2002 г. март — апрель *т. 57, вып. 2(344)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 514.7

ИНСТАНТОНЫ И МОНОПОЛИ

Н. А. Тюрин

В настоящем обзоре представлены основные понятия и конструкции калибровочных теорий, а именно, теории Дональдсона, теории Зайберга–Виттена и связывающей их теории B-монополей. В рамках дифференциальной геометрии эти теории доставляют новые инварианты гладких структур в размерности 4. Введение таких новых калибровочных инвариантов позволило решить многие проблемы в современной геометрии. Техника, разработанная в рамках этих теорий, доставляет новые современные методы исследований как в гладкой геометрии, так и в прикладных вопросах математической физики. Не претендуя на детальную полноту, данный обзор нацелен на то, чтобы представить предмет в максимальной широте и доступности.

Библиография: 27 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

П. А. М. Дирак в предисловии к первому изданию книги “Принципы квантовой механики” [3] определил понятие физической величины, наблюдаемой нами, как некоторый инвариант набора преобразований. Законы поведения в некоторой системе суть законы, перестановочные со всеми преобразованиями этой системы. Общая цель физики представляется тогда как нахождение уравнений, инвариантных относительно как можно больших групп преобразований.

Такой подход близок и понятен и сердцу, и уму любого математика: в каждом разделе математики найдутся методы, связанные с нахождением и изучением инвариантов по действию соответствующих групп преобразований. Инварианты заменяют нам объекты в наших рассмотрениях, и вопросы классификации объектов разрешаются в терминах численных характеристик, остающихся неизменными под действием групп преобразований. Такие вопросы классификации, как и вопросы координатизации, указывают основной путь развития предмета.

Однако сразу встает вопрос – а какие это группы и на каких многообразиях они действуют? Не успели математики разобраться с классической теорией инвариантов действия конечномерных групп Ли, как интересы геометрии потребовали перехода к рассмотрению бесконечномерных калибровочных групп. При таком переходе далеко не все средства остаются применимыми (поэтому такой переход и обобщением-то назвать трудно), тем не менее необходимо сохранить фундаментальные методы, среди которых одним из наиболее полезных является, например, симплектическая редукция. Такая динамика использования понятий не свойственна излишне стабильной математической практике. Очень часто у специалистов в той или иной области вызывает крайнее удивление, как их “собственный”, “законный метод” превосходно срабатывает во вполне далекой от этого предмета задаче, иногда в замаскированном виде.

Не так давно С. Дональдсоном [6] были предложены к рассмотрению совсем уж экзотические геометрические объекты – многообразия модулей инстантонов на четырехмерных многообразиях. Их можно использовать как пленки кобордизмов в дифференциальной топологии. В частности, такие многообразия модулей могут быть использованы для определения инвариантов подлежащего гладкого четырехмерного многообразия X. Они определяются фундаментальным классом $[\mathscr{M}]$ многообразия модулей инстантонов и классами когомологий на пространстве классов калибровочно эквивалентных неприводимых связностей $A^*/\mathscr{G}$.

Модули инстантонов доставляют инварианты подлежащего многообразия в форме статсумм и корреляторов, а это то, чем интересуются физики. Поэтому вполне предсказуема связь между квантовой теорией поля и дифференциальной геометрией, возникающая при изучении инстантонов. Простейший пример: Э. Виттен в [27] показал, что можно определить, по крайней мере формально, квантовую теорию поля, для которой статсумма вида

$$W(t) = \iint e^{-tS(A,\phi)}\mathscr{D}A\mathscr{D}\phi \tag{1.1}$$

не зависит от t и доставляет дифференциально-топологические инварианты подлежащего многообразия X. Здесь интеграл берется по пространству пар (A, ϕ), где A – связность, а ϕ – некоторое вспомогательное поле (поле Хиггса). Производя интегрирование сначала по ϕ, возможно представить $W(t)$ как интеграл по пространству связностей. При стремлении параметра t к нулю подынтегральное выражение локализуется вблизи инстантонов, и Виттен предположил, что мы снова получаем те же инварианты, т.е. полиномы Дональдсона.

Чуть позднее Виттен совместно с Н. Зайбергом при исследовании механизма трех фаз квантового вакуума в суперсимметричных теориях Янга–Миллса (конденсации, конфайнмента и фазы Хиггса) использовали неприводимые ($\phi \neq 0$) классические минимумы функционала S (см. [7], [18]). Редуцируя связности к бесследовым связностям Леви-Чивита для спинорных расслоений, они построили новые инварианты четырехмерных многообразий, тесно связанные с инвариантами Дональдсона, но зачастую гораздо более простые в вычислениях. Инварианты Зайберга–Виттена четырехмерного многообразия X определяются количеством решений системы дифференциальных уравнений для экстремалей функционала S при выборе $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры на X. То есть строится отображение из классов эквивалентности $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур (возможных классов Черна детерминанта спинорного расслоения при отсутствии 2-кручения во вторых когомологиях подлежащего многообразия) в целые числа.

Введение этой системы, получившей название уравнения А-монополя, сразу привело к прорыву плотины нерешенных задач. Приведем два примера, ярко иллюстрирующих степень полезности и применимости уравнения А-монополя в алгебраической и симплектической геометрии.

П. Кронхеймер и Т. Мровка в [13] показали, как использование уравнения монополя легко (полное доказательство – на трех страницах, случай небывалый в современной практике) приводит к доказательству гипотезы Тома – "род алгебраической кривой в $\mathbb{CP}^2$ равен нижней границе рода любых 2-многообразий, представляющих один и тот же класс гомологий". (Тот же минимум реализуется и для псевдоголоморфных кривых.)

Род гладкой алгебраической плоской кривой степени d равен $g = (d-1)(d-2)/2$. Отсюда не слишком неожиданной выглядит

Теорема 1.1. *Пусть Σ – ориентированное двумерное многообразие, гладко вложенное в $\mathbb{CP}^2$ так, что представляет тот же класс гомологий, что и некоторая алгебраическая кривая степени d. Тогда род Σ больше или равен* $(d-1)(d-2)/2$.

Очевидно, что, приклеивая к римановой поверхности очень маленькие ручки, мы не изменим класс когомологий поверхности, но как угодно увеличим ее род. Поэтому вопрос именно в том, каков минимальный род, реализуемый кривыми.

Другой интереснейший результат представлен К. Таубсом в [19], [20]: на гладком ориентированном компактном многообразии X симплектическая структура ω, совместимая с ориентацией, задает стягиваемый конус почти комплексных структур, эрмитово совместимых с ней. Выбрав одну, мы немедленно получаем метрику g на X и класс Черна c_1 комплексного касательного расслоения на X. Этот класс – аналог канонического класса келеровой поверхности и может быть взят в качестве $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры на X. Будучи целочисленным, этот класс не зависит от выбора почти комплексной структуры, а зависит только от деформационного класса симплектический структуры. Главная теорема Таубса утверждает, что в этом случае инвариант Зайберга–Виттена для класса c_1 и метрики g равен ± 1.

Вообще необходимо заметить, что в симплектическом (как и в более специальном алгебро-геометрическом) случае уравнение монополя имеет более простой вид. Причина в том, что в этом случае спинорное расслоение раскладывается в прямую сумму линейных расслоений, одно из которых – каноническое (см. § 3).

Классы Зайберга–Виттена являются аналогами канонических классов алгебраических поверхностей, а вся (конечная) совокупность их инвариантна относительно действия группы диффеоморфизмов (если $b_2^+ > 1$) подлежащей гладкой структуры.

Краткость доказательства, предложенного Кронхеймером и Мровкой, на самом деле весьма обманчива. Чтобы полностью привести это доказательство, необходимо потребовать от читателя информированности в двух традиционно различных (несмотря на усиленную пропаганду их объединения) областях математики – PDE и дифференциальной топологии. Цель этой статьи и заключается в том, чтобы объединить эти два фронта идей для широкого круга лиц, заинтересованных в том, чтобы замечательные результаты – подобные гипотезе Тома – доказывались в три страницы и открывали возможность дальнейших исследований.

Сила результатов теории Дональдсона спровоцировала желание эту теорию "упростить". Это приводит к терминологическим недоразумениям. Например, частный случай монополей, используемых в дифференциальной геометрии, называются абелевыми монополями. Это недоразумение. Связности в спинорных монополях, конечно, неабелевы. Только бесследовая часть этих связностей фиксирована и равна бесследовой части связности Леви-Чивита, так что свободной переменной остается только диагональная часть, т.е. абелева связность.

Конечно, при исходном физическом подходе подобные недоразумения исключены в силу самого физического смысла уравнений. Поэтому в процессе нашего описания теории мы обязаны обращаться к физическим истокам и в историческом и в идейном аспектах. А широко используемые ныне в дифференциальной топологии монополи будем называть A-монополями.

С другой стороны, неабелевы монополи позволяют наглядно, геометрически соединить инварианты Дональдсона с инвариантами Зайберга–Виттена. Эта конструкция (см. [16]) абсолютно аналогична конструкции пленки кобордизма между 4-многообразием с определенной формой пересечения и несвязным объединением комплексных проективных поверхностей (см. ниже), которой Дональдсон открыл новейший этап четырехмерной дифференциальной топологии.

Вложение многообразия модулей инстантонов в многообразие модулей монополей можно использовать также и для доказательства существования решений наших сложных PDE (абсолютно параллельно тому, как это мы делаем для bubbling-инстантонов). Дополнительная сложность – задача описания, как себя ведут решения уравнения неабелева монополя при приближении к инстантонам. Пределами решений уравнения монополя при стремлении спинорной части к нулю могут быть только инстантоны подскока, т.е. такие asd-связности, которые допускают существование гармонического спинора, и каждый инстантон подскока реализуется как предел монополей (см. § 4). Заметим, что последнее утверждение отвечает еще и на вопрос о существовании самих B-монополей.

Для алгебраического геометра эти конструкции вполне привычны: подмногообразие инстантонов подскока в многообразии модулей инстантонов – прямой аналог первого члена фильтрации Брилля–Нётера якобиана кривой (см. [15]).

Замечательно, что, как и в классической теории Брилля–Нётера, в гладкой части многообразия модулей классы когомологий локусов Брилля–Нётера представляются классами Черна индексного расслоения оператора Дирака.

Геометрическое представление этих классов Черна продолжается и на особенности многообразия модулей. Сравнение классов этих продолжений и классов индексного расслоения эквивалентно задаче выражения классов Зайберга–Виттена через классы Дональдсона.

В тексте мы приводим все определения и конструкции калибровочной дифференциальной геометрии, поэтому многие ссылки на литературу преднамеренно опущены: мы вынуждены пренебречь многообразием литературы по данным темам (особенно по инстантонам), поскольку это затруднило бы для читателя первое ознакомление с этими новыми предметами, а, с другой стороны, наличие недоразумений, аналогичных упоминаемой абелевости монополей Зайберга–Виттена, вынудило бы нас параллельно процитировать и все физические тексты по этой теме. При этом мы сразу даем ссылку на основные источники для каждого параграфа, чтобы не испещрять текст в конце каждого абзаца или после каждой формулы. Выход один – сделать текст как можно более самозамкнутым. Для материала § § 2 и 3 (инварианты Дональдсона) необходимы источники [2] и [6], а для материала § 4 (инварианты Зайберга–Виттена) – [13] и [26]. С § 5 дело обстоит проще: как справочный материал достаточно использовать [16] и [24].

Наконец в § 6 (Добавлении) мы от калибровочных теорий возвращаемся к классической топологии, следуя (насколько это возможно) красивым конструкциям Р. Финташела и Р. Стерна [9].

В заключение введения пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Сергею Петровичу Новикову и Виктору Матвеевичу Бухштаберу за помощь в подготовке и публикации настоящего обзора.

§ 2. Классическая теория Дональдсона

2.1. Разложение $\Lambda^2(T^*X)$. Как обычно в теории Дональдсона, мы будем рассматривать (X,g) – четырехмерное односвязное компактное ориентируемое риманово многообразие. Центральное место в теории занимает разложение пространства 2-форм по действию оператора Ходжа $*$.

Оператор определяется как композиция естественной метрики на формах и внешнего произведения:

$$\alpha\wedge *\beta = (\alpha,\beta)\,d\mu, \tag{2.1}$$

где $d\mu$ – элемент объема. На четырехмерном многообразии $*$ отображает 2-формы в 2-формы, и очевидным образом $** = \mathrm{id}_{\Lambda^2}$. Пространства автодуальных и антиавтодуальных форм (обозначаемые как Ω^+ и Ω^- соответственно), определяемые как собственные подпространства с собственными значениями ± 1 оператора $*$, являются сечениями расслоений Λ^+ и Λ^-:

$$\Lambda^2 = \Lambda^+\oplus\Lambda^-, \qquad \alpha\wedge\alpha = \pm|\alpha|^2\,d\mu \to \alpha\in\Gamma(\Lambda^\pm). \tag{2.2}$$

На 4-многообразии такое разложение зависит только от конформного класса метрики.

На пространствах сечений Ω^p имеется кроме обычного дифференциала d формально сопряженный d^*, определяемый как:

$$d^*\colon \Omega^p \to \Omega^{p-1}, \qquad \int (d\alpha, \beta)\, d\mu = \int (\alpha, d^*\beta)\, d\mu, \tag{2.3}$$

т.е. в ориентируемом случае $d^* = \pm * d *$.

Теорема Ходжа утверждает, что каждый класс действительных когомологий представляется единственным образом гармонической формой α такой, что

$$d\alpha = d^*\alpha = 0. \tag{2.4}$$

Гармоничность формы сохраняется под действием оператора $*$, поэтому задание метрики определяет разложение

$$H^2(X, \mathbb{R}) = H^+ \oplus H^- \tag{2.5}$$

на автодуальные и антиавтодуальные гармонические формы. Это следует из того, что они являются максимальными положительным и отрицательным подпространствами для формы пересечения, рассматриваемой как внешнее произведение на классах де Рама. Поэтому

$$\dim H^+ = b^+, \qquad \dim H^- = b^-, \tag{2.6}$$

где (b^+, b_-) – сигнатура формы пересечения на X. То же можно получить и из построения половины комплекса де Рама. А именно, определим оператор d^+ как композицию, действующую из пространства 1-форм в Ω^+, обычного внешнего дифференцирования и алгебраической проекции $(1/2)(1 + *)$. Получаем комплекс

$$\Omega^0 \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1 \xrightarrow{\ d^+\ } \Omega^+, \tag{2.7}$$

который есть, грубо говоря, половинка обычного комплекса. Если X компактно, тогда когомологии этого комплекса естественно отождествляются с $H^0(X, \mathbb{R})$, $H^1(X, \mathbb{R})$ и H^+.

2.2. Связности и кривизны. Напомним, что главным G-расслоением P над гладким многообразием X называется многообразие с заданным гладким правым действием группы G таким, что пространство орбит есть подлежащее X.

Можно предложить три определения связности на главных расслоениях, а именно:

а) как поле горизонтальных подпространств $H \subset TP$, трансверсальных к слою проекции $\pi\colon P \to X$;

б) как 1-форму A на P со значениями в алгебре Ли группы, инвариантную по действию G, ограничение которой на каждый слой совпадает с канонической правоинвариантной формой;

в) для любого представления G мы получаем векторное расслоение E над подлежащим многообразием, и связность может быть определена через ковариантную производную на E, т.е. линейное отображение

$$\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E), \tag{2.8}$$

где $\Omega^p(E)$ – пространство векторнозначных p-форм, или сечения расслоения $\Lambda^p T^*X \otimes E$; отображение ∇ должно удовлетворять правилу Лейбница

$$\nabla(f \cdot s) = f \cdot \nabla s + df \cdot s \tag{2.9}$$

для любого сечения расслоения E и функции f.

Кроме того, если на E заданы дополнительные структуры, связность должна быть с ними согласована. Например, при задании метрики связность должна удовлетворять условию:

$$d(s,t) = (\nabla s, t) + (s, \nabla t) \tag{2.10}$$

(введение дополнительных структур соответствует тому, что группа становится меньше (редуцируется к подгруппе), например, эрмитова метрика предполагает, что группа не полная линейная, а унитарная).

Все три определения связности суть одно и то же.

Обычно используется третье определение, но всегда полезно видеть за ним и все три. Тогда, например, очевидно, что связность на расслоении E есть одновременно и связность на $\operatorname{ad} E$. Действительно, связность на векторном расслоении есть и связность на главном расслоении с группой $\operatorname{Aut} E$ и той же базой. Но мы можем рассмотреть два разных представления этого главного расслоения - стандартное и присоединенное. В первом случае мы снова получим E, во втором $\operatorname{ad} E$, оба векторных расслоения снабжены связностью, которая есть одна и та же связность.

Из общих свойств связностей хотелось бы указать следующие:

а) на тривиальном расслоении $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times X$ есть выделенная связность – стандартная, ковариантное дифференцирование, задаваемое ею, есть просто дифференцирование векторнозначных функций;

б) связность – объект ковариантный;

в) связность определяет параллельный перенос слоев вдоль пути на подлежащем многообразии;

г) разность двух связностей есть 1-форма; пусть a – некоторая связность на E, а ω – элемент пространства $\Omega^1(\operatorname{ad} E)$; тогда определена новая эрмитова связность $a + \omega$, причем ω действует алгебраически на сечениях расслоения посредством очевидного спаривания

$$\Omega^0(E) \times \Omega^1(\operatorname{End} E) \to \Omega^1(E), \tag{2.11}$$

а ограничение на $\operatorname{ad} E \subset \operatorname{End} E$ соответствует тому, что новая связность согласована со структурной группой E.

Таким образом, пространство эрмитовых связностей $\mathscr{A}$ есть аффинное пространство над векторным $\Omega^1(\operatorname{ad} E)$.

Введем внешнюю производную на пространствах $\Omega^p(E)$,

$$d_a \colon \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E), \tag{2.12}$$

отображающую $\Omega^p(E)$ в $\Omega^{p+1}(E)$ по правилам

$$\begin{gathered} d_a = \nabla_a \quad \text{на} \quad \Omega^0(E), \\ d_a(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d_a \eta, \end{gathered} \tag{2.13}$$

если $\omega \in \Omega^p$ и $\eta \in \Omega^q(E)$. Заметим сразу, что такое же внешнее дифференцирование аналогичным образом вводится и на пространствах $\Omega^p(\operatorname{ad} E)$, причем эти два оператора действуют согласованно.

Оператор d_a очень похож на обычное внешнее дифференцирование, но комплекса, подобного комплексу де Рама, с его помощью определить не удастся. Препятствием к этому является кривизна связности a.

Кривизна есть последовательное применение оператора d_a дважды, а именно, $F_a = d_a d_a$. Проверкой правила Лейбница устанавливается, что кривизна есть оператор алгебраический, $F_a \in \Omega^2(\operatorname{ad} E)$.

