{n,1}$ или $SU_{n,1}$, то для любой неприводимой решетки Γ в G группа $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ конечна.

Контрпримеры к утверждению теоремы 7.1 в группах $SO_{n,1}$ и $SU_{n,1}$ построены в [9], [97] и [73] соответствено. Если среди простых множителей группы G нет множителей, локально изоморфных $SO_{n,1}$ или $SU_{n,1}$, то теорема следует из теорем 3.7 и 3.9 первой главы.

Теорема 7.1 есть утверждение о том, что $H^1(\Gamma, \mathbf{C})=0$ для решеток Γ, удовлетворяющих ее условиям (здесь $\mathbf{C}$ рассматривается как тривиальный одномерный Γ-модуль). В случае, когда решетка Γ не содержит элементов конечного порядка, этот результат имеет важное геометрическое следствие. Напомним, что если Γ — дискретная группа гомеоморфизмов стягиваемого топологического пространства X, действующая без неподвижных точек, то $H^i(\Gamma, \mathbf{C})\simeq H^i(X/\Gamma; \mathbf{C})$ для любого $i\geqslant 0$ ([47], [86]). Такова, например, дискретная подгруппа без кручения в полупростой группе Ли, действующая на ассоциированном симметрическом пространстве (см. п. 2.1 гл. 1). В итоге получаем такое

Следствие 7.2. Пусть Γ — дискретная группа движений риманова симметрического пространства X ранга большего единицы. Если группа Γ не имеет кручения и объем факторпространства X/Γ конечен, то первое число Бетти факторпространства X/Γ равно нулю. Рассмотрим теперь группу $H^1(\Gamma, V)$ в случае произвольного Γ-модуля V.

Теорема 7.3 ([92]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа Ли такая, что $\mathrm{rk}_{\mathbf{R}}\, G>1$ и G^0 — группа Ли без компактных множителей и с тривиальным центром. Если Γ — неприводимая решетка в группе G, то любое конечномерное представление группы Γ в векторном пространстве над полем k нулевой характеристики вполне приводимо.

Из теоремы 7.3 стандартным образом (см., например, [21, ч. II, § 8]) выводится

Следствие 7.4. В условиях теоремы 7.3, $H^1(\Gamma, V)=0$ для любого конечномерного Γ-модуля V над полем k.

Еще одно следствие:

Следствие 7.5. Пусть G — связная полупростая группа Ли вещественного ранга >1 без компактных множителей, и Γ — неприводимая решетка в группе G. Тогда $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})=0$, где касательная алгебра $\mathfrak{g}$ группы G рассматривается как Γ-модуль посредством присоединенного представления.

Следствие 7.5 получается из следствия 7.4, примененного к группе $\mathrm{Ad}\, G$ и решетке $\mathrm{Ad}\,\Gamma\subset\mathrm{Ad}\, G$, при помощи формулируемой ниже леммы.

Лемма 7.6 ([120]). Пусть G — связная полупростая группа Ли без компактных множителей, Γ — неприводимая решетка в G. Рассмотрим присоединенную группу $\mathrm{Ad}\, G$ и решетку $\mathrm{Ad}\,\Gamma\subset\mathrm{Ad}\, G$. Тогда естественное отображение $H^1(\mathrm{Ad}\, G, \mathfrak{g})\to\to H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ эпиморфно.

Как правило, группа $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ тривиальна и в случае, когда $\mathrm{rk}_{\mathbf{R}}\, G=1$.

Теорема 7.7. Пусть Γ — решетка в связной простой группе Ли G вещественного ранга 1, не изоморфной локально группе $SL_2(\mathbf{R})$. Тогда $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})=0$, за исключением, быть может, случая, когда группа G локально изоморфна $SL_2(\mathbf{C})$ и Γ — неравномерная решетка.

Теорема 7.7 для неравномерных решеток доказана Гарландом и Рагунатаном в [84], а для равномерных — это частный случай теоремы А. Вейля, утверждающей, что $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})=0$ для любой неприводимой равномерной решетки Γ в связной группе Ли без компактных множителей, локально не изоморфной группе $SL_2(\mathbf{R})$ (см. [145], [146]). Ввиду сказанного в § 6 гл. 1 (теорема 6.1), следствие 7.5 и теорема 7.7 дают утверждение о локальной жесткости (см. п. 6.1 гл. 1)) решеток в соответствующих группах Ли. А именно, справедливо

Следствие 7.8. Неприводимая решетка Γ в связной полупростой группе Ли G без компактных множителей является локально жесткой, за исключением, быть может, случаев:

а) решетки в группе, локально изоморфной $SL_2(\mathbf{R})$;

б) неравномерной решетки в группе, локально изоморфной $SL_2(\mathbf{C})$.

Известно, что указанные исключительные случаи действительно имеют место: любая решетка без кручения в группе $SL_2(\mathbf{R})$ допускает нетривиальные деформации. Нежесткие неравномерные решетки существуют и в группе $SL_2(\mathbf{C})$ (см., например, [135]).

7.2. Высшие когомологии. По определению, $H^i(\Gamma, \mathbf{C})=0$ при $i>\mathrm{cd}\,\Gamma$, где $\mathrm{cd}\,\Gamma$ — когомологическая размерность группы Γ (см. § 3 гл. 4). Если Γ — решетка без кручения в полупростой группе Ли G, то $\mathrm{cd}\,\Gamma\leqslant\dim X$, где X — ассоциированное симметрическое пространство группы G. Это следствие общего факта ([129]): для любой дискретной группы гомеоморфизмов стягиваемого топологического пространства X, действующей на X без неподвижных точек, $\mathrm{cd}\,\Gamma\leqslant\dim X$, причем знак равенства имеет место, лишь если факторпространство X/Γ компактно. Для арифметических подгрупп алгебраических $\mathbf{Q}$-групп эту оценку когомологической размерности можно уточнить.

Теорема 7.9 ([72]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая $\mathbf{Q}$-группа, $\mathrm{rk}_{\mathbf{Q}}\, G\geqslant 1$, Γ — арифметическая подгруппа без кручения, соизмеримая с $G(\mathbf{Z})$. Тогда

а) Γ является группой типа (FL) (см. § 3 гл. 4);

б) $\mathrm{cd}\,\Gamma=\dim X-\mathrm{rk}_{\mathbf{Q}}\, G$.

Сформулируем теперь один общий дифференциально-геометрический результат об эйлеровой характеристике $\chi(\Gamma)=\sum_{0}^{\mathrm{cd}\,\Gamma}(-1)^i\beta_i(\Gamma)$ (где $\beta_i(\Gamma)=\dim_{\mathbf{C}} H^i(\Gamma, \mathbf{C})$ — числа Бетти решетки Γ).

Теорема 7.10 ([87], [129]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа такая, что группа Ли G^0 не имеет компактных множителей, K — максимальная компактная подгруппа группы G и $X=G/K$. Тогда на X существует такая G-инвариантная дифференциальная форма старшей степени ω_X, что

1) $\chi(\Gamma)=\chi(X/\Gamma)=\int_{X/\Gamma}\omega_X$ для любой неприводимой решетки Γ без кручения в группе G,

2) $\omega_X\neq 0$ лишь в случае $\mathrm{rk}_{\mathbf{C}}\, G=\mathrm{rk}\, K$.

Из теоремы 7.10 следует, что $\chi(\Gamma)\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}_{\mathbf{C}} G=\mathrm{rk}\, K$, при этом оказывается, что знак $\chi(\Gamma)$ равен $(-1)^n$, где $n=(1/2)\dim X$.

Например, если G — комплексная полупростая группа Ли, то $\chi(\Gamma)=0$ для любой решетки Γ в G.

Используя выражение 1) из теоремы 7.10 и явный вид формы ω_X, можно во многих случаях явно вычислить $\chi(\Gamma)$. С помощью теорем 7.10 и 7.9 можно показать, что у некоторых арифметических подгрупп Γ есть старшие числа Бетти $\beta_i(\Gamma)$, $i>1$, отличные от нуля.

Пример 7.11. Пусть Γ — арифметическая подгруппа без кручения в группе $G=SL_n(\mathbf{R})$, $n\geqslant 3$. В этом случае $\mathrm{rk}_{\mathbf{C}} G=$

$=(n-1)$, а $\operatorname{rk} K=\left[\frac{n}{2}\right]$. Поэтому $\omega_X=0$ и $\chi(\Gamma)=0$. С другой стороны, согласно теореме 7.9,

$$\operatorname{cd}\Gamma=\dim X-\operatorname{rk}_{\mathbf{Q}} G=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, если $n=3$, то $\operatorname{cd}\Gamma=3$ и $\chi(\Gamma)=\beta_0-\beta_1+\beta_2-\beta_3=0$. Но $\beta_0(\Gamma)=1$, а $\beta_1(\Gamma)=0$ по теореме 7.1, и мы приходим к выводу, что $\beta_3(\Gamma)\geqslant 1$.

Замечание. Если Γ — равномерная решетка в G, то утверждение теоремы 7.10 — частный случай теоремы Гаусса — Бонне (см., например, [88]). Для произвольных арифметических подгрупп теорема была впервые доказана в [87]. Ввиду теоремы арифметичности (теорема 6.20) и результатов Гарланда — Рагунатана [84] о строении фундаментальных областей неравномерных решеток в группах $\mathbf{R}$-ранга 1, предположение об арифметичности решетки Γ оказалось излишним. Про числа Бетти $\beta_i(\Gamma)$, $i>1$, произвольной решетки в полупростой группе Ли известно мало, однако для равномерных решеток они вычислены при всех $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Теорема 7.12 ([96]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа такая, что группа Ли G^0 не имеет компактных множителей, X — ассоциированное симметрическое пространство, X^* — двойственное симметрическое пространство компактного типа. Если Γ — неприводимая равномерная решетка в G, то имеется естественное отображение $H^i(X^*, \mathbf{C})\to H^i(X/\Gamma, \mathbf{C})$, которое является вложением для всех i и изоморфизмом для $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$. В частности, если Γ не имеет кручения, то $\beta_i(\Gamma)=\beta_i(X^*)$ для всех $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Аналогичная теорема, но в терминах относительных когомологий алгебр Ли (см. например, ст. II и [47]), может быть сформулирована и для групп $H^i(\Gamma, V)$, где $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$, а рассматриваемый Γ-модуль получается ограничением из G-модуля V.