Нетрудно вывести формулу для кривизны возмущенной связности:

$$F_{a+\omega} = F_a + d_a(\omega) + \omega \wedge \omega, \tag{2.14}$$

где последнее выражение обозначает композицию внешнего произведения и естественного умножения в $\operatorname{ad} E \subset \operatorname{End} E$.

Тождество Бианки утверждает для любой связности равенство

$$d_a(F_a) = 0. \tag{2.15}$$

Пользуясь метрикой, можно ввести оператор, формально сопряженный оператору внешнего дифференцирования:

$$d_a^* \colon \Omega^p(E) \to \Omega^{p-1}(E), \tag{2.16}$$

определяемый равенством

$$\int_X (d_a \phi, \psi)\, d\mu = \int_X (\phi, d_a^* \psi)\, d\mu \tag{2.17}$$

для любых форм подходящего порядка.

Разложение (2.2) очевидным образом продолжается и на пространство

$$\Omega^2(\operatorname{ad} E) = \Omega^+(\operatorname{ad} E) \oplus \Omega^-(\operatorname{ad} E), \tag{2.18}$$

поэтому мы имеем

$$F_a = F_a^+ + F_a^-, \qquad F_a^\pm \in \Omega^\pm(\operatorname{ad} E). \tag{2.19}$$

Связность a называется автодуальной, если $F_a^- = 0$, и антиавтодуальной, если $F_a^+ = 0$.

Напомним еще раз, что разложение (2.2) конформно инвариантно, значит, и условия автодуальности и антиавтодуальности обладают таким же свойством.

2.3. Функционал Янга–Миллса. Напомним, что согласно теории Черна–Вейля для любого комплексного расслоения E и произвольной связности a на его сечениях первый класс Черна $c_1(E)$ представляется замкнутой формой $\frac{i}{2}\pi \operatorname{Tr}(F_a)$. След квадрата кривизны при этом выражается следующим образом:

$$\left[\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Tr}(F_a^2)\right] = 2c_2(E) - c_1^2(E) \in H^4(X). \tag{2.20}$$

Для четырехмерных многообразий – односвязных, ориентируемых, компактных – которые обычно и рассматриваются в теории Дональдсона, и для SU(2)-связностей имеем в качестве следствия предыдущей формулы

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \operatorname{Tr}(F_a^2) \in \mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Разберем условие антиавтодуальности. Заметим, что в алгебре кососимметрических матриц $\operatorname{Tr}(\omega^2) = -|\omega|^2$. Вместе с определением разложения 2-форм это дает

$$\operatorname{Tr}(F_a^2) = -(|F_a^+|^2 + |F_a^-|^2)\,d\mu, \tag{2.22}$$

а значит, после интегрирования по компактной базе получаем

$$8\pi^2 c_2(E) = \int_X |F_a^-|^2\,d\mu - \int_X |F_a^+|^2\,d\mu. \tag{2.23}$$

Таким образом, абсолютное значение c_2 задает нижнюю границу значений функционала Янга–Миллса, вид которого очень прост – квадрат L^2-нормы кривизны равен

$$\|F_a\|^2 = \int_X |F_a|^2\,d\mu = \int_X |F_a^-|^2\,d\mu + \int_X |F_a^+|^2\,d\mu. \tag{2.24}$$

Если c_2 положителен, то очевидным образом критерием антиавтодуальности будет условие $\|F_a\|^2 = 8\pi^2 c_2(E)$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала $\|F_a\|^2$ на пространстве связностей, называемое уравнением Янга–Миллса, имеет вид

$$d_a^* F_a = 0. \tag{2.25}$$

Эта удивительная простота теории Янга–Миллса невольно наводит на мысль об универсальной применимости ее во многих областях. Но еще более поразителен тот факт, что в четырехмерном случае функционал конформно инвариантен. Действительно, в случае размерности d умножение метрики на c дает в 2-формах множитель c^{-2}, в то же время элемент объема изменяется в c^d раз. Поэтому интеграл $\int_X |F_a|^2\,d\mu$ преобразуется к виду $\int_X c^{4-d}|F_a|^2\,d\mu$ и остается неизменным, в точности когда $d = 4$.

Обратим внимание на то, что нижняя граница значения функционала задается в случае SU(2)-связности только вторым классом Черна. Это следствие того, что первый класс Черна SU(2)-расслоения равен нулю.

Одновременно для унитарных и ортогональных связностей введем характеристическое число $k(E)$, которое:

а) для SU(r)-расслоений равно, как и выше, $k(E) = c_2(E)$;
б) для U(r)-расслоений равно $k(E) = c_2(E) - \frac{1}{2}c_1^2(E)$;
в) для SO(r)-расслоений (вещественных) равно $k(V) = -\frac{1}{4}p_1(V)$.

Напомним, что первый класс Понтрягина $p_1(V)$ определяется формулой $p_1(V) = c_2(V \otimes \mathbb{C}) \in H^4(X, \mathbb{Z})$.

После всего сказанного становится очевидным, что если расслоение E над X допускает антиавтодуальные связности, то $k(E) \geqslant 0$, а если $k(E) = 0$, то все антиавтодуальные связности плоские.

2.4. Многообразие модулей инстантонов. Построение многообразия модулей инстантонов разбивается на два шага: первый заключается в решении уравнения антиавтодуальности (которое мы будем для краткости так и называть – уравнение инстантона), второй – в разбиении пространства решений (бесконечномерного) на орбиты по действию группы калибровочных преобразований, факторизации по действию группы, в результате чего получается конечномерное гладкое для общей метрики многообразие, которое возможно компактифицировать.

Факторизация по действию группы необходима – с бесконечномерным пространством решений трудно связать какие-либо объекты, имеющие математический смысл. Заметим, однако, что физики для получения статсумм вида (1.1) смело интегрируют по всем связностям: метод перевала приводит к рассмотрению только малых окрестностей экстремалей функционала Янга–Миллса, в частности – абсолютных минимумов, т.е. инстантонов.

Для построения классов эквивалентности на пространстве связностей необходимо (и обычно применяется) пополнение по соболевским нормам. Для этого фиксируется некоторое $l \geqslant 2$ и сечения расслоения пополняются по норме L^2_l. Тогда связности наделяются L^2_{l-1}-нормой, а кривизны – L^2_{l-2}-нормой.

Группа калибровочных преобразований $\mathscr{G}$ (или, как мы будем иногда, допуская математическую неряшливость языка, говорить – калибровочная группа) есть просто группа L^2_l-автоморфизмов расслоения E.

Определим факторпространство

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}/\mathscr{G}. \tag{2.26}$$

Очевидно, что метрика на пространстве связностей, определяемая как

$$\|a-b\| = \left(\int_X |a-b|^2\,d\mu\right)^{1/2} \tag{2.27}$$

(тождественная метрике на пространстве 1-форм со значениями в $\operatorname{ad} E$), сохраняется при действии калибровочной группы одновременно на обе связности, поэтому для более точного отражения топологической структуры на $\mathscr{B}$ необходимо ввести расстояние между классами связностей.

Если $[a]$ и $[b]$ – орбиты связностей, тогда определим расстояние как

$$\tau([a],[b]) = \inf \|a - u(b)\|, \qquad u \in \mathscr{G}. \tag{2.28}$$

И, естественно, это индуцирует τ – метрику на факторпространстве $\mathscr{B}$.

Для описания окрестности класса $[a]$ в факторпространстве $\mathscr{B}$ воспользуемся следующей конструкцией. Пусть

$$T_{a,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega^1(\operatorname{ad} E) \mid d_a^*(\omega) = 0,\ \|\omega\| < \varepsilon\}, \tag{2.29}$$

где, договоримся, под нормами будем понимать соболевские нормы тех индексов, которые мы присвоили пространствам в начале п. 2.4. Тогда окрестность орбиты, представляемой связностью a, может быть описана как некоторая факторизация $T_{a,\varepsilon}$ при достаточно малом ε.

Заметим, что условие $d_a^*(\omega) = 0$ в определении (2.29) очень просто истолковывается. Действительно, если форма ω точна, т.е. представляется в виде $d_a\lambda$, где λ – просто функция со значениями в эндоморфизмах, то нетрудно видеть, что $\tau([a+\omega],[a]) = 0$.

Условие $d_a^*(\omega) = 0$ означает, что связности $a+\omega$ и a находятся в кулоновской калибровке.

Чтобы объяснить, как факторизуется $T_{a,\varepsilon}$, введем для каждой связности подгруппу калибровочных преобразований

$$\Gamma_a = \{u \in \mathscr{G} \mid u(a) = a\}. \tag{2.30}$$

Как замкнутая подгруппа калибровочной группы Γ_a является группой Ли. Ее алгебра Ли определяется просто как ядро $\ker d_a \subset \Omega^0(\operatorname{ad} E)$. Очевидно, группа Γ_a действует на $\Omega^1(\operatorname{ad} E)$ и, следовательно, на $T_{a,\varepsilon}$.

Оказывается, что для достаточно малых ε проекция $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ индуцирует гомеоморфизм между фактором $T_{a,\varepsilon}/\Gamma_a$ и окрестностью орбиты $[a]$.

Группы Γ_a классифицируют связности в следующем смысле. Если такая подгруппа минимальна – а это значит, что она в каждой точке совпадает с централизатором структурной группы расслоения, то мы будем называть соответствующую связность неприводимой.

Открытое подмножество неприводимых связностей мы будем обозначать $\mathscr{A}^* \subset \mathscr{A}$. Тогда фактор неприводимых связностей по действию калибровочной группы $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}$ локально изображается шарами $T_{a,\varepsilon}$ в гильбертовых пространствах $\ker d_a^* \subset L^2_{l-1}(\Omega^1(\operatorname{ad} E))$. Это задает покрытие $\mathscr{B}^*$ картами, превращающее это факторпространство в гладкое гильбертово многообразие неприводимых связностей.

Термин “приводимость” используется обычно в том смысле, что связность раскладывается в прямую сумму пары связностей, действующих на паре расслоений, прямая сумма которых составляет исходное расслоение. Это далеко не всегда равносильно тому, что изотропная подгруппа Γ_a связности a минимальна. Но в условиях наших рассмотрений (SU(2)-, U(2)-, SO(3)-расслоение над односвязным многообразием) два эти условия совпадают.

В случае комплексного SU(2)-расслоения приводимость соответствует разложению $E = L \oplus L^{-1}$, при этом $\operatorname{ad} E = \mathbb{R} \oplus L^{\otimes 2}$. В случае вещественного – разложение имеет вид $\operatorname{ad} E = \mathbb{R} \oplus L$.

Как уже отмечалось, приводимые связности составляют особенности гильбертова многообразия $\mathscr{B}$. Самой особой является самая простая – тривиальная – связность. Состоящая из трех различных компонент, она представляется конусом над пространством, которое и само является особым.

Необходимо также добавить, что для SU(2)- или SO(3)-связности калибровочно эквивалентные классы приводимых антиавтодуальных связностей в точности соответствуют парам $\pm c$, где c – ненулевые классы в $H^2(X,\mathbb{Z})$, причем $c^2 = -c_2(E)$ или $p_1(E)$ соответственно, но это верно, подчеркнем, только в односвязном случае.

Очевидно, что условие антиавтодуальности инвариантно при действии калибровочной группы. Это следует из инвариантности функционала Янга–Миллса, экстремалями которого являются эти связности. Поэтому на пространстве модулей $\mathscr{B}$ определяется подмножество $\mathscr{M}_{\text{asd}}$ – орбиты антиавтодуальных связностей по модулю действия калибровочной группы. A priori такие множества должны обозначаться как $\mathscr{M}_{\text{asd}}(l)$, в зависимости от индекса соболевских норм. Однако естественное вложение

$\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(l+1)$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(l)$ оказывается гомеоморфизмом. Поэтому в дальнейшем индексы будут опускаться, за исключением тех случаев, когда это может привести к недоразумению.

$\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ называется многообразием модулей антиавтодуальных связностей или – короче – инстантонов.

Локально $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ может быть описано так же, как и $\mathscr{B}$. Пусть a – антиавтодуальная связность. Тогда определим отображение ψ таким образом:

$$\begin{gathered}\psi\colon T_{a,\varepsilon}\to\Omega^+(\operatorname{ad}E),\\ \psi(\omega)=F^+(a+\omega)=d_a^+(\omega)+(\omega\wedge\omega)^+.\end{gathered}\tag{2.31}$$

Как и выше, фактор схемы нулей этого отображения по изотропной подгруппе $Z(\psi)/\Gamma_a$ гомеоморфен окрестности $[a]$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$.

Заметим, что отображение ψ – гладкое фредгольмово, дифференциал которого в нуле есть просто

$$d_a^+\colon \ker d_a^*\to\Omega^+(\operatorname{ad}E).\tag{2.32}$$

Это следует из эллиптичности (и, значит, фредгольмовости) оператора $\delta_a=d_a^*\oplus d_a$, поскольку ограничение оператора в (2.32) совпадает с δ_a. Размерность многообразия модулей инстантонов совпадает с индексом оператора δ_a. Обозначим $s=\operatorname{ind}\delta_a$. Это число находится по теореме Атьи–Зингера и зависит только от топологических параметров подлежащего многообразия и расслоения E. А именно, для $\mathrm{SU}(2)$-расслоения получаем

$$s=8c_2(E)-3\bigl(1-b_1(X)+b_2^+(X)\bigr),\tag{2.33}$$

а для $\mathrm{SO}(3)$-расслоения

$$s=-2p_1(E)-3\bigl(1-b_1(X)+b_2^+(X)\bigr).\tag{2.34}$$

В локальном описании уравнения $d_a^*(\omega)=0$ и $d_a^+(\omega)+(\omega\wedge\omega)^+=0$ играют разную роль. Второе есть собственно уравнение антиавтодуальности, первое же описывает локально срез (в кулоновской калибровке) на пространстве орбит в некоторой окрестности связности a. Такой срез может быть выбран и другими способами, поэтому правильнее представлять себе линеаризацию объекта следующим образом.

Рассмотрим деформационный комплекс

$$\Omega^0(\operatorname{ad}E)\xrightarrow{d_a}\Omega^1(\operatorname{ad}E)\xrightarrow{d_a^+}\Omega^+(\operatorname{ad}E).\tag{2.35}$$

Условие антиавтодуальности равносильно тому, что это действительно комплекс, определяющий группы когомологий H_a^0,H_a^1,H_a^2. Средние когомологии представляют линеаризацию уравнений инстантона по модулю действия калибровочной группы

$$H_a^1=\ker d_a^+/\operatorname{im}d_a,\tag{2.36}$$

и теория Ходжа доставляет нам естественное отождествление

$$H_a^1\cong\ker\delta_a,\qquad H_a^2=\operatorname{coker}d_a^+\cong\ker d_a\subset\Omega^+(\operatorname{ad}E).\tag{2.37}$$

В терминах этого комплекса число s есть просто эйлерова характеристика, взятая с обратным знаком:

$$s=\dim H^1_a-\dim H^0_a+\dim H^2_a. \tag{2.38}$$

Локальной моделью $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ будет фактор $f^{-1}(0)/\Gamma_a$, где

$$f\colon H^1_a\to H^2_a \tag{2.39}$$

– эквивариантное относительно изотропной подгруппы отображение. Функция f может быть выбрана вещественной аналитической, следовательно, многообразие модулей инстантонов – вещественно аналитическое. Обычно такая функция называется отображением Кураниши.

В случае неопределенной формы пересечения (см. ниже) и общей метрики многообразие модулей не содержит приводимых связностей; для неприводимых связностей по теореме, доказанной К. Уленбек, вторые когомологии деформационного комплекса (2.35) равны нулю. Заметим, что и для случая, когда общие метрики допускают приводимые антиавтодуальные связности (т.е. когда форма пересечений 2-циклов определена), все равно $H^2_a=0$. Поэтому в любом случае (для общей метрики) многообразие модулей инстантонов гладкое или гладкое почти всюду, кроме конечного числа точек, линки которых гомеоморфны проективным пространствам.

Наконец, чтобы использовать многообразия модулей как геометрические объекты (например, пленки бордизмов), необходимо еще одно важное свойство многообразия модулей инстантонов – ориентируемость.

2.5. Ориентация. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{SU}(2)$-расслоения. Возьмем на многообразии модулей $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ открытое подмножество $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$ классов неприводимых связностей $[a]$. Из неприводимости следует, что $H^2_a=0$. Тогда $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$ – ориентируемо. Действительно, как было указано выше, касательное пространство к многообразию модулей в гладкой точке описывается как ядро эллиптического оператора

$$\delta_a\colon\Omega^1(\mathrm{ad}\,E)\to\Omega^0(\mathrm{ad}\,E)\oplus\Omega^+(\mathrm{ad}\,E). \tag{2.40}$$

Ориентируемость $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$ эквивалентна тривиальности старшей внешней степени касательного расслоения, поэтому необходимо рассмотреть вещественное линейное расслоение $\Lambda^{\max}(\ker\delta_a)$ на $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$. Так как коядро $\operatorname{coker}\delta_a$ тривиально на $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$, последнее расслоение отождествляется с детерминантом индексного расслоения оператора δ_a, которое представляет собой разность ядра и коядра в K-функторе. Последнее естественно продолжается на все $\mathscr{B}^*$ как детерминант δ, подкрученный на семейство $\mathrm{SO}(3)$-связностей, приходящих с $\mathrm{ad}\,E$,

$$\Lambda=\det\operatorname{ind}(\delta,\mathrm{ad}\,E). \tag{2.41}$$

Известно, что расслоение Λ тривиально, поэтому и существует ориентация на $\mathscr{M}^s_{\mathrm{asd}}$.

Ориентируемость многообразия модулей имеет место не только для случая $G=\mathrm{SU}(2)$. Утверждение верно и для $\mathrm{SU}(n)$-связностей, а через них, при помощи некоторого трюка, и для $\mathrm{U}(n)$-связностей. Трюк не слишком сложен – вместо $\mathrm{U}(n)$-расслоения рассматривается $\mathrm{SU}(n+n)$-расслоение $E_+ = E \oplus E^*$, соответствующее гомоморфизму $\rho\colon \mathrm{U}(l) \to \mathrm{SU}(l+l)$, определяемому формулой

$$\rho(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Рассмотрим теперь $\mathrm{SO}(3)$-расслоение $P \to X$. Так как X – односвязно, существует целочисленный класс $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$, $\alpha = w_2(P) \pmod 2$, такой, что P поднимается до $\mathrm{U}(2)$-расслоения $E \to X$, причем $c_1(E) = \alpha$. Далее, пусть $t\colon \mathscr{B}_{f,E} \to \mathscr{B}_{f,P}$ – отображение, порождаемое гомоморфизмом $\mathrm{U}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, и Λ^f_E, Λ^f_P – расслоения ориентаций. Так как слои t связны, то Λ^f_P тривиально, если таковым является $t^*(\Lambda^f_P)$. С другой стороны, последнее расслоение изоморфно Λ^f_E (это связано с отождествлением $\operatorname{ad} E = \operatorname{ad} P \oplus \mathbb{R}$). Поэтому случай $\mathrm{SO}(3)$ сводится к $\mathrm{U}(2)$-случаю.

Таким образом, имеется результат: в случае общей метрики многообразие модулей неприводимых инстантонов не только гладкое, но и ориентируемое.

С другой стороны, многообразие модулей оснащенных инстантонов может быть получено как результат симплектической редукции. А именно, на пространстве связностей $\mathscr{A}$ имеется естественная симплектическая структура, задаваемая на касательных векторах $u, v \in T\mathscr{A} = \Omega^1(\operatorname{ad} E)$ как композиция свертки на $\operatorname{ad} E$ и стандартной симплектической структуры на кокасательном расслоении T^*X. Отображение моментов μ задается просто взятием положительной части кривизны (очевидно, такое отображение эквивариантно по действию калибровочной группы) и $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}} = \mu^{-1}(0)$.

§ 3. Компактификация многообразия модулей

3.1. Идеальные связности. Для нахождения численных инвариантов, связанных с многообразиями модулей инстантонов, необходимо это многообразие компактифицировать. Похожая ситуация возникает при вычислении классов Черна на некомпактном многообразии. А именно, численный результат существенно зависит от компактификации.

Компактификация по Уленбек предполагает определение класса идеальных связностей. Для простоты будем рассматривать случай $\mathrm{SU}(2)$-расслоений. Тогда для ориентированного компактного односвязного риманова четырехмерного многообразия имеется последовательность многообразий модулей $\mathscr{M}_k$, занумерованных вторыми классами Черна $k \geqslant 0$ ($\mathscr{M}_0$ – просто точка, представляющая тривиальную связность).

Идеальная антиавтодуальная связность класса k определяется как пара

$$([a], (x_1, \dots, x_l)), \tag{3.1}$$

где $[a] \in \mathscr{M}_{k-l}$ и $(x_1, \dots, x_l)$ – неупорядоченная l-ка точек подлежащего многообразия X. Плотность кривизны связности $([a], (x_1, \dots, x_l))$ определяется как

$$|F(a)|^2 + 8\pi^2 \sum_{r=1}^{l} \delta_{x_r}. \tag{3.2}$$

Пусть a_j – последовательность связностей на $\mathrm{SU}(2)$-расслоении E_k, второй класс Черна которого равен k. Назовем последовательность классов калибровочно эквивалентных связностей $[a_j]$ слабо сходящейся к предельной идеальной связности $([a], (x_1, \dots, x_l))$, если выполнены следующие условия:

а) для любой непрерывной на X функции f последовательность значений интегралов $\int_X f|F(a_j)|^2\,d\mu$ сходится:

$$\int_X f\,|F(a_j)|^2\,d\mu \to \int_X f\,|F(a)|^2\,d\mu + 8\pi^2 \sum_{r=1}^{l} f(x_r); \tag{3.3}$$

б) существуют отображения расслоений

$$\rho_j \colon E_l\big|_{X/(x_1,\dots,x_l)} \to E_k\big|_{X/(x_1,\dots,x_l)}, \tag{3.4}$$

так что последовательность связностей $\rho_j^*(a_j)$ сходится к a.

Для каждого k таким образом определяется топология на множестве всех идеальных связностей

$$I\mathscr{M}_k = \mathscr{M}_k \cup (\mathscr{M}_{k-1} \times X) \cup (\mathscr{M}_{k-2} \times S^2(X)) \cup \cdots . \tag{3.5}$$

Многообразие модулей $\mathscr{M}_k$ вложено в $I\mathscr{M}_k$ как открытое подмножество. Определим тогда $\overline{\mathscr{M}_k}$ как замыкание $\mathscr{M}_k$ в пространстве всех идеальных связностей $I\mathscr{M}_k$.

Справедливо утверждение о том, что любая бесконечная последовательность связностей в $\mathscr{M}_k$ имеет слабо сходящуюся подпоследовательность, предел которой содержится в $\overline{\mathscr{M}_k}$. Следовательно, $\overline{\mathscr{M}_k}$ компактно.

Аналогично и для SO(3)-расслоения при фиксированном классе Штиффеля–Уитни $w \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ имеется многообразие модулей $\mathscr{M}_{k,w}$ связностей на расслоении E, причем $k(E) = -\frac{1}{4}p_1(E)$, как было определено в п. в) (раздел 2.3). Индекс k на этот раз не обязательно целое число, но разность любых двух индексов обязательно целая. Естественная компактификация в этом случае получается как замыкание $\mathscr{M}_{k,w}$ в

$$\mathscr{M}_{k,w} \cup (\mathscr{M}_{k-1,w} \times X) \cup (\mathscr{M}_{k-2,w} \times S^2(X)) \cup \cdots . \tag{3.6}$$

Несмотря на ясный и четкий характер построений, при компактификации могут возникнуть весьма особые точки и локусы. Например, последовательность неприводимых связностей может сходиться к идеальной связности, локально свободная часть которой приводима, и т. д.

3.2. Чудеса начинаются. Всюду далее мы будем рассматривать только односвязные 4-многообразия. В этом случае гомотопический тип многообразия X задается целочисленной квадратичной формой пересечения q_X на $H^2(X, \mathbb{Z})$: пусть $\alpha^* \in H_2(X, \mathbb{Z})$ – двойственный к $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ по Пуанкаре цикл, тогда

$$q_X(\alpha, \beta) = \beta(\alpha^*). \tag{3.7}$$

Заметим, что в этом односвязном случае видна четкая параллель со случаем двумерной связной компактной римановой поверхности Σ: гомотопический тип Σ задается симметрической формой q_Σ на $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

$$q_\Sigma(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \pmod 2. \tag{3.8}$$

В частности, если класс гомологий задан простой замкнутой кривой C, то $C^2 = 1$ в том и только том случае, если окрестность кривой C – лист Мёбиуса. Легко видеть, что любая симметрическая форма соответствует некоторой римановой поверхности и однозначно определяет ее гомотопический, топологический и гладкий тип.

Теорема Фридмана [11] гарантирует справедливость этих утверждений и в четырехмерном случае для топологического типа: каждая унимодулярная форма соответствует односвязному ориентированному топологическому многообразию. Если форма четна, то топологическое многообразие одно, а если нечетно, то таких многообразий два.

В отличие от двумерного случая для гладкого 4-многообразия форма пересечения не может быть любой. Первые запреты начинаются с теоремы Рохлина об индексе гладких многообразий с четными формами (см. ниже элементарное доказательство, использующее индексы операторов Дирака). В гладком случае имеется существенная разница между определенными и неопределенными формами. Напомним, что разложение (2.5) определяет два числа $b^{\pm}$ (2.6). Их сумма $b_2 = b^+ + b^-$ – второе число Бетти нашего многообразия, а их разность $\sigma = b^+ - b^-$ – сигнатура нашего многообразия – зависит от ориентации. Определенные формы – это те, у которых либо $b^+ = 0$, либо $b^- = 0$.

Самое сильное утверждение в гомотопической теории односвязных гладких многообразий содержит следующая теорема Дональдсона.

Теорема 3.1. *Определенная форма гладкого односвязного 4-многообразия X является целочисленной суммой квадратов.*

Иначе говоря, гомотопический тип такого многообразия с точностью до ориентации определяется вторым числом Бетти.

Доказательство этой теоремы рекордно короткое (опять же по модулю всей теории Дональдсона). Пусть наша форма q_X отрицательно определена. Рассмотрим для общей метрики на X многообразие $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(1)$ модулей $\mathrm{SU}(2)$-инстантонов с $c_2 = 1$ (называемых обычно 1-инстантонами). Согласно результатам раздела 2.4 $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(1)$ – либо гладкое пятимерное многообразие (см. формулу (2.33)) вне конечного числа простых особых точек, соответствующих приводимым связностям, либо пусто. Каждая приводимая связность соответствует разложению расслоения $E = L \oplus L^*$ и связности $a = a_L \oplus a_{L^*}$, где a_L – антиавтодуальная абелева связность. Но поскольку $c_2(E) = 1$, то $c_1(L)^2 = -1$. Далее, компактификация $\overline{\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(1)}$ содержит идеальные связности вида $([a], x)$ (см. (3.1) и (3.6)), где $[a]$ – тривиальная плоская связность на тривиальном расслоении, а x – любая точка нашего многообразия X. Такие связности, конечно, существуют и являются идеальными антиавтодуальными связностями. Локальное многообразие деформаций таких решений пятимерно и содержит неприводимые антиавтодуальные связности. Значит,

(1) пятимерное пространство $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(1)$ не пусто;
(2) компактификация $\overline{\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(1)}$ доставляет гладкий ориентированный бордизм между X и несвязным объединением линков особых точек – приводимых связностей;
(3) линк каждой особой точки есть $\mathbb{CP}^2$ с обращенной ориентацией.

Сильнейшая теорема гомотопической теории гладких 4-многообразий доказана.

Перейдем теперь к случаю неопределенных форм: если форма q_X нечетная, то она представима в виде

$$q_X = \sum_1^{b^+} x_i^2 - \sum_1^{b^-} y_j^2; \tag{3.9}$$

а если четная, то она имеет вид

$$q_X = 2kE_8 \oplus mH, \tag{3.10}$$

где E_8 – определенная стандартная форма ранга 8, H – стандартная гиперболическая форма ранга 2, а коэффициент при E_8 четный по теореме Рохлина. Этот результат показывает, что нечетные формы реализуются все в качестве форм пересечений гладких многообразий. Для четных форм проблема открыта при $k \geqslant 1$. Результаты, имеющиеся на сегодняшний день в этой задаче, следующие:

(1) Дональдсон (1984 г.)

$$k \geqslant 1 \implies m \geqslant 3; \tag{3.11}$$

(2) Кронхеймер–Мровка (1994 г.)

$$k \geqslant 2 \implies m \geqslant 6; \tag{3.12}$$

(3)

$$k \geqslant 3 \implies m \geqslant 9. \tag{3.13}$$

Заметим, что для K3-поверхности $k = 1, m = 3$ и, значит, связные суммы K3-поверхностей и квадрик реализуют все формы при $m \geqslant 3k$.

Последний шаг гомотопической классификации гладких 4-многообразий –
$\frac{11}{8}$-ГИПОТЕЗА: $3k \leqslant m$.

Заметим, что Фурута анонсировал решение проблемы "$\frac{10}{8}$" и что для 4-многообразий, подлежащих алгебраическим поверхностям, гипотеза следует из неравенства Богомолова–Мияока–Яо (см., например, [22]). Геометрическое следствие гипотезы – существование топомодели любого односвязного гладкого 4-многообразия:

$$\begin{aligned} q_X \text{ – нечетна} &\implies X \sim b^+\mathbb{CP}^2 \# b^-\overline{\mathbb{CP}^2}, \\ q_X \text{ – четна} &\implies X \sim \pm\frac{\sigma}{16}K \# (m-3k)Q, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $\sim$ – топологическая эквивалентность, $\#$ – операция связной суммы, $\overline{\mathbb{CP}^2}$ – комплексная проективная плоскость с обращенной ориентацией, $\pm K$ – K3-поверхность со стандартной или обращенной ориентацией и Q – комплексная квадрика, $Q = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Мы видим, что, как и в двумерном случае, каждое гладкое односвязное 4-многообразие может быть представлено топологически как связная сумма проективных плоскостей, "торов" (т.е. произведений сфер соответствующей размерности) и кватернионных эллиптических кривых – K3-поверхностей (с точностью до ориентации). Однако гладкая классификация гораздо богаче: не всякая алгебраическая поверхность гладко эквивалентна своей топомодели. Замечательный результат заключается в том, что для алгебраических поверхностей с $b^+ > 1$ гладкая структура ее топомодели является экзотической, т.е. не совпадает с ее подлежащей гладкой структурой.

Здесь мы уже прочно привязаны к опыту алгебраической геометрии (см., например, [21]), для которой описанные в следующем разделе конструкции в их алгебро-геометрическом варианте давно уже стали привычными (если не сказать "банальными") (см. оригинальную работу Мукая [14]).

3.3. μ-классы. Основная идея следующих построений заключается в том, что когомологические классы множества, параметризующего орбиты в семействе связностей, могут быть подняты с подлежащего многообразия.

А именно, мы будем искать гомологические классы пространств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$.

Отметим, что при изучении топологических свойств этих пространств трудности могут возникнуть из несвободы действия калибровочной группы на пространстве связностей. Даже в случае неприводимых связностей стабилизатор Γ_a может быть нетривиальным – равным центру $C(G)$. Поэтому обычно удобно работать с оснащенными связностями.

Пусть на подлежащем многообразии отмечена некоторая точка x_0. Тогда оснащенной связностью на главном расслоении P называется пара (a, f), где a – связность, а f – эквивариантный по действию G изоморфизм $\phi\colon G \to P_{x_0}$. В наших рассмотрениях это равносильно заданию ортонормированного базиса в слое расслоения E_{x_0}. Калибровочная группа естественно действует на пространстве оснащенных связностей, поэтому можно определить

$$\mathscr{B}_f = (\mathscr{A} \times \operatorname{Hom}(G, P_{x_0}))/\mathscr{G}. \tag{3.15}$$

Другой способ определения $\mathscr{B}_f$ – рассмотрение подгруппы калибровочной группы $\mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G}$ такой, что

$$\mathscr{G}_0 = \{u \in \mathscr{G} \mid u(x_0) = \mathrm{id}\}. \tag{3.16}$$

Тогда $\mathscr{B}_f = \mathscr{A}/\mathscr{G}$ и вместе с тем имеется естественная проекция $\beta\colon \mathscr{B}_f \to \mathscr{B}$. В первом определении β – отображение, забывающее фиксированный в точке x_0 базис.

Стабилизатор Γ_a состоит из ковариантно-постоянных преобразований, подгруппа $\mathscr{G}_0$ действует свободно на $\mathscr{A}$, следовательно, $\mathscr{B}_f$ банахово многообразие. Слой отображения β в точке $[a]$ изоморфен G/Γ_a, где Γ_a понимается как подгруппа G через отождествление $\mathscr{G}/\mathscr{G}_0 \cong G$.

Построим семейство оснащенных связностей, параметризованное $\mathscr{B}_f$. Пусть $\pi_2\colon \mathscr{A} \times X \to X$ – проекция на второй сомножитель, тогда $P' \to \mathscr{A} \times X$ определяется как поднятие $\pi_2^*(P)$. Поэтому $P' = \mathscr{A} \times P$. Тогда на P' поднимается семейство связностей $\mathscr{A}'$, так что на срезе P_a над $a \times X$ связность совпадает с $\pi_2^*(a)$. Если выбор базиса f в x_0 сделан, тогда мы получаем оснащенность и для всего семейства f'. Группа $\mathscr{G}_0$ действует свободно на $\mathscr{A} \times X$, так же как и на P', поэтому можно говорить о фактор-расслоении

$$\begin{gathered} \mathbb{P}_f \to \mathscr{B}_f \times X, \\ \mathbb{P}_f = P'/\mathscr{G}_0. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Семейства связностей $\mathscr{A}'$ и f' сохраняются при действии $\mathscr{G}_0$, поэтому фактор-расслоение (3.17) наследует семейство базисных связностей $(\mathbb{A}', \mathfrak{U})$.

Пространство $\mathscr{B}^*$ не параметризует никакое универсальное семейство. Но можно действовать так: пусть $\mathscr{A}^* \subset \mathscr{A}$ – подпространство неприводимых связностей; тогда можно определить $P' \to \mathscr{A}^* \times X$ как поднятие расслоения $P' = \mathscr{A}^* \times P$. Как и выше, можно поднять семейство связностей. Калибровочная группа действует на этом семействе, но не действует свободно на базе $\mathscr{A}^* \times X$, кроме случая, когда центр группы тривиален. Так как $C(G)$ действует тривиально на базе и нетривиально на расслоении P', фактор будет не G-расслоением, но G^{ad}-расслоением, структурная группа которого есть $G/C(G)$. И возможно определить

$$\mathbb{P}^{\mathrm{ad}} \to \mathscr{B}^* \times X \tag{3.18}$$

как фактор $\mathbb{P}^{\mathrm{ad}} = P'/\mathscr{G}$.

В наших рассмотрениях, когда $G = \mathrm{SU}(2)$, $\mathbb{P}^{\mathrm{ad}}$ будет $\mathrm{SO}(3)$-расслоением над $\mathscr{B}^* \times X$.

Чтобы описать в этом случае когомологии $\mathscr{B}_f$ и $\mathscr{B}^*$, необходимо использовать естественное произведение

$$/\colon H^d(\mathscr{B}_f \times X) \times H_j(X) \to H^{d-j}(\mathscr{B}_f). \tag{3.19}$$

(Заметим, что символ / – стандартное обозначение slant-произведения.) Для любого характеристического класса c, связанного с группой G, существует класс когомологий $c(\mathbb{P}_f) \in H^d(\mathscr{B}_f \times X)$, где $d = \deg(c)$. И отображение определяется как “свертка”

$$\begin{aligned} \mu_c^f\colon H_j(X) &\to H^{d-j}(\mathscr{B}_f), \\ \mu_c^f(\alpha) &= c(\mathbb{P}_f)/\alpha. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Сходным образом определяются классы на $\mathscr{B}^*$, но на этот раз берется характеристический класс группы G^{ad}, и отображение

$$\begin{aligned} \mu_c\colon H_j(X) &\to H^{d-j}(\mathscr{B}^*), \\ \mu_c(\alpha) &= c(\mathbb{P}^{\mathrm{ad}})/\alpha, \end{aligned} \tag{3.21}$$

задает классы когомологий факторпространства неприводимых связностей.

Продолжим рассуждения определением μ-классов в нашем конкретном случае. Для главного $\mathrm{SU}(2)$-расслоения отображение $\mu^f : H_2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(\mathscr{B}_f,\mathbb{Z})$ задается формулой

$$\mu^f(\Sigma) = c_2(\mathbb{P}_f)/[\Sigma], \tag{3.22}$$

отображение $\mu\colon H_2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(\mathscr{B}^*,\mathbb{Q})$ задается сходным образом:

$$\mu(\Sigma) = -\frac{1}{4}\,p_1(\mathbb{P}^{\mathrm{ad}})/[\Sigma]. \tag{3.23}$$

Второе из этих определений подходит и тогда, когда $G = \mathrm{SO}(3)$; в каждом из случаев $\mathbb{P}^{\mathrm{ad}}$ является $\mathrm{SO}(3)$-расслоением.

Определения, представленные выше, дают отображения средних когомологий подлежащего многообразия. Кратко опишем случаи $\mu_{c_2}^f\colon H_j(X) \to H^{4-j}(\mathscr{B}^*)$, когда $j = 1$ и 3. Каждый из них имеет прямую геометрическую интерпретацию.