Теорема 7.13 ([73]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра, K — максимальная компактная подгруппа группы Ли G, $\mathfrak{t}$ — касательная алгебра группы K, Γ — равномерная решетка без кручения в группе G. Если V — конечномерный G-модуль, то имеется естественное вложение $H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, V)\hookrightarrow H^i(\Gamma, V)$ (слева стоят относительные когомологии алгебр Ли), которое является изоморфизмом при $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Из этой теоремы с помощью леммы Уайтхеда ([86]) и стандартных свойств когомологий алгебр Ли выводится

Теорема 7.14. В условиях теоремы 7.13, если G-модуль V не содержит тривиальных подмодулей, то для любой равномерной неприводимой решетки $\Gamma\subset G$ имеем $H^i(\Gamma, V)=0$ при $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Последний результат, в той его части, которая касается $i=1$, можно усилить (ср. со следствием 7.4 гл. 3).

Теорема 7.15. Пусть Γ — равномерная решетка в связной полупростой группе Ли, не содержащей множителей $\mathbf{R}$-ранга 1. Тогда для любого конечномерного G-модуля V группа $H^1(\Gamma, V)=0$.

Глава 4

РЕШЕТКИ В ГРУППАХ ЛИ ОБЩЕГО ВИДА

§ 1. Теоремы Бибербаха и их обобщения

1.1. Теоремы Бибербаха. Под группой Ли *общего вида* понимается группа Ли, которая не является ни полупростой, ни разрешимой. Основным средством изучения связных групп Ли G общего вида является разложение Леви $G=SR$ где R — радикал (т. е. наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа), а S — полупростая часть (т. е. максимальная полупорстая подгруппа), подробнее см. ст. I т. 20.

Одним из простейших, но важных примеров группы Ли общего вида является группа $E(n)$ движений евклидова пространства E^n. Группа Ли $E(n)$ несвязна, связная компонента единицы $E(n)^0$ имеет индекс 2 и состоит из собственных движений (т. е. сохраняющих ориентацию в E^n). Решетки Γ в группе $E(n)$ называются *кристаллографическими группами*. Такое название связано с тем, что решетки в $E(3)$ естественно возникают как группы симметрии кристаллических структур. Решетки в $E(2)$ появляются как группы симметрии орнаментов. Теория кристаллографических групп содержит в зародыше некоторые важные идеи и методы теории решеток в произвольных группах Ли общего вида.

Группа Ли $E(n)$ разлагается в полупрямое произведение $E(n)=\mathbf{O}_n\ltimes\mathbf{R}^n$. Нормальная подгруппа $\mathbf{R}^n$ состоит из параллельных переносов, подгруппа O_n — из ортогональных преобразований (возможно, несобственных, т. е. меняющих ориентацию пространства E^n). Для группы $E(n)^0$ собственных движений имеем разложение Леви $E(n)^0=\mathrm{SO}_n\ltimes\mathbf{R}^n$, здесь $\mathbf{R}^n$ — радикал, а SO_n — полупростая часть. Следующая теорема была впервые доказана Бибербахом, она обычно называется первой теоремой Бибербаха[1].

Теорема 1.1 ([120], [149]). Пусть Γ — решетка в группе $E(n)$. Тогда группа $\Gamma\cap\mathbf{R}^n$ является решеткой в $\mathbf{R}^n$ и имеет конечный индекс в Γ.

◀Приведем доказательство этой теоремы в простейшем нетривиальном случае $n=2$. Пусть Γ — решетка в $E(2)$. Положим $\Gamma'=\Gamma\cap E(2)^0$, тогда Γ' — подгруппа индекса $\leqslant 2$ в Γ, состоящая из собственных движений. Утверждение теоремы 1.1 достаточно

[1] Хотя имеются и отклонения от этого обычая, см., например, [17].

$=(n-1)$; а $\operatorname{rk} K=\left[\frac{n}{2}\right]$. Поэтому $\omega_X=0$ и $\chi(\Gamma)=0$. С другой стороны, согласно теореме 7.9,

$$\operatorname{cd}\Gamma=\dim X-\operatorname{rk}_{\mathbf{Q}}G=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, если $n=3$, то $\operatorname{cd}\Gamma=3$ и $\chi(\Gamma)=\beta_0-\beta_1+\beta_2-\beta_3=0$. Но $\beta_0(\Gamma)=1$, а $\beta_1(\Gamma)=0$ по теореме 7.1, и мы приходим к выводу, что $\beta_3(\Gamma)\geqslant 1$.

Замечание. Если Γ — равномерная решетка в G, то утверждение теоремы 7.10 — частный случай теоремы Гаусса — Бонне (см., например, [88]). Для произвольных арифметических подгрупп теорема была впервые доказана в [87]. Ввиду теоремы арифметичности (теорема 6.20) и результатов Гарланда — Рагунатана [84] о строении фундаментальных областей неравномерных решеток в группах $\mathbf{R}$-ранга 1, предположение об арифметичности решетки Γ оказалось излишним. Про числа Бетти $\beta_i(\Gamma)$, $i>1$, произвольной решетки в полупростой группе Ли известно мало, однако для равномерных решеток они вычислены при всех $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Теорема 7.12 ([96]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа такая, что группа Ли G^0 не имеет компактных множителей, X — ассоциированное симметрическое пространство, X^* — двойственное симметрическое пространство компактного типа. Если Γ — неприводимая равномерная решетка в G, то имеется естественное отображение $H^i(X^*, \mathbf{C})\to H^i(X/\Gamma, \mathbf{C})$, которое является вложением для всех i и изоморфизмом для $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$. В частности, если Γ не имеет кручения, то $\beta_i(\Gamma)=\beta_i(X^*)$ для всех $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Аналогичная теорема, но в терминах относительных когомологий алгебр Ли (см. например, ст. II и [47]), может быть сформулирована и для групп $H^i(\Gamma, V)$, где $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$, а рассматриваемый Γ-модуль получается ограничением из G-модуля V.

Теорема 7.13 ([73]). Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра, K — максимальная компактная подгруппа группы Ли G, $\mathfrak{k}$ — касательная алгебра группы K, Γ — равномерная решетка без кручения в группе G. Если V — конечномерный G-модуль, то имеется естественное вложение $H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, V)\hookrightarrow H^i(\Gamma, V)$ (слева стоят относительные когомологии алгебр Ли), которое является изоморфизмом при $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Из этой теоремы с помощью леммы Уайтхеда ([86]) и стандартных свойств когомологий алгебр Ли выводится

Теорема 7.14. В условиях теоремы 7.13, если G-модуль V не содержит тривиальных подмодулей, то для любой равномерной неприводимой решетки $\Gamma\subset G$ имеем $H^i(\Gamma, V)=0$ при $i<\operatorname{rk}_{\mathbf{R}} G$.

Последний результат, в той его части, которая касается $i=1$, можно усилить (ср. со следствием 7.4 гл. 3).

Теорема 7.15. Пусть Γ — равномерная решетка в связной полупростой группе Ли, не содержащей множителей $\mathbf{R}$-ранга 1. Тогда для любого конечномерного G-модуля V группа $H^1(\Gamma, V)=0$.

Глава 4

РЕШЕТКИ В ГРУППАХ ЛИ ОБЩЕГО ВИДА

§ 1. Теоремы Бибербаха и их обобщения

1.1. Теоремы Бибербаха. Под группой Ли *общего вида* понимается группа Ли, которая не является ни полупростой, ни разрешимой. Основным средством изучения связных групп Ли G общего вида является разложение Леви $G=SR$ где R — радикал (т. е. наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа), а S — полупростая часть (т. е. максимальная полупорстая подгруппа), подробнее см. ст. I т. 20.

Одним из простейших, но важных примеров группы Ли общего вида является группа $E(n)$ движений евклидова пространства E^n. Группа Ли $E(n)$ несвязна, связная компонента единицы $E(n)^0$ имеет индекс 2 и состоит из собственных движений (т. е. сохраняющих ориентацию в E^n). Решетки Γ в группе $E(n)$ называются *кристаллографическими группами*. Такое название связано с тем, что решетки в $E(3)$ естественно возникают как группы симметрии кристаллических структур. Решетки в $E(2)$ появляются как группы симметрии орнаментов. Теория кристаллографических групп содержит в зародыше некоторые важные идеи и методы теории решеток в произвольных группах Ли общего вида.

Группа Ли $E(n)$ разлагается в полупрямое произведение $E(n)=O_n\ltimes\mathbf{R}^n$. Нормальная подгруппа $\mathbf{R}^n$ состоит из параллельных переносов, подгруппа O_n — из ортогональных преобразований (возможно, несобственных, т. е. меняющих ориентацию пространства E^n). Для группы $E(n)^0$ собственных движений имеем разложение Леви $E(n)^0=SO_n\ltimes\mathbf{R}^n$, здесь $\mathbf{R}^n$ — радикал, а SO_n — полупростая часть. Следующая теорема была впервые доказана Бибербахом, она обычно называется первой теоремой Бибербаха[1].

Теорема 1.1 ([120], [149]). Пусть Γ — решетка в группе $E(n)$. Тогда группа $\Gamma\cap\mathbf{R}^n$ является решеткой в $\mathbf{R}^n$ и имеет конечный индекс в Γ.

◀Приведем доказательство этой теоремы в простейшем нетривиальном случае $n=2$. Пусть Γ — решетка в $E(2)$. Положим $\Gamma'=\Gamma\cap E(2)^0$, тогда Γ' — подгруппа индекса $\leqslant 2$ в Γ, состоящая из собственных движений. Утверждение теоремы 1.1 достаточно

[1] Хотя имеются и отклонения от этого обычая, см., например, [17].

доказать для Г, поэтому, заменяя Г на Г′, можем считать, что уже сама Г состоит из собственных движений. Заметим, что произвольное собственное движение евклидовой плоскости — это либо параллельный перенос, либо поворот вокруг некоторой точки.

Лемма 1.2. В группе Г содержится хотя бы один нетривиальный параллельный перенос.

Легко проверить, что коммутант $(E(2)^0, E(2)^0)$ содержится в группе всех параллельных переносов. Пусть γ_1, γ_2 — два произвольных элемента из Г. Если $(\gamma_1, \gamma_2) \neq \{e\}$ то (γ_1, γ_2) — нетривиальный параллельный перенос и лемма доказана. Остается рассмотреть случай, когда группа Г абелева. Но тогда легко проверить, что все элементы из Г — это повороты вокруг некоторой общей точки. Очевидно, что такая группа Г не может быть решеткой в $E(2)$. ▶

Возвратимся к доказательству теоремы 1.1. Пусть $\gamma \in \Gamma$ — некоторый нетривиальный параллельный перенос (существующий в силу леммы 1.2). Если α — некоторый элемент из Г, то $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ тоже является параллельным переносом (ибо подгруппа $\mathbf{R}^2$ нормальна в $E(2)$). Если переносы γ и $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ не коллинеарны, то мы получаем, что $\Gamma\cap\mathbf{R}^2$ содержит подгруппу изоморфную $\mathbf{Z}^2$. Отсюда легко следует, что $\Gamma\cap\mathbf{R}^2$ — решетка в $\mathbf{R}^2$ (изоморфная $\mathbf{Z}^2$). Если переносы γ и $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ коллинеарны и $\alpha \in E(2)^0$, то α — параллельный перенос. Поэтому, если для всех $\alpha \in \Gamma$ перенос $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ коллинеарен γ, то подгруппа $\Gamma\cap E(2)^0$ состоит из параллельных переносов и, следовательно, является решеткой в $\mathbf{R}^2$. ▶

В приведенном доказательстве существенно используется абелевость группы SO_2. Для произвольного n доказательство теоремы 1.1 в известном смысле аналогично: оно основано на том, что локально группа Ли SO_n близка к абелевой. Наиболее простые известные доказательства для любого n см. в [10], [76].

Пусть Г — произвольная кристаллографическая группа, т. е. решетка в $E(n)$. Через L обозначим совокупность $\Gamma\cap\mathbf{R}^n$ всех параллельных переносов из Г. Подгруппа L имеет конечный индекс в Г, факторгруппа $\Phi=\Gamma/L\subset O_n$ конечна. Подгруппа $\Phi\subset O_n$ называется группой линейных частей группы Г. Она сохраняет решетку $L\subset\mathbf{R}^n$, т. е. в базисе решетки L преобразования из Ф записываются целочисленными матрицами. В частности, получаем действие Ф на L.

Для всякого $g\in\Phi$ существует такой вектор $t(g)\in\mathbf{R}^n$, что преобразование

$$x\mapsto gx+t(g),\ x\in E^n,$$

принадлежит группе Г. Вектор $t(g)$ определен с точностью до прибавления векторов из L. Отображение

$$t: g\mapsto t(g)+L$$

является, как легко проверить, одномерным коциклом группы Ф со значениями в $\mathbf{R}^n/L$ (действие группы Ф на $\mathbf{R}^n/L$ индуцируется естественным действием O_n на $\mathbf{R}^n$). Пусть $T=[t]\in H^1(\Phi, \mathbf{R}^n/L)$ — соответствующий класс когомологий.

Рассмотрим последовательность Ф-модулей

$$\{0\}\to L\xrightarrow[i]{}\mathbf{R}^n\xrightarrow[\pi]{}\mathbf{R}^n/L\to\{0\},$$

ей отвечает точная когомологическая последовательность для группы Ф:

$$\to H^1(\Phi, L)\xrightarrow[i_*]{} H^1(\Phi, \mathbf{R}^n)\xrightarrow[\pi_*]{} H^1(\Phi, \mathbf{R}^n/L)\xrightarrow[\delta]{} H^2(\Phi, L)\to H^2(\Phi, \mathbf{R}^n)\to,$$

где гомоморфизмы i_*, π_* индуцированы гомоморфизмами i, π соответственно, а δ — гомоморфизм Бокштейна. Так как Ф — конечная группа, то при $k\geqslant 1$ $H^k(\Phi, \mathbf{R}^n)=\{0\}$ (см., например, [86]). Но тогда из приведенной точной последовательности следует, что отображение

$$\delta: H^1(\Phi, \mathbf{R}^n/L)\to H^2(\Phi, L)$$

является изоморфизмом.

В частности, из мономорфности δ вытекает следующее утверждение, называемое иногда второй теоремой Бибербаха.

Теорема 1.3 ([120], [149]). Две решетки в $E(n)$ изоморфны как абстрактные группы тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе $\mathrm{Aff}(n)=\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\ltimes\mathbf{R}^n$ аффинных преобразований пространства E^n (такие решетки называют эквивалентными).

Далее, из эпиморфности отображения δ получаем теорему, дающую характеризацию решеток в $E(n)$ как абстрактных групп.

Теорема 1.4 (см. [149]). Абстрактная группа Г изоморфна решетке в $E(n)$ тогда и только тогда, когда Г содержит нормальную подгруппу Γ^* конечного индекса, изоморфную $\mathbf{Z}^n$ и являющуюся максимальной абелевой подгруппой в Г.

◀Если Г — решетка в $E(n)$, то для нее свойства, указанные в теореме 1.4, проверяются без труда (на основе теоремы 1.1). Рассмотрим доказательство обратного утверждения (другое доказательство см. в [51]).

Имеем $\Gamma^*\simeq\mathbf{Z}^n$, причем свойствами, указанными в условии теоремы, подгруппа $\Gamma^*\subset\Gamma$ определяется однозначно. Положим $\Phi=\Gamma/\Gamma^*$, тогда Ф — конечная группа, действующая естественным образом на $\Gamma^*\simeq\mathbf{Z}^n$. Отождествим Γ^* со стандартной решеткой $\mathbf{Z}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Точной последовательности

$$\{0\}\to\mathbf{Z}^n\to\Gamma\to\Phi\to\{e\},$$

рассматриваемой как расширение групп, соответствует некоторый класс когомологий $c \in H^2(\Phi, \mathbf{Z}^n)$ (характеристический класс расширения). Из эпиморфности гомоморфизма Бокштейна δ следует существование такого $T \in H^1(\Phi, \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$, что $\delta(T)=c$. Пусть t — такой коцикл, что $[t]=T$, а $\hat{t}:\Phi\to E^n$ — такое отображение, что $t(g)=\hat{t}(g)+\mathbf{Z}^n$ при $g\in\Phi$.

Рассмотрим множество движений пространства E^n, определяемых следующим образом:

$$x\mapsto gx+\hat{t}(g),\ x\in E^n,$$

где g пробегает все элементы из Φ. Легко убедиться, что подгруппа в $E(n)$, порожденная указанным множеством и решеткой $\mathbf{Z}^n$ параллельных переносов, является решеткой в $E(n)$, изоморфной Γ. ▶

Рассмотрим теперь вопрос о классификации кристаллографических групп. Пусть (Φ, L, t) — триада, состоящая из конечной подгруппы $\Phi\subset \mathrm{O}_n$, Φ-инвариантной решетки L в $\mathbf{R}^n$ и коцикла $t\in Z^1(\Phi, \mathbf{R}^n/L)$. Каждой кристаллографической подгруппе $\Gamma\subset E(n)$ соответствует такая триада, и обратно. Если t' — коцикл, когомологичный t, то триада (Φ, L, t') соответствует подгруппе Γ', сопряженной с Γ в группе аффинных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$.

В результате получаем, что классификация решеток в $E(n)$ эквивалентна классификации триад (Φ, L, T), где Φ, L — такие, как выше, а $T\in H^1(\Phi, \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)\simeq H^2(\Phi, \mathbf{Z}^n)$.

Из теории приведения следует, что при фиксированном n в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ существует только конечное число попарно несопряженных конечных подгрупп (см. п. 2.3 гл. 3). Следовательно, число возможных групп Φ конечно. Из конечности группы Φ следует, что и группа $H^2(\Phi, \mathbf{Z}^n)$ конечна. Но тогда указанные выше результаты приводят к следующему утверждению, называемому иногда третьей теоремой Бибербаха.

Теорема 1.5 ([120], [149]). Для каждого натурального n существует только конечное число классов изоморфных между собой решеток в $E(n)$.

Трем теоремам Бибербаха (теоремам 1.1, 1.3 и 1.5) предшествовали различные результаты, связанные с математическими вопросами кристаллографии. Так, для обычных кристаллографических групп (т. е. при $n=3$) утверждение теоремы 1.1 было доказано Шёнфлисом еще в 1891 г. Классификация всех плоских и пространственных кристаллографических групп была получена в конце XIX века Е. С. Федоровым и, несколько позже, Шёнфлисом (см. [149]). Плоских групп с точностью до эквивалентности оказалось 17, а пространственных — 219 (если же их рассматривать с точностью до собственной эквивалентности, т. е. сопряженности в группе $\mathrm{Aff}^0\mathbf{R}^n$ сохраняющих ориентацию аффинных преобразований, то их будет 230).

Теоремы Бибербаха в более геометрической, чем выше, формулировке можно найти, например, в [17]. Там же подробно изучаются и соответствующие группы $\Phi\subset\mathrm{O}_n$.

1.2. Решетки в $E(n)$ и плоские римановы многообразия. Кристаллографические группы Γ тесно связаны с плоскими римановыми многообразиями (т. е. римановыми многообразиями с нулевой секционной кривизной). Если Γ — решетка в $E(n)$, свободная от кручения, то ее естественное действие на E^n является свободным. Факторпространство E^n/Γ для этого действия наследует от E^n риманову структуру нулевой кривизны и потому является плоским римановым многообразием (причем компактным, ибо решетки в $E(n)$ всегда равномерны — это следует из теоремы 1.1). Обратно, любое компактное плоское риманово многообразие может быть получено таким образом [149]. Как и произвольные кристаллографические группы, решетки без кручения в $E(n)$ тоже подробно изучались. В частности, классифицированы все такие решетки в $E(n)$ при $n\leqslant 4$. В $E(2)$ имеется с точностью до изоморфизма всего две решетки без кручения: $\Gamma\simeq\mathbf{Z}^2$ (в этом случае $E^2/\Gamma=T^2$ — тор с плоской метрикой) и $\Gamma=\mathbf{Z}\rtimes_\varphi\mathbf{Z}$ — полупрямое произведение, соответствующее единственному нетривиальному гомоморфизму $\varphi:\mathbf{Z}\to\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}\simeq\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (в этом случае $E^2/\Gamma=K^2$ — бутылка Клейна). В $E(3)$ таких решеток, с точностью до изоморфизма, всего 6, а в $E(4)$ — 75 ([149]).