Пусть γ – замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в x_0 и представляющий класс $[\gamma] \in H^1(X,\mathbb{Z})$. Для любой связности a обозначим через $h_\gamma(a)$ голономию связности вдоль замкнутого контура. Это автоморфизм слоя P_{x_0}, зависящий от класса эквивалентности a как отмеченной связности и определяющий отображение

$$h_\gamma\colon \mathscr{B}_f = (\mathscr{A}/\mathscr{G}_0) \to \mathrm{SU}(2) \cong S^3. \tag{3.24}$$

Следовательно, мы получаем класс когомологий $h^*_\gamma(\omega) \in H^3(\mathscr{B}_f)$ поднятием фундаментального класса $\omega \in H^3(S^3)$, и нетрудно доказать, что этот класс когомологий совпадает с $\mu^f_{c_2}([\gamma])$.

Теперь рассмотрим отображение $\mu^f_{c_2}\colon H^3(X) \to H^1(\mathscr{B}_f)$. Если $[Y] \in H^3(X)$ – класс, представителем которого является вложенное 3-многообразие $Y \subset X$, тогда для любой связности a на X можно вычислить инвариант Черна–Саймонса для ограничения $a|_Y$. Этот инвариант $\tau_Y(a)$ принимает значения в S^1 и, следовательно, определяет отображение $\tau_Y\colon \mathscr{B}_f \to S^1$. И снова из фундаментального класса, но теперь уже S^1, при поднятии получаем элемент из $H^1(\mathscr{B}_f)$. Тождественность этого класса с $\mu^f_{c_2}([Y])$ легко выводится из определения второго класса Черна через кривизну в теории Черна–Вейля.

Но вернемся к двумерным когомологиям. В случае односвязного многообразия образ отображения, определенного формулой (3.20), порождает все рациональные когомологии $\mathscr{B}_f$. Вообще верен следующий факт: если P – главное $\mathrm{SU}(2)$-расслоение над односвязным 4-многообразием и $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{b_2}$ – базис в $H_2(X, \mathbb{Z})$, тогда кольцо рациональных когомологий $H^*(\mathscr{B}_f, \mathbb{Q})$ есть полиномиальная алгебра на образующих $\mu^f(\Sigma_1), \dots, \mu^f(\Sigma_{b_2})$. В частности, $H^{2k}(\mathscr{B}_f, \mathbb{Q}) \cong S^k(H_2(X, \mathbb{Q}))$.

Этот результат может быть использован для вычислений рациональных когомологий $\mathscr{B}^*$ при помощи поднятия, задаваемого отображением β. Класс $\mu(\Sigma) \in H^2(\mathscr{B}^*, \mathbb{Q})$ поднимается до класса $\mu^f(\Sigma)$, но в этом случае данные классы не являются образующими кольца когомологий базы. Необходимо еще добавить 4-мерный класс

$$\nu = -\frac{1}{4}\, p_1(\beta) \in H^4(\mathscr{B}^*, \mathbb{Q}), \tag{3.25}$$

где $p_1(\beta)$ – класс Понтрягина β как $\mathrm{SO}(3)$-расслоения. Это определение может быть рассмотрено как пример общей конструкции $\mu_c(\alpha)$ в случае, когда $c = -\frac{1}{4}p_1$ и $\alpha = [x_0] \in H_0(X)$.

Сходное утверждение формулируется для кольца когомологий $H^*(\mathscr{B}^*, \mathbb{Q})$, а именно, это полиномиальная алгебра на образующих – одном четырехмерном и b_2 двумерных:

$$H^*(\mathscr{B}^*, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\nu, \mu(\Sigma_1), \dots, \mu(\Sigma_{b_2})]. \tag{3.26}$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть в качестве подлежащего многообразия взята риманова поверхность S, и $G = \mathrm{U}(1)$. Пространства $\mathscr{B}_f, \mathscr{B}, \mathscr{B}^*$ все совпадают в этом случае. Так как в случае комплексной размерности 1 нет условий интегрируемости, любая связность на линейном расслоении $L \to S$ задает голоморфную структуру на L. Это определяет отображение $\mathscr{B} \to \mathrm{Pic}_k(S)$, где Pic_k – торы классов изоморфных голоморфных линейных расслоений степени k. Такое отображение сохраняет гомотопическую эквивалентность, слои его – пространство всех эрмитовых метрик на L. Следовательно, когомологии $\mathscr{B}$ те же, что и на якобиане, а так как последний есть $2g$-тор, то $H^*(\mathscr{B}, \mathbb{Z})$ – внешняя алгебра с $2g$ одномерными образующими. Отождествив их с классами $\mu_{c_1}(\alpha), \alpha \in H_1(S)$, получаем обычное описание якобиана как фактора $\mathbb{R}^{2g}$ по решетке периодов.

3.4. Инварианты Дональдсона. Как всегда, начнем с простого случая – случая нульмерного многообразия модулей инстантонов.

Пусть X – односвязное 4-многообразие с $b^+(X) > 1$ (условие, устраняющее зависимость от выбора метрики), и пусть $E \to X$ – расслоение со структурной группой $G = \mathrm{SO}(3)$. Пусть виртуальная размерность многообразия модулей равна нулю: $8k - 3(1 + b^+) = 0$. Тогда для общей метрики g верны следующие утверждения:

(1) многообразие модулей $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(E, g)$ содержит только неприводимые связности;

(2) $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(E, g)$ состоит из конечного числа точек;

(3) выбирая ориентацию, можно присвоить знак каждой точке $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(E, g)$.

Выбор ориентации зависит от выбора ее на расслоении $\Lambda = \det \mathrm{ind}(\delta, \mathrm{ad}\, E)$, однако такой выбор становится каноническим, если зафиксировать ориентацию на $H^+(X_0)$ и класс эквивалентности целочисленного подъема $w_2(E)$ в случае SO(3)-расслоения.

$\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(E, g)$ в этом случае, очевидно, компактно, так как при меньших k антиавтодуальных связностей нет, а значит, нет и предельных идеальных связностей, все пределы – действительные. Это дает компактность $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}(E, g)$, равносильную конечности числа точек.

Определим инвариант как целое число

$$q = \sum_{[a] \in \mathscr{M}} \varepsilon(a). \tag{3.27}$$

A priori это число зависит от метрики, выбора ориентации на $H^+(X)$ и целочисленного подъема.

Замечательное свойство такого “числа точек многообразия модулей, взятых со знаками”, заключается в том, что для двух общих метрик g_0 и g_1 имеем равенство

$$q(g_0) = q(g_1). \tag{3.28}$$

В качестве примера рассмотрим K3-поверхность. Пусть

$$\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}_2), \qquad \alpha^2 = 2 \pmod 4.$$

Рассмотрим SO(3)-расслоение F такое, что $w_2(F) = \alpha$ и $p_1(F) = -6$.

Так как для K3-поверхности $b^+(X) = 3$, виртуальная размерность многообразия модулей равна

$$\dim \mathscr{M}_F = -2p_1(F) - 3(1 + 3) = 0. \tag{3.29}$$

Значит, мы находимся в ситуации, когда можно определить инвариант X. Для этого необходимо выбрать ориентацию Ω положительной части $H^2(X)$. Форма пересечения K3-поверхности четна, поэтому зависимости от подъема α нет. Запишем инвариант как $q(\alpha, \Omega)$.

Верно следующее утверждение: существуют такие α и Ω, что $q(\alpha, \Omega) = 1$.

Следствия представляют интересные результаты для K3-поверхностей:

(1) Не существует диффеоморфизма, действующего тривиально на $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$, но обращающего ориентацию на положительной части $H^2(X, \mathbb{R})$. (То есть комплексная ориентация K3-поверхности определяет и ее спинорную ориентацию.)

(2) Существует односвязный пятимерный h-кобордизм K3-поверхности, не являющийся прямым произведением.

(3) Не существует разложения в связную сумму $X = Y \# (S^2 \times S^2)$.

Теперь обратимся к более общей ситуации.

Пусть теперь $E \to X$ – расслоение со структурной группой $\mathrm{SU}(2)$. Инварианты будут представляться в виде пересечений $\langle \beta, [\mathscr{M}_k]\rangle$, где β – результат пересечений классов вида $\mu(\sigma)$, а $[\mathscr{M}_k]$ – фундаментальный класс многообразия модулей инстантонов. Так как классы $\mu(\sigma)$ двумерны, необходимо потребовать, чтобы виртуальная размерность $\mathscr{M}_k$ была четна: $\dim \mathscr{M}_k = 2d$,

$$d = d(k) = 4k - \frac{3}{2}(b^+(X) + 1) \in \mathbb{Z}. \tag{3.30}$$

Как и выше, потребуем $b^+ > 1$ и добавим, исходя из (3.30), условие нечетности.

Пусть $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d]$ – классы в $H_2(X, \mathbb{Z})$, тогда $\mu(\Sigma_i)$ – поднятия их в $H^2(\mathscr{B}^*, \mathbb{Z})$. Их произведение имеет степень $2d$, поэтому можно определить целое число

$$q = \langle \mu(\Sigma_1) \smile \dots \smile \mu(\Sigma_d), [\mathscr{M}_k]\rangle. \tag{3.31}$$

Ориентация $\mathscr{M}_k$ зависит от ориентации Ω пространства $H^+(X)$, поэтому мы должны обозначать инварианты как $q_{k,\Omega}$. Тогда запишем свойства инвариантов:

(1) $q_{k,\Omega}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d)$ зависят от аргументов только как от классов гомологий;
(2) $q_{k,\Omega}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d)$ полилинейны и симметричны по $[\Sigma_i]$;
(3) $q_{k,\Omega} = -q_{k,-\Omega}$;
(4) если $f\colon X \to Y$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, тогда

$$q_{k,f^*\Omega}(f(\Sigma_1), \dots, f(\Sigma_d)) = q_{k,\Omega}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d). \tag{3.32}$$

Такие инварианты строятся для достаточно больших k. Точное условие на величину k следующее:

$$d(k) \geqslant 2k + 1, \tag{3.33}$$

или, то же самое, $k \geqslant \frac{1}{4}(3b^+(X) + 5)$. Это ограничение объясняется просто: виртуальная размерность многообразия модулей инстантонов превышает размерность наименьшего страта $\mathscr{M}_0 \times S^k(X)$ компактификации $\overline{\mathscr{M}_k}$ по меньшей мере на два, а это означает, что $\overline{\mathscr{M}_k}$ в общем случае гладкое многообразие, за исключением множества коразмерности два или более, что и обычно для особенностей комплекса, обладающего фундаментальным классом.

С помощью этих новых инвариантов возможно доказывать старые гипотезы, передоказывать старые теоремы и получать новые. Например, Дональдсон доказал с их помощью следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть X – односвязное 4-многообразие с нечетным $b^+(X)$, и предположим, что X раскладывается в связную сумму $X = X_1 \# X_2$, причем $b^+(X_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathrm{SU}(2)$-инварианты q_k и $\mathrm{SO}(3)$-инварианты $q_{k,\alpha}$ (для любых k и $\alpha \neq 0$) тождественно равны нулю.*

Этот результат не имел бы смысла, если бы инварианты Дональдсона были тривиальны почти всегда. Но для алгебраических и симплектических многообразий они нетривиальны, поэтому использование теории Дональдсона в современной математике приводит к возрождению интереса к алгебраической геометрии: все топомодели алгебраических поверхностей (кроме элементарных) допускают вышеописанное разложение, а значит, топомодели не диффеоморфны подлежащим 4-многообразиям алгебраических поверхностей.

С другой стороны, исследование гладкостей подчеркивает близость комплексных и симплектических структур, и Дональдсон далеко продвинулся в описании этой "близости" (см. [4], [5]).

Столь принципиальное отличие дифференциальной топологии от топологии в четырехмерном случае на некоторое время привело в замешательство и физиков. Причем это коснулось двух диаметрально противоположных областей: традиционно элитарной квантовой гравитации (инициированной Тулио Редже) и сугубо практических вычислений на решетках с использованием метода Монте-Карло (см., например, [1]). Все дело в том, что комбинаторные конструкции такие, как, например, метод динамической триангуляции, используют PL-топологию 4-многообразий. А, как известно, PL-структуры и гладкости в четырехмерной геометрии совпадают. От этого временного замешательства выиграли математики: они немедленно применили хорошо известные статистические приемы к совокупности инвариантов $q_{k,\Omega}$ (3.31). Идея проста: собрать все инварианты вместе в "статсумму"

$$q_\Omega = \sum_0^\infty \frac{q_{k,\Omega}}{k!}\,. \tag{3.34}$$

Подобно тому, как в теории динамических триангуляций аналитика статсумм приводит к нахождению и локализации критических точек, аналитика функции (3.34) привела Кронхеймера и Мровку к замечательному наблюдению: при естественных условиях на 4-многообразие X (так называемая "простота типа" подлежащего многообразия) существует конечное множество классов когомологий

$$\{k_1, \ldots, k_N\}_{KM} \subset H^2(X, \mathbb{Z}) \tag{3.35}$$

таких, что каждый полином Дональдсона содержится в рациональной оболочке

$$q_{k,\Omega} \in \mathbb{Q}[q_X, k_1, \ldots, k_N] \tag{3.36}$$

(здесь форма пересечений q_X рассматривается как квадратичная форма на решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$, а классы k_i – как линейные формы). А вся статсумма имеет очень простой вид

$$q_\Omega = \exp\left(\frac{q_X}{2}\right) \sum_{i=1}^N n_i \exp(k_i). \tag{3.37}$$

Эти классы были названы фундаментальными классами, и читатель-физик без сомнения заметит, что они являются аналогами фаз сильного, слабого взаимодействий и "полимеризации" для асимптотик динамических триангуляций.

Эти классы действительно фундаментальны и играют роль канонического класса алгебраической поверхности для гладкого случая. В частности, как линейный член они входят в формулу присоединения для оценки рода реализации класса 2-гомологий гладкой римановой поверхностью (см. ниже).

Здесь мы отметим пока только одно их свойство: множество (3.35) инвариантно относительно обращения знака, т.е. если класс k_i фундаментальный, то и класс

$-k_i = k_{-i}$ тоже фундаментальный. Более того, константа $n_{-i} = (-1)^{\frac{b^+ +1}{2}}$. Поэтому, рассматривая формальные переменные $t_i = \exp(k_i)$ и убирая из статсуммы (3.37) топологический множитель $\exp(q_X/2)$, мы получаем полином Лорана

$$KM_X = n_0 + \sum n_i \bigl(t_i + (-1)^{\frac{b^+ +1}{2}} t_i^{-1}\bigr), \tag{3.38}$$

который (как мы увидим ниже) не случайно напоминает полином Александера линка в S^3.

В частности, если переменная только одна, то KM_X является А-полиномом: $n_0 + \sum_{i=1}^N n_i(t^i + t^{-i})$ и $n_0 + \sum_{i=1}^N n_i = \pm 1$. Напомним, что любой такой полином является полиномом Александера узла в S^3. Мы обсудим эти "совпадения" в § 6 этого обзора.

Наконец, заметим, что конфигурация теории Янга–Миллса (как классической теории поля) слишком проста, несмотря на блестящие физические приложения (отмеченные двумя нобелевскими премиями). Выбор более сложных конфигураций приводит к следующему этапу – теории Зайберга–Виттена.

§ 4. Инварианты Зайберга–Виттена

4.1. Алгебры Клиффорда. Для произвольного n-мерного вещественного векторного пространства V с невырожденной квадратичной формой q алгеброй Клиффорда $C(V,q)$ называется фактор тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу, содержащему элементы вида $v \otimes v - q(v) \cdot 1$. Универсальность алгебры $C(V,q)$ заключается в том, что если существует какое-либо линейное отображение пространства V в некоторую алгебру K, причем форма при этом сохраняется (т.е. образ любого вектора, возведенный в квадрат, должен быть равен значению формы на этом векторе, умноженному на единицу алгебры), то это отображение пропускается через каноническое вложение пространства V в алгебру Клиффорда $C(V,q)$.

Очевидно, что если выбрать базис в V, например, канонический для формы q, тогда алгебра Клиффорда задается соотношениями

$$\begin{gathered} e_j^2 = -1, \\ e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Базисом алгебры как вещественного векторного пространства будут мономы вида

$$\begin{gathered} e_I = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}, \\ \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

причем наборы строго упорядочены. Число k обычно называется степенью монома.

Очевидно, размерность алгебры равна 2^n, и имеется $\mathbb{Z}_2$-градуировка, отвечающая разложению на мономы четной и нечетной степени C^+ и C^-, причем C^+ – подалгебра в алгебре Клиффорда.

В случае четного n в центре алгебры лежат только константы. В нечетном случае добавляются элементы максимальной степени.

Алгебра Клиффорда допускает подъем скалярного произведения, определяемого формой q, а именно, если элементы алгебры x и y имеют в каноническом базисе координаты x_I и y_I соответственно, тогда произведение представляется естественно как

$$(x,y)=\sum_I x_I\cdot y_I.$$

Кроме того, существует еще и естественная инволюция $C(V)\to C(V)$, определяемая по формуле

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\sum_I \varepsilon_I\cdot x_I\cdot e_I,\\ \varepsilon_I&=(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)},\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $|I|=k$, причем нетрудно показать, что $\overline{x\cdot y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$. Несмотря на определение в терминах некоторого базиса, ни внешнее произведение, ни инволюция от выбора базиса не зависят. Они связаны следующим соотношением:

$$(\overline{x}\cdot y)_0=(x,y).\tag{4.4}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $e_I^2=\varepsilon_I$.

Вообще классификация алгебр Клиффорда достаточно проста. Рассмотрим сначала несколько примеров. Мы будем обозначать парой нижних индексов сигнатуру формы. Тогда для вещественного случая имеем:

(1) $C(\mathbb{R},q_{0,1})=\mathbb{C}$, а если сигнатура формы имеет обратный знак, то

$$C(\mathbb{R},q_{1,0})=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R};\tag{4.5}$$

(2) $C(\mathbb{R}^2,q_{0,2})=\mathbb{H}$, так как порождается элементами e_1,e_2 и $e_1\cdot e_2$, умножающимися по тем же правилам, что и i,j,k; в двух других случаях $C(\mathbb{R}^2,q)$ есть просто алгебра матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;

(3) известны рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}C(\mathbb{R}^2,q_{1,1})\otimes C(\mathbb{R}^{l+m},q_{l,m})&=C(\mathbb{R}^{l+m+2},q_{l+1,m+1}),\\ C(\mathbb{R}^2,q_{2,0})\otimes C(\mathbb{R}^{l+m},q_{l,m})&=C(\mathbb{R}^{l+m+2},q_{m+2,l}),\\ C(\mathbb{R}^2,q_{0,2})\otimes C(\mathbb{R}^{l+m},q_{l,m})&=C(\mathbb{R}^{l+m+2},q_{m,l+2}),\end{aligned}\tag{4.6}$$

которые несложно вывести, рассматривая все в канонических базисах.

Из соотношений (4.6) следует, что любая алгебра Клиффорда для квадратичной формы максимального ранга является либо матричной алгеброй над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, либо прямой суммой двух одинаковых матричных алгебр.