Если решетка $\Gamma\subset E(n)$ свободна от кручения, то конечная линейная группа $\Phi=\Gamma/\Gamma\cap\mathbf{R}^n$ является группой голономии для соответствующего плоского риманова многообразия E^n/Γ. Оказывается, что в качестве группы голономии здесь может появиться (при подходящем n) любая конечная группа [149].

1.3. Обобщения первой теоремы Бибербаха. Из трех теорем Бибербаха основным объектом обобщений на случай решеток в более сложно устроенных группах Ли является в первую очередь первая теорема (теорема 1.1).

Теорема 1.6 ([149], [120]). Пусть G — связная группа Ли, полупростая часть которой не имеет компактных множителей, тривиально действующих на радикале группы G, а N — нильрадикал в G. Тогда если Γ — решетка в G, то $\Gamma\cap N$ — решетка в N.

Утверждение теоремы 1.6 эквивалентно замкнутости подгруппы ΓN в G, дискретности подгруппы $\Gamma/\Gamma\cap N$ в группе Ли G/N и т. д. (см. теорему 4.7 гл. 1). Теорему 1.6 можно рассматривать как естественное обобщение первой теоремы Бибербаха. С другой стороны, теорема 1.6 обобщает структурную теорему Мостова (см. теорему 3.6 гл. 2).

Покажем, что в теореме 1.6 условие отсутствия в полупростой части группы G компактных множителей, тривиально действующих на радикале, существенно. Для этого рассмотрим группу Ли $G=\mathrm{SU}_2\times\mathbf{R}$. Ее радикал $R\simeq\mathbf{R}$ абелев, совпадает с нильрадикалом, а полупростая часть $S=SU_2$ компактна и нормальна в G. Положим

$$\Gamma=\left\{\left(\begin{pmatrix}\cos 2\pi t & \sin 2\pi t\\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t\end{pmatrix};\ \alpha t\right)\middle|\, t\in\mathbf{Z}\right\}\subset SU_2\times\mathbf{R},$$

где α — некоторое иррациональное число. Ясно, что Γ — дискретная подгруппа в G, причем равномерная (G/Γ диффеоморфно $S^3\times S^1$). В силу иррациональности α имеем $\Gamma\cap R=\{e\}$, т. е. подгруппа $\Gamma\cap R$ не равномерна в R.

Если G и Γ — группы, удовлетворяющие условиям теоремы 1.6, а R — радикал группы Ли G, то подгруппа $\Gamma\cap R$ не обязательно является решеткой в R[1]. Это видно из примера, приведенного в [46] (более того, в этом примере радикал R вообще не содержит никаких решеток).

Еще одним обобщением первой теоремы Бибербаха является следующее утверждение.

Теорема 1.7 ([53], [120], [139]). Пусть G — связная группа Ли, $G=S\,R$ — ее разложение Леви и $S=S_HS_K$, где S_K — наибольшая связная компактная нормальная подгруппа в S, а S_H — нормальная подгруппа, не имеющая компактных множителей. Тогда:

(i) $\Gamma\cap(S_AR)$ является решеткой в группе Ли S_KR;

(ii) группа Ли $(\overline{\Gamma R})^0$ (связная компонента единицы в $\overline{\Gamma R}$ — замыкании подгруппы ΓR) разрешима.

Существует обобщение утверждения (ii) теоремы 1.7 на некоторые недискретные равномерные подгруппы (см. [120, 8.24]).

Из теоремы 1.7 получаем такое следствие.

Следствие 1.8. Пусть G — связная группа Ли, $G=S\,R$ — ее разложение Леви, причем S не имеет компактных множителей. Тогда, если Γ — решетка в G, то $\Gamma\cap R$ — решетка в R, а $\Gamma/\Gamma\cap R$ — решетка в полупростой группе Ли $S_1=S/S\cap R$, локально изоморфной группе S.

Отсутствие компактных множителей в S_H для справедливости теоремы 1.7 существенно. В силу примера из [46] нельзя ограничиться требованием отсутствия связных компактных нормальных подгрупп в G.

Теорему 1.7 можно рассматривать как важный шаг на пути сведения изучения решеток в группах Ли общего вида к изучению решеток в полупростых группах Ли (последним посвящена гл. 3) и в разрешимых группах Ли (о таких решетках см. гл. 2). Другие шаги в этом направлении указаны в § 2 ниже.

[1] В [120, следствие 8.2.8] ошибочно утверждается, что $\Gamma\cap R$ — решетка в R.

§ 2. Деформации решеток в группах Ли общего вида

2.1. Описание пространства деформаций равномерных решеток. Пусть Γ — равномерная решетка в группе Ли G и $i_0:\Gamma\hookrightarrow G$ — тождественное вложение. Рассмотрим пространство $\mathrm{R}(\Gamma, G)$, состоящее из всевозможных вложений группы Γ в G в качестве решетки (см. п. 6.3 гл. 1). Пусть $R_0(\Gamma, G)$ — его связная (и одновременно линейно связная) компонента, содержащая вложение i_0. Если группа Ли G разрешима и односвязна, то описание пространства $R_0(\Gamma, G)$ см. в теореме 4.1 гл. 2.

Если же группа Ли G полупроста и не содержит компактных или трехмерных множителей, то описание пространства $R_0(\Gamma, G)$ совсем просто — оно состоит из вложений, сопряженных i_0 при помощи внутренних автоморфизмов группы G (см. п. 7.1 гл. 3).

В [139] получено описание пространства $R_0(\Gamma, G)$ в случае, когда Γ — равномерная решетка в односвязной группе Ли G, полупростая часть которой не имеет компактных множителей. Это описание довольно громоздко, поэтому мы приведем его здесь лишь в одном частном случае.

Теорема 2.1 ([139]). Пусть G — односвязная группа Ли, полупростая часть S которой не имеет компактных множителей и действует на радикале локально точно, N — нильрадикал в G. Тогда если Γ — равномерная решетка в G, то для любого $i\in R_0(\Gamma, G)$ существуют такие $a\in\mathrm{Aut}^0(\Gamma N)$, $\sigma\in S$, что $i(\gamma)=\sigma a(\gamma)\sigma^{-1}$ при всех $\gamma\in\Gamma$.

Возникающее при этом отображение $S\times\mathrm{Aut}^0(\Gamma N)\to R_0(\Gamma, G)$, $(\sigma, a)\mapsto i$ является регулярным накрытием (которое станет конечнолистным, если от S перейти к $S/Z(S)$). Отсюда, в частности, следует, что пространство $R_0(\Gamma, G)$ в условиях теоремы 2.1 является гладким многообразием (что бывает в общем случае не всегда).

Отметим, что при применении теоремы 2.1 наибольшую сложность вызывает описание группы Ли $\mathrm{Aut}^0(\Gamma N)$ (в силу следствия 1.8 выше и теоремы 3.6 гл. 2 ΓN — замкнутая подгруппа в G, но в общем случае — несвязная).

В более явной форме можно дать описание деформаций равномерных решеток в группах Ли с абелевым радикалом. Но вместо прямого применения теоремы 2.1 к этому частному случаю мы опишем другой подход, использованный в [131].

Рассмотрим группу Ли $G=S\ltimes_\rho V$ — полупрямое произведение, соответствующее некоторому (вещественному) линейному представлению $\rho: S\to GL(V)$ полупростой группы Ли S. Пусть D — решетка в S, а L — решетка в V, сохраняемая группой $\rho(D)$. Тогда подгруппа $\Gamma=D\ltimes_\rho L$ будет решеткой в группе Ли G.

В предыдущих обозначениях предположим, что S не имеет компактных множителей и что $H^1(\Gamma, V)=H^1(\Gamma, \mathfrak{g})=\{0\}$. Тогда имеет место

Теорема 2.2 ([131]). Пусть $G=S\ltimes_\rho V$, S полупроста, а $\rho: S\to GL(V)$ — линейное представление. Пусть Γ — решетка в G, причем предположим, что $\Gamma=(\Gamma\cap S)(\Gamma\cap V)$.

Тогда найдется такая окрестность U_0 тождественного вложения i_0 в пространстве $R(\Gamma, G)$, что для любого $i\in U_0$ существуют $g\in G$ и элемент s из централизатора $Z_{\mathrm{End}}(\rho(S))$ подгруппы $\rho(S)$ в End V такие, что

$$i(\gamma, l)=g^{-1}(\gamma, l+s(l))g \text{ при } \gamma\in\Gamma\cap S,\ l\in L=\Gamma\cap V.$$

2.2. Разложение Леви—Мостова для решеток в группах Ли общего вида. Изучение деформаций решетки Γ в группе Ли G интересно тем, что оно позволяет описать локально пространство $R(\Gamma, G)$. С другой стороны, деформации оказываются удобным средством для замены произвольной решетки в группе Ли на расположенную в G весьма специальным, более простым, чем исходная, образом. Иллюстрацией этого второго использования деформаций является следующая теорема Мостова, играющая фундаментальную роль при изучении решеток в группах Ли общего вида.

Теорема 2.3 ([109]). Пусть G — односвязная группа Ли, полупростая часть которой не имеет компактных множителей, $G=S\ltimes R$ — ее разложение Леви. Если Γ — решетка в группе Ли G, то в Γ существует подгруппа Γ^* конечного индекса, которая может быть непрерывно продеформирована в такую решетку Γ', изоморфную Γ^*, что $\Gamma'=(\Gamma'\cap S)(\Gamma'\cap R)$ — полупрямое произведение решеток $\Gamma'\cap S$ в S и $\Gamma'\cap R$ в R. Более того, можно считать, что $\Gamma\cap R=\Gamma^*\cap R=\Gamma'\cap R$ и при деформации элементы из подгруппы $\Gamma\cap R$, а также классы смежности γR при всех $\gamma\in\Gamma^*$ остаются неподвижными.

Отметим, что для справедливости утверждения теоремы 2.3 вместо односвязности группы Ли G достаточно потребовать ее линейность (т. е. существование точного линейного представления) [109].