В случае комплексного векторного пространства классификация еще более простая – если размерность пространства четна, тогда алгебра Клиффорда изоморфна матричной алгебре $\mathrm{Mat}_{2^{\frac{1}{2}\dim V}}(\mathbb{C})$, в нечетном случае – прямой сумме двух таких алгебр.

Элемент алгебры Клиффорда $x\in C(V)$ называется единицей, если существует обратный ему x^{-1}.

Обозначим через $\mathrm{Spin}(V)$ множество элементов алгебры, удовлетворяющих соотношениям

$$\overline{x}\cdot x = 1, \qquad x\cdot V\cdot \overline{x} = V, \qquad x\in C^{+}(V). \tag{4.7}$$

Если размерность V четна, то третье условие является следствием первых двух.

Эта конструкция позволяет построить двулистное нетривиальное накрытие группы $\mathrm{SO}(n)$. Если $\dim V$ больше двух, тогда группа $\mathrm{Spin}(V)$ компактна и односвязна, и гомоморфизм $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ задается присоединенным действием $x \in \mathrm{Spin}(V)$ на V, а именно,

$$\mathrm{Ad}(x)(v) = x\cdot v\cdot \overline{x}. \tag{4.8}$$

Доказательство этого факта основывается на рассмотрении алгебр Ли обеих групп, причем

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V)) = C_2(V), \tag{4.9}$$

где $C_2(V)$ – подмножество элементов алгебры Клиффорда, имеющих вторую степень. Гомоморфизм $\mathrm{ad}\colon C_2 \to \mathfrak{so}(V)$, задаваемый, как обычно, в виде

$$\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v], \tag{4.10}$$

инъективен, а значит, по соображениям размерностей, и биективен. Так как специальная ортогональная группа компактна и связна, то гомоморфизм Ad сюръективен. Ядро его состоит из таких элементов, которые коммутируют с векторами $v \in V$, то есть в точности из ± 1. Значит, это двулистное накрытие. Два элемента из ядра $+1$ и -1 могут быть связаны путем $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathrm{Spin}(V)$, задаваемым формулой

$$\gamma(t) = \cos(t) + \sin(t)\cdot e_1\cdot e_2. \tag{4.11}$$

Отсюда следует связность группы, и из того, что получается нетривиальное двулистное накрытие, следует, что $\mathrm{Spin}(V)$ компактна и односвязна. Последнее, кстати, также очевидно следует из того, что $\mathrm{Spin}(V)$ содержится в единичной сфере алгебры Клиффорда.

Перейдем к рассмотрению комплексификации алгебр Клиффорда.

Обозначим через $C^{\mathbb{C}}(V) = C(V)\otimes\mathbb{C}$ такую комплексификацию. Базис $\{e_I\}$ так и останется базисом, а координаты станут комплексными. Инволюция в этом случае запишется в виде

$$\overline{x} = \sum_I \varepsilon_I\cdot \overline{x_I}\cdot e_I, \tag{4.12}$$

как и выше, $\overline{x\cdot y} = \overline{y}\cdot\overline{x}$, и имеется эрмитова форма

$$\langle x, y\rangle = (\overline{x}\cdot y)_0 = \sum_I \overline{x_I}\cdot y_I. \tag{4.13}$$

Так же, как и в вещественном случае, группа $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ определяется как множество элементов алгебры $x \in C^{+}(V)\otimes\mathbb{C}$ таких, что $\overline{x}\cdot x = 1$ и $x\cdot V\cdot\overline{x} = V$. Алгебра Ли такой группы представляется в виде прямой суммы $C_2(V)\oplus i\mathbb{R}$, и группа может быть записана в виде

$$\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) = \{e^{i\theta}\cdot x \mid \theta\in\mathbb{R},\ x\in\mathrm{Spin}(V)\}. \tag{4.14}$$

Следовательно, мы можем отождествить $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) = \mathrm{Spin}(V) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$, где действие группы $\mathbb{Z}_2$, очевидно, диагональное. Такое отождествление дает точную последовательность

$$1 \to S^1 \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{SO}(V) \to 1, \tag{4.15}$$

где вторая стрелка – очевидное вложение окружности в $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$, а третья – отображение $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{SO}(V)$, строящееся так же, как и в вещественном случае.

Имеется и другая точная последовательность

$$1 \to \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to S^1 \to 1, \tag{4.16}$$

в которой третья стрелка есть отображение $\delta\colon \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to S^1$, задаваемое формулой $\delta(e^{i\theta} \cdot x) = e^{2i\theta}$.

4.2. Спинорные расслоения. Если размерность $\dim V = 2n$ четна, тогда комплексификация алгебры Клиффорда представляется как алгебра эндоморфизмов 2^n-мерного комплексного эрмитова пространства W. Более точно, такое отождествление есть изоморфизм алгебр $\Gamma\colon C^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{End}\, W$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} \Gamma(x+y) &= \Gamma(x) + \Gamma(y), \\ \Gamma(x \cdot y) &= \Gamma(x) \cdot \Gamma(y), \\ \Gamma(\overline{x}) &= \Gamma(x)^* \end{aligned} \tag{4.17}$$

для любых $x, y \in C^{\mathbb{C}}(V)$. В частности, если мы рассмотрим ограничение этого изоморфизма на естественно вложенное в алгебру само векторное пространство V, то для любого вектора $v \in V$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \Gamma(v)^* + \Gamma(v) &= 0, \\ \Gamma(v)^* \cdot \Gamma(v) &= |v|^2 \cdot 1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Свойства этого изоморфизма определяют его универсальность вместе с универсальностью самой алгебры. А именно, если W' – комплексное эрмитово пространство размерности 2^n и Γ – линейное отображение $\Gamma\colon V \to \mathrm{End}\, W'$, удовлетворяющее (4.18), тогда Γ естественно продолжается до изоморфизма $\Gamma\colon C^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{End}\, W'$, обладающего свойствами (4.17).

Приведем два примера.

Как мы видели в предыдущем разделе, алгебра Клиффорда пространства $\mathbb{R}^2$ может быть отождествлена с кватернионами, при этом $i = e_1, j = e_2, k = e_1 \cdot e_2$, а инволюция задается обычным сопряжением.

Тогда линейное отображение $\gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ задается формулой

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Недолго проверить, что комплексификация отображения $\gamma^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ является изоморфизмом алгебр, удовлетворяющим (4.17).

Теперь рассмотрим отображение

$$\Gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{4\times 4}, \tag{4.20}$$

задаваемое матрицей

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(x) \\ -\gamma(x)^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое отображение удовлетворяет условиям (4.18), поэтому может быть продолжено до изоморфизма $\Gamma\colon C^{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \to \mathbb{C}^{4\times 4}$ алгебр.

Последняя формула показывает, что в четырехмерном случае представление допускает разложение $W = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, сохраняющееся при действии четных элементов алгебры Клиффорда.

Выбрав базис, мы одновременно фиксируем ориентацию пространства V, и обозначим через

$$\varepsilon = e_{2n} \cdot \ldots \cdot e_1 \in C(V) \tag{4.21}$$

единичный элемент степени $2n$, получаемый из положительно ориентированного базиса. Тогда $\varepsilon^2 = (-1)^n$ и, следовательно, существует разложение $W = W^+ \oplus W^-$, задаваемое условием

$$W^{\pm} = \{x \in W \mid \Gamma(\varepsilon)x = \pm i^n x\}. \tag{4.22}$$

Заметим, что при смене ориентации пространства слагаемые W^+ и W^- просто меняются местами. Несло чрезвычайно стеснительные ограничения на конфигурацию полей. Необходимость забраковать большинство теорий была названа эффектом “московского нуля”, и Ландау даже предложил устроить торжественные похороны лагранжиана. Однако “бедность не порок”, и даже бедные конфигурации приводят к блестящему развитию теории (см., например, [25]). А для полного описания конфигураций для $\mathbb{CP}^2$ и связи с исключительными расслоениями см. [12]. Будут ли полезны “не квантующиеся” классические теории для математиков – вопрос открытый, но при их исследовании математики не могут рассчитывать на помощь физиков.

4.4. Инварианты Зайберга–Виттена. Итак, как уже было сказано выше, Зайберг и Виттен рассматривают случай, когда многообразие модулей монополей имеет нулевую размерность, т.е. состоит просто из точек. Чтобы составить альтернированную сумму, необходимо убедиться в конечности множества решений уравнения монополя (в этом разделе мы будем иметь дело только с А-монополями и будем сокращать обозначения) в этом случае.

Конечность множества решений следует из компактности $\mathscr{M}_c$. Для доказательства компактности необходимо воспользоваться формулой Вейценбока

$$D_a^* D_a(\Phi) = \nabla_a^* \nabla_a \Phi + \frac{1}{4} R\Phi - \frac{1}{2} F_a^+(\Phi), \tag{4.46}$$

где Φ – произвольный спинор правой киральности, а R – скалярная кривизна многообразия X. Тогда для решения уравнения монополя справедливо утверждение

$$|\Phi|^2 \leqslant \max(0, -R), \tag{4.47}$$

причем квадрат модуля спинора берется в той точке многообразия, где он максимален.

Выкладки достаточно просты: в точке, где $|\Phi|^2$ максимален, вычисляем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Delta|\Phi|^2 &= 2\langle \nabla_a^* \nabla_a \Phi, \Phi\rangle + 2\langle \nabla_a \Phi, \nabla_a \Phi\rangle \leqslant 2\langle \nabla_a^* \nabla_a \Phi, \Phi\rangle \\ &= -\frac{1}{4} S|\Phi|^2 + \langle i(\Phi \otimes \overline{\Phi})_0 \Phi, \Phi\rangle = -\frac{1}{2} S|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4. \end{aligned} \tag{4.48}$$

И если в точке своего максимума $|\Phi|^2$ отличен от нуля, то после очевидного деления получаем условие (4.47).

Это условие дает общую C^0-ограниченность спинорной части любого решения, из чего путем стандартного рассуждения получается компактность многообразия модулей монополей. Кроме того, это условие показывает, что нетривиальных решений уравнения монополя нет на многообразиях, допускающих положительную скалярную кривизну. А тривиальных нет, потому что нет абелевых инстантонов – в случае общей метрики.

Некомпактность многообразия модулей инстантонов возникала из-за того, что предельными связностями выступали идеальные связности (см. раздел 3.1 настоящего обзора). Они, в свою очередь, возникали изначально на $\mathbb{R}^4$, как результаты сжатия инстантонов. Но так как $\mathbb{R}^4$ – конформно плоское пространство, скалярная кривизна которого равна нулю, то монополей на этом пространстве не существует. И поэтому не существует “сжатых” монополей, могущих нарушать компактность $\mathscr{M}_c$.

Вернемся к определению инвариантов. Как уже было указано, в случае равенства нулю индекса оператора $T = T(c)$ многообразие модулей монополей нульмерно, т.е.

состоит из некоторого множества точек конфигурационного пространства, причем конечного множества – это следует из компактности $\mathscr{M}_c$. Каждой такой точке можно сопоставить знак $\varepsilon_{i,c} = \pm 1$ в зависимости от знака детерминанта T. Составим альтернированную сумму:

$$N(c) = \sum_i \varepsilon_{i,c}, \tag{4.49}$$

которая при естественных условиях трансверсальности и будет инвариантом подлежащего многообразия.

Для того чтобы выяснить, определен ли знак детерминанта T, достаточно опять деформировать этот оператор в прямую сумму операторов Дирака и $d + d^*$. Первый из них имеет естественную ориентацию – как комплексный оператор, рассматриваемый как вещественный. Второй не зависит от связности и спинора (т.е. от точки конфигурационного пространства), и его детерминантное расслоение тривиализуется раз и навсегда выбором ориентации на $H^1(X, \mathbb{R}) \oplus H^+(X, \mathbb{R})$. Заметим, что такой же выбор был необходим для ориентации и в теории Дональдсона.

Вообще, число решений системы уравнений с учетом знака детерминанта оператора, похожего на T, является топологическим инвариантом, если может быть установлена подходящая компактность, т.е., в нашем случае, если калибровочно инвариантная система уравнений имеет решения, обладающие компактностью и свободой действия на них калибровочной группы. О компактности уже было сказано выше, а свобода следует из того, что нет тривиальных решений, так как нет абелевых инстантонов.

Действительно, абелевых инстантонов в случае неопределенной формы и общей метрики нет по следующей причине. Так как $F/(2\pi)$ представляет первый класс Черна расслоения L в когомологиях, то это целочисленный класс. Если $F^+ = 0$, то $F/(2\pi)$ лежит в пересечении целочисленной решетки в $H^2(X, \mathbb{R})$ и подпространства антиавтодуальных гармонических классов $H^-(X, \mathbb{R})$. Это подпространство не пусто, так как мы предполагаем $b_2^+ \geqslant 1$. При изменении метрики это подпространство вращается вокруг нуля, и в случае общей метрики такое пересечение состоит только из нуля (теория вещественных периодов римановых метрик).

Следовательно, для общей метрики абелевых инстантонов нет и инвариант n_c вполне определен. Исключение составляет случай, когда $c = 0$ и существует тривиальный абелев инстантон. Для определения инварианта n_0 необходимо деформировать уравнение монополя, возмутив с помощью автодуальной формы уравнение на кривизну

$$F_a^+ = i(\Phi \otimes \overline{\Phi})_0 - \eta. \tag{4.50}$$

Этим возмущением мы достигаем свободы действия калибровочной группы на пространстве решений, а дальше действуем как и прежде – находим число точек, считаем альтернированную сумму и получаем n_0. Это число не будет зависеть от непрерывной деформации формы $\eta \neq 0$, и если предположить $b_2^+ > 1$, то из-за связности пространства всех возможных η получаем целочисленный топологический инвариант. Как уже обсуждалось в разделе 4.3, это дает инвариант гладкой структуры подлежащего многообразия.

Необходимо отметить, что инварианты $N(c)$ не равны нулю только для достаточного малого подмножества классов когомологий, которые принято называть базисными классами теории Зайберга–Виттена. Множество этих классов (очевидно инвариантное относительно смены знака)

$$\{\pm\beta_1, \dots, \pm\beta_N\}_{SW} \subset H^2_{\mathrm{spin}}(X, \mathbb{Z}) \tag{4.51}$$

во всем множестве $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур (опять же по модулю тривиальности 2-кручения) определяет полином Лорана

$$SW_X = n_0 + \sum_{i=1}^{N} n(\beta_i)\bigl(t_i + (-1)^{\frac{b^+ + 1}{2}} t_i^{-1}\bigr), \tag{4.52}$$

где, в точности как в (3.38), переменная $t_i = \exp(\beta_i)$ с формальным правилом $t_{\alpha+\beta} = t_\alpha t_\beta$.

Подрешетка $L_{SW} \subset H^2(X, \mathbb{Z})$, натянутая на базисные классы, инвариантна относительно группы $\mathrm{Diff}^+(X)$. Это – аналог решетки Пикара алгебраической поверхности (по меньшей мере – по своей важности). Однако нетривиальность ее мы можем гарантировать также для келеровых и симплектических многообразий (и “близких” к ним – см. § 6).

Приведем краткую схему отыскания базисных классов в этих случаях. Заметим, что условие интегрируемости почти комплексной структуры нигде не требуется, поэтому случаи почти не различаются: наличие почти комплексной структуры I равносильно существованию пары спинорного расслоения W^+ с $c_2(W^+) = 0$, более того, допускающего разложение $W^+ = \mathcal{O} \oplus K^{-1}$. То есть спинорное расслоение с точностью до линейной подкрутки – выбора $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры – раскладывается в прямую сумму

$$W^+ \otimes L = L \oplus (K^{-1} \otimes L), \tag{4.53}$$

где K – каноническое расслоение.

Обозначим компоненты разложения спинора Φ в первом слагаемом α, а во втором $-i\overline{\beta}$. Второе уравнение монополя раскладывается в систему

$$\begin{aligned} F^{2,0} &= \alpha\beta, \\ F^{1,1}_\omega &= -\frac{1}{2}\omega(|\alpha|^2 - |\beta|^2), \\ F^{0,2} &= \overline{\alpha}\overline{\beta}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

где ω – келерова форма. Из соображений симметрии функционала действия в этом случае следует, что если рассмотреть операцию

$$a \mapsto a, \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad \beta \mapsto -\beta, \tag{4.55}$$

то решения уравнения переходят в решения. Из этого следует, что для такого рода решений

$$0 = F^{2,0} = F^{0,2} = \alpha\beta. \tag{4.56}$$

Равенство нулю $F^{0,2}$ в точности означает, что связность a задает на L голоморфную структуру. И базисные классы (определяемые условием, что (4.54) имеет решения) имеют ходжев тип $(1,1)$ для любой келеровой структуры на X.

Способ различить, какое из сечений – α или β – обращается в нуль, достаточно прост: проинтегрируем $(1,1)$-часть уравнений (4.54) и получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_X \omega\wedge F = -\frac{1}{4\pi}\int_X \omega\wedge\omega\cdot(|\alpha|^2-|\beta|^2).$$

Слева стоит топологический инвариант, а именно $J=[\omega]c_1(L)$, равенство которого нулю означает существование нетривиальных абелевых инстантонов. По нашему соглашению мы рассматриваем только те метрики, для которых таковых нет. Тогда если $J<0$, то $\alpha\neq 0, \beta=0$, и наоборот.

Если $J<0$, то многообразие модулей монополей естественно отождествить с парами, состоящими из комплексной структуры на L и ненулевого голоморфного сечения расслоения L, с точностью до умножения. В случае $J>0$ вместо этого расслоения надо рассмотреть $K^{-1}\otimes L$.

В нашем односвязном случае комплексная структура на L (если она существует) единственна и многообразие модулей решений есть просто комплексное проективное пространство $\mathbb{P}H^0(X,K^{-1}\otimes L)$ или $\mathbb{P}H^0(X,L)$, в зависимости от знака J.

Заметим, что эти проективные пространства часто имеют размерность $\frac{b^++1}{2}$, большую, чем виртуальная размерность многообразия модулей монополей. Это следствие того, что келерова метрика далеко не общая, а келерова геометрия не "трансверсальна" (см. [23]).

Чтобы преодолеть этот эффект, необходимо возмутить уравнение монополя, как это было сделано в (4.50). Для келерова многообразия условие $b_2^+>1$ эквивалентно тому, что $H^{2,0}\neq 0$, поэтому мы можем выбрать возмущение в виде ненулевой голоморфной 2-формы η. Тогда возмущенное уравнение монополя раскладывается в систему

$$\begin{aligned} F^{2,0} &= \alpha\beta-\eta,\\ F^{1,1}_{\omega} &= -\omega(|\alpha|^2-|\beta|^2),\\ F^{0,2} &= \overline{\alpha}\overline{\beta}-\overline{\eta}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

а часть с оператором Дирака остается той же, что и выше. При этом естественно ограничиться случаем, когда первый класс Черна L имеет тип $(1,1)$, иначе невозмущенное многообразие модулей пусто.