Рассматривая решетку Γ с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса (а такой переход со многих точек зрения является весьма естественным), мы в силу теоремы 2.3 получаем разложение группы Γ в полупрямое произведение $\Gamma=\Gamma_s\ltimes\Gamma_r$ решеток $\Gamma_s=\Gamma'\cap S$ и $\Gamma_r=\Gamma\cap R$ в полупростой и разрешимой группах Ли соответственно. Такого рода разложения аналогичны разложению Леви для групп Ли, поэтому мы будем называть их *разложениями Леви—Мостова* для решеток. Ясно, что существование разложения Леви—Мостова позволяет в значительной мере свести изучение решеток в группах Ли, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3, к изучению решеток в

полупростых и в разрешимых группах Ли. Однако примеры показывают, что для решеток в произвольных группах Ли разложения Леви—Мостова может и не быть.

Рассмотрим теперь подробнее подгруппу $\Gamma\cap S$, где S — полупростая часть группы Ли G, содержащей решетку Γ. В общем случае не всегда $\Gamma\cap S$ является решеткой в S при каком-то выборе S в G (так что деформация в теореме 2.3 необходима). Например, пусть D — решетка без кручения в $SL_2(\mathbf{R})$. Тогда группа $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ бесконечна, и потому существует такой гомоморфизм $\varphi:\Gamma\to\mathbf{R}$, что подгруппа $\varphi(\Gamma)+\mathbf{Z}$ незамкнута в $\mathbf{R}$. Положим $G=SL_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}$, $\Gamma^\#=D\times\mathbf{Z}$ и рассмотрим такое вложение $\Gamma^\#$ в G:

$$\Gamma^\#=D\times\mathbf{Z}\ni(\gamma, z)\underset{\alpha}{\mapsto}(i(\gamma), \varphi(\gamma)+z)\in SL_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}=G,$$

где $\gamma\in D$, $z\in\mathbf{Z}$, а $i: D\hookrightarrow SL_2(\mathbf{R})$ — тождественное вложение. Получаем решетку $\Gamma=\alpha(\Gamma^\#)$ в G, причем легко понять, что подгруппа $\Gamma\cap SL_2(\mathbf{R})$ не является решеткой в $SL_2(\mathbf{R})$. В этом примере полупростая часть группы G имеет $\mathbf{R}$-ранг, равный 1. Исключив такого рода множители в S, имеем такое утверждение.

Теорема 2.4. Пусть Γ — равномерная решетка в связной группе Ли G, полупростая часть S которой не имеет множителей $\mathbf{R}$-ранга 1. Тогда S можно выбрать так, чтобы $\Gamma\cap S$ была равномерна в S.

◀ Для доказательства достаточно рассмотреть лишь случай когда G односвязна. Пусть $G=SR$ — разложение Леви односвязной группы Ли G, а $\pi: G=SR\to R$ — проекция (переводящая элемент $g=sr$ в r, где $s\in S$, $r\in R$). Выше отмечалось, что в Γ существует подгруппа Γ' конечного индекса, изоморфная $\Gamma'_s\ltimes\Gamma'_r$, где Γ'_s — решетка в S, а Γ'_r — некоторая разрешимая нормальная подгруппа в Γ'.

Рассмотрим, вначале, случай, когда радикал R абелев. Тогда ограничение $\pi|_{\Gamma'_s}:\Gamma'_s\to R$ проекции π на группу Γ'_s (рассматриваемую как подгруппа в Γ) является, как легко проверить, коциклом группы Γ'_s с коэффициентами в R. В силу теоремы 7.14 гл. 3 этот коцикл когомологичен нулю. Это означает, что существует такая полупростая подгруппа $S'\subset G$ (сопряженная с S), что $\Gamma'_s\subset S'$. Но тогда ясно, что $\Gamma'\cap S'$ — равномерная решетка в S'.

Случай произвольного радикала, сводится к случаю абелевого с помощью индукции по длине ряда коммутантов.◀

Теорема 2.4 позволяет получить удобное разложение для равномерной решетки Γ. Пусть $G=SR$ — связная группа Ли, удовлетворяющая условию теоремы 2.4. Пусть S_K — максимальная связная компактная нормальная подгруппа в S. Тогда из теорем 1.7 и 2.4 следует, что $(\Gamma\cap S)(\Gamma\cap(S_K R))$ — подгруппа конечного индекса в Γ, являющаяся произведением решеток $\Gamma\cap S$ в S и $\Gamma\cap(S_K R)$ в группе Ли $S_K R$.

§ 3. Некоторые когомологические свойства решеток в группах Ли

3.1. О когомологической размерности решеток. При изучении решеток в группах Ли одним из важных когомологических инвариантов (о некоторых других см. ниже) является их когомологическая размерность. Начнем с необходимых определений.

Пусть Γ — произвольная группа, а $U=\mathbf{Z}[\Gamma]$ — ее целочисленное групповое кольцо. Будем называть Γ-модулями произвольные модули над кольцом U.

Группа Γ называется *группой типа* (FL), если тривиальный Γ-модуль $\mathbf{Z}$ обладает конечной свободной резольвентой (т. е. существует точная последовательность модулей

$$\{0\}\to F_n\to F_{n-1}\to\ldots\to F_0\to\mathbf{Z}\to\{0\},$$

в которой F_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ — свободные Γ-модули). *Когомологической размерностью* $\operatorname{cd}\Gamma$ группы Γ называется наименьшая возможная длина n такой свободной резольвенты. Равенство $n=\operatorname{cd}\Gamma$ эквивалентно тому, что $H^q(\Gamma,A)=\{0\}$ для всех $q>n$ и всех Γ-модулей A, но $H^n(\Gamma,A')\neq\{0\}$ для некоторого Γ-модуля A', [129].

Если группа Γ имеет кручение, то обязательно $\operatorname{cd}\Gamma=\infty$. Имея целью использовать когомологическую размерность при изучении решеток Γ (которые часто имеют кручение), удобно поэтому ввести понятие виртуальной когомологической размерности.

Группу Γ будем называть *группой типа* (VFL) (т. е. виртуально типа (FL)), если существуют подгруппа конечного индекса в Γ, а в ней конечная нормальная подгруппа Φ такие, что группа Γ'/Φ является группой типа (FL), [13].[1)]

Если F — группа типа (VFL), то положим $\operatorname{vcd}\Gamma=\operatorname{cd}\Gamma'/\Phi$ (для групп Γ' и Φ, фигурирующих в определении). Легко убедиться, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора Γ' и Φ. Полученное число $\operatorname{vcd}\Gamma$ называется *виртуальной когомологической размерностью* группы Γ.[2)]

---

1) Отметим, что часто (см., например, [129]) условие (VFL) понимается как наличие в Γ подгруппы конечного индекса, имеющей тип (FL).

2) В [129] дано близкое определение, но в менее общей ситуации. Если определение [129] для группы Γ дает число $n<\infty$, то $\operatorname{vcd}\Gamma=n$ (обратное, вообще говоря, неверно).

Если группа Γ не имеет кручения, то $\operatorname{vcd}\Gamma=\operatorname{cd}\Gamma$. Если $\Gamma=\mathbf{Z}^n$, то $\operatorname{cd}\Gamma=\operatorname{vcd}\Gamma=n$. Более общее: если Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R, то $\operatorname{cd}\Gamma=\operatorname{vcd}\Gamma=\dim R$. При этом $\operatorname{cd}\Gamma=\operatorname{rk}(\Gamma)$, где

$$\operatorname{rk}(\Gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{rk}D^k(\Gamma)/D^{k+1}(\Gamma)$$

(здесь $D^k(\Gamma)$ — члены ряда коммутантов, а rk в правой части обозначает обычный ранг абелевой группы). Если Γ — решетка в полупростой группе Ли, то $\operatorname{vcd}\Gamma$ тоже может быть явно вычислена (см. п. 7.2 гл. 3).

Далее, если Γ — свободная группа, то $\operatorname{cd}\Gamma=1$. Если же группа Γ содержит свободную подгруппу конечного индекса, то может оказаться, что $\operatorname{cd}\Gamma=\infty$ но $\operatorname{vcd}\Gamma=1$. Например, для $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ имеем $\operatorname{cd}\Gamma=\infty$, но $\operatorname{vcd}\Gamma=1$, так как $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, как известно, содержит свободную подгруппу конечного индекса.

Следующий пример показывает преимущество вышеприведенного определения для $\operatorname{vcd}\Gamma$ перед определением, данным в [129].

Пусть G — накрытие порядка 4 над группой Ли $SO_{2,n}$, а Γ — равномерная решетка в G. Тогда и Γ, и любая ее подгруппа конечного индекса имеют кручение (см. п. 3.2 гл. 1). Поэтому $\operatorname{cd}\Gamma=\infty$ и, более того, определение виртуальной когомологической размерности из [129] тоже приводит к бесконечному значению. Однако $\operatorname{vcd}\Gamma<\infty$, как это следует из следующего общего результата.

Предложение 3.1 ([13]). *Пусть Γ — решетка в связной группе Ли G. Тогда*

(i) *Γ является группой типа (VFL);*

(ii) *$\operatorname{vcd}\Gamma\leqslant\dim G/K$, где K — максимальная компактная подгруппа группы G;*

(iii) *$\operatorname{vcd}\Gamma=\dim G/K$ тогда и только тогда, когда решетка Γ равномерна в G.*

Из предложения 3.1 вытекает, например, что если Γ,Γ' — изоморфные между собой равномерные решетки в связных группах Ли G,G' соответственно, то $\dim G/K=\dim G'/K'$ (о более общих случаях, например о произвольных решетках, см. теорему 3.5 ниже).

3.2. Эйлерова характеристика решеток в группах Ли. Пусть Γ — произвольная группа типа (FL). Ее *эйлеровой характеристикой* $\chi(\Gamma)$ называется число $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\operatorname{rk}F_i\in\mathbf{Z}$, где $\{F_i\}$ — конечная свободная резольвента тривиального Γ-модуля $\mathbf{Z}$ (см. п. 1.1). Как обычно, имеем

$$\chi(\Gamma)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim H^i(\Gamma, \mathbf{Q}),$$

причем сумма конечна в силу выполнения условия (FL) для группы Г.