Как и ранее, преобразование

$$a\mapsto a,\quad \alpha\mapsto\alpha,\quad \beta\mapsto\beta,\quad \eta\mapsto-\eta \tag{4.58}$$

не является автоморфизмом уравнения монополя, но оставляет неизменным функционал действия, значит, решения под действием этого преобразования переходят в решения. Поэтому

$$0=F^{0,2}=F^{2,0}=\alpha\beta-\eta, \tag{4.59}$$

и опять условие $0=F^{0,2}$ означает, что связность определяет на L голоморфную структуру.

И теперь мы можем видоизменить определение базисных классов:

1) это классы вида $x=-c_1(L)$, которые
2) для любого выбора $\eta\in H^0(X,K)$ допускают разложение $\eta=\alpha\cdot\beta$, где α,β – сечения расслоений L и $K^{-1}\otimes L$ соответственно, причем
3) $x^2=K^2$.

Для более явного описания определим класс η как сумму неприводимых компонент C_i с кратностями r_i. Тогда

$$c_1(K) = \sum_i r_i[C_i] \tag{4.60}$$

и существование разложения $\eta = \alpha\beta$ означает, что

$$c_1(L) = \sum_i s_i[C_i], \tag{4.61}$$

где кратности s_i удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant s_i \leqslant r_i$. Первый класс Черна расслоения L, следовательно, равен

$$c_1(L) = \sum_i \left(s_i - \frac{1}{2}r_i\right)[C_i], \tag{4.62}$$

и базисные классы по условию 1) имеют вид

$$x = -\sum_i (s_i - r_i)[C_i]. \tag{4.63}$$

Последнее условие ($x^2 = K^2$) нуждается в рассмотрении в каждом конкретном случае. Например, для эллиптической поверхности $C_iC_j = 0$ для любых i и j, поэтому это условие выполняется автоматически:

$$x^2 = K^2 = 0.$$

Теперь вернемся к вопросу о знаке вклада точечного решения уравнения монополя, т.е. к вопросу об ориентации.

Рассмотрим обратимое линейное отображение $T\colon E \to F$ двух вещественных равноразмерных четномерных пространств, снабженных комплексными структурами. Если T сохраняет комплексную структуру, то $\det T > 0$, а если обращает, тогда знак детерминанта зависит от четности комплексной размерности E. А именно, $\operatorname{sign}(\det T) = (-1)^w$, где $w = \dim_{\mathbb{C}} E$. Пусть T сохраняет комплексную структуру, но не является обратимым, а оператор $T'\colon E \to F$, взаимно однозначно отображающий $\ker T$ на $\operatorname{coker} T$, будет обращающим ориентацию. Тогда для малого вещественного ε знак $\det(T \oplus \varepsilon T')$ совпадает с $(-1)^w$, где, как и выше, $w = \dim_{\mathbb{C}} \ker T$.

Расширим эти рассуждения на случай двух векторных расслоений U и V, эллиптического оператора T, действующего на сечениях $\Gamma(U) \to \Gamma(V)$, нулевого индекса и достаточно тонкой деформации T'. В этом случае $\det(T \oplus \varepsilon T')$ понимается как детерминант Рея–Зингера–Квиллена.

В нашем случае T – линеаризация невозмущенного уравнения монополя, а T' – коррекция, пропорциональная η.

Как в (4.40), оператор T действует на сечениях расслоения $U = \Omega^1 \oplus W^+$, причем второе слагаемое рассматривается как вещественное векторное расслоение с естественной комплексной структурой. Тогда и на первом нетрудно задать комплексную структуру, действующую на $\Omega^{1,0}$ и $\Omega^{0,1}$ умножением на $+i$ и $-i$ соответственно. Похожим образом и на $V = \Omega^0 \oplus \Omega^+ \oplus W^-$ задается комплексная структура, совпадающая с естественной на третьем слагаемом, действующая на $\Omega^{0,2}$ и $\Omega^{2,0}$ опять же умножением на $+i$ и $-i$ соответственно и меняющая местами остальные два слагаемые. Несложно видеть, что T сохраняет ориентацию, а T' обращает.

Пусть $J > 0$, тогда $\beta = 0$ при $\eta = 0$ и вклад решения, соответствующего разложению $\eta = \alpha \cdot \beta$, равен $(-1)^w$, где $w = \dim_{\mathbb{C}} \ker T$. Опишем этот вклад алгебро-геометрически: рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{\alpha} L \longrightarrow \mathscr{O}_C(D) \longrightarrow 0, \tag{4.64}$$

где $L = \mathscr{O}(D)$, а C – кривая нулей вложения α. Ядро оператора T имеет ту же размерность, что и $H^0(X, \mathscr{O}_C(D))$, поэтому вклад в точности совпадает с размерностью полного линейного ряда соответствующего дивизора $|D|$ (или $D - K$ в случае $J < 0$).

Прямым следствием этого (и формул (4.60)–(4.63)) является следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть X – односвязная алгебраическая поверхность, каноническая система которой содержит неприводимый эффективный дивизор D. Тогда*

(i)
$$SW_X = t + (-1)^{p_g(X)} t^{-1}, \tag{4.65}$$
где $t = \exp([D])$, а p_g – геометрический род поверхности;

(ii) *для* K3*-поверхности*
$$SW_{\mathrm{K3}} = 1; \tag{4.66}$$

(iii) *для поверхности $E(n)$ с эллиптическим пучком с сечением геометрического рода $n - 1$*
$$SW_{E(n)} = (t + (-1)^{n-1} t^{-1})^{n-2}. \tag{4.67}$$

Такие же рассуждения можно провести и в других частных случаях алгебраических поверхностей. Важный вывод:

Предложение 4.2. *Для алгебраической поверхности положительного геометрического рода*

(i) *канонический класс всегда является фундаментальным классом (и в частности $SW_X \neq 0$);*
(ii) *коэффициент* (4.52) $n_K = \pm 1$;
(iii) *полином Лорана является унимодулярным по t_K, т.е. его старший коэффициент равен ± 1.*

Эти утверждения справедливы и в большей общности.

Предложение 4.3 (Таубс). *Утверждения* (i)–(iii) *предложения* 4.2 *верны и для симплектического многообразия с $b^+ > 1$.*

Совсем немного нужно прибавить к нашим аргументам и конструкциям (4.54)–(4.56) и (4.59), чтобы получить полное доказательство этого факта (см., например, [17]).

С самого начала чувствовалась связь инвариантов Дональдсона с инвариантами Зайберга–Виттена. В частности, с помощью новых инвариантов можно доказать те же утверждения, что были доказаны Дональдсоном.

Например, факт о том, что инварианты связной суммы двух многообразий с положительными b_2^+ равны нулю, показывает и Виттен, но уже для инвариантов, возникающих из уравнения монополя.

Прямая связь инстантонов и монополей представлена бордизмом, доставляемым неабелевыми монополями (B-монополями), речь о которых пойдет в следующем параграфе.

§ 5. Неабелевы монополи

В этом параграфе мы определим неабелевы монополи (B-монополи). При определении конфигурационного пространства на сей раз будет полезно геометрическое описание $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур для четырехмерных многообразий.

5.1. Конфигурационное пространство. Рассмотрим гладкое компактное риманово 4-многообразие (X, g) и E – $\mathrm{U}(2)$-расслоение на M, т.е. $\mathbb{C}^2$-расслоение с фиксированной эрмитовой формой h и классами Черна c_1, c_2. Пусть $\mathscr{A}(E)$ – аффинное пространство эрмитовых связностей на E и $\mathscr{G}_E$ – группа калибровочных преобразований E_h, т.е. группа унитарных автоморфизмов E. Тогда разложение в ортогональную прямую сумму алгебр Ли определяет точную последовательность

$$1 \to \mathscr{G}_{\Lambda^2 E} \to \mathscr{G}_E \to \mathscr{G}_{\mathrm{ad}\, E} \to 1, \tag{5.1}$$

где $\Lambda^2 E$ – линейное расслоение с индуцированной эрмитовой формой. Поэтому мы имеем изоморфизмы аффинных пространств

$$\mathscr{A}(E) = \mathscr{A}(\mathrm{ad}\, E) \tag{5.2}$$

и пространств классов связностей по модулю действия калибровочной группы:

$$\mathscr{B}(E) = \mathscr{A}(E)/\mathscr{G}(E), \quad \mathscr{B}(\mathrm{ad}\, E) = \mathscr{A}(\mathrm{ad}\, E)/\mathscr{G}(\mathrm{ad}\, E), \quad \mathscr{B}(\Lambda^2 E) = \mathscr{A}(\Lambda^2 E)/\mathscr{G}(\Lambda^2 E), \tag{5.3}$$

которые превращаются в банаховы орбифолды после выбора индексов соболевских норм на пространствах и группах (см., например, гл. 1 в [15]). Те же пространства, но без приводимых связностей, дают главное $\mathscr{G}$-расслоение

$$\mathscr{A}(\mathrm{ad}\, E)^* \to \mathscr{B}(\mathrm{ad}\, E)^*. \tag{5.4}$$

Далее, каждое пространство связностей допускает $\mathscr{G}$-эквивариантное отображение $F\colon \mathscr{A}(E) \to \Omega^2(u(E))$, переводящее связность в ее форму кривизны.

Напомним, что для пространства $\mathscr{A}(L)$ всех $\mathrm{U}(1)$-связностей на линейном расслоении L “отображение моментов” F относительно группы $\mathscr{G}$:

$$F\colon \mathscr{A}(L) \to \Omega^2,$$

сопоставляющее связности a ее форму кривизны $F(a)$, расслаивается на орбиты калибровки над $H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ (см. [15]). Поэтому любая орбита связностей на L определяется с точностью до “якобиана” $H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ как 2-форма на M, а именно форма кривизны этих связностей, и класс когомологий $[\frac{1}{2\pi i}F(a)] = c_1(L)$.

В общем случае действие калибровочной группы $\mathscr{G}(E)$ на пространстве $\Omega^2(\operatorname{End} E)$ определяет векторное расслоение $\pi\colon \mathscr{H}^2 \to \mathscr{B}(E)^*$ со слоем $\Omega^2(\operatorname{ad} E)$ и отображение F – его сечение.

Как мы уже знаем, конформная структура на X, определенная выбором римановой метрики g, задает $*$-разложение $\Omega^2(\operatorname{ad} E) = \Omega^{2+}(\operatorname{ad} E) \oplus \Omega^{2-}(\operatorname{ad} E)$ и, следовательно, разложение векторных расслоений в прямую сумму $\mathscr{H}^2 = \mathscr{H}^{2+} \oplus \mathscr{H}^{2-}$ двух расслоений $\pi\pm\colon \mathscr{H}^{2\pm} \to \mathscr{B}(E)^*$ со слоем $\Omega^{2\pm}(\operatorname{ad} E)$ и разложение сечения F в сумму $F = F^+ + F^-$, где $F^\pm$ – сечения векторных расслоений $F^\pm\colon \mathscr{B}(E) \to \mathscr{H}^\pm$. Эти сечения уже имеют непустые множества нулей как подмногообразия $\mathscr{B}(E)$:

(1) $(F^+)_0 = \mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}$,
(2) $(F^-)_0 = \mathscr{M}^g_{\mathrm{sd}}$,

– многообразия модулей антиинстантонов и инстантонов, которые могут рассматриваться как конечномерные орбифолды виртуальных размерностей

$$\begin{aligned} \operatorname{vdim} \mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}} &= 8c_2(E) - 2c_1^2(E) - 3(b_2^+ + 1), \\ \operatorname{vdim} \mathscr{M}^g_{\mathrm{sd}} &= 8c_2(E) - 2c_1^2(E) - 3(b_2^- + 1). \end{aligned} \tag{5.5}$$

(Здесь мы просто расширили $\mathrm{SU}(2)$-случай § 2 на $\mathrm{U}(2)$-случай.)

Легко видеть, что $\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}$ зависит от $w_2(E) = c_1(E) \pmod 2$ и от неположительного числа $p_1(E) = c_1(E)^2 - 4c_2(E)$. Зависимость пространства модулей инстантонов от топологического типа расслоения E может быть отмечена параметрами $\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2, p_1)$ (соответственно $\mathscr{M}^g_{\mathrm{sd}}(w_2, p_1)$).

Напомним элементарные конструкции четырехмерной римановой геометрии.

В произвольной точке $p \in X$ на касательном пространстве $T_p = \mathbb{R}^4$ и его комплексификации $T^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^4$ определены изоморфизм $g^{\mathbb{C}}\colon T^{\mathbb{C}} \to (T^{\mathbb{C}})^*$ и комплексная квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}T_p^{\mathbb{C}}$, заданные метрикой g. Как всегда, такая невырожденная комплексная квадрика есть прямое произведение

$$Q_p = q_p^+ \times q_p^-, \quad q_p^\pm = \mathbb{CP}^1, \quad q_p^\pm = \mathbb{P}W_p^\pm \ (\cong \mathbb{CP}^1).$$

Поэтому для $p \in X$

$$T_p^{\mathbb{C}} = \operatorname{Hom}(W_p^-, W_p^+) = W_p^{-*} \otimes W_p^+. \tag{5.6}$$

Но квадратичная форма g_p вещественна и положительна, следовательно, она определяет новую вещественную структуру $J\colon W_p^\pm \to W_p^\pm$, $J^2 = -\operatorname{id}$, не имеющую вещественных векторов (кватернионное умножение), с точностью до одновременной гомотетии пространств $W^\pm$, т.е. эрмитову метрику и совместимую симплектическую структуру на $W_p^\pm$ с точностью до гомотетии. Поэтому

$$T_p = \operatorname{Hom}_J(W_p^-, W_p^+) \tag{5.7}$$

– пространство гомоморфизмов, сохраняющих вещественную структуру J.

Далее, над точкой $p \in M$ проективное пространство $\mathbb{P}_p^5 = \mathbb{P}\Lambda^2 T_p^{\mathbb{C}}$ содержит две квадрики: $\Lambda^2 g_p^{\mathbb{C}}$ и грассманиан G прямых $\mathbb{P}T_p^{\mathbb{C}}$ или квадрику Клейна. Обычно $\Lambda^2 g^{\mathbb{C}}$ рассматривается как отождествление $\Lambda^2 T^{\mathbb{C}} = \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*}$. Тогда G можно представлять как самосопряженный оператор

$$*\colon \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*} \to \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*}; \qquad *^2 = \operatorname{id}. \tag{5.8}$$

Это и есть $*$-оператор Ходжа с собственными подпространствами

$$\Lambda^2 T^{\mathbb{C}*} = \Lambda^+_{\mathbb{C}} \oplus \Lambda^-_{\mathbb{C}}, \quad \text{где} \quad *\big|_{\Lambda^\pm} = \pm\cdot\mathrm{id}, \tag{5.9}$$

задающий наше разложение.

Геометрически, пересечения $G\cap\mathbb{P}\Lambda^\pm_{\mathbb{C}} = q^\pm$ дают семейства образующих квадрики Q_p на грассманиане G.

Для однозначного определения эрмитовой структуры на $W^\pm$ мы должны фиксировать некоторую эрмитову структуру на $\Lambda^2 W^\pm$. Тогда эрмитова структура на $W^\pm$ определяет изоморфизмы

$$\overline{W^\pm_p} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^\pm_p, \mathbb{C}); \qquad \overline{W^\pm_p}\otimes W^\pm_p = \mathrm{End}\,W^\pm_p \tag{5.10}$$

и

$$\mathrm{ad}\,W^\pm_p = \Lambda^\pm_{\mathbb{C}p}.$$

Если $\pi_{\mathrm{ad}}\colon \mathrm{End}\,W^\pm_p \to \mathrm{ad}\,W^\pm_p$ – стандартная проекция, то мы имеем квадратичное отображение

$$\begin{gathered} \phi_\pm\colon W^\pm_p \to \Lambda^\pm_{\mathbb{C}p}, \\ \phi_\pm(\Phi_p) = \pi_{\mathrm{ad}}(\Phi\otimes\overline{\Phi}) \quad \text{для} \quad \Phi\in W^\pm_p. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Геометрически это означает, что если $\mathbb{P}\Phi_p \in \mathbb{P}W^\pm = q^\pm$, то $\mathbb{P}\phi_\pm(\Phi_p) \in \mathbb{P}\Lambda^\pm_{\mathbb{C}p}$ – просто точка пересечения касательных к конике $q^\pm$, взятых в точках $\mathbb{P}\Phi_p$ и $\overline{\mathbb{P}\Phi_p}$.

Далее, относительно вещественной структуры оператор $*$ вещественен и разложение на собственные подпространства вещественно тоже. Коники $q^\pm \in \mathbb{P}\Lambda^\pm_{\mathbb{C}p}$ не имеют вещественных точек, следовательно, отображения $\phi_\pm$ вещественны и $\Phi_p \neq 0 \implies \phi(\Phi_p) \neq 0$. Отображения $\phi_\pm$ (5.11) вещественны и $\mathrm{ad}_J\, W^\pm_p = \Lambda^\pm_p$, где J – вещественная структура.

Читатель уже заметил, что в этом параграфе, в отличие от предыдущих, мы обозначаем спиноры заглавными буквами. Мы вынуждены это делать потому, что мы будем их скручивать с векторными расслоениями. Мы можем рассмотреть спинор Φ_p как g_p-совместимую комплексную структуру на касательном пространстве $T_p = \mathbb{R}^4$, заданную как оператор

$$I_p\colon T^{\mathbb{C}}_p \to T^{\mathbb{C}}_p, \qquad I^2_p = -\,\mathrm{id}, \tag{5.12}$$

что эквивалентно разложению на собственные подпространства

$$T^{\mathbb{C}}_p = T^{0,1}\oplus T^{1,0}, \qquad I\big|_{T^{1,0}} = i\cdot\mathrm{id}, \quad I\big|_{T^{0,1}} = -i\cdot\mathrm{id},$$

где

$$T^{0,1} = (\mathbb{C}\cdot\Phi_p)\otimes\mathbb{C}, \qquad T^{1,0} = (\mathbb{C}\cdot\overline{\Phi_p})\otimes\mathbb{C}. \tag{5.13}$$

Проективизацией этих подпространств будет пара прямых на квадрике $Q_p \in \mathbb{P}T^{\mathbb{C}}_p$, которые дают пару точек $\mathbb{P}H^{2,0}$ и $\mathbb{P}H^{0,2}$ на конике q^+ в $\mathbb{P}\Lambda^+_{\mathbb{C}p}$, и пересечение касательных в этих точках к конике будет проективизацией симплектической формы ω_p ($=$ келерова форма). И локальная компонента Ходжа $\mathbb{P}H^{1,1} = \langle\omega, \Lambda^-_{\mathbb{C}p}\rangle$.

В этой интерпретации спиноров отображение ϕ сопоставляет комплексной структуре на T_p симплектическую форму соответствующей эрмитовой структуры, умноженной на некоторую вещественную функцию ψ.

Теперь все эти объекты и конструкции могут быть глобализованы над X: если $\pi_1(X) = 0$, то проективные прямые $q_p^{\pm}$ становятся слоями $\mathbb{P}^1$-расслоения $q^{\pm}$, а двумерные пространства $W_p^{\pm}$ в каждой $p \in M$ – слоями $\mathbb{C}^2$-расслоений $W^{\pm}$ – спинорных расслоений. Метрикой эти расслоения определены с точностью до подкрутки на линейное. Мы можем (так как $\pi_1 = 0$) определить подъем проективных расслоений до векторных, фиксируя первый класс Черна $c_1(W^{\pm})$ при условии $c_1(W^{\pm}) \equiv w_2(M) \pmod 2$, где $w_2(M)$ – второй класс Штиффеля–Уитни многообразия M. Как мы уже знаем, выбор $c_1(W^{\pm})$ называется выбором $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры. Комплексификация касательного расслоения представляется в виде

$$T^{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}(W^-, W^+) = W^{-*} \otimes W^+. \tag{5.14}$$

Метрика g определяет пару $\mathrm{SO}(3)$-связностей Леви-Чивита на паре расслоений $W^{\pm}$. Добавляя к ним любую $\mathrm{U}(1)$-связность $\nabla_{\det}$ на линейном расслоении $L = \Lambda^2 W^{\pm}$, мы получим $\mathrm{U}(2)$-связности на $W^{\pm}$. Одна из них определяет гомоморфизм $\Gamma(W^+) \to \Gamma(W^+ \otimes T^*_{\mathbb{C}})$ пространства сечений, а композиция

$$\Gamma(W^+) \to \Gamma(W^+ \otimes T^*_{\mathbb{C}}) \to \Gamma(W^-), \tag{5.15}$$

где последнее отображение определяется сверткой, как мы знаем, называется оператором Дирака (задаваемого связностью $\nabla_{\det}$ на $\Lambda^2 W^{\pm}$).

С другой стороны, локальное отображение (5.11) может быть глобализовано до квадратичного отображения векторных расслоений:

$$\phi_{\pm} \colon W^{\pm} \to \Lambda^{\pm}, \tag{5.16}$$

и задает отображения сечений:

$$\Gamma\phi_{\pm} \colon \Gamma(W^{\pm}) \to \Gamma(\Lambda^{\pm}). \tag{5.17}$$

Любая эрмитова связность $a \in \mathscr{A}(E)$ на E и оператор Дирака (5.15) задают скрученный оператор Дирака

$$D_a \colon \Gamma^{\infty}(E \otimes W^+) \to \Gamma^{\infty}(E \otimes W^-) \tag{5.18}$$

по обычному правилу Лейбница. Нетрудно видеть, что скрученный оператор Дирака зависит от бесследовой ad-компоненты a_0 связности a и индуцированной связности $\nabla_{\det}$ на линейном расслоении $L = \det(E \otimes W^{\pm}) = \Lambda^2 E \otimes \Lambda^2 W^{\pm}$. Таким образом,

$$\mathscr{A}(\mathrm{ad}\, E) \times \mathscr{A}(L) \tag{5.19}$$

является пространством параметров семейства операторов. Для превращения этого семейства и всех наших пространств в банаховы пространства без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы пространства связностей были L^p_k-пространствами, а калибровочные преобразования – преобразованиями класса L^p_{k+1}.

Семейство операторов (5.18) эквивариантно по действию калибровочной группы. Поэтому мы можем рассмотреть это семейство как гомоморфизм D векторных расслоений:

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= (\Gamma(E\otimes W^+)\times\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}(L))/\mathscr{G}_E\to\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}(L)/\mathscr{G}_E,\\ \Gamma^- &= (\Gamma(E\otimes W^-)\times\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}(L))/\mathscr{G}_E\to\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}(L)/\mathscr{G}_E\end{aligned}\tag{5.20}$$

над базой

$$\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}(L)/\mathscr{G}_E=\mathscr{B}(\operatorname{ad}E)\times\Omega^2.$$

Выберем форму $\omega\in\Omega^2$ и рассмотрим пространство

$$\mathscr{A}_\omega(L)=\{\nabla\in\mathscr{A}(L)|F(\nabla)=\omega\}.\tag{5.21}$$

Тогда

$$\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}_\omega/\mathscr{G}_E=\mathscr{B}(\operatorname{ad}E).\tag{5.22}$$

Рассмотрим ограничение векторного расслоения (5.20) на такое подпространство:

$$\Gamma^+=(\Gamma(E\otimes W^+)\times\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}_\omega)/\mathscr{G}_E\to\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)/\mathscr{G}_E.\tag{5.23}$$

Для тройки

$$(a_0,\nabla_{\mathrm{det}},\phi)\in\mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}_\omega\times\Gamma(E\otimes W^+)\tag{5.24}$$

мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}D_{a_0}^{\nabla_{\mathrm{det}}}(\Phi)&=0,\\ F_{a_0}^+&=-(\Phi\otimes\overline{\Phi})_{00},\end{aligned}\tag{5.25}$$

где $-(\Phi\otimes\overline{\Phi})_{00}$ – “двойная” бесследовая компонента $\operatorname{End}E\otimes\operatorname{End}W^+$.

Пространство решений этой системы по модулю действия калибровочной группы

$$\mathscr{M}_B(g,\omega,f,p_1),\quad\text{где}\quad f=c_1(E)+c_1(W^+)\in H^2(M,\mathbb{Z})\tag{5.26}$$

и p_1 – число Понтрягина, называется пространством модулей B-монополей. Это пространство модулей вложено в векторное расслоение

$$i\colon\mathscr{M}_B(g,\omega,f,p_1)\to\Gamma^+\tag{5.27}$$

и содержит в качестве тривиальной компоненты тройки типа $(a_0,\nabla_{\mathrm{det}},0)$, т.е. $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$, которое содержится в нулевом сечении векторного расслоения Γ^+.

Заметим, что уравнение B-монополя (5.25) – прямое обобщение уравнения A-монополя (4.37). Однако легко видеть, что уравнение (5.25) не имеет абелева аналога. Многообразие модулей B-монополей было использовано в [16] как пленка бордизма, связывающего многообразие модулей инстантонов с классами Зайберга–Виттена.

Далее, пусть

$$\mathscr{M}_B(g,\omega,f,p_1)^{ir}=\{(a_0,\nabla_{\mathrm{det}},\Phi)\mid\Phi\neq0\}\tag{5.28}$$

– подмножество нетривиальных решений, а $\overline{\mathscr{M}_B(g,\omega,f,p_1)^{ir}}$ – его замыкание в Γ^+.

Рассмотрим пересечение

$$\mathscr{M}_{\mathrm{lim}}=\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}\cap\overline{\mathscr{M}_B(g,\omega,f,p_1)^{ir}},$$

где $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ мы рассматриваем как подмножество нулевого сечения Γ^+.

Описание $\mathscr{M}_{\mathrm{lim}}$ просто, но не тривиально. Оно получается как следствие описания инфинитезимальной деформации решения уравнения неабелева монополя, к которому мы переходим в следующем разделе.

5.2. Инфинитезимальная теория деформации монополя вблизи инстантона. Так же, как и для инстантонов, принципиальный вопрос о существовании решений уравнения неабелева монополя может быть решен чисто теоретически при асимптотических условиях на топологические параметры. Практически же удобно воспользоваться существованием приводимых решений для построения решения уравнения неабелева монополя, выпускаемого из инстантона подскока (см. [4], [5]).

Исследование инфинитезимальной деформации уравнения неабелева монополя показывает, что пределами неабелевых монополей при стремлении спинорной части решения к нулю будут инстантоны $a \in \mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$, допускающие нетривиальное ядро скрученного оператора Дирака: $\ker D_a > 0$. В общем случае верно и обратное – из инстантона подскока можно выпустить по меньшей мере формальное решение уравнения неабелева инстантона.

Линеаризация системы (5.25) фредгольмова:

$$\begin{gathered} D_a \delta\Phi + \delta a * \Phi = 0, \\ d_a^+(\delta a) = -(\delta\Phi \otimes \overline{\Phi} + \Phi \otimes \overline{\delta\Phi}))_{00}, \end{gathered} \tag{5.29}$$

где $\delta a \in \Omega^1(\operatorname{End} E), \delta\Phi \in \Gamma(E \otimes W^+)$ – компоненты касательного вектора в точке (a, Φ), а $*$, как всегда, обозначает клиффордово умножение.

Таким образом, если мы начинаем с пары $(a, 0)$, то тогда мы получаем из первого уравнения $D_a \delta\Phi = 0$, т.е. $a \in \mathscr{M}_1(g, \omega, f, p_1)$ – инстантон подскока.

Рассмотрим однопараметрическое дифференцируемое семейство решений системы (5.25) (a_t, Φ_t), $t \in [0, \varepsilon]$, где

$$D_{a_t} \Phi_t = 0, \qquad F_{a_t}^+ = (\Phi_t \otimes \overline{\Phi_t})_{00}. \tag{5.30}$$

Разложение в ряд Тейлора этого семейства по параметру t дает нам

$$\Phi_t = \Phi_0 + \sum_i \Phi_i t^i, \qquad a_t = a + \sum_i \omega_i t^i, \tag{5.31}$$

где $\omega_i \in \Omega^1(\operatorname{End} E)$.

Для любой формы $\omega \in \Omega^1(\operatorname{End} E)$ мы имеем равенство

$$D_{a+\omega}\Phi = D_a \Phi + \omega * \Phi. \tag{5.32}$$

Следовательно, первое уравнение нашей системы дает следующее условие:

$$\sum_i D_a \Phi_i t^i + \sum_{i,j} \omega_i * \Phi_j t^{i+j} = 0. \tag{5.33}$$

Для разложения второго уравнения системы по t используем формулу

$$F_{a+\omega}^+ = F_a^+ + d_a^+(\omega) + (\omega \Lambda \omega)^+ \tag{5.34}$$

(см., например, [2; 2.1.14]). Тогда в качестве второго уравнения получаем

$$\sum_{i,j} \Phi_i \otimes \overline{\Phi_j} \cdot t^{i+j} = \sum_i d_a^+(\omega_i) t^i + \sum_{i,j} (\omega_i \Lambda \omega_j)^+ t^{i+j}. \tag{5.35}$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях в (5.33) и (5.35), мы получаем новую систему уравнений

$$\begin{aligned} D_a\Phi_k &= -\sum_{i+j=k}\omega_i * \Phi_j,\\ d_a^+(\omega_k) &= \sum_{i+j=k}(\Phi_i\otimes\overline{\Phi_j} - (\omega_i\Lambda\omega_j)^+). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Очевидно, для Φ_1 и ω_1 имеем

$$D_a\Phi_1 = 0, \qquad d_a^+(\omega_1) = 0. \tag{5.37}$$

Геометрически это означает, что

$$\Phi_1 \neq 0 \implies a \in \mathscr{M}_1(g,\omega,f,p_1) \tag{5.38}$$

и ω_1 – касательный вектор к $\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ в точке a.

Вместе с системой (5.25) для троек

$$(a,\nabla_{\det},\Phi) \in \mathscr{A}(\operatorname{ad}E)\times\mathscr{A}_\omega\times\Gamma(E\otimes W^+)$$

рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} D_a^{\nabla_{\det}}(\Phi) &= 0,\\ F_a^+ &= 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Пространство решений этой системы по модулю действия калибровочной группы $\mathscr{M}P(X,p_1(E),c+c_1(E))$ отображается проекцией пары (связность + спинор) на первую компоненту

$$f\colon \mathscr{M}P(X,p_1(E),c+c_1(E)) \to \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} \tag{5.40}$$

в пространство модулей SO(3)-инстантонов, и образом этого отображения

$$\mathscr{M}_1^{g,\omega}(c+c_1(E),p_1(E)) = f(\mathscr{M}P(X,p_1(E),c+c_1(E))) \subset \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} \tag{5.41}$$

будет пространство модулей инстантонов подскока (см. [15; 1.1.26]).

Нормальный конус подмногообразия инстантонов подскока $\mathscr{M}_1$ может быть описан следующим образом:

$$(C\mathscr{M}_1)_a = \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\ker D_a)}(-1)\otimes\operatorname{coker}D_a. \tag{5.42}$$

Мы можем рассматривать первое приближение (a,Φ_1) как точку на $\mathscr{M}_1$ (в дальнейших рассмотрениях мы будем опускать лишние индексы за редким исключением, когда это может привести к недоразумению).

Для Φ_2 мы имеем из (5.32)

$$D_a\Phi_2 = -\omega_1 * \Phi_1. \tag{5.43}$$

Чтобы получить приближение второго порядка для спинорного поля, необходимо выбрать ω_1 так, чтобы

$$\operatorname{im} D_a \cap \operatorname{im} \Psi_{\Phi_1} \neq \varnothing, \tag{5.44}$$

где Ψ_{Φ_1} – гомоморфизм,

$$\Psi_{\Phi_1} : T_a \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} \to \Gamma(E \otimes W^-), \tag{5.45}$$

при котором ω отображается на $\omega * \Phi$.

Мы можем интерпретировать касательное пространство $T_a \mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ как подмножество в пространстве всех 1-форм

$$T_a \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} = \{\omega \in \Omega_1(\operatorname{ad} E) \mid d_a^+(\omega) = 0,\ d_a^*(\omega) = 0\}. \tag{5.46}$$

Пусть a – инстантон подскока такой, что ядро D_a одномерно (общий случай) и $\Phi_1 \in \ker D_a$ (второй член фильтрации Брилля–Нётера вкладывается в $\mathscr{M}_1$ как подсхема особенностей с нормальным конусом $(C\mathscr{M}_1)_a$, описанным в (5.42)).

Тогда естественно представить касательное пространство $T_a \mathscr{M}_1$ следующим образом:

$$T_a \mathscr{M}_1 = \{\omega \in T_a \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} \mid \Psi_{\Phi_1}(\omega) \subset \operatorname{im} D_a\}. \tag{5.47}$$

В регулярной точке $\mathscr{M}_1$ нормальный конус представляется просто как

$$C_a = \operatorname{Hom}(\ker D_a, \operatorname{coker} D_a) \tag{5.48}$$

и его размерность совпадает с рангом $\operatorname{coker} D_a$. В этом случае виртуальная размерность подмногообразия инстантонов подскока равна

$$v.\dim \mathscr{M}_1 = \dim \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} - \operatorname{rk} \ker D_a \cdot \operatorname{rk} \operatorname{coker} D_a \tag{5.49}$$

и совпадает с размерностью

$$\dim T_a \mathscr{M}_1 = \dim \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} - \operatorname{rk} \operatorname{coker} D_a, \tag{5.50}$$

а ранг нормального конуса

$$\operatorname{rk} C_a = \operatorname{rk} \operatorname{coker} D_a$$

(см. [15]).

Формально необходимо различать два случая: когда $\dim \mathscr{M}_1 > 0$ и когда $\dim \mathscr{M}_{\mathrm{asd}} = \operatorname{rk} \operatorname{coker} D_a$ (жесткий инстантон подскока). Мы рассмотрим их параллельно.

5.3. Построение формального решения. Система (5.36) очень похожа на рекурсивное задание формального решения исходной системы (5.25). Эта рекурсивная система может быть разрешена, если на каждом шаге мы сможем найти прообраз для правых частей первого и второго уравнений. Мы начнем со второго. Для доказательства существования прообразов у правых частей при дополнительном условии $d_a^*(\omega_k) = 0$ заметим, что в “деформационном комплексе” (см. [6; 4.2.26]) условие антиавтодуальности связности a означает, что это настоящий комплекс и мы можем рассматривать его когомологии H_a^0, H_a^1, H_a^2, причем

$$H_a^1 \cong \ker \delta_a, \qquad H_a^2 \cong \operatorname{coker} d_a^+ \cong \ker d_a, \tag{5.51}$$

где оператор $\delta_a = d_a^* + d_a$ имеет индекс $\operatorname{ind}\delta_a = s > 0$ (см. [6; 4.2.27]). Первые когомологии H_a^1 геометрически есть просто касательное пространство форм к многообразию модулей инстантонов. В наших рассмотрениях такие формы существуют. Несложная редукция одного из утверждений теоремы 3.1 из [10] дает тривиальность ядра $\ker d_a$ при условии, что связность неприводима, и это влечет $\operatorname{coker} d_a^+ = 0$ (отметим, что в общем случае это верно и для приводимых связностей). А из нетривиальности H_a^1 следует, что мы можем выбрать ω_k, удовлетворяющее условию кулоновской калибровки $d_a^+(\omega_k) = 0$.

Очевидным образом такие формы ω_k определены с точностью до $T_a\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ – касательного пространства к многообразию модулей инстантонов.

Перейдем к рассмотрению первого уравнения системы (5.36). Как было отмечено выше, касательное пространство к подмногообразию инстантонов подскока $T_a\mathscr{M}_1 \in T_a\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$ представляется подпространством форм

$$\{\omega \subset T_a\mathscr{M}_{\mathrm{asd}} \mid \omega * \Phi_1 \subset \operatorname{im} D_a\}.$$

Выберем некоторое подпространство $N_a \subset T_a\mathscr{M}_{\mathrm{asd}}$, изоморфное слою нормального конуса C_a, так что $T_a\mathscr{M}_{\mathrm{asd}} = T_a\mathscr{M}_1 \oplus N_a$. Так же мы можем выбрать дополнение к $\operatorname{im} D_a$ в $\Gamma(E \otimes W^+)$, изоморфное $\operatorname{coker} D_a$. Обозначим его P_a.

Рассмотрим композицию двух отображений:

$$\begin{gathered} N_a \to \Gamma(E \otimes W_+) \to P_a, \\ \omega \mapsto \omega * \Phi_1 \mapsto \operatorname{pr}_{P_a}(\omega * \Phi_1). \end{gathered} \tag{5.52}$$

Это линейное отображение с нулевым ядром. В общем случае размерности $\operatorname{rk} N_a$ и $\operatorname{rk}\operatorname{coker} D_a$ совпадают, следовательно, это изоморфизм. Из всего сказанного следует

Предложение 5.1. *Для любого спинора* $\Phi^- \subset \Gamma(E \otimes W^+)$ *существует форма* $\omega \in T_aM$ *такая, что* $\omega * \Phi_1 + \Phi^- \subset \operatorname{im} D_a$.

Итак, мы можем предложить следующий индуктивный метод разрешения системы (5.36) как рекурсии. Пусть мы уже нашли (ω_i, Φ_j), $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Докажем, что существует следующая пара (ω_k, Φ_{k+1}). Действительно, в силу эпиморфности d_a^+ существует форма ω_k' такая, что

$$d_a^+(\omega_k') = -\biggl(\sum_{i+j=k} (\omega_i \wedge \omega_j)^+ + \sum_{i+j=k} \Phi_i \otimes \overline{\Phi_j}\biggr).$$

Составим следующую сумму:

$$\Phi^- = -\sum_{i+j=k+1,\, j>1} \omega_i * \Phi_j - \omega_k' * \Phi_1.$$

Применяя доказанное выше предложение 5.1, получаем существование формы ω_k'' такой, что $\Phi^- + \omega_k'' * \Phi_1 \in \operatorname{im} D_a$. Если положить теперь $\omega_k = \omega_k' - \omega_k''$, то определится и Φ_{k+1} с точностью до ядра. Поэтому будем считать, что все Φ_k, $k > 1$, дают нулевую проекцию на ядро оператора Дирака, а все формы ω_k, $k > 1$, – нулевую проекцию на $T_a\mathscr{M}_1$.