Пусть теперь Г — группа типа (VFL), а Г′, Ф — подгруппы, фигурирующие в определении условия (VFL). Положим

$$\chi(\Gamma)=\frac{|\Phi|}{[\Gamma:\Gamma']}\chi(\Gamma'/\Phi),$$

где $\chi(\Gamma'/\Phi)$ определено как выше. Число $\chi(\Gamma)$ определено корректно и обладает обычными свойствами эйлеровой характеристики (см., например, [129], где используется, правда, определение $\chi(\Gamma)$ в менее общей ситуации). Например, если Г′ — нормальная подгруппа в группе Г и все три группы Г, Г′, Г/Г′ обладают свойством (VFL), то $\chi(\Gamma)=\chi(\Gamma')\chi(\Gamma/\Gamma')$. Далее, если Г′ — подгруппа конечного индекса в группе Г типа (VFL), то $\chi(\Gamma)=\chi(\Gamma')/[\Gamma:\Gamma']$.

Если Г — решетка в разрешимой группе Ли, то легко показать, что $\chi(\Gamma)=0$. Более того, имеет место следующее утверждение (В. В. Горбацевич, неопубликовано).

Предложение 3.2. Пусть Г — решетка в группе Ли G. Тогда если $\chi(\Gamma)\neq 0$, то группа Ли G редуктивна и ее центр компактен.

В силу этого предложения наибольший интерес вызывает вычисление эйлеровой характеристики решетки в группе Ли в том случае, когда G полупроста и линейна. Об этом см. п. 7.2 гл. 3.

3.3. Об определяемости свойств групп Ли решетками в них. Ниже приводятся некоторые результаты о тех ограничениях, которые наличие решетки (обычно с заданными свойствами) накладывает на содержащую ее группу Ли.

Теорема 3.3 ([16]). *Множество связных групп Ли (рассматриваемых с точностью до изоморфизма), имеющих равномерные решетки, счетно.*

Пусть G — связная группа Ли и $\dim G\leqslant 2$. Если G содержит равномерную решетку, то G изоморфна $\{e\}$, T^1, T^2, $\mathbf{R}^2$ или $T^1\times\mathbf{R}$, где $T^k=\mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$ — тор. В размерности 3 уже существует счетное число попарно неизоморфных связных групп Ли, имеющих решетки (подробнее см. [58]).

Рассмотрим теперь некоторые свойства групп Ли, содержащих изоморфные между собой решетки. Подгруппа Г в группе Ли G называется *допустимой*, если для любого нетривиального эпиморфизма $\varphi: G\to PSL_2(\mathbf{R})$ подгруппа $\varphi(\Gamma)$ либо плотна в $PSL_2(\mathbf{R})$ (в обычной топологии), либо является решеткой в $PSL_2(\mathbf{R})$.

Теорема 3.4 ([117]). *Пусть G, G' — связные группы Ли, а K, K' — максимальные компактные подгруппы в G, G' соответственно. Если Г — решетка в G, а Г′ — дискретная подгруппа в G', изоморфная Г, то $\dim G/K\leqslant\dim G'/K'$. При этом, если Г допустима, то $\dim G/K=\dim G'/K'$ тогда и только тогда, когда Г′ — решетка в G'.*

Отметим, что требование допустимости подгруппы Г′ во втором утверждении теоремы 3.5 существенно. Оно позволяет избежать следующего явления, связанного с группой $PSL_2(\mathbf{R})$: в ней существуют изоморфные между собой две дискретные подгруппы (например, свободные), одна из которых является решеткой (неравномерной), а другая — нет.

Группы Ли G и G' называются *эквивалентными*, если в них существуют такие конечные нормальные подгруппы Ф и Ф′ соответственно, что группы Ли G/Φ и G'/Φ' изоморфны. Другими словами, группы G и G' конечнолистно накрывают некоторую третью группу Ли. Эквивалентные группы Ли локально изоморфны, но обратное неверно. Например, группы $G=SL_2(\mathbf{R})$ и ее универсальная накрывающая $G'=\widetilde{SL}_2(\mathbf{R})$ локально изоморфны, но не эквивалентны.

Теорема 3.5 ([16]). *Пусть G, G' — связные группы Ли, а Г, Г′ — изоморфные равномерные решетки в них. Тогда*

а) если группа G односвязна и ее полупростая часть не имеет компактных множителей, то $\dim G\leqslant\dim G'$;

б) если группа Ли G полупроста и не имеет компактных множителей, то $\dim G\leqslant\dim G'$. При этом $\dim G=\dim G'$ тогда и только тогда, когда группы Ли G и G' эквивалентны.

Как показывают простые примеры, предположения о группе G в этой теореме существенны. Второе утверждение пункта б) тесно связано с теоремой Мостова о решетках в присоединенных полупростых (т. е. с тривиальным центром) группах Ли (см. п. 5.1 гл. 3). Из этого результата Мостова выводится (см. [109]), что если Г, Г′ — изоморфные между собой решетки в присоединенных полупростых группах Ли G, G' соответственно и если G, G' не имеют компактных множителей, то G и G' изоморфны. В случае, когда центры у G, G' могут быть нетривиальны, подобное утверждение неверно. Например, пусть $G=SL_2(\mathbf{R})$ и Г — решетка без кручения в G. Имеем $Z(G)\simeq\mathbf{Z}_2$. Положим $G'=G/Z(G)=PSL_2(\mathbf{R})$, $\Gamma'=\Gamma/\Gamma\cap Z(G)$. Так как $\Gamma\cap Z(G)=\{e\}$ (ибо Г не имеет кручения), то группа Г′ изоморфна Г, тогда как содержащие их в качестве решеток группы Ли G и G' не изоморфны. Однако здесь G и G' эквивалентны, что согласуется с пунктом б) теоремы 3.5.

Приведем теперь несколько более частных результатов о связи между строением группы Ли и содержащейся в ней решетки.

8—1370 28

Теорема 3.6 ([54], [15]). Пусть Γ — решетка в связной группе Ли G.

(i) Группа Γ почти разрешима (т. е. содержит разрешимую подгруппу конечного индекса) тогда и только тогда, когда полупростая часть группы G компактна.

(ii) Группа Γ почти нильпотентна тогда и только тогда, когда группа G является группой типа (I) (см. п. 5.1 гл. 2).

Отбросить слово «почти» в утверждениях теоремы 3.6 в общем случае нельзя. Например, в группе Ли $E(n)^0 = SO_n \ltimes \mathbf{R}^n$, являющейся группой типа (I), имеются даже неразрешимые решетки, хотя все они почти абелевы (см. § 1).

Абстрактная группа Π называется *полупростой*, если она не содержит бесконечных разрешимых нормальных подгрупп. Отметим, что это понятие не вполне согласуется с понятием полупростоты, используемым в теории групп Ли. А именно, у полупростой группы Ли нет нетривиальных связных разрешимых нормальных подгрупп, но центр может быть бесконечен (хотя и дискретен). Полупростая группа Ли будет полупроста как абстрактная группа тогда и только тогда, когда ее центр конечен. Следующее предложение указывает связь между полупростотой решетки и свойствами содержащей ее группы Ли (В. В. Горбацевич, не опубликовано).

Предложение 3.7. Пусть Γ — решетка в связной группе Ли G. Группа Γ полупроста тогда и только тогда, когда радикал группы G компактен (в частности, G редуктивна), а центр полупростой части конечен.

Если группа Ли G односвязна, то полупростота решетки в ней эквивалентна полупростоте группы G и конечности ее центра (т. е. полупростоте группы G как абстрактной группы).

Например, пусть Γ — решетка в группе Ли $G = SL_2(\mathbf{R})$. Легко проверить, что группа Γ полупроста (это следует, например, из теоремы плотности Бореля — см. п. 8.1 гл. 1). Если $\eta: \tilde{G} \to G$ — универсальное накрытие, то центр решетки $\tilde{\Gamma} = \eta^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{G}$ изоморфен $\mathbf{Z}$, и потому группа $\tilde{\Gamma}$ полупростой не будет. Этот факт согласуется с предложением 3.7, ибо центр группы Ли $\tilde{G}$ бесконечен — он тоже изоморфен $\mathbf{Z}$. С другой стороны, любая решетка в группе Ли, локально изоморфной $SL_n(\mathbf{R})$, при $n \geqslant 3$ является полупростой группой (ибо центр группы $\widetilde{SL_n(\mathbf{R})}$ при $n \geqslant 3$ конечен).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апанасов Б. Н.*, Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. Новосибирск: Наука, 1983, 242 с.
2. *Боревич З. И.*, *Шафаревич И. Р.*, Теория чисел. 2-е изд., М.: Наука, 1972, 495 с.
3. *Вассерштейн Л. Н.*, Группы, обладающие свойством (T). Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 3, 174
4. —, О конгруэнц-проблеме для классических групп. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 1, 88—89
5. —, *K*-теория и конгруэнц-проблема. Мат. заметки, 1969, *6*, № 6, 233—244
6. *Венков Б. А.*, Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, *1*, № 2, 139—170
7. —, О неопределенных квадратичных формах с целыми коэффициентами. Тр. мат. ин-та АН СССР, 1951, *38*, 30—41
8. *Винберг Э. Б.*, Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. Мат. сб., 1967, *72*, № 3, 471—488
9. —, Некоторые примеры кристаллографических групп в пространствах Лобачевского. Мат. сб., 1969, *78*, № 4, 633—639
10. —, О теореме Шёнфлиса—Бибербаха. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 5, 1013—1015
11. —, *Онищик А. Л.*, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988, 343 с.
12. *Горбацевич В. В.*, О решетках в группах Ли типов (*E*) и (*R*). Вестн. МГУ Мат., мех., 1975, № 6, 56—63
13. —, О топологических свойствах компактных однородных пространств. Докл. АН СССР, 1978, *239*, № 5, 1033—1036
14. —, Расщепление групп Ли его приложения к изучению однородных пространств. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 6, 1127—1157
15. —, О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1981, 131—145
16. —, О группах Ли с решетками и их свойствах. Докл. АН СССР, 1986, *287*, № 1, 33—37
17. *Делоне Б. Н.*, *Галиулин Р. В.*, *Штогрин М. И.*, О типах Браве решеток. Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР), 1973, *2*, 119—254
18. *Каждан Д. А.*, О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп. Функц. анализ и его прил., 1967, *1*, № 1, 71—74
19. —, *Маргулис Г. А.*, Доказательство гипотезы Сельберга. Мат. сб., 1968, *75*, № 6, 162—168
20. *Каргаполов И. М.*, *Мерзляков Ю. Н.*, Основы теории групп. М.: Наука, 1982, 288 с.
21. *Кириллов А. А.*, Элементы теории представлений. 2-е изд. М.: Наука, 1978, 344 с.
22. *Любарский Г. Я.*, Теория групп и ее применения в физике. М.: Физматгиз, 1958, 354 с.
23. *Макаров В. С.*, Об одном классе дискретных групп пространства Лобачевского, имеющих бесконечную фундаментальную область конечной меры. Докл. АН СССР, 1966, *167*, № 1, 30—33
24. *Мальцев А. И.*, О разрешимых алгебрах Ли. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, *9*, № 5, 329—352
25. —, Об одном классе однородных пространств. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, *13*, № 1, 9—32
26. *Маргулис Г. А.*, Арифметические свойства дискретных подгрупп. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 1, 50—98
27. —, Арифметичность неравномерных решеток в слабо некомпактных группах. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 1, 35—44