Остается проверить базу индукции. Эта проверка очевидна в случае гладкого подмногообразия инстантонов подскока. Действительно, для некоторого выбранного нами спинора Φ_1 из ядра существует форма $\omega_1 \in T_a\mathscr{M}_1$ такая, что $\omega_1 * \Phi_1 \in \operatorname{im} D_a$, следовательно, существует и Φ_2.

То же самое можно сделать в случае точечного инстантона подскока, т.е. когда $\dim \mathscr{M}_{\text{asd}} = \operatorname{rk}\operatorname{coker} D_a$ и пространство $T_a\mathscr{M}_1$ состоит из одной нулевой формы, только в качестве ω_1 надо взять эту нулевую форму. Этот случай подсказывает существование специального частного решения.

Как было указано выше, в случае точечного инстантона подскока, когда $T_a\mathscr{M}_1$ содержит только нулевую форму, мы имеем в качестве первых приближений Φ_1 – некоторый выбираемый нами спинор из ядра оператора Дирака D_a (так как ядро одномерно, то этот выбор заключается просто в выборе нормы Φ_1) и $\omega_1 = 0$. Если действовать дальше согласно введенной нами схеме разрешения рекурсии (5.36), мы получим интересное специальное формальное решение, для которого все формы с нечетными индексами $\omega_{2k+1} = 0$, все спиноры с четными $\Phi_{2k} = 0$.

Проверим сначала существование вторых и третьих приближений:

$$D_a(\Phi_2) = \omega_1 * \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi_2 = 0.$$

Форма ω_2 определяется как прообраз бесследовой компоненты

$$d_a^+(\omega_2) = -\Phi_1 \otimes \overline{\Phi_1},$$

в общем случае не равной нулю, подправленный таким образом, чтобы

$$-\omega_2 * \Phi_1 \in \operatorname{im} D_a,$$

и тогда однозначно определен спинор Φ_3. Для формы ω_3 имеем

$$d_a^+(\omega_3) = -(\omega_1 \wedge \omega_2)^+ - (\omega_2 \wedge \omega_1)^+ - \Phi_1 \otimes \overline{\Phi_2} - \Phi_2 \otimes \overline{\Phi_1} = 0$$

и поправка тоже будет нулевая, так как

$$\Phi^- = -\omega_1 * \Phi_3 - \omega_2 * \Phi_2 = 0.$$

Нетрудно видеть, что это справедливо и дальше, так как спинор с четным индексом определяется уравнением

$$D_a(\Phi_{2k}) = -\sum_{i+j=2k} \omega_i * \Phi_j$$

и в сумме, стоящей справа, все произведения равны нулю. Если i – нечетно, то $\omega_i = 0$, если же i – четно, то и j – четно и, значит, $\Phi_j = 0$. Аналогично проверяется и для ω_{2k+1} равенство нулю.

Итак, для точечного инстантона подскока формальное решение рекуррентной задачи единственно с точностью до выбора нормы спинора Φ_1 из ядра $\ker D_a$. Но и в том случае, когда $\dim \mathscr{M}_1 > 0$, мы можем решать систему (5.36), приняв за ω_1 нулевую форму, т.е. описанное выше формальное решение всегда содержится в пространстве формальных решений задачи (5.25). Мы будем называть это решение специальным решением системы (5.36).

5.4. Особенности многообразия модулей B-монополей. Для гладкости орбифолда необходима свобода действия группы на всех точках исходного факторизуемого пространства. Наоборот, особенность свидетельствует о нетривиальности стабилизатора действия группы. Для нахождения особых точек многообразия орбит по действию некоторой группы необходимо определить те точки исходного пространства, которые определяют некоторые нетривиальные подгруппы, оставляющие эти точки на месте – стабилизаторы.

В нашем случае описание особенностей многообразия модулей B-монополей требует работы с парами (a,Φ), но очевидно, что стабилизатор пары всегда меньше или равен стабилизатору отдельно взятой связности a. А для стабилизатора связности $\mathrm{St}_a \subset \mathrm{U}(2)$ имеются только три возможности: S^1, $S^1 \times S^1$, $\mathrm{U}(2)$, ну и, конечно, тривиальная подгруппа. Последняя из трех соответствует паре, состоящей из тривиального спинора и тривиальной связности.

Случай окружности распадается на два подслучая. Если в качестве $S^1 \subset \mathrm{U}(2)$ берется центр унитарной группы, то эта окружность – стабилизатор точек типа $(a,0)$, причем связность a – неприводима.

Если стабилизатор S^1 пары (a,Φ) есть другая подгруппа $\mathrm{U}(2)$ (а именно, попадающая в максимальный тор группы $\mathrm{PU}(2)$), то ей соответствуют приводимая связность $a=\lambda_1\oplus\lambda_2$ на некотором разложении расслоения $E=L_1\oplus L_2$ и спинор вида $(\Phi_1\oplus\Phi_2)$, причем $\Phi_1=0, \Phi_2\neq 0$ в соответствии с разложением расслоения E. Такие особенности – приводимые решения в случае S^1 – дают решения возмущенного уравнения абелева монополя.

И, наконец, стабилизатор $S^1\times S^1$ соответствует паре, состоящей из приводимой антиавтодуальной связности и нулевого спинора.

Многообразие модулей инстантонов некомпактно (в отличие от A-монополей), поэтому в схеме особенностей многообразия модулей B-монополей (на “хвосте”) будут лежать предельные asd-связности – идеальные или *bubbling*-инстантоны.

Значит, пространство B-монополей представляет гладкий ориентированный бордизм между пространством инстантонов и линками A-монополей. Мы не можем привести полностью рисунок этого кобордизма, потому что при всей общей наглядности он не отражает сложности учета всех стратов особенностей. Задача напоминает задачу учета всех стратов нестабильных расслоений как стратов Морса для функционала Янга–Миллса в двумерном случае (см. [2]) для расслоений большого ранга. Как и в двумерном случае, многие страты и их пересечения можно описать, но нам необходимо описание вкладов пересечений *всех* стратов, а таковое пока отсутствует. Поэтому мы не приводим ссылки на работы, содержащие промежуточные (хотя и интересные) результаты в этом направлении.

С технической точки зрения выбор соболевских норм позволяет пополнить пространство $\mathscr{B}$ и компактифицировать по Фриду–Уленбек многообразие модулей инстантонов

$$\overline{\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2,p_1)}=\bigcup_{p_1'>p_1}\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2,p_1')$$

(см. [6]). Таким образом, определен фундаментальный цикл

$$[\overline{\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2(M)+w_2(E),p_1)}]$$

многообразия модулей инстантонов.

Подмногообразия инстантонов, представляющихся в виде пределов монополей

$$\mathscr{M}_{\lim}(\omega, f) \subset \overline{\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2(E)+w_2(M), p_1)}$$

(см. (5.28)), определяют набор фундаментальных классов $[\mathscr{M}_{\lim}(\omega, f)] = [f]$. Таким образом, на многообразии $\overline{\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2(E)+w_2(M), p_1)}$ определено целое семейство фундаментальных циклов

$$[f], f \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Заметим, что согласно нашим результатам это семейство фундаментальных классов многообразий модулей инстантонов подскока, т.е. первых элементов фильтрации Брилля–Нётера (см. [15] и [21]).

В этом случае мы можем определить фундаментальный класс подмногообразия

$$[f] \subset \overline{\mathscr{M}^g_{\mathrm{asd}}(w_2(E)+w_2(M), p_1)}$$

как класс Черна индексного расслоения оператора Дирака:

$$[f] = c_{\operatorname{ind} D_a + 1}(\operatorname{IND} D_a), \qquad \operatorname{IND} D_a = \operatorname{coker} D_a - \ker D_a,$$

где $\operatorname{ind} D_a = \operatorname{rk} \operatorname{IND} D_a$ вычисляется по формуле Атья–Зингера.

Комбинация классов Черна всех страт и дает возможность вычислить классы Зайберга–Виттена в терминах классов Кронхеймера–Мровки и обратно. Однако подчеркнем еще раз, полное описание комбинаторики стратов и их пересечений пока что не представлено.

§ 6. Дополнение: гладкости и узлы

Теперь уже ни для кого не секрет, что и классические инварианты Дональдсона и Зайберга–Виттена слишком слабы для успешной классификации 4-многообразий. Однако с их помощью можно различать результаты хирургических операций, сохраняющих топологическую структуру и меняющих гладкую.

Предположим, 4-многообразие X содержит гладкий 2-тор T^2 с индексом самопересечения 0. Это означает, что достаточно малую трубчатую окрестность этого тора мы можем отождествить с $T^2 \times D^2$. Пару

$$T^2 \times D^2 \subset X \tag{6.1}$$

назовем элементарным флагом.

Два элементарных флага $T^2 \times D^2 \subset X_1$ и $T^2 \times D^2 \subset X_2$ мы можем склеить вдоль $T^2 \times D^2$, сохраняя проекцию на D^2. Результат

$$X_1 \#_{T^2} X_2 \tag{6.2}$$

называется расслоенной связной суммой вдоль $T^2 \times D^2$. (Заметим, что эта конструкция в общем случае не однозначно определяет изотопический тип склейки. Годится любой из них.) Если X_i были симплектические (или комплексные) многообразия, а T^2 – симплектический (комплексный) тор, то расслоенная связная сумма может быть снабжена симплектической (комплексной) структурой (конечно, не однозначно).

Например, результат $E(1)$ раздутия девяти базисных точек пучка кривых третьей степени на $\mathbb{CP}^2$ обладает структурой пучка эллиптических кривых $\pi\colon E(1) \to \mathbb{CP}^1$. Выбор малой окрестности $T^2 \times D^2$ любого гладкого слоя этого пучка определяет элементарный флаг, и расслоенная связная сумма двух экземпляров такого флага дает 4-многообразие

$$E(2) = E(1) \#_{T^2} E(1). \tag{6.3}$$

Нетрудно видеть, что $E(2)$ – подлежащее гладкое многообразие поверхности типа K3 (с выбранным эллиптическим пучком).

Итерируя эту операцию, мы получаем серию односвязных 4-многообразий $E(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, – подлежащих гладких структур поверхностей с эллиптическим пучком с сечением и каноническим классом

$$K_{E(n)} = (n-2)[T^2] \in H^2(E(n), \mathbb{Z}).$$

(Такие операции – копия получения конструктивных многообразий Калаби–Яо в [23].)

Более изящная конструкция: пусть $K \subset S^3$ – произвольный узел в трехмерной сфере и M_K – трехмерное многообразие, получающееся оснащенной хирургической операцией на K из S^3. (Мы просто вырезаем трубчатую окрестность узла, применяем к ее границе – 2-тору – скручивание Дена вдоль меридиана трубки и его результат вклеиваем обратно.) Сам узел определяет окружность $S^1_K \subset M_K$. В 4-многообразии $S^1 \times M_K$ выделен 2-тор $T^2_K = S^1 \times S^1_K$, окрестность которого можно отождествить с $T^2_K \times D^2$ и получить элементарный флаг

$$T^2_K \times D^2 \subset S^1 \times M_K. \tag{6.4}$$

Если $T^2 \times D^2 \subset X$– любой другой элементарный флаг, то расслоенная связная сумма

$$X_K = X \#_{T^2 = T^2_k} S^1 \times M_K \tag{6.5}$$

дает нам новое 4-многообразие.

Очевидно, что 4-многообразие $S^1 \times (S^3 \setminus K)$ имеет те же гомологии, что и трубчатая окрестность $T^2 \times D^2$ тора T^2 в X. С другой стороны, склейка сохраняет проекцию на D^2 и, значит,

$$H^2(X_K, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad q_{X_K} = q_X. \tag{6.6}$$

Предположим теперь, что

$$\pi_1(X \setminus T^2) = 1. \tag{6.7}$$

Тогда и многообразие X_K односвязно и гомеоморфно X (см. [8]).

Однако полином Зайберга–Виттена (4.52) различает их гладкости:

Теорема 6.1. *Если элементарный флаг $T^2 \times D^2 \subset X$ удовлетворяет условию* (6.7) *и $b^+(X) > 1$, то*

$$SW_{X_K} = SW_X \cdot \Delta_K(t), \tag{6.8}$$

где $t = \exp(2[T^2])$, а $\Delta_K(t)$ – полином Александера узла K.

Доказательство этого замечательного равенства использует скейн-соотношения для полиномов Александера (см. [8]) и теорию Зайберга–Виттена для 3-многообразий. (В этом случае уравнение то же, только спинорное расслоение одно.) Было замечено (Менг, Таубс, Тураев), что SW-инварианты в трехмерном случае напрямую связаны с кручением Милнора.

Теперь в качестве стартового многообразия удобно взять поверхность K3 $= E(2)$ с единицей в качестве полинома Зайберга–Виттена (см. (4.52)). Тогда для любого узла K

$$SW_{E(2)_K} = \Delta_K(t), \qquad t = \exp(2T^2), \tag{6.9}$$

где T^2 – слой эллиптического пучка.

Если K-расслоенный узел, то многообразие $S^1 \times M_K$ – расслоение над 2-тором и

1) несет симплектическую структуру;
2) тор T_K^2 – симплектическое подмногообразие и
3) полином $\Delta_K(t)$ унимодулярный.

Если же $\Delta_K(t)$ не унимодулярный, то X_K гомеоморфно K3-поверхности, но не несет никакой симплектической структуры. (Выбирая разные узлы, мы получаем бесконечное число таких многообразий.)

Используя узлы с одинаковыми полиномами Александера, но разного рода, можно попытаться построить односвязные 4-многообразия, гомеоморфные K3-поверхности, с одинаковыми SW-инвариантами, как это удалось сделать для неодносвязных 4-многообразий. Живет правдоподобная гипотеза:

$$E(2)_K \text{ и } E(2)_{K'} \text{ диффеоморфны } \implies K \text{ и } K' \text{ эквивалентны.} \tag{6.10}$$

Используя более сложные перестройки (например, линки вместо узлов или узлы большого рода), можно расширить число экзотических структур и улучшить их качество (например, Финташель и Стерн построили не симплектическую, экзотическую K3-поверхность только с одним фундаментальным классом).

Приведенные результаты и конструкции, казалось бы, приводят нас к выводу, что инварианты, доставляемые калибровочными теориями, такие, как популярные ныне KM_X и SW_X, слишком слабы для гладкой классификации 4-многообразий. Чтобы оспорить такой пессимистический взгляд, проведем историческую параллель: когда Ликориш построил две гомологичесие 3-сферы с одинаковыми когомологиями Флоера, Майкл Атья заметил, что результат касается только SU(2)-когомологий. Имеются еще SU(3), SU(4) и т. д. Мы не поленились описать в нашем обзоре неабелевы монополи (см. § 5), открывающие бесконечную серию "неклассических" инвариантов, доставляемых все теми же калибровочными теориями. Дело – за технической разработкой этих более сложных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Ambjørn Quantization of Geometry, Lect. given at Les Houches, Nato Adv. Sci. Inst. Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory, Session LXII, 1994.
[2] M. F. Atiyah, R. Bott The Yang–Mills equations over Riemann surfaces // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1982. V. 308. №1505. P. 523–615.
[3] П. А. М. Дирак Принципы квантовой механики. М.: Мир, 1960.
[4] S. Donaldson Symplectic submanifolds and almost-complex geometry // J. Differential Geom. 1996. V. 44. P. 666–705.
[5] S. Donaldson Lefschetz fibrations in symplectic geometry // Doc. Math. J. DMV. Extra Volume ICM Berlin. 1998. V. II. P. 309–314.

[6] S. Donaldson, P. Kronheimer The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990.

[7] R. Donagi, E. Witten Supersymmetric Yang–Mills theory and integrable systems // Nuclear Phys. B. 1996. V. 460. №2. P. 299–334; hep-th/9510101.

[8] R. Fintushel, R. Stern Knots, links, and 4-manifolds // Invent. Math. 1998. V. 134. №2. P. 363–400.

[9] R. Fintushel, R. Stern Constructions of smooth 4-manifolds // Doc. Math. J. DMV. Extra Volume ICM Berlin. 1998. V. II. P. 1–10; math.GT/9907178.

[10] Д. Фрид, К. Уленбек Инстантоны и четырехмерные многообразия. М.: Мир, 1988.

[11] M.H. Freedman, F. Luo Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology. Marker lectures in the mathematical sciences held at the Pennsylvania State University, 1987. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989.

[12] Б. Карпов S-двойственность и исключительные расслоения // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №1. С. 107–122.

[13] P.W. Kronheimer, T.S. Mrowka The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 797–808.

[14] S. Mukai On moduli spaces of bundles on K3 surfaces. II // Vector Bundles on Algebraic Varieties. Bombay colloquium. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984. P. 341–414.

[15] В. Пидстригач, А. Тюрин Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. №2. С. 279–371.

[16] V. Pidstrigach, A. Tyurin Localisation of the Donaldson's Invariants along Seiberg–Witten Classes // Preprint. Bielefeld: Bielefeld University, 1995.

[17] D. Salamon Spin geometry and Seiberg–Witten invariants // Preprint. Warwick: University of Warwick, 1995.

[18] N. Seiberg, E. Witten Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory // Nuclear Phys. B. 1994. V. 426. №1. P. 19–52; hep-th/9407087; Corrigendum ibid. V. 430. №2. P. 485–486.

[19] C.H. Taubes The Seiberg–Witten invariants and symplectic forms // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. №6. P. 809–822.

[20] C.H. Taubes More constraints on symplectic forms from Seiberg–Witten invariants // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. №1. P. 9–13.

[21] А.Н. Тюрин Спин-полиномиальные инварианты гладких структур на алгебраических поверхностях // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №2. С. 125–164.

[22] А.Н. Тюрин Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона // УМН. 1989. Т. 44. №3. С. 93–143.

[23] А.Н. Тюрин Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQP и зеркальная симметрия) // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №2. С. 141–224.

[24] Н.А. Тюрин Необходимое и достаточное условия деформации B-монополя в инстантон // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №1. С. 211–224.

[25] C. Vafa, E. Witten A strong coupling test of S-duality // Nuclear Phys. B. 1994. V. 431. №1–2. P. 3–77; hep-th/9408169.

[26] E. Witten Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 769–796.

[27] E. Witten Duality in supersymmetric gauge theories. Notes from E. Witten's lectures, Santa Cruz, 1995.

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Поступила в редакцию
11.09.2001