28. —, Арифметичность неприводимых решеток в полупростых группах ранга больше 1. Добавление в кн.: *Рагунатан М.*, Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977, 277—313
29. —, Фактор-группы дискретных подгрупп и теория меры. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 4, 64—80
30. —, Конечность факторгрупп дискретных подгрупп. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 28—39
31. *Маркушевич А. И.*, Теория аналитических функций. Т. 2., М.: Наука, 1968, 624 с.
32. *Мерзляков Ю. И.*, Рациональные группы. М.: Наука, 1980, 464 с.
33. *Милованов М. В.*, О продолжении автоморфизмов равномерных дискретных подгрупп разрешимых групп Ли. Докл. АН БССР, 1973, *17*, № 10, 892—895
34. —, Определяемость разрешимых алгебраических групп плотными целочисленными подгруппами. Мат. заметки, 1975, *18*, № 5, 719—730
35. —, Описание разрешимых групп Ли с заданной равномерной подгруппой. Мат. сб., 1980, *113*, № 1, 98—117
36. *Морозов В. В.*, Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка. Изв. вузов. Мат., 1958, № 4, 161—171
37. *Никулин В. В.*, *Шафаревич И. Р.*, Геометрии и группы. М.: Наука, 1983, 240 с.
38. *Платонов В. П.*, О проблеме максимальности арифметических подгрупп. Докл. АН СССР, 1971, *200*, № 3, 530—533
39. —, Арифметическая теория алгебраических групп. Успехи мат. наук, 1982, *37*, № 3, 3—54
40. —, *Милованов М. В.*, Определяемость алгебраических групп арифметическими подгруппами. Докл. АН СССР, 1973, *209*, № 1, 43—46
41. *Пятецкий-Шапиро И. И.*, Автоморфные функции и арифметические группы. Труды международного конгресса математиков, 1966. М.: Мир, 1968, 232—247
42. —, Дискретные подгруппы групп Ли. Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, *18*, 3—18
43. *Рохлин В. А.*, *Фукс Д. Б.*, Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977, 488 с.
44. *Сафиуллина Э. Н.*, К вопросу о классификации нильпотентных алгебр Ли седьмого порядка. Казанский химико-технол. ин-т. Казань, 1976, 34 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ. Деп. № 1702-76)
45. *Сойфер Г. А.*, Представления разрешимых групп Ли и автоморфизмов их решеток матрицами. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 2, 91—92
46. *Старков А. Н.*, Контрпример к одной теореме о решетках в группах Ли. Вестн. МГУ Мат., мех., 1984, № 5, 68—69
47. *Фукс Д. Б.*, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984, 272 с.
48. *Шварцман О. В.*, Дискретные группы отражений в комплексном шаре I. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 1, 88—89
49. —, Дискретные группы отражений в комплексном шаре II. Вопр. теории групп и гомологической алгебры, Ярославль: изд-во ЯрГУ, 1985, 61—77
50. *Ash A.*, *Mumford D.*, *Rapoport M.*, *Tai Y.*, Smooth compactifications of locally symmetric varieties. Brookline, Math. Sci. Press, 1975, 310 p.
51. *Auslander L.*, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. Ann. Math., 1960, *71*, № 3, 579—590
52. —, Discrete uniform subgroups of solvable Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, *99*, № 3, 398—462
53. —, On radicals of discrete subgroups of Lie groups. Amer. J. Math., 1963, *85*, № 2, 145—150
54. —, An exposition of the structure of solvmanifolds. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 2, 227—285

55. —, *Auslander M.*, Solvable Lie groups and locally euclidean Riemannian spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, *9*, № 6, 933—941
56. —, *Bresin J.*, Almost algebraic Lie algebras. J. Algebra, 1968, *8*, № 3, 295—313
57. —, *Green L.*, *G*-induced flows. Amer. J. Math., 1966, *88*, № 1, 43—60
58. —, —, *Hahn F.*, Flows on homogeneous spaces. Ann. Math. Stud., № 53, Princeton. Univ. Press, 1963, 107 p. (Пер. на рус. яз.: *Ауслендер Л.*, *Грин Л.*, *Хан Ф.*, Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966, 208 с.)
59. —, *Szczarba R.*, Characteristic classes of compact solvmanifolds. Ann. Math., 1962, *76*, № 1, 1—8
60. —, *Tolimieri R.*, Abelian harmonic analysis, theta functions and function algebras on a nilmanifolds. Berlin, Springer, 1974, 98 p.
61. *Baily W. L.*, Introductory lectures on automorphic forms. Publications Math. Soc. Japan, *12*, Princeton Univ. Press 1973, 262 p.
62. —, *Borel A.*, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. Math., 1966, *84*, № 3, 442—528
63. *Barth W.*, *Otte M.*, Über fast-uniforme Untergruppen komplexer Liegruppen und auflösbare komplexe Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. helv., 1969, *44*, № 3, 269—281
64. *Borel A.*, Density properties of certain subgroups of semisimple groups without compact components. Ann. Math., 1960, *72*, № 1, 179—188
65. —, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. Topology 1963, *2*, № 2, 111—122
66. — Density and maximality of arithmetic subgroups. J. reine und angew. Math., 1966, *224*, 78—89
67. —, Introduction aux groups arithmétiques. Paris, Hermann, 1969, 125 p.
68. —, Linear algebraic groups. New-York: Benjamin, 1969, 398 p. (Пер. на рус. яз.: *Борель А.*, Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972, 269 с.)
69. —, Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds. Ann. sci. École norm. super. Ser IV, 1981, *8*, № 1, 1—33
70. —, Seminar on algebraic groups and related finite groups. Berlin—New-York, Springer, 1970, 324 p. (Пер. на рус. яз.: *Борель А.*, Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973, 312 с.)
71. —, *Harish-Chandra*, Arithmetic subgroups of algebraic groups. Ann. Math., 1962, *75*, № 3, 485—535. (Пер. на рус. яз.: *Борель А.*, *Хариш-Чандра*, Арифметические подгруппы алгебраических групп. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1964, *8*, № 2, 19—68)
72. —, *Serre J.-P.*, Corners and arithmetic groups. Comment. math. helv., 1973, *48*, № 4, 436—491
73. —, *Wallach N.*, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Ann. Math. Stud., № 94. Princeton Univ. Press, 1980, 387 p.
74. *Bourbaki N.*, Groupes et algebres de Lie, ch. 1-3. Paris, Hermann, 1975, 450 p. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли. гл. I—III. М.: Мир, 1976, 496 с.)
75. *Bresin J.*, Harmonic analysis on compact solvmanifolds. Lect. Notes Math., 1977, *602*, 177 p.
76. *Buser P.*, A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups. Enseign. Math., 1985, *31*, № 1—2, 137—145
77. *Cassels J.*, An introduction to the geometry of numbers. Berlin, Springer, 1959, 344 p. (Пер. на рус. яз.: *Касселс Дж.*, Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965, 421 с.)
78. —, Rational quadratic forms. London—New-York. Acad. Press, 1978, 413 p. (Пер. на рус. яз.: *Касселс Дж.*, Рациональные квадратичные формы. М.: Мир, 1982, 436 с.)
79. *Chabauty C.*, Limite d'ensembles et géométrie des nombres. Bull. Soc. Math. France, 1950, *78*, № 1, 143—151
80. *Deligne P.*, *Mostow G.*, Monodromy of hypergeometric functions and non-

lattice integral monodromy. Publ. Math. Instit. Hautes Etudes Scientif., 1986, *63*, 5—89
81. *Deuring M.*, Algebren. Berlin—New-York, Springer, 1968, 144 S.
82. *Garland H.*, On the cohomology of lattices in solvable Lie groups. Ann. Math., 1966, *84*, № 1, 175—196.
83. —, *Goto M.*, Lattices and the adjoint groups of a Lie group. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, *124*, № 3, 450—460
84. —, *Raghunathan M.*, Fundamental domains for lattices in (R)-rank 1 semisimple Lie groups. Ann. Math., 1970, *92*, № 2, 279—326
85. *Godement R.*, Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques. Semin. Bourbaki 1962—1963, 1964, *15*, № 3, exp. 257, 119—131
86. *Guichardet A.* Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie. Paris, Nathan, 1980, 394 p. (Пер. на рус. яз.: *Гишарде А.*, Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.: Мир, 1984, 262 с.)
87. *Harder G.*, A Gauss—Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. Ann. Sci. Ecole Norm. Supér. Ser IV, 1971, *4*, № 3, 409—455 (Пер. на рус. яз.: *Хардер Г.*, Формула Гаусса—Бонне для дискретных арифметических групп. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1974, *18*, № 6, 20—56)
88. *Helgason S.*, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New-York—London, Acad. Press, 1978, 623 p.
89. *Hirzebruch F.*, Arrangements of lines and algebraic surfaces. In: Arithmetic and Geometry, vol. 1 — Arithmetic, Basel, Birkhäuser, 1983, 113—140
90. *Iwahori N.*, *Matsumoto H.*, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p-adic Chevalley groups. Publ. Math. Instit. Hautes Etudes Scientif. 1965, *25*, 5—48
91. *Mahler K.*, On lattice points in n-dimensional starbodies. I Existence theorems. Proc. Roy. Soc. London, 1946, *A187*, № 1008, 151—187
92. *Margulis G. A.*, Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature. Proc. Int. Congress Math. Vancouver, 1975, v. 2, 21—34
93. —, On decomposition of discrete subroups into amalgams. Selecta Mat. Sov., 1981, *1*, № 2, 197—213
94. —, Arithmeticity of the irreducible lattices in the semi-simple groups of rank greater than 1. Invent. math., 1984, *76*, № 1, 93—120
95. *Matsumoto H.*, Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples deployés. Ann. sci. Ecole norm super. Ser. IV, 1969, *2*, № 1, 1—62
96. *Matsushima Y.*, On Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds. Osaka Math. J., 1962, *14*, № 1, 1—20
97. *Millson J.*, On the first Betti number of a constant negative curved manifold. Ann. Math., 1976, *104*, № 2, 235—247
98. *Minkowski H.*, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. In: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, 53—100. Leipzig—Berlin, Teubner, 1911, 465 S. (J. reine and angew. Math., 1905, *129*, 220—274)
99. *Moore C.*, Compactifications of symmetric spaces II: the Cartan domains. Amer. J. Math., 1964, *86*, № 1, 358—378
100. —, Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent Lie groups. Ann. Math., 1965, *82*, № 1, 146—182
101. *Mostow G.* Factor spaces of solvable groups. Ann. Math., 1954, *60*, № 1, 1—27
102. —, Cohomology of topological groups and solvmanifolds. Ann. Math., 1961, *73*, № 1, 20—48
103. —, Homogeneous spaces of finite invariant measure. Ann. Math., 1962, *75*, № 1, 17—37.
104. —, Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. Publ. Math. Instit. Hautes Etudes Scientif., 1968, *334* 53—104 (Пер. на рус. яз.: *Мостов Г.*, Квазиконформные отображения в n-мерном пространстве и жесткость гиперболических пространственных форм. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1972, *16*, № 5, 105—157)
105. —, Representative functions on discrete groups and solvable arithmetic groups. Amer. J. Math., 1970, *92*, № 1, 1—32.

106. —, Arithmetic subgroups of groups with radical. Ann. Math., 1971, *93*, № 3, 409—438
107. —, Some applications of representative functions to solvmanifolds. Amer. J. Math., 1971, *93*, № 1, 11—32
108. —, Strong rigidity of locally symmetric spaces. Ann. Math. Stud., *78*, Princeton Univ. Press, 1973, 196 p.
109. —, On the topology of homogeneous spaces of finite measure. Symp. math. Ist. naz. alta math. v. 16, London—New York, 1975, 375—398
110. —, Discrete subgroups of Lie groups. Queen's pap. Pure and Appl. Math., 1978, № 48, 65—152
111. —, Existence of a nonarithmetic lattice in SU(2, 1). Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1978, *75*, № 7, 3029—3033
112. —, On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 1, 171—276
113. —, *Tamagawa T.*, On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces. Ann. Math., 1962, *76*, № 3, 440—463
114. *Mumford D.*, A remark on Mahler's compactness theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *28*, № 1, 289—294
115. *Nakamura I.*, Complex parallelisable manifolds and their small deformations. J. Different. Geom., 1975, *10*, № 1, 85—112.
116. *Prasad G.*, Strong rigidity of **Q**-rank 1 lattices. Invent. math., 1973, *21*, № 4, 255—286
117. —, Discrete subgroups isomorphic to lattices in Lie groups. Amer. J. Math., 1976, *98*, № 4, 853—863
118. *Raghunathan H.*, Cohomology of arithmetic subgroups of algebraic groups. I., Ann. Math., 1967, *86*, № 3, 409—424
119. —, Cohomology of arithmetic subgroups of algebraic groups. II., Ann. Math., 1968, *87*, № 2, 279—304
120. —, Discrete subgroups of Lie groups. Berlin—Heidelberg, Springer, 1972, 227 p. (Пер. на рус. яз.: *Рагунатан М.*, Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977, 316 с.)
121. —, Discrete subgroups and **Q**-structures on semi-simple Lie groups. In: Proc. Intern. Coll. on discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Bombay 1973), Oxford Univ. Press, 1975, 225—321
122. —, Torsion in cocompact lattices in coverings of Spin (2, n). Math. Ann., 1984, *266*, № 4, 403—419
123. *Rohlfs J.*, Die maximalen arithmetisch definierten Untergruppen zerfallender einfacher Gruppen. Math. Ann., 1979, *244*, № 3, 219—231
124. *Saitô M.*, Sur certains groupes de Lie résolubles. I, II. Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 1957, *7*, № 1, 1—11, № 2, 157—168
125. —, Sous-groupes discrets des groupes résolubles. Amer. J. Math., 1961, *83*, № 2, 369—392
126. *Satake I.*, On representations and compactifications of symmetric riemannian spaces. Ann. Math., 1960, *71*, № 2, 77—110
127. *Selberg A.*, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In: Contributions to Function theory, Bombay, 1960, 147—164 (Пер. на рус. яз.: *Сельберг А.*, О дискретных группах преобразований симметрических пространств большой размерности. Математика. Период. сб. перев., 1962, *6*, № 3, 3—15)
128. *Serre J.-P.*, Algèbres de Lie semi-simples complexes. New-York—Amsterdam, Benjamin, 1966, 80 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.*, Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969, 375 с.)
129. —, Cohomologie des groupes discrets. Ann. Math. Stud., 1971, № 70, 77—169 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.*, Когомологии дискретных групп. Математика, Период. сб. перев., 1974, *18*, № 3, 123—144, № 4, 3—33)
130. —, Arithmetical groups. In: Homological group theory, ed. C. T. C. Wall, Cambridge Univ. Press, 1979, 394 p.; 105—136
131. *Shahshahani M.*, Discontinuous subgroups of extensions of semi-simple groups. Osaka J. Math, 1972, *9*, № 2, 273—286
132. *Siegel C.*, Discontinuous groups. Ann. Math., 1943, *44*, № 4, 674—689

133. —, Some remarks on discontinuous groups. Ann. Math., 1945, *46*, № 4, 708—718
134. *Smith P.*, The fundamental group of a group manifold. Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1934, *20*, № 11, 577—578
135. *Thurston W.*, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *6*, № 3, 357—381
136. *Tits J.*, Classification of algebraic semisimple groups. Proc. Symp. Pure Math, v. 9, Providence 1966, 33—62
137. —, Buildings of spherical type and finite *B-N* pairs. Lect. Notes Math., 1974, *386*, 299 p.
138. *Wang H.-C.* Discrete subgroups of solvable Lie groups. Ann. Math., 1956, *69*, № 1, 1—19
139. —, On the deformations of lattices in a Lie group. Amer. J. Math., 1963, *85*, № 2, 189—212
140. —, On a maximality property of discrete subgroups with fundamental domain of finite measure. Amer. J. Math., 1967, *89*, № 1, 124—132
141. —, Topics on totally discontinuous groups. In: Symmetric spaces. New York, Marcel Dekker, 1972, 490 p.; 460—485
142. *Wang S. P.*, The dual space of semisimple Lie groups. Amer. J. Math., 1969, *91*, № 4, 921—937
143. —, Homogeneous spaces with finite invariant measure. Amer. J. Math., 1976, *98*, № 2, 311—324
144. —, On density properties of certain subgroups of locally compact groups. Duke Math. J., 1976, *43*, № 3, 561—578
145. *Weil A.*, Discrete subgroups of Lie groups. I. Ann. Math., 1960, *72*, № 2, 369—384 (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.*, Дискретные подгруппы групп Ли. I. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, *7*, № 1, 3—18)
146. —, Discrete subgroups of Lie groups. II. Ann. Math., 1962, *75*, № 3, 578—602. (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.*, Дискретные подгруппы групп Ли. II. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, *7*, № 1, 19—42)
147. —, Remarks on the cohomology of groups. Ann. Math., 1964, *80*, № 1, 149—157
148. —, Adeles and algebraic groups. Basel, Birkhäuser, 1982, 138 p.
149. *Wolf J.* Spaces of constant curvature. Berkley, Univ. of California, 1972, 408 p. (Пер. на рус. яз.: *Вольф Дж.*, Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982, 480 с.)
150. *Wu T.*, Discrete uniform subgroups of Lie groups. Topology, 1970, *9*, № 2, 137—140
151. *Yamaguchi S.*, On some classes of nilpotent Lie algebras and their automorphism groups. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1981, *35*, № 2, 341—351.
152. *Zimmer R.*, Ergodic theory and semisimple groups. Basel, Birkhäuser, 1984, 311 p.
153. *Zucker S.*, Satake compactifications. Comment. math. helv., 1983, *58*, № 2, 312—343

УДК 512.664.3; 512.664.4

II. КОГОМОЛОГИИ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ

Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс

СОДЕРЖАНИЕ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *Н. И. Костюнина* Корректор *В. Ф. Басонова*

Сдано в набор 29.02.88 Подписано в печать 31.08.88

Формат бумаги 60×90[1]/[16]. Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.

Высокая печать Усл. печ. л. 13,5 Усл. кр.-отт. 13,5 Уч.-изд. л. 13,65

Тираж 1200 экз. Заказ 1370 Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ

140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56859

ISSN 0233—6723. ИНТ Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 21, 1988, 1—216

УДК 512.743.3; 512.817

Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман, Дискретные подгруппы групп Ли. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 21 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—120

Систематизированы все основные результаты по теории дискретных подгрупп групп Ли. В частности, отдельно изложены результаты, относящиеся к дискретным подгруппам полупростых и разрешимых групп Ли, а также групп Ли общего вида. Обсуждаются вопросы, связанные с арифметическими дискретными подгруппами. Большей частью статья носит обзорный характер, но в тех случаях, когда имеются короткие доказательства (и, в особенности, когда эти доказательства не опубликованы), мы их приводим. Библ. 153.

УДК 512.664.3; 512.664.4

Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, Когомологии групп и алгебр Ли. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 21 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1988, 121—209

Статья содержит определения классических, ван-эстовских и сигаловских когомологий групп и (непрерывных) когомологий алгебр Ли; перечень основных алгебраических интерпретаций когомологий; важнейшие результаты этих вычислений. Последние охватывают конечномерные группы и алгебры Ли, алгебры Ли векторных полей и группы диффеоморфизмов, группы и алгебры Ли токов и алгебры Ли бесконечных матриц. Библ. 77